

Исследование прецессии уравновешенного гироскопа (1.2.5)

Лавыгин Кирилл

20 октября 2022

1 Аннотация

В ходе работы будет исследована вынужденная прецессия гироскопа, установлена зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующий на ось гироскопа. Полученные значения будут сопоставлены с теми, что получены из теоретической модели. Ожидается подтверждение предложенной модели.

Оборудование: гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

2 Теоретические сведения

В этой работе исследуется зависимость скорости прецессии гироскопа от момента силы, приложенной к его оси. Для этого к оси гироскопа подвешиваются грузы. Скорость прецессии определяется по числу оборотов рычага вокруг вертикальной оси и времени, которое на это ушло, определяемому секундомером. В процессе измерений рычаг не только поворачивается в результате прецессии гироскопа, но и опускается. Поэтому его в начале опыта следует приподнять на 5-6 градусов. Опять надо закончить, когда рычаг опустится на такой же угол.

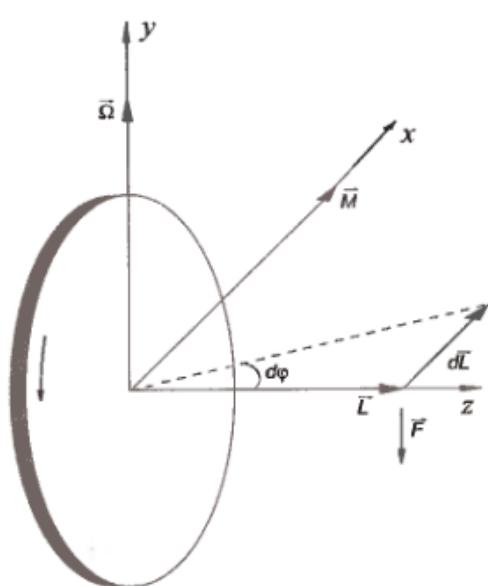


Рис. 1. Маховик

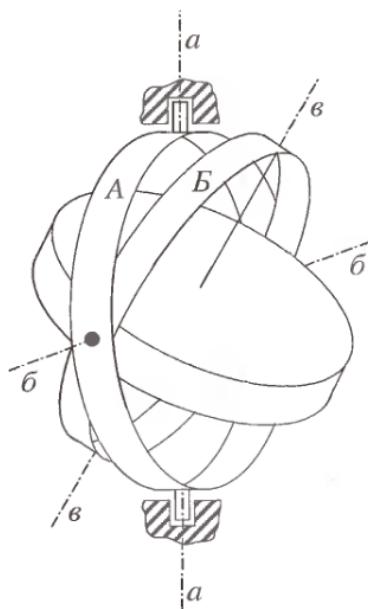


Рис. 2. Гироскоп в кардановом подвесе

В данной работе для описания движения гироскопа применяется уравнение моментов $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, которое в случае нашей задачи поворота гироскопа принимает вид $\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$.

Путем преобразований получим:

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0},$$

где m – масса груза, l – расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа, I_z – момент инерции гироскопа по его главной оси вращения. ω_0 – частота его вращения относительно главной оси, Ω – частота прецессии.

Таким образом измерение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить угловую скорость вращения его ротора.

Момент инерции ротора относительно оси симметрии I_0 измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на жесткой проволоке. Период крутильных колебаний T_0 зависит от момента инерции I_0 и модуля кручения проволоки f :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}}.$$

Чтобы исключить модуль кручения проволоки, вместо ротора гироскопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко можно вычислить момент инерции $I_{\text{ц}}$. Для определения момента инерции ротора гироскопа имеем:

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2}, \quad (1)$$

Здесь $T_{\text{ц}}$ – период крутильных колебаний цилиндра.

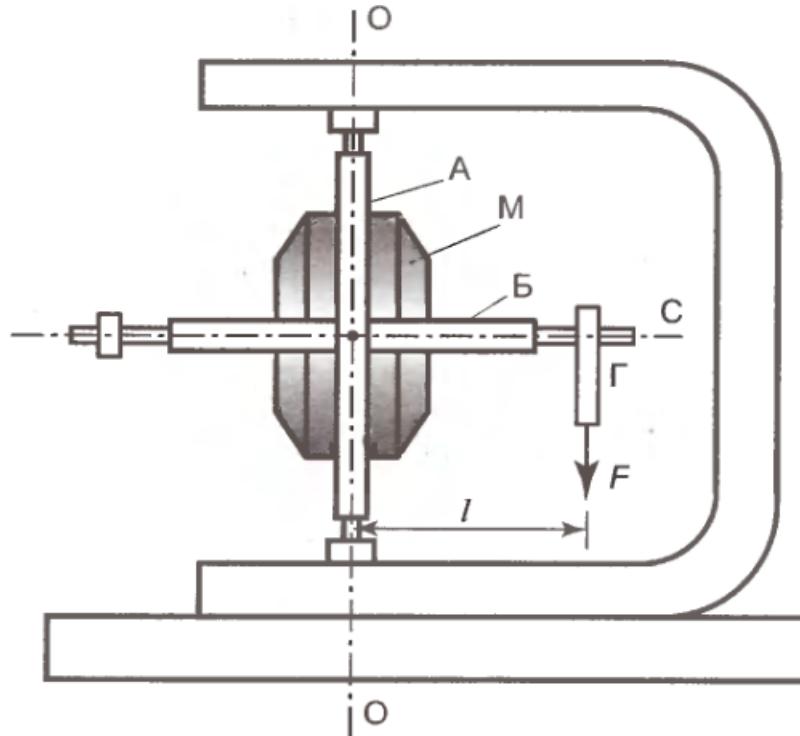


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

Скорость вращения ротора гироскопа можно определить и не прибегая к исследованию прецессии. У используемых в работе гироскопов статор имеет две обмотки, необходимые для быстрой раскрутки гироскопа. В данной работе одну обмотку используют для раскрутки гироскопа, а вторую – для измерения числа оборотов ротора. Ротор электромотора всегда немного намагнчен. Вращаясь, он наводит во второй обмотке переменную ЭДС индукции, частота которой равна частоте вращения ротора. Частоту этой ЭДС можно, в частности, измерить по фигурам Лиссажу, получаемым на экране осциллографа, если на один вход подать исследуемую ЭДС, а на другой – переменное напряжение с хорошо прокалиброванного генератора. При совпадении частот на экране получаем эллипс.

3 Ход работы

Данные для частоты прецессии и опускания гироскопа: $\Omega = \frac{2\pi N}{t}$, $M = mgl$, где $l = 120\text{мм}$ – длина рычага.

$m, \text{г}$	$t, \text{с}$	n	$\Omega \cdot 10^{-2}, \text{с}^{-1}$	$M, H \cdot \text{м}$
342	148.97	5	21.088761	0.402192
342	119.53	4	21.026304	0.402192
342	118.71	4	21.171545	0.402192
342	119.19	4	21.086283	0.402192
342	118.66	4	21.180466	0.402192
274	74.00	2	16.981582	0.322224
274	74.22	2	16.931246	0.322224
274	74.44	2	16.881207	0.322224
220	92.44	2	13.594083	0.25872
220	92.22	2	13.626513	0.25872

$m, \text{г}$	$t, \text{с}$	n	$\Omega \cdot 10^{-2}, \text{с}^{-1}$	$M, H \cdot \text{м}$
220	92.38	2	13.602913	0.25872
142	72.10	1	8.714543	0.166992
142	72.27	1	8.694044	0.166992
142	72.32	1	8.688033	0.166992
93	109.06	1	5.761219	0.109368
93	109.27	1	5.750147	0.109368
93	110.41	1	5.690776	0.109368
57	178.22	1	3.525522	0.067032
57	177.78	1	3.534248	0.067032

Также мы измерили скорость опускания рычага (h_0 – начальная высота точки подвеса, h_k – конечная, α – угол, на который опустился рычаг). $\alpha \approx \frac{h_0 - h_k}{l}$:

$h_0, \text{м}$	$h_k, \text{м}$	$t, \text{с}$	$m, \text{г}$	α	$M, H \cdot \text{м}$
13.4	12.0	91.15	342	0.116667	0.402192
13.0	11.6	110.91	274	0.116667	0.322224
13.0	11.7	92.54	220	0.108333	0.258720
13.0	11.3	142.78	142	0.141667	0.166992
13.0	11.6	110.09	93	0.116667	0.109368
13.0	11.0	188.18	57	0.166667	0.067032

Построим график зависимости $\Omega(M)$ (аппроксимация производилась по МНК):

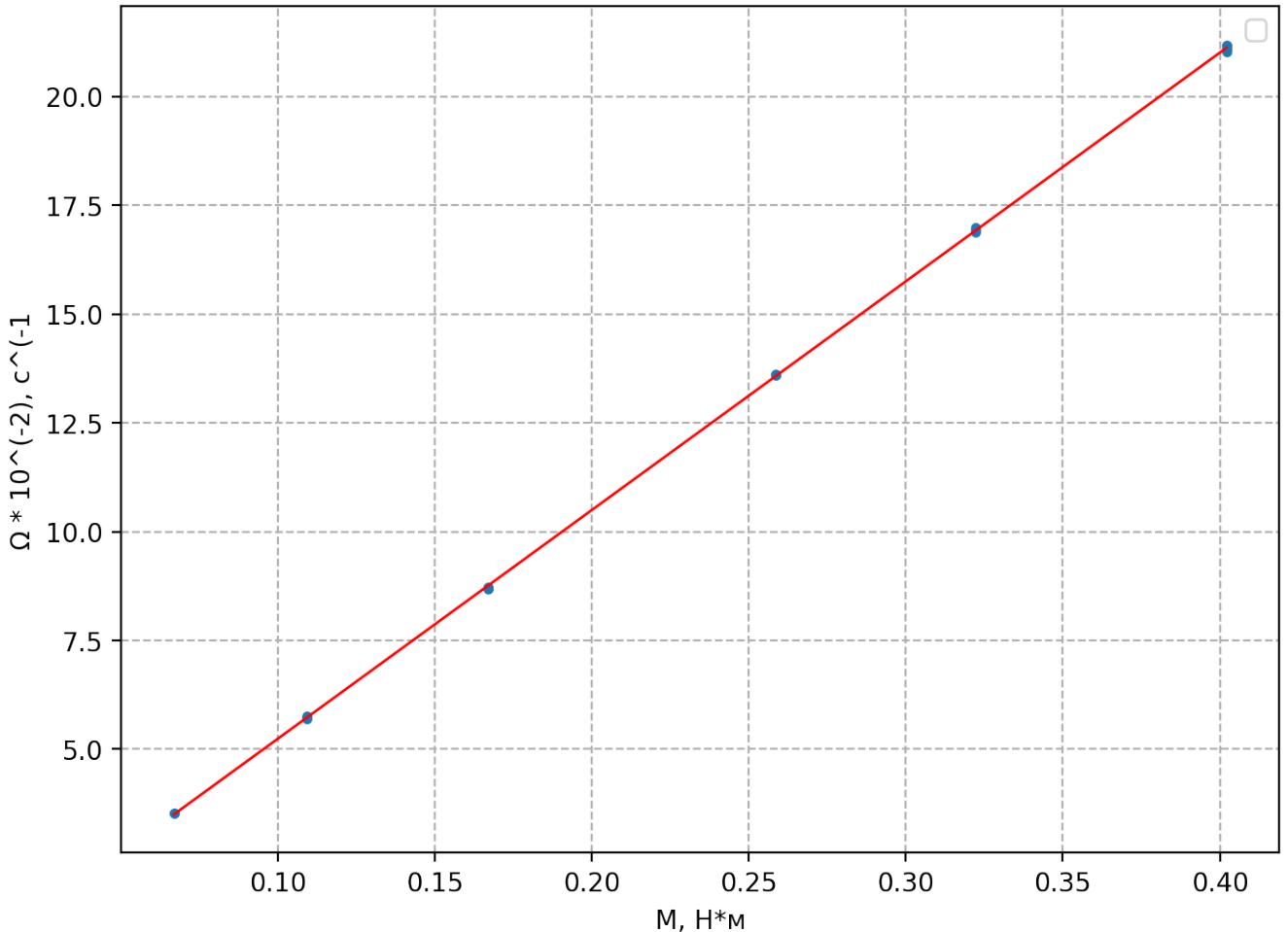


Рис. 1: Зависимость Ω от M

Как и ожидалось, график оказался линейным, что говорит о том, что наша теоритическая модель скорее всего верна. Далее найдем момент инерции ротора гироскопа по формуле (1), для этого посчитаем момент инерции цилиндра, с известной нам массой(1,6169 кг) и диаметром(7,81 см): $I_{\text{ц}} = \frac{1}{2}mr^2 \approx 1.2328 \cdot 10^{-3}$ кг·м². Теперь рассчитаем периоды. Для цилиндра проводилось измерение 8 колебаний, $t_{\text{ц}} = 32.59, 32.46, 32.56$, а для ротора 10 колебаний $t_0 = 32.12, 32.10, 32.16$, тогда периоды: $T_{\text{ц}} = 4.067$ с и $T_0 = 3.213$ с. Тогда $I_0 \approx 7.694 \cdot 10^{-4}$ кг·м²

4 Погрешности Ω и I_0

$$\sigma_{\Omega} = \sqrt{\sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2} \quad \sigma_{\Omega}^{\text{сист}} = \Omega \varepsilon_T \ll \sigma_{\Omega}^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Omega_i - \bar{\Omega})^2}$$

Каждая частота Ω с учетом погрешностей:

- $\Omega = (21.11 \pm 0.06) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ для $m = 342\text{г}$
- $\Omega = (16.93 \pm 0.05) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ для $m = 274\text{г}$
- $\Omega = (13.608 \pm 0.017) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ для $m = 220\text{г}$
- $\Omega = (8.698 \pm 0.014) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ для $m = 142\text{г}$
- $\Omega = (85.73 \pm 0.04) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ для $m = 93\text{г}$

- $\Omega = (3.529 \pm 0.006) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ для $m = 57\text{г}$

Погрешность $\sigma_{I_0} = I_0 \cdot \sqrt{\varepsilon_{I_{\text{н}}}^2 + 4\varepsilon_{T_0}^2 + 4\varepsilon_{T_{\text{н}}}^2} \approx 0.03 \cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, значит $I_0 = (7.69 \pm 0.03) \cdot 10^{-4} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$

5 Определение частоты вращения ротора гироскопа

Определить частоту вращения ротора можно по формуле $\omega_0 = \frac{1}{kI_0}$, где k – коэффициент наклона графика зависимости $\Omega(M)$.

График построен по МНК, а значит:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,5256 \frac{1}{\text{Дж} \cdot \text{с}}$$

$$\sigma_k^{\text{сл}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} \approx 0,0009 \frac{1}{\text{Дж} \cdot \text{с}}$$

Тогда $\omega_0 = 2474 \text{ с}^{-1}$, а $\sigma_{\omega_0} = \omega_0 \cdot \sqrt{\varepsilon_{I_0}^2 + \varepsilon_k^2} \approx 10 \text{ с}^{-1}$

Используя полученную угловую скорость можно определить частоту вращения ротора гироскопа: $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 393.7 \text{ Гц}$, а $\sigma_\nu = \nu \varepsilon_{\omega_0} \approx 1.6 \text{ Гц}$

Таким образом получаем: $\nu = (393.7 \pm 1.6) \text{ Гц}$, что с учетом погрешности, правда, не попадает в полученное значение при помощи осциллографа: $\nu_0 = 391 \text{ Гц}$. Думаю, это связано с тем, что измерения с помощью осциллографа проведены с достаточно низкой точностью, так как для получения корректных показаний приходилось отключать питание мотора на время измерений, из-за чего было сложно провести много попыток измерений, а также гироскоп начинал замедляться.

6 Момент силы трения

Оценить момент силы трения мы можем по формуле: $M = \omega I_0 \omega_0$. Момент силы трения для каждой массы:

- $m = 342 \text{ г}, \omega = 12.8 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, M = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 274 \text{ г}, \omega = 10.5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, M = 2.0 \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 220 \text{ г}, \omega = 11.1 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, M = 2.2 \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 142 \text{ г}, \omega = 9.9 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, M = 1.9 \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 93 \text{ г}, \omega = 10.6 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, M = 2.0 \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 57 \text{ г}, \omega = 8.8 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, M = 1.7 \cdot 10^{-3} \text{ Н}\cdot\text{м}$

Если рассчитать σ_ω , то получим $\sigma_\omega \approx 0.8$. По измеренным данным видно, что погрешность является существенно заниженной. Основная ошибка кроется в измерении угла, так как мы просто измеряли высоту точки крепления груза над столом, что достаточно неточно. С другой стороны, по предоставленным данным можно сделать предположение, хорошо согласующееся с теорией: момент силы трения пропорционален подвешенной массе.