1

Dôkaz nebezkontextovosti pomocou PL

Obmenená veta PL pre BKJ:

$$\left[\forall k \in \mathbb{N}^+ : \exists_z \in \Sigma^* : z \in L \wedge |z| \geq k \wedge (\forall u,v,w,x,y \in \Sigma^* : z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \notin L)\right] \Rightarrow L \notin \mathcal{L}_2$$

Dôkaz, že $L_{prime} = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ je prvočíslo}\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a,b\}$ je nebezkontextový pomocou PL:

- Prvočísla sú čísla, ktoré majú len 2 prirodzené delitele a to 1 a seba samého. Tieto 2 delitele sa nemôžu rovnať a preto 1 nieje prvočíslo.
- Všetky prirodzené čísla, ktoré niesú prvočísla, sa dajú zapísať ako súčin prvočísel a volajú sa zložené čísla

$z = a^k$, pričom k je prvočíslo

$u = a^m$

$v = a^p$

$w = a^n$, pričom $m+n+o = \alpha$, $k-r-p = \alpha$, $p+r > 0$

$x = a^r$

$y = a^o$

$i = \alpha$

$|uv^\alpha w x^\alpha y| = \alpha + \alpha p + \alpha r = \alpha \cdot (1+p+r)$

$1+p+r > 1$, keďže $p+r > 0$ a teda $uv^\alpha w x^\alpha y \notin L_{prime}$

Dĺžka tohto reťazca nikdy nebude prvočíslo ak $\alpha > 1$. Preto je potrebné skontrolovať aj tieto krajné prípady

---

$\alpha = 0$, $p+r = k$

$i = 2$

$|uv^2 w x^2 y| = 2p + 2r = (p+r) + (p+r) = 2k$

$2k$ nemôže byť prvočíslo, keďže je párne (sudé)

Teda $uv^2 w x^2 y \notin L_{prime}$

$\alpha = 1$, $p+r = k-1$

$i = k+1$

$|uv^{k+1} w x^{k+1} y| = 1 + (k+1)p + (k+1)r = 1 + (k+1)(p+r) = 1 + (k+1)(k-1) =$

$= \cancel{1} + k^2 \cancel{-k} \cancel{+k} \cancel{-1} = k^2$

k^2 nemôže byť prvočíslo, pretože ho vieme zapísať ako súčin prvočísel, teda $k \cdot k$. Preto $uv^{k+1} w x^{k+1} y \notin L_{prime}$

Po vyriešení aj krajných prípadov vieme pomocou obmenenej vety PL pre BKJ zaručiť, že $\underline{L_{prime} \notin \mathcal{L}_2}$

② $L_{BKG} = \{<M>\#<G> : M \text{ je TS}, G \text{ je BKG}, L(G) \subseteq L(M)\}$ $\Sigma = \{0,1,\#\}$

Dôkaz, že daný jazyk nieje ani čiastočne rozhodnuteľný pomocou redukcie na co-HP:

co-HP $\preceq L_{BKG}$ $\quad \sigma : \{0,1,\#\}^* \to \{0,1,\#\}^*$

$\sigma(<M>\#<w>) = <M'>\#<G'>$

Ak σ nevalidnú inštanciu $<M>\#<w>$ vráti reťazec $<M'>\#<G'>$, kde $L(M) = \emptyset$ a $L(G) = \Sigma^*$.

Inak vráti $<M'>\#<G'>$ také, že gramatika G' bude zafixovaná aby $L(G') = \Sigma^*$ a chovanie M' nad abecedou $\Sigma = \{0,1\}$ bolo následovné:

1. Vygeneruje pseudonáhodné pozitívne prirodzené číslo α pomocou svojho vstupu w'.
2. Spustí α krokov simulácie M nad w.
3. Ak simulácia stihne skončiť do α krokov tak odmieta.
4. Ak simulácia nestihne skončiť tak prijíma.

ak $<M>\#<w> \in$ co-HP tak pre hocijaké zvolené α bude stroj vždy cykliť a teda $L(M') = \Sigma^*$ a $L(G')$ bude Σ^* a teda $L(G') \subseteq L(M')$

ak $<M>\#<w> \notin$ co-HP tak $L(M') = \{w \in \Sigma^* \mid \text{počet krokov pre prijatie automatom } M' > \alpha\}$ a $L(G')$ je Σ^*, čiže $L(G') \not\subseteq L(M')$.

Keďže sa jazyk L_{BKG} dá redukovať do co-HP, tak z toho jasne vyplýva že tento jazyk nieje ani čiastočne rozhodnuteľný.

③

a) bijekciu medzi V a $\mathbb{N}$ dokážem pomocou zobrazenia

$f(x) = v$, $x \in \mathbb{N}$ a $v \in V$

Pre označenie vrcholu budem používať kódovanie $v = a \cdot b$.

b názov rodiča

$a = (l + p)$

l je ľavý potomok

p je pravý potomok

Prakticky to je napr. ľavý potomok koreňa : lr a
pravý potomok ľavého potomku koreňa : plr

Priraďovanie vrcholov do $f(x)$:

$A_0 = \{r\}$

$f(0) = r$

$A_1 = \{lr, pr\}$

$f(1) = lr$, $f(2) = pr$

$A_2 = \{llr, lpr, plr, ppr\}$

$f(3) = llr$, $f(4) = lpr$, $f(5) = plr$, $f(6) = ppr$

$\vdots$

$A_n = \{ l \cdot A_{n-1} + p \cdot A_{n-1} \}$

Každý člen množiny A_n priradíme k zobrazeniu $f(x)$ pričom x je doteraz nepoužité prirodzené číslo.

Takto vieme priradiť každý vrchol úplného binárneho stromu k nejakému prirodzenému číslu, čo ukazuje že množina V je spočetne konečná.

b)

1. Vytvorím si tabuľku zafarbení vrcholov v každom strome

	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	...
T_0	$a_{0,0}$	$a_{1,0}$	$a_{2,0}$	
T_1	$a_{0,1}$	$a_{1,1}$	$a_{2,1}$	...
T_2	$a_{0,2}$	$a_{1,2}$	$a_{2,2}$	
⋮	⋮			⋱

$$a_{n,m} \begin{cases} \text{black} & \text{- ak } c(f(n)) = \text{black v } T_m \text{ strome} \\ \text{red} & \text{- ak } c(f(n)) = \text{red v } T_m \text{ strome} \end{cases}$$

Vytvorím nový strom $T_{new} = (V_n, E_{Ln}, E_{Rn})$ kde $V_n \in \mathbb{N}: c_{T_{new}}(f(n)) \neq a_{n,n}$

Tento nový strom bude odlišný od každého iného stromu z nekonečna zafarbení minimálne v zafarbení jedného vrcholu na diagonále.

Týchto stromov vieme vytvoriť nekonečne veľa už k predtým vytvorenému nekonečnu zafarbení stromov.

Týmto vieme dokázať že množina zafarbených stromov je nespočetne nekonečná.

4. Pomocné množiny :

N_t :

Vstup: BKG $G = \{N, \Sigma, P, S\}$

Výstup: N_t

Metóda:

1. $N_t^0 = \emptyset$
2. for $\{i=1; i>0, i{+}{+}\}$
3. $N_t^i = N_t^{i-1} \cup \{ A \in N \mid \exists (A, \alpha) \in P : \alpha \in (N_t^{i-1} \cup \Sigma \cup \varepsilon)^* \}$
4. if $N_t^i == N_t^{i-1}$
5. return N_t^i

N_{za} - Neterminály, ktoré sa môžu začínať terminálom a

Vstup: BKG $G = \{N, \Sigma, P, S\}$, N_ε, N_t, $a \in \Sigma$

Výstup: $N_{za} = \{ A \in N \mid A \overset{+}{\underset{G}{\Rightarrow}} a\alpha : \alpha \in (N_t \cup \Sigma)^* \}$

Metóda:

1. $N_{za}^0 = \emptyset$
2. for $\{i=1; i>0, i{+}{+}\}$
3. $N_{za}^i = N_{za}^{i-1} \cup \{ A \in N \mid \exists (A, \beta Z (N_t \cup \Sigma)^*) \in P : \beta = (N_\varepsilon)^* \wedge$
   $Z = (N_{za}^{i-1} \cup a)$
4. if $N_{za}^i == N_{za}^{i-1}$
5. return N_{za}^i

N_{ka} – Neterminály, ktoré sa môžu končiť terminálom a

Vstup: BKG $G = \{N, \Sigma, P, S\}$, N_ε, N_t, $a \in \Sigma$

Výstup: $N_{ka} = \{A \in N \mid A \overset{+}{\underset{G}{\Rightarrow}} \alpha a : \alpha \in (N_t \cup \Sigma)^*\}$

Metóda:

1. $N_{ka}^0 = \emptyset$
2. for $\{i = 1; i > 0, i{+}{+}\}$
3. $N_{ka}^i = N_{ka}^{i-1} \cup \{A \in N \mid \exists (A, (N_t \cup \Sigma)^* K \beta) \in P : \beta = (N_\varepsilon)^* \wedge$
   $K = (N_{ka}^{i-1} \cup a)$
4. if $N_{ka}^i == N_{ka}^{i-1}$
5. return N_{ka}^i

Algoritmus na spočítanie množiny $_aN_a$:

Vstup: BKG $G = (N, \Sigma, P, S)$, N_t, N_ε, N_{za}, N_{ka}, $a \in \Sigma$

Výstup: $_aN_a = \{A \in N \mid \exists w \in \Sigma^* : A \overset{+}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \wedge \exists u \in \Sigma^* : w = aua\}$

Metóda:

1. $_aN_a^0 = \{A \in N \mid \exists (A \rightarrow \beta Z (N_t \cup \Sigma)^* K \beta \in P : \beta = (N_\varepsilon)^* \wedge Z = (N_{za} \cup a) \wedge$
   $K = (N_{ka} \cup a)\}$
2. for $\{i = 1; i > 0; i{+}{+}\}$
3. $_aN_a^i = \{A \in N \mid \exists (A \rightarrow \beta Z (_aN_a^{i-1}) K \beta \in P : \beta = (N_\varepsilon)^* \wedge Z = (N_{za} \cup a)^* \wedge$
   $K = (N_{ka} \cup a)^*\} \cup {}_aN_a^{i-1}$
4. if $_aN_a^i == {}_aN_a^{i-1}$
5. return $_aN_a^i$

Demonštrácia na gramatike s pravidlami:

P:

$S \to aWU \mid UWa$

$W \to YacU \mid Xa$

$Y \to X \mid \varepsilon$

$X \to aXa$

$U \to bcaYY \mid Ucb$

$N_\varepsilon = \{Y\}$

$N_t^0 = \emptyset$

$N_t^1 = \{Y\}$

$N_t^2 = \{Y, U\}$

$N_t^3 = \{Y, U, W\}$

$N_t^4 = \{Y, U, W, S\}$

$N_t^5 = \{Y, U, W, S\}$

$N_t = \{Y, U, W, S\}$

$N_{za}^0 = \emptyset$

$N_{za}^1 = \{S, W\}$

$N_{za}^2 = \{S, W\}$

$N_{za} = \{S, W\}$

$N_{ka}^0 = \emptyset$

$N_{ka}^1 = \{S, U\}$

$N_{ka}^2 = \{S, U\}$

$N_{ka} = \{S, U\}$

$aN_a^0 = \{S, W\}$

$aN_a^1 = \{S, W\}$

$aN_a = \{S, W\}$