Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника (1.4.2)

Лавыгин Кирилл

18.11.22

1 Аннотация

В ходе работы с помощью оборотного маятника будет измерена величина свободного падения. Помимо маятника в работе используются: две подвесные призмы; два груза ; электронный счётчик времени и числа колебаний; подставка с острием для определения положения центра масс маятника; закреплённая на стене консоль для подвешивания маятника; металлические линейки, штангенциркуль длиной 1 м.

2 Теоретические сведения

Физическим маятником называют твёрдое тело, способное совершать колебания в вертикальной плоскости, будучи подвешено за одну из своих точек в поле тяжести. Ось, проходящая через точку подвес перпендикулярно плоскости качания, называется осью качания маятника.

При малых колебаниях период колебаний физического маятника определяется формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}},$$

где J - момент инерции маятника относительно оси качания, m - масса маятника, l - расстояние от оси качания до центра масс маятника.

Если сравнить (1) с известной формулой колебаний математического маятника длиной $l(T = 2\pi\sqrt{l/g})$, можно определить приведённую длину физического маятника как

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml}.$$

Смысл приведённой длины в том, что при длине математического маятника, равной $l_{\text{пр}}$, его период колебаний совпадает с периодом колебаний физического маятника.

2.1 Теорема Гюйгенса об оборотном маятнике

Пусть O_1 - точка подвеса физического маятника, а C - его центр масс. Отложим отрезок длиной $l_{\text{пр вдоль}}$ линии O_1C, и обозначим соответствующую точку как O_2 - эту точку называют центром качания физического маятника. Заметим, что приведённая длина всегда больше расстояния до центра масс ($l_{\text{пр}} > l$), поэтому точка O_2 лежит по другую сторону от центра масс.

Точки O_1 и O_2 обладают свойством взаимности: если перевернуть маятник и подвесить его за точку O_2, то его период малых колебаний останется таким же, как и при подвешивании за точку O_1 (теорема Гюйгенса). На этом свойстве - «оборотности» - и основан довольно точный метод определения ускорения свободного падения, применяемый в данной работе.

Докажем теорему Гюйгенса об оборотном маятнике.

Пусть O_1 и O_2 - две точки подвеса физического маятника, лежащие на одной прямой с точкой C по разные стороны от неё. Тогда периоды колебаний маятника равны соответственно

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{mgl_1}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{mgl_2}}.$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера имеем

$$J_1 = J_C + ml_1^2, \quad J_2 = J_C + ml_2^2,$$

где J_C - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости качания.

Пусть периоды колебаний одинаковы: $T_1 = T_2$. Тогда одинаковы должны быть и приведённые длины:

$$l_{\text{пр}} = \frac{J_1}{ml_1} = \frac{J_2}{ml_2}.$$

С учётом (4) имеем:

$$l_{\text{пр}} = \frac{J_C}{ml_1} + l_1 = \frac{J_C}{ml_2} + l_2,$$

откуда следует, что при $l_1 \neq l_2$ справедливо равенство

$$J_C = ml_1 l_2.$$

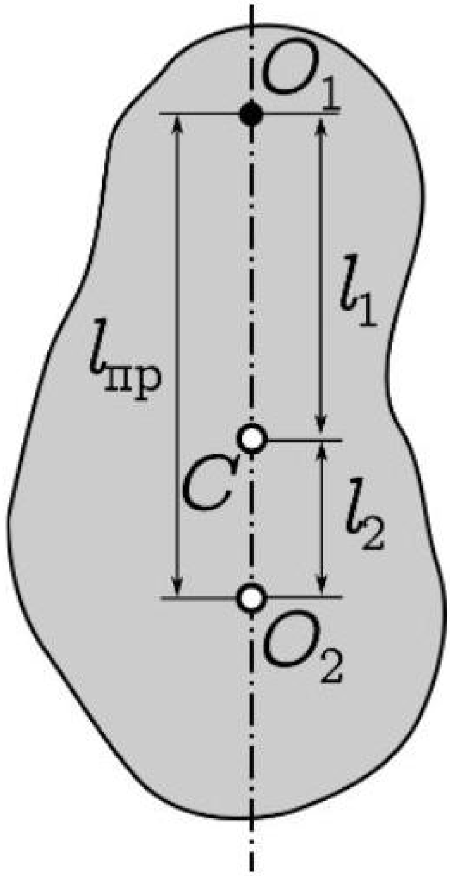

Рис. 1: К теореме Гюйгенса

Наконец, подставляя (6) обратно в (5), получим

$$l_{\text{пр}} = l_1 + l_2.$$

Таким образом, если периоды колебаний при подвешивании маятника в точках O_1 и O_2 равны, то расстояние между точками подвеса равно приведённой длине маятника. Нетрудно видеть, что и обратное утверждение также верно.

Заметим также, что период колебаний маятника (3), рассматриваемый как функция от l_1,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_C + ml_1^2}{mgl_1}},$$

имеет минимум при $l_{1\ \min} = \sqrt{J_C/m}$. Из (6) видно, что в этой точке $l_2 = l_1 = l_{\text{пр}}/2$, то есть центр масс находится посередине между сопряжёнными точками O_1 и O_2. График зависимости $T(l_1)$ схематично представлен на Рис. 2.

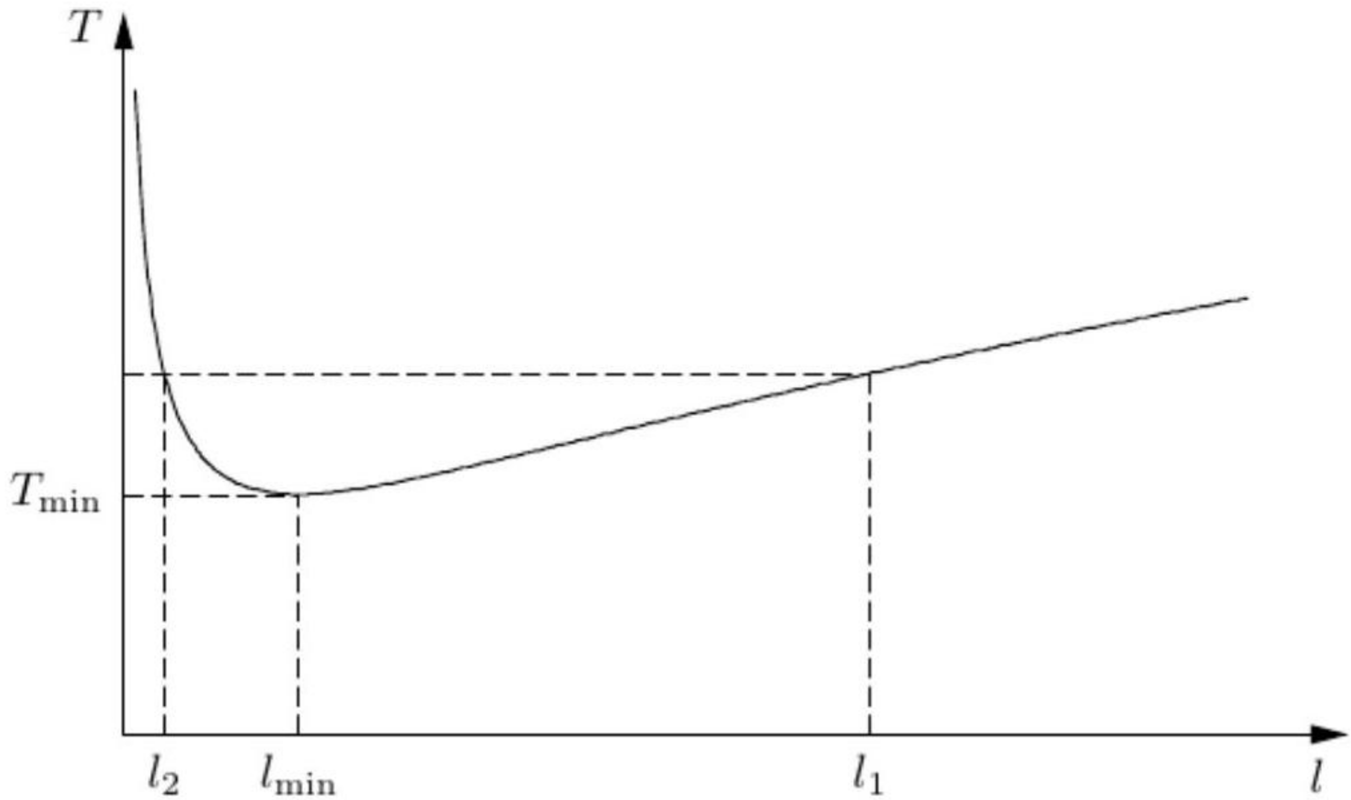

Рис. 2. Зависимость периода колебаний от положения центра масс относительно оси качания

2.2 Измерение g

Пусть $L \equiv \overline{O_1O_2} = l_1 + l_2-$ расстояние между двумя «сопряжёнными» точками подвеса физического маятника. Если соответствующие периоды малых колебаний равны, $T_1 = T_2 = T$, то по теореме Гюйгенса $L = l_{\text{пр}}$. Тогда из (1) и (2) находим ускорение свободного падения:

$$\mathrm{g}_0 = (2\pi)^2 \frac{L}{T^2}.$$

Точного совпадения $T_1 = T_2$ на опыте добиться, конечно, невозможно. Поэтому получим формулу для определения ускорения свободного падения g, если измеренные периоды незначительно различаются: $T_1 = T, T_2 = T + \Delta T$. Из системы (3) и (4) получаем:

$$\mathrm{g} = (2\pi)^2 \frac{l_1^2 - l_2^2}{T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2},$$

что также можно переписать как

$$g = g_0 \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda - \frac{T_2^2}{T_1^2}},$$

где $\mathrm{g}_0 = (2\pi)^2 L/T^2$, и для краткости введено обозначение $\lambda = l_1/l_2$.

Проанализируем отличия формулы (9) от (8) и оценим величину поправки. Пусть $\varepsilon = \frac{\Delta T}{T} \ll 1$ - относительное отклонение при измерении периодов. Тогда при $\lambda \neq 1$, пользуясь малостью ε, получим

$$g = g_0 \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda - (1+\varepsilon)^2} \approx g_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{2\varepsilon}{\lambda - 1}} \approx g_0 \cdot (1 + 2\beta\varepsilon),$$

где обозначено:

$$\beta \equiv \frac{1}{\lambda - 1} = \frac{l_2}{l_1 - l_2}.$$

Видно, что поправка $\Delta g \approx 2\beta\varepsilon g$ к формуле (8) остаётся малой, если мало относительное различие измеренных периодов ε, но при этом также мал и коэффициент $\beta = \frac{l_2}{l_1 - l_2}$. В частности, при $l_2 \to l_1$ эта поправка неограниченно возрастает при любом конечном ε. Поэтому на опыте отношение l_1/l_2 не должно быть слишком близко к единице. На практике желательно, чтобы выполнялось условие

$$l_1 > 2{,}5 l_2.$$

2.3 Предварительный расчёт положения грузов

Если первоначально расположить грузы на стержне произвольным образом, то для достижения равенства периодов колебаний потребуется исследовать зависимости периодов колебаний T_1 и T_2 при перемещении поочерёдно обоих грузов по штанге. При этом всякий раз необходимо при перестановке призм переворачивать тяжёлый маятник. Такая методика требует много времени и не всегда приводит к нужному результату.

Существенно облегчить и ускорить поиск нужного положения грузов можно, если провести предварительные расчётыл. При этом для грубой оценки достаточно использовать максимально упрощённую модель, например, считать маятник тонким стержнем с закреплёнными на нём точечными массами. После установки грузов согласно предварительным расчётам, их положение может быть уже уточнено экспериментально.

Пусть призмы $П_1 П_2$ задают сопряжённые точки подвеса, то есть период колебаний при перевороте маятника не изменяется. Тогда по теореме Гюйгенса расстояние между призмами $L-$ это приведённая длина маятника. Это условие может быть записано либо в форме (2):

$$J_П = M L l_2,$$

где $J_П-$ момент инерции маятника относительно призмы $П_2$, либо в форме (5):

$$J_C = M l_1 l_2,$$

где J_C - момент инерции маятника относительно его центра масс. Здесь M - полная масса маятника.

Как $J_П$, так и J_C являются функциями положений грузов b_1 и b_2 относительно соответствующих призм $П_1$ и $П_2$ (см. Рис. 5). Задание длины l_1 (или l_2) определяет положение центра масс маятника. Это позволяет, вопервых, рассчитать правые части (13) или (13′), и, во-вторых, накладывает дополнительную связь на расстояния b_1 и b_2 (при известных массах всех элементов маятника). Тогда соотношения (13) или (13′) превращаются в уравнение с одной неизвестной, например, b_2. Корень этого уравнения можно приближённо найти графически с помощью приложенной электронной таблицы.

3 Задание

3.1 Подбор положений грузов

Так-как предложенная модель дает недостаточно тонный результат – определим положения грузов экспериментально. Нам повезло и в начальный момент периоды отличались лишь на 3%, далее мы пробовали сдвигать призму в разные стороны и получили отличие в 0.4% ($T_1 = \frac{31.10}{20} c, T_2 = \frac{30.92}{20} c$).

Далее мы измерили различные параметры получившейся установки, необходимые для расчетов:

$$l1 = 12.3 \pm 0.1 \text{ см},\ l2 = 46.8 \pm 0.1 \text{ см}$$

Эти длины были измерены штангенциркулями с точность 0.01 см, но основная погрешность содержится в определении центра тяжести, которую можно оценить как 0.1 см.

Основная серия измерений:

t_1, с	n	t_2, с	T_1, с	T_2, с	g, $\frac{\text{м}}{c^2}$
77.31	50	77.76	1.5462	1.5552	9.800030
77.30	50	77.75	1.5460	1.5550	9.802571
77.31	50	77.74	1.5462	1.5548	9.798205
77.31	50	77.71	1.5462	1.5542	9.795469

Итого полученное значение и его случайная погрешность:

$$g \approx 9.799\ \frac{\text{м}}{c^2},\ \sigma_g^{\text{случ}} = 0.003\ \frac{\text{м}}{c^2}$$

Теперь рассчитаем систематическую погрешность g ($\sigma_l = 0.1$ см, $\sigma_T = 0.01/50 = 0.0002$ с):

$$\sigma_g^{\text{сист}} = \frac{2(l_1 - l_2) * \sigma_l(T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2) + (l_1^2 - l_2^2)(2\sigma_T(T_1 l_1 - T_2 l_2) + \sigma_l(T_1^2 - T_2^2))}{(T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2)^2} = 0.0003\ \frac{\text{м}}{c^2}$$

Как можно видеть основной вклад в погрешность вносит именно погрешность измерения времени, а именно регистрации прохождения стержня через датчик.

Итоговое значение:

$$g = 9.799 \pm 0.003\ \frac{\text{м}}{c^2},\ \epsilon_g = 0.03\%$$

3.2 Анализ результата

Полученное значение попадает в ожидаемый диапазон значений. Точность метода оказалась действительно очень высокой. Чтобы её увеличить можно или увеличить точность регистрации прохождения, или просто измерять большее число колебаний.