INVERS DARI MATRIKS

TK13029
COMPUTATION II

Definisi

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Jika A adalah matriks kuadrat (bujur sangkar), dan jika kita dapat mencari matriks B sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers (*inverse*) dari A.
- Contoh:
  - $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
  - $AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$
  - $BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$
- Jika A dapat dibalik maka inversnya dinotasikan dengan symbol A^{-1}

Apakah matriks berikut *invertible* ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Mencari A^{-1}, B^{-1}, dan D^{-1}!

Metode Adjoin

Teorema & Definisi

- Teorema
  - Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka
  - $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$
- Definisi:

Jika A adalah matriks $n \times n$ dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij}, maka matriks

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

dinamakan matriks kofaktor A. Transpose matriks konfaktor A dinamakan ***adjoin A*** dan dinyatakan dengan $\mathbf{adj}(\boldsymbol{A})$

Minor dan Kofaktor

- Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka ***minor anggota*** a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan sub-matriks yang masih tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

- Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan disebut ***kofaktor anggota*** a_{ij}.

$$C_{11} = (-1)^{1+1}.M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}.M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Matriks Kofaktor: Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriks Kofaktor (C) untuk matriks A:

$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekspansi Kofaktor

- Ekspansi Kofaktor sepanjang kolom ke j
  - $\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$

- Ekspansi Kofaktor sepanjang baris ke i
  - $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$

Determinan dan Invers dari Matriks A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekspansi kofaktor sepanjang baris ketiga!

$$\det(A) = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$$

$$\det(A) = (1)(-9) + (0)(3) + (8)(1) = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)}\begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Metode Gauss Jordan

Transformasi Elementer pada Baris Matriks

- Memperkalikan baris ke i dengan skalar λ ≠ 0, ditulis $H_{i(\lambda)}$ (A)

  - $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka $H_{2(-2)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $H_{3\left(\frac{1}{2}\right)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

- Menambah baris ke i dengan λ kali baris ke j, ditulis $H_{ij(\lambda)}(A)$

  - $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka $H_{31(1)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ dan $H_{23(-1)}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Gauss Jordan: Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1. $H_{21(-2)}$
2. $H_{31(-1)}$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. $H_{32(2)}$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

4. $H_{3(-1)}$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

5. $H_{23(3)}$
6. $H_{13(-3)}$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

7. $H_{12(-2)}$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Modular Inverse of a Matrix

Cryptography – Cyber Security

UNTAR
Universitas Tarumanagara

UNTAR untuk INDONESIA

Modular Inverse dari Matriks $\boldsymbol{A}$

- Semua elemen di matrix A harus bilangan bulat dan positif.
- Matriks A harus invertible (memiliki A^{-1})
- Bentuk:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \pmod m$$

- $\mathrm{GCD}(\det(A), m) = 1$

Contoh: Inverse Matriks $\boldsymbol{A}$ dalam modulo 11

$$A(\text{mod } 11) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} (\text{mod } 11)$$

1. Hitung matriks kofaktor modulus 11:

$$C = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix} (\text{mod } 11) = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Ekspansi kofaktor pada baris ketiga:

$$\det(A) = (a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33})\ (\text{mod } 11)$$

$$\det(A) = \big((1)(2) + (0)(3) + (8)(1)\ (\text{mod } 11)\big) = 10$$

3. Metode Adjoin

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} (\text{mod } 11)$$

$$\frac{1}{10} (\text{mod } 11) = 10^{-1} (\text{mod } 11) = 10$$

$$A^{-1} = 10 \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 & 60 & 20 \\ 90 & 50 & 30 \\ 60 & 20 & 10 \end{bmatrix} (\text{mod } 11)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Contoh: Inverse Matriks $\boldsymbol{A}$ dalam modulo 11

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 8 \\ 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \pmod{11} = \begin{bmatrix} 23 & 44 & 55 \\ 33 & 67 & 88 \\ 44 & 77 & 89 \end{bmatrix} \pmod{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soal Latihan

Tentukan invers matriks A dan B berikut dan tuliskan dengan rinci proses perhitungan:

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ dengan Metode AdJoin (50 poin)

2. $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ dengan Gauss Jordan (50 poin)