Nilai dan Vektor Eigen untuk Diagonalisasi Matriks

TK13023
COMPUTATION II

KELAS A DAN C

DOSEN: LELY HIRYANTO

Diagonalisasi dari Matriks A

- matriks A berukuran $n \times n$
- Mencari nilai eigen dari A
- Jika dari nilai eigen yang diperoleh terbentuk n vektor eigen yang bebas linear, maka matriks A dapat diagonalisasi
  - n vektor eigen yang bebas linear: $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, …, dan $\mathbf{p}_n$
  - Hasil diagonalisasi dari matriks A adalah $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$, dimana $\boldsymbol{P} = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \ldots \mathbf{p}_n]$

Contoh 1: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

persamaan karakteristik dari A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

menggunakan rumus ABC: nilai eigen dari A adalah $\boldsymbol{\lambda = 1}$ **dan** $\boldsymbol{\lambda = 2}$

Contoh 1: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nilai eigen dari A adalah $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$ **dan** $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2}$

Jika $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$, maka $\begin{bmatrix} 3-1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

- Reduksi Baris: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{H_1(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{H_{21}(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
- $x_2 = x_2$ dan $x_1 = -x_2$
- Vektor eigen dari A adalah $v_1 = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$
- asumsi $x_2 = 1$, maka $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Contoh 1: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2}$, maka $\begin{bmatrix} 3-2 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$;

- Reduksi Baris: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{H}_{21}(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
- $x_2 = x_2$ dan $x_1 = -2x_2$
- Vektor eigen dari A adalah $v_2 = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$
- asumsi $x_2 = 1$, maka $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Contoh 1: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$P = [\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Diagonalisasi matriks A = $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Contoh 3: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{bmatrix}$$

persamaan karakteristik dari A:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4 = 0$$

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 4 = -(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

menggunakan rumus ABC hanya untuk $(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$: nilai eigen dari A adalah

$$\boldsymbol{\lambda = 4, \lambda = 2 + \sqrt{3}\,, \lambda = 2 - \sqrt{3}}$$

Contoh 3: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

Nilai eigen dari A adalah $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{4}, \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{3}}\,, \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{3}}$

Jika $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{4}$, $\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 4 & -17 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1

- Reduksi baris: $\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & -17 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{H}_1\left(-\frac{1}{4}\right), \mathrm{H}_2\left(-\frac{1}{4}\right), \mathrm{H}_{31}(-4), \mathrm{H}_{32}(16)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
- $x_3 = x_3\,, x_2 = \frac{1}{4} x_3$, dan $x_1 = \frac{1}{16} x_3$
- Vektor eigen dari A adalah $\begin{bmatrix} \frac{1}{16} x_3 \\ \frac{1}{4} x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \mathbf{\frac{1}{16}} \\ \mathbf{\frac{1}{4}} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$, asumsi $x_3 = 1$, maka $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{\frac{1}{16}} \\ \mathbf{\frac{1}{4}} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Contoh 3: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{3}}$, $\begin{bmatrix} -(2+\sqrt{3}) & -1 & 0 \\ 0 & -(2+\sqrt{3}) & -1 \\ 4 & -17 & 6-\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Reduksi baris: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt{3}-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
- $x_3 = x_3, x_2 = (2-\sqrt{3})x_3, x_1 = (7-4\sqrt{3})x_3$
- Vektor eigen dari A adalah $\begin{bmatrix} (7-4\sqrt{3})x_3 \\ (2-\sqrt{3})x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \mathbf{7-4\sqrt{3}} \\ \mathbf{2-\sqrt{3}} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$, asumsi $x_3 = 1$, maka $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{7-4\sqrt{3}} \\ \mathbf{2-\sqrt{3}} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Contoh 3: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{3}}$, $\begin{bmatrix} \sqrt{3}-2 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}-2 & 1 \\ 4 & -17 & 6+\sqrt{3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Reduksi baris: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\sqrt{3}-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3}-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
- $x_3 = x_3$, $x_2 = (\sqrt{3}+2)x_3$, $x_1 = (4\sqrt{3}+7)x_3$
- Vektor eigen dari A adalah $\begin{bmatrix} \left(4\sqrt{3}+7\right)x_3 \\ (\sqrt{3}+2)x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{7} \\ \sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$, asumsi $x_3 = 1$, maka $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{4}\sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{7} \\ \sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Contoh 3: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$

$$P = [\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \mathbf{7 - 4\sqrt{3}} & \mathbf{4\sqrt{3} + 7} \\ \frac{1}{4} & \mathbf{2 - \sqrt{3}} & \mathbf{\sqrt{3} + 2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 4\left(15\sqrt{3} + 26\right) - \frac{194\sqrt{3}+336}{3} & -15\sqrt{3} - 26 + \frac{67\sqrt{3}+116}{2} & -\frac{26\sqrt{3}+45}{6} \\ \frac{14\sqrt{3}-24}{3} & -\frac{37\sqrt{3}-64}{2} & \frac{26\sqrt{3}-45}{6} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Contoh 4: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

persamaan karakteristik dari A:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 = 0$$

Nilai eigen dari A adalah $\boldsymbol{\lambda = 1}$ dan $\boldsymbol{\lambda = 5}$

A bisa didiagonalisasi?

Contoh 4: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Jika $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$, $\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Reduksi baris: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{H}_1\left(\frac{1}{2}\right),\mathrm{H}_3\left(\frac{1}{4}\right),\mathrm{H}_{21}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$
- $x_1 = x_2$, $x_2 = x_2$ dan $x_3 = 0$
- Vektor eigen dari A adalah $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, asumsi $x_2 = 1$, maka $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Contoh 4: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Jika $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{5}$, $\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

- Reduksi baris: $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{H}_1\left(-\frac{1}{2}\right), \mathrm{H}_{21}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
- $x_1 = -x_2$, $x_2 = x_2$, dan $x_3 = x_3$
- Vektor eigen dari A adalah $\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- asumsi $x_2 = 1$ dan $x_3 = 1$, maka $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Contoh 3: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$$P = [\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal

Tentukan matriks P dan hasil diagonaliasi $P^{-1}AP$ (jika ada) dari matriks A berikut ini:

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$