



Aberace čoček

Fyzikální optika - Projekt

8. apríla 2024

Bc. Peter Ďurica(xduric05)

Abstrakt

Tento projekt sa zaoberá priblížením rôznych typov monochromatických a chromatických aberácií a dôvodom ich vzniku a ako sú riešené. Hlavne sa venuje sférickej aberácii, kome a chromatickej aberácii šošoviek. Takisto sa okrajovo venuje aj astigmatizmu, sklenutí poľa a skresleniu obrazu.

Kľúčové slová: optika, šošovky, aberácie, monochromatické aberácie, chromatická aberácia, sférická aberácia, koma, astigmatizmus, sklenutie poľa, skreslenie obrazu, optický systém, riešenie aberácií, achromatický dublet, dvojité Gaussove šošovky

Obsah

| | | |
|----------|---------------------------------|-----------|
| 1 | Úvod | 3 |
| 2 | Monochromatické aberácie | 4 |
| 2.1 | Sférická aberácia | 4 |
| 2.2 | Koma | 5 |
| 2.2.1 | Tangenciálna koma | 5 |
| 2.2.2 | Sagitálna koma | 7 |
| 2.3 | Ostatné typy | 8 |
| 2.3.1 | Astigmatizmus | 8 |
| 2.3.2 | Sklenutie poľa | 8 |
| 2.3.3 | Skreslenie obrazu | 8 |
| 3 | Chromatické aberácia | 9 |
| 4 | Riešenie problému | 10 |

1 Úvod

Pri výpočtoch geometrickej (paprskovej) optiky [1] sa pre zjednodušenie počítania používa paraxiálna aproximácia. Základný predpoklad paraxiálnej aproximácie je, že uhly medzi prichádzajúcim lúčom a osou systému sú dostatočne nízke. Všeobecne sa dá predpokladať, že pri nízkych hodnotách uhlu α vieme nahradiť $\sin(\alpha)$ len samotným uhlom. V prípade kedy nie je možné vytvoriť tento predpoklad vzniká nezaostrený snímok kvôli aberačným vadám. Význam týchto väd rastie s rastúcim uhlom lúča svetla a optickej osy.

Táto aproximácia [2] vychádza z mocninového rozvoja goniometrickej funkcie \sin , ktorého rovnica je nasledovná:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

V paraxiálnej aproximácii sa vždy obmedzí tento výpočet len na prvý člen rozvoja. V prípade menších hodnôt je rozdiel minimálny ale ten následne rastie pri vyšších hodnotách, kde je význam nasledujúcich členov rozvoja výraznejší. To vedie ku odchýlkam od dokonalého zobrazenia.

Pre svetlá s jednou vlnovou dĺžkou [2] rozlišujeme päť typov aberácií. Jedná sa o sférickú vadu, komu, astigmatizmus, sklenutie poľa a skreslenie obrazu. Tieto aberácie nazývame monochromatické. V reálnom svete sa zvyčajne vyskytujú na naraz na obraze v rôznych úrovniach intenzity. Navyše sa môžu zobraziť vady spojené s rôznymi vlnovými dĺžkami vo svetle, ktoré vznikajú vďaka závislosti parametrov zobrazovacích elementov na vlnovej dĺžke. Tieto vady sa nazývajú chromatické.

V mojej práci sa najprv venujem bližšiemu vysvetleniu monochromatických aberácií, hlavne teda sférickej aberácii a kome. Okrajovo následne vysvetlím ostatné typy aberácií na jednej vlnovej dĺžke. Ďalšia sekcia sa bude zaoberať chromatickou aberáciou šošoviek a v poslednej priblížim ako sa aberácie dajú riešiť.

2 Monochromatické aberácie

Monochromaticke aberácie [2] sa vznikajú pri odraze a prechode jednej vlnovej dĺžky svetla cez šošovkovú aparatúru. Týchto aberácií je viacero typov ale rozhodol som sa hlavne venovať sférickej aberácii a kome. Následne spomeniem efekty ostatných typov aberácií.

2.1 Sférická aberácia

Pri ideálnej šošovke [1][2][3] sa každý lúč svetla padajúci na šošovku zalomí vždy presne do jedného bodu, ktorý nazývame fokálny bod. V reálnom svete však pri používaní šošoviek, ktorých zahnutie kopíruje zahnutie kruhu s ľubovoľným polomerom vzniká sférická aberácia. Je to efekt, kedy jednotlivé lúče prichádzajúce do šošovky dopadajú na rozdielne časti šošovky a teda ich výstupný uhol je rozdielny. Znamená to že fokálny bod nie je len jeden do ktorého sa zlučujú všetky lúče ale je ich viacero v takzvanom kruhu neistoty. Obrázok 2.1 zobrazuje náčrt sférickej aberácie na jednoduchom modeli a kruh neistoty konvergujúcich lúčov.

Ak použijeme na snímání okolia šošovky [4], ktoré nie sú upravené aby nevznikala sférická aberácia, finálny obraz sa môže javiť rozmazaný.

Pozdĺžna aberácia [3] je podľa Seidelovej aproximácie proporcionálna ohniskovej vzdialenosti a líši sa podľa druhej mocniny výšky okrajového lúča prichádzajúceho na šošovku. Pre šošovky alebo zrkadlá ohniskovej dĺžky f je rovnica pre pozdĺžnu sféricкую aberáciu

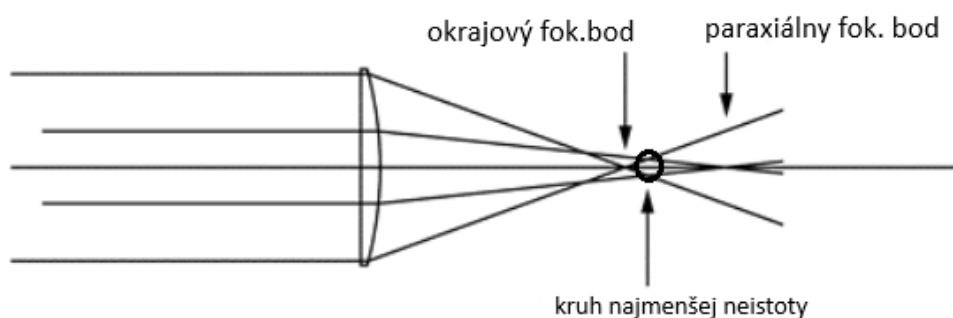
$$\Delta_{sf} = \mathbf{B}y^2f^2,$$

kde y je výška okrajového lúča prichádzajúceho na šošovku meraná od ohniskovej osi, f je ohnisková vzdialenosť a \mathbf{B} je koeficient sférickej aberácie.

Je užitočné ešte vedieť diameter kruhu najmenšej neistoty [3], čiže diameter najmenšieho detailu na obraze ktorý vieme dosiahnuť ak je obrazová rovina správne nastavená. Rovnica na jeho výpočet je

$$\Delta_{knn} = \mathbf{B}f\frac{y^3}{2},$$

Tento detail na obrázku sa volá aj kruh rozmazania.



Obr. 1: Sférická aberácia [3]. Pozdĺžna aberácia je vzdialenosť medzi bodmi kde paraxiálne a okrajové lúče prekrčia optickú os a vytvoria vlastné fokálne body. Dôležitý je ešte diameter kruhu najmenšej neistoty, ktorý definuje priestorové rozlíšenie šošovky.

Koeficient sférickej aberácie **B** [3] sa pre jednu tenkú šošovku s polomeri zahnutia R_1 a R_2 počíta s použitím G-sumy pre sférickú aberáciu. G-suma je skonštruovaná pomocou šiestich koeficientov, ktoré závisia len od indexu lomu skla:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{n^2(n-1)}{2}, \\ G_2 &= \frac{(2n+1)(n-1)}{2}, \\ G_3 &= \frac{(3n+1)(n-1)}{2}, \\ G_4 &= \frac{(n+2)(n-1)}{2n}, \\ G_5 &= \frac{2(n^2-1)}{n}, \\ G_6 &= \frac{(3n+2)(n-1)}{2n} \end{aligned}$$

a konkrétna G-suma pre sférickú aberáciu sa počíta takto:

$$G_{sf} = G_1 c^3 - G_2 c^2 c_1 + G_3 c^2 s + G_4 c c_1^2 - G_5 c c_1 s + G_6 c s^2.$$

Koeficient **B** následne reprezentuje túto sumu G_{sf} . Hodnota c reprezentuje celkové zakrivenie oboch šošoviek, c_1 reprezentuje zakrivenie prvej šošovky a s reprezentuje prevrátenú hodnotu vzdialenosti objektu.

2.2 Koma

Typ aberácie Koma [3] je považovaný za najzávažnejší typ šošovkovej aberácie. Je všeobecné pravidlo v optickom dizajne, že ak sa podarí eliminovať komu, tak ostatné typy aberácií už niesú výrazne viditeľné prípadne niesú tak zložité na odstránenie.

Koma závisí hlavne od [3] uhlu hlavného lúča zo zväzku lúčov a preto počítame so šikmými zväzkami, kde je hlavný lúč naklonený podľa uhlu α od optickej osi. V šikmom zväzku lúčov prídu paraxiálne lúče vždy na bod paraxiálneho ohniska. Ak neexistuje sférická aberácia krajné lúče konvergujú na rovnakú ohniskovú rovinu ale na rozdielne body v rámci roviny. Dva páry krajných lúčov sú obzvlášť dôležité a dá sa povedať že aj definujú úroveň komy.

2.2.1 Tangenciálna koma

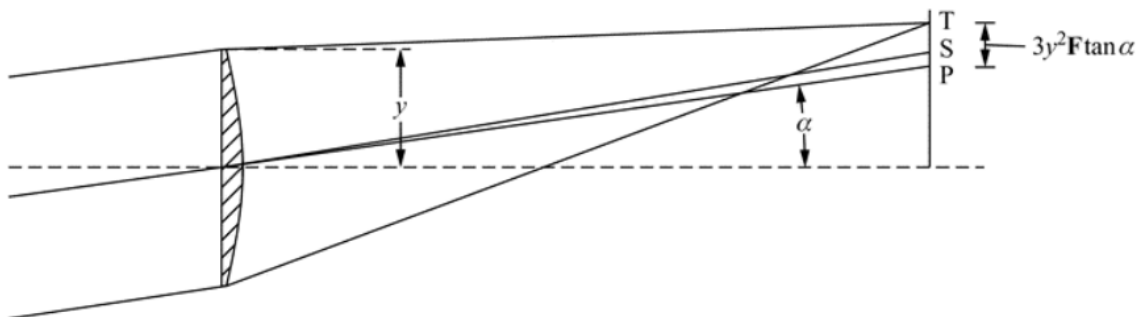
Keď sa dve okrajové lúče v vertikálnej rovine [3] stretnú v bode ktorý nieje na úrovni paraxiálneho lúča, Tak kolmá vzdialenosť tohto bodu od paraxiálneho lúča je tangenciálna koma. Táto vzdialenosť sa počíta pomocou rovnice:

$$\Delta_{koma} = 3y^2 \mathbf{F} v \tan \alpha.$$

Hodnoty y a α sú znázornené na obrázku 2.2, v je vzdialenosť obrazovej roviny a \mathbf{F} je koeficient komy. Tento koeficient sa počíta podobne ako koeficient sférickej aberácie **B** a to podľa G-súm.

G-suma pre komu [3] sa počíta podľa tohto vzorca:

$$G_{koma} = \frac{G_5 c c_1}{4} - G_7 c s - G_8 c^2.$$



Obr. 2: Tangenciálna koma šošovky [3]. V prípade absencie ostatných aberácií sa okrajové lúče stretnú v tangenciálnom bode. Tangenciálna koma je následne meraná ako vzdialenosť medzi bodom P a bodom T. Šikmé krajné lúče kolmé na tento diagram sa stretnú v bode S, ktorý znázorňuje sagitálne ohnisko. Podľa Seidelovej aproximácie je vzdialenosť bodov PS vždy tretina vzdialenosti bodov PT.

Skratky v predchádzajúcom vzorci znázorňujú:

$$G_5 = \frac{2(n^2-1)}{n},$$

$$G_7 = \frac{(2n+1)(n-1)}{2n},$$

$$G_8 = \frac{n(n-1)}{2},$$

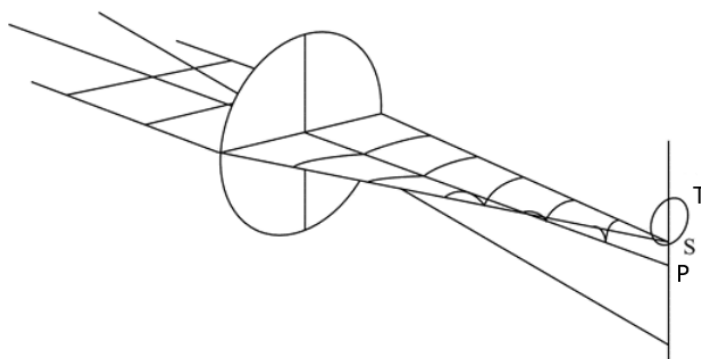
n = index lomu skla,

c = celkové zakrivenie oboch šošoviek,

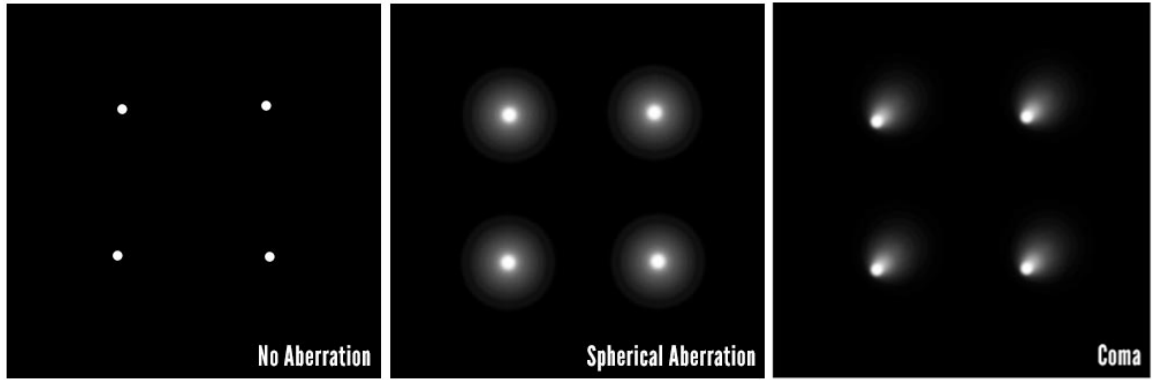
c_1 = zakrivenie prvej šošovky,

s = prevrátená hodnota vzdialenosti snímaného objektu.

Výsledná G-suma G_{koma} znázorňuje koeficient **F**.



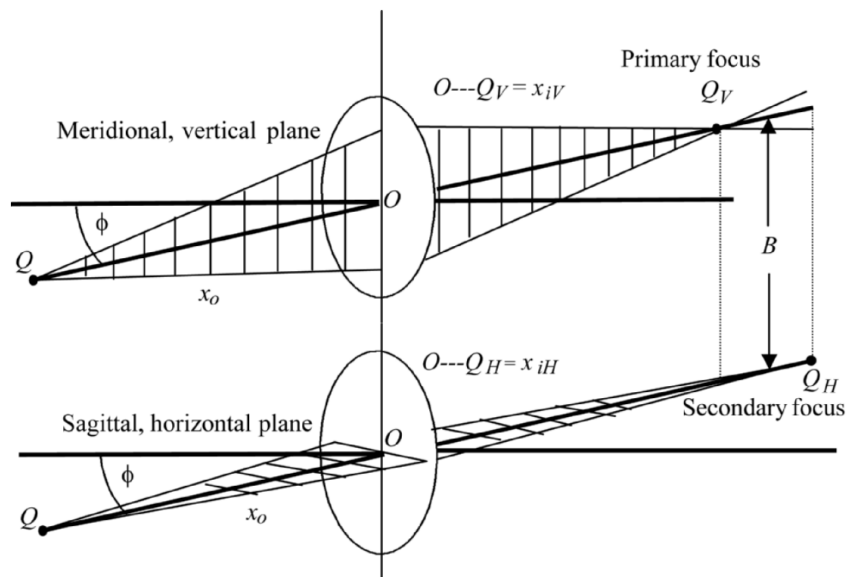
Obr. 3: Sagitálna koma šošovky [3]. Je definovaná bodom S. Krajné lúče z okraja šošovky sa divergujú na body kruhu, ktorého diameter je úsečka medzi bodmi T a S. Páry lúčov z ostatných prstencov šošovky tvoria podovné kruhy, ktoré ležia medzi dvoma priamkami vychádzajúcimi z bodu P a zvierajúcimi uhol 60° .



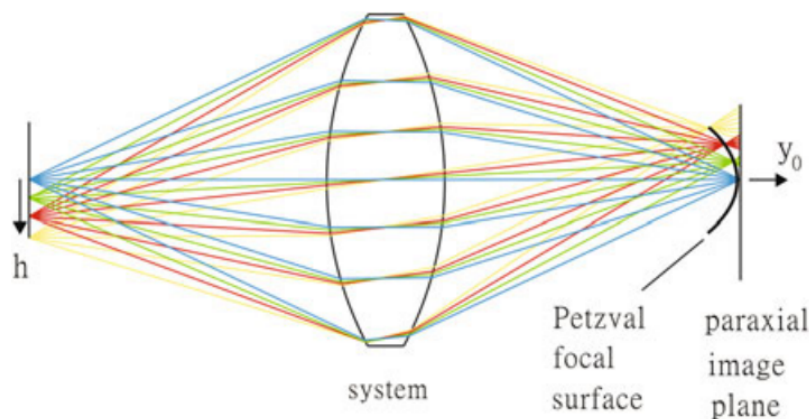
Obr. 4: Dôsledky sférickej aberácie a komy na fotografii. [5]

2.2.2 Sagitálna koma

V zjednodušenom prípade [3] sa dve lúče, ktoré prechádzajú šošovkou vodorovne cez rám šošovky, stretnú v bode medzi paraxiálnym ohniskom a tangenciálnym bodom. Vzdialenosť tohto bodu od paraxiálneho ohniska je tretina od vzdialenosti paraxiálneho bodu a tangenciálneho bodu a vďaka symetrii je posadený na priamke ktorá tieto 2 body spája. Tento bod sa nazýva sagitálne ohnisko. Ostatné páry krajných lúčov dopadajú na body na kruhu, ktorého diametrom je úsečka medzi tangenciálnym a sagitálnym ohniskom. Lúčové páry z každého prstenca šošovky tvoria kruhy rôzneho priemeru a výsledná koma je trojuholníková s vrcholom v paraxiálnom ohnisku a s uhlom pri tomto vrchole s veľkosťou 60° . Nasvietenie je nerovnomerné a je slabšie pri vonkajšom okraji. Podľa tohto tvaru, ktorý sa podobá kométe, dostal tento typ aberácie svoje meno.



Obr. 5: Astigmatizmus [1] Všetky lúče vychádzajúce z bodu Q na vertikálnej rovine sa stretnú v bode Q_V a všetky na horizontálnej rovine sa stretnú v bode Q_H . Oblasť neistoty je indikovaná pomocou B



Obr. 6: Sklenuťie poľa [6] podľa Petzvalovej ohniskovej roviny

2.3 Ostatné typy

V tejto sekcii priblížim niektoré ostatné typy aberácií šošovky. Nebudem sa im však už tak venovať ako dvom predchádzajúcim typom a skôr pôjde len o stručných dôvodoch ich vzniku a ich efektu na výsledný obraz.

2.3.1 Astigmatizmus

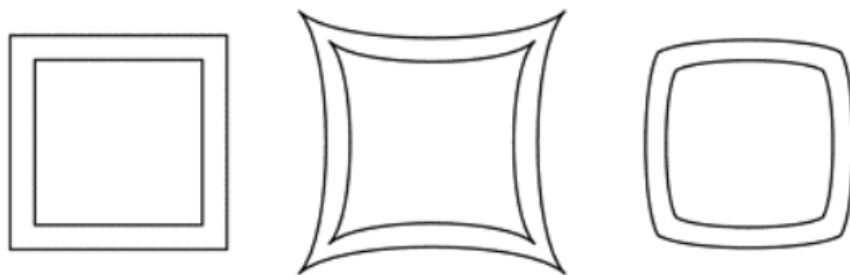
Ako bolo spomenuté pri kome, optická os má dve roviny, [1] ktoré sú na seba vzájomne kolmé. Jedna rovina je horizontálna (sagitálna) a druhá je vertikálna (meridoriálna). Každá rovina produkuje svoj vlastný ohniskový bod, ktorý podľa pozície snímaného objektu vzhľadom na danú os, má rozdielnú pozíciu. Týmto pádom vzniká oblasť nepresnosti a je náročné tento typ aberácie odstrániť.

2.3.2 Sklenuťie poľa

V systéme bez šošovkových aberácií [6] existuje presná korešpondencia medzi bodmi na objekte a bodmi na ohniskovej rovine. Sklenuťie poľa opisuje vzdialenosť ohniskovej roviny od paraxiálnej obrazovej roviny. Vychádza z faktu že obraz plochej objektovej roviny sa stane zakrivený a nezodpovedá obrazovej rovine. Toto zakrivenie je paraboloidné a zodpovedá Petzvalovému ohniskovému povrchu, pomenovanom podľa maďarského matematika Josepha Maxa Petzvala.

2.3.3 Skreslenie obrazu

Na ideálnej fotografii [6] by boli rozmery objektu na obraze lineárne súvisiace s rozmermi objektu v reálnom svete. V skutočnosti však toto neplatí a tento efekt sa nazýva skreslenie obrazu. Toto skreslenie môže byť negatívne alebo pozitívne podľa toho či sú rozmery objektu na fotografii menšie alebo väčšie od lineárne závislej hodnoty. Ak je skreslenie pozitívne nastáva vankúšové skreslenie a keď je negatívne vzniká barelové skreslenie.



Obr. 7: Skreslenie obrazu [3] Zľava-doprava: obraz bez skreslenia, vankúšové skreslenie, barelové skreslenie

3 Chromatické aberácia

Pri výpočte prechodu lúču [6] pri prechode medzi dvoma typmi materiálov sa používa index lomu. Absolútny index lomu sa počíta ako rýchlosť svetla vo vákuu delená rýchlosťou svetla v prostredí, do ktorého svetlo vstupuje. Na vypočítanie indexu lomu medzi dvoma materiálmi sa môže použiť aj relatívny index lomu, ktorý sa počíta ako index lomu prvého materiálu delený indexom lomu druhého materiálu. Index lomu je ešte závislý aj od vlnovej dĺžky svetla.

Keďže index lomu [6] závisí od vlnovej dĺžky svetla, rozdielne farebné lúče cestujú materiálom rozdielnymi cestami a nastáva chromatická aberácia. Krátke vlnové dĺžky majú vyšší index lomu ako dlhé vlnové dĺžky. Závislosť medzi vlnovou dĺžkou a indexom lomu sa dá vyjadriť pomocou Cauchyho rovnice, ktorá je zvyčajne písaná ako nekonečná rada ale pre dostatočnú presnosť stačí aj dvoj-prvková verzia rovnice:

$$n(\lambda) = G + \frac{H}{\lambda^2}.$$

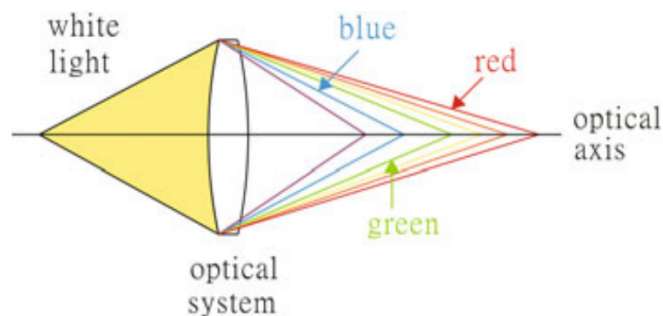
Nasledujúca tabuľka znázorňuje koeficienty pre Cauchyho rovnicu pre šesť najpoužívanějších optických materiálov.

Keďže paraxiálne rovnice [6] na sledovanie lúčov sú všetky závislé na indexe lomu, kardinálne body optického musia teda závisieť aj od vlnovej dĺžky. Osová chromatická aberácia je rozdiel vo vzdialenosti medzi pozíciou obrazu a ohniskovým bodom určenej vlnovej dĺžky. Ak sú lúče s krátkou vlnovou dĺžkou (červené) zaostrené, na rozdiel od lúčov s dlhou vlnovou dĺžkou, výsledná chromatická aberácia sa nazýva negatívna alebo podupravená.

Obraz osového bodu [6] pri existencii chromatickej aberácie má tvar svetlej strednej bodky obklúčenej svetelným kruhom. Lúče svetla, ktoré sú zaostrené tvoria svetlú bodku zatiaľčo lúče svetla, ktoré nie sú zaostrené tvoria svetelný lúč. Preto v negatívnom vizuálnom

| Materiál | G | H(μm^2) |
|-------------------------------|--------|----------------------|
| kremené sklo (silica) | 1.4580 | 0.00354 |
| borosilikátové sklo BK7 | 1.5046 | 0.00420 |
| tvrdé korunové sklo K5 | 1.5220 | 0.00459 |
| báriové korunové sklo BaK4 | 1.5690 | 0.00531 |
| báriové pazúrikové sklo BaF10 | 1.6700 | 0.00743 |
| husté pazúrikové sklo SF10 | 1.7280 | 0.01342 |

Tabuľka 1: Koeficienty [6] pre Cauchyho rovnicu



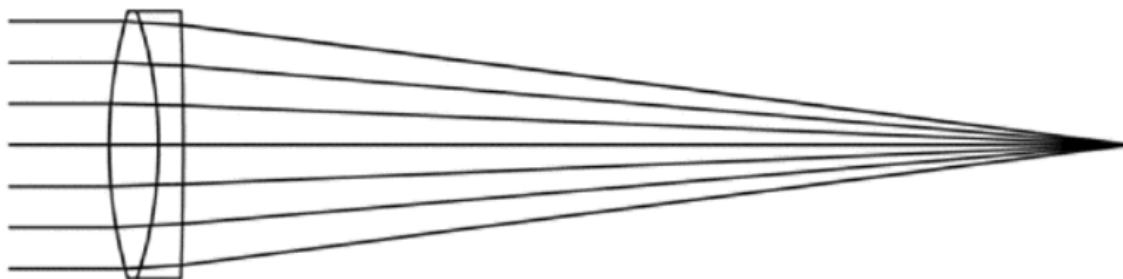
Obr. 8: Chromatická aberácia [6] Priesek optického systému pri chromatickej aberácii.

prístroji má obraz žltú bodku (tvorenú oranžovými, žltými a zelenými lúčmi) a fialový svetelný kruh (tvorenú fialovými a modrými lúčmi). Ak je plocha na ktorú sa sníma obraz posunutá bližšie ku systému bodka sa stane modrá a ak je posunutá ďalej od systému stane sa červená. Ak pri tvorbe obrázku majú rozdielne farby majú rozdielne veľkosti, prípadne sa bod mimo osi zmení na dúhu, volá sa to bočná farebná aberácia alebo chromatický rozdiel priblíženia.

Variácia optického lomu [6] s vlnovou dĺžkou tiež vytvára variácie ostatných monochromatických aberácií. Keďže tieto aberácie vznikajú kvôli spôsobu odrazu lúčov v optickom systéme, každá vlnová dĺžka bude mať rozdielnú úroveň monochromatických aberácií.

4 Riešenie problému

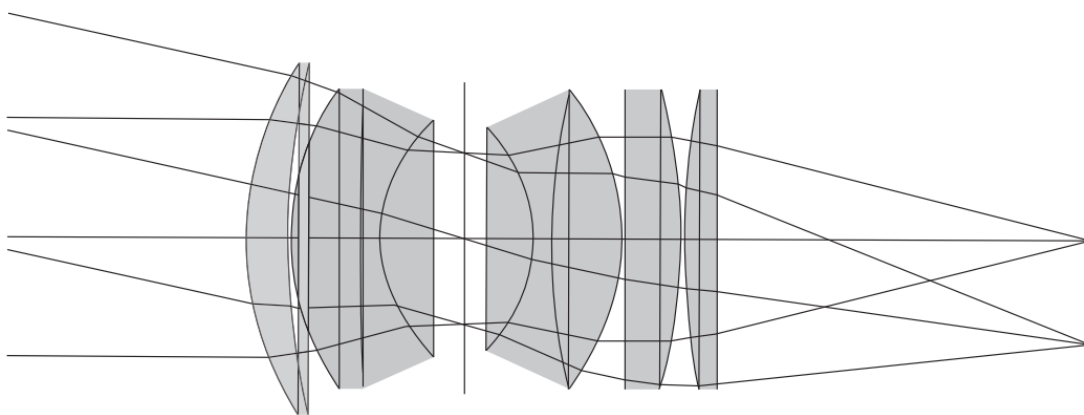
Pri jednoduchšej tenkej šošovke [7] nikdy nevznikne na obraze perfektný obraz zdrojového bodu kvôli sférickej aberácii. Pri následnom zvýšení uhlu dopadu sa obraz stáva ešte viac skreslený ostatnými aberáciami. O týchto aberáciách vedeli už výrobcovia teleskopov v 18. storočí a rovnako vedeli že sférická a chromatická aberácia vie byť napravená (zredukovaná do dostatočne malej podoby) kombinovaním dvoch šošoviek so sférickými povrchmi. Prvá pozitívna šošovka bola tvorená z korunového skla a druhá negatívna z pazúrikového skla. Takto spojené šošovky tvorili achromatický dublet. Zvyčajne boli tieto šošovky spojené tenkou vrstvou abietínu (druh živcového oleja) a tvorili takzvanú cementovaný dublet. Achromatický dublet sa stal základným kameňom pri tvorbe šošoviek v nasledujúcich rokoch avšak je len prvým krokom ku tvorbe moderných šošoviek v aktuálnych kamerách.



Obr. 9: Achromatický dublet [8] Základný kameň pri riešení aberácií

Výrazný posun vpred [7] nastal pri tvorbe Gaussového achromatu, ktorý nadizajnoval C.F.Gauss. Gaussov achromat je dublet delený vzduchom tvorený kladným meniskusom a následne záporným meniskusom. Tento achromat dokázal zmenšiť aberácie ešte viac ako predtým. Ďalším krokom bolo spojiť tieto dva achromaty za sebou a tak získať kamerové šošovky s krátkou ohniskovou dĺžkou. Neskorší vývoj pridal do tohoto dizajnu ďalšie elementy, ktoré výraznejšie obmedzili aberácie. Výsledok boli *dvojité Gaussove šošovky*, ktoré sa následne stali základom pre pevne zamerané kamery.

Dvojité Gaussove šošovky [7] boli vynájdené v skorých rokoch 20. storočia. Umožňuje lúčom troch rôznych farieb prísť na rovnaké miesto na obraze. Tieto lúče môžu mať ľubovoľnú vlnovú dĺžku a prichádzajú z rovnakej strany. Toto dokážu spraviť pre lúče, ktoré prichádzajú do kamery pod uhlom, ktorý sa nachádza v zornom poli kamery. Tieto lúče sa následne premietajú na ohniskovú rovinu bez skreslenia obrazu. Nastaviť šošovky do takéhoto zostavenie nieje vôbec jednoduché, pretože žiadame od systému šošoviek niečo, čo nieje pre ne prirodzené. Pred vznikom anti-reflexných vrstiev bol tento dizajn najďalej ako sme vedeli zájsť v problematike riešenia aberácií.



Obr. 10: Dvojité Gaussove šošovky [7] s ohniskovou dĺžkou 50 mm a clonovým číslom F/2

Zdroje

- [1] Möller, K. D.: *Optics*. Springer New York, druhé vydání, 2007, ISBN 978-0-387-69492-4.
- [2] Malý, P.: *Optika*. Karolinum, první vydání, 2008, ISBN 978-80-246-1342-0.
- [3] James, J.: *Spectrograph Design Fundamentals*. Cambridge University Press, 2007, ISBN 9781107405486.
- [4] Microcourses: *Spherical Aberration*. 2022, Youtube video [2024-03-18].
Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=06PtwR2IKcw>
- [5] Norman, I.: *A Practical Guide to Lens Aberrations*. <https://www.lonelyspeck.com/a-practical-guide-to-lens-aberrations-and-the-lonely-speck-aberration-test>, 2015, [cit. 2024-03-28].
- [6] Lin, P. D.: Ray Aberrations. In *Advanced Geometrical Optics, Progress in Optical Science and Photonics*, ročník/vydanie 4, Springer, 2016, ISBN 9789811022982, s. 167–183.
- [7] James, J. F.: Cameras and camera lenses. In *An Introduction to Practical Laboratory Optics*, United States: Cambridge University Press, 2014, ISBN 9781107687936, s. 43–56.
- [8] Riedl, M. J.: *Optical Design - Applying the Fundamentals*. SPIE, 2009, ISBN 9780819477996.