Физический маятник. (1.4.1)

Лавыгин Кирилл

30 октября 2022

1 Аннотация

Цели: на примере измерения периода свободных колебаний физического маятника познакомиться с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями; проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения, оценить погрешности, а так-же убедиться в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника

В ходе работы использовался метод рядов для более точного измерения времени, определялся центр масс при помощи опоры с острой гранью, так-же была учтена ненулевая масса призмы, на которую крепится стержень. Ожидается подтвердить теоретическую модель колебаний физического маятника и получить значение $g \approx 9{,}8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Оборудование: металлический стержень; опорная призма; торцевые ключи; закреплённая на стене консоль; подставка с острой гранью для определения цента масс маятника; секундомер; линейки металлические 50 и 100 см; штангенциркуль; электронные весы; математический маятник (небольшой груз, подвешенный на нитях).

2 Теоретические сведения

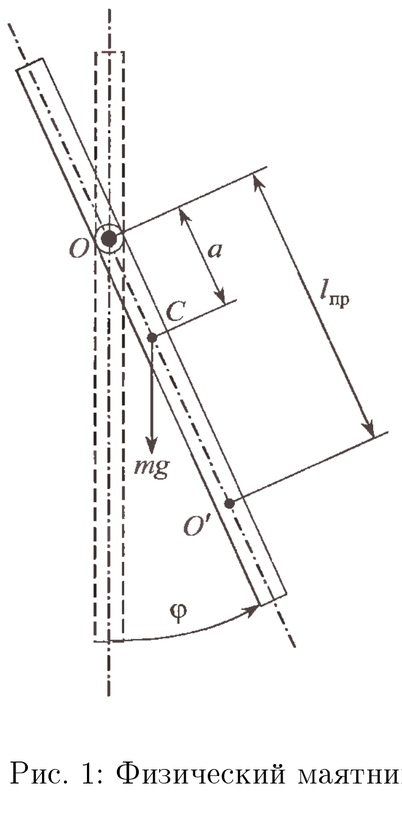

Рис. 1: Физический маятник

В работе изучается динамика движения физического маятника. Физический маятник, используемый в работе, представляет собой однородный стальной стержень массы m, длина которого $l >>$ ее диаметра. На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника.

Второй закон Ньютона определяет динамику движения тела точечной массы m. Импульс тела $P = mv$ изменяется во времени t под действием силы F:

$$F = \frac{dP}{dt}$$

Если рассмотреть точечную массу, которая движется по окружности радиуса r с угловой скоростью ω, тогда линейная скорость $v = \omega r$, то формулу для силы можно преобразовать:

$$[F,r] = [\frac{dP}{dt},r] = M = \frac{dL}{dt}$$

где $L = J\omega$, где величину J называют *моментом инерции.*

$$J = \sum_{i=1} m_i r_i^2$$

Посчитаем момент инерции для данного нам стержня, при вращении вокруг перпендикулярной стержню оси, проходящей через центр масс. Для этого разобьем стержень на отрезки dr и $dm = m \cdot \frac{dr}{l}$ и возьмем интеграл:

$$J_c = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{mr^2}{l} dm = \frac{ml^2}{12}$$

Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя таким образом расстояние OC от точки опоры маятника до его центра масс. Пусть это расстояние равно a. Тогда по теореме Штейнера момент инерции маятника: (m - масса маятника)

$$J = \frac{ml^2}{12} + ma^2$$

Период колебаний получим через аналогию с пружинным маятником, как известно:

$$T_{\text{п}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

В нашем случае, роль массы играет *момент инерции тела* J, а *жесткость пружины* k - коэффициент пропорциональности mga. Таким образом приходим к следующей формуле колебаний произвольного физического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mga}}$$

После подстановки период колебаний, для стержня длиной l подвешенного на расстоянии a от центра, равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}} \tag{1}$$

Таким образом, период малых колебаний не зависит ни от начальной фазы, ни от амплитуды колебаний.

Период колебаний математического маятника определяется формулой (где l – длина математического маятника):

$$T_{\text{м}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

Поэтому величину

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a}$$

называют приведённой длиной математического маятника. Поэтому точку O' (см. рис. 1), отстоящую от точки опоры на расстояние $l_{\text{пр}}$, называют центром качания физического маятника. Точка опоры и центр качания маятника обратимы, т.е. при качании маятника вокруг точки O' период будет таким же, как и при качании вокруг точки O.

3 Экспериментальная установка

Тонкий стальной стержень, подвешенный на прикрепленной к стене консоли с помощью небольшой призмы, которая опирается на поверхность консоли острым основанием. Призму можно перемещать вдоль стержня, изменяя положение точки подвеса. Период колебаний измеряется с помощью секундомера, расстояния измеряются линейкой и штангенциркулем. Положение центра масс можно определить с помощью балансирования маятника на вспомогательной подставке.

3.1 Расчет поправок

Если принять во внимание ненулевой вес призмы, то формула для вычисления периода примет такой вид:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\text{ст}} + J_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}ga_{\text{ст}} - m_{\text{пр}}ga_{\text{пр}}}}$$

Однако призма мала по размеру и массе, поэтому поправка на момент инерции призмы в условиях опыта составляет не более 0,1% $\Rightarrow$ ей можно пренебречь.

Сравним теперь моменты сил, действующие на призму и стержень при $a = 10$ см:

$$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{ст}}} = \frac{m_{\text{пр}}ga_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}ga_{\text{ст}}} \approx 10^{-2}$$

В данном случае поправка достигает 1% $\Rightarrow$ ей пренебречь нельзя. Учесть влияние призмы можно – исключив $a_{\text{пр}}$, изменяя положение центра системы. Пусть X – расстояние от центра масс системы до точки подвеса, тогда:

$$X = \frac{m_{\text{ст}}a_{\text{ст}} - m_{\text{пр}}a_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}} + m_{\text{пр}}}$$

Исключая из двух уравнений $a_{\text{пр}}$, получаем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g\beta X}}; \beta = 1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}} \tag{2}$$

4 Задание

4.1 Оценка погрешностей измерительных приборов и g

Секундомер: $\sigma_c = 0{,}01$ с, **Линейка:** $\sigma_{\text{лин}} = 0{,}1$ см

Погрешность g зависит от точности измерения длин и периода колебаний. Длины измеряли линейкой. Наименьшее измеренное линейкой расстояние 15 см, меньшие расстояния измерялись штангенциркулем, который способен сделать это с на порядок большей точностью. Абсолютная погрешность линейки: $\sigma_{\text{лин}} = 0{,}1$ см. Тогда относительная погрешность длин не превышает $\varepsilon_{\max} \approx 0{,}7\%$ ($\frac{0{,}1}{15} \cdot 100\% = 0{,}7\%$).

Вывод: используемые в работе инструменты позволяют измерять длины с точностью не хуже 0,7%. Для получения конечного результата с схожей точностью период колебаний следует измерять с той же относительной погрешностью: не хуже, чем $\varepsilon_{\max} \approx 0{,}7\%$.

4.2 Длина стержня и множитель β

Длина стержня $l = (100{,}1 \pm 0{,}1)$ см, масса стержня $m = (880{,}1 \pm 0{,}1)$ г, масса призмы $m_{\text{пр}} = (77{,}0 \pm 0{,}1)$ г. Формула для множителя β:

$$\beta = 1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m} = 1 + \frac{77{,}0}{880{,}1} \approx 1{,}08749$$

$$\sigma_\beta = \beta\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\text{пр}}}{m_{\text{пр}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{m}\right)^2} = 1{,}08\sqrt{\left(\frac{0{,}1}{77{,}0}\right)^2 + \left(\frac{0{,}1}{880{,}1}\right)^2} \approx 0{,}0014$$

Получаем, что $\beta = (1{,}0875 \pm 0{,}0014)$ с учетом погрешности. .

4.3 Центр масс стержня и конструкции

Центр масс стержня расположен на расстоянии $b = (50,0 \pm 0{,}1)$ см от почерневшего конца стрежня. Острие призмы расположено на расстоянии $a = (40 \pm 0{,}1)$ см. Сбалансировав маятник *с призмой* на острие вспомогательной установки, измерим положение центра масс конструкции $x_{ц} = 36{,}5 \pm 0{,}1$ см.

4.4 Предварительный опыт

Установим маятник на консоли и отклоним его на малый угол $\varphi_0 \approx 5°$. Измерим время $n = 20$ полных колебаний и вычислим период колебаний $T = t/n$. Результаты 8 измерений приведем в таблице 1.

№ Опыта	1	2	3	4	5	6	7	8
t, с	31.09	31.43	31.34	31.21	31.36	31.14	31.4	31.46
T, с	1.5545	1.5715	1.567	1.5605	1.568	1.557	1.57	1.573

Таблица 1: Результаты измерения периода колебаний

Получаем $\sigma_{t,случ} = 0.14$ с, $T_{ср} \approx 1.565$ с
Предварительное значение ускорения свободного падения посчитаем по формуле

$$g = \frac{4\pi^2(\frac{l^2}{12} + a^2)}{T^2_{ср}\beta x_{ц}} \tag{3}$$

Полученное значение равно $g = 9{,}89$ м/с^2. Отличие от табличного значения $g = 9{,}81$ м/с^2 составляет

$$\alpha = \frac{9{,}89 - 9{,}81}{9{,}81} \cdot 100\% \approx 0{,}8\%$$

Легко увидеть, что погрешность измерения времени носит в первую очередь случайный характер:

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma^2_{случ} + \sigma^2_c} = \sqrt{0.14^2 + 0.01^2} \approx 0{,}14 \text{ с}.$$

С учетом погрешности период колебаний равен $T = 1{,}565 \pm 0{,}007$ с.

4.5 Оценка количества колебаний

Оценим количество колебаний маятника, по которому следует измерять его период. Период составляет $T \approx 1{,}5$ с. Поскольку $T = t/n$, погрешность периода равна $\sigma_T = \sigma_t/n$. Относительная погрешность $\varepsilon_T = \sigma_t/nT =$. При требуемой погрешности $\varepsilon = 0.7\%$ получим $n \approx 14$.

4.6 Измерение периода колебаний для различных значений a

Изменяем положение призмы, каждый раз измеряя ее положение a относительно центра, положение центра масс системы $x_{ц}$ и время n полных колебаний. Результаты приведены в таблице 2. (Сначала был произведен неверный расчет необходимой точности, поэтому первые 3 измерения выполнены для $n = 100$, чтоб на самом делеб явно не делает наш эксперимент хуже) g рассчитываем по формуле 3.

a, см	n	t,с	T,с	g, $\frac{м}{с^2}$	x см;
40	100	156.52	1.5652	9.885464	36.5
35	100	154.08	1.5408	9.812966	32.1
30	100	152.68	1.5268	9.896992	27.3
25	20	30.77	1.5385	9.778069	22.9
20	20	31.64	1.582	9.788895	18.3
15	20	33.74	1.687	9.941859	13.6
10	20	38.86	1.943	9.879967	9.1
5	20	53.77	2.6885	9.816498	4.4
7	20	45.46	2.273	10.018267	6.2

Таблица 2: Результаты измерения периода колебаний для различных а

Можно видеть, что последнее измерение сильно отличается от остальных измеренных величин, поэтому при дальнейшей обработке его не учитываем.

4.7 Определение приведенной длины маятника

Для $a = 40.0$ см:

$$l_{\text{прив}} = a + \frac{l^2}{12a} = 20 + \frac{100.1^2}{12 \cdot 40} \approx 60.9 \text{ см}$$

Установим соответствующую длину математического маятника(от края прижимающих губок до уентра масс шарика) и измерим $n = 20$ таких колебаний:

$$t_{\text{мат}} = 31.0 \text{ с}, T_{\text{мат}} = 1{,}55 \text{ с}$$

Период колебаний физического маятника при $a = 40$ см – $T = 1{,}565$ с $\Rightarrow$ физический маятник длиной l, подвешенный в точке a, имеет тот же период малых колебаний, что и математический маятник длиной $l_{\text{пр}}$, так как $\sigma_{T_{\text{мат}}} = \sigma_{\text{T}} = 0.007$, а значит с учетом погрешностей диапазоны значений периодов пересекаются

4.8 Центр качания

Для $a = 40.0$ см $l_{\text{пр}} = 60.9$ см. Закрепим призму так, чтобы ее острие находилось в центре качания маятника, т.е. на расстоянии $l_{\text{пр}}$ от предыдущего ее положения. Измерим время $n = 20$ колебаний такого маятника.

$$t_{\text{цк}} = 31.27 \text{ с}, T_{\text{цк}} = 1.564\text{см}$$

Как можно видеть, с учетом погрешностей аналогично пункту для математического маятника, периоды этих колебаний так-же равны $\Rightarrow$ теорема Гюйгенса справедлива для a=40 см.

5 Обработка результатов измерений

5.1 Усредненное значение g

Усредним значение g из таблицы 2

$$g = 9.869\text{м}/\text{с}^2$$

.

По формуле (3) Найдем систематическую погрешность g:

$$\sigma_g^{\text{сист}} = g \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\frac{l^2}{12}+a^2}}{\frac{l^2}{12}+a^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{T^2\beta X}}{T^2\beta X}\right)^2}$$

$$\sigma_{\frac{l^2}{12}+a^2} = \sqrt{(\sigma_{l^2}^2 + \sigma_{a^2}^2)}$$

$$\sigma_g^{\text{сист}} = g \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{2\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_a}{a}\right)^2}{\left(\frac{l^2}{12}+a^2\right)^2} + \left(\frac{2\sigma_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\beta}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_X}{X}\right)^2} \approx 0{,}100\frac{\text{м}}{c^2}$$

В то же время $\sigma_g^{\text{сист}} \approx 0.078\frac{\text{м}}{c^2}$, тогда:

$$\sigma_g^{\text{полн}} = \sqrt{(\sigma_g^{\text{сист}})^2 + (\sigma_g^{\text{случ}})^2} \approx 0.123\frac{\text{м}}{c^2}$$

Тогда получаем: $g = (9.87 \pm 0.12)\,\frac{\text{м}}{c^2}$.

5.2 График $T(a)$

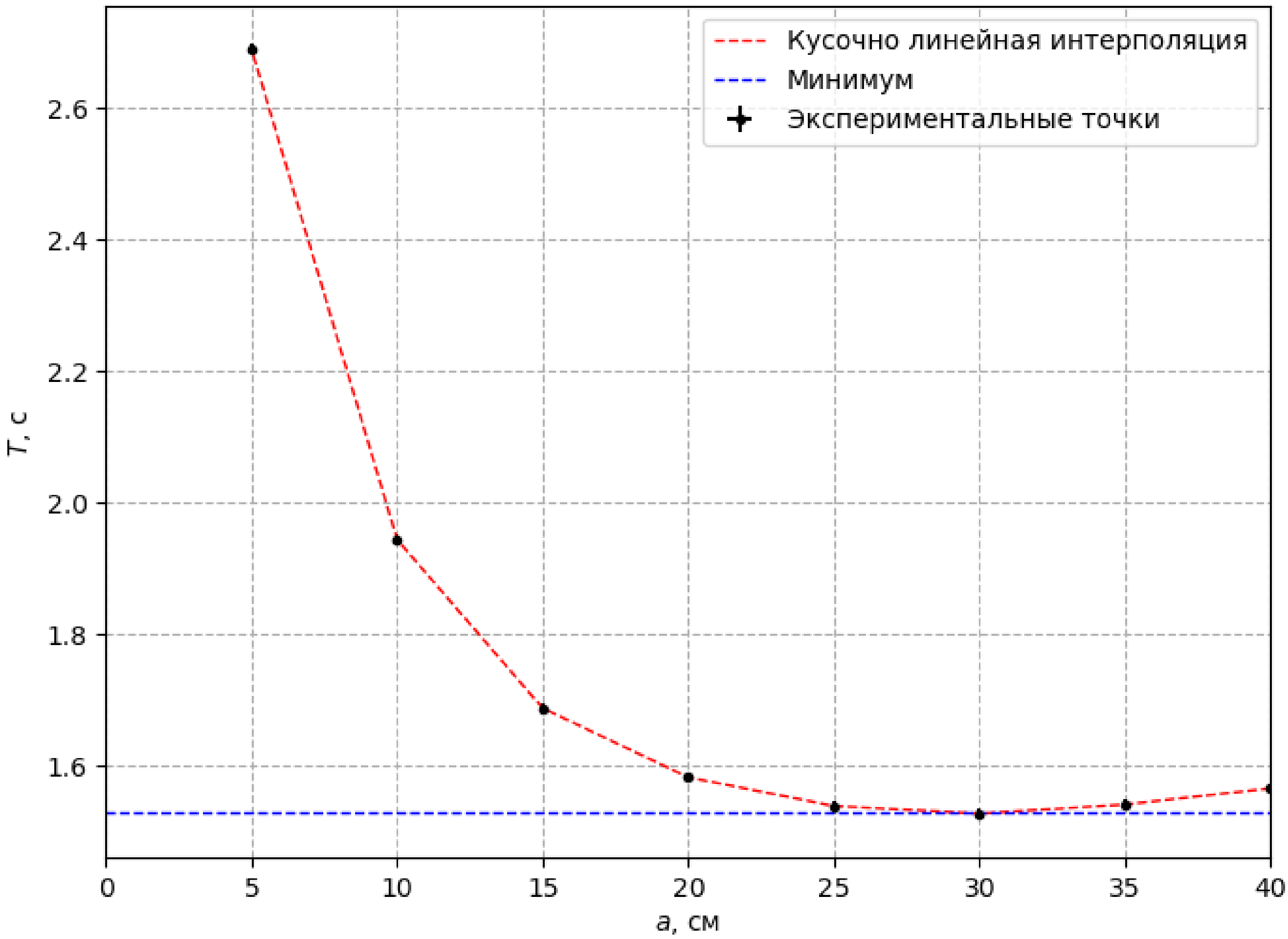

Рис. 2: Зависимость T от a

Минимум графика (Рисунок 2) находится на $a_{\min} \approx 30$ см, что сходится с рассчетом минимума по формуле (1): $a_{\text{формулы}} \approx 28{,}9$ см

5.3 График зависимости $T^2 x_ц \beta$ от a^2

Используя формулу для периода физического маятника (2) получаем следующее соотношение:

$$T^2 x_ц \beta = \frac{4\pi^2}{g} a^2 + \frac{\pi^2 l^2}{3g}.$$

Отсюда следует, что $T^2 x_ц \beta \sim a^2$, поэтому эту зависимость можно представить в виде

$$T^2 x_ц \beta = k a^2 + b,$$

где

$$k = \frac{4\pi^2}{g} \text{ и } b = \frac{\pi^2 l^2}{3g}. \tag{4}$$

График зависимости $T^2 x_ц \beta$ от a^2 представлен на рисунке 3.

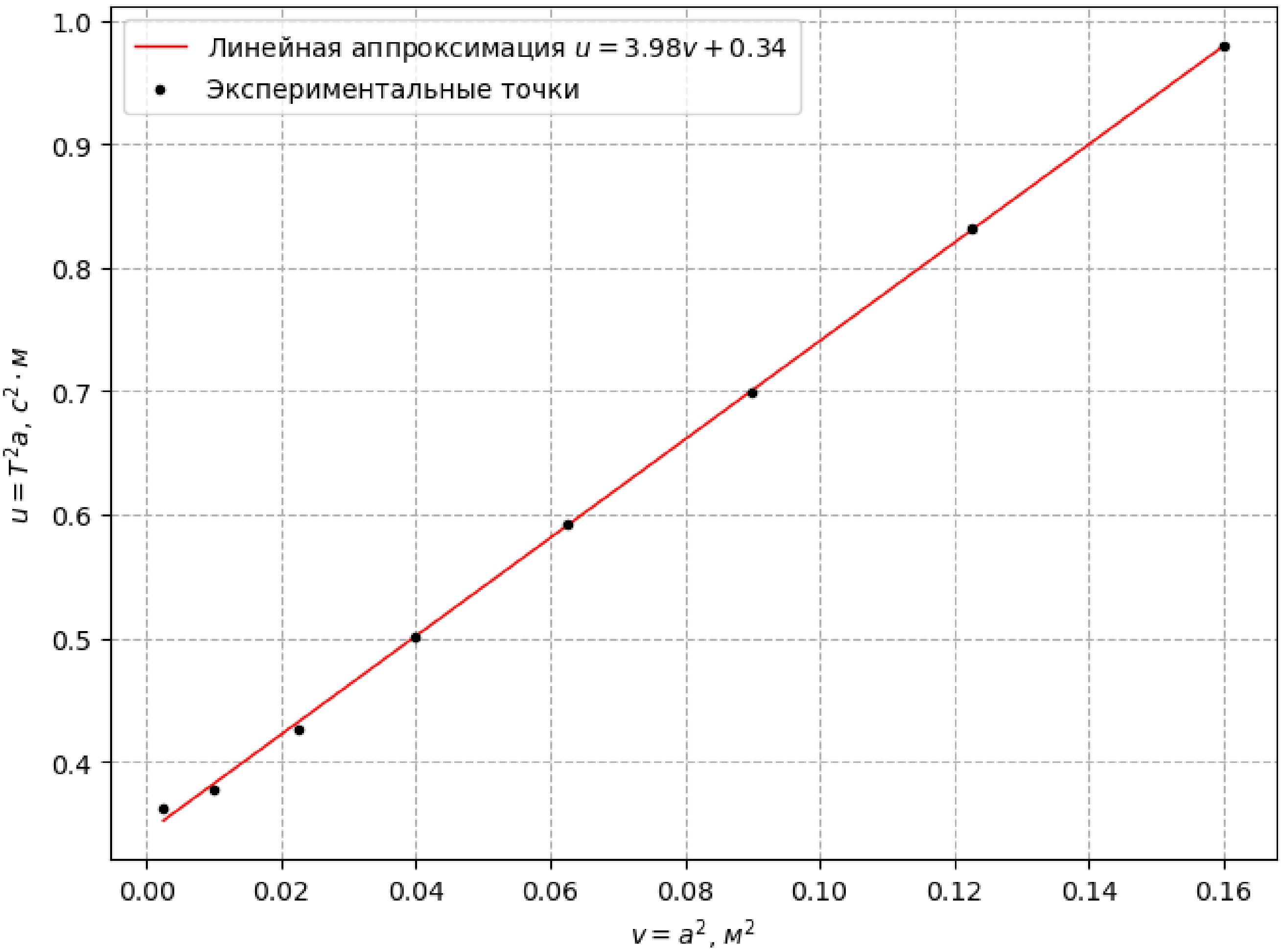

Рис. 3: Зависимость $T^2 x_ц \beta$ от a^2

Погрешности отмечать на графике не имеет смысла, так как из 2 видно, что они слишком малы для их графического представления. Для вычисления коэффициентов k и b из (4) воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle uv \rangle - \langle v \rangle \langle u \rangle}{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2} \approx 3.981 \cdot 10^{-2} \ \frac{с^2}{см},$$

$$b = \langle u \rangle - k \langle v \rangle \approx 34.22 \text{ см} \cdot с^2, v = a^2, u = T^2 x_ц \beta$$

Случайные погрешности вычисления k и b можно найти по следующим формулам:

$$\sigma_k^{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N-2} \cdot \frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} \approx 3.2 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b^{\text{сл}} = \sigma_k^{\text{сл}} \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0{,}34 \text{ см} \cdot \text{с}^2.$$

Систематическая погрешность вычисления коэффициентов определяется следующим соотношением:

$$\sigma_k^{\text{сист}} = k\sqrt{\left(\varepsilon_{T^2 x_{\text{ц}} \beta}\right)^2 + \left(\varepsilon_{a^2}\right)^2} = k\sqrt{\left(2\varepsilon_T\right)^2 + \left(\varepsilon_{x_{\text{ц}}}\right)^2 + \left(\varepsilon_\beta\right)^2 + 2\left(\varepsilon_a\right)^2} \approx 4.7 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b\sqrt{\left(\varepsilon_{T^2 x_{\text{ц}} \beta}\right)^2 + \left(\varepsilon_{a^2}\right)^2} = b\sqrt{\left(2\varepsilon_T\right)^2 + \left(\varepsilon_{x_{\text{ц}}}\right)^2 + \left(\varepsilon_\beta\right)^2 + 2\left(\varepsilon_a\right)^2} \approx 0.40 \text{ см} \cdot \text{с}^2.$$

Тогда полную погрешность вычисления коэффициентов подсчитываем по следующей формуле:

$$\sigma_k = \sqrt{(\sigma_k^{\text{сл}})^2 + (\sigma_k^{\text{сист}})^2} \approx 5.7 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b = \sqrt{(\sigma_b^{\text{сл}})^2 + (\sigma_b^{\text{сист}})^2} \approx 0.52 \text{ см} \cdot \text{с}^2.$$

Таким образом, получаем:

- $k = (3.98 \cdot 10^{-2} \pm 6 \cdot 10^{-4}) \ \frac{\text{с}^2}{\text{см}}$, $\varepsilon_k = 1.5\%$
- $b = (34.2 \pm 0{,}5) \ \text{см} \cdot \text{с}^2$, $\varepsilon_b = 1.5\%$

Используя (4), вычисляем g через угол наклона прямой:

$$g_k = \frac{4\pi^2}{k} \approx 9{,}919 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\sigma_{gk} = g \cdot \varepsilon_k \approx 0{,}15 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

Также g можно вычислить через пересечение графика с осью "y":

$$g_b = \frac{\pi^2 l^2}{3b} \approx 9{,}638 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\sigma_{gb} = g \cdot \varepsilon_b \approx 0{,}14 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

В итоге имеем следующие результаты:

- $\underline{g_k = (9{,}92 \pm 0{,}15) \, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \ \varepsilon_{gk} = 1{,}5\%}$
- $\underline{g_b = (9{,}64 \pm 0{,}14) \, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \ \varepsilon_{gb} = 1{,}5\%}$

Сначала заметим, что с точки зрения полученной величины погрешности, метод усреднения g показывает более высокую точность, но метод МНК позволяет во-первых проверить правильность полученной теоретической зависимости путем линеаризации, а во-вторых предоставляет два различных способа расчета g. Рассчитав g обоими способами мы получили, что диапазоны g с учетами погрешностей пересекаются в небольшой области, в которой, вероятно и лежит истинное значение g:

$$g \approx \frac{g_k + g_b}{2} = 9{,}78 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \sigma_g \approx \frac{\sigma_{g_k}}{2} = 0.08 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

6 Вывод

В ходе эксперимента мы подтвердили модель физического маятника, проверили формулу эквивалентной длины путем использования математического маятника, проверили Теорему Гюйгенса об обратимости точки оборы и центра качения, рассчитали g двумя различными методами обработки.

В ходе работы мы получили следующие величины:

- $g_{\text{мнк}} = (9.78 \pm 0.08)\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\varepsilon_{gk} = 0.8\%$
- $g_{\text{уср}} = (9{,}87 \pm 0{,}12)\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\varepsilon_{gb} = 1{,}2\%$

Чтобы увеличить точность измерений необходимо увеличить число измерений для времени, чтобы уменьшить погрешность из-за реакции экспериментатора, или вовсе осуществлять фиксацию с помощью датчика. Также для увеличения точности стоит измерять a, x с большей точностью, например использовать большой штангенциркуль вместо линейки.