

Algebra booleana

Computer come insieme di porte logiche

Perché algebra anche qui?

Il calcolatore può essere visto come una **rete logica**, cioè come un insieme di dispositivi chiamati **porte logiche** opportunamente connessi

Le **porte logiche** sono dispositivi capaci di eseguire operazioni logiche su **segnali binari**

In questo caso, i segnali binari sono livelli di tensione

Calcolatore come rete logica

Il valore esatto della tensione del segnale non è significativo: conta l'appartenenza ad un livello contrassegnato **alto** e ad un livello contrassegnato **basso**

Livello BASSO: 0

Livello ALTO: 1

Algebra booleana

Si riferisce alle tecniche di composizione delle porte logiche in una rete

Agisce su variabili binarie

E' il fondamento della progettazione dei circuiti logici digitali

Tavole Verità

Tabelle matematiche usate per determinare se una certa espressione è vera o falsa

Elenca **tutte** le possibili combinazioni di valori che possono assumere le variabili booleane ed il risultato della funzione ad esse applicata

Permette di sviluppare qualsiasi espressione

Variabili booleane

Equivale ad un bit

Possono assumere esclusivamente due valori logici: 0 e 1

Lo 0 corrisponde al falso (F), l'1 corrisponde al vero (T)

Operatori booleani

NOT	Negazione logica
-----	------------------

AND	Prodotto logico
-----	-----------------

OR	Somma logica
----	--------------

Negazione/complementazione

Operazione unaria che restituisce il valore logico opposto a quello della variabile di ingresso

Si raffigura con *not(x)* oppure \bar{x}

Se $x = 0 \rightarrow \text{not}(x) = 1$

Se $x = 1 \rightarrow \text{not}(x) = 0$

Tavola verità negazione

X	Not(x)
0	1
1	0

Prodotto logico (AND)

Fornisce il valore logico 1 se e solo se tutte le variabili assumono valore logico 1

Rappresentazione: $x \text{ and } y$, xy

Tavola verità AND

X	Y	XY
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Somma logica (OR)

Fornisce il valore logico 1 se e solo almeno una delle variabili assume valore logico 1

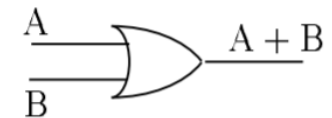
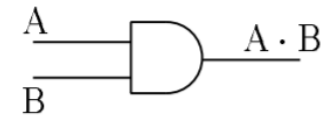
Rappresentazione: $x \text{ or } y$, $x + y$

Tabella verità OR

X	Y	X+Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

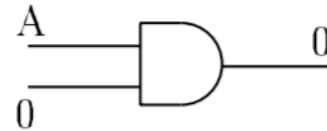
Porte logiche

- Le porte logiche sono dispositivi elettronici capaci di eseguire operazioni logiche su variabili booleane

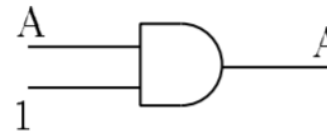


Proprietà porta AND

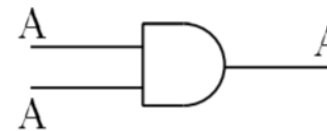
$$A \cdot 0 = 0$$



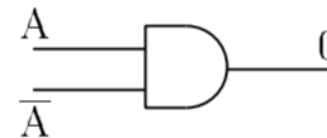
$$A \cdot 1 = A$$



$$A \cdot A = A$$

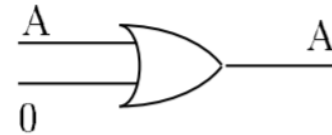


$$A \cdot \bar{A} = 0$$

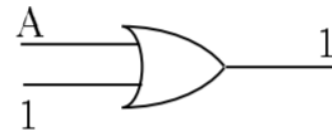


Proprietà porta OR

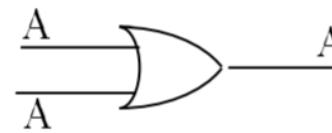
$$A + 0 = A$$



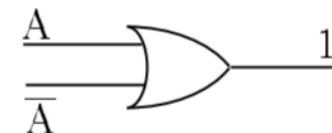
$$A + 1 = 1$$



$$A + A = A$$



$$A + \bar{A} = 1$$



Proprietà algebra booleana

Idempotenza

$$x + x = x$$

$$x * x = x$$

Elemento
nullo

$$x + 1 = 1$$

$$x * 0 = 0$$

Proprietà
commutativa

$$x + y = y + x$$

$$x * y = y * x$$

Proprietà
associativa

$$x + (y + z) = (x + y) + z = x + y + z$$

$$x * (y * z) = (x * y) * z = x * y * z$$

Reciprocità

Le proprietà che valgono per l'operatore $+$ valgono anche per l'operatore $*$, purché si scambino gli 1 con gli 0 (e viceversa)

Proprietà distributiva

$$x * y + x * z = x * (y + z)$$

$$(x + y) * (x + z) = x + y * z$$

Teorema assorbimento

$$x + (x * y) = x$$

$$x * (x + y) = x$$

$$(x + \bar{y}) * y = x * y$$

$$x * \bar{y} + y = x + y$$

Teoremi di de morgan

$$\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$\overline{x + y} = \bar{x} * \bar{y}$$

Problemi nella vita reale

- Io posso giocare ad un gioco sulla Playstation solo se
 - Ho la Playstation
 - Ho un gioco per la Playstation

Playstation	Gioco	Divertimento
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Problemi nella vita reale

- Posso scegliere tra due tipi di formaggio
 - Tipo 1
 - Tipo 2

Tipo 1	Tipo 2	Formaggio
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Problemi nella vita reale

- Sto guidando il motorino e devo decidere se passare al semaforo
- Valori del semaforo
 - Verde
 - Giallo
 - Rosso

Verde	Giallo	Rosso	Passo
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Usi nella vita reale

- L'Algebra di Boole si presta bene allo studio degli insiemi, delle proposizioni e dei circuiti
- Applicazioni nella logica
- Strumento per l'analisi e la sintesi delle reti di commutazione