RUANG VEKTOR

TK13023
COMPUTATION II

KELAS B DAN C

DOSEN: LELY HIRYANTO

Vektor di ruang R^n

- Definisi : n adalah bilangan integer positif, maka R^n adalah sebuah himpunan yang berisikan “tuple–n ordered” yaitu $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$
- Contoh :
  - R^2 => (2, 1)
  - R^3 => (-7,3,4)

Kombinasi Linear

Definisi. Sebuah vektor $\mathbf{w}$ dinamakan ***kombinasi linear*** dari vektor-vektor $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, jika vektor tersebut dapat diungkapkan dalam bentuk

$$\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r$$

Dimana $k_1, k_2, \ldots, k_r$ adalah skalar.

Contoh 1:

Tinjaulah vektor-vektor $\mathbf{u} = (1,2,-1)$ dan $\mathbf{v} = (6,4,2)$ di R^3. Buktikan bahwa $\mathbf{w} = (9,2,7)$ adalah kombinasi linear $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}' = (4,-1,8)$.

$$(9,2,7) = k_1(1,2,-1) + k_2(6,4,2),$$
$$(9,2,7) = (k_1+6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2),$$

$$k_1 + 6k_2 = 9$$
$$2k_1 + 4k_2 = 2$$
$$-k_1 + 2k_2 = 7$$

$k_1 = -3$ dan $k_2 = 2$, sehingga $\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

$$(4,-1,8) = k_1(1,2,-1) + k_2(6,4,2),$$
$$(4,-1,8) = (k_1+6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2),$$

$$k_1 + 6k_2 = 4$$
$$2k_1 + 4k_2 = -1$$
$$-k_1 + 2k_2 = 8$$

Tiga SPL diatas tidak konsisten (buktikan), sehingga $\mathbf{w}'$ bukan kombinasi linear dari $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.

Contoh 2:

- Apakah $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0,1)$, dan $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 3)$ adalah kombonasi linier dari $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$?

$$(1, 2, 3) = k_1(1, 1, 2) + k_2(1, 0,1) + k_3(2, 1, 3)$$

$$k_1 + k_2 + 2k_3 = 1$$

$$k_1 \qquad\quad + k_3 = 2$$

$$2k_1 + k_2 + 3k_3 = 3$$

$k_1 = 2 - k_3, k_2 = -1 - k_3, k_3 = k_3$

k_3 merupakan sembarang nilai.

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ dan $\mathbf{v}_3$ adalah kombonasi linier dari $\mathbf{u}$

Kebebasan Linear

Jika $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_r\mathbf{v}_r = 0$ mempunyai paling sedikit satu pemecahan

- Bebas linear
  - Jika hanya ada satu pemecahan yaitu, $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_r = 0$, maka S disebut himpunan bebas liner
- Tidak Bebas Linear
  - Jika ada pemecahan lain selain $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_r = 0$, maka S disebut himpunan tidak bebas liner

Contoh Kebebasan Linear

- Himpunan vektor-vektor $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, dimana $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 5, -1)$, dan $\mathbf{v}_3 = (7, -1, 5, 8)$ adalah himpunan tak bebas linear karena $3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = 0$.
  - Gunakan Teknik pencarian solusi SPL di pertemuan 4 untuk menentukan k_1, k_2 dan k_3!

Basis

Jika V adalah sembarang ruang vektor dan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ merupakan himpunan berhingga dari vektor – vektor pada S, maka S disebut **basis** untuk V jika :

- S merentang V
- S bebas linier

Contoh 1: $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ merentang R^3

Tentukan apakah $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$, dan $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 3)$ merentang R^3:

- Menentukan apakah sembarang vektor $b = (b_1, b_2, b_3)$ pada R^3 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear:

$$b = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 \qquad (b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 1, 2) + k_2(1, 0, 1) + k_3(2, 1, 3)$$

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + 2k_3 &= b_1 \\ k_1 \qquad + k_3 &= b_2 \\ 2k_1 + k_2 + 3k_3 &= b_3 \end{aligned}$$

- Menentukan determinan dari $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

- Himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ tidak merentang R^3

Contoh 2: $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ merentang R^3

Tentukan apakah $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 9,0)$, dan $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$ merentang R^3:

$$b = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1, 2, 1) + k_2(2, 9,0) + k_3(3, 3, 4)$$

$$\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= b_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= b_2 \\ k_1 \qquad\quad + 4k_3 &= b_3 \end{aligned}$$

- Menentukan determinan dari $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1$

Contoh 2: $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ Bebas Linear

Tentukan apakah $\mathbf{v}_1 = (1,2,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,9,0)$, dan $\mathbf{v}_3 = (3,3,4)$ bebas linear:

$$b = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$$

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1,2,1) + k_2(2,9,0) + k_3(3,3,4)$$

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = b_1 = 0$$

$$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = b_2 = 0$$

$$k_1 \qquad\qquad + 4k_3 = b_3 = 0$$

- Menentukan determinan dari $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1$
- Solusi dari SPL: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$
- Himpunan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ merentang R^3, sehingga $\boldsymbol{S}$ **adalah basis dari** $\boldsymbol{R}^{\mathbf{3}}$

Dimensi

Dimensi sebuah ruang vektor V yang berdimensi berhingga didefinisikan sebagai banyaknya vektor pada basis untuk V.

Contoh 1: Dimensi $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

Tentukan dimensi $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ untuk $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 9,0)$, dan $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 4)$ untuk R^3.

- Dibuktian pada contoh penentuan basis, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ adalah basis dari R^3. Oleh karena itu, dimensi dari S adalah 3, karena hasil reduksi baris dari matriks:

$\Longrightarrow$ Reduksi Baris

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

berisi 3 vektor baris taknol!

Contoh 2:
Basis dan Dimensi dari Ruang $V = \{u, v, w, s\}$

Diketahui $\mathbf{u} = (-1, 1, 1), \mathbf{v} = (1, -2, 2), \mathbf{w} = (-2, 1, 5), \mathbf{s} = (-2, 0, 8)$

Tentukan basis dan dimensi dari ruang V!

- Lakukan reduksi baris dengan transformasi elementer untuk menghasilkan matriks eselon baris tereduksi:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Basis dari ruang V adalah $\mathbf{u}' = (1, -1, -1)$ dan $\mathbf{v}' = (0,1, -3)$ dan dimensi ruang V adalah 2.

$\Longrightarrow$ Reduksi Baris

$\Longrightarrow$ Reduksi Baris

Rank

Dimensi ruang baris dan ruang kolom matriks A dinamakan rank A dan dinyatakan dengan rank(A)

Diketahui: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

1. Tentukan dimensi ruang baris dari A : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

    dimensi = 2

2. Tentukan dimensi ruang kolom dari A: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

    dimensi = 2

Rank = 2

Latihan Soal

Diketahui vektor-vektor sebagai berikut :

u $= [1, -2, 3]$

v $= [5, 6, -1]$

w $= [3, 2, 1]$

1. (15 poin) Apakah vektor $\mathbf{z} = [0,16,-16]$ merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor **u**, **v**, dan **w** ?

2. (15 poin) Apakah vektor-vektor **u**, **v**, dan **w** bebas linier ?

3. (15 poin) Apakah vektor-vektor **u**, **v**, dan **w** merentang R^3 ?

4. (15 poin) Tentukan dimensi dan rank dari ruang $S = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$!