

# Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса. (1.2.3)

Лавыгин Кирилл

10 ноября 2022

## 1 Аннотация

В ходе работы будет измерен момент инерции различных тел, проверена предложенная теоретическая зависимость. Так-же будет проверенна аддитивность моментов инерции и теорема Гюйгенса-Штейнера. Используемое оборудование: трифилярный подвес; секундомер; счетчик числа колебаний; набор тел, момент инерции которых нужно измерить.

## 2 Экспериментальная установка

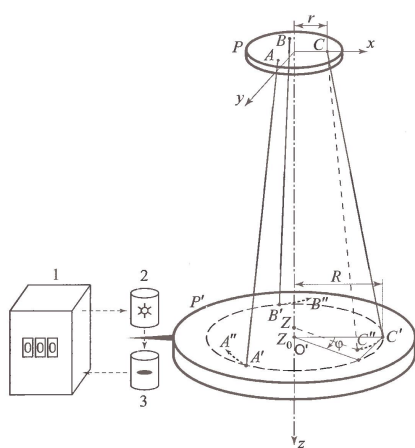


Рис. 1: Трифилярный подвес

Для наших целей удобно использовать устройство, показанное на Рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы  $P$  и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ , вращающейся платформы  $P'$ .

Чтобы не вызывать дополнительных раскачиваний, лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси. После поворота верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа  $P'$  оказывается повернутой на угол  $\varphi$  относительно верхней платформы  $P$ , возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. В результате платформа совершает крутильные колебания.

## 3 Теоретические сведения

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле:

$$I = \int r^2 dm$$

Здесь  $r$  – расстояние элемента массы тела  $dm$  от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела  $m$ .

Если пренебречь потерями энергии на трение о воздух и крепление нитей, то уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E \quad (1)$$

Здесь  $I$  – момент инерции платформы вместе с исследуемым телом,  $m$  – масса платформы с телом,  $\varphi$  – угол поворота платформы от положения равновесия системы,  $z_0$  – координата по вертикали центра нижней платформы  $O'$  при равновесии ( $\varphi = 0$ ),  $z$  – координата той же точки при некотором угле поворота  $\varphi$ . Первый член в левой части уравнения – кинетическая энергия вращения, второй член – потенциальная энергия в поле тяжести,  $E$  – полная энергия системы (платформы с телом).

Воспользуемся системой координат  $x, y, z$ , связанной с верхней платформой, как показано на Рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки  $C$  в этой системе –  $(r, 0, 0)$ . Нижний конец данной нити  $C''$ , находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты  $(R, 0, z_0)$ , а при повороте платформы на угол  $\varphi$  эта точка переходит в  $C'''$  с координатами  $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$ . расстояние между точками  $C$  и  $C'''$  равно длине нити, поэтому, после некоторых преобразований, получаем:

$$\begin{aligned} (R\cos\phi - r)^2 + R^2\sin^2\phi + z^2 &= L^2 \\ z^2 &= L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\phi \approx z_0^2 - 2Rr(1 - \cos\phi) \approx z_0^2 - Rr\phi^2 \\ z &= \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0} \end{aligned}$$

Подставляя  $z$  в уравнение (1), получаем:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E$$

Дифференцируя по времени и сокращая на  $\dot{\varphi}$ , находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = 0$$

Производная по времени от  $E$  равна нулю, так как потерями на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}}t + \theta\right)$$

Здесь амплитуда  $\varphi_0$  и фаза  $\theta$  колебаний определяются начальными условиями. Период крутильных колебаний нашей системы равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}}$$

Из формулы для периода получаем:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2z_0} = kmT^2 \quad (2)$$

где  $k = \frac{gRr}{4\pi^2z_0}$  – величина, постоянная для данной установки.

## 4 Задание

### 4.1 Проверка установки

При возбуждении крутильных колебаний маятникообразных движений платформы не наблюдается – устройство функционирует нормально.

При выводе формул мы предполагали, что потери энергии, связанные с трением, малы, то есть мало затухание колебаний. Это значит, что теоретические вычисления будут верны, если выполняется условие:

$$\tau \gg T$$

Проверим данное условие. На нашей установке амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза за 31 колебание. Соотношение выполняется – установка пригодна для проведения эксперимента. Начальное отклонение было выбрано  $\alpha \approx 15^\circ$ .

### 4.2 Параметры установки и коэффициент $k$

$m$ , г	$R$ , мм	$r$ , мм	$L$ , см	$z_0$ , см
1012.5	114.5	30.5	215	215
$\sigma_m$ , г	$\sigma_R$ , мм	$\sigma_r$ , мм	$\sigma_L$ , см	$\sigma_{z_0}$ , см
0.5	0.5	0.3	1	1

Таблица 1: Параметры установки

где  $\sigma_m$ ,  $\sigma_R$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_L$ ,  $\sigma_{z_0}$  – погрешности соответствующих величин.

По полученным данным вычислим постоянную для конструкции №3:

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \approx 4.040 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

Погрешность же  $k$  будет равна:

$$\sigma_k = k \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{z_0}}{z_0}\right)^2} \approx 0,05 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

### 4.3 Момент инерции платформы

Определить момент инерции платформы можно по формуле (2). Для этого нам необходимо определить период колебаний ненагруженной платформы. Измеряем период, получаем:

Амплитуда $A$ , °	Время колебаний $t$ , с	Число колебаний $n$	Период колебаний $T$
20	136.7	31	4.410
15	136.2	31	4.394
10	131.6	30	4.387
30	133.7	30	4.457
28	132.5	30	4.416
30	132.3	30	4.411
30	132.7	30	4.427

Видно, что во время четвертого опыта что-то произошло и показания в нём сильно отличаются от средних, поэтому учитывать его в дальнейшем мы не будем

Тогда, средний период колебания платформы будет:

$$T_{\text{ср}} \approx 4,407 \text{ с}$$

Рассчитаем его погрешность:

$$\sigma_T^{\text{сист}} = 0,003 \text{ с}$$

$$\sigma_T^{\text{случ}} = \sigma_{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{изм}} (N_{\text{изм}} - 1)} \sum_{i=1}^{N_{\text{изм}}} (T_{\text{ср}} - T_i)^2} \approx 0,014, \text{ с}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2} \approx 0,014, \text{ с}$$

Значит  $T_{\text{ср}} = (4,407 \pm 0,014)$ , с. Теперь мы можем определить момен инерции платформы:

$$I_{\text{пл}} = kmT^2 \approx 7.944 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Найдем погрешность найденного нами момента инерции платформы:

$$\varepsilon_I = \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_T}{T}\right)^2} \approx 0.016$$

$$\sigma_{I_{\text{пл}}} = \varepsilon_I \cdot I_{\text{пл}} \approx 0,13 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Получаем, что с помощью данной конструкции мы можем определять момент инерции тела с погрешностью 1.6%, и  $I_{\text{пл}} = (7,944 \pm 0,13) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

#### 4.4 Определение моментов инерции различных тел. Аддитивность моментов инерции

Измерим периоды колебаний платформы с различными телами таким же образом, как и для ненагруженной платформы,  $n$  – число измерений:

Вращающиеся тела	$t, \text{с}$	$n$	Период $T$	Масса установки $m, \text{г}$	$I \cdot 10^3, \text{кг} \cdot \text{м}^2$
Только платформа	135.95	31	4.385	1012.5	7.87
Обод	136.46	32	4.264	1596.9	11.73
Диск	130.21	33	3.946	1750.2	11.01
Обод+Диск	119.68	30	3.989	2334.6	15.01

Таблица 2: Моменты инерции платформы с различными телами

Для подтверждения аддитивности необходимо показать, что выполняются условия:

$$I_{\text{пл+об}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{ц}} \quad (3)$$

$$I_{\text{пл+д}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{д}} \quad (4)$$

$$I_{\text{пл+д+об}} = I_{\text{пл}} + I_{\text{ц}} + I_{\text{д}} \quad (5)$$

Из Таблицы (2) и формул (3), (4) мы можем найти момент инерции обода и кольца:  $I_{\text{об}} = I_{\text{пл+об}} - I_{\text{пл}} = (3.9 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$ , а  $I_{\text{д}} = I_{\text{пл+д}} - I_{\text{пл}} = (3.1 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$ .

Тогда, для доказательства аддитивности, проверим уравнение (5):  $I_{\text{пл}} + I_{\text{ц}} + I_{\text{д}} = 14.9 \pm 0.6 \cdot 10^{-3}, \text{кг} \cdot \text{м}^2 \approx I_{\text{пл+д+об}}$ . Оно выполняется, следовательно моменты инерции аддитивны.

Теперь сравним полученные нами моменты инерции для тел, и их теоретические значения:  
 Для диска:  $I_d = \frac{1}{2}m_d R_d^2$ . Радиус данного цилиндра  $R_d = 85.05$  мм, тогда  $I_d = 2.7 \cdot 10^{-3}$ , кг · м<sup>2</sup>, что, к сожалению, выходит за пределы погрешности полученного значения, но в нашем расчете так же присутствует погрешность, так что эти два диапазона пересекаются

Для обода же сильно сложнее т.к. оно явно не является тонким:  $I_{об} = \pi \rho (R_{внеш}^4 - R_{внут}^4) / 2$ , где  $\rho = m / (\pi (R_{внеш}^2 - R_{внут}^2))$ .  $m = 584.4$  г,  $R_{внеш} = 83.35$  мм,  $R_{внут} = 78.65$  мм. Получаем, что  $I_k = 3.8 \cdot 10^{-3}$  кг · м<sup>2</sup>, тут рассчитанное значение уже совпадает с измеренным.

#### 4.5 Зависимость момента инерции системы тел от их расположения. График зависимости $I(h^2)$

Определим зависимость момента инерции системы двух тел от их взаимного расположения. Для этого располагая грузы, как показано на рис. 2, получим зависимость от расстояния. Затем Используя формулу 2, определим зависимость  $I(h^2)$ .

Полученные результаты измерений занесем в таблицу (4.5). Основываясь на результатах таблицы, построим график зависимости  $I(h^2)$  (Рис. 4.5).

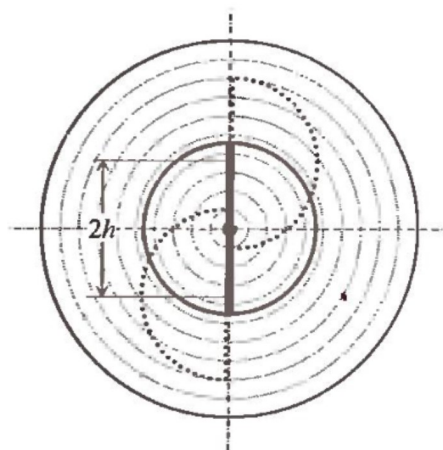
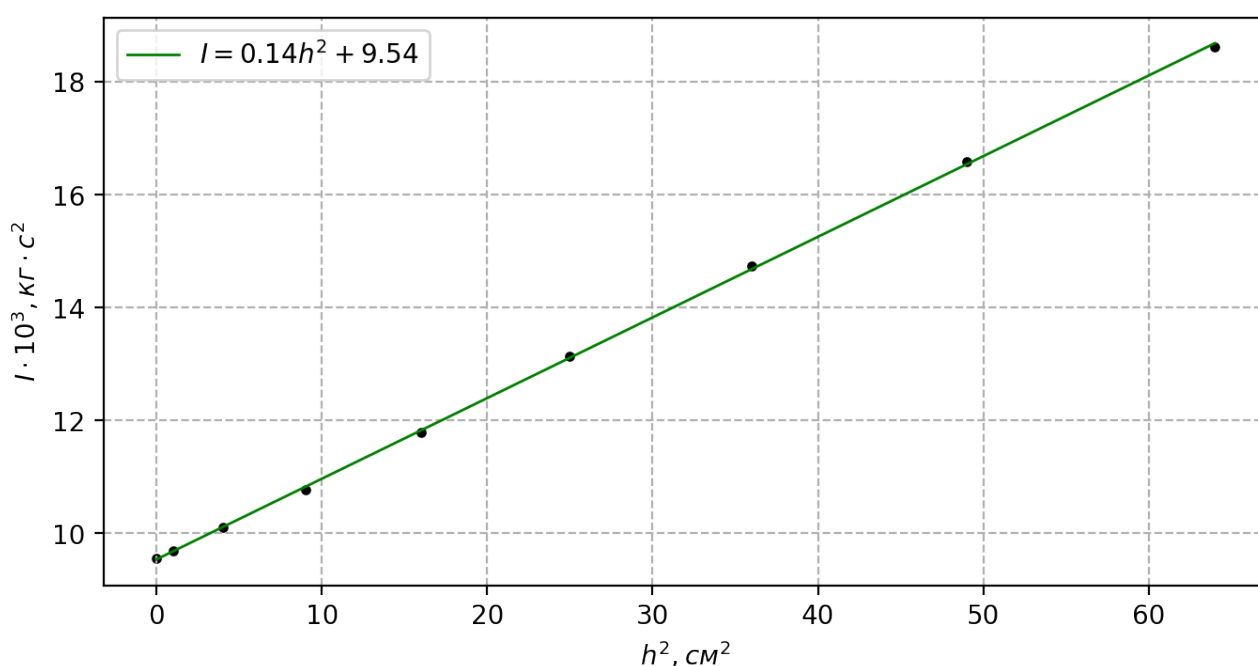


Рис. 2: Схема расположения грузов.

Число делений	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$h$ , см	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$t$ , с	96.76	100.56	99.48	106.04	114.34	117.05	127.90	135.68	130.69
Число колебаний $n$	31	32	31	32	33	32	33	33	30
Период $T$ , с	3.1213	3.1425	3.2090	3.3138	3.4648	3.6578	3.8758	4.1115	4.3563
$I \cdot 10^3$ , кг · м <sup>2</sup>	9.56	9.69	10.11	10.78	11.78	13.13	14.74	16.59	18.62



По графику понятно, что  $I = kh^2 + b$ . Тогда  $b$  – момент инерции платформы + диска. Для вычисления коэффициентов  $k$  и  $b$  воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 1.429 \text{ кг}$$

$$b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle \approx 9.54 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 ,$$

где  $x = h^2$ ,  $y = I$ .

Случайные погрешности вычисления  $k$  и  $b$  можно найти по следующим формулам:

$$\sigma_k^{\text{случ}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} \approx 0.007 \text{ кг}$$

$$\sigma_b^{\text{случ}} = \sigma_k^{\text{случ}} \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0.02 \cdot 10^{-3}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2 .$$

Систематическая погрешность вычисления коэффициентов определяется следующим соотношением:

$$\sigma_k^{\text{сист}} = k \sqrt{(\varepsilon_I)^2 + (2\varepsilon_h)^2} \approx 0.02 \text{ кг}$$

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b \cdot \varepsilon_I \approx 0.15 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 .$$

Тогда полную погрешность вычисления коэффициентов подсчитываем по следующей формуле:

$$\sigma_k = \sqrt{(\sigma_k^{\text{случ}})^2 + (\sigma_k^{\text{сист}})^2} \approx 0.02 \text{ кг}$$

$$\sigma_b = \sqrt{(\sigma_b^{\text{случ}})^2 + (\sigma_b^{\text{сист}})^2} \approx 0.15 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 .$$

Теперь можно рассчитать параметры диска из параметров графика.  $m = k \approx 1.429 \pm 0.02$ , что совпадает с измеренным значением  $m_{\text{изм}} = 1.417$ . Теперь, зная, что момент инерции диска  $I = b \approx (9.54 \pm 0.15) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  определим радиус диска  $r = \sqrt{\frac{2b}{k}} \approx 0.116 \text{ м}$ . К сожалению у нас в данных не оказалось радиуса диска, но выглядит он достаточно реалистично.

## 5 Вывод

С помощью трифилярного подвеса можно определять момент инерции с достаточно большой точностью  $\varepsilon \approx 1.6\%$ . Такая точность обусловлена малой погрешностью измерения времени и условиями, при которых колебания подвеса можно считать слабозатухающими.

Мы экспериментально доказали аддитивность моментов инерции с помощью различных тел.

Так-же мы проверили, что выполняется теорема Гюйгенса-Штейнера, построив график  $I(h^2)$ , который оказался с линейным. С помощью этого графика были рассчитаны некоторые параметры данного нам диска, которые с допустимой точностью совпали с измеренными параметрами