ALGEBRA BOOLEANA

- Boole matematico inglese (XIX secolo)
- Algebra di Boole utilizzata solo dall'inizio del XX secolo (primi sistemi di calcolo)
- Si basa su due soli stati:
  - acceso (ON)
  - spento (OFF)

Variabili booleane

- Le variabili possono assumere solo due valori: 0 e 1
- Si chiamano *Variabili logiche* o *booleane*

Funzioni booleane

- Usando le variabili booleane, si possono costruire le funzioni booleane

F(x,y,z)

che possono assumere solo due stati:
  - vero
  - falso

Tabella della verità

- Ogni funzione booleana è caratterizzata dalla propria *tabella della verità*

x	y	z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Funzioni booleane

- **Funzioni completamente specificate**: se per tutte le combinazioni delle variabili il suo valore è determinato
- Esempio: uno studente può chiedere la tesi solo se ha superato tutti gli esami ed è regolarmente iscritto

Funzioni booleane

- **Funzioni non completamente specificate**: se a una o più combinazioni delle sue variabili non corrisponde alcun valore della funzione
- Esempio: uno studente si laurea solo se ha superato tutti gli esami e ha svolto la tesi

Costanti booleane

- Oltre alle variabili vi sono anche le costanti
- Essendo l'Algebra Booleana definita su due soli simboli, esistono solo due costanti:
  - 0
  - 1

Operatori logici

- Tra le variabili e le costanti possono intervenire delle relazioni
- Le relazioni si esprimono utilizzando gli operatori logici
- Definiti insieme agli operatori logici, i postulati definiscono il loro comportamento

Tipi di operatori

- Esistono due tipi di operatori, in dipendenza dal numero di variabili che utilizzano:
  - monadici
  - diadici

L'operatore NOT

- Il risultato è il complemento dell'unica variabile

x	NOT x
0	1
1	0

L'operatore AND

- Il risultato è *vero* solo se sono *vere* entrambe le variabili

a	b	a AND b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

L'operatore OR

- Il risultato è *vero* solo se è *vera* almeno una delle variabili

a	b	a OR b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

L'operatore XOR

- Il risultato è *vero* solo se è *vera* solo una delle due variabili

a	b	a XOR b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Operatori - *nomenclatura*

- NOT: inversione ($\overline{}$)
- AND: prodotto logico ($\cdot$)
- OR: somma logica (+)
- XOR: or esclusivo ($\oplus$)

Operatori universali

- Con gli operatori NOT, OR, AND, XOR si possono costruire tutte le funzioni booleane
- Esistono due operatori (NAND, NOR) che permettono la sintesi di *qualsiasi funzione*, utilizzando un unico tipo di operatori

L'operatore NAND

- Il risultato è *vero* solo se è *falso* l'AND tra le due variabili

a	b	a NAND b
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

L'operatore NOR

- Il risultato è *vero* solo se è *falso* l'OR tra le due variabili

a	b	a NOR b
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Espressioni logiche

- Un insieme di variabili e/o costanti booleane a cui siano applicati gli operatori logici si dice *espressione booleana* o *logica*
- Una espressione logica rappresenta una funzione logica: ad esempio:

$$T = a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b$$

Espressioni logiche

- Espressioni equivalenti
- Espressioni complementari
- Espressioni duali

Precedenze tra operatori

- Le precedenze sono simili al + e al x dell'algebra consueta:
  - priorità alta ·
  - priorità bassa +

Proprietà dell'algebra booleana

$X \cdot 0 = 0$	$X+1 = 1$	
$X \cdot 1 = X$	$X+0 = X$	
$X \cdot X = X$	$X+X = X$	idempotenza
$X \cdot \overline{X} = 0$	$X+\overline{X} = 1$	complementazione
$X \cdot Y = Y \cdot X$	$X+Y = Y+X$	commutativa
$X \cdot (X+Y) = X$	$X+(X \cdot Y) = X$	assorbimento
$X \cdot (\overline{X}+Y) = X \cdot Y$	$X+(\overline{X} \cdot Y) = X+Y$	assorbimento
$X \cdot (Y+Z) = X \cdot Y+X \cdot Z$		
$X+(Y \cdot Z) = (X+Y) \cdot (X+Z)$		distributiva

Proprietà dell'algebra booleana

$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot Y \cdot Z$

$X+(Y+Z) = (X+Y)+Z = X+Y+Z$ Associativa

$\overline{(\overline{X})} = X$

$\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$ $\overline{X+Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$ De Morgan

Proprietà operatori universali

NOR (↑)	NAND (↓)
$X \uparrow 1 = 0$	$X \downarrow 0 = 1$
$X \uparrow 0 = \overline{X}$	$X \downarrow 1 = \overline{X}$
$X \uparrow X = \overline{X}$	$X \downarrow X = \overline{X}$
$\overline{X} \uparrow \overline{Y} = X \cdot Y$	$\overline{X} \downarrow \overline{Y} = X+Y$
$\overline{X \uparrow Y} = X+Y$	$\overline{X \downarrow Y} = X \cdot Y$

Esercizio 1

- Una cassaforte ha 4 lucchetti, x,y,v,w che devono essere tutti aperti affinché la cassaforte possa essere aperta.
- Le chiavi sono distribuite tra tre persone, A,B e C come segue:
  - A possiede le chiavi v e y
  - B possiede le chiavi v e x
  - C possiede le chiavi w e y

  Siano le variabili A, B e C uguali a 1 se la persona corrispondente è presente, altrimenti uguali a 0.

? Costruire la tavola di verità della funzione f(A,B,C) che è uguale ad 1 se e solo se la cassaforte può essere aperta.

Esercizio 2

- Data la seguente funzione booleana di 3 variabili a, b e c

  $f(a,b,c) = \bar{a}b+c$

  ricavarne la tavola di verità.

Esercizio 3

- Applicando i teoremi dell'algebra booleana, semplificare le seguenti funzioni logiche

  $f1(a,b,c,d) = ab+ac+bd+cd$

  $f2(x,y,z) = (x+z)(x+y)(y+z)$

  $f3(a,b,c) = \overline{ab+bc+\bar{a}c}$

Esercizio 4

- Applicando i teoremi dell'algebra booleana, verificare se le espressioni

  a) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}+b\bar{c}+(a(b+\bar{b}\bar{c}))$

  b) $a+\bar{c}$

  sono o non sono equivalenti.