FRAZIONI ALGEBRICHE

Una frazione algebrica è una frazione che ha per numeratore e denominatore due polinomi A e B; espressa nella forma $\frac{A}{B}$ con B polinomio non nullo.

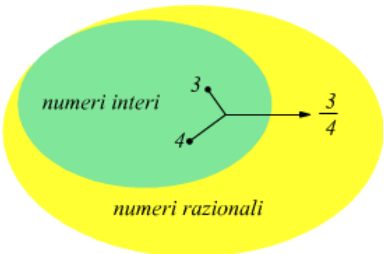
Chiameremo termini i polinomi A e B della frazione algebrica ricordando che essi possono sempre essere specificati come numeratore e denominatore della stessa.

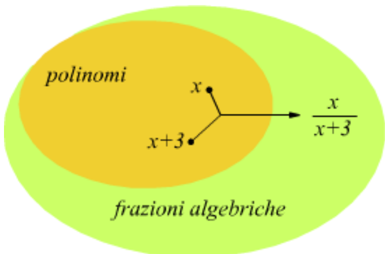
Numeratore e denominatore possono anche presentarsi in forma fattorizzata (ved.fattorizzazione di polinomi).

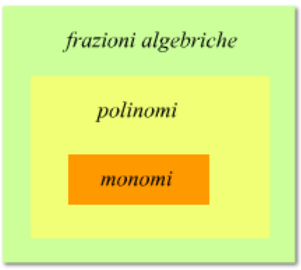
$$\frac{\overbrace{2(x-1)}^{\text{termine}}}{\underbrace{(x+1)(x-3)}_{\text{termine}}} \qquad \xrightarrow[\text{(coefficiente)}]{\text{fattore}} \frac{2\overbrace{(x-1)}^{\text{fattore}}}{\underbrace{(x+1)}_{\text{fattore}}\underbrace{(x-3)}_{\text{fattore}}}$$

Sono ad esempio frazioni algebriche le espressioni $\frac{x}{x+3}$; $\frac{x^3}{x^4+1}$; $\frac{a+b}{a-b}$

Come la classe dei numeri interi N è stata ampliata nella classe dei numeri razionali Q; allo stesso modo l'insieme dei polinomi può essere ampliato nell'insieme delle frazioni algebriche; mantenendo sempre la clausola insindacabile di avere un denominatore non nullo.







Se le frazioni algebriche si formano partendo dai polinomi il percorso può anche essere visto al contrario: le frazioni algebriche che hanno denominatore pari a 1 sono polinomi, se un polinomio è dotato di un unico termine allora rientriamo nella classe dei monomi.

Sotto questo punto di vista si può dire che i termini una frazione algebrica possono anche essere due monomi visto che questi possono essere considerati dei casi particolari di polinomi.

DOMINIO DI ESISTENZA DI UNA FRAZIONE ALGEBRICA

Quando siamo in presenza di una frazione algebrica dotata di variabili, dobbiamo ricordare che essa è definita solo quando il denominatore è diverso da zero. Nel caso di una generica frazione algebrica come

$\frac{2}{x-1}$ essa risulterà definita solo per ogni valore della variabile $x \neq 1$; perché in corrispondenza di tale valore si ha $\frac{2}{1-1} = \frac{2}{0} = indef.$

una divisione per zero si può sempre provare a farla con la calcolatrice, ma la risposta è sempre quella: nel momento in cui in una frazione appare al denominatore lo zero, quella frazione perde di significato.

La condizione di esistenza (C.E.) della frazione è in questo caso $x \neq 1$

Il dominio (o insieme di definizione oppure insieme di esistenza) viene specificato come R-{ 1 } per dire che esso coincide con l'insieme dei numeri reali, escludendo 1.

Esempio 1 : $\frac{2+x}{x+1}$ C.E.: $x \neq -1$ dominio: R-{ -1 }

Esempio 2 : $\frac{2+x}{x^2-x} \longrightarrow \frac{2+x}{x(x-1)}$ C.E.: $x \neq 0$ e $x \neq 1$ dominio R - { 0 , 1 } cioè in questo caso il dominio coincide con l'insieme dei numeri reali R con l'esclusione dei valori 0 e 1 che annullano il denominatore della frazione assegnata.

Esempio 3 : $\frac{2+x}{x^2+1}$ nessuna C.E. ; il dominio è R (insieme dei numeri reali).

Frazioni algebriche equivalenti

Prediamo le due frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$: si tratta di due frazioni equivalenti, infatti la prima è stata ottenuta dalla seconda applicando la proprietà invariantiva della divisione cioè: se in una frazione dividiamo numeratore e denominatore per la stessa quantità (diversa da zero); la frazione ottenuta rappresenta lo stesso numero razionale della precedente .

Per le frazioni algebriche esiste un principio analogo:

Due frazioni algebriche $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ sono equivalenti quando assumono lo stesso valore numerico per ogni valore attribuito alle variabili, esclusi quelli che non rispettano la condizione di esistenza (C.E.).

Se viene verificata l'uguaglianza $A \cdot D = C \cdot B$ allora le due frazioni algebriche sono equivalenti .

Due frazioni algebriche, possono essere equivalenti anche se non rispettano le stesse condizioni di esistenza.

$\frac{x}{x+2} = \frac{x^2-2x}{x^2-4}$ infatti

$$x(x^2-4) = (x+2)(x^2-2x)$$
$$x^3-4x = x^3-2x^2+2x^2-4x$$

verificando la condizione A·D=C·B nonostante per la prima C.E.:x≠-2 mentre per la seconda la C.E. è x≠±2.

La proprietà invariantiva della divisione continua a valere anche per le frazioni algebriche

Moltiplicando o dividendo il numeratore ed il denominatore di una frazione algebrica per uno stesso polinomio non nullo si ottiene una frazione algebrica equivalente.

Segno dei termini di una frazione algebrica

Se usiamo la proprietà invariantiva, moltiplicando numeratore e denominatore di una frazione algebrica per -1, otteniamo di cambiare segno ai termini sia del numeratore che del denominatore; il risultato dell'operazione, sarà comunque quello di avere una frazione equivalente a quella iniziale. (abbiamo applicato la proprietà invariantiva della divisione, quindi siamo nella legge).

$$\frac{2x-y}{x-y} = \frac{(-1)(2x-y)}{(-1)(x-y)} = \frac{y-2x}{y-x}$$

Per ottenere una frazione equivalente a quella data, è anche possibile cambiare il segno solo al numeratore o al denominatore della frazione a patto di cambiare il segno davanti alla frazione.

$\boxed{\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}}$ Questo se A e B sono due polinomi con B≠0.

Data la frazione algebrica $\frac{a-2b}{a-b}$ avremo

$\frac{a-2b}{a-b} = \frac{2b-a}{b-a}$ se cambio segno sia al numeratore che al denominatore

$\frac{a-2b}{a-b} = -\frac{2b-a}{a-b}$ se cambio il segno solo al numeratore

$\frac{a-2b}{a-b} = -\frac{a-2b}{b-a}$ se cambio il segno solo al denominatore

La frazione algebrica che si ottiene cambiando il segno davanti ad una frazione assegnata si dice frazione algebrica opposta a quella data.

$$\text{frazione algebrica} \longrightarrow \frac{A}{B} \qquad -\frac{A}{B} \longleftarrow \text{frazione opposta}$$

misure analoghe si possono applicare anche in questo caso

$$\boxed{-\frac{A}{B}=\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}}$$

La frazione opposta a quella del caso precedente è $-\frac{a-2b}{a-b}$ allora si potrà scrivere

$-\frac{a-2b}{a-b}=\frac{2b-a}{a-b}$ cambio segno al numeratore

$-\frac{a-2b}{a-b}=\frac{a-2b}{b-a}$ cambio segno al denominatore

Queste osservazioni costituiscono degli indispensabili artifici per risolvere molti dei problemi che si possono presentare.

SEMPLIFICAZIONE DI FRAZIONI ALGEBRICHE

frazione numerica	*frazione algebrica*
$\frac{15}{24}$	$\frac{x^2-4}{x^2+2x}$
scomposizione	
$\frac{5\cdot 3}{8\cdot 3}$	$\frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)}$
semplificazione	
$\frac{5\cdot \cancel{3}}{8\cdot \cancel{3}}$	$\frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{x\cancel{(x+2)}}$
risultato	
$\frac{5}{8}$	$\frac{(x-2)}{x}$

Se per le frazioni algebriche si può applicare la proprietà invariantiva della divisione, ora, si può pensare di semplificare le frazioni algebriche così come si semplificano i numeri razionali per ridurli ai minimi termini.
Basterà dividere numeratore e denominatore per la stessa quantità diversa da 1 (e soprattutto diversa da 0).

Per semplificare una frazione algebrica si agisce come nel caso delle frazioni numeriche
1.) si scompone numeratore e denominatore in fattori
2.) si eliminano tutti i fattori comuni sbarrandoli

Semplificando, è frequente commettere degli errori

$\frac{x-\cancel{3}}{\cancel{3}}$ → ERRORE !

Le semplificazioni si svolgono tra fattori non tra gli addendi che costituiscono fattori diversi.

$\frac{\cancel{3}(x-3)}{\cancel{3}}$ → ESATTO

perché si tratta di una semplificazione tra fattori. Sempre semplificando una frazione,

$$\frac{x^2-1}{x^2-x}=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{x\cancel{(x-1)}}=\frac{x+1}{x}$$

si sottintende x≠0 ed x≠1 per rispettare le C.E.; questo anche se non viene specificato tutte le volte.

SOMMA DI FRAZIONI ALGEBRICHE

Per sommare le frazioni algebriche si può procedere come nel caso delle frazioni numeriche e anche stavolta si distinguono due casi principali.
1.) somma algebrica di frazioni con lo stesso denominatore
2.) somma algebrica di frazioni con denominatore diverso

Il primo caso è abbastanza facile.

La somma algebrica di due o più frazioni algebriche che hanno lo stesso denominatore è la frazione algebrica che ha per denominatore il denominatore comune e per numeratore la somma algebrica dei numeratori.

Ad es. $\frac{2}{x}+\frac{x-3}{x}=\frac{2+x-3}{x}=\frac{x-1}{x}$

Ad es.

si raccomanda l'uso di parentesi
per evitare errori di segno

$$\frac{2x+5}{x+3}-\frac{x-1}{x+3}=\frac{2x+5-(x-1)}{x+3}=$$
$$=\frac{2x+5-x+1}{x+3}=\frac{x+6}{x+3}$$

Nel secondo caso dobbiamo comunque rispettare la procedura prevista per le frazioni numeriche.

frazione numerica	*frazione algebrica*
$\frac{8}{21}+\frac{5}{7}-\frac{1}{6}$	$\frac{x}{x^2-4}+\frac{x+1}{x+2}-\frac{1}{2x-4}$
1.) scomponiamo i denominatori	
$\frac{8}{7\cdot 3}+\frac{5}{7}-\frac{1}{2\cdot 3}$	$\frac{x}{(x-2)(x+2)}+\frac{x+1}{x+2}-\frac{1}{2(x-2)}$
2.) calcoliamo il mcm del denominatore	
$mcm=2\cdot 3\cdot 7=42$ $42:21=2$ $42:7=6$ $42:6=7$	$mcm=2(x-2)(x+2)$ $2(x-2)(x+2):(x-2)(x+2)=2$ $2(x-2)(x+2):(x+2)=2(x-2)$ $2(x-2)(x+2):2(x-2)=x+2$
3.) facciamo le operazioni	
$\frac{8\cdot 2+5\cdot 6-1\cdot 7}{42}=$ $=\frac{16+30-7}{42}=\frac{39}{42}$	$\frac{2\cdot x+2(x-2)(x+1)-(x+2)\cdot 1}{2(x-2)(x+2)}=$ $=\frac{2x^2-x-6}{2(x-2)(x+2)}$
4.) se possibile scomponiamo e semplifichiamo	
$\frac{\cancel{2}\cdot 13}{\cancel{2}\cdot 3\cdot 7}=\frac{13}{14}$	$\frac{(2x+3)\cancel{(x-2)}}{2\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{2x+3}{2(x+2)}$

Il procedimento è laborioso ma non difficile

Prodotto di frazioni algebriche

Il prodotto tra due frazioni algebriche è la frazione algebrica che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

Bisogna ricordarsi di semplificare quando è possibile la frazione prodotto.
In questo caso le operazioni da tener conto sono poche

1.) scomponiamo numeratori e denominatori delle frazioni da moltiplicare
2.) facciamo tutte le semplificazioni possibili (tra numeratore e denominatore oppure in croce)
3.) calcoliamo il prodotto dei numeratori e dei denominatori

Frazione numerica	Frazione algebrica
$\frac{6}{15}\cdot\frac{10}{21}$	$\frac{x^2-1}{2x}\cdot\frac{6x}{x^2+x}$
Scomponiamo e semplifichiamo	
$\frac{2\cdot\cancel{3}}{3\cdot\cancel{5}}\cdot\frac{2\cdot\cancel{5}}{\cancel{3}\cdot 7}$	$\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{2}\cancel{x}}\cdot\frac{{}^{3}\cancel{6}\cancel{x}}{x\cancel{(x+1)}}$
Moltiplichiamo	
$\frac{2\cdot 2}{3\cdot 7}=\frac{4}{21}$	$\frac{(x-1)}{1}\cdot\frac{3}{x}=\frac{3(x-1)}{x}$

Un'altra necessità potrebbe essere quella di calcolare la potenza di una frazione algebrica (la potenza di un numero niente altro che una moltiplicazione ripetuta di quel numero).
In tal caso è sufficiente elevare numeratore e denominatore all'esponente specificato.

$$\left(\frac{2x^2}{x-1}\right)^3=\frac{(2x^2)^3}{(x-1)^3}=\frac{8x^6}{(x-1)^3}$$

Rimangono invariate le regole per l'elevamento a potenza con esponente 0 e 1

$$\left(\frac{A}{B}\right)^0=\frac{A^0}{B^0}=\frac{1}{1}=1$$ con B polinomio non nullo

$$\left(\frac{A}{B}\right)^1=\frac{A^1}{B^1}=\frac{A}{B}$$ con B polinomio non nullo

Il reciproco di un numero N è quel numero che restituisce 1 quando viene moltiplicato per N

$$N\cdot\overbrace{\left(\frac{1}{N}\right)}^{\text{reciproco di } N}\longrightarrow \cancel{N}\cdot\frac{1}{\cancel{N}}=1$$

E' chiamata reciproca o inversa di una frazione algebrica la frazione algebrica che, moltiplicata per quella assegnata dà come risultato 1 .

Per determinare la reciproca di una frazione algebrica basta scambiare tra loro numeratore e denominatore.

$$\frac{x+1}{x-1}\xrightarrow{\text{reciproca}}\frac{x-1}{x+1}$$

$$\frac{1}{a-2}\xrightarrow{\text{reciproca}}a-2$$

a questo proposito, particolare attenzione deve essere rivolta a frazioni algebriche con esponente negativo

La potenza con esponente intero negativo di una frazione algebrica è uguale alla potenza con esponente opposto della frazione algebrica reciproca .

$$\boxed{\left(\frac{A}{B}\right)^{-n}=\left(\frac{B}{A}\right)^n}$$ con A e B polinomi non nulli

ad es. $\left(\frac{2x^3}{a^2}\right)^{-2}=\left(\frac{a^2}{2x^3}\right)^2=\frac{(a^2)^2}{(2x^3)^2}=\frac{a^4}{4x^6}$

ad es. $\left(\frac{2b}{a}\right)^{-1}=\left(\frac{a}{2b}\right)^1=\frac{a}{2b}$

valgono consecutivamente tutte le regole dettate per le potenze numeriche con esponente razionale

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{A}{B}\right)^{m}}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-\frac{1}{n}} = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{B}{A}}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{B}{A}\right)^{m}}$$

QUOZIENTE DI FRAZIONI ALGEBRICHE

Si sa che la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione e ad essa può essere ricondotta.

Il quoziente di due frazioni algebriche, di cui la seconda non nulla, è la frazione algebrica che si ottiene moltiplicando la prima per il reciproco della seconda.

se per una data frazione numerica vale la regola

moltiplico per $\frac{d}{d}=1$ quindi lascio invariata l'espressione

$$\frac{(a/b)}{(c/d)} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{\frac{c}{\cancel{d}}}\cdot\frac{d}{\cancel{d}} = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{d}{c}\right)$$

Lo stesso deve valere per le frazioni algebriche

$$\frac{3x^2-12}{x+1} : \frac{3x+6}{x^2-1} =$$

moltiplico per il reciproco della frazione al denominatore

$$\frac{3x^2-12}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{3x+6} =$$

scomposizione

$$\frac{3(x-2)(x+2)}{x+1}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{3(x+2)} =$$

semplifico tutto quello che è possibile semplificare

$$\frac{\cancel{3}(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+1}}\cdot\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{3}\cancel{(x+2)}} =$$

risultato

$$(x-2)(x-1)$$

ok random

(6a-18)*2/(5a-15)

$$\frac{(6a-18)(2)}{5a-15}$$

$$= \frac{12a-36}{5a-15}$$

$$= \frac{12(a-3)}{5(a-3)}$$

$$= \frac{12}{5}$$