Operacijska istraživanja- Laboratorijska vježba 1

Tekst zadatka

Neko poduzeće CBA proizvodi tri tipa istovrsnog proizvoda A, B i C. Ugovoreno je da se trgovačkoj mreži isporuči točno 300 tona tog proizvoda bez obzira na tip. Za potrebe proizvodnje treba koristiti određene kemikalije u iznosu od 3, 4 i 2 litra po jednoj toni proizvoda A, B i C, pri čemu su odobrena sredstva za uvoz 1000 litara te kemikalije. Također je odlučeno da u procesu proizvodnje radnike treba uposliti na najmanje 120 radnih sati, a zna se da je za proizvodnju nužno uložiti 2, 1 odnosno 3 radna sata po kilogramu proizvoda A, B i C. Odrediti optimalni plan proizvodnje ukoliko se zna da prodajne cijene ovih proizvoda iznose 1000, 2000 odnosno 800 eura po toni za proizvode A, B i C.

Ograničenja

$$x_1 + x_2 + x_3 = 300$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1000$$
$$2000x_1 + 1000x_2 + 3000x_3 \geq 120$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Primalni LP

$$MAX, \qquad Z = 1000x_1 + 2000x_2 + 800x_3$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq -300$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 300$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1000$$
$$-2000x_1 - 1000x_2 - 3000x_3 \leq -120$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$Rješenje: x_1 = 0, x_2 = 200, x_3 = 100, Z = 480000$$

Dualni LP

$$MIN, \qquad W = -300y_1 + 300y_2 + 1000y_3 - 120y_4$$

$$-y_1 + y_2 + 3y_3 - 2000y_4 \geq 1000$$
$$-y_1 + y_2 + 4y_3 - 1000y_4 \geq 2000$$
$$-y_1 + y_2 + 2y_3 - 3000y_4 \geq 800$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

$$Rješenje: y_1 = 400, y_2 = 0, y_3 = 600, y_4 = 0, W = 480000$$

Programsko rješenje

Rješenje je postignuto pomoću programskog paketa PuLP. U kodu se nalazi rješenje problema u početkom obliku bez ikakvih promjena, u standardnom obliku i rješenje dualnog problema.

U oba slučaja postignuto je optimalno rješenje: $Z = W = 480000$ eura

```
# maximise_profit
Maximize: 1000*x1 + 2000*x2 + 800*x3
x1 + x2 + x3 = 300
3*x1 + 4*x2 + 2*x3 <= 1000
2000*x1 + 1000*x2 + 3000*x3 >= 120

Objective function value: 480000.0
Is optimal solution? True
x1 0.0
x2 200.0
x3 100.0
```

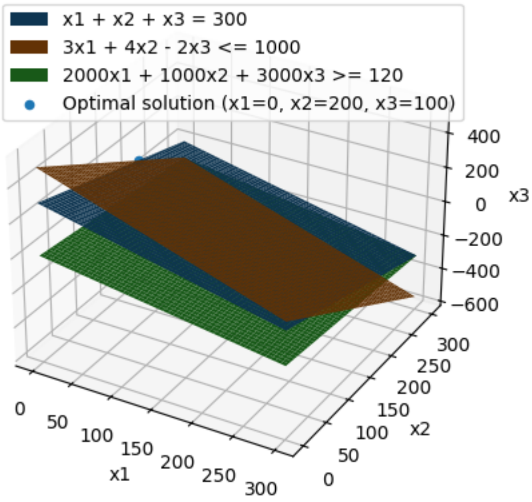
```
# maximise_profit_simplex
Maximize: 1000*x1 + 2000*x2 + 800*x3
-x1 - x2 - x3 <= -300
x1 + x2 + x3 <= 300
3*x1 + 4*x2 + 2*x3 <= 1000
-2000*x1 - 1000*x2 - 3000*x3 <= -120

Objective function value: 480000.0
Is optimal solution? True
x1 0.0
x2 200.0
x3 100.0
```

```
# maximise_profit_dual_simplex
Minimize: -300*y1 + 300*y2 + 1000*y3 - 120*y4
-y1 + y2 + 3*y3 - 2000*y4 >= 1000
-y1 + y2 + 4*y3 - 1000*y4 >= 2000
-y1 + y2 + 2*y3 - 3000*y4 >= 800

Objective function value: 480000.0
Is optimal solution? True
y1 400.0
y2 0.0
y3 600.0
y4 0.0
```

Grafičko rješenje
Rješenje je postignuto pomoću paketa matplotlib.



Cjelobrojno linearno programiranje
Problem se može riješiti kao problem cjelobrojnog linearnog programiranja:
$(x_1 = 0, x_2 = 200, x_3 = 100)$

Iz tog razloga u programskom kodu varijable su definirane kao cijeli brojevi (LpInteger):
```
x1 = LpVariable("x1", 0, None, LpInteger)
x2 = LpVariable("x2", 0, None, LpInteger)
x3 = LpVariable("x3", 0, None, LpInteger)
```

Čak i ako varijable postavimo da nisu cijeli brojevi (LpContinuous) i dalje dobivamo isti rezultat.

Iskorištenost resursa
Resursi su u potpunosti iskorišteni jer je iskorišteno 1000 litara kemikalije za postizanje optimalnog rješenja.

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1000$$
$$3 * 0 + 4 * 200 + 2 * 100 \leq 1000$$
$$0 + 800 + 200 \leq 1000$$
$$1000 \leq 1000$$

Analiza osjetljivosti
Mijenjamo vrijednosti ograničenja i gledamo kako se mijenja shadow price (SP).

Vidimo da se za svaku dodatnu litru kemikalije vrijednost ciljne funkcije povećava izmjenično za 200 eura pa 1000 eura. Vidimo da isto vrijedi i za smanjenje količine kemikalije, ali se zarada smanjuje izmjenično za 1000 eura pa 200 eura.

Ograničenje broja radnih sati ne utječe na rješenje sve dok se broj minimalnih radnih sati znatno ne poveća (u ovom slučaju za skoro 600000 sati). Ako moramo proizvesti 300 tona proizvoda, broj radnih sati će uvijek biti veći od 300000 ($300\ tona\ *\ 1000\ kg/tona\ *\ 1\ radni\ sat/kg\ =\ 300000$).

Možemo zaključiti da je u ovom problemu usko grlo količina kemikalije.

$$SP = \frac{Z_B - Z_A}{Promjena\ u\ ograničenju}$$

$$SP(+1\ litra\ kemikalije) = \frac{480200\ -\ 480000}{1} = 200\ eura$$
$$SP(+2\ litra\ kemikalije) = \frac{481200\ -\ 480000}{2} = 600\ eura$$
$$SP(+3\ litra\ kemikalije)\ = \frac{481400\ -\ 480000}{3} = 466.67\ eura$$
$$SP(+4\ litra\ kemikalije) = \frac{482400\ -\ 480000}{4} = 600\ eura$$
$$SP(+5\ litra\ kemikalije)\ = \frac{482600\ -\ 480000}{5} = 520\ eura$$
$$SP(-1\ litra\ kemikalije) = \frac{479000\ -\ 480000}{-1} = 1000\ eura$$
$$SP(-2\ litra\ kemikalije)\ = \frac{478800\ -\ 480000}{-2} = 600\ eura$$

$$SP(+1\ radni\ sat) = \frac{480000 - 480000}{1} = 0$$
$$SP(+2\ radni\ sat) = \frac{480000 - 480000}{2} = 0$$
$$SP(-1\ radni\ sat) = \frac{480000 - 480000}{-1} = 0$$
$$SP(-2\ radni\ sat) = \frac{480000 - 480000}{-2} = 0$$
$$SP(+599880\ radni\ sat)\ = \frac{420000 - 480000}{599880}\ = -0.10\ eura$$