

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

Лабораторная работа 3.2.4(5)
Свободные и вынужденные колебания в
электрическом контуре

Выполнили:
Мельников Антон
Лавыгин Кирилл
Б02-213

1 Аннотация:

В ходе работы 6 различными способами были получены значения добротности для двух последовательных RLC цепей. Проверена теоретическая модель колебаний.

2 Теоретическая справка:

Для RLC контура применяя 2 правило Кирхгофа:

$$RI + U_C + L \frac{dI}{dt} = 0. \quad (1)$$

Подставляя в уравнение (1) выражение для тока через 1-ое правило Кирхгофа, и разделив обе части уравнения на CL , получаем:

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{CL} = 0. \quad (2)$$

Произведём замены $\gamma = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ – собственная круговая частота, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ – период собственных колебаний. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\ddot{U}_C + 2\gamma\dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = 0,$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени. Решение данного дифференциального уравнения:

$$U_C(t) = U(t)e^{-\gamma t}.$$

Получим:

$$\ddot{U} + \omega_1^2 U = 0,$$

где

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

Для случая $\gamma < \omega_0$ в силу того, что $\omega_1 > 0$, получим:

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (3)$$

Для получения фазовой траектории представим формулу (3) в другом виде:

$$U_C(t) = e^{-\gamma t} (a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t),$$

где a и b получаются по формулам:

$$a = U_0 \cos \varphi_0, \quad b = -U_0 \sin \varphi_0.$$

Преобразовав в более удобном виде выражения для напряжения на конденсаторе и токе через катушку:

$$U_C(t) = U_{C0} \cdot e^{-\gamma t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right),$$

$$I(t) = C \dot{U}_C = -\frac{U_{C0}}{\rho} \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t.$$

Введём некоторые характеристики колебательного движения:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R},$$

где τ – время затухания (время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз).

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \gamma T_1 = \frac{1}{N_\tau} = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}},$$

где Θ – логарифмический декремент затухания, U_k и U_{k+1} – два последовательных максимальных отклонения величины в одну сторону, N_τ – число полных колебаний за время затухания τ .

Рассматривая случай *вынужденных колебаний* под действием внешнего синусоидального источника, используя метод *комплексных амплитуд*:

$$\ddot{I} + 2\gamma \dot{I} + \omega^2 I = -\varepsilon \frac{\Omega}{L} e^{i\Omega t}.$$

Решая данное дифференциальное уравнение получим решение:

$$I = B \cdot e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \Theta) + \frac{\varepsilon_0 \Omega}{L \phi_0} \sin(\Omega t - \varphi).$$

Очевидно, что частота резонанса будет определяться формулой:

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (4)$$

Способы измерения добротности:

1. с помощью потери амплитуды свободных колебаний:

$$\theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}},$$

2. с помощью среза АЧХ на уровне 0.7 от максимальной амплитуды, тогда «дисперсия» ($\Delta\Omega$) будет численно равна коэффициенту γ , то есть $Q = \frac{\nu_0}{2\Delta\Omega}$.

3. с помощью среза ФЧХ, отразив график относительно оси $\pi/2$ по формуле $Q = \omega_0/\Delta\omega$

4. с помощью нарастания амплитуд в вынужденных колебаниях:

$$Q = \frac{\nu_0 n}{2 \ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}}}.$$

3 Экспериментальная установка:

Схема установки для исследования колебаний приведена на Рис.2. Отметим, что сигнал с генератора поступает через конденсатор C_1 на вход колебательного контура. Данная емкость необходима чтобы выходной импеданс генератора был много меньше импеданса колебательного контура и не влиял на процессы, проходящие в контуре.

Установка предназначена для исследования не только вынужденных, но и свободных колебаний в электрической цепи. При изучении свободно затухающих колебаний генератор специальных сигналов на вход колебательного контура подает периодические короткие импульсы, которые заряжают конденсатор C . За время между последовательными импульсами происходит разрядка конденсатора через резистор и катушку индуктивности. Для наблюдения фазовой картины затухающих колебаний на канал 2(Y) подается напряжение с резистора R (пунктирная линия на схеме установки), которое пропорционально току I ($I \propto dU_C/dt$).

При изучении вынужденных колебаний на вход колебательного контура подается синусоидальный сигнал. С помощью осциллографа возможно измерить зависимость амплитуды вынужденных колебаний в зависимости от частоты внешнего сигнала, из которого возможно определить добротность колебательного контура. Альтернативным способом расчета добротности контура является определение декремента затухания по картине установления вынужденных колебаний. В этом случае генератор сигналов используется для подачи щугов синусоидальной формы.

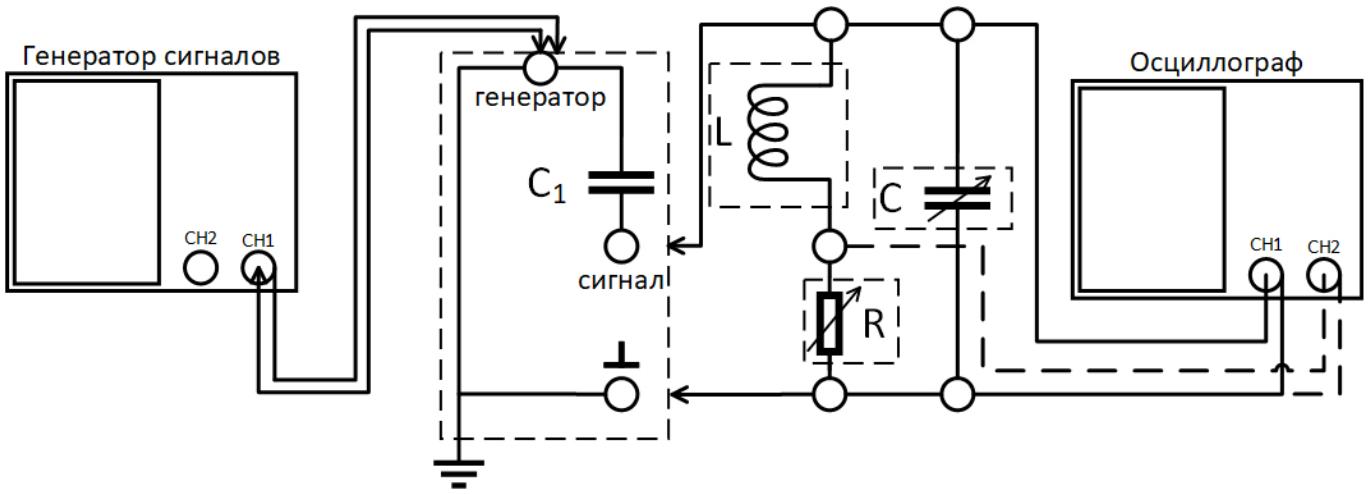


Рис. 1: Конфигурация установки для изучения затухающих колебаний

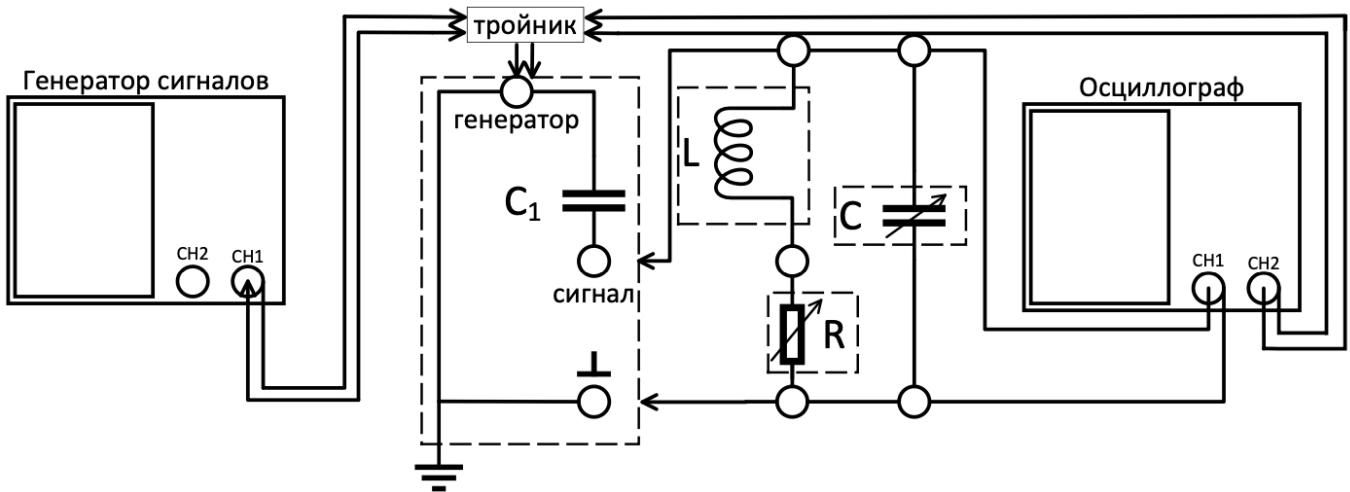


Рис. 2: Конфигурация установки для изучения возбужденных колебаний

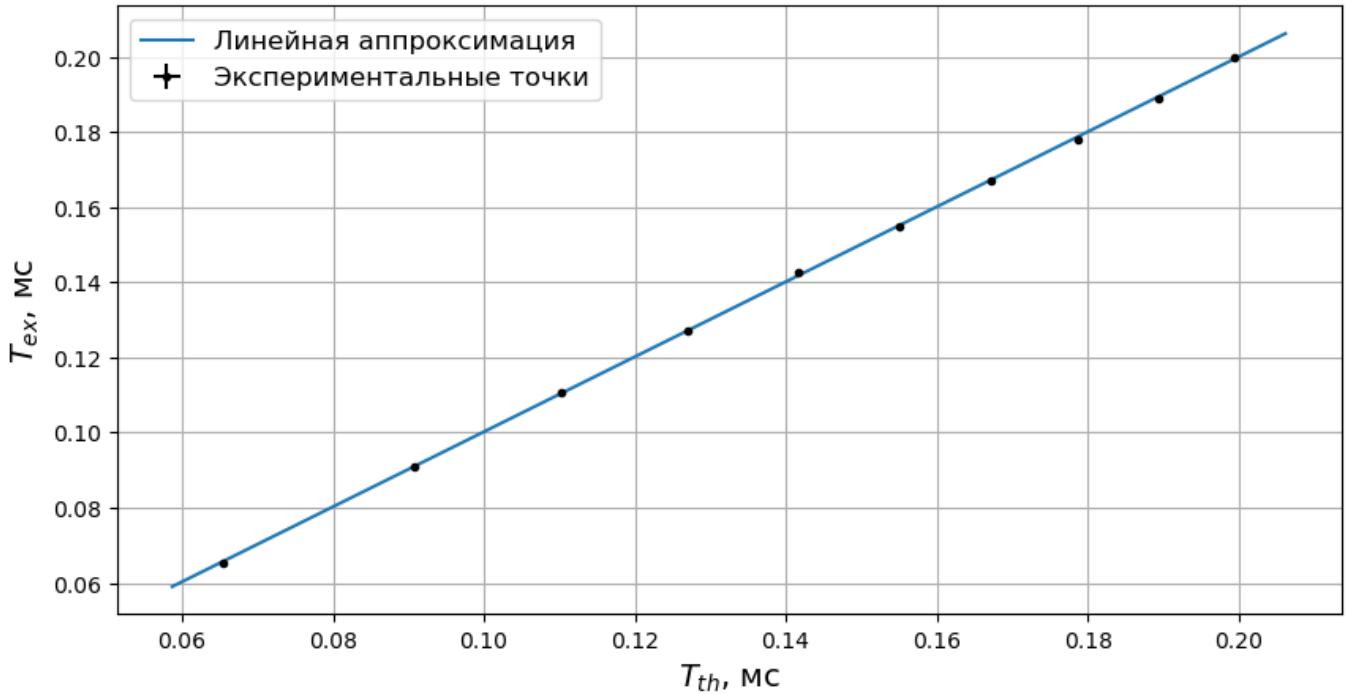
4 Свободные колебания

Определим C_0 (нулевую емкость колебательного контура), которую в дальнейшем необходимо будет прибавлять к значению C магазина емкостей. При установленных $R = 0.01$ Ом, $L = 100$ мГн, $C = 0$ (емкость оставим неизменной в течении всей работы) получено значение периода (мы измерили пять периодов, чтобы повысить точность):

$$T = 0.0654 \text{ мс}$$

$$C_0 = 1.07 \text{ пФ}$$

Далее проверим уравнение для периода свободных колебаний и установленное значение C_0 , построив график зависимости экспериментального значения T от теоретического полученного по формуле (4)



Этот график показывает достаточно хорошую точность наших измерений и предложенной модели, погрешность свободного члена составила $\Delta T = 0.0005$ мс.

4.1 Критическое сопротивление

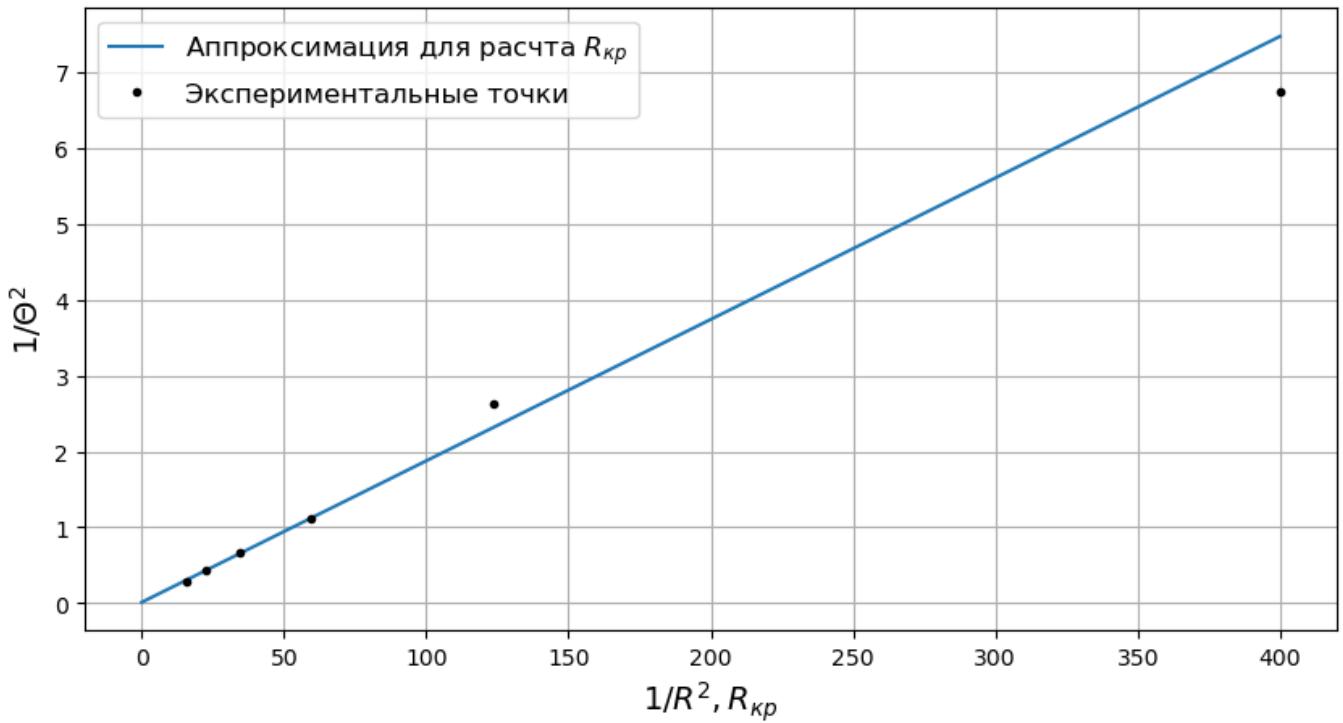
Взяв целевую частоту собственных колебаний за $\nu_0 = 6.5$ кГц получаем следующие значения необходимого сопротивления C^* и критического сопротивления R_{kp}^{th} . R_{kp}^{exp} – значение критического сопротивления, определенное по смене колебательного режима (достаточно неточное из-за гистерезиса):

$$C^* = 6 \text{ пФ}$$

$$R_{kp} = 8 \text{ кОм}$$

$$R_{kp}^{exp} = 6 \text{ кОм}$$

Далее рассчитаем θ по потере амплитуды для различных R и построим следующий график:



По данному графику можно рассчитать значение R_{kp} как:

$$R_{kp}^{gr} = 2\pi\sqrt{k} = 0.858R_{kp}^{th} \approx 6.8 \text{ кОм} \quad \Delta R_{kp}^{gr} = 0.012R_{kp}^{th} \approx 0.1 \text{ кОм}$$

Из всех предложенных способов наиболее точным является последний.

4.2 Добротность

В дальнейшей работе за R_{kp} принимается $R_{kp} = 6 \text{ кОм}$.

Расчитаем добротности по полученным значениям θ для $0.05R_{kp}$ и $0.25R_{kp}$

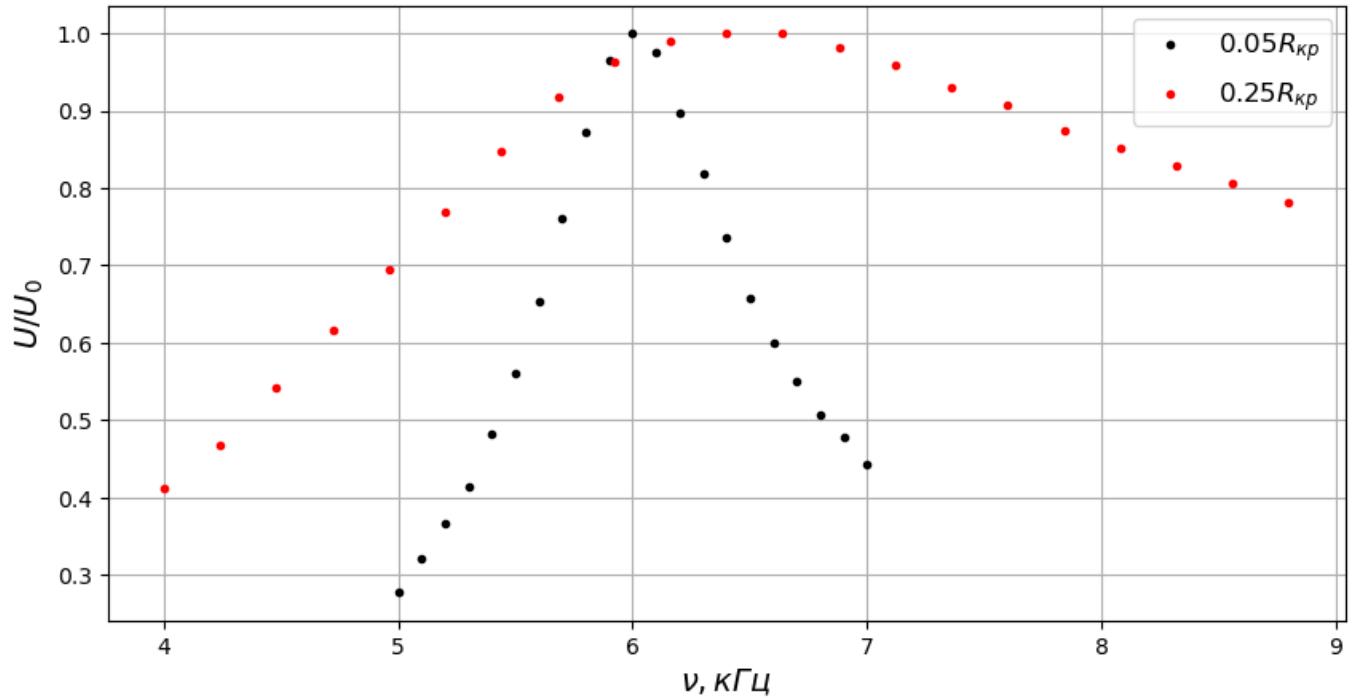
$$Q(0.05R_{kp}) = 8.16 \quad Q(0.25R_{kp}) = 1.70$$

Теперь рассчитаем добротности по значениям θ полученным их фазовой диаграммы затухающих колебаний:

$$Q(0.05R_{kp}) = 7.87 \quad Q(0.25R_{kp}) = 1.7$$

5 Вынужденные колебания

5.1 АЧХ



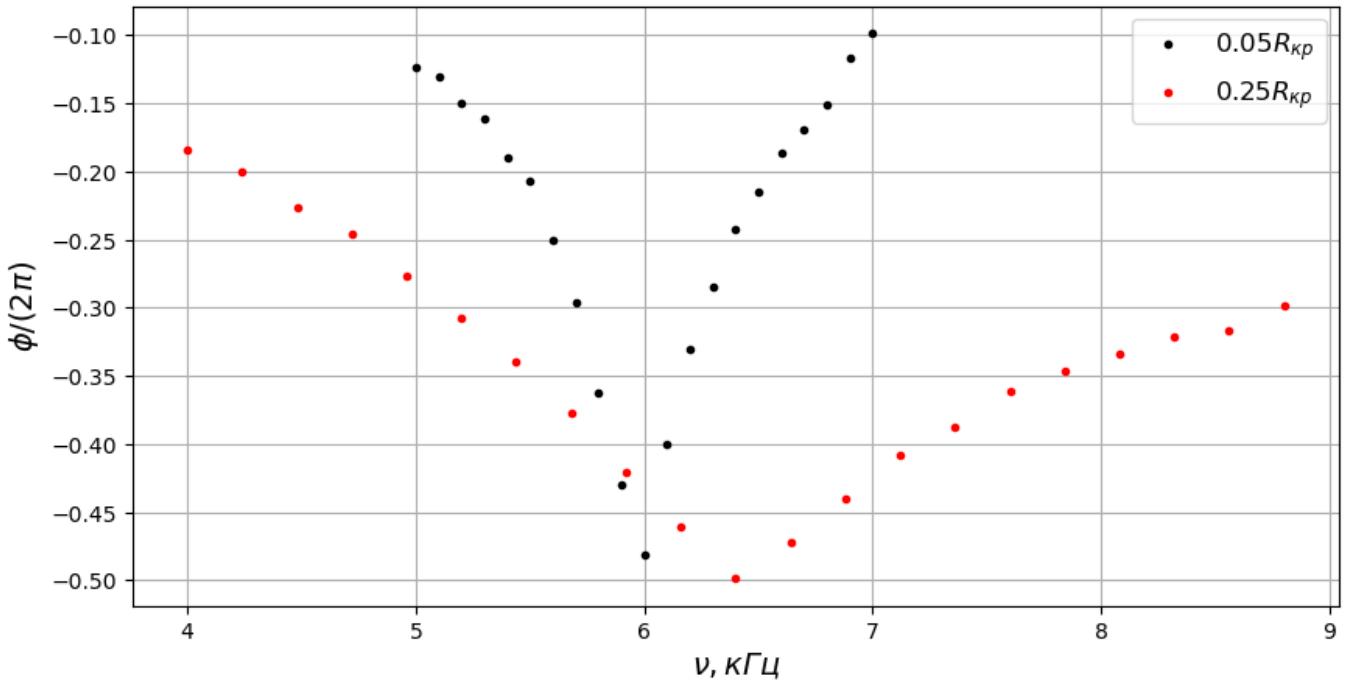
С помощью среза АЧХ на уровне 0.7 рассчитаем добротности:

$$Q(0.05R_{kp}) = 7.5$$

$$Q(0.25R_{kp}) = 1.4$$

Стоит заметить, что нашего диапазона измерений для $0.25R_{kp}$ оказалось недостаточно, поэтому полученное значение является лишь оценочным

5.2 ΦЧХ



Здесь при измерениях 0.25 случилась какая-то ошибка. Исходно получаемое резонансное значение не совпадало с полученным ранее. Скорее всего была ошибка при выставлении кривых относительно друг-друга. После исправления позиционирования оказалось, что тут нам также не хватило диапазона в сторону больших частот, из-за чего полученное значение для 0.25 также является лишь оценкой.

Расчитанные значения:

$$Q(0.05R_{kp}) = 7.7$$

$$Q(0.25R_{kp}) = 1.3$$

5.3 Нарастание и затухание колебаний

При измерении затухающих колебаний были получены следующие значения (1,2 для раскачки, 3 - для затухания):

$$Q_1(0.05R_{kp}) = 7.5$$

$$Q_2(0.05R_{kp}) = 7.3$$

$$Q_3(0.05R_{kp}) = 8.2$$

$$Q_1(0.25R_{kp}) = 1.3$$

$$Q_3(0.25R_{kp}) = 1.8$$

6 Выводы

Итоговая таблица:

| R | Свободные колебания | | | Вынужденные колебания | | | |
|--------------|---------------------|-------------|---------|-----------------------|-----|------------|-----------|
| | $f(L, C, R)$ | $f(\Theta)$ | Сpirаль | АЧХ | ФЧХ | Нарастание | Затухание |
| $0.05R_{kp}$ | 12.6 | 8.2 | 7.9 | 7.5 | 7.7 | 7.4 | 8.2 |
| $0.25R_{kp}$ | 2.5 | 1.7 | 1.7 | 1.4 | 1.3 | 1.3 | 1.8 |

Полученные значения добротности, с которыми не возникло проблем, неплохо совпадают. Наиболее точными являются значения полученные из АЧХ и ФЧХ, так как данные методы опираются на существенно больший набор данных и попутно позволяют проверить верность предложенной модели явления и обнаружить возможную ошибку при расчетах или измерениях.

Теоретические значения ощутимо отличаются от экспериментальных. Мы связываем это с тем, что предложенная модель не позволяет учесть сопротивления всех элементов цепи, и их индуктивности, поскольку сам зависимости, предсказанные нашей теорией, реализуются на практике.