

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

Лабораторная работа 3.7.1

Скин-эффект в полом цилиндре

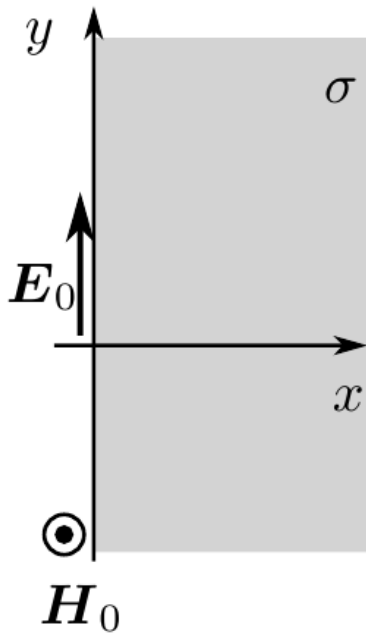
Выполнили:
Мельников Антон
Лавыгин Кирилл
Б02-213

1 Аннотация:

В ходе работы будет исследовано проникновение магнитного поля в полый цилиндр, измерена его проводимость различными способами, основанными на этом эффекте.

2 Теоретическая часть

2.1 Скин-эффект для полупространства



Рассмотрим квазистационарное поле внутри проводящей среды в простейшем плоском случае. Пусть вектор \mathbf{E} направлен всюду вдоль оси y (рис. 1) и зависит только от координаты x , т. е. $E_x = E_z \equiv 0$, $E_y = E_y(x, t)$. В квазистационарном приближении

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}$$

Берем ротор обеих частей

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \mathbf{H}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{H}) - \vec{\nabla}^2 \mathbf{H} = \sigma \vec{\nabla} \times \mathbf{E}$$

Используя ур-е Максвелла для ротора \mathbf{E} и для дивергенции \mathbf{H} получаем

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{H} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{H}) = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1)$$

Берем ротор еще раз

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}^2 \mathbf{H}) = \vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla} \times \mathbf{H}) = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \mathbf{H})}{\partial t}$$

Осталось подставить первое ур-е, и воспользоваться уравнением Максвелла

Рис. 1: Скин-эффект в полупространстве

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{E} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2)$$

Подставляем в (2.1) наше электрическое поле $E_y = E_y(x, t)$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (3)$$

Если $E_y(0, t) = E_0 e^{i\omega t}$ то решением (2.1) будет функция вида

$$E_y(x, t) = E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)}$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu \mu_0}}$$

2.2 Скин-эффект в тонком полом цилиндре

Перейдем теперь к описанию теории в нашей работе. Из соображений симметрии и непрерывности соответствующих компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} можем сказать что

$$H_z = H(r)e^{i\omega t}, \quad E_\varphi = E(r)e^{i\omega t}$$

и при этом функции $H(r)$ и $E(r)$ непрерывны.

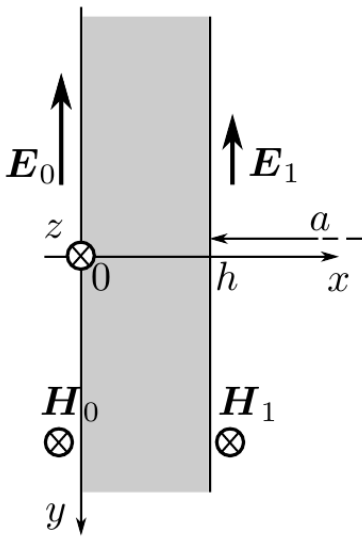
Внутри цилиндра токов нет, следовательно $H(r) = H_1 = \text{const}$ внутри цилиндра. По теореме об электромагнитной индукции

$$E(r) = -\frac{1}{2}\mu_0 r \cdot i\omega H_1$$

откуда мы получаем граничное условие

$$E_1 = E(a) = -\frac{1}{2}\mu_0 a \cdot i\omega H_1$$

Рис. 2: Эл-магнитные поля в цилиндре



В приближении $h \ll a$ можем пренебречь кривизной стенки и смоделировать его бесконечной полосой. Тогда, надо решить уравнение (2.1) с граничными условиями. Решая уравнение получим связь полей H_1 (поле внутри цилиндра которое мы будем измерять) и H_2 , которое колеблется с частотой ω

$$H_1 = \frac{H_0}{\text{ch}(\alpha h) + \frac{1}{2}\alpha a \text{sh}(\alpha h)} \quad \alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{i\pi/4} \quad (4)$$

из этой формулы получим сколько по фазе отстает поле H_1 от H_0 . При $\delta \ll h$ (высокачастотная область)

$$\psi \approx \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}} \quad (5)$$

При $\delta \gg h$ (низкочастотная область)

Рис. 3: Стенка цилиндра

$$\tan \psi \approx \frac{ah}{\delta^2} = \pi a h \sigma \mu_0 \nu \quad (6)$$

2.3 Процесс измерения

Магнитное поле внутри цилиндра измеряется катушкой 3. Напряжение на катушке пропорционально производной $\dot{B}_1(t)$

$$U(t) \propto \dot{B}_1(t) = -i\omega H_1 e^{i\omega t}$$

Поле внутри цилиндра пропорционально току через соленоид

$$B_0(t) \propto I(t)$$

Отсюда несложно увидеть, что

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \xi_0^{-1} \cdot \frac{U}{\nu I} = \xi \xi_0 \quad (7)$$

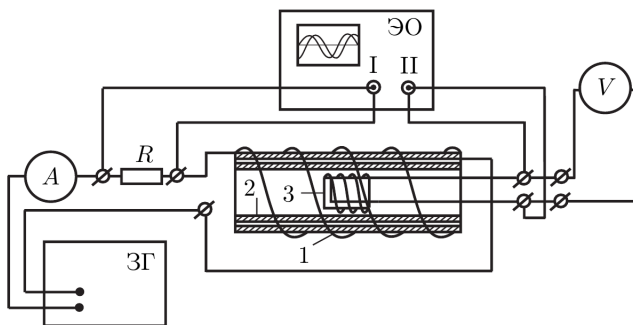


Рис. 4: Установка

где константу можно определить из условия $|H_1|/|H_2| \rightarrow 1$ при $\nu \rightarrow 0$.

При измерениях разности фаз нужно учесть, что первый сигнал на осциллографе пропорционален магнитному полю снаружи, а второй пропорционален производному поля внутри цилиндра по времени. Вследствии этого набегает дополнительная фаза $\pi/2$, которую надо вычесть при измерениях.

3 Ход работы

Параметры нашей установки $2a = 45$ мм, $h = 1.5$ мм. Проводимость порядка $\sigma \sim 5 \cdot 10^7$ См/м. Получаем оценку для частоты, при которой глубина проникновения равна толщине стенок цилиндра $\nu_h = 2250$ Гц.

3.1 Измерение проводимости через отношение амплитуд

В области частот $\nu \ll \nu_h$ $\alpha h \ll 1$, и из (2.2) получаем

$$(\xi/\xi_0)^2 \approx \frac{1}{1 + A^2\nu^2} \quad A = \pi a h \sigma \mu_0$$

или, эквивалентно

$$\frac{1}{\xi^2} = B^2\nu^2 + 1/\xi_0^2 \quad B = \pi a h \sigma \mu_0 / \xi_0$$

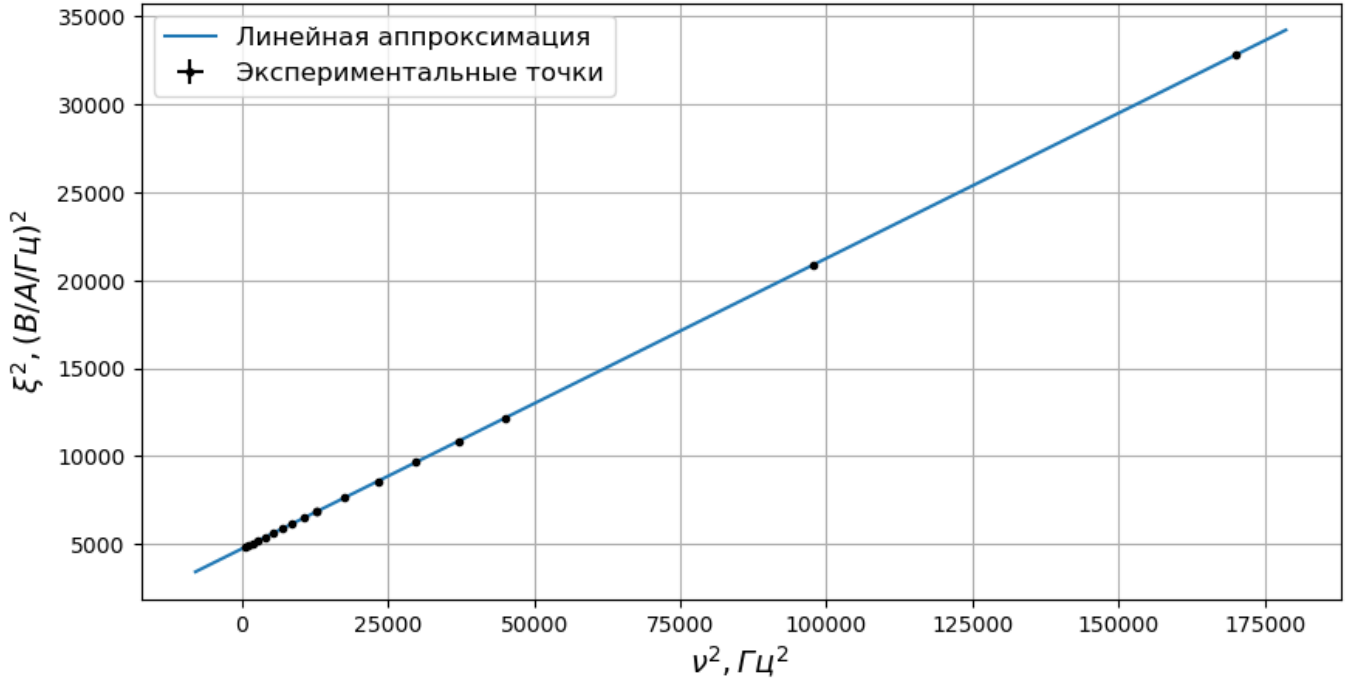


Рис. 5: График зависимости $1/\xi^2(\nu)$

Из графика получаем значение ν_0 , а так же проводимость меди σ

$$\xi_0 = (0.014533 \pm 0.000006) \text{ (В/А/Гц)}^2 \quad \sigma = (4.432 \pm 0.002) \cdot 10^7 \text{ См/м}$$

3.2 Измерение проводимости через разность фаз в низкочастотном диапазоне

Согласно формуле (2.2), при $\delta \gg h$

$$\tan \psi = k\nu ; k = \pi a h \sigma \mu_0 \quad (\mu = 1)$$

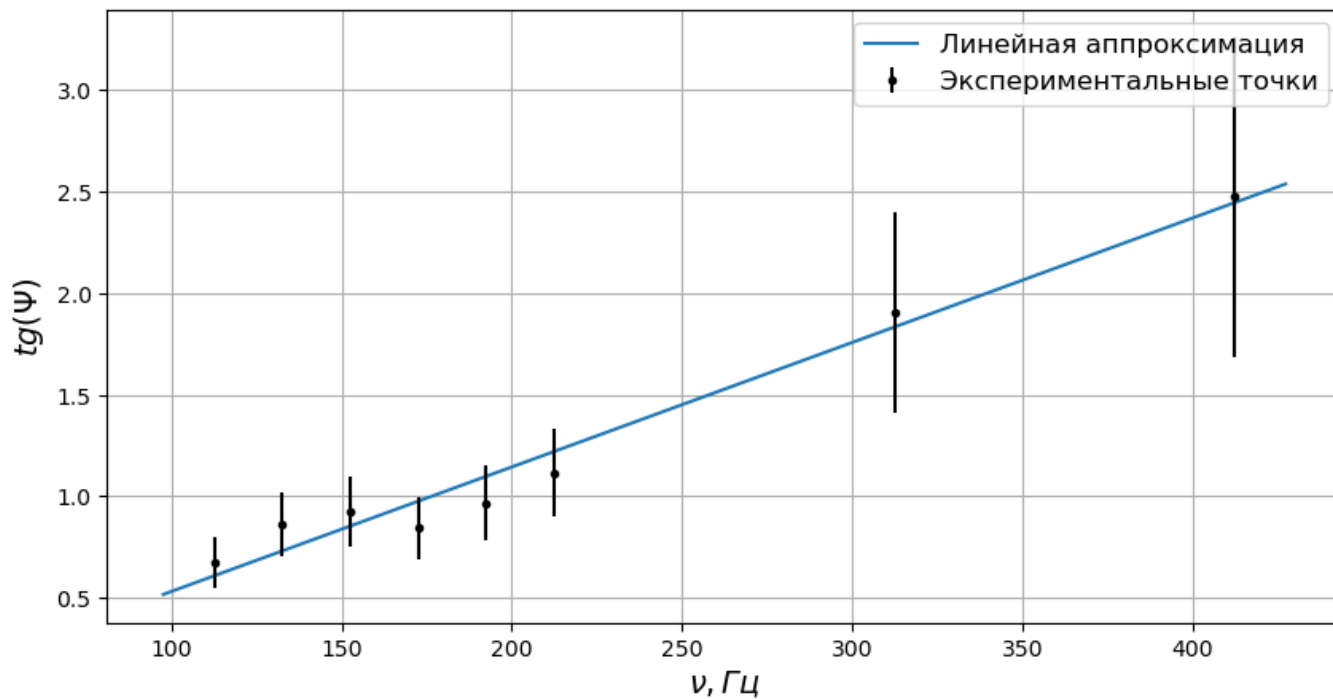


Рис. 6: График зависимости $\tan \psi(\nu)$

Из коэффициента наклона прямой находим проводимость

$$\sigma = (4.5 \pm 1.2) \cdot 10^7 \text{См/м}$$

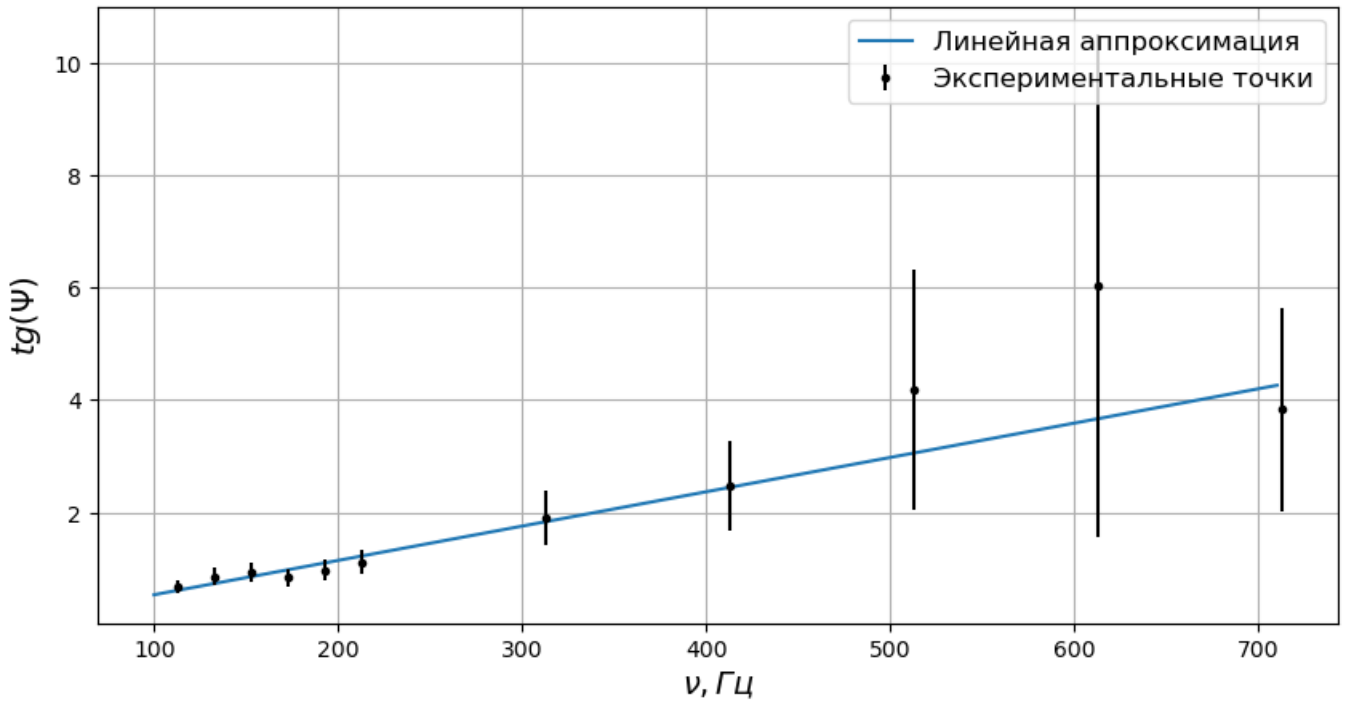


Рис. 7: График зависимости $\tan \psi(\nu)$ (нелинейная часть)

3.3 Измерение проводимости через разность фаз в высокочастотном диапазоне

Согласно формуле (2.2), при $\delta \ll h$

$$\psi - \pi/4 = k \cdot \sqrt{\nu}; \quad k = h\sqrt{\pi\mu_0\sigma}$$

Из графика получаем следующее значение проводимости

$$\sigma = (4.6 \pm 0.6) \cdot 10^7 \text{ См/м}$$

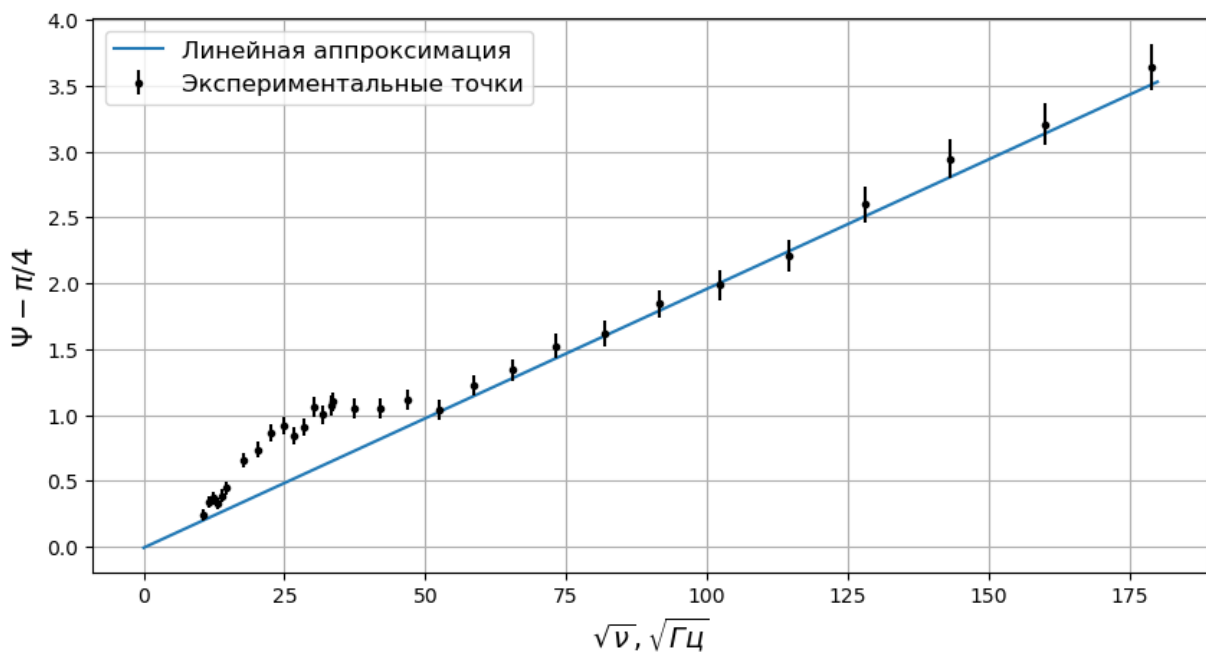


Рис. 8: График зависимости $(\psi - \pi/4)(\sqrt{\nu})$

3.4 Измерение проводимости через изменение индуктивности

Из за наличия цилиндра внутри, индуктивность внешней катушки зависит от катушки следующим образом

$$\frac{L_{\max} - L}{L - L_{\min}} = \pi^2 a^2 h^2 \mu_0^2 \sigma^2 \nu^2$$

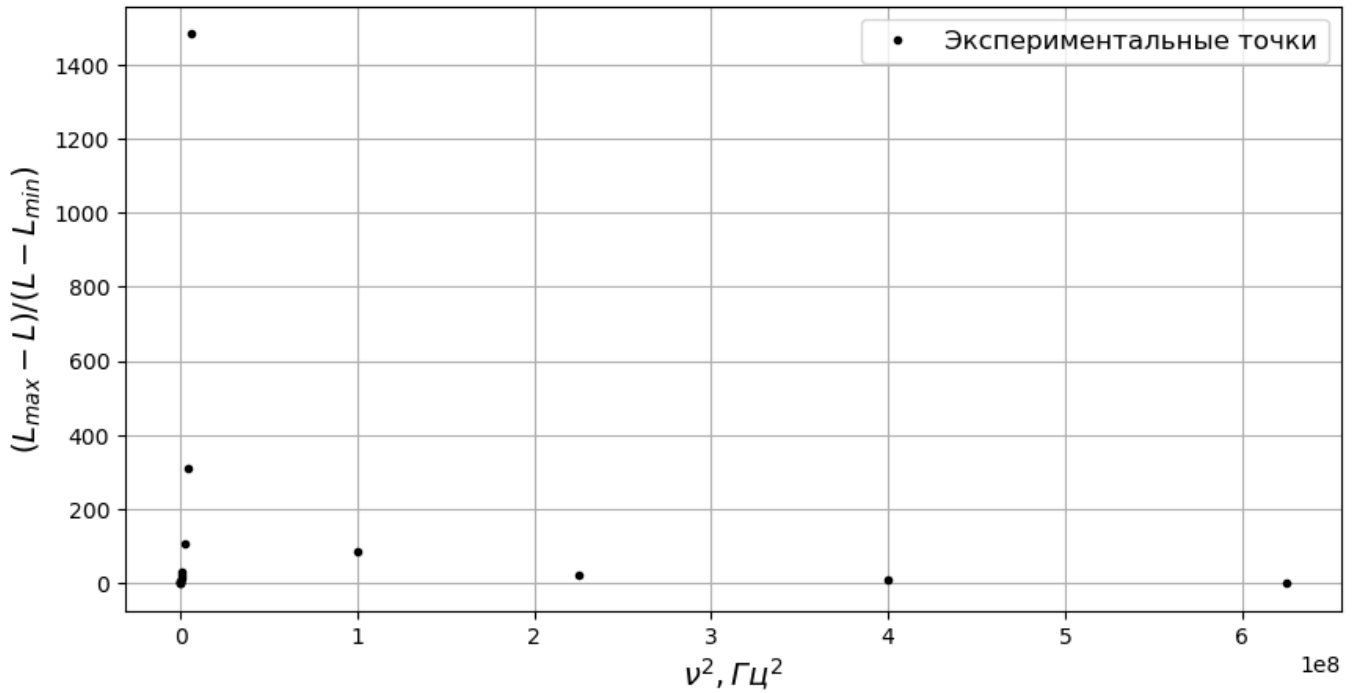


Рис. 9: График зависимости $\frac{L_{\max} - L}{L - L_{\min}}(\nu^2)$

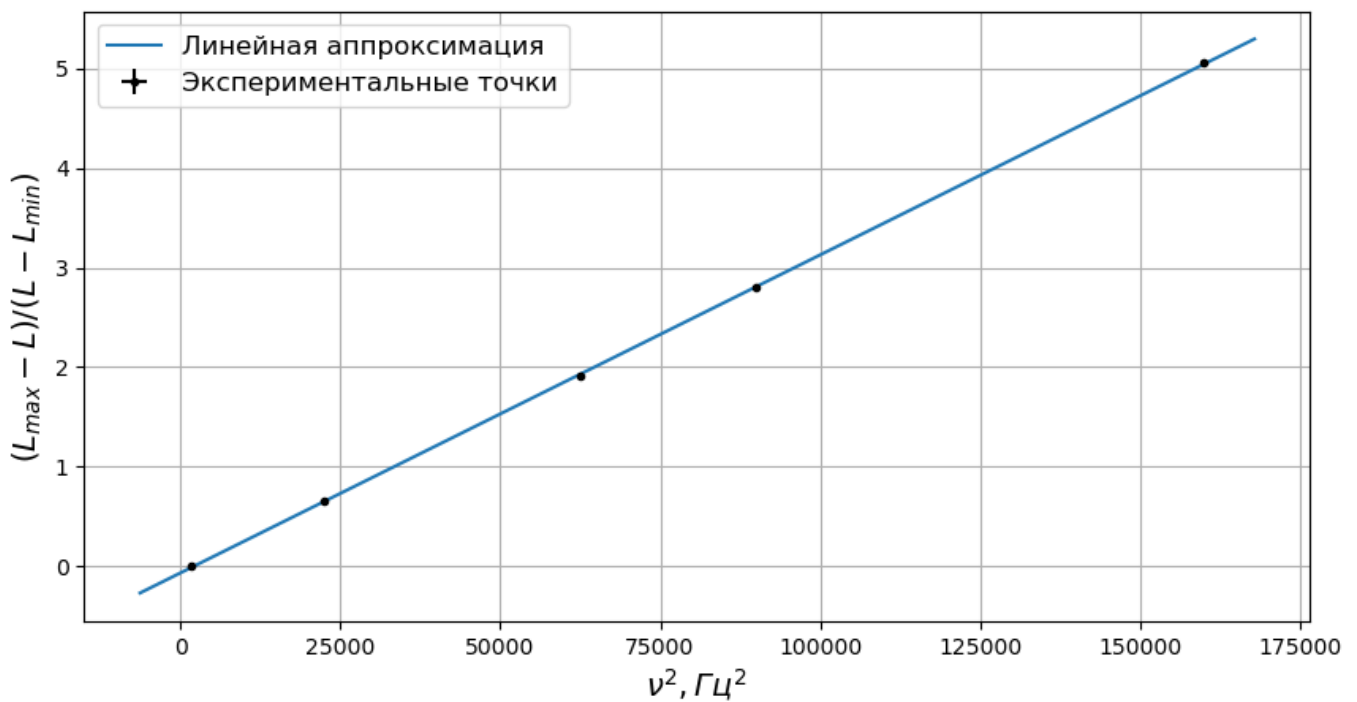


Рис. 10: График зависимости $\frac{L_{\max} - L}{L - L_{\min}}(\nu^2)$

L_{\max} и L_{\min} ищем в области монотонности. Далее, линеаризуя данные по формуле выше получаем линейную зависимость при малых ν . По наклону кривой находим

$$\sigma = (4.240 \pm 0.007) \cdot 10^7 \text{ См/м}$$

3.5 Отношение магнитных полей

Отношение $|H_1|/|H_0|$ можем посчитать двумя способами. Первый способ - через формулу (2.3), используя значение ξ_0 из пункта (2.1). Второй способ - через теоретическую формулу (2.2), используя значение σ из пункта (2.1). Посмотрим на их различие с помощью графиков зависимости $|H_1|/|H_0|(\nu)$

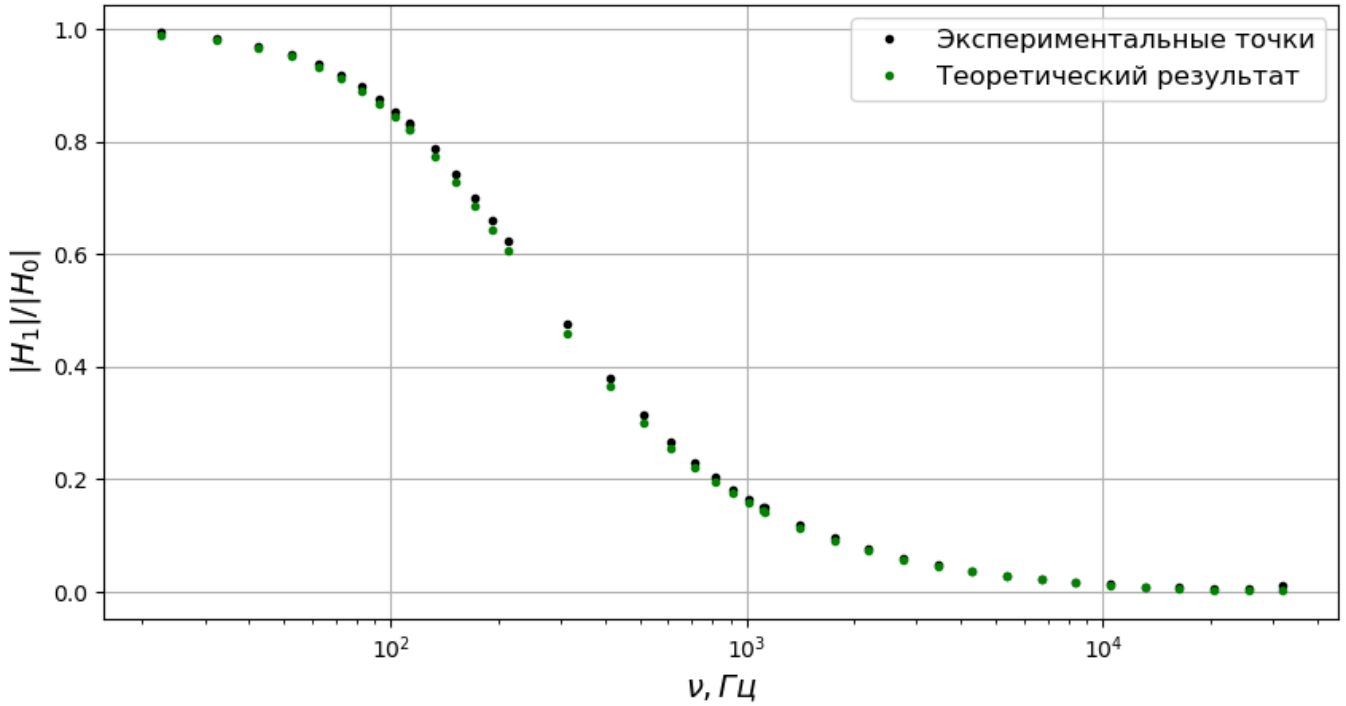


Рис. 11: Отношение полей

Как можно видеть ошибка теоретической модели достаточно небольшая. Предлагаемая модель описывает зависимость во всем рассмотренном диапазоне, что позволяет сделать вывод о ее корректности.

4 Вывод

Мы измерили проводимость материала цилиндра 4 разными способами. Сравним эти данные между собой

Метод измерения	$\sigma, 10^7 \text{ См/м}$	$\Delta\sigma, 10^7 \text{ См/м}$	ε_σ
Отношение амплитуд	4.432	0.002	0.05%
Разности фаз (низкие частоты)	4.5	26	%
Разности фаз (высокие частоты)	4.6	0.6	13%
Индуктивность	4.240	0.007	0.17%

Таблица 1: Сравнение результатов различных методов

Для меди проводимость составляет $\sigma = (5.55 - 5.80) \cdot 10^7$ См/м. Учитывая высокую точность измерения первым методом, значения очевидно не совпадают. У этого может быть две причины: пренебрежение краевыми эффектами или неидеальность меди трубы (различные примеси и вкрапление, неидеальная структура из-за способа изготовления). Второе, как мне кажется, вероятнее.

Измерение через сдвиг фазы на низкой частоте получились очень неточным. Это произошло из-за большой погрешности тангенса (т.к. тета это разница двух близких величин) и небольшого количества точек в линейной области

Измерения через сдвиг на высоких частотах получились лучше, но погрешность все еще выше чем в первом методе.

Измерения через индуктивность получились достаточно точными. Нелинейная часть присутствует по той причине, что при почти нулевом проникании поля в трубу основной вклад вносит поле в теле трубы, которое мы не учитываем. Результат не совпал с первым пунктом. Это может быть связано с ошибкой измерительного прибора (во время измерений на некоторых частотах его показания были абсурдны, поэтому доверия он не вызывает) или неучтенным полем в теле проводника

Как уже было сказано в п 3.5, предложенная зависимость описывает явление в рассматриваемом диапазоне