

# Segmentación de imágenes

## Método del conjunto de nivel

Felipe Urrutia, Daniel Minaya, Sebastián Toloza

Departamento de Ingeniería Matemática,  
Universidad de Chile

MA5307-1 - Otoño 2022

# Contenidos

## 1 Introducción

- Motivación
- Propuesta del proyecto
- Marco teórico
- EDP
- Diferencias finitas

## 2 Resultados

- Imágenes básicas
- Imágenes complicadas
- Interludio
- Imágenes reales

## 3 Conclusiones

# Contenidos

## 1 Introducción

- Motivación
- Propuesta del proyecto
- Marco teórico
- EDP
- Diferencias finitas

## 2 Resultados

- Imágenes básicas
- Imágenes complicadas
- Interludio
- Imágenes reales

## 3 Conclusiones

# Motivación

Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

Conclusiones

Referencias



**Figura:** Uso de la segmentación de imágenes en vías públicas. (CNN)  
(Fuente: [towardsdatascience](#), accedido Junio, 12)

# Motivación

Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

Conclusiones

Referencias

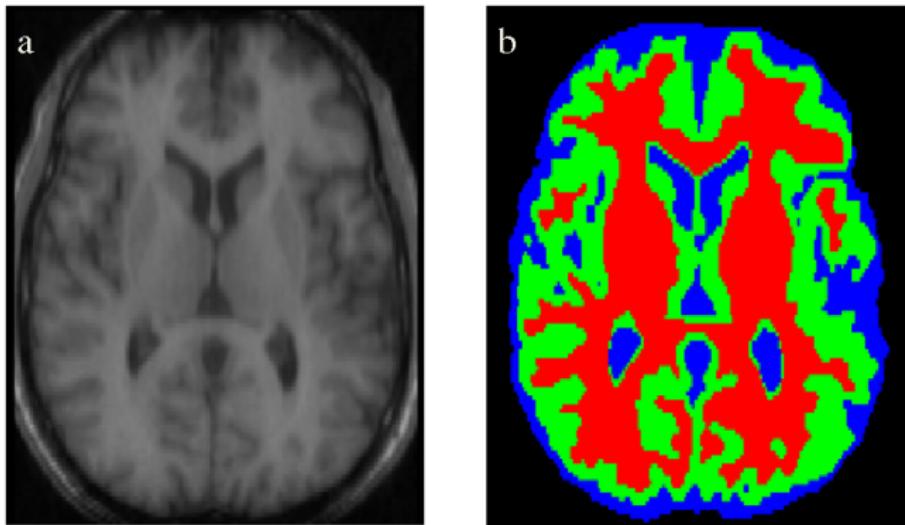
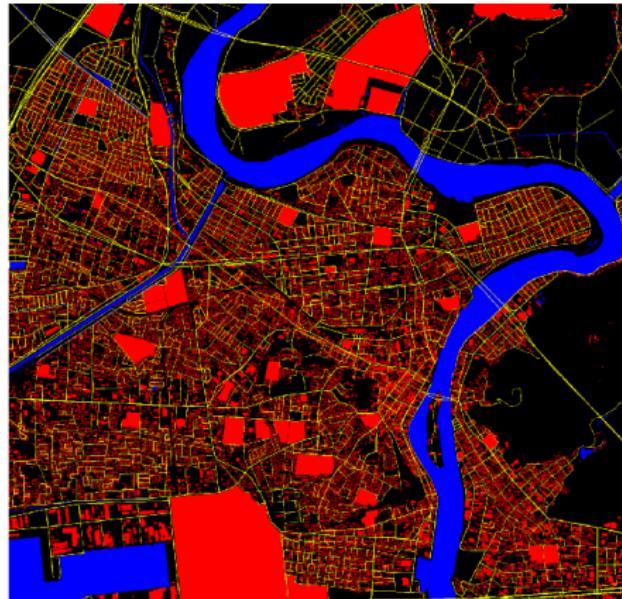


Figura: Uso de la segmentación de imágenes en imágenes médicas.  
(Fuente: IJBEM, accedido Junio, 12)

# Motivación



**Figura:** Uso de la segmentación de imágenes en imágenes satelitales.  
(Fuente: Yoshihara et al., 2018, accedido Junio, 12)

# Propuesta del proyecto

## Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

## Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

## Conclusiones

## Referencias

En este proyecto se busca aplicar el método de segmentación de imágenes en niveles de gris a través de una EDP, haciendo uso del método de conjuntos de nivel, es decir:

- 1 Se elije una curva inicial  $C_0$  alrededor del objeto que queramos segmentar.
- 2 Se resuelve de forma numérica una EDP que evolucione esta curva, hasta que logre *envolver* el contorno del objeto.

# Marco teórico

## Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

## Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

## Conclusiones

## Referencias

Se considera una interfaz descrita por una curva simple cerrada  $\Gamma$ , la cual separa un dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  en dos sub-dominios distintos de áreas no nulas,  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$ , de fronteras respectivas  $\partial\Omega^+$ ,  $\partial\Omega^-$ , tales que:

$$\Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Gamma = \Omega, \quad \Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset, \quad \Gamma = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-$$

# Marco teórico

Introducción  
Motivación  
Propuesta del  
proyecto  
Marco teórico  
EDP  
Diferencias finitas

Resultados  
Imágenes básicas  
Imágenes complicadas  
Interludio  
Imágenes reales  
Conclusiones  
Referencias

Una forma práctica de describir tanto la interfaz como los sub-dominios es mediante la definición de una función implícita  $u(x)$  tal que:

$$\Omega^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid u(x) > 0\}$$

$$\Omega^- = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid u(x) < 0\}$$

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid u(x) = 0\}$$

# Marco teórico

Introducción  
Motivación  
Propuesta del proyecto  
**Marco teórico**  
EDP  
Diferencias finitas

Resultados  
Imágenes básicas  
Imágenes complicadas  
Interludio  
Imágenes reales

Conclusiones  
Referencias

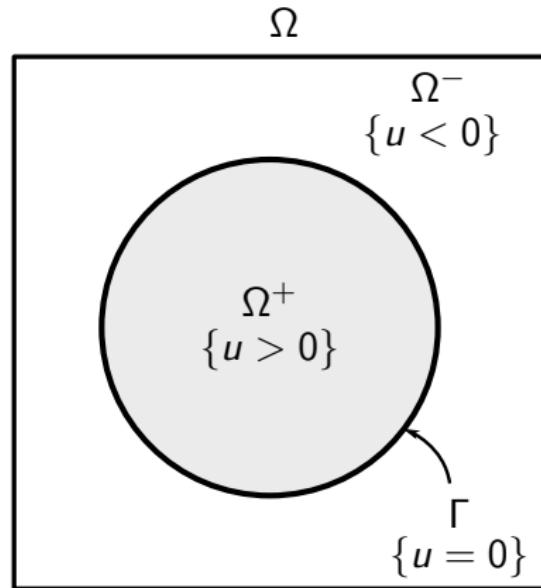


Figura: Ejemplo de la interfaz y sub-dominios.

# Marco teórico

## Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

## Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

## Conclusiones

## Referencias

En el caso general, tenemos la ecuación del flujo por curvatura media

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \left( \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty)$$

# Segmentación de Imágenes: EDP

Dada una curva inicial  $C_0$ , la ecuación que se busca resolver para  $u(x, t)$  es

$$(EDP) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g(x)|\nabla u| \left( \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \kappa \right) & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

donde  $u_0(x)$  es una función distancia con signo, dada por

$$u_0(x) = \begin{cases} d(x, C_0) & \text{si } x \text{ está \textbf{dentro} de } C_0 \\ 0 & \text{si } x \text{ está \textbf{en} } C_0 \\ -d(x, C_0) & \text{si } x \text{ está \textbf{fuera} de } C_0 \end{cases}$$

# Segmentación de Imágenes: EDP

$g$  es una *stopping function*, dada por

$$g(x) = \frac{1}{1 + |\nabla f_\sigma(x)|^2 / \lambda^2},$$

donde  $f_\sigma$  corresponde a la suavización de la imagen a partir de un kernel gaussiano de desviación estándar  $\sigma$  y  $\lambda$  es un factor de contraste.

$\kappa$  es un término constante de fuerza comparable a la fuerza de un globo.

El término  $\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$  hace referencia a la curvatura media de la interfaz.

# Esquema numérico

## Diferencias Finitas [1]

$$(I - \tau A(u^n)) u^{n+1} = u^n + \kappa \tau |\nabla^- u|^n g,$$

donde los coeficientes de  $A$  vienen dados por

$$A_{ij}(u^n) := \begin{cases} g_i |\nabla u|_i^n \left( \frac{2}{|\nabla u|_i^n + |\nabla u|_j^n} \right) & j \in N(i) \\ -g_i |\nabla u|_i^n \sum_{m \in N(i)} \left( \frac{2}{|\nabla u|_i^n + |\nabla u|_m^n} \right) & j = i \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

# Esquema numérico

Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

Conclusiones

Referencias

Las aproximaciones de  $|\nabla u|$  vienen dadas según los siguientes casos:

- 1 Si  $\kappa \leq 0$ , entonces  $|\nabla u|_i^n \approx |\nabla^- u|_i^n$ , que viene dado por

$$|\nabla^- u|_i^n = (\max(D^{-x} u_i^n, 0)^2 + \min(D^{+x} u_i^n, 0)^2 + \max(D^{-y} u_i^n, 0)^2 + \min(D^{+y} u_i^n, 0)^2)^{1/2}$$

- 2 Si  $\kappa > 0$ , entonces  $|\nabla u|_i^n \approx |\nabla^+ u|_i^n$ , que viene dado por

$$|\nabla^+ u|_i^n = (\min(D^{-x} u_i^n, 0)^2 + \max(D^{+x} u_i^n, 0)^2 + \min(D^{-y} u_i^n, 0)^2 + \max(D^{+y} u_i^n, 0)^2)^{1/2}$$

# Contenidos

## 1 Introducción

- Motivación
- Propuesta del proyecto
- Marco teórico
- EDP
- Diferencias finitas

## 2 Resultados

- Imágenes básicas
- Imágenes complicadas
- Interludio
- Imágenes reales

## 3 Conclusiones

# Resultados

## Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

## Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

## Conclusiones

## Referencias

Presentaremos tres tipos de imágenes

- *Imágenes básicas*
- *Imágenes que presentaron complicaciones*
- *Imágenes reales*

# Algunas imágenes a estudiar

Introducción  
Motivación  
Propuesta del proyecto  
Marco teórico  
EDP  
Diferencias finitas

Resultados  
Imágenes básicas  
Imágenes complicadas  
Interludio  
Imágenes reales  
Conclusiones  
Referencias

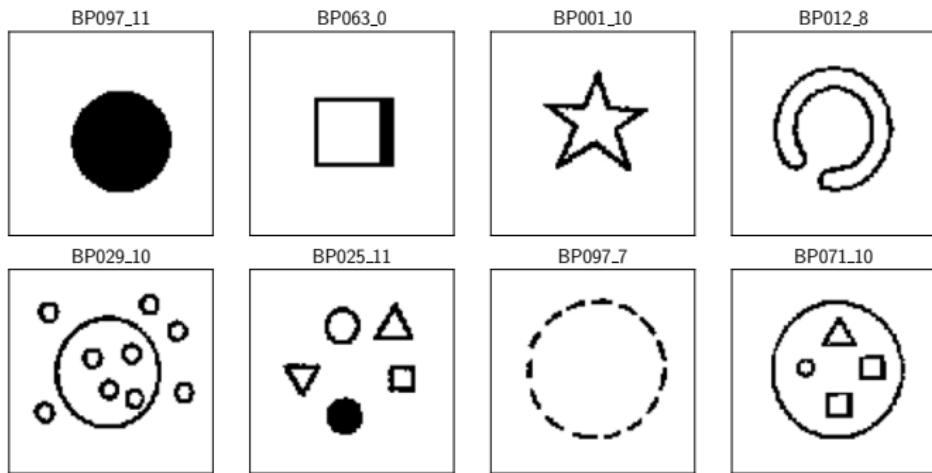


Figura: Estudio del conjunto de imágenes de los *Problemas de Bongard* [3].

# Primeros resultados: Imágenes básicas

## Discretización temporal $\tau$

### Introducción

- Motivación
- Propuesta del proyecto
- Marco teórico
- EDP
- Diferencias finitas

### Resultados

- Imágenes básicas
- Imágenes complicadas
- Interludio
- Imágenes reales

### Conclusiones

### Referencias

# Círculo

Introducción  
Motivación  
Propuesta del proyecto  
Marco teórico  
EDP  
Diferencias finitas

Resultados  
Imágenes básicas  
Imágenes complicadas  
Interludio  
Imágenes reales

Conclusiones  
Referencias

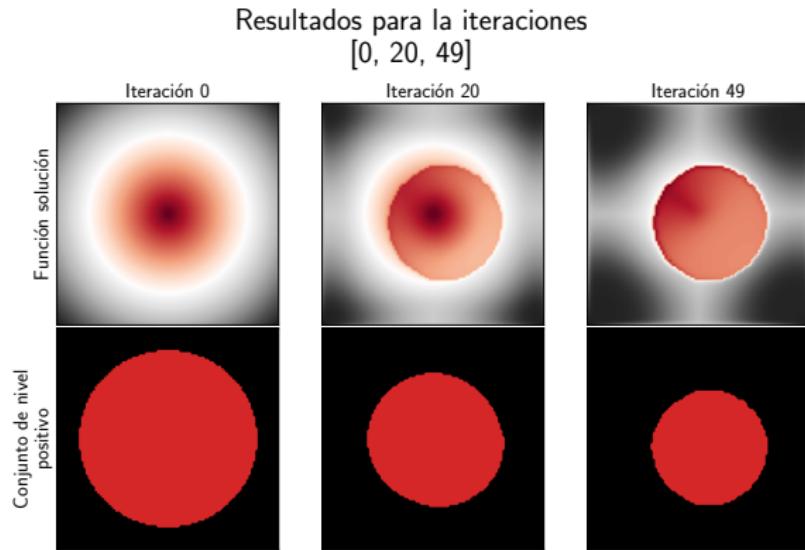


Figura: Imagen BP097\_11, sigma=0.05, lambda=8, centro=(0.5, 0.5), radio=0.2, tau=0.1, k=-5.

# Cuadrado

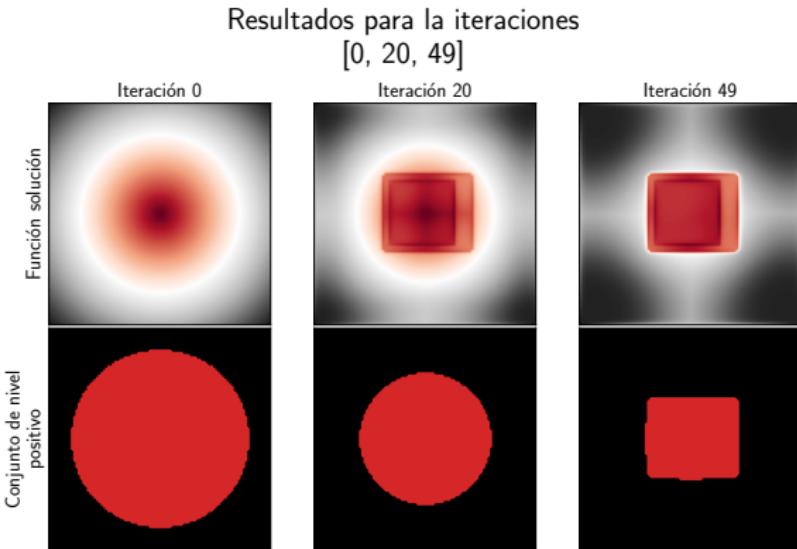


Figura: Imagen BP063\_0, sigma=0.05, lambda=8, centro=(0.5, 0.5), radio=0.2, tau=0.1, k=-5.

# Estrella

Introducción  
Motivación  
Propuesta del proyecto  
Marco teórico  
EDP  
Diferencias finitas

Resultados  
Imagenes básicas  
Imagenes complicadas  
Interludio  
Imagenes reales  
Conclusiones  
Referencias

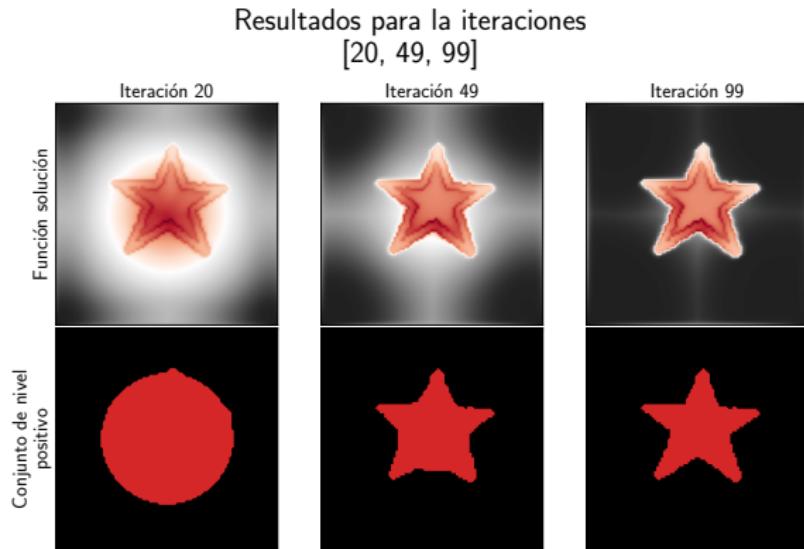


Figura: Imagen BP001\_10, sigma=0.05, lambda=8, centro=(0.5, 0.5), radio=0.2, tau=0.1, k=-5.

# Herradura

Introducción  
Motivación  
Propuesta del proyecto  
Marco teórico  
EDP  
Diferencias finitas

Resultados  
Imagenes básicas  
Imagenes complicadas  
Interludio  
Imagenes reales  
Conclusiones  
Referencias

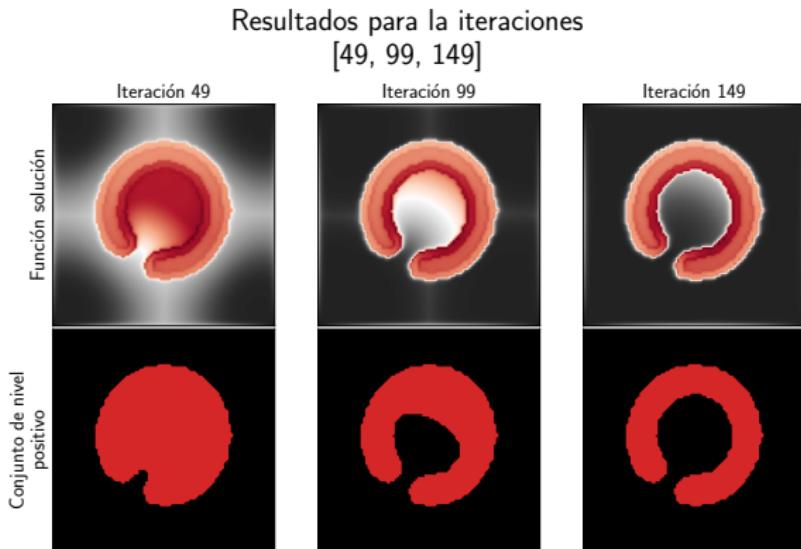


Figura: Imagen BP012\_8, sigma=0.05, lambda=8, centro=(0.5, 0.5), radio=0.2, tau=0.1, k=-5.

# Colección de círculos

Introducción  
Motivación  
Propuesta del proyecto  
Marco teórico  
EDP  
Diferencias finitas

Resultados  
Imagenes básicas  
Imágenes complicadas  
Interludio  
Imagenes reales  
Conclusiones  
Referencias

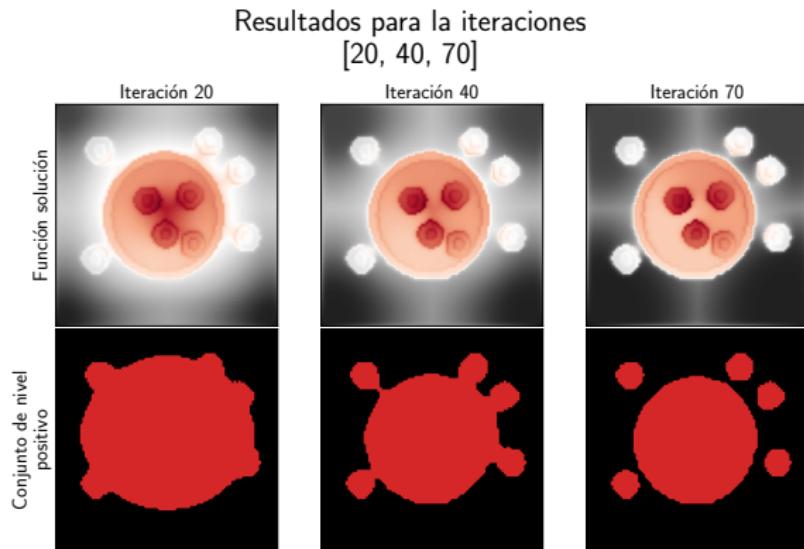


Figura: Imagen BP025\_11, sigma=0.05, lambda=8, centro=(0.5, 0.46), radio=0.2, tau=0.1, k=-5.

# Colección de figuras

Introducción  
Motivación  
Propuesta del proyecto  
Marco teórico  
EDP  
Diferencias finitas

Resultados  
Imagenes básicas  
Imagenes complicadas  
Interludio  
Imagenes reales

Conclusiones  
Referencias

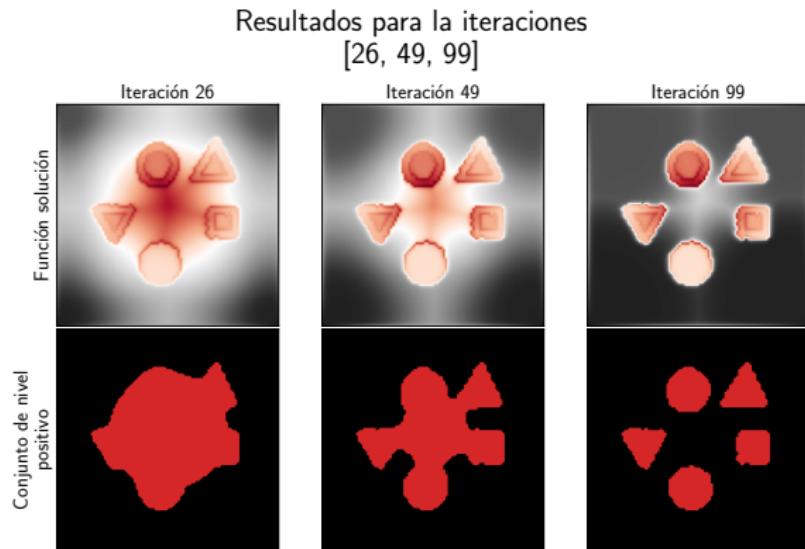


Figura: Imagen BP025\_11, sigma=0.05, lambda=8, centro=(0.5, 0.46), radio=0.2, tau=0.1, k=-5.

# Círculo punteado

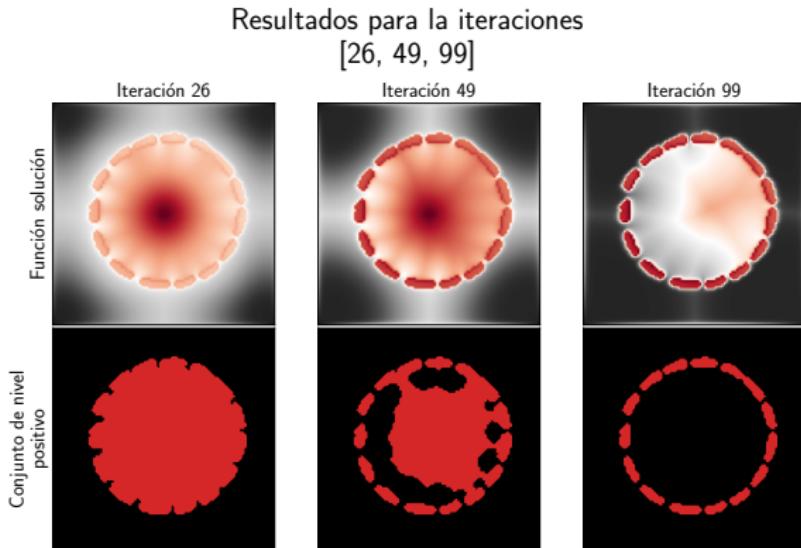
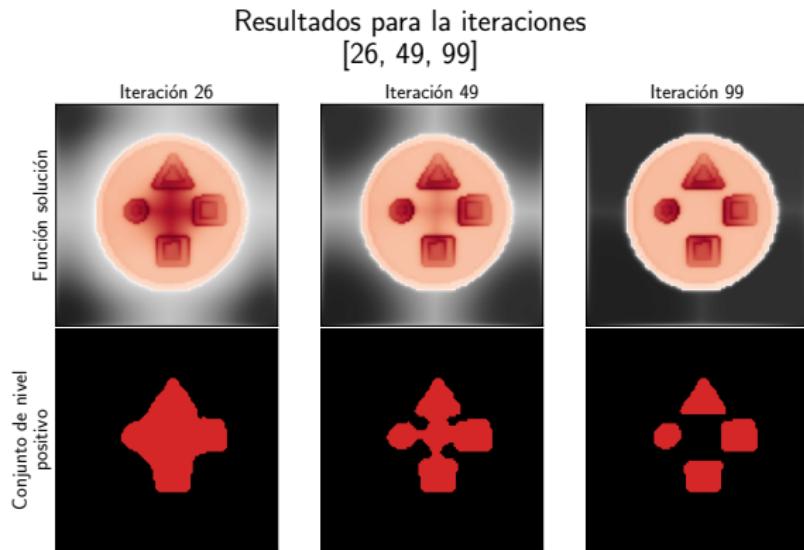


Figura: Imagen BP097\_7, sigma=0.05, lambda=8, centro=(0.5, 0.5), radio=0.2, tau=0.1, k=-5.

# Algunas figuras

<b>Introducción</b>
Motivación
Propuesta del proyecto
Marco teórico
EDP
Diferencias finitas
<b>Resultados</b>
Imagenes básicas
<b>Imagenes complicadas</b>
Interludio
Imagenes reales
<b>Conclusiones</b>
Referencias



**Figura:** Imagen BP071\_10,  $\sigma=0.05$ ,  $\lambda=8$ , centro= $(0.51, 0.49)$ , radio=0.14,  $\tau=0.1$ ,  $k=-5$ .

# Códigos

Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

Conclusiones

Referencias

## Repositorio en GitHub

[edpn-computer-vision-2022](#)

*GitHub repository, 6, 2022*

[URL: furrutiav/edpn-computer-vision-2022](#)

# Estudio de parámetros

Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

Conclusiones

Referencias

## Comportamiento de parámetros $\sigma$ y $\lambda$

Ambos son parámetros para procesar la imagen, antes de utilizar el método de segmentación.

- $\sigma$ : Controla el desenfoque gaussiano,
- $\lambda$ : Acentúa los gradientes de la imagen.

# Experimentos

## Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

## Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

## Conclusiones

## Referencias

En los siguientes experimentos se fijarán tanto  $\tau$  como  $\kappa$ , para valores 0,1 y -5, respectivamente. Se estudiará:

- 1 Factor de contraste  $\lambda$  grande**
- 2 Factor de contraste  $\lambda$  pequeño**
- 3 Desenfoque con  $\sigma$  grande**

# Experimentos

Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

Conclusiones

Referencias

## Variables de control

- $\sigma = 0,01$
- $\lambda = 5$

## Variables de prueba

- 1  $\lambda = 15$
- 2  $\lambda = 1$
- 3  $\sigma = 1$

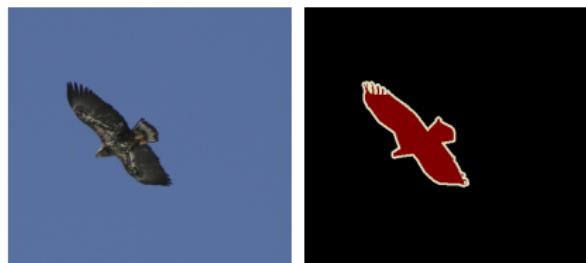


Figura: Imagen 2009\_001314 del conjunto de datos *PASCAL VOC2012*.

# Conjunto de imágenes reales

Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

Conclusiones

Referencias

## PASCAL VOC2012 [4]

Conjunto de datos de prueba para la tarea de segmentación de imágenes.



Figura: Imagen 2009\_005078 del conjunto de datos *PASCAL VOC2012*.

# Conjunto de imágenes reales

## Métricas [2]

$$\text{Precision}(\Omega_{\text{EDP}}, +) = \frac{|\Omega_{\text{EDP}}^+ \cap \Omega_{\text{target}}^+|}{|\Omega_{\text{EDP}}^+|}$$

$$\text{Recall}(\Omega_{\text{EDP}}, +) = \frac{|\Omega_{\text{EDP}}^+ \cap \Omega_{\text{target}}^+|}{|\Omega_{\text{target}}^+|}$$

$$\text{F1-score}(\Omega_{\text{EDP}}, +) = \frac{2}{\frac{1}{\text{Precision}(\Omega_{\text{EDP}}, +)} + \frac{1}{\text{Recall}(\Omega_{\text{EDP}}, +)}}$$

# Resultados

## Factor de contraste $\lambda$ grande

### Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

### Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

**Imágenes reales**

### Conclusiones

### Referencias

# Resultados

## Factor de contraste $\lambda$ pequeño

### Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

### Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

**Imágenes reales**

### Conclusiones

### Referencias

# Resultados

## Desenfoque con $\sigma$ grande

### Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

### Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

**Imágenes reales**

### Conclusiones

### Referencias

# Pájaro

## Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

## Resultados

Imágenes básicas

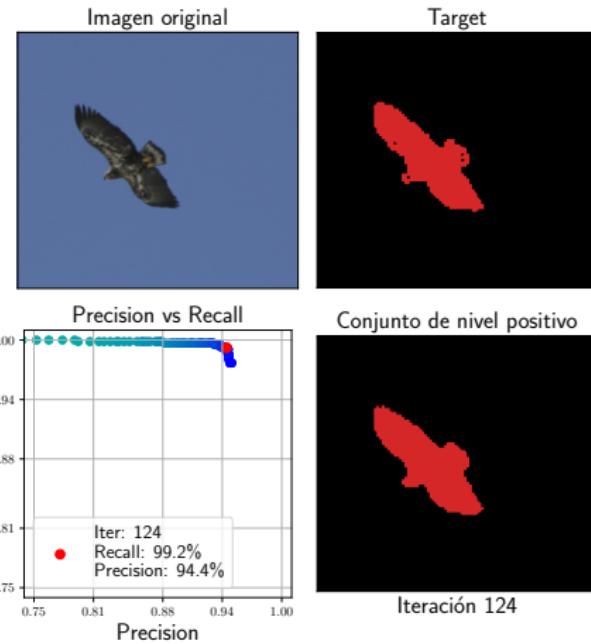
Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

## Conclusiones

## Referencias



**Figura:** Imagen 2009\_001314, sigma=0.01, lambda=5, centro=(0.4, 0.5), radio=0.18, tau=0.1, k=-5.

# Cordero

Introducción  
Motivación  
Propuesta del proyecto  
Marco teórico  
EDP  
Diferencias finitas

Resultados  
Imágenes básicas  
Imágenes complicadas  
Interludio  
**Imágenes reales**  
Conclusiones  
Referencias

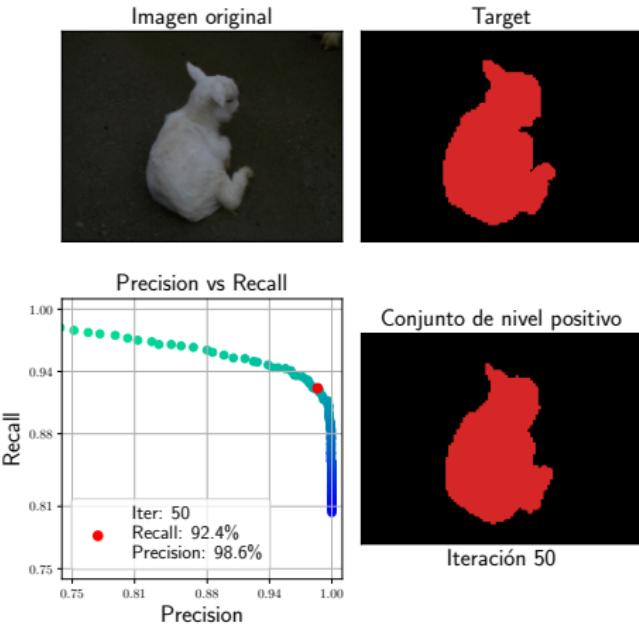


Figura: Imagen 2008\_004621, sigma=0.5, lambda=5, centro=(0.5, 0.53), radio=0.18, tau=0.1, k=-5.

# Avión

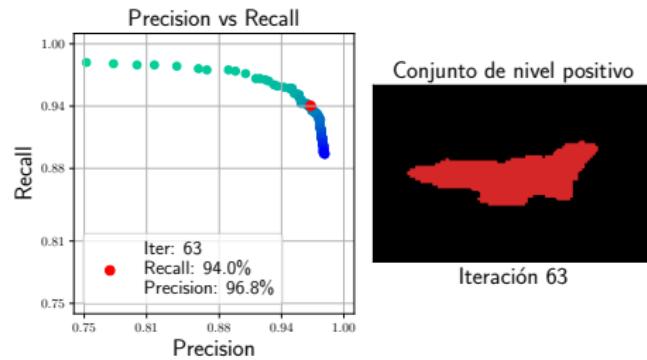
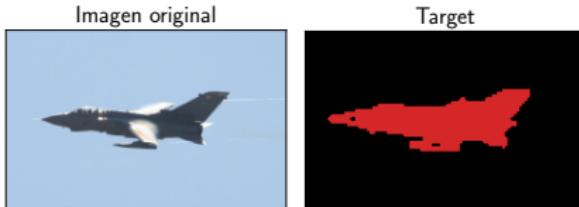


Figura: Imagen 2007\_004052, sigma=0.01, lambda=5, centro=(0.5, 0.5), radio=0.14, excentricidad=1.8, tau=0.1, k=-5.

# Moto

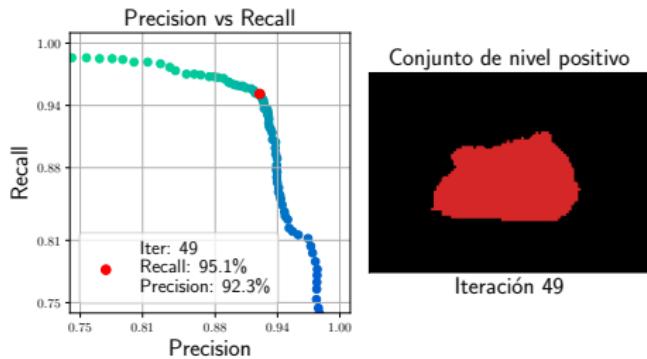
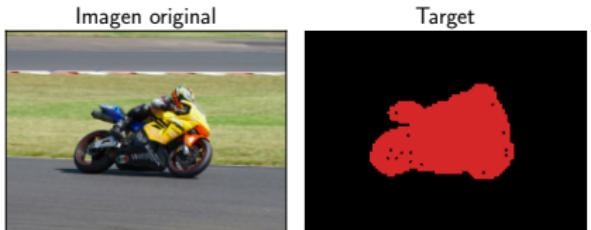


Figura: Imagen 2009\_005078, sigma=0.01, lambda=10, centro=(0.5, 0.54), radio=0.14, excentricidad=1.5, tau=0.1, k=-5.

# Persona

## Introducción

Motivación  
Propuesta del proyecto  
Marco teórico  
EDP  
Diferencias finitas

## Resultados

Imágenes básicas  
Imágenes complicadas  
Interludio  
**Imágenes reales**

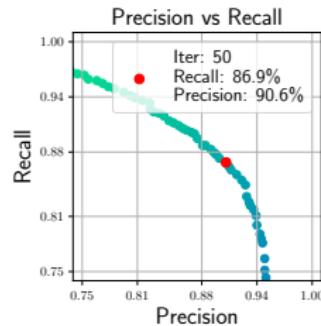
## Conclusiones

## Referencias

Imagen original



Target



Conjunto de nivel positivo  
Iteración 50



**Figura:** Imagen 2008\_002247, sigma=0.05, lambda=10, centro=(0.4, 0.62), radio=0.23, excentricidad=0.57, tau=0.1, k=-5.

# Contenidos

## 1 Introducción

- Motivación
- Propuesta del proyecto
- Marco teórico
- EDP
- Diferencias finitas

## 2 Resultados

- Imágenes básicas
- Imágenes complicadas
- Interludio
- Imágenes reales

## 3 Conclusiones

# Limitaciones del método

- Imágenes con ruido de fondo
- Imágenes con poco contraste
- Segmentos que no quedan definidos por el gradiente de las intensidades
- Segmentos ambiguos
- Aplicable solo a imágenes en escala de grises



Figura: Imagen 2010\_001061 del conjunto de datos *PASCAL VOC2012*.

# Ventajas del método

- Modelo no necesita ser entrenado
- EDP otorga interpretabilidad del proceso
- La elección de la curva inicial  $C_0$  da libertades para segmentar objetos particulares de la imagen según su posición

## Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

## Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

## Conclusiones

## Referencias

# Desventajas del método

## Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

## Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

## Conclusiones

## Referencias

- Requiere que el área a segmentar sea simplemente conexa
- Elección de parámetros  $\sigma, \lambda$ , dependiente de la imagen
- Su desempeño no es competitivo contra modelos neuronales [2]

# Referencias I

Introducción
Motivación
Propuesta del proyecto
Marco teórico
EDP
Diferencias finitas
Resultados
Imágenes básicas
Imágenes complicadas
Interludio
Imágenes reales
Conclusiones
Referencias



Weickert, J., Kühne, G.

Fast methods for implicit active contour models

*In Geometric level set methods in imaging, vision, and graphics (pp. 43-57). Springer, New York, NY; 2003.*

DOI: [10.1007/0-387-21810-6\\_3](https://doi.org/10.1007/0-387-21810-6_3)



Minaee, S., Boykov, Y. Y., Porikli, F., Plaza, A. J., Kehtarnavaz, N., Terzopoulos, D.

Image segmentation using deep learning: A survey

*IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 2021.*

DOI: [10.1109/TPAMI.2021.3059968](https://doi.org/10.1109/TPAMI.2021.3059968)

# Referencias II

Introducción  
Motivación  
Propuesta del proyecto  
Marco teórico  
EDP  
Diferencias finitas

Resultados  
Imágenes básicas  
Imágenes complicadas  
Interludio  
Imágenes reales

Conclusiones  
Referencias



Bongard, M. M.

Pattern Recognition

*Rochelle Park, N.J.: Hayden Book Co., Spartan Books.*

*(Original publication: Nauka Press, Moscow, 1967)*

PDF



Everingham, M., VanGool, L., Williams, C. K. I., Winn, J., Zisserman, A.

The PASCAL Visual Object Classes Challenge 2012  
(VOC2012) Results

URL: [http://www.pascal-](http://www.pascal-network.org/challenges/VOC/voc2012/workshop/index.html)

[network.org/challenges/VOC/voc2012/workshop/index.html](http://www.pascal-network.org/challenges/VOC/voc2012/workshop/index.html)

# Referencias III

## Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

## Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

## Conclusiones

## Referencias



Urrutia, F., Minaya, D., Toloza, S.

edpn-computer-vision-2022

*GitHub repository, 6, 2022*

URL: [furrutiav/edpn-computer-vision-2022](https://github.com/furrutiav/edpn-computer-vision-2022)

## Introducción

Motivación

Propuesta del  
proyecto

Marco teórico

EDP

Diferencias finitas

## Resultados

Imágenes básicas

Imágenes  
complicadas

Interludio

Imágenes reales

## Conclusiones

## Referencias

**¡Gracias por su atención!**