Sistem Persamaan Aljabar Linear dan Eliminasi Gauss

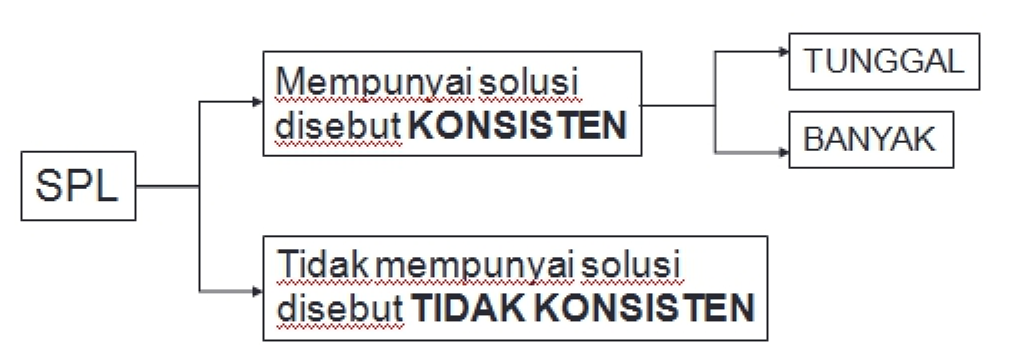
Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear yang dibangun/dibentuk dari beberapa variabel yang tidak diketahui. Sistem persamaan aljabar linear simultan, secara umum dapat dinyatakan sebagai:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n
\end{aligned}
$$

dimana : a adalah koefisien konstanta dan c adalah konstanta

Jika n berukuran kecil $(n \le 3)$, persamaan dapat diselesaikan dengan menggunakan metode grafik, metoda Cramer serta cara substitusi sederhana.

Permasalahan mulai muncul jika n berukuran besar, misal 250. Sulit untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan yang besar, jika hanya mengandalkan cara manual. Disinilah peranan computer sangat diperlukan. Berikut ini akan dibahas beberapa eliminasi Gauss, yakni Gauss Naif, Gauss Jordan dan Gauss Seidel.



Gauss Naif

Misalkan terdapat n buah system persamaan simultan sbb :

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\
&\vdots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n
\end{aligned}
$$

Ubah persamaan tersebut ke dalam suatu bentuk matriks

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\Downarrow \; A}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\Downarrow \; x}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{\Downarrow \; c}
$$

Penyelesaian dengan metoda Gauss Naif dilakukan melalui dua tahapan penting,

1. Tahap eliminasi ke depan $\rightarrow$ terbentuklah matriks segitiga atas
2. Tahap substitusi ke belakang $\rightarrow$ nilai $x_1, x_2 \cdots x_n$ dapat dihitung

Secara garis besar, dua tahapan tsb dapat digambarkan sbb:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} & \vdots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & c_n \end{bmatrix}$$

Augmanted matrix

$\Downarrow$ Tahap Eliminasi ke depan: Hasinya harus didapat matriks segitiga atas

$$\begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* & \vdots & c_1^* \\ & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* & \vdots & c_2^* \\ & & a_{33}^* & a_{3n}^* & \vdots & c_3^* \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn}^* & \vdots & c_n^* \end{bmatrix}$$

Selanjutnya

$\Downarrow$ Tahap Substitusi ke belakang

$x_n = \dfrac{c_n^*}{a_{nn}^*}$, dan nilai-nilai yang lain

,

Cara eliminasi kedepan dilakukan dengan prosedur sbb:

1.Buat konstanta dari a_{11} bernilai 1, sehingga mudah dioperasikan pembagian dan perkaliannya. Bagi persamaan pertama dengan koefisien a_{11}, sehingga didapat

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \frac{c_{11}}{c_n}$$

(persamaan lainnya tetap).

Kegiatan tersebut disebut dengan normalisasi. Tujuan normalisasi adalah agar koefisien dari x_1 untuk persamaan pertama bernilai 1.

2. Kurangkan persamaan ke dua dengan persamaan pertama, hasilnya akan menjadi

$$\left(a_{22} - a_{21} \frac{a_{12}}{a_{11}} \right) x_2 + \cdots + \left(a_{2n} - a_{21} \frac{a_{1n}}{a_{11}} \right) x_n = c_n - a_{21} \frac{c_1}{a_{11}}$$

3. Langkah ke 2 diulangi untuk persamaan ke tiga hingga ke *n,* sehingga terbentuklah suatu kolom pivot pada kolom pertama dengan koefisien pivot a_{11}=1

4.Langkah 1 hingga 3 diulangi sampai terbentuk pivot pada kolom ke -2 hingga kolom ke- *n*, dan akhirnya terbentuklah matrik segitiga atas.