

algebraic effect handlers を含むプログラムのステップ実行

古川 つきの, 浅井 健一

お茶の水女子大学

furukawa.tsukino@is.ocha.ac.jp, asai@is.ocha.ac.jp

概要 ステップはプログラムの実行過程を見せるツールである。これまで様々な言語に対するステップが作られてきたが、shift/reset や algebraic effect handlers といった継続を明示的に扱う言語機能をサポートするステップは作られていない。継続を扱うプログラムの挙動を理解するのは困難なので、そういった言語に対応したステップがあると役に立つと思われる。それを作ることが本研究の目的である。

ステップは簡約のたびにその時点でのプログラム全体を出力するインタプリタなので、実行している部分式のコンテキストの情報が常に必要になる。継続を扱うような複雑な機能を持つ言語を対象にしたステップでは、コンテキストがどのような構造をしているかが自明でない。そこで、通常のインタプリタ関数にプログラム変換を施すことで機械的にコンテキストの情報を保持させたステップを実装する方法を示し、実際に型無し入計算と algebraic effect handlers から成る言語に対するステップを実装する。

1 はじめに

プログラムの実行の様子を確認する方法に、実行が1段階進むごとにどのようなプログラムになっているのかを書き連ねる方法がある。このツールは、代数的ステップ（以後、単にステップと書く）と呼ばれ、プログラムが代数的に書き換わる様子を1ステップずつ表示してくれるものである。例えば OCaml のプログラム `let a = 1 + 2 in 4 + a` を入力されると、ステップは以下のような実行ステップを表す文字列を出力する。

Step 0: `(let a = (1 + 2) in (4 + a))`

Step 1: `(let a = 3 in (4 + a))`

Step 1: `(let a = 3 in (4 + a))`

Step 2: `(4 + 3)`

Step 2: `(4 + 3)`

Step 3: `7`

このように1段階ずつ確認していけば、具体的にどのような計算がされるのかを観察することができ、プログラムの動きを理解しやすい。またこの方法はデバッグにおいても有用で、どの段階で想定と違うことが起こっているのかが見えるので、プログラムのどの部分がその原因なのかが分かりやすくなる。特に、ステップの操作は前後のステップへの移動のみであり、デバッグのコマンドを覚えたりブレークポイントを適切に設定するような難しい操作を必要としないので、プログラミングや CUI での操作に慣れていない初心者でも使いやすい。お茶の水女子大学では実際に関数型言語の授業でステップを本格的に使用しており、ある程度学習に役立っている [4]。

しかし、継続を操作するようなプログラムだった場合、ステップをどのように作ったら良いのかは明らかではない。そのような複雑なプログラムでこそ実行の様子を詳細に追いたいところだが、現在のところそのような言語に対するステップは作られていない。わずかに、我々が過去の研究 [4] で例外処理のための構文 `try-with` を含む言語についてのステップを実装した程度である。

そこで我々は、ステップを、継続を明示的に扱う言語機能に対応させることを目指している。ステップは、通常のインタプリタ関数に出力機能を追加することで実装できるが、その際、式全体を再構成するためにコンテキストの情報が必要になる。以前の研究 [4] では、部分式の簡約に進むたびにコンテキストを表すデータ型を作成していたが、継続を操作するようなプログラムの場合、どのようなコンテキストにすれば良いのかは即座には明らかではない。

本論文の貢献点は次の通りである。まず第一に、algebraic effect handlers に対する big step インタプリタを定義した。このインタプリタは、従来知られていたものと異なり、継続が高階関数の形で表現された CPS インタプリタになっている。第二に、algebraic effect handlers を含む言語について、インタプリタに CPS 変換 [9] と非関数化 [11] を施すことでコンテキスト情報を導出した。本論文では詳しくは述べないが、この手法は shift/reset に対するステップの作成にも使うことができる。

本論文の構成は以下の通りである。まず 2 節でステップを実装する方法を紹介する。そして 3 節で algebraic effect handlers を含む言語およびそのインタプリタを定義し、4 節でインタプリタを変換してステップを得るまでの過程を説明する。5 節では他のいくつかの言語に対するステップを同様の変換によって得ることについて議論する。6 節で関連研究について触れ、7 節でまとめる。

2 ステップの実装方法とコンテキスト

ステップは small step による実行と同じなので、small step のインタプリタを書けば実装できる。実際、Whittington & Ridge [12] は small step のインタプリタを書くことで OCaml に対するステップを実装している。しかし、ステップ実行中に関数呼び出し単位でスキップする機能をつけようと思うとインタプリタは big step で書かれていた方が都合が良い。そこで、我々の過去の研究 [4] では、big step のインタプリタを元にしてステップを作成している。ここでも、そのアプローチをとる。

図 1 に OCaml による型無し λ 計算の定義と代入ベースの big step インタプリタの実装を示す。関数 `subst : e -> (string * v) list -> e` は代入関数であり、`subst e [(x, v)]` は式 `e` 中の全ての変数 `x` を値 `v` に置換した式を返す。

環境を使わず代入に基づくインタプリタを用いるのは、各ステップでのプログラムが手元にあると簡約位置の情報等を保持しやすいためである。この情報はステップが各ステップの簡約位置を強調して表示するために利用される。ステップ出力のたびに出力プログラム中の変数に値を代入すれば環境を用いたインタプリタで実装することもできると思われるが、簡約位置の情報の保持が複雑になる可能性がある。

図 1 のインタプリタをステップにするには、簡約をする際に簡約前後のプログラムを出力する機能を追加すればよい。しかしステップが出力したいのは実行中の部分式ではなく式全体である。コンテキストを含めた式全体を出力するためには、実行中の式の構文木の他にコンテキストの情報が必要である。

コンテキストの情報を得るために、Clements ら [2] は Racket の continuation mark を使用してコンテキストフレームの情報を記録することでステップを実装した。本研究ではそのような特殊な機能は使わずに、インタプリタ関数に明示的にコンテキスト情報のための引数を追加する。図 1 のインタプリタにその変更を施すと、図 2 のようになる。ここで、関数 `memo : e -> e -> c -> unit` は、簡約前の式、簡約後の式、コンテキスト情報の 3 つを引数にとり、コンテキスト情報を利用して簡約前後の式全体をそれぞれ出力するものである。

図 2 のように、コンテキストを表すデータ型を定義して再帰呼び出し時の構造に合わせて引数として渡すようにすれば、式全体を再構成して出力することが可能になる。ここで、コンテキストを表すデータ型は、評価文脈そのものになっていることに気がつく。評価文脈のデータ型は、big step

```

(* 値 *)
type v = Var of string      (* x *)
      | Fun of string * e   (* fun x -> e *)

(* 式 *)
and e = Val of v            (* 値 *)
      | App of e * e        (* e e *)

(* インタプリタ *)
let rec eval (exp : e) : v = match exp with
| Val (v) -> v              (* 値ならそのまま返す *)
| App (e1, e2) ->
  let v2 = eval e2 in        (* 引数部分を実行 *)
  let v1 = eval e1 in        (* 関数部分を実行 *)
  let reduct = match v1 with
  | Fun (x, e) -> subst e [(x, v2)] (* 代入 e[v2/x] *)
  | _ -> failwith "type error" in   (* 関数部分が関数でなければ型エラー *)
  eval reduct                (* 代入後の式を実行 *)

```

図 1. 型無し λ 計算とそのインタプリタ

```

(* コンテキスト *)
type c = CId                (* [] *)
      | CApp2 of e * c      (* [e []] *)
      | CApp1 of c * v      (* [[[]] v] *)

(* 出力しながら再帰的に実行 *)
let rec eval (exp : e) (c : c) : v = match exp with
| Val (v) -> v
| App (e1, e2) ->
  let v2 = eval e2 (CApp2 (e1, c)) in (* コンテキストを 1 層深くする *)
  let v1 = eval e1 (CApp1 (c, v2)) in (* コンテキストを 1 層深くする *)
  let redex = App (Val v1, Val v2) in
  let reduct = match v1 with
  | Fun (x, e) -> subst e [(x, v2)]
  | _ -> failwith "type error" in
  memo redex reduct c;              (* コンテキストを利用して式全体を出力 *)
  eval reduct c

(* 実行を始める *)
let stepper (exp : e) = eval exp CId

```

図 2. 型無し λ 計算に対するステッパ

のインタプリタを CPS 変換し、非関数化すると機械的に得られることが知られている [1, 3]。これは、我々が手動で定義したコンテキストのデータは、機械的に導出できることを示唆している。

λ 計算に対するステップであれば、手動でコンテキストの型を定義するのは簡単だが、言語が複雑になると必ずしもこれは自明ではない。実際、以前の研究 [4] で try-with 構文を含む言語のステップを実装したときには、コンテキストを try-with 構文で区切る必要があったため、コンテキストの構造が一次元的でなく、リストのリストになった。algebraic effect handlers などが入った場合、どのようなコンテキストを使えば良いのかはまた別途、考慮する必要がある。このような場合、機械的にコンテキストの定義を導出することにはメリットがある。次節以降ではそのような方針で algebraic effect handlers に対するステップを導出する。

3 algebraic effect handlers とインタプリタの定義

この節では、algebraic effect handlers を導入した後、型無し λ 計算と algebraic effect handlers からなる言語を示し、そのインタプリタを定義する。

3.1 algebraic effect handlers

algebraic effect handlers は、例外や状態などの副作用を表現するための一般的な枠組で、副作用を起こす部分（オペレーション呼び出し）と処理する部分（ハンドラ）からなる [10]。特徴は、副作用の意味がそれを処理するハンドラ部分で決まるところである。例えば、以下のプログラムを考える。

```
with {return x -> x;
      op(x; k) -> k (x + 1)}
handle 10 + op(3)
```

with h handle e は、h というハンドラのもとで式 e を実行するという意味である。e の部分を見ると 10 + op(3) とあるので加算を行おうとするが、そこで op(3) というオペレーション呼び出しが起こる。オペレーション呼び出しというのは副作用を起こす命令で、直感的にはここで例外 op を引数 3 で起こすのに近い。本論文では、使用するオペレーションは全て既に宣言されていると仮定する。またこれ以降、with h handle e の中の式 e を「handle 節」と呼ぶ。

オペレーション呼び出しが起こると、プログラムの制御は handle 節に移る。ハンドラは正常終了を処理する部分 return x -> ... とオペレーション呼び出しを処理する部分に分かれている。正常終了する部分は with h handle e の e 部分の実行が終了した場合に実行され、x に実行結果が入る。上の例なら、その x がそのまま返されて、これがプログラム全体の結果となる。

一方、e の実行中にオペレーション呼び出しがあった場合は、オペレーション呼び出しの処理が行われる。まず、呼び出されたオペレーションが処理するオペレーションと同じものかがチェックされる。異なる場合は、そのオペレーションはここでは処理されず、さらに外側の with handle 文で処理されることになる。（最後まで処理されなかったら、未処理のオペレーションが報告されてプログラムは終了する。）一方、ここで処理すべきオペレーションと分かった場合には、矢印の右側の処理に移る。ここで、x の部分にはオペレーションの引数が入り、k の部分には「オペレーション呼び出しから、この with handle 文までの限定継続」が入る。k に限定継続が入るところが例外とは異なる部分である。上の例では、矢印の右側が k (x + 1) となっているので、x の値である 3 に 1 が加わった後、もとの計算である 10 + [...] が再開され、全体として 14 が返ることになる。

algebraic effect handlers の特徴は、オペレーション呼び出しの意味がハンドラで決まる部分にある。op(3) とした時点ではこの処理の内容は未定だが、handle 節に k (x + 1) と書かれているため、結果として op は 1 を加えるような作用だったことになる。

<code>v :=</code>	(値)
<code>x</code>	変数
<code> fun x -> e</code>	関数
<code>e :=</code>	(式)
<code>v</code>	値
<code> e e</code>	関数適用
<code> op e</code>	オペレーション呼び出し
<code> with h handle e</code>	ハンドル
<code>h :=</code>	(ハンドラ)
<code>{return x -> e;</code>	<code>return</code> 節
<code>op(x; k) -> e; ...; op(x; k) -> e}</code>	オペレーション節 (0 個以上)

図 3. 対象言語の構文

```

(* 値 *)
type v = Var of string      (* x *)
      | Fun of string * e  (* fun x -> e *)
      | Cont of (k -> k)   (* 継続 fun x => ... *)

(* ハンドラ *)
and h = {return : string * e;          (* {return x -> e;          *)
        ops : (string * string * string * e) list} (* op(x; k) -> e; ...} *)

(* 式 *)
and e = Val of v              (* v *)
      | App of e * e         (* e e *)
      | Op of string * e     (* op e *)
      | With of h * e        (* with h handle e *)

(* handle 内の継続 *)
and k = v -> a

(* handle 内の実行結果 *)
and a = Return of v           (* 値になった *)
      | OpCall of string * v * (v -> a) (* オペレーションが呼び出された *)

```

図 4. 対象言語の定義

3.2 構文の定義

型無し λ 計算と algebraic effect handlers からなる対象言語を図 3 の `e` と定義する。`h` のオペレーション節に出てくる `op` は互いに全て異ならなくてはいけない。

3.3 CPS インタプリタによる意味論

この節では、algebraic effect handlers を含む言語に対する意味論を与える。オペレーション呼び出しにより非局所的に制御が移るので、意味論は CPS インタプリタを定義することで与える。対象言語の OCaml による定義を図 4 に示す。ここで `k` は各 `handle` 節の限定継続を表す。また、`a` は `handle` 節内の式の実行が正常終了したのかオペレーション呼び出しだったのかを示す型である。

図 4 の言語に対する call-by-value かつ right-to-left のインタプリタを図 5 に定義する。ただし、関数 `subst : e -> (string * v) list -> e` は代入のための関数であり、`subst e [(x, v); (k, cont_value)]` は `e` の中の変数 `x` と変数 `k` に同時にそれぞれ値 `v` と値 `cont_value` を代入した式を返す。関数 `search_op` はハンドラ内のオペレーションを検索する関数で、例えば `{return`

```

(* CPS インタプリタ *)
let rec eval (exp : e) (k : k) : a = match exp with
| Val (v) -> k v                                     (* 継続に値を渡す *)
| App (e1, e2) ->
  eval e2 (fun v2 ->                                 (* FApp2 に変換される関数 *)
    eval e1 (fun v1 -> match v1 with                 (* FApp1 に変換される関数 *)
      | Fun (x, e) ->
        let reduct = subst e [(x, v2)] in (* e[v2/x] *)
        eval reduct k
      | Cont (cont_value) -> (cont_value k) v2
        (* 現在の継続と継続値が保持するメタ継続を合成して値を渡す *)
      | _ -> failwith "type error"))
| Op (name, e) ->
  eval e (fun v -> OpCall (name, v, fun v -> k v)) (* FOp に変換される関数 *)
| With (h, e) ->
  let a = eval e (fun v -> Return v) in (* FId に変換される関数、空の継続 *)
  apply_handler k h a (* handle 節内の実行結果をハンドラで処理 *)

(* handle 節内の実行結果をハンドラで処理する関数 *)
and apply_handler (k : k) (h : h) (a : a) : a = match a with
| Return v -> (* handle 節内が値 v を返したとき *)
  (match h with {return = (x, e)} -> (* {return x -> e; ...} として *)
    let reduct = subst e [(x, v)] in (* e[v/x] に簡約される *)
    eval reduct k) (* e[v/x] を実行 *)
| OpCall (name, v, m) -> (* オペレーション呼び出しがあったとき *)
  (match search_op name h with
  | None -> (* ハンドラで定義されていない場合、 *)
    OpCall (name, v, (fun v -> (* OpCall の継続の後に現在の継続を合成 *)
      let a' = m v in
      apply_handler k h a'))
  | Some (x, y, e) -> (* ハンドラで定義されている場合、 *)
    let cont_value =
      Cont (fun k'' -> fun v -> (* 適用時にその後の継続を受け取って合成 *)
        let a' = m v in
        apply_handler k'' h a') in
    let reduct = subst e [(x, v); (y, cont_value)] in
    eval reduct k)

(* 初期継続を渡して実行を始める *)
let interpreter (e : e) : a = eval e (fun v -> Return v) (* FId に変換される関数 *)

```

図 5. 継続渡し形式で書かれたインタプリタ

`x -> x; op1(y, k) -> k y}` を表すデータを `h` とすると `search_op "op2" h` は `None` を返し `search_op "op1" h` は `Some ("y", "k", App (Var "k", Var "y"))` を返す。

このインタプリタは、`handle` 節内の実行については普通の CPS になっており、継続である `k` は「直近の `handle` までの継続」である。関数 `eval` の下から 2 行目で `with handle` 文を実行する際、再帰呼び出しの継続として (`fun x -> Return x`) を渡して、これによって `handle` 節の実行に入るたびに渡す継続を初期化している。

`handle` 節内を実行した結果を表すのが `a` 型である。`handle` 節内の実行は、オペレーション呼び出しが行われない限りは通常の CPS インタプリタによって進むが、オペレーション呼び出しが行われた場合 (`eval` の下から 4 行目) は引数 `e` を実行後、結果を継続 `k` に渡すことなく `OpCall` を返している。これが `handle` 節の結果となり、`eval` の最下行で `apply_handler` に渡される。一方、`handle` 節内の実行が正常終了した場合は、初期継続 (`fun x -> Return x`) に結果が返り、それが `apply_handler` に渡される。

ここで、オペレーション呼び出しで返される `OpCall` の第 3 引数が `k` ではなく `fun v -> k v` のように η -expand されているのに注意しよう。このようにしているのは、`k` が「直近の `handle` までの継続」を表しているのに対し、`OpCall` の第 3 引数はより広い継続を指すことがあり両者を区別したいためである。これについては、次節で非関数化を施す際に詳しく述べる。

`apply_handler` は、そのときの継続 `k`、ハンドラ `h`、そして `handle` 節内の実行結果 `a` を受け取ってハンドラの処理をする。関数 `apply_handler` の動作は `handle` 節の実行結果とハンドラの内容によって 3 種類ある。

1. `handle` 節が値 `v` になった場合：ハンドラの `return` 節 `return x -> e` を参照して、`e[v/x]` を実行する。
2. `handle` 節がオペレーション呼び出し `OpCall (name, v, m)` になった場合で、そのオペレーション `name` がハンドラ内で定義されていなかった場合：さらに外側の `with handle` 文に処理を移すため、`handle` 節内の限定継続 `m` に、1 つ外側の `handle` までの限定継続を合成した継続 `fun v -> ...` を作り、それを `OpCall (name, v, (fun v -> ...))` と返す。この `OpCall` の第 3 引数は「直近の `handle` までの継続」ではなく、より広い継続となっている。
3. `handle` 節がオペレーション呼び出し `OpCall (name, v, m)` になった場合で、そのオペレーション `name` がハンドラ内で定義されていた場合：そのハンドラの定義 `name (x; y) -> e` を参照し、`e[v/x, cont_value/y]` を実行する。(cont_value については、以下の説明を参照。)

オペレーション呼び出しを処理する際に `k` に束縛する限定継続 `cont_value` は、「オペレーション呼び出し時の限定継続 `m`」に「現在のハンドラ `h`」と「`cont_value` が呼び出された時の継続 `k'`」を合成したものである。

このようにして作られた限定継続が呼び出されるのは `eval` の `App` の `Cont` のケースである。`cont_value` は、この継続が呼び出された時点での限定継続が必要なので、それを `cont_value k` のように渡してから値 `v2` を渡している。

オペレーション呼び出しの部分、例を使って説明する。以下のプログラムを考える。(ここで、数字と四則演算がサポートされていると仮定する。)

```
with {o(x; k) -> k (x*3)} handle (with {p(x; k) -> k (x-1)} handle o(1)+p(2))
```

この実行は informal には以下のように進む。

1. まず `p(2)` が実行されるが、このときに `eval` が返す値は `OpCall ("p", 2, o(1)+[.])` のようになる。これが `eval` の下から 2 行目の `a` となって `apply_handler` が呼ばれる。このとき `k` は内側の `with` 文から外側の `with` 文までの間の継続 (この場合は空)、`h` は `{p(x; k) -> k (x-1)}` である。

2. 呼び出されたオペレーション "p" がハンドラ h の中に存在するので、"p" に対応する式が実行される。具体的には $k(x-1)$ が $x = 2, k = \text{cont_value}$ のもとで実行される。ここで cont_value は k' (with $p(x; k) \rightarrow k(x-1)$ handle $o(1)+[.]$) となる。 cont_value の定義にある k' はこの cont_value が呼び出されるときに継続である。 cont_value に $\{p(x; k) \rightarrow k(x-1)\}$ を処理するハンドラが含まれるのは deep handler の特徴である。
3. $k(x-1)$ を実行すると、全体として式は with $\{o(x; k) \rightarrow k(x*3)\}$ handle (with $\{p(x; k) \rightarrow k(x-1)\}$ handle $o(1)+1$) となる。
4. 次に $o(1)$ が実行されるが、このときに eval が返す値は $\text{OpCall}("o", 1, [.] + 1)$ のようになる。これが eval の下から 2 行目の a となって apply_handler が呼ばれる。このとき k は内側の with 文から外側の with 文までの間の継続 (空)、h は $\{p(x; k) \rightarrow k(x-1)\}$ である。
5. 呼び出されたオペレーション "o" がハンドラ h の中に存在しないので、 $\text{OpCall}("o", 1, \text{with } \{p(x; k) \rightarrow k(x-1)\} \text{ handle } [.] + 1)$ が値として返される。これが、外側の with handle 文の a の値となり、apply_handler が呼ばれる。このとき k は外側の with 文の外に継続 (空)、h は $\{o(x; k) \rightarrow k(x*3)\}$ である。
6. 今回は呼び出されたオペレーション "o" がハンドラ h の中に存在するので、"o" に対応する式が実行される。具体的には $k(x*3)$ が $x = 1, k = \text{cont_value}$ のもとで実行される。ここで cont_value は k' (with $\{o(x; k) \rightarrow k(x*3)\}$ handle (with $\{p(x; k) \rightarrow k(x-1)\}$ handle $[.] + 1$)) となる。 cont_value の定義にある k' はこの cont_value が呼び出されるときに継続である。
7. $k(x*3)$ を実行すると、式は with $\{o(x; k) \rightarrow k(x*3)\}$ handle (with $\{p(x; k) \rightarrow k(x-1)\}$ handle $3+1$) となり、全体としては 4 が返る。

これまで、algebraic effect handlers の意味論は small step のもの [8, 10] 以外には CPS で書かれた big step のもの [7] が提示されてきた。この意味論は、直近のハンドラまでの継続とその外側のメタ継続のふたつを受け取る 2CPS の形をしているが、末尾呼び出しでない部分が存在するなどの問題があった。本論文で示した意味論は、ハンドラ内部の処理のみを CPS で表現しているため、ハンドラの外側の部分については直接形式となっている。しかし、これを CPS 変換すると全てが末尾呼び出しになっている 2CPS のインタプリタが得られ、これまでの意味論の問題点を解決するものとなっている。

4 インタプリタの変換

本節では、3 節で定義したインタプリタ (図 5) に対して、正当性の保証された 2 種類のプログラム変換 (非関数化と CPS 変換) をかけることで、コンテキストを明示的に保持するインタプリタを得て、そこからステップを作成する方法を示す。

4.1 非関数化

インタプリタを変換してコンテキストの情報を得るにはまず CPS 変換をして次に非関数化をすればよいが、3 節で示したインタプリタはオペレーション呼び出しをサポートするため handle 節内の実行について最初から CPS で書かれている。したがって、ここではまず非関数化をかける。

非関数化というのは、高階関数を 1 階のデータ構造で表現する方法である。高階関数は全てその自由変数を引数に持つような 1 階のデータ構造となり、高階関数を呼び出していた部分は apply 関数の呼び出しとなる。この apply 関数は、高階関数が呼び出されていたら行ったであろう処理を行


```

(* handle 節内の継続 *)
type k = FId                                (* [.] *)
      | FApp2 of e * k                      (* [e [.]] *)
      | FApp1 of k * v                      (* [[.] v] *)
      | FOp of string * k                  (* [op [.]] *)

(* handle 節内の実行結果 *)
type a = Return of v                        (* 前と同じ *)
      | OpCall of string * v * (v -> k2 -> a) (* 継続をとるように変更 *)

```

図 6. 非関数化後の継続の型

うように別途、定義されるものである。この変換は (非関数化する対象の関数が特定されれば) 機械的に行うことができる。

具体的に図 5 のプログラムの継続 k 型の λ 式を非関数化するには次のようにする。結果は図 6 と図 7 のようになる。

1. 継続を表す λ 式をコンストラクタに置き換える。その際、 λ 式内の自由変数はコンストラクタの引数にする。その結果、得られるデータ構造は図 6 のようになる。図 5 の中には、コメントとしてどの関数がどのコンストラクタに置き換わったのかが書かれている。
2. 関数を表すコンストラクタと引数を受け取って中身を実行するような `apply` 関数を定義する。これは、図 7 では `apply_in` と呼ばれている。
3. λ 式を呼び出す部分を、`apply` 関数にコンストラクタと引数を渡すように変更する。

非関数化した後の継続の型を見ると、ラムダ計算の通常の評価文脈に加えてオペレーション呼び出しの引数を実行するフレーム `FOp` が加わっていることがわかる。これが、`handle` 節内の実行のコンテキスト情報である。

ここで、`OpCall` の第 3 引数は非関数化されていないことに注意しよう。この部分は `handle` 節内の継続とは限らないので、ここでは非関数化せずにもとのままとしている。

非関数化の操作自体は機械的だが、どの部分を非関数化するかを判断するには少し意味的な判断が必要になる。基本的にはハンドラ内部の継続を表す k 型の λ 式をすべて非関数化するのだが、`OpCall` の第 3 引数は「ハンドラ内部の継続」ではなく、オペレーション呼び出しで捕捉される継続を意味している。この捕捉される継続はハンドラをまたがることがあり「ハンドラ内部の継続」とは限らない。そのため `fun v -> k v` の形にして、 k の部分のみを非関数化し、外側の関数はそのままとした。

ここを非関数化することも可能ではあるが、そうすると最終的に得られるコンテキスト情報がきれいなリストのリストの形にはなくなってしまふ。

`handle` 節内の評価文脈を表すデータ構造は非関数化により導くことができたが、図 7 のインタプリタはオペレーション呼び出しなどの実装で継続を非末尾の位置で使っており純粋な CPS 形式にはなっていないため、全体のコンテキストは得られていない。そのため、このコンテキストを使ってステップを構成してもプログラム全体を再構成することはできない。プログラム全体のコンテキストを得るためには、このインタプリタに対してもう一度 CPS 変換と非関数化を施し、純粋な CPS 形式にする必要がある。

4.2 CPS 変換

図 7 では、末尾再帰でない再帰呼び出しの際に継続が初期化されてしまうせいでコンテキスト全体に対応する情報が継続に含まれていなかった。ここでは、全てのコンテキスト情報を明示化する

```

(* CPS インタプリタを非関数化した関数 *)
let rec eval (exp : e) (k : k) : a = match exp with
| Val (v) -> apply_in k v (* 継続適用関数に継続と値を渡す *)
| App (e1, e2) -> eval e2 (FApp2 (e1, k))
| Op (name, e) -> eval e (FOp (name, k))
| With (h, e) -> let a = eval e FId in (* 空の継続を渡す *)
  apply_handler k h a (* handle 節内の実行結果をハンドラで処理 *)

(* handle 節内の継続を適用する関数 *)
and apply_in (k : k) (v : v) : a = match k with
| FId -> Return v (* 空の継続、そのまま値を返す *)
| FApp2 (e1, k) -> let v2 = v in eval e1 (FApp1 (k, v2))
| FApp1 (k, v2) -> let v1 = v in
  (match v1 with
  | Fun (x, e) ->
    let reduct = subst e [(x, v2)] in
    eval reduct k
  | Cont (cont_value) ->
    (cont_value k) v2
  | _ -> failwith "type error")
| FOp (name, k) ->
  OpCall (name, v, (fun v -> apply_in k v)) (* Op 呼び出しの情報を返す *)

(* handle 節内の実行結果をハンドラで処理する関数 *)
and apply_handler (k : k) (h : h) (a : a) : a = ... (* 非関数化前(図5)と同じ *)

(* 初期継続を渡して実行を始める *)
let interpreter (e : e) : a = eval e FId

```

図 7. CPS インタプリタを非関数化したプログラム

ため、さらに CPS 変換を施す。この変換によって現れる継続は $a \rightarrow a$ 型である。この型 $a \rightarrow a$ の名前を k_2 とする。変換したプログラムは付録の図 14 に示す。

このプログラムは、図 7 のプログラムを機械的に CPS 変換すれば得られるもので、OpCall の第 3 引数も CPS 変換される点にさえ注意すれば、特に説明を必要とする箇所はない。プログラム中には、次節で非関数化する部分にその旨、コメントが付してある。この変換により、すべての (serious な) 関数呼び出しが末尾呼び出しとなり、コンテキスト情報はふたつの継続ですべて表現される。

4.3 非関数化

CPS 変換ですべてのコンテキスト情報がふたつの継続に集約された。ここでは、CPS 変換したことにより新たに現れた $a \rightarrow a$ 型の関数を非関数化してデータ構造に変換する。非関数化によって型 k_2 の定義は図 8 に、インタプリタは付録の図 15 に変換される。

この非関数化によって、引数 k と引数 k_2 からコンテキスト全体の情報が得られるようになった。ここで、得られたコンテキストの情報を整理しておこう。 k は handle 節内のコンテキストを示している。FId 以外はいずれの構成子も k を引数にとっているので、これは FId を空リストととらえれば評価文脈のリストと考えることができる。 k_2 も同様に h と k が連なったリストと考えることができる。全体として「with handle 式に囲まれた評価文脈のリスト」のリストになっており、直感に合ったハンドラによって区切られたコンテキストが得られていることがわかる。

```
(* 全体のメタ継続 *)
type k2 = GId
      | GHandle of h * k * k2
```

図 8. 2 回目の非関数化後の継続の型

得られたコンテキストはごく自然なものだが、ハンドラの入る位置などは必ずしも自明ではない。このコンテキストの型は Hillerström ら [5, 7] の algebraic effect handlers の入った体系の抽象機械において継続を表すデータと同じ構造をしている。これは、我々の定義した big step のインタプリタをもとに、プログラム変換をかけることでコンテキストのデータ型を導出できたことを示している。

4.4 出力

4.3 節までの変換によって、コンテキストの情報を引数に保持するインタプリタ関数を得ることができた。この情報を用いて簡約前後のプログラムを出力するようにするとステップが得られる。具体的には、簡約が起こる部分でプログラム全体を再構成し表示するようにする。図 9 が表示を行う関数 `memo` を足した後の関数 `apply_in` と `apply_handler` である。(他の関数は簡約している部分が無いので図 15 と同じになる。) 図 9 中の灰色の部分が出力のために追加された部分である。

ここで関数 `memo : e -> e -> (k * k2) -> unit` は、簡約基とその簡約後の式と簡約時のコンテキストを受け取って、簡約前のプログラムと簡約後のプログラムをそれぞれ再構成して出力する。また、本論文では継続を `fun x => ... x ...` と表すこととし、その表示のために各継続値が引数名の情報を持つ必要がある。この引数名は継続を切り取って継続値 `Cont` が作られる時 (図 9 の下から 6 行目) に、プログラム中の他の変数と重複しない変数名を返す関数 `gen_var_name : unit -> string` を用いて生成する。

図 9 を見ると `apply_in` では普通の関数呼び出しと継続呼び出しが `memo` されている。また、`apply_handler` では `handle` 節の実行が正常終了した場合とオペレーション呼び出しが起きた場合にそれぞれ `memo` 関数が挿入されている。また、オペレーション呼び出しが処理されず外側の `with handle` 文に制御を移す際には、図 10 に示される関数を使ってコンテキストの結合を行なっている。

4.5 CPS インタプリタに基づいたステップ

前節で algebraic effect handlers を持つ言語に対するステップを作ることができた。しかし、前節で作ったステップではコンテキストの情報が非関数化されていた。また、CPS 変換されているためふたつの継続を扱っており、もともとの CPS インタプリタとは形がかなり異なったものとなっている。しかし、一度、前節までで必要なコンテキストの情報がどのようなものかが判明すると、それを直接、もとの CPS インタプリタに加えてステップを作ることができる。

もとの CPS インタプリタの型定義に必要なコンテキストの情報を加えた定義が図 11 になる。ここで、`c` と `c2` がそれぞれ `handle` 節内と全体のコンテキストの情報で、前節までの非関数化によって得られたものである。一方、`k` はもともとからある高階の継続の型である。継続 `k` は、簡約ごとにプログラム全体を表示するので、必要なコンテキストの情報を新たに引数に取るようになっている。

このデータ定義を使って、もとの CPS インタプリタをステップに変換したのが図 12 である。図 12 にある関数 `plug_all : e -> (k * k2) -> e` は式と「`handle` 節内のコンテキストとそれより外のコンテキストのペア」を受け取ってプログラム全体を再構成して返す関数であり、ステップ出力の際にも用いる。このインタプリタは、もとの CPS インタプリタにコンテキストの情報として引数 `c` と `c2` を加え、簡約ごとにプログラムを再構成し、ステップ表示するようにしたものである。一度、必要なコンテキストの情報が特定されると、algebraic effect handlers のように非自明な言語

```

(* handle 節内の継続を適用する関数 *)
let rec apply_in (k : k) (v : v) (k2 : k2) : a = match k with
| FId -> apply_out k2 (Return v)
| FApp2 (e1, k) -> let v2 = v in eval e1 (FApp1 (k, v2)) k2
| FApp1 (k, v2) -> let v1 = v in (match v1 with
| Fun (x, e) ->
    let redex = App (Val v1, Val v2) in (* (fun x -> e) v2 *)
    let reduct = subst e [(x, v2)] in (* e[v2/x] *)
    memo redex reduct (k, k2); eval reduct k k2
| Cont (x, (k', k2'), cont_value) ->
    let redex = App (Val v1, Val v2) in (* (fun x => k2'[k'[x]]) v2 *)
    let reduct = plug_all (Val v2) (k', k2') in (* k2'[k'[v2]] *)
    memo redex reduct (k, k2); (cont_value k) v2 k2
| _ -> failwith "type error")
| FOp (name, k) ->
    apply_out k2 (OpCall (name, v, (k, GId),
    (fun v -> fun k2' -> apply_in k v k2'))))

(* handle 節内の実行結果をハンドラで処理する関数 *)
and apply_handler (k : k) (h : h) (a : a) (k2 : k2) : a = match a with
| Return v ->
    (match h with {return = (x, e)} ->
    let redex = With (h, Val v) in (* with {return x -> e} handle v *)
    let reduct = subst e [(x, v)] in (* e[v/x] *)
    memo redex reduct (k, k2); eval reduct k k2)
| OpCall (name, v, (k', k2'), m) -> (match search_op name h with
| None ->
    apply_out k2 (OpCall (name, v, (k', compose_k2 k2' h (k, GId)),
    (fun v -> fun k2' -> m v (GHandle (h, k, k2')))))
| Some (x, y, e) ->
    (* with {name(x; y) -> e} handle k2'[k'[name v]] *)
    let redex = With (h, plug_all (Op (name, Val v)) (k', k2')) in
    let cont_value =
        Cont (gen_var_name (), (k', compose_k2 k2' h (FId, GId)),
        (fun k'' -> fun v -> fun k2 -> m v (GHandle (h, k'', k2)))) in
    (* e[v/x, (fun n => with {name(x; y) -> e} handle k2'[k'[n]]) /y *)
    let reduct = subst e [(x, v); (y, cont_value)] in
    memo redex reduct (k, k2);
    eval reduct k k2)

```

図 9. 変換の後、出力関数を足して得られるステップ

```

(* コンテキスト k2_in の外側にフレーム GHandle (h, k_out, k2_out) を付加する *)
let rec compose_k2 k2_in h (k_out, k2_out) =
  match k2_in with
  | GId -> GHandle (h, k_out, k2_out)
  | GHandle (h', k', k2') -> GHandle (h', k', compose_k2 k2' h (k_out, k2_out))

```

図 10. 継続を外側に拡張する関数

```

(* 値 *)
type v = ... (* 前と同じ *)
  | Cont of string * (c * c2) * ((c * k) -> k) (* 継続 *)
(* handle 内の実行結果 *)
and a = Return of v (* 値になった *)
  | OpCall of string * v * (c * c2) * k (* オペレーションが呼び出された *)
(* handle 内のメタ継続 *)
and k = v -> c2 -> a
(* handle 内のコンテキスト *)
and c = FId (* [.] *)
  | FApp2 of e * c (* [e [.]] *)
  | FApp1 of c * v (* [[.] v] *)
  | FOp of string * c (* [op [.]] *)
(* 全体のコンテキスト *)
and c2 = GId
  | GHandle of h * c * c2

```

図 11. 継続の情報を保持するための言語やコンテキストの定義

構文が入っていても、直接、ステップを作ることができるようになる。図 12 のステップを実行して得られるステップ列の例は付録の A.1 節に示す。

5 他の言語への対応

3 節で示した algebraic effect handlers を含む言語の CPS インタプリタをステップにするには、非関数化、CPS 変換、非関数化が必要だったが、他のいくつかの言語についても同様にインタプリタを変換することでステップを導出することを試みた。それぞれの言語のステップ導出について説明する。

5.1 型無し λ 計算

型無し λ 計算の DS インタプリタは、CPS 変換して非関数化したら全てのコンテキストを引数に保持するインタプリタになり、出力関数を入れるのみでステップを作ることができた。これは、継続を区切って一部を捨てたり束縛したりするという操作が無いためである。

5.2 try-with

try-with は、algebraic effect handlers が限定継続を変数に束縛するのと違って、例外が起こされたときに限定継続を捨てるという機能である。よって継続を表す値は現れないので、インタプリタを CPS で書く必要は無い。Direct style でインタプリタを書いた場合、最初に CPS 変換をすることで、CPS インタプリタと同様の変換によってステップが導出できた。最初から CPS インタプリタを書いていると 4 節と同様の手順になる。

```

(* CPS ステッパ *)
let rec eval (exp : e) ((c, k) : c * k) (c2 : c2) : a = match exp with
| Val (v) -> k v c2
| App (e1, e2) -> eval e2 (FApp2 (e1, c), (fun v2 c2 ->
  eval e1 (FApp1 (c, v2), (fun v1 c2 -> match v1 with
    | Fun (x, e) ->
      let redex = App (Val v1, Val v2) in (* (fun x -> e) v2 *)
      let reduct = subst e [(x, v2)] in (* e[v2/x] *)
      memo redex reduct (c, c2); eval reduct (c, k) c2
    | Cont (x, (c', c2'), cont_value) ->
      let redex = App (Val v1, Val v2) in (* (fun x => c2[c[x]]) v2 *)
      let reduct = plug_all (Val v2) (c', c2') in (* c2[c[v2]] *)
      memo redex reduct (c, c2); (cont_value (c, k)) v2 c2
    | _ -> failwith "type error"))) c2)) c2
| Op (name, e) -> eval e (FOp (name, c), (fun v c2 ->
  OpCall (name, v, (c, GId), (fun v c2' -> k v c2')))) c2
| With (h, e) ->
  let a = eval e (FId, (fun v c2 -> Return v)) (GHandle (h, c, c2)) in
  apply_handler (c, k) h a c2

(* handle 節内の実行結果をハンドラで処理する関数 *)
and apply_handler ((c, k) : c * k) (h : h) (a : a) (c2 : c2) : a = match a with
| Return v -> (match h with {return = (x, e)} ->
  let redex = With (h, Val v) in (* with {return x -> e} handle v *)
  let reduct = subst e [(x, v)] in (* e[v/x] *)
  memo redex reduct (c, c2); eval reduct (c, k) c2)
| OpCall (name, v, (c', c2'), k') ->
  (match search_op name h with
  | None -> OpCall (name, v, (c', compose_c2 c2' h (c, GId)),
    (fun v' c2'' -> let a' = k' v' (GHandle (h, c, c2'')) in
      apply_handler (c, k) h a' c2''))
  | Some (x, y, e) ->
    (* with {name(x; y) -> e} handle c2'[c'[name v]] *)
    let redex = With (h, plug_all (Op (name, Val v)) (c', c2')) in
    let cont_value = Cont (gen_var_name (),
      (c', compose_c2 c2' h (FId, GId)), (fun (c'', k'') v' c2'' ->
        let a' = k' v' (GHandle (h, c'', c2'')) in
        apply_handler (c'', k'') h a' c2')) in
    (* e[v/x, (fun n => with {name(x; y) -> e} handle c2'[c'[y]])/y *)
    let reduct = subst e [(x, v); (y, cont_value)] in
    memo redex reduct (c, c2); eval reduct (c, k) c2)

let stepper (e : e) : a = eval e (FId, (fun v c2 -> Return v)) GId

```

図 12. 変換の結果得られた、CPS インタプリタを基にしたステッパ

5.3 shift/reset

shift/reset は algebraic effect handlers と同様に限定継続を変数に束縛して利用することができる機能である。4 節で行ったのと全く同様に、CPS インタプリタを非関数化、CPS 変換、非関数化したらコンテキストが表れ、ステップが得られた。

5.4 Multicore OCaml

Multicore OCaml は、OCaml の構文に algebraic effect handlers を追加した構文を持つ。我々は 4 節で得られたステップをもとにして、Multicore OCaml の algebraic effect handlers を含む一部の構文を対象にしたステップの実装を目指している。Multicore OCaml の「エフェクト」は 3 節で定義した言語の algebraic effect handlers のオペレーションとほとんど同じものであり、継続が one-shot であることを除いて簡約のされかたは 3 節で定めた言語のインタプリタと同様なので、インタプリタ関数を用意できれば変換によってステップが導出できると考えられる。

このような構文の多い言語について実際にステップを実装しようとする、新たに問題が発生する。我々が実装し大学の授業で利用している OCaml の一部の構文のステップでは、例えば以下のように問題に対処した。

- プログラムが大きくなってしまい見づらくなる問題。例えばリストの要素数が多い場合に `[1; 2; 3; ...]` というように、冗長な式を省略表示することで見やすくした。
- ステップ数が多くなり、見たいステップまで進むのが大変になる問題。文の実行を始める際にマークを出力しておき、そのマークがあるところの直後のステップに飛ばす機能を実装した。1 文の中でステップ数が多くなる場合については、関数適用などをスキップする機能によって目的のステップまで早くたどり着けるようにしている。
- `ref` (書き換え可能な変数) などをどう表示するべきかという問題。書き換え可能な変数の値はそのアドレスを表す識別子とし、その中身を取得する演算子を適用すると中身に簡約されるという扱いにした。それぞれのステップを表す文字列に、その時点での状態 (参照先の値やそれまでの標準出力内容) を含めることで、各時点での値を確認でき、また副作用が実行されるステップで状態が変化する様子を観察できるようにした。例えば、プログラム `let a = ref 0 in !a` のステップ列は `let a = ref 4 in !a` \rightsquigarrow `(* $1: 4 *) let a = $1 in !a` \rightsquigarrow `(* $1: 4 *) !$1` \rightsquigarrow `(* $1: 4 *) 4` となる。

これらについては Multicore OCaml のステップでも同様の機能を作ることを考えている。

6 関連研究

ステップはもともと Racket に対して作られた。これは Clements ら [2] が設計したもので、スタックに continuation mark と呼ばれるマークを付けることで現在の評価文脈を再構成できるようにしている。しかし、例外処理などの構文には対応していない。我々は引数にコンテキストの情報を渡すことで、OCaml に対するステップを設計した [4]。このステップは OCaml の例外処理にも対応している。以上のステップはいずれも big step のインタプリタに手を加える形で作られている。一方、Whittington と Ridge [12] は small step のインタプリタを直接、書くことで OCaml に対するステップを実装した。しかし、以上のステップはいずれも algebraic effect handlers には対応していない。

Danvy ら [3] は big step インタプリタに CPS 変換と非関数化を施すことで抽象機械が導出できることを示した。本研究では同様の方法によってコンテキストの情報を得たが、algebraic effect handlers は限定継続を扱うため継続が区切られており、`handle` で区切られた内部の継続と全体の

継続それぞれについて変換をする必要があったため、2度この変換を行った (`handle` の内部については、もともと CPS になっているインタプリタを用いたため CPS 変換は不要だった)。

我々のグループでは以前、`shift/reset` の入った体系に対して CPS 変換と非関数化をかけることで、`shift/reset` に対する仮想機械を得た [1]。この論文は、これを algebraic effect handlers に対して行ったものである。その際、最初の big step のインタプリタを作るところは非自明だったが、そのあとの変換は以前の研究の通りに行うことができた。

algebraic effect handlers に対する意味論は、これまで small step の意味論 [8] あるいは CPS による意味論 [5, 7] が与えられてきた。しかし、後者は、完全には末尾呼び出しにはなっていない 2CPS のインタプリタと継続が非関数化されたインタプリタしか示されていない。本論文で与えた CPS インタプリタは、高階の継続を直接使っており、さらに CPS 変換をかければ全てが末尾呼び出しになっている 2CPS のインタプリタとなる。

上記以外の algebraic effect handlers に関する研究としては、ハンドラの挙動が異なる shallow ハンドラの研究 [6] などがあげられる。本論文で扱っているハンドラは従来の deep ハンドラである。shallow ハンドラにも対応できると考えているが、これは今後の課題である。

7 まとめ

ステッパを実装するためには、コンテキストの情報を保持しながら部分式を再帰的に実行するインタプリタを作ればよい。以前の研究 [4] では言語ごとにコンテキストを表すデータ型を考えた上でインタプリタに実行の流れに従った新しい引数を付け足す作業が必要だったが、本研究では通常のインタプリタを CPS 変換および非関数化するという機械的な操作でコンテキストの型およびコンテキストの情報を保持するインタプリタ関数を導出した。その方法で、継続を明示的に扱える algebraic effect handlers を含む言語に対するステッパを実装した。

謝辞

多くの有益なコメントをくださった査読者の皆様に感謝いたします。本研究は一部 JSPS 科研費 18H03218 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Kenichi Asai and Arisa Kitani. Functional derivation of a virtual machine for delimited continuations. In *Proceedings of the 2010 Symposium on Principles and Practice of Declarative Programming (PPDP'10)*, pp. 87–98, July 2010.
- [2] John Clements, Matthew Flatt, and Matthias Felleisen. Modeling an algebraic stepper. In *European symposium on programming*, pp. 320–334. Springer, 2001.
- [3] Olivier Danvy. Defunctionalized interpreters for programming languages. In *Proceedings of the 13th ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP'08)*, pp. 131–142, 2008.
- [4] Tsukino Furukawa, Youyou Cong, and Kenichi Asai. Stepping OCaml. In *Proceedings Seventh International Workshop on Trends in Functional Programming in Education*, Chalmers University, Gothenburg, Sweden, 14th June 2018, Vol. 295 of *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, pp. 17–34, 2019.
- [5] Daniel Hillerström and Sam Lindley. Liberating effects with rows and handlers. In *Proceedings of the 1st International Workshop on Type-Driven Development (TyDe'16)*, pp. 15–27, 2016.
- [6] Daniel Hillerström and Sam Lindley. Shallow effect handlers. In Sukyoung Ryu, editor, *Programming Languages and Systems*, pp. 415–435. Springer, 2018.

- [7] Daniel Hillerström, Sam Lindley, Robert Atkey, and KC Sivaramakrishnan. Continuation passing style for effect handlers. In Dale Miller, editor, *2nd International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction (FSCD 2017)*, Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), pp. 18:1–18:19, September 2017.
- [8] Ohad Kammar, Sam Lindley, and Nicolas Oury. Handlers in action. In *Proceedings of the 18th ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP’13)*, pp. 145–158, 2013.
- [9] G.D. Plotkin. Call-by-name, call-by-value and the λ -calculus. *Theoretical Computer Science*, Vol. 1, No. 2, pp. 125–159, 1975.
- [10] Matija Pretnar. An introduction to algebraic effect handlers and handlers, invited tutorial paper. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, Vol. 319, pp. 19–35, 2015. The 31st Conference on the Mathematical Foundations of Programming Semantics (MFPS XXXI).
- [11] John C. Reynolds. Definitional interpreters for higher-order programming languages. *Higher-Order and Symbolic Computation*, Vol. 11, No. 4, pp. 363–397, Dec 1998.
- [12] John Whittington and Tom Ridge. Direct interpretation of functional programs for debugging. In Sam Lindley and Gabriel Scherer, editors, *Proceedings ML Family / OCaml Users and Developers workshops*, Oxford, UK, 7th September 2017, Vol. 294 of *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, pp. 41–73, 2019.

A 付録

A.1 algebraic effect handlers のステップによる実行の例

図 13 は、1 つの値からなる状態を保持するハンドラを使ったプログラムをステップ実行した例である。

状態ハンドラは、受け取った値を記録して `()` を返す `Set` と `()` を受け取って記録された値を返す `Get` の 2 つのオペレーションを定義している。`handle` 節で値が返された場合 (`return` 節) については、状態にかかわらず値をそのまま返す。入力プログラム (`Step 0` のプログラム) は、状態ハンドラのもとで、状態の初期値を 0 として、`Set (Get () + 1)` をした後に `Get ()` を返すというプログラムである。

図 13 の文字列は、4 節で最終的に得られたステップ (図 12) を整数、整数の足し算、`unit` 型で拡張したステップの出力に改行とインデントを加えたものである。プログラムが 1 段階ずつ書き換わっていて関数の内容も表示されているので、限定継続の中身やその使われ方など理解が難しい機能の実行の様子を細かく見ることができる。例えば `Set 1` が実行されるステップ 4 までは `with handle` 式の後ろに 0 があったのが、`Set 1` の実行後は 1 になっており、ここが状態を保持している部分らしいということが観察できる。

```

Step 0: ((with {return x -> (fun _ -> x),
              Get(_; k) -> (fun s -> ((k s) s)),
              Set(s; k) -> (fun _ -> ((k ()) s))}
        handle ((fun _ -> (Get ())) (Set ((Get ()) + 1)))) 0)
Step 1: ((fun s ->
        (((fun y => (with {return x -> (fun _ -> x),
                          Get(_; k) -> (fun s -> ((k s) s)),
                          Set(s; k) -> (fun _ -> ((k ()) s))}
                    handle ((fun _ -> (Get ())) (Set (y + 1)))) s) s)) 0)
Step 2: (((fun y => (with {return x -> (fun _ -> x),
                          Get(_; k) -> (fun s -> ((k s) s)),
                          Set(s; k) -> (fun _ -> ((k ()) s))}
                    handle ((fun _ -> (Get ())) (Set (y + 1)))) 0) 0)
Step 3: ((with {return x -> (fun _ -> x),
              Get(_; k) -> (fun s -> ((k s) s)),
              Set(s; k) -> (fun _ -> ((k ()) s))}
        handle ((fun _ -> (Get ())) (Set (0 + 1)))) 0)
Step 4: ((with {return x -> (fun _ -> x),
              Get(_; k) -> (fun s -> ((k s) s)),
              Set(s; k) -> (fun _ -> ((k ()) s))}
        handle ((fun _ -> (Get ())) (Set 1))) 0)
Step 5: ((fun _ -> (((fun z => (with {return x -> (fun _ -> x),
                          Get(_; k) -> (fun s -> ((k s) s)),
                          Set(s; k) -> (fun _ -> ((k ()) s))}
                    handle ((fun _ -> (Get ())) z))) () 1)) 0)
Step 6: (((fun z => (with {return x -> (fun _ -> x),
                          Get(_; k) -> (fun s -> ((k s) s)),
                          Set(s; k) -> (fun _ -> ((k ()) s))}
                    handle ((fun _ -> (Get ())) z))) () 1)
Step 7: ((with {return x -> (fun _ -> x),
              Get(_; k) -> (fun s -> ((k s) s)),
              Set(s; k) -> (fun _ -> ((k ()) s))}
        handle ((fun _ -> (Get ())) ()) 1)
Step 8: ((with {return x -> (fun _ -> x),
              Get(_; k) -> (fun s -> ((k s) s)),
              Set(s; k) -> (fun _ -> ((k ()) s))} handle (Get ())) 1)
Step 9: ((fun s -> (((fun a => (with {return x -> (fun _ -> x),
                          Get(_; k) -> (fun s -> ((k s) s)),
                          Set(s; k) -> (fun _ -> ((k ()) s))}
                    handle a)) s) s)) 1)
Step 10: (((fun a => (with {return x -> (fun _ -> x),
                          Get(_; k) -> (fun s -> ((k s) s)),
                          Set(s; k) -> (fun _ -> ((k ()) s))}
                    handle a)) 1) 1)
Step 11: ((with {return x -> (fun _ -> x),
              Get(_; k) -> (fun s -> ((k s) s)),
              Set(s; k) -> (fun _ -> ((k ()) s))} handle 1) 1)
Step 12: ((fun _ -> 1) 1)
Step 13: 1

```

図 13. 図 12 のステップを用いたステップ実行の例

A.2 変換の各過程におけるインタプリタ

```
(* CPS インタプリタを非関数化して CPS 変換した関数 *)
let rec eval (exp : e) (k : k) (k2 : k2) : a = match exp with
| Val (v) -> apply_in k v k2
| App (e1, e2) -> eval e2 (FApp2 (e1, k)) k2
| Op (name, e) -> eval e (FOp (name, k)) k2
| With (h, e) ->
    eval e FId (fun a -> apply_handler k h a k2) (* GHandle に変換される *)

(* handle 節内の継続を適用する関数 *)
and apply_in (k : k) (v : v) (k2 : k2) : a = match k with
| FId -> k2 (Return v) (* 継続を適用 *)
| FApp2 (e1, k) -> let v2 = v in eval e1 (FApp1 (k, v2)) k2
| FApp1 (k, v2) -> let v1 = v in
    (match v1 with
    | Fun (x, e) ->
        let reduct = subst e [(x, v2)] in
        eval reduct k k2
    | Cont (cont_value) ->
        (cont_value k) v2 k2
    | _ -> failwith "type error")
| FOp (name, k) ->
    k2 (OpCall (name, v, (fun v -> fun k2' -> apply_in k v k2')))) (*継続を適用*)

(* handle 節内の実行結果をハンドラで処理する関数 *)
and apply_handler (k : k) (h : h) (a : a) (k2 : k2) : a = match a with
| Return v ->
    (match h with {return = (x, e)} ->
    let reduct = subst e [(x, v)] in
    eval reduct k k2)
| OpCall (name, v, m) ->
    (match search_op name h with
    | None ->
        k2 (OpCall (name, v, (fun v -> fun k2' -> (* 継続を適用 *)
            m v (fun a' -> apply_handler k h a' k2')))) (* GHandle に変換 *)
    | Some (x, y, e) ->
        let cont_value =
            Cont (fun k'' -> fun v -> fun k2'' ->
                m v (fun a' -> apply_handler k'' h a' k2'')) in (* GHandle に変換 *)
        let reduct = subst e [(x, v); (y, cont_value)] in
        eval reduct k k2)

(* 初期継続を渡して実行を始める *)
let interpreter (e : e) : a = eval e FId (fun a -> a) (* GId に変換される *)
```

図 14. CPS インタプリタを非関数化して CPS 変換したプログラム

```

(* CPS インタプリタを非関数化して CPS 変換して非関数化した関数 *)
let rec eval (exp : e) (k : k) (k2 : k2) : a = match exp with
| Val (v) -> apply_in k v k2
| App (e1, e2) -> eval e2 (FApp2 (e1, k)) k2
| Op (name, e) -> eval e (FOp (name, k)) k2
| With (h, e) -> eval e FId (GHandle (h, k, k2))

(* handle 節内の継続を適用する関数 *)
and apply_in (k : k) (v : v) (k2 : k2) : a = match k with
| FId -> apply_out k2 (Return v)
| FApp2 (e1, k) -> let v2 = v in eval e1 (FApp1 (k, v2)) k2
| FApp1 (k, v2) -> let v1 = v in (match v1 with
| Fun (x, e) ->
    let reduct = subst e [(x, v2)] in
    eval reduct k k2
| Cont (cont_value) ->
    (cont_value k) v2 k2
| _ -> failwith "type error")
| FOp (name, k) ->
    apply_out k2 (OpCall (name, v, (fun v -> fun k2' -> apply_in k v k2'))))

(* 全体の継続を適用する関数 *)
and apply_out (k2 : k2) (a : a) : a = match k2 with
| GId -> a
| GHandle (h, k, k2) -> apply_handler k h a k2

(* handle 節内の実行結果をハンドラで処理する関数 *)
and apply_handler (k : k) (h : h) (a : a) (k2 : k2) : a = match a with
| Return v -> (match h with {return = (x, e)} ->
    let reduct = subst e [(x, v)] in eval reduct k k2)
| OpCall (name, v, m) ->
    (match search_op name h with
    | None ->
        apply_out k2 (OpCall (name, v,
            (fun v -> fun k2' -> m v (GHandle (h, k, k2')))))
    | Some (x, y, e) ->
        let cont_value =
            Cont (fun k'' -> fun v -> fun k2 -> m v (GHandle (h, k'', k2))) in
        let reduct = subst e [(x, v); (y, cont_value)] in
        eval reduct k k2)

(* 初期継続を渡して実行を始める *)
let interpreter (e : e) : a = eval e FId GId

```

図 15. CPS インタプリタを非関数化して CPS 変換して非関数化したプログラム