IMPLEMENTASI VEKTOR & MATRIKS

TK13023
COMPUTATION II

KELAS B DAN C

DOSEN: LELY HIRYANTO

Review Nilai dan Vektor Eigen

Rumus Vektor Eigen untuk Matriks 2×2

$(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = 0$ untuk $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ dan λ_i adalah satu atau dua nilai eigen untuk matriks A

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dari hasil reduksi, **baris pertama atau kedua selalu 0**, dengan bentuk umum vektor eigen:

$v_i = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ untuk $x_1 = 1$, atau

$v_i = x_2 \begin{bmatrix} u_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ 1 \end{bmatrix}$ untuk $x_2 = 1$

ICAEW CHARTERED ACCOUNTANTS

Rumus Vektor Eigen untuk Matriks 2×2

Vektor eigen dari A untuk setiap lambda λ_i:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} (a_{11}-\lambda_i)u_1 + a_{12} \\ a_{21}u_1 + (a_{22}-\lambda_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hasil eliminasi (reduksi) menghasilkan persamaan kedua 0, maka persamaan pertama digunakan untuk mencari variable u_1:

$$(a_{11}-\lambda_i)u_1 + a_{12} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (a_{11}-\lambda_i)u_1 = -a_{12} \quad \Longrightarrow \quad u_1 = \frac{-a_{12}}{a_{11}-\lambda_i}$$

maka

$$\boldsymbol{v_i} = \begin{bmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{a_{12}}}{\boldsymbol{a_{11}}-\boldsymbol{\lambda_i}} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Rumus Vektor Eigen untuk Matriks 2×2

Vektor eigen dari A untuk setiap lambda λ_i:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} (a_{11}-\lambda_i)+a_{12}u_2 \\ a_{21}+(a_{22}-\lambda_i)u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

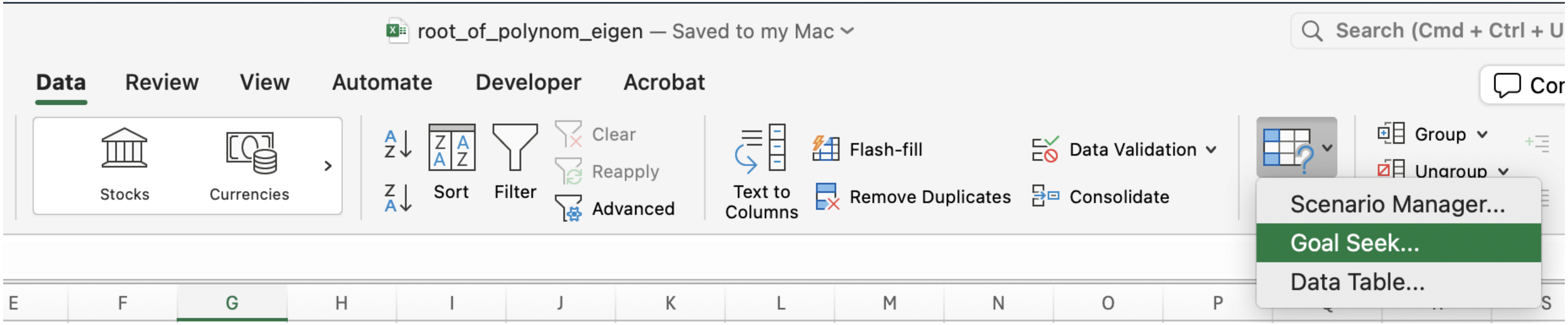
Jika hasil eliminasi (reduksi) menghasilkan persamaan pertama 0, maka persamaan kedua digunakan untuk mencari variable u_1:

$$a_{21}+(a_{22}-\lambda_i)u_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (a_{22}-\lambda_i)u_2 = -a_{21} \quad \Longrightarrow \quad u_1 = \frac{-a_{21}}{a_{22}-\lambda_i}$$

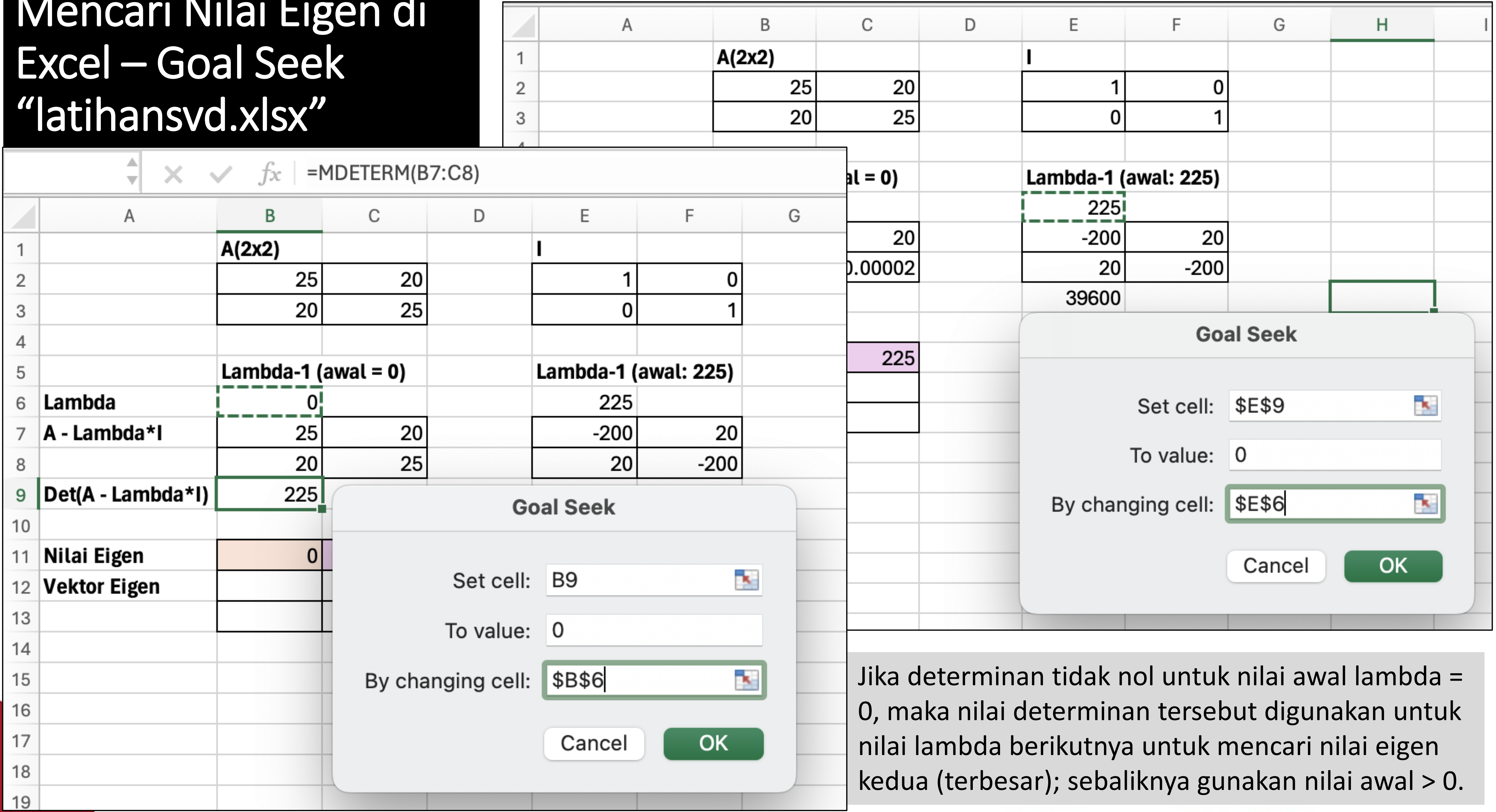
maka

$$\boldsymbol{v_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \dfrac{-\boldsymbol{a_{21}}}{\boldsymbol{a_{22}-\lambda_i}} \end{bmatrix}$$

Mencari Nilai Eigen di Excel – Goal Seek



Mencari Nilai Eigen di Excel – Goal Seek “latihansvd.xlsx”



Jika determinan tidak nol untuk nilai awal lambda = 0, maka nilai determinan tersebut digunakan untuk nilai lambda berikutnya untuk mencari nilai eigen kedua (terbesar); sebaliknya gunakan nilai awal > 0.

Rumus Vektor Eigen Matrix 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Jika reduksi membuat baris pertama 0, dengan bentuk $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ untuk $x_1 = 1$

Vektor eigen dari A untuk setiap lambda λ_i:

$$\begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_i & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_i & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

Rumus Vektor Eigen Matrix 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dari hasil reduksi, jika baris kedua 0, dengan bentuk $x_2 \begin{bmatrix} u_1 \\ 1 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ 1 \\ u_3 \end{bmatrix}$ untuk $x_2 = 1$

Vektor eigen dari A untuk setiap lambda λ_i:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

Rumus Vektor Eigen Matrix 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dari hasil reduksi, jika baris ketiga 0, dengan bentuk $x_3 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ untuk $x_3 = 1$

Vektor eigen dari A untuk setiap lambda λ_i:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

Cek excel ‘latihansvd.xlsx’ di sheet ‘eigen’ untuk perhitungan.

Singular Value Decomposition (SVD)

Implementasi Matriks dan Eigen

SVD?

- Faktorisasi matriks A berukuran $m \times n$ ke tiga matriks
  - Matriks U ($m \times n$), yaitu matriks orthogonal dari $A^T \times A$ atau disebut ***matrix of orthonormal eigenvectors*** dari A
  - Matriks S ($n \times n$), yaitu matriks diagonal atau disebut ***matrix of singular values*** yang merupakan akar dari nilai eigen
  - Matriks V ($n \times n$), ***matrix of orthonormal eigenvectors*** dari A.
- Berfungsi optimal untuk sparse data
- Umumnya digunakan untuk mereduksi dimensi matriks input ke dimensi ruang yang lebih kecil (ukuran matriks lebih kecil dengan jumlah variabel atau atribut yang lebih kecil).

Implementasi SVD

- Image Compression (Data Image)
  - Image berwarna berukuran $m \times n$ piksel memiliki 3 matriks warna: Red, Green, dan Blue
  - Satu image 3 matriks: matriks Red, Matriks Green, Matriks Blue
- Latent Semantic Analysis (Data Text)
  - Contoh: Latent Semantic Analysis (arti dari sebuah kalimat)
    - m terms
    - n kalimat
- Recommendation Systems (Data Text):
  - Contoh: rekomendasi film
    - m orang yang memberikan rekomendasi
    - n film

Tahapan SVD

Cek excel ‘latihansvd.xlsx’ di sheet ‘svd’ untuk contoh perhitungan.

Diketahui data A dalam bentuk matriks berukuran $m \times n$.

1. Hitung $A^T \times A$
2. Hitung semua nilai eigen dan vektor eigen dari dari matriks yang dihasilkan pada no. 1
3. Bentuk matriks V dari semua vektor eigen yang dihasilkan di no. 2 dan telah dinormalisasi (dibentuk menjadi unit vektor)
4. Bentuk matriks singular S, yaitu matriks diagonal dimana setiap diagonalnya adalah akar dari nilai eigen yang diperoleh di no. 2
5. Bentuk matriks $U = A \times V \times S^{-1}$
6. Rekonstruksi matriks: $A = U \times S \times V^T$

SVD untuk $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 20 & 25 \end{bmatrix}$$

Nilai Eigen: $|A^T A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 25-\lambda & 20 \\ 20 & 25-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 50\lambda + 225 = (\lambda - 5)(\lambda - 45) = 0$$

$\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{5}$ **dan** $\boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{45}$

SVD untuk $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$

Urutkan vektor eigen dari terbesar ke terkecil!

Vektor Eigen untuk $\lambda_1 = 45$

$$\begin{bmatrix} 25-45 & 20 \\ 20 & 25-45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 20 \\ 20 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -20 & 20 \\ 20 & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{1\left(-\frac{1}{20}\right)}, H_{21(-20)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \end{matrix}$$

$x_2 = 1$, maka $\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \frac{-a_{12}}{a_{11}-\lambda_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-20}{25-45} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektor Eigen untuk $\lambda_2 = 5$

$$\begin{bmatrix} 25-5 & 20 \\ 20 & 25-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{1\left(\frac{1}{20}\right)}, H_{21(-20)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{matrix} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \end{matrix}$$

$x_2 = 1$, maka $\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} \frac{-a_{12}}{a_{11}-\lambda_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-20}{25-5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

SVD untuk $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$

Normaliasi vektor eigen:

$\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \|\mathrm{V}_1\| = \sqrt{2}$

$$\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \|\mathrm{V}_2\| = \sqrt{2}$

$$\mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$$

SVD untuk $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$

Matriks Singular $S = \begin{bmatrix} \sqrt{45} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.708 & 0 \\ 0 & 2.236 \end{bmatrix}$

Bentuk Matriks $U = A \times V \times S^{-1}$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.149 & 0 \\ 0 & 0.447 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.149 & 0 \\ 0 & 0.447 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.316 & -0.949 \\ 0.949 & 0.316 \end{bmatrix}$$

SVD untuk $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$

Rekonstruksi Matriks $A = U \times S \times V^T$

$$\begin{bmatrix} 0.316 & -0.949 \\ 0.949 & 0.316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.708 & 0 \\ 0 & 2.236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A$$

Contoh SVD dalam Latent Semantic Analysis

Data frekuensi kata

Term	K1	K2	K3
Bahasa	1	1	0
Bali	0	0	1
Belajar	1	0	1
Budi	1	0	0
Indonesia	1	1	1
favourit	0	0	1
milik	0	1	0
Tempat	0	0	1
wisata	0	0	1

Matriks dari kata

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SVD: Data ke matriks

Representasi Kata dalam Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transpose Matriks A

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

SVD: Nilai Eigen

- Hitung $A^T A$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
=
\begin{pmatrix}
4 & 2 & 1 \\
2 & 3 & 1 \\
1 & 1 & 5
\end{pmatrix}
$$

Dihitung dengan bantuan Excel ("svd.xlsx"): $\lambda_1 = 1.429, \lambda_2 = 3.857, \lambda_3 = 6.714$

SVD: Vektor Eigen

Dihitung dengan bantuan Excel (”svd.xlsx”)

- Urutkan SVD menurun: nilai eigen terbesar ke terkecil

$$\lambda_1 = 6.714, \quad \lambda_2 = 3.857, \quad \lambda_3 = 1.429$$

Vector Eigen

$$\begin{pmatrix} 0.939 \\ 0.775 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.693 \\ -0.450 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10.750 \\ -14.320 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Norm

$\sqrt{0.939^2 + 0.775^2 + 1^2}$ = 1.576   1.297   17.934

Normalized Vector Eigen

$$\begin{pmatrix} 0.939/1.576 = 0.596 \\ 0.492 \\ 0.635 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -0.534 \\ -0.347 \\ 0.771 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.599 \\ -0.799 \\ 0.056 \end{pmatrix}$$

Matriks V

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0.596} & \mathbf{-0.534} & \mathbf{0.599} \\ \mathbf{0.492} & \mathbf{-0.347} & \mathbf{-0.799} \\ \mathbf{0.635} & \mathbf{0.771} & \mathbf{0.056} \end{pmatrix}$$

SVD: Matriks Singular dan U

Matriks Singular $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \sqrt{6.714} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3.857} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1.429} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2.591} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1.964} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1.195} \end{bmatrix}; \; S^{-1} \begin{bmatrix} 0.386 & 0 & 0 \\ 0 & 0.509 & 0 \\ 0 & 0 & 0.837 \end{bmatrix}$

Matriks $\boldsymbol{U} = A \times V \times S^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0.4198684} & \mathbf{-0.448751} & \mathbf{-0.1665444} \\ \mathbf{0.24490045} & \mathbf{0.39251339} & \mathbf{0.04664723} \\ \mathbf{0.23006404} & \mathbf{-0.2719789} & \mathbf{0.50146948} \\ \mathbf{0.23006404} & \mathbf{-0.2719789} & \mathbf{0.50146948} \\ \mathbf{0.66476885} & \mathbf{-0.0562376} & \mathbf{-0.1198971} \\ \mathbf{0.24490045} & \mathbf{0.39251339} & \mathbf{0.04664723} \\ \mathbf{0.18980435} & \mathbf{-0.1767722} & \mathbf{-0.6680138} \\ \mathbf{0.24490045} & \mathbf{0.39251339} & \mathbf{0.04664723} \\ \mathbf{0.24490045} & \mathbf{0.39251339} & \mathbf{0.04664723} \end{pmatrix}$$

SVD: Rekontruksi Matriks A

Matriks $A = U \times S \times V^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Truncated SVD: Reduksi Dimensi

- k-*Truncated* SVD dari matriks A mempertahankan hanya $k \leq n$ nilai singular (s_i) pertama dari matriks singular S dan k kolom pertama dari matriks U dan V.

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} s_i u_i v_i^T \approx A$$

- Matriks A_k berisi nilai yang mendekati A.

Soal Latihan

Diketahui dataset hasil rating dari 7 users untuk 3 film yang mereka review (‘**datasvd.xlsx**’). Hitunglah

1. (20 poin) Nilai Eigen dan Vektor Eigen
2. (20 poin) Matriks V
3. (20 poin) Matriks S
4. (20 poin) Matriks U
5. (20 poin) Rekontruksi matriks A menggunakan matriks V, S dan U