

# SISTEM PERSAMAAN LINEAR

TK13023  
COMPUTATION II

KELAS A DAN C

DOSEN: LELY HIRYANTO



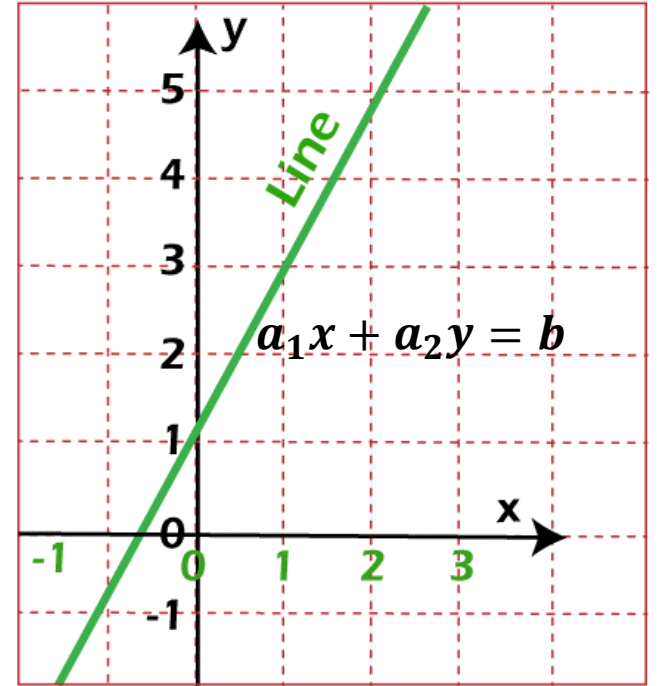
**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR untuk INDONESIA**

# Persamaan Linear?

- Sebuah garis dalam bidang  $xy$  secara aljabar dapat dinyatakan dalam **Persamaan Linear**
  - $a_1x + a_2y = b$
- Persamaan linear secara umum:
  - $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$
- Contoh dan Solusi
  - $4x_1 - 2x_2 = 1$ ,
    - tetapkan  $x_1 = t$ , maka  $x_2 = 2t - \frac{1}{2}$ ,  $t = \text{sembarang nilai}$
  - $x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5$ 
    - Tetapkan  $x_2 = s$ ,  $x_3 = t$ , maka  $x_1 = 5 + 4s - 7t$ ,  $s$  dan  $t = \text{sembarang nilai}$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR untuk INDONESIA**

# Sistem Persamaan Linear?

- SPL adalah sebuah himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linear dalam peubah  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

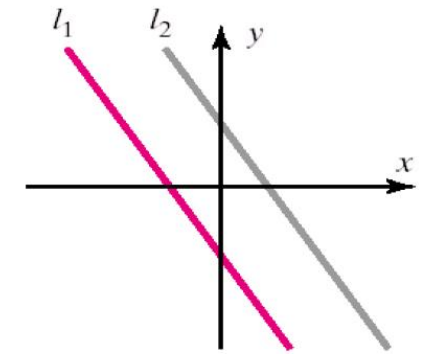
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

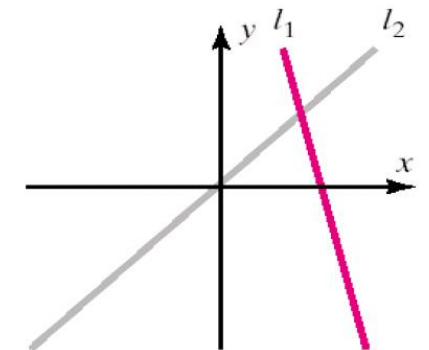
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

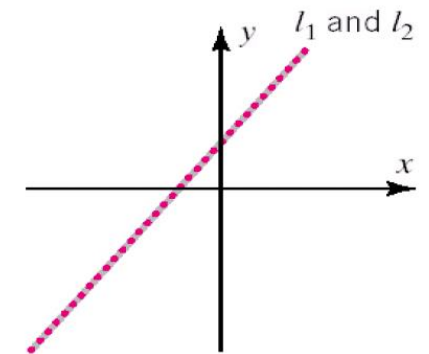
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$



(a) No solution



(b) One solution



(c) Infinitely many solutions



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR** un

# Solusi SPL

- Substitusi
- Eliminasi: Gauss dan Gauss Jordan
- Invers Matriks
- Crammer



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara

Terakreditasi  
BAN PT

A  
unggul

QS STARS  
RATING SYSTEM  
2019

ACAS  
UKAS

IABEE

CPA  
AUSTRALIA

ICAEW  
CHARTERED  
ACCOUNTANTS

**UNTAR untuk INDONESIA**

# Metode Substitusi



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR untuk INDONESIA**

# Solusi SPL dengan Substitusi

$$x + 3y = 7$$

$$2x + 2y = 6$$

1.  $x = 7 - 3y$

2.  $2(7 - 3y) + 2y = 6$

$$14 - 6y + 2y = 6$$

$$-6y + 2y = 6 - 14$$

$$-4y = -8$$

$$y = 2$$

3.  $x = 7 - 3(2) = 1$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR untuk INDONESIA**

# Metode Eliminasi



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR untuk INDONESIA**

# Transformasi Elementer pada Baris Matriks

- Memperkalikan baris ke  $i$  dengan skalar  $\lambda \neq 0$ , ditulis  $H_i^\lambda(A)$

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ maka } H_{2(-2)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } H_{3(\frac{1}{2})}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Menambah baris ke  $i$  dengan  $\lambda$  kali baris ke  $j$ , ditulis  $H_{ij}^\lambda(A)$

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ maka } H_{31(1)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } H_{23(-1)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara

Terakreditasi  
BAN-PT

A  
Lingkar

QS STARS  
RATING SYSTEM  
2019

AMBA  
ACCREDITED

IAABE

CPA  
AUSTRALIA

ICAEW  
CHARTERED  
ACCOUNTANTS

**UNTAR untuk INDONESIA**



# Eliminasi Gauss:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 2 \\x_1 + 8x_3 &= 3\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 8 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}1. & H_{21}(-2) \\2. & H_{31}(-1)\end{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \end{array} \right)$$

$$3. H_{32}(2) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$4. H_{3(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}5. & H_{23}(3) \\6. & H_{13}(-3)\end{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$x_3 = -2, x_2 = -6,$$

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 7, & x_1 &= 7 - 2x_2, \\x_1 &= 7 - 2(-6) &= 19\end{aligned}$$

# Eliminasi Gauss Jordan:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 8 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} 1. \ H_{21}(-2) \\ 2. \ H_{31}(-1) \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \end{array} \right)$$

$$3. \ H_{32}(2) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$4. \ H_{3(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} 5. \ H_{23}(3) \\ 6. \ H_{13}(-3) \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$7. \ H_{12}(-2) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$x_3 = -2, x_2 = -6, x_1 = 19$$

# Metode Invers Matriks



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara

Terakreditasi  
BAN PT

A  
Linggi

QS STARS  
RATING SYSTEM  
2019

GLAS  
UKAL

IABEE

CPA  
AUSTRALIA

ICAEW  
CHARTERED  
ACCOUNTANTS

**UNTAR untuk INDONESIA**

# Solusi SPL dengan Invers Matriks

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 2 \\x_1 + 8x_3 &= 3\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$



# Metode Cramer



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara

Terakreditasi  
BAN PT

A  
Linggi

QS STARS  
RATING SYSTEM  
2019

AMBA  
AACSB  
EFMD

IAEBC

CPA  
AUSTRALIA

ICAEW  
CHARTERED  
ACCOUNTANTS

**UNTAR untuk INDONESIA**

# Teorema

- Teorema

- Jika  $AX = B$  adalah sistem yang terdiri dari  $n$  persamaan linear dalam  $n$  bilangan tak diketahui sehingga  $\det(A) \neq 0$ , maka system tersebut mempunyai pecahan yang unik yaitu:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

- di mana  $A_j$  adalah matriks yang kita dapatkan dengan menggantikan entri-entri dalam kolom ke  $j$  dengan entri-entri dalam matriks:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

# Solusi SPL dengan Crammer

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 2 \\x_1 + 8x_3 &= 3\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

$$x_1 = \frac{-19}{-1} = 19, \quad x_2 = \frac{6}{-1} = -6, \quad x_3 = \frac{2}{-1} = -2$$

# Linear Programming

Untuk membuat 1 liter minuman jenis A diperlukan 2 kaleng soda dan 1 kaleng susu, sedangkan untuk membuat 1 liter minuman jenis B diperlukan 2 kaleng soda dan 3 kaleng susu. Tersedia 40 kaleng soda dan 30 kaleng susu. Jika 1 liter minuman jenis A dijual seharga Rp30.000,00 dan satu liter minuman jenis B dijual seharga Rp50.000,00, berapa pendapatan maksimum dari hasil penjualan kedua jenis minuman tersebut?

1. Buat model matematika dalam bentuk SPL.
  - a. Persamaan Linear untuk **target** dari penyelesaian SPL: memaksimalkan pendapatan dari kedua jenis minuman
  - b. Tentukan SPL yang menjadi ketentuan pembuatan minuman: **constraints**
2. Tentukan solusi optimal.



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR untuk INDONESIA**



# Linear Programming: Model Matematika

- Target:

$$\text{Maximize } f(x) = 30000x + 50000y$$

- Constraints:

- $2x + 2y \leq 40 \Rightarrow x + y \leq 20$
- $x + 3y \leq 30$
- $x \geq 0$
- $y \geq 0$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR untuk INDONESIA**

# Linear Programming: Solusi Optimal

- Selesaikan SPL berikut:

$$\begin{aligned}x + y &= 20 \\x + 3y &= 30\end{aligned}$$

- Hasil:  $x = 15$      $y = 5$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR untuk INDONESIA**

# Latihan Soal

Buat sistem persamaan linier dari soal cerita berikut dan selesaikan dengan metode yang sudah dipelajari:

1. (20 poin) Diketahui sebuah bilangan tiga angka. Jumlah angka-angka tersebut 11. Dua kali angka pertama ditambah angka kedua sama dengan angka ketiga. Angka pertama ditambah angka kedua dikurangi angka ketiga sama dengan  $-1$ . Tentukan ketiga bilangan tersebut. Gunakan metode inverse matriks!
2. (20 poin) Untuk suatu acara pertunjukan dijual tiket dengan harga tiket dewasa Rp33.000,00, tiket remaja Rp24.000,00, dan tiket anak-anak Rp9.000,00. Pada hari pembukaan, jumlah tiket anak-anak dan remaja yang terjual 30 lebih banyak dari  $\frac{1}{2}$  jumlah tiket dewasa yang terjual. Jumlah tiket remaja yang terjual 5 kali lebih banyak dari 4 kali jumlah tiket anak-anak yang terjual. Jika jumlah hasil penjualan tiket seluruhnya Rp89.820.000,00, tentukan jumlah remaja yang menonton pertunjukan pada hari pembukaan. Gunakan aturan crammer!

