

# TRANSFORMASI LINEAR

**TK13023  
COMPUTATION II**

KELAS A DAN C

DOSEN: LELY HIRYANTO



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR untuk INDONESIA**

# Pengantar Transformasi Linear

- Transformasi linear adalah sebuah fungsi  $T()$  yang menghasilkan vektor  $\mathbf{w}$  dari peubah vektor  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$$

- Transformasi linear diterapkan di bidang teknik, ilmu sosial, dan berbagai cabang matematika.
- **Definisi.** Jika  $T: V \rightarrow W$  adalah sebuah fungsi dari ruang vektor  $V$  ke dalam ruang vektor  $W$ , maka  $T$  dinamakan transformasi linear jika
  - a.  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$  untuk semua vektor  $\mathbf{u}$  dan  $\mathbf{v}$  di  $V$
  - b.  $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$  untuk semua vektor  $\mathbf{u}$  di dalam  $V$  dan untuk semua skalar  $k$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR untuk INDONESIA**

# Contoh 1: Transformasi Linear

Apakah fungsi  $T(x, y) = (x, y + 1)$  adalah transformasi linear?

a. Diketahui  $\mathbf{u} = (1, 2)$  dan  $\mathbf{v} = (4, 5)$

b. cek  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

$$T((1 + 4, 2 + 5)) = T(5, 7) = (5, 7 + 1) = (5, 8)$$

$$T(1, 2) + T(4, 5) = (1, 3) + (4, 6) = (5, 9) \neq$$

c. Tidak perlu cek syarat kedua  $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$ !



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR untuk INDONESIA**

# Contoh 2: Transformasi Linear

Apakah fungsi  $T(x, y) = (2x + y, x - y)$  adalah transformasi linear?

a. Diketahui  $\mathbf{u} = (1, 2)$  dan  $\mathbf{v} = (4, 5)$ ,  $k = 3$

b. cek  $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

$$T((1 + 4, 2 + 5)) = T(5, 7) = ((2)(5) + 7, 5 - 7) = (17, -2) \quad \leftarrow \text{=}$$

$$T(1, 2) + T(4, 5) = ((2)(1) + 2, 1 - 2) + ((2)(4) + 5, 4 - 5) = (17, -2) \quad \leftarrow \text{=}$$

c. cek syarat kedua  $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$

$$T(k\mathbf{u}) = T(3(1, 2)) = T((3, 6)) = ((2)(3) + 6, 3 - 6) = (12, -3) \quad \leftarrow \text{=}$$

$$kT(\mathbf{u}) = 3T(1, 2) = 3((2)(1) + 2, 1 - 2) = 3(4, -1) = (12, -3) \quad \leftarrow \text{=}$$

$T(x, y) = (2x + y, x - y)$  adalah transformasi linear!



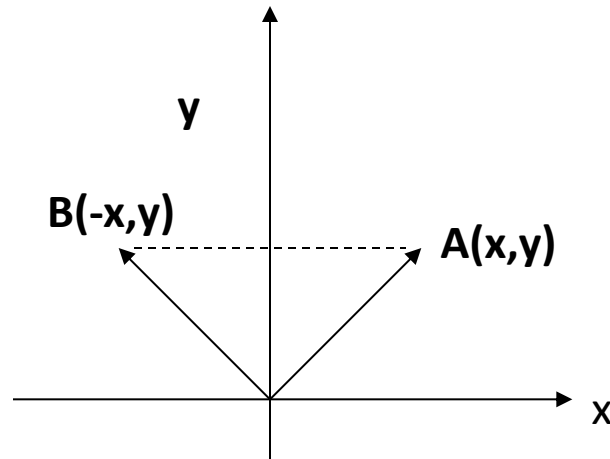
# Operasi Pencerminkan

- **Vektor 2 Dimensi :**

- Pencerminkan terhadap sumbu  $y$  :

$$x' = -x$$

$$y' = y$$



Matriks Standar

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



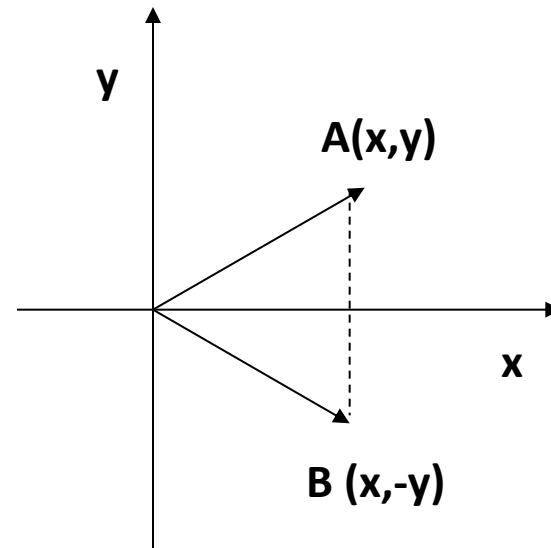
**UNTAR untuk INDONESIA**

# Operasi Pencerminan (...)

- Pencerminan terhadap sumbu  $x$  :

$$x' = x$$

$$y' = -y$$



Matriks Standar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara

Terakreditasi  
BAN PT

A  
linggus

QS STARS  
RATING SYSTEM  
2019

AMBA  
ACCREDITED

IAABE

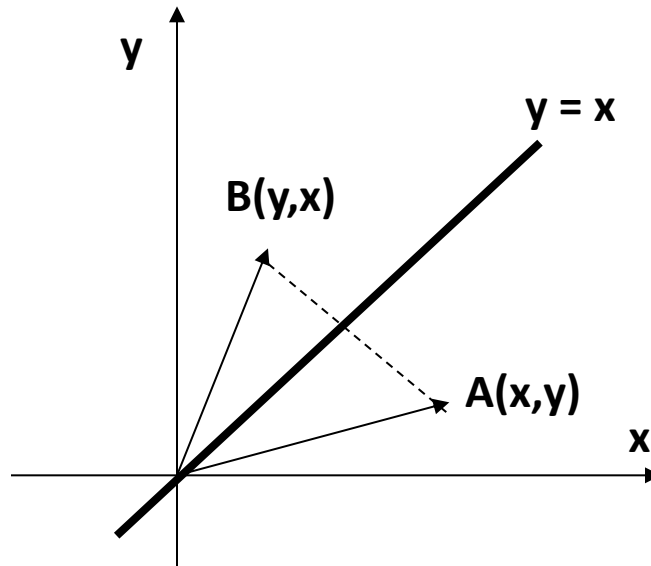
CPA  
AUSTRALIA

ICAEW  
CHARTERED  
ACCOUNTANTS

**UNTAR untuk INDONESIA**

# Operasi Pencerminkan (...)

- Pencerminkan terhadap garis  $y = x$  :



$$x' = y$$

$$y' = x$$

Matriks Standar

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara

Terakreditasi  
BAN PT

A  
linggus

QS STARS  
RATING SYSTEM  
2019

AMBA  
AACSB  
EFMD

CPA  
AUSTRALIA

ICAEW  
CHARTERED  
ACCOUNTANTS

**UNTAR untuk INDONESIA**

# Operasi Pencerminkan (...)

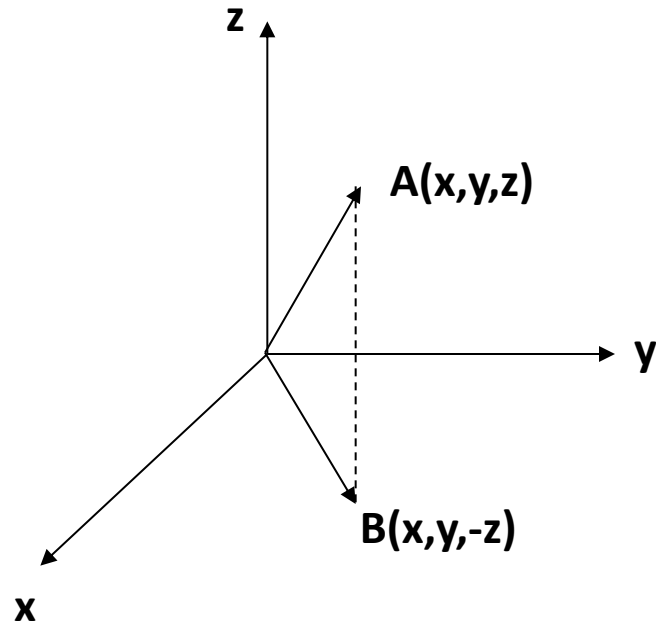
- **Vektor 3 Dimensi**

- Pencerminkan terhadap bidang  $xy$  :

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$z' = -z$$



Matriks Standar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara

Terakreditasi  
BAN PT

A  
lingkup

QS STARS  
RATING SYSTEM  
2019

AMBA  
ACCREDITED

IAABE

CPA  
AUSTRALIA

ICAEW  
CHARTERED  
ACCOUNTANTS

**UNTAR untuk INDONESIA**



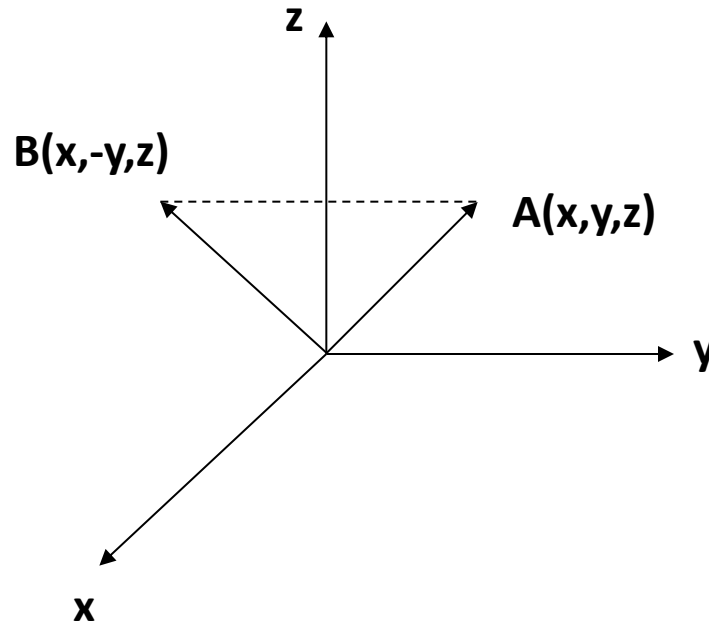
# Operasi Pencerminkan (...)

- Pencerminkan terhadap bidang  $xz$  :

$$x' = x$$

$$y' = -y$$

$$z' = z$$



Matriks Standar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara

Terakreditasi  
BAN PT

A  
lingkup

QS STARS  
RATING SYSTEM  
2019

AMBA  
AACSB  
EFMD

CPA  
AUSTRALIA

ICAEW  
CHARTERED  
ACCOUNTANTS

**UNTAR untuk INDONESIA**

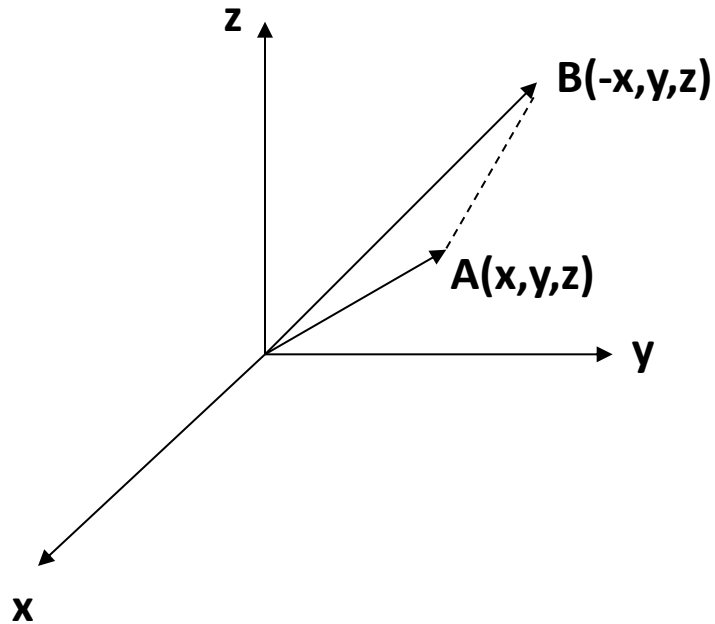
# Operasi Pencerminkan (...)

- Pencerminkan terhadap bidang  $yz$  :

$$x' = -x$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$



Matriks Standar

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara

Terakreditasi  
BAN PT

A  
lingkat

QS STARS  
RATING SYSTEM  
2019

AMBA  
ACCREDITED

IAABE

CPA  
AUSTRALIA

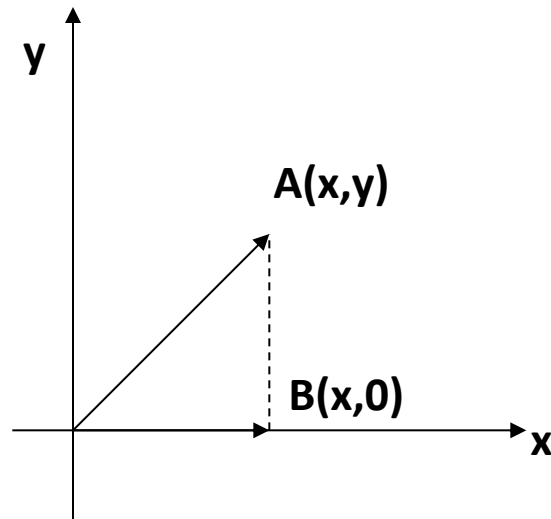
ICAEW  
CHARTERED  
ACCOUNTANTS

**UNTAR untuk INDONESIA**

# Operasi Proyeksi

- **Vektor 2 Dimensi**

- **Proyeksi Ortogonal pada sumbu x :**  $x' = x$   
 $y' = 0$



Matriks Standar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



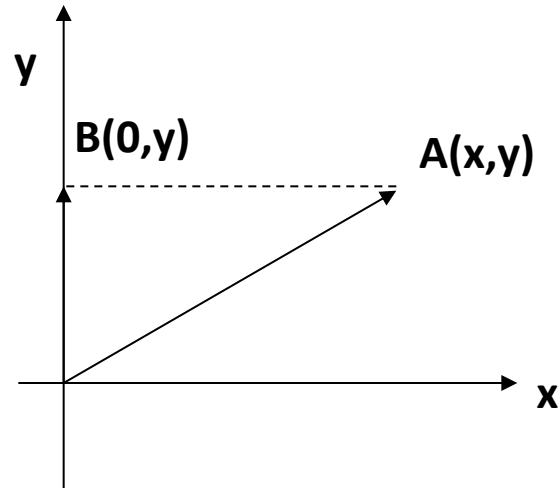
**UNTAR untuk INDONESIA**

# Operasi Proyeksi (...)

- Proyeksi Ortogonal pada sumbu  $y$  :

$$x' = 0$$

$$y' = y$$



Matriks Standar

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara

Terakreditasi  
BAN PT

A  
linggus

QS STARS  
RATING SYSTEM  
2019

AMBA  
ACCREDITED

IAABE

CPA  
AUSTRALIA

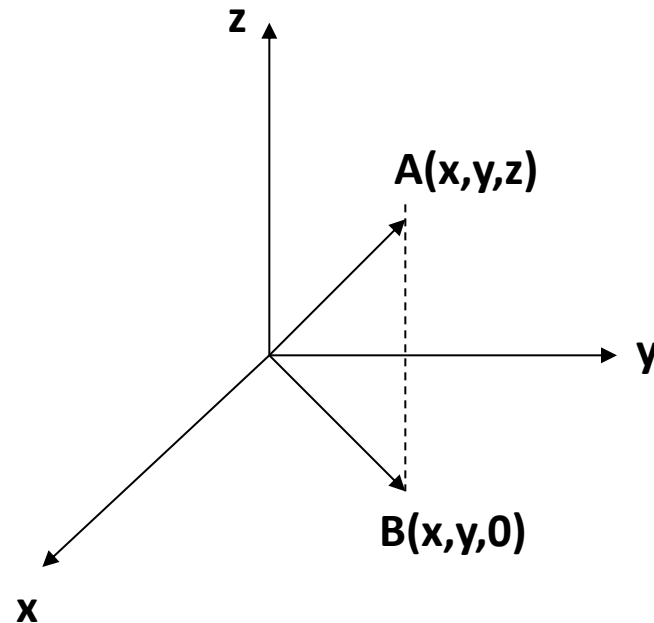
ICAEW  
CHARTERED  
ACCOUNTANTS

**UNTAR untuk INDONESIA**

# Operasi Proyeksi (...)

- **Vektor 3 Dimensi**

- **Proyeksi Ortogonal pada bidang xy :**



$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$z' = 0$$

**Matriks Standar**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



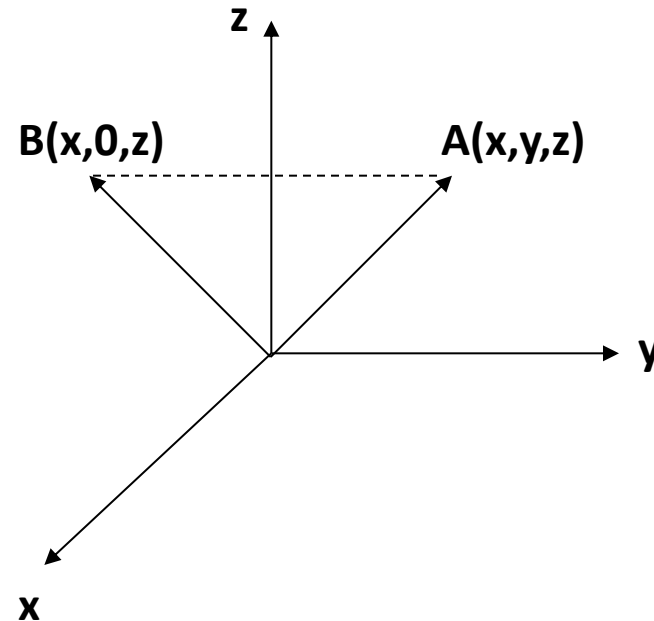
**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR untuk INDONESIA**

# Operasi Proyeksi (...)

- Proyeksi Ortogonal pada bidang  $xz$  :



$$x' = x$$

$$y' = 0$$

$$z' = z$$

Matriks Standar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara

Terakreditasi  
BAN-PT

A  
lingkup

QS STARS  
RATING SYSTEM  
2019

AMBA  
ACCREDITED

IABEE

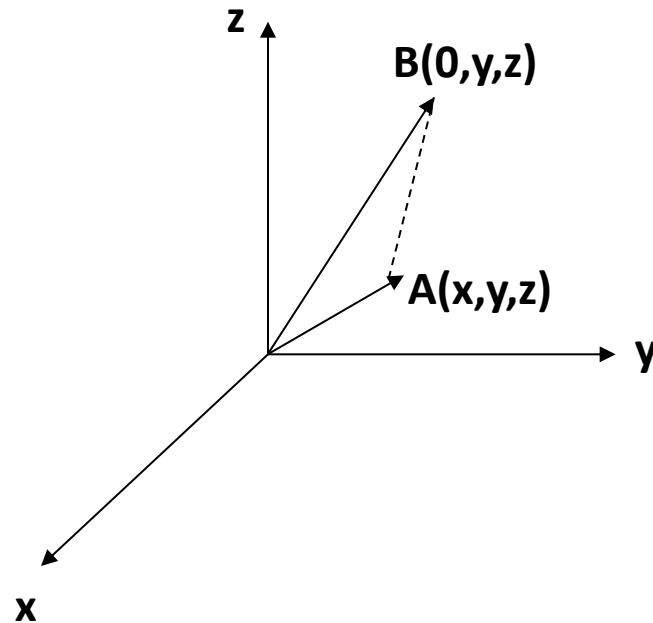
CPA  
AUSTRALIA

ICAEW  
CHARTERED  
ACCOUNTANTS

**UNTAR untuk INDONESIA**

# Operasi Proyeksi (...)

- Proyeksi Ortogonal pada bidang  $yz$  :



$$x' = 0$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Matriks standar

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara

Terakreditasi  
BAN PT

A  
lingkup

QS STARS  
RATING SYSTEM  
2019

AMBA  
ACCREDITED

IABEE

CPA  
AUSTRALIA

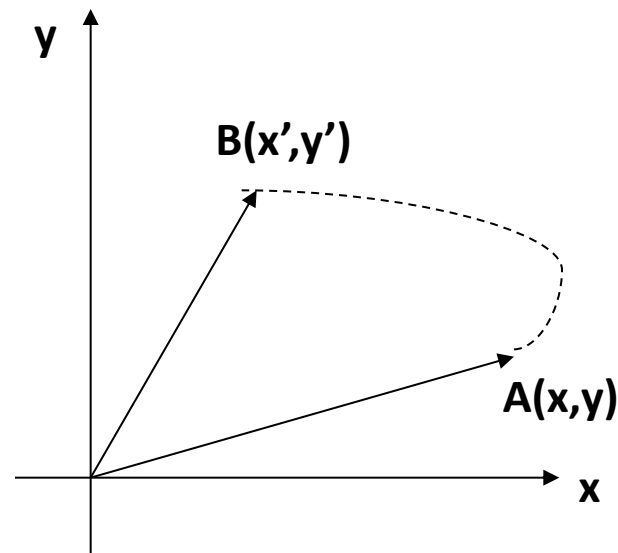
ICAEW  
CHARTERED  
ACCOUNTANTS

**UNTAR untuk INDONESIA**

# Operasi Rotasi

- Vektor 2 Dimensi

- Rotasi dengan Sudut  $\theta$  :



$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

**Matriks Standar**

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



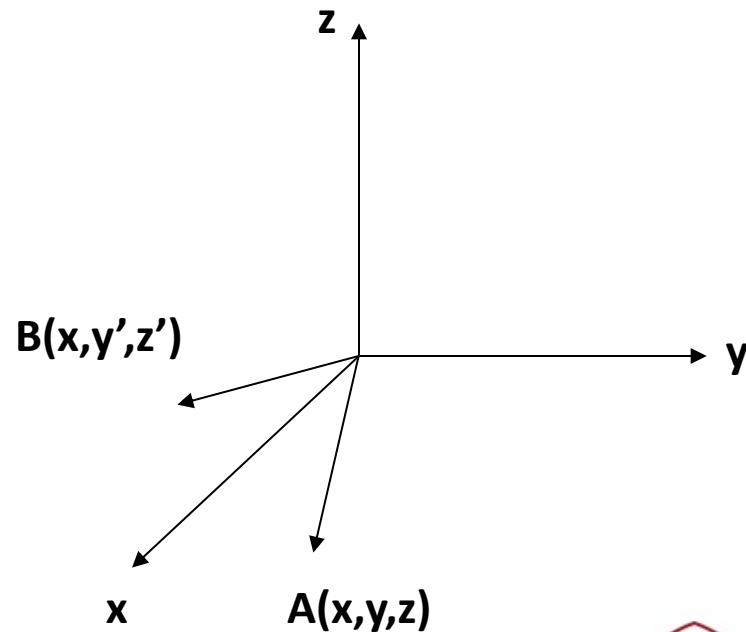
**UNTAR untuk INDONESIA**



# Operasi Rotasi...

- Vektor 3 Dimensi

- Rotasi berlawanan dengan jarum jam terhadap sumbu  $x$  positif dengan sudut  $\theta$  :



$$x' = x$$

$$y' = y \cos \theta - z \sin \theta$$

$$z' = y \sin \theta + z \cos \theta$$

Matriks Standar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



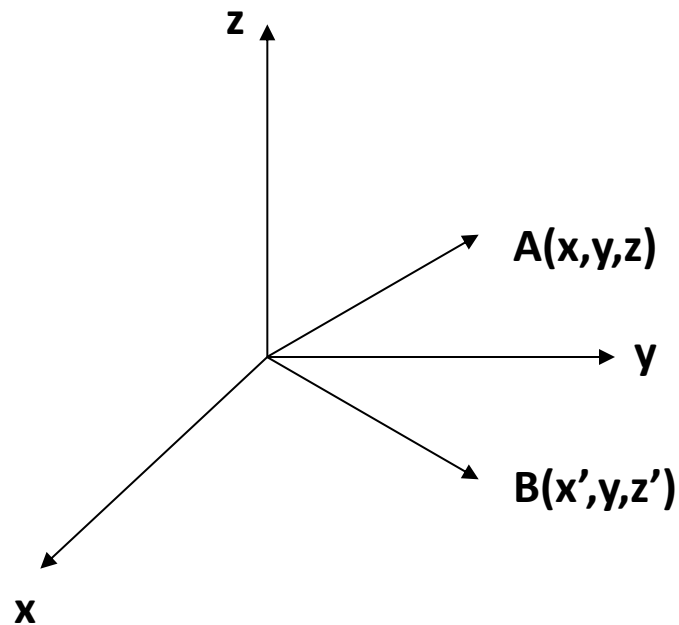
**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR untuk INDONESIA**

# Operasi Rotasi...

- Rotasi berlawanan dengan jarum jam terhadap sumbu  $y$  positif dengan sudut  $\theta$  :



$$x' = x \cos \theta + z \sin \theta$$

$$y' = y$$

$$z' = -x \sin \theta + z \cos \theta$$

**Matriks Standar**

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$



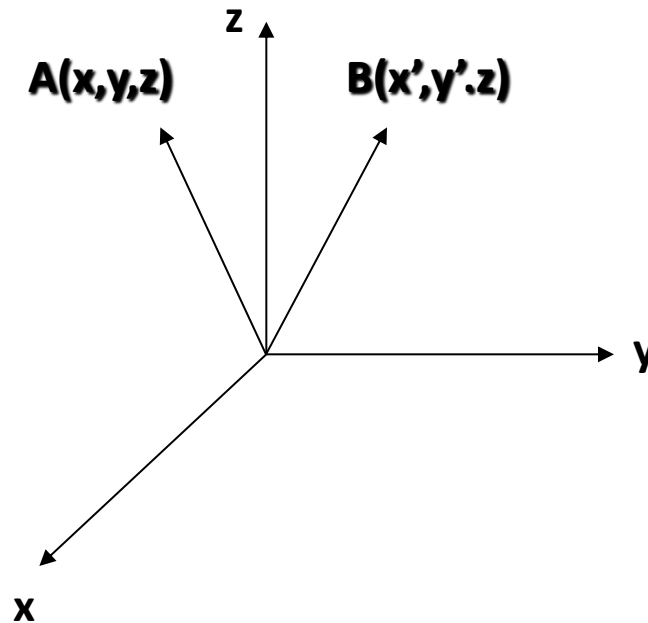
**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR untuk INDONESIA**

# Operasi Rotasi...

- Rotasi berlawanan dengan jarum jam terhadap sumbu z positif dengan sudut  $\theta$  :



$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

**Matriks Standar**

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara

Terakreditasi  
BAN PT

A  
lingkat

QS STARS  
RATING SYSTEM  
2019

AMBA  
ACCREDITED

CPA  
AUSTRALIA

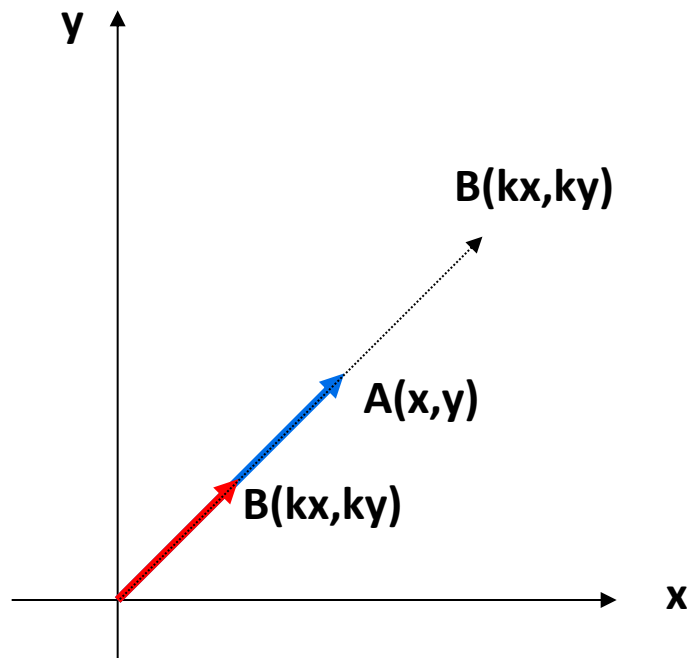
ICAEW  
CHARTERED  
ACCOUNTANTS

**UNTAR untuk INDONESIA**

# Dilatasi

- **Vektor 2 Dimensi**

- **Penyempitan dan Pelebaran dengan faktor k :**



$$x' = kx$$

$$y' = ky$$

Matriks Standar

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara

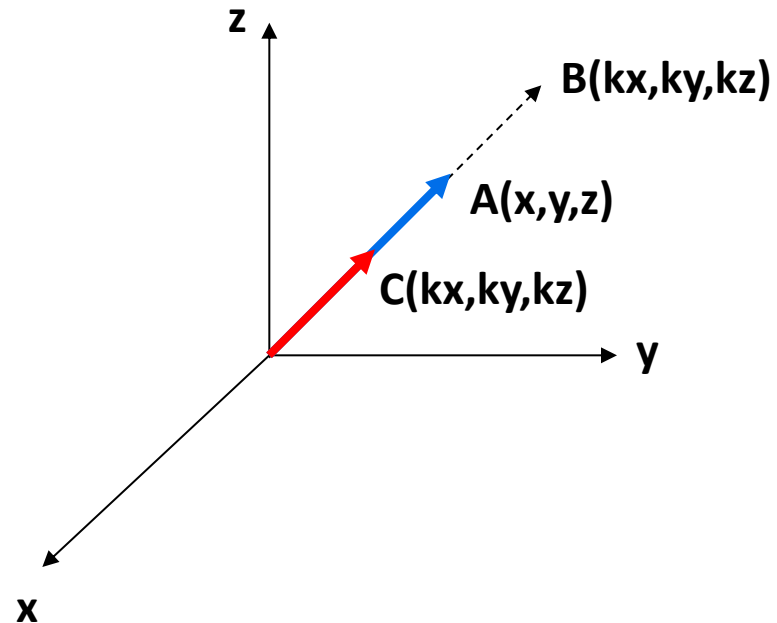


**UNTAR untuk INDONESIA**

# Dilatasi...

- Vektor 3 Dimensi

- Penyempitan dan Pelebaran dengan faktor  $k$  :



$$x' = kx$$

$$y' = ky$$

$$z' = kz$$

Matriks Standar

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara



**UNTAR untuk INDONESIA**

# Latihan Soal

1. (20 poin) Diketahui fungsi  $f = R^2 \rightarrow R^3$  yang didefinisikan dengan  $f(x, y) = (y, -5x + 13y, -7x + 16y)$ . Tunjukkan bahwa fungsi tersebut merupakan transformasi linier.
2. (20 poin) Diketahui tiga titik  $P_1 = (0,1)$ ,  $P_2 = (2,1)$ , dan  $P_3 = (1,3)$  ditransformasikan ke  $R^3$  dengan fungsi di no.1. Selanjutnya setiap titik direfleksikan (dicerminkan) terhadap bidang xz dan dirotasikan berlawanan dengan jarum jam terhadap sumbu y dengan sudut  $45^\circ$ .



**UNTAR**  
Universitas Tarumanagara

Terakreditasi  
BAN PT

A  
lingkat

QS STARS  
RATING SYSTEM  
2019

AMBA  
ACCREDITED

IAABE

CPA  
AUSTRALIA

ICAEW  
CHARTERED  
ACCOUNTANTS

**UNTAR untuk INDONESIA**