Nilai dan Vektor Eigen

TK13023
COMPUTATION II

KELAS B DAN C

DOSEN: LELY HIRYANTO

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka vektor taknol $\mathbf{x}$ di dalam ruang R^n dinamakan ***vektor eigen*** dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah kelipatan scalar dari $\mathbf{x}$; yaitu,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

untuk suatu skalar λ bernilai riil. Skalar λ dinamakan **nilai eigen** dari A dan $\mathbf{x}$ dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

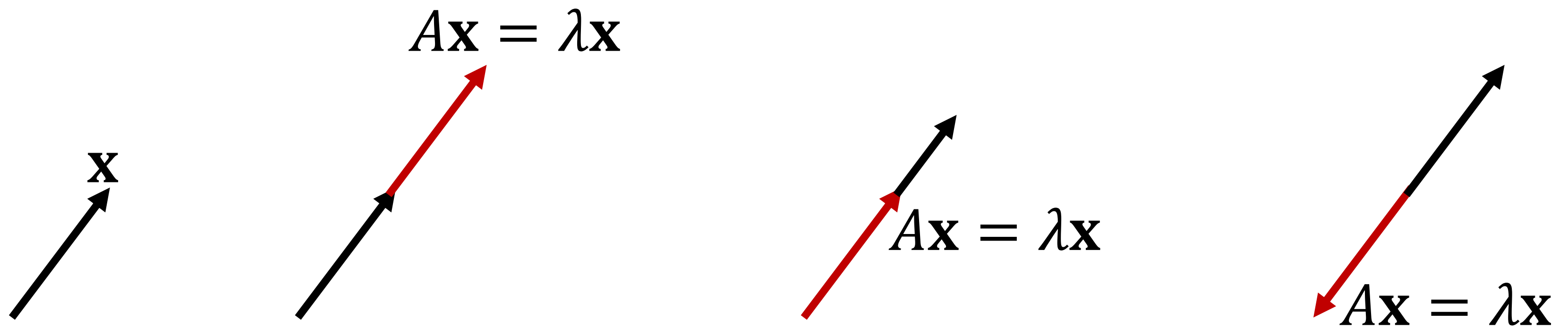
Contoh Nilai dan Vektor Eigen

Vektor $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$ karena

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$

Mengapa nilai eigen dan vektor eigen?

- Memberikan tafsiran geometric yang bermanfaat dalam ruang R^2dan R^3.
- Jika λ adalah nilai eigen dari matriks A yang bersesuaian dengan $\mathbf{x}$, maka $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, sehingga perkalian oleh A akan memperbesar $\mathbf{x}$, atau membalik arah $\mathbf{x}$, yang bergantung pada nilai λ.



Dilatasi (pembesaran)
$\lambda > 1$

Kontraksi
$0 < \lambda < 1$

Pembalikan arah
$\lambda < 0$

Rumus ABC untuk Akar Persamaan Kuadrat

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Contoh: $2x^2 - 7x + 3 = 0; \quad a = 2, b = -7, c = 3$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - (4)(2)(3)}}{(2)(2)} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$x = \frac{7+5}{4} = 3 \qquad x = \frac{7-5}{4} = \tfrac{1}{2}$$

Mencari Nilai Eigen

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

atau secara ekivalen

$$A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$$

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0,$$

$$\det(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0,$$

$$\det(A - \lambda I)\mathbf{x} = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n$$

yang dinamakan **persamaan karateristik** dari matriks A.

Contoh 1: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

persamaan karakteristik dari A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

menggunakan rumus ABC: nilai eigen dari A adalah $\boldsymbol{\lambda = 1}$ **dan** $\boldsymbol{\lambda = 2}$

Contoh 2: $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

persamaan karakteristik dari A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

terlihat bahwa hasil pemecahan persamaan $\lambda^2 + 1 = 0$ adalah bilangan imajiner, sedangkan λ harus merupakan bilang riil. Maka, matriks A tidak memiliki nilai eigen, serta vektor eigen.

Contoh 3: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{bmatrix}$$

persamaan karakteristik dari A:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4 = 0$$

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4 = -(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

menggunakan rumus ABC hanya untuk $(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$: nilai eigen dari A adalah

$$\boldsymbol{\lambda = 4, \lambda = 2 + \sqrt{3}\,, \lambda = 2 - \sqrt{3}}$$

Menentukan Vektor Eigen

- Menggunakan salah satu dari nilai eigen λ untuk menyelesaikan

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$$

Contoh 1: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nilai eigen dari A adalah $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$ **dan** $\boldsymbol{\lambda_2 = 2}$

Jika $\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$, maka $\begin{bmatrix} 3-1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

- Reduksi Baris: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{H}_2(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{H}_{21}(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
- $x_2 = x_2$ dan $x_1 = -x_2$
- Vektor eigen dari A adalah $v_1 = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Contoh 1: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{2}$, maka $\begin{bmatrix} 3-2 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

- Reduksi Baris: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{H}_{21}(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
- $x_2 = x_2$ dan $x_1 = -2x_2$
- Vektor eigen dari A adalah $v_2 = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Contoh 3: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

Nilai eigen dari A adalah $\boldsymbol{\lambda = 4}, \boldsymbol{\lambda = 2 + \sqrt{3}}, \boldsymbol{\lambda = 2 - \sqrt{3}}$

Jika $\boldsymbol{\lambda = 4}$, $\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 4 & -17 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1

- Reduksi baris: $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & -17 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{H}_1\left(-\frac{1}{4}\right), \mathrm{H}_2\left(-\frac{1}{4}\right), \mathrm{H}_{31}(-4), \mathrm{H}_{32}(16)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
- $x_3 = x_3$,$x_2 = \frac{1}{4}x_3$, dan $x_1 = \frac{1}{16}x_3$
- Vektor eigen dari A adalah $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{16}x_3 \\ \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\frac{1}{16}} \\ \boldsymbol{\frac{1}{4}} \\ \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$

Contoh 3: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{3}}$, $\begin{bmatrix} -(2+\sqrt{3}) & -1 & 0 \\ 0 & -(2+\sqrt{3}) & -1 \\ 4 & -17 & 6-\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Reduksi baris: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt{3}-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
- $x_3 = x_3$, $x_2 = (2-\sqrt{3})x_3$, $x_1 = (7-4\sqrt{3})x_3$
- Vektor eigen dari A adalah $v_2 = \begin{bmatrix} (7-4\sqrt{3})x_3 \\ (2-\sqrt{3})x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \mathbf{7-4\sqrt{3}} \\ \mathbf{2-\sqrt{3}} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Contoh 3: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{3}}$, $\begin{bmatrix} \sqrt{3}-2 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}-2 & 1 \\ 4 & -17 & 6+\sqrt{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Reduksi baris: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\sqrt{3}-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3}-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
- $x_3 = x_3, x_2 = (\sqrt{3}+2)x_3, x_1 = (4\sqrt{3}+7)x_3$
- Vektor eigen dari A adalah $v_3 = \begin{bmatrix} (4\sqrt{3}+7)x_3 \\ (\sqrt{3}+2)x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \mathbf{4\sqrt{3}+7} \\ \mathbf{\sqrt{3}+2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Latihan Soal

Hitung nilai eigen dan tentukan vektor eigen untuk matriks A berikut ini:

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$