# VEKTOR

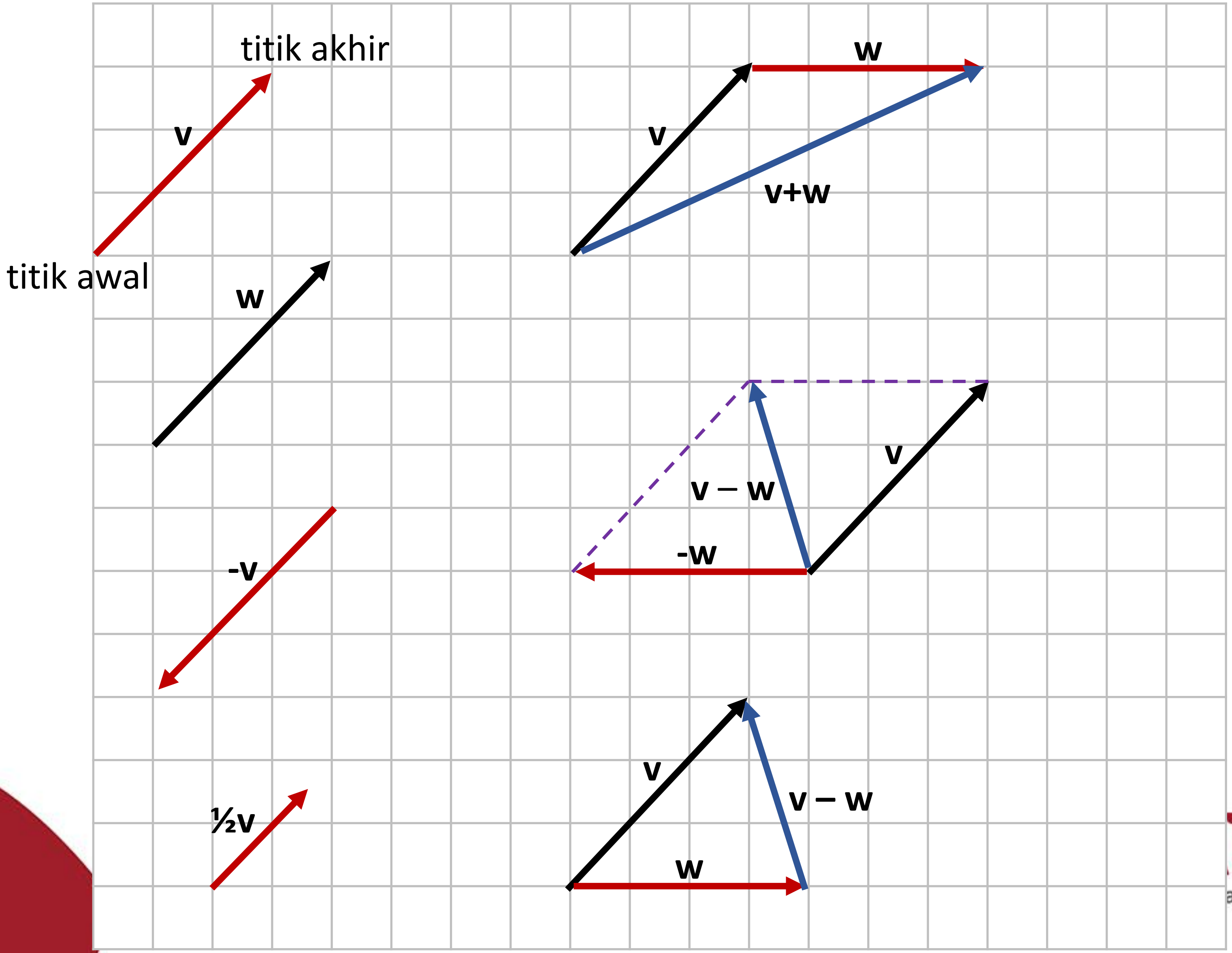
**TK13023**
**COMPUTATION II**

KELAS B DAN C

DOSEN: LELY HIRYANTO

# Pengenalan Vektor

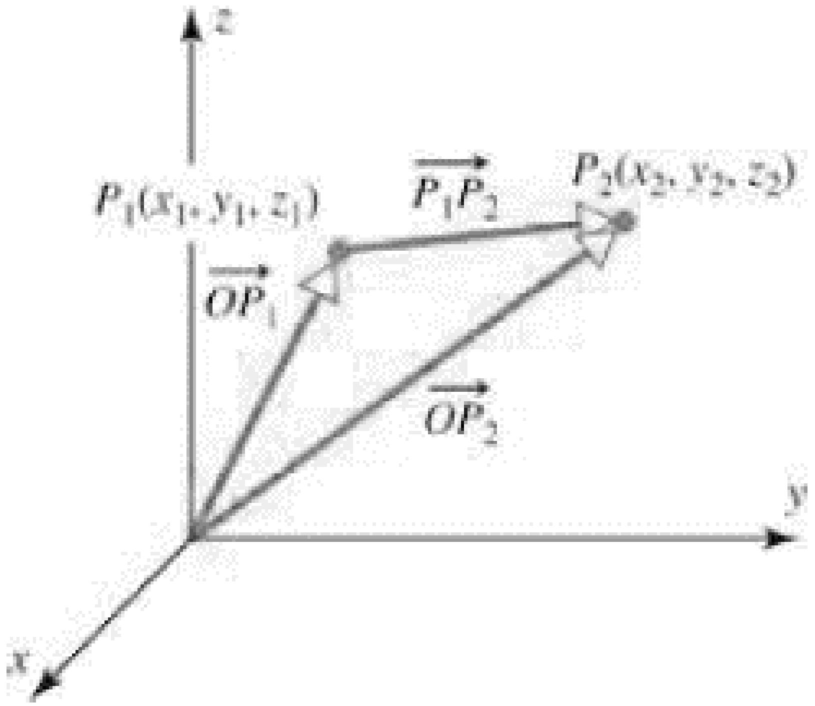
# Apa itu Vektor?




- Nama vector: huruf kecil dan tebal
- Dapat digambarkan secara geometris
- **v** dan **w** disebut equivalent:
  - ✓ Ukuran dan arah sama
  - ✓ Titik awal dan titik akhir bisa berbeda
- Titik awal **w** bertemu dengan titik akhir **v**
  - **v + w = w + v**
- Titik awal **v** dan **w** dipertemukan.
  - **v – w**

# Komponen Vektor

- Vektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - Z_1)$



# Pergeseran Sumbu Koordinat

- Koordinat asal $(x, y)$ di $(k, l)$ digeser ke koordinat baru di $(x', y')$ menggunakan persamaan pergeseran sebagai berikut:

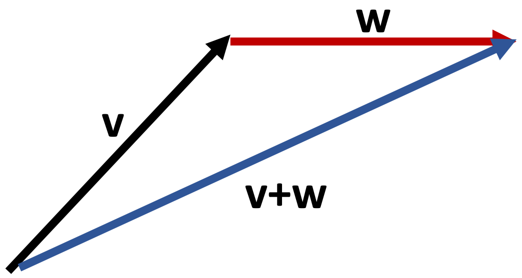
$$x' = x - k \qquad\qquad y' = y - l$$

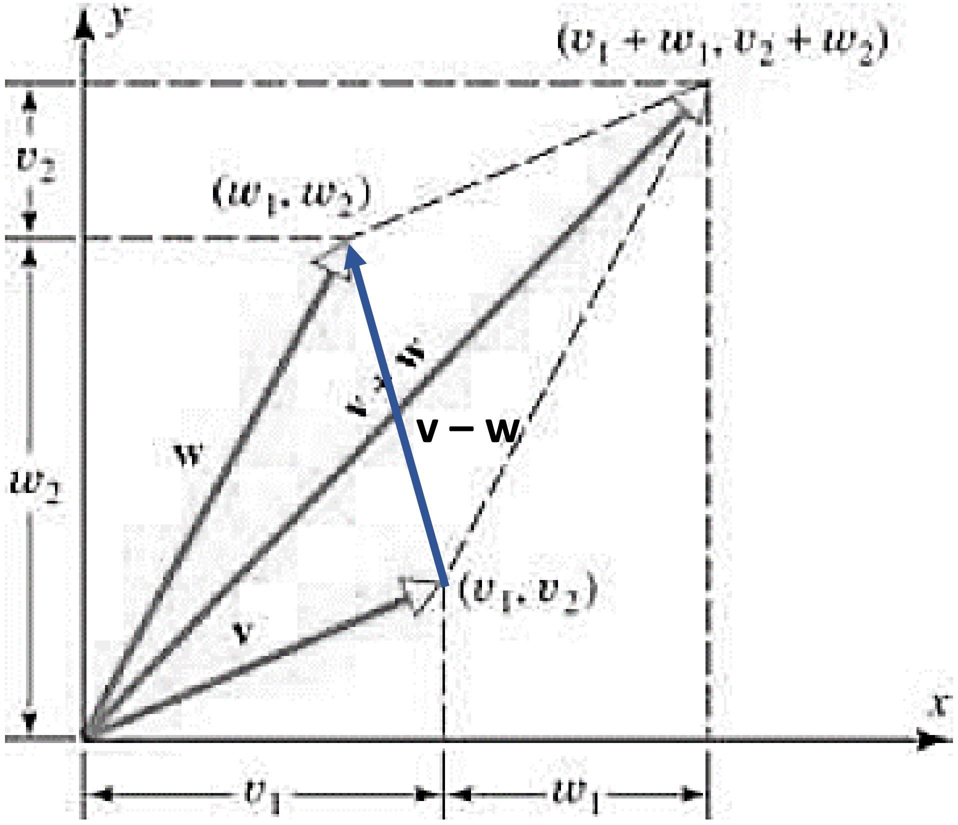
- Contoh: Koordinat asal $(x, y)$ di $(4,1)$ digeser ke koordinat baru di $(x', y')$
  - Titik koordinat $(x', y')$ untuk titik $(x, y)$ dengan koordinat $P(2,0)$:
    - $x' = 2 - 4 = -2 \qquad y' = 0 - 1 = -1$
  - Titik koordinat $(x, y)$ untuk titik $(x', y')$ dengan koordinat Q$(-1,5)$:
    - $x = x' + k = -1 + 4 = 3 \qquad y = y' + l = 5 + 1 = 6$

# Koordinat Vektor di Ruang 2

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \quad \text{and} \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

$$\boxed{\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)}$$



# Koordinat Vektor di Ruang 3

- Menggunakan right handed coordinate systems
- **v** = ($v_1$, $v_2$, $v_3$)

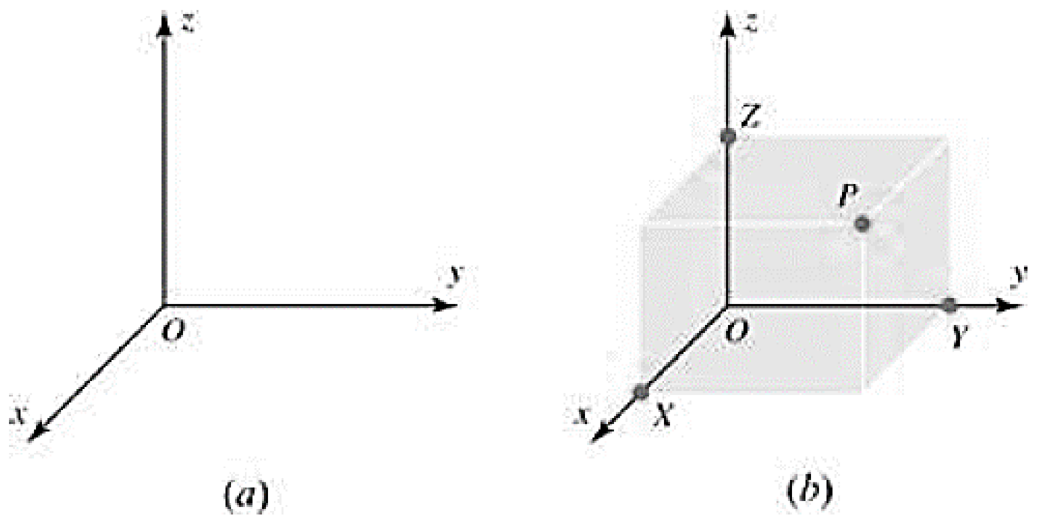



Figure 3.1.9

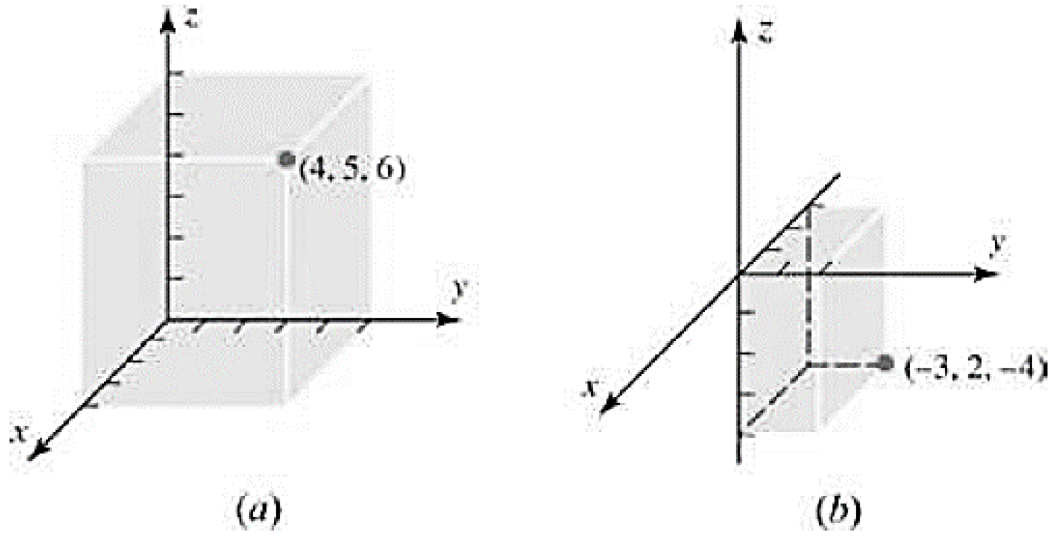



Figure 3.1.10

# Vektor di ruang $R^n$

- Definisi : $n$ adalah bilangan integer positif, maka $R^n$ adalah sebuah himpunan yang berisikan “tuple–n ordened” yaitu ($v_1$, $v_2$, $v_3$, …, $v_n$)
- Contoh :
  - $R^2$ => (2, 1)
  - $R^3$ => (-7,3,4)

# Operasi Vektor

- Untuk sembarang vektor **u**, **v** dan **w** di $R^2$ atau $R^3$ dan sembarang skalar *k* dan *l* maka berlaku

a) **u** + **v** = **v** + **u**

b) **u** + 0 = 0 + **u** = **u**

c) k(l**u**) = (kl)**u**

d) (k+l)**u** = k**u** + l**u**

e) (**u**+**v**)+**w** = **u**+(**v**+**w**)

f) **u** + (-**u**) = 0

g) k(**u**+**v**) = k**u** + k**v**

h) 1**u** = **u**

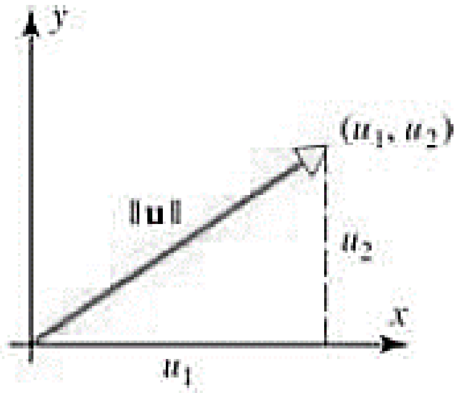
# Norm

# Norm dari Sebuah Vektor: Aritmatika dari Vektor

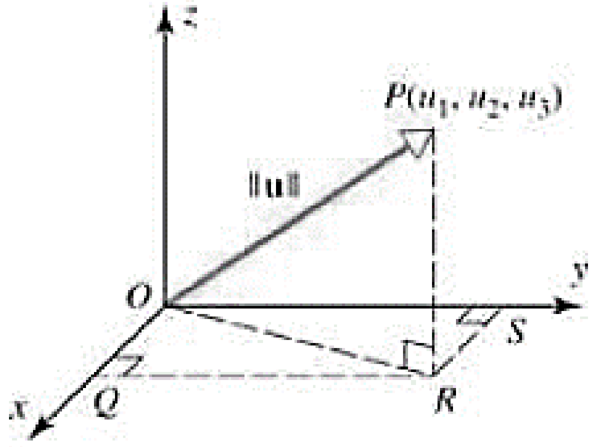
- Panjang dari sebuah vektor $v$ disebut sebagai norm dari **v** yang dinotasikan sebagai $\|v\|$
- Untuk vector di ruang $R^n$:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

- $\|k\mathbf{v}\| = |k|\|\mathbf{v}\|$
- Contoh: norm dari vektor $\mathbf{v} = (-3,2,1)$:
  - $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$



(a)



(b)

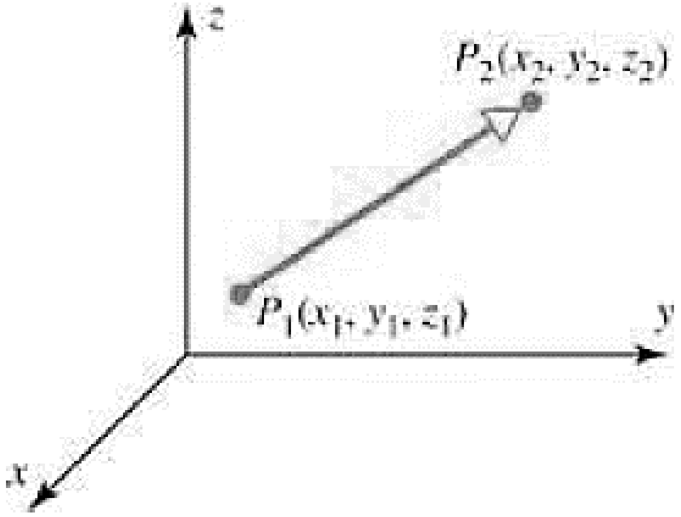
# Jarak dari Sebuah Vektor

- Jarak dari sebuah vektor jika diketahui titik awal dan akhir dari vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ di ruang $R^3$ yaitu $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

  - ruang $R^2$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

- Contoh: Jarak $d$ antara titik $P_1(2, -1, -5)$ dan $P_2(4, -3, 1)$
  - $d = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+1)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{44} = \sqrt{(4)(11)} = 2\sqrt{11}$



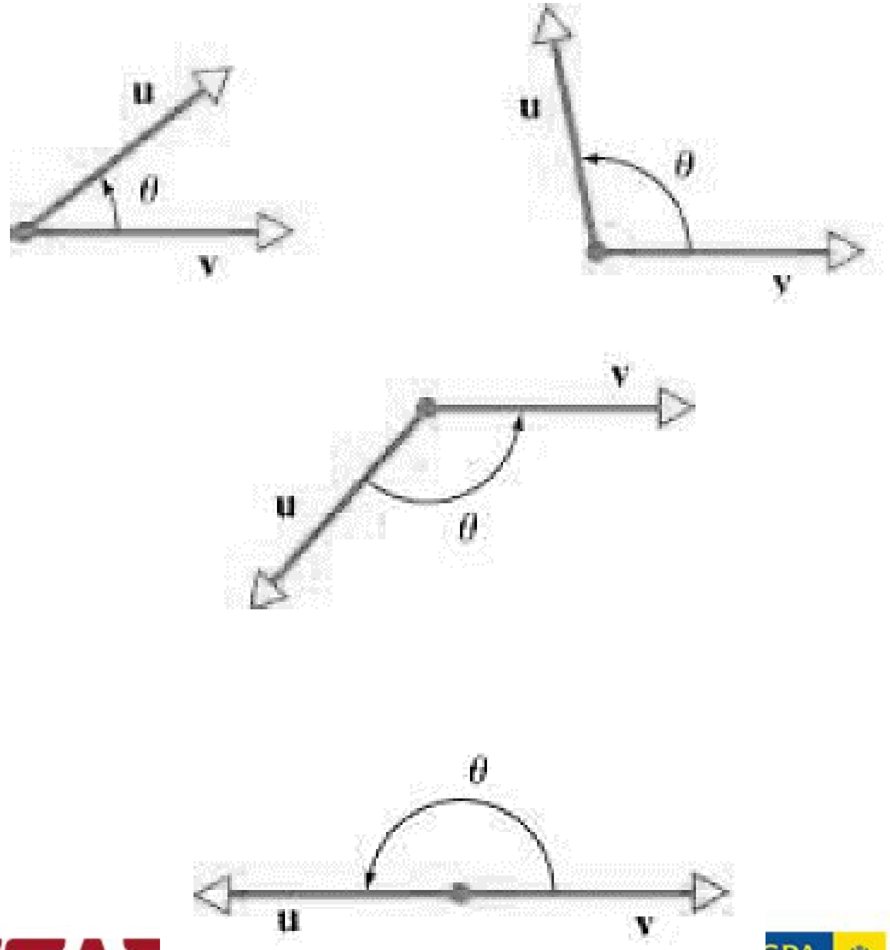
# Dot Product

# Dot Product dari Sebuah Vektor: Proyeksi

- Diketahui:
  - Dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di ruang $R^2$ atau $R^3$,
  - Titik awal dari $\mathbf{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ saling berhimpit, dan
  - $\theta$ adalah sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.
- **Dot product** atau Euclidean inner product $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ dirumuskan sebagai berikut:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta & \mathbf{u} \neq 0, \mathbf{v} \neq 0 \\ 0 & \mathbf{u} = 0, \mathbf{v} = 0 \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi; \qquad \pi = 180$$



# Dot Product berdasarkan Komponen Vektor

- Diketahui:
  - Dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di ruang $R^2$ atau $R^3$,
  - Titik awal dari $\mathbf{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ saling berhimpit, dan
  - $\theta$ adalah sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.
- **Dot product** berdasarkan komponen $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ di $R^2$dan $R^3$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \qquad \text{untuk } R^2$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \qquad \text{untuk } R^3$$

- Untuk mencari sudut antara dua vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ ($\mathbf{u} \neq 0, \mathbf{v} \neq 0$):

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

# Contoh menghitung dot product

- Tentukan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ untuk
  - $\mathbf{u} = (0,0,1)$ dan $\mathbf{v} = (0,2,2)$ dan sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah 45º:
    - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \left(\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}\right)\left(\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}\right)\cos(45) = 2$
    - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 2$
      - $\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{2}{(1)(\sqrt{8})}; \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{8}}\right) = 45$
  - $\mathbf{u} = (2,-1,1)$ dan $\mathbf{v} = (1,1,2)$ dan sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah 60º:
    - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \left(\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\right)\left(\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}\right)\cos(60) = 3$
    - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$
      - $\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{3}{(\sqrt{6})(\sqrt{6})}; \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) = 60$

# Jenis Sudut Hasil Dot Product

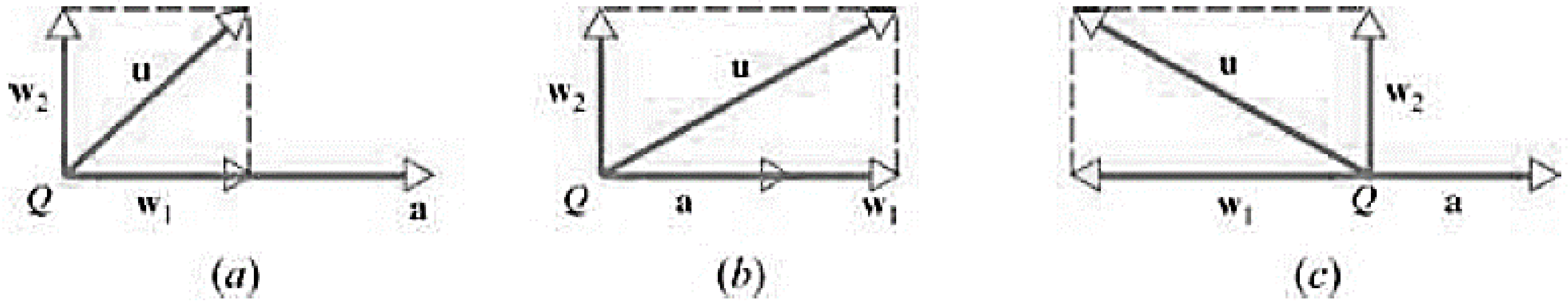
- $\theta$ adalah sudut tumpul ($90^{o} < \theta < 180^{o}$) => $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$
- $\theta$ adalah sudut lancip ($0^{o} < \theta < 90^{o}$) => $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$
- $\theta = \frac{\pi}{2}(90^{o})$ => $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$
  - $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ disebut vektor orthogonal ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$)

# Sifat Dot Product

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
b. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
c. $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$
d. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ jika $\mathbf{v} \neq 0$
e. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ jika $\mathbf{v} = 0$

# Proyeksi Orthogonal

- Menguraikan vektor $\mathbf{u}$ menjadi penjumlahan dari dua buah vektor $\mathbf{w_1}$ dan $\mathbf{w_2}$:
  - Vektor $\mathbf{w_1}$ paralel dengan vektor $a$
    - $\mathbf{w_1}$ disebut ***vector component of*** $\mathbf{u}$ ***along*** $\boldsymbol{a}$ ($\mathbf{proj}_{\boldsymbol{a}}\mathbf{u}$)
  - Vektor $w_2$ orthogonal dengan vektor $a$
    - $\mathbf{w_2}$ disebut ***vector component of*** $\mathbf{u}$ ***orthogonal to*** $\boldsymbol{a}$ ($\mathbf{w_2} = \mathbf{u} - \mathbf{proj}_{\boldsymbol{a}}\mathbf{u}$)



# Proyeksi Orthogonal: Teorema

- Jika $\mathbf{u}$ dan $\boldsymbol{a}$ adalah vektor di ruang $R^2$ atau $R^3$dan jika $\boldsymbol{a} \neq 0$, maka

$$\mathbf{proj}_{\boldsymbol{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{a}}{\|a\|^2} a$$

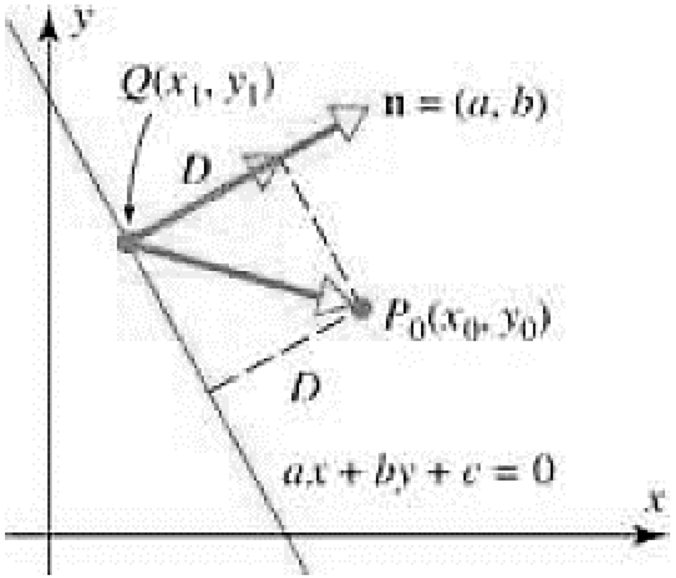
$$\mathbf{u} - \mathbf{proj}_{\boldsymbol{a}}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot a}{\|a\|^2} a$$

- Contoh: diketahui $\mathbf{u} = (2, -1{,}3)$ dan $a = (4, -1{,}2)$. Tentukan $\mathbf{proj}_{\boldsymbol{a}}\mathbf{u}$ dan $\mathbf{u} - \mathbf{proj}_{\boldsymbol{a}}\mathbf{u}$.
    - $\mathbf{proj}_{\boldsymbol{a}}\mathbf{u} = \frac{(2)(4)+(-1)(-1)+(3)(2)}{4^2+(-1)^2+2^2}(4, -1{,}2) = \left(\frac{20}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7}\right)$
    - $\mathbf{u} - \mathbf{proj}_{\boldsymbol{a}}\mathbf{u} = (2, -1{,}3) - \left(\frac{20}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{10}{7}\right) = \left(\frac{-6}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{11}{7}\right)$

# Jarak antara Titik dan Garis Lurus

- Jika diketahui dua titik $P_0(x_0, y_0)$ dan $Q(x_1, y_1)$ di ruang $R^2$, dimana $Q$ terletak di garis $ax + by + c = 0$, maka jarak antara $P_0$:

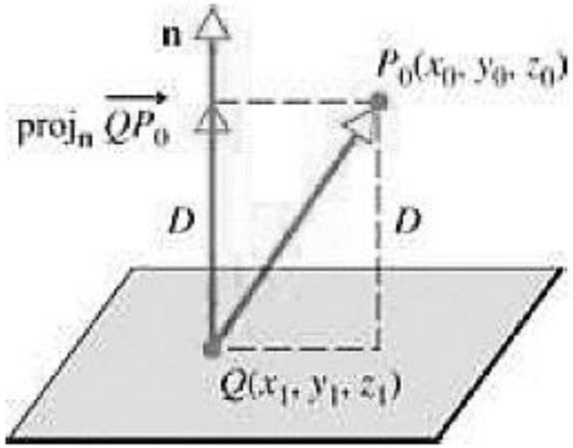
$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$




- Contoh: jarak antara titik $(1, -2)$ dan garis $3x + 4y - 6 = 0$

$$D = \frac{|(3)(1) + (4)(-2) - 6|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

# Jarak antara Titik dan Bidang




- Jarak antara titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dengan bidang $ax + by + cz + d = 0$, maka jarak antara $P_0$:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Contoh: hitung jarak $D$ antara titik $(1, -4, -3)$ dan bidang $2x - 3y + 6z = -1$

$$D = \frac{|(2)(1) - (-3)(-4) + (6)(-3) + (1)|}{\sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}$$

# Jarak Antar Bidang

- Jika diketahui dua bidang paralel $x + 2y - 2z = 3$ dan $2x + 4y - 4z = 7$, maka jarak antara dua bidang dihitung dengan:
  1. Menentukan satu titik di salah satu bidang dengan mengasumsikan $y = z = 0$
     - $y = z = 0$ untuk $x + 2y - 2z = 3; x = 3$ dan $P_0(3,0,0)$
  2. Meghitung jarak $D = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|(2)(3)+4(0)+(-4)(0)-7|}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}} = \frac{1}{6}$

# Cross Product

# Dot Product vs Cross Product

**Dot Product**

- Berlaku untuk vektor di ruang $R^2, R^3$, dst.
- Hasil operasi adalah skalar (sebuah nilai)

**Cross Product**

- Berlaku untuk vektor di ruang $R^3, R^4$, dst.
- Hasil operasi adalah vektor

# Definisi

- Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ adalah vektor di ruang $R^3$, maka cross product $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ adalah sebuah vector yaitu:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

- Contoh: tentukan $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ untuk $\mathbf{u} = (1,2,-2)$ dan $\mathbf{v} = (3,0,1)$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left( \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2, -7, -6)$$

# Hubungan antara Cross Product and Dot Product

Jika $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{w}$ adalah vektor di ruang $R^3$, maka:

**a.** $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ orthogonal dengan $\mathbf{u}$)

**b.** $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ orthogonal dengan $\mathbf{v}$)

c. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (Identitas Lagrange)

**d.** $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

*e.* $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$

# Properti dari Cross Product

a. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

b. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$

*c.* $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

d. $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$

e. $\mathbf{u} \times 0 = 0 \times \mathbf{u} = 0$

f. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$

# Referensi

- Baca detail asal semua formula untuk norm, dot product dan cross product dari referensi utama berikut:
  - Anton, Howard, and Chris Rorres. *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley & Sons, 2005.

# Latihan Soal 1

1. (50 poin) Diketahui vector $\mathbf{u} = (2, -2, 1)$ dan $\mathbf{v} = (2, 1, 2)$. Tentukan dan tuliskan dengan rinci proses perhitungan dari soal berikut:
   a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (Hasil kali titik / dot product vector **u** dan **v**)
   b. Sudut antara vector **u** dan **v**
   c. Jarak antara vector **u** dan **v**
   d. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (Hasil kali silang / cross product vector **u** dan **v**)
   e. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$

# Latihan Soal 2 dan 3

2. (20 poin) Diketahui vector $\mathbf{a} = (1, k, k^2)$ dan $\mathbf{b} = (-2, -1, 1)$.
    a. Tentukan nilai $k$ agar vector **a** dan **b** tegak lurus.
    b. Tentukan nilai $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ (untuk $k$ positif)
3. (30 poin) Tentukan nilai $k$ agar sudut antara vektor $\mathbf{u} = (k+1, k+1, 1)$ dan $\mathbf{v} = (-k-1, -k-1, k)$ adalah $180^{\circ}$.