作业1

3.1-2

> 证明：对任意实常量a和b，其中$b > 0$，有
>
> $$(n+a)^b = \Theta(n^b)$$

由二项式定理展开左式有，

$$(n+a)^b = \sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k} n^{b-k} a^k = n^b + a\binom{b}{1} n^{b-1} + \cdots + a^{b-1}\binom{b}{b-1} n + a^b$$

显然，当$n \geq 1$时，

$$n^b \leq (n+a)^b \leq (1 + a\binom{b}{1} + \cdots + a^{b-1}\binom{b}{b-1} + a^b) n^b$$

因此存在$c_1 = 1, c_2 = 1 + a\binom{b}{1} + \cdots + a^{b-1}\binom{b}{b-1} + a^b, n_0 = 1$使得对所有$n \geq n_0$有，

$$c_1 n^b \leq (n+a)^b \leq c_2 n^b$$

即有

$$(n+a)^b = \Theta(n^b)$$

3.1-3

> 解释为什么“算法A的运行时间至少是$O(n^2)$”这一表述是无意义的。

这句话既没有给出算法运行时间的上界，也没有给出运行时间的下界。
因为“至少”与“O”是矛盾的。
至少：表示运行时间的下界；O：用来表示运行时间的上界。

3.1-4

> $2^{n+1} = O(2^n)$成立么？$2^{2n} = O(2^n)$成立么？

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq c \cdot 2^n \quad c \geq 2$$

即存在$c = 2, n_0 = 0$，满足任意$n \geq n_0$，有$2^{n+1} \leq c \cdot 2^n$。

所以，$2^{n+1} = O(2^n)$成立。

$2^{2n} = O(2^n)$不成立，采用反证法证明。

假设等式成立，则存在c和n_0满足，对任意$n \geq n_0$，有$2^{2n} \leq c \cdot 2^n$。

求解不等式，

$$2^{2n} \leq c \cdot 2^n \Rightarrow 2^n \leq c$$

该不等式无解，因此假设不成立。

3.2-3

> 证明等式(3.19)。并证明$n! = w(2^n)$且$n! = o(n^n)$。
>
> $$\lg(n!) = \Theta(n \lg n) \tag{3.19}$$

由斯特林（Stirling）近似公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta(\frac{1}{n})\right)$$

代入可得，

$$\begin{aligned}
\lg(n!) =& \lg\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta(\frac{1}{n})\right)\right) \\
=& \lg(\sqrt{2\pi n}) + \lg(\frac{n}{e})^n + \lg(1 + \Theta(\frac{1}{n})) \\
=& \Theta(\lg(n)) + \Theta(n \lg(n)) + \lg(\Theta(1 + \frac{1}{n})) \\
=& \Theta(n \lg(n))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{2^n} =& \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta(\frac{1}{n})\right)}{2^n} \\
=& \lim_{n \to \infty} \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{2e})^n \\
=& \infty
\end{aligned}$$

因此，有$n! = \omega(2^n)$。

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} \\
&=0
\end{aligned}
$$

因此，有$n! = o(n^n)$。

3-2

> （相对渐进增长）
> 为下表中的每对表达式（A，B）指出A是否是B的O、o、Ω、ω或Θ。假设$k \geq 1$、$\epsilon > 0$且$c > 1$均为常量。
> 回答应该以表格的形式，将“是”或“否”写在每个空格中。

判断$A = O(B)$等，

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$\lg^k n$	n^ϵ	是	是	否	否	否
n^k	c^n	是	是	否	否	否
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$	否	否	否	否	否
2^n	$2^{n/2}$	否	否	是	是	否
$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$	是	否	是	否	是
$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$	是	否	是	否	是

3-3

> （根据渐进增长率排序）
>
> a. 根据增长的阶来排序下面的函数，即求处满足$g_1 = \Omega(g_2)$，$g_2 = \Omega(g_3)$，$\cdots$，$g_{29} = \Omega(g_{30})$的函数的一种排列g_1，g_2，$\cdots$，g_{30}。把你的表划分成等价类，使得函数$f(n)$和$g(n)$在相同类中当且仅当$f(n) = \Theta(g(n))$。

> $$\begin{array}{cccccc} \lg(\lg^* n) & 2^{\lg^* n} & (\sqrt{2})^{\lg n} & n^2 & n! & (\lg n)! \\ (\frac{3}{2})^n & n^3 & \lg^2 n & \lg(n!) & 2^{2^n} & n^{1/\lg n} \\ \ln\ln n & \lg^* n & n * 2^n & n^{\lg\lg n} & \ln n & 1 \\ 2^{\lg n} & (\lg n)^{\lg n} & e^n & 4^{\lg n} & (n+1)! & \sqrt{\lg n} \\ \lg^*(\lg n) & 2^{\sqrt{2\lg n}} & n2^n & n & \lg n & 2^{2^{n+1}} \end{array}$$

1. 1, $n^{1/\lg n}$
2. $\lg(\lg^* n)$
3. $\lg^* n$, $\lg^*(\lg n)$
4. $2^{\lg^* n}$
5. $\ln\ln n$
6. $\sqrt{\lg n}$
7. $\ln n$
8. $\lg^2 n$
9. $2^{\sqrt{2\lg n}}$
10. $(\sqrt{2})^{\lg n} = \sqrt{n}$
11. $2^{\lg n}$, n
12. $\lg(n!)$, $n\lg n$
13. n^2, $4^{\lg n}$
14. n^3
15. $(\lg n)!$
16. $n^{\lg\lg n}$, $(\lg n)^{\lg n}$
17. $(\frac{3}{2})^n$
18. 2^n
19. $n \cdot 2^n$
20. e^n
21. $n!$
22. $(n+1)!$
23. 2^{2^n}
24. $2^{2^{n+1}}$

> b. 给出非负函数$f(n)$的一个例子，使得对所有在(a)部分中的函数$g_i(n)$，$f(n)$既不是$O(g_i(n))$也不是$\Omega(g_i(n))$。

$f(n)$只需要超出上述函数表示的范围不断震荡即可，如

$$f(n) = \begin{cases} 2^{2^{n+2}} & \text{n is odd} \\ 1/n & \text{n is even} \end{cases}$$

其它

> 利用极限的方式证明：
> $\lg^b n = o(n^a), n^b = o(a^n)$

由洛必达法则，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg^b n}{n^a} = \lim_{n\to\infty}\frac{b\lg^{b-1} n}{an^a} = \cdots = \lim_{n\to\infty}\frac{b!}{a^b n^a} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{bn^{b-1}}{na^{n-1}} = \cdots = \lim_{n\to\infty}\frac{b!}{n(n-1)\cdots(n-b+1)a^{n-b}} = 0$$