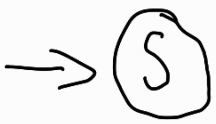
1. $L_1 = \{ww^R \mid w \in (a,b,c)^*\}$

$L_2 = \{w \mid w \in (a,b,c)^* \wedge \#a(w) \bmod 2 = \#b(w) \bmod 2 = 1\}$

$L_1 \cap L_2 = \emptyset \; , \; \emptyset \in \mathcal{L}_3$

automat pre prázdnu množinu:



Prienik L_1 a L_2 je prázdny, pretože sa podmienky vzniku slova pre každý jazyk priamo vyvracajú. To, že slovo v jazyku L_1 sa skladá vždy z náhodnej kombinácie znakov abecedy a následne z reverzie tejto kombinácie značí, že slovo v jazyku L_1 bude mať vždy párny (sudý) počet znaku "a" alebo "b". Toto je v priamom konflikte s pravidlami pre L_2, kde musí byť počet znaku "a" alebo "b" vždy nepárny (lichý).

Dôkaz pre neregularitu $L_1 \cup L_2$ pomocou PL:

1. $(\forall k>0 : \exists w \in \Sigma^* : w \in L \wedge |w| \geq k \wedge \forall x,y,z \in \Sigma^* : xyz = w \wedge |y|>0 \wedge |xy| \leq k \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N} : xy^iz \notin L) \Rightarrow \Rightarrow L \notin \mathcal{L}_3$

2. Keďže uvažujeme ľubovoľné $k>0$ zvolíme slovo
$w = a^k b^k b^k a^k$

3. Rozdelíme slovo w na x,y,z:
$x = a^{\alpha_1}$
$y = a^{\alpha_2}$
$z = a^{k-\alpha_1-\alpha_2} b^k b^k a^k$

pričom:
$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$
$\alpha_2 > 0$
$\alpha_1 + \alpha_2 \leq k$

4. Zvolíme si i napr. $i=2$

5. Kontrolujeme slovo $w' = xy^2z$
$w' = a^{\alpha_1} \cdot a^{2\alpha_2} \cdot a^{k-\alpha_1-\alpha_2} b^k b^k a^k$
$w' = a^{k+\alpha_2} b^k b^k a^k$

6. Dôkaz, že w' nepatrí do jazyka L_1:

a) Vieme že $\alpha_2 > 0$, takže $a^{k+\alpha_2} \neq a^k$

b) Tým pádom $(a^{k+\alpha_2} b^k)^R \neq b^k a^k$

c) Preto slovo nesplňuje podmienku jazyka L_1 a nepatrí do neho

7. Dôkaz, že w' nepatrí do jazyka L_2:

a) $b^k b^k = b^{2k}$

b) $\forall k \in \mathbb{N} : 2k \bmod 2 = 0$

c) Preto slovo nesplňuje podmienku jazyka L_2 a nepatrí do neho

8. Keď slovo w' nepatrí ani do jazyka L_1 ani do L_2, tak nemôže patriť ani do $L_1 \cup L_2$ a teda pomocou PL vieme dokázať, že $\underline{L_1 \cup L_2 \notin \mathcal{L}_3}$

2.

$L_3 = \{puvw \mid p, v \in \{a,b\}^*; u, v \in \{c,d\}^*, (p = v^R \vee u = w^R)\}$

a) $G_3 = (N, \Sigma, P, S_0)$

$N = \{S, A, B, X, Y\}$

$\Sigma = \{a, b, c, d\}$

$S_0 = S$

$P: S \rightarrow aAaX \mid bAbX \mid YcBc \mid YdBd \mid \varepsilon$

$A \rightarrow aAa \mid bAb \mid X$

$B \rightarrow cBc \mid dBd \mid Y$

$X \rightarrow cX \mid dX \mid \varepsilon$

$Y \rightarrow aY \mid bY \mid \varepsilon$

Pri tvorbe slova nás zaujíma len dodržanie jednej z podmienok tvorby jazyka. To nám umožňuje zostaviť BKG, ktorá má kapacitu zaistiť len 1 podmienku naraz. Po zaistení tej podmienky môže byť zvyšok slova náhodný.

b) Zostavenie zásobníkového automatu podľa analýzy zhora-nadol)

1. Pri zostavení automatu využijeme gramatiku G_3, ktorú sme si vytvorili v predchádzajúcom kroku.

2. Zostavovaný automat bude mať len 1 stav, žiadne koncové stavy a bude končiť vyprázdnením zásobníku

3. $Z_3 = (\{q\}, \Sigma, N \cup \Sigma, \delta, q, z_0, \emptyset)$

$\Sigma = \{a, b, c, d\}$

$N = \{S, A, B, X, Y\}$

$z_0 = S$

$\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, aAaX), (q, bAbX), (q, YcBc),$
$(q, YdBd), (q, \varepsilon)\}$

$\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, aAa), (q, bAb), (q, X)\}$

$\delta(q, \varepsilon, B) = \{(q, cBc), (q, dBd), (q, Y)\}$

$\delta(q, \varepsilon, X) = \{(q, cX), (q, dX), (q, \varepsilon)\}$

$$\delta(q,\varepsilon,Y) = \{(q,aY),(q,bY),(q,\varepsilon)\}$$

$$\delta(q,a,a) = \{(q,\varepsilon)\}$$

$$\delta(q,b,b) = \{(q,\varepsilon)\}$$

$$\delta(q,c,c) = \{(q,\varepsilon)\}$$

$$\delta(q,d,d) = \{(q,\varepsilon)\}$$

3.

a) $\exists L_1 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$ taký, že $\overline{L_1} \in \mathcal{L}_{FIN}$

výrok neplatí

Bezkontextové jazyky sú uzatvorené na doplnok a teda aj ich doplnok je BKJ. BK jazyky nemôžu byť konečné

b) $\exists L_1 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$ taký, že $\forall L_2 \in \mathcal{L}_3 : L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$

výrok neplatí

protipríklad: $L_2 = \emptyset$

$\emptyset \cap L_1 = \emptyset$

$\emptyset$ je regulárny jazyk. Tým pádom pre každý BKJ bude aspoň jeden RJ ($\emptyset$), pre ktorý nebude výrok platiť.

c) $\exists L_1 \in \mathcal{L}_3$ taký, že $\forall L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3 : L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$

výrok platí

napr. $L_1 = \Sigma^*$

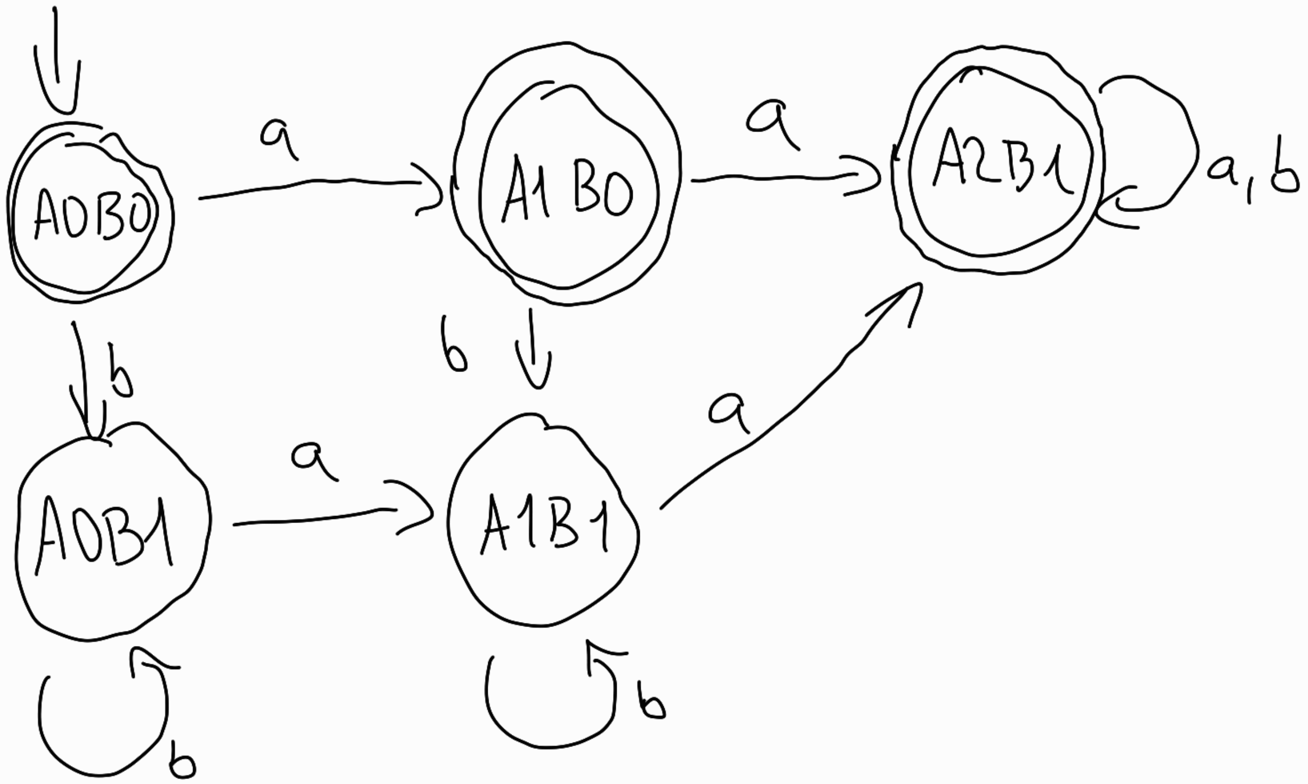
$\Sigma^* \cap L_2 = L_2$

L_2 je $\mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$ jazyk

4. $L = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \#a(w) \geq 2 \vee \#b(w) = 0 \}$

1. Vytvoríme reláciu prefixovej ekvivalencie $\sim_L$

a) Vytvoríme úplný deterministický konečný automat



b) Skontrolujeme či je automat minimálny

		a	b
I	A0B1	I	I
	A1B1	II	I
II	A0B0	II	I
	A1B0	II	I
	A2B1	II	II

		a	b
I	A0B1	II	I
II	A1B1	IV	II
III	A0B0	III	I
	A1B0	IV	II
IV	A2B1	IV	IV

Kategória III sa rozdelí a vznikne 5 kategórií, ktoré sa už nemajú ako rozdeliť. Keďže počet stavov v automate sa tiež rovná 5 tak už vieme že automat je minimálny

c) Pre každý stav v automate vytvoríme triedu rozkladu. Keďže vieme že automat je minimálny, tak aj vytvorená kongruencia bude určite prefixová ekvivalencia $\sim_L$.

$$\forall u,v \in \Sigma^*: u \sim_L v \Leftrightarrow (\#a(u) = \#a(v) = \#b(u) = \#b(v) = 0)$$
$$\vee ((\#a(u) = \#a(v) = 0) \wedge (\#b(u) = \#b(v) > 0))$$
$$\vee ((\#a(u) = \#a(v) = 1) \wedge (\#b(u) = \#b(v) = 0))$$
$$\vee ((\#a(u) = \#a(v) = 1) \wedge (\#b(u) = \#b(v) > 0))$$
$$\vee ((\#a(u) = \#a(v) > 1) \wedge (\#b(u) = \#b(v) > 0))$$

2. Tvorba pravej kongruencie $\sim$, ktorá je sjednotením niektorých tried rozkladu $\Sigma^*/\sim$ a jej index je o 1 väčší ako $\sim_L$.

a) Skopírujeme $\sim_L$ ale poslednú triedu rozkladu rozdelíme na 2

$\forall u,v \in \Sigma^*: u \sim v \Leftrightarrow (\#a(u) = \#a(v) = \#b(u) = \#b(v) = 0)$

$\vee ((\#a(u) = \#a(v) = 0) \wedge (\#b(u) = \#b(v) > 0))$

$\vee ((\#a(u) = \#a(v) = 1) \wedge (\#b(u) = \#b(v) = 0))$

$\vee ((\#a(u) = \#a(v) = 1) \wedge (\#b(u) = \#b(v) > 0))$

$\vee ((\#a(u) = \#a(v) = 2) \wedge (\#b(u) = \#b(v) > 0))$

$\vee ((\#a(u) = \#a(v) > 2) \wedge (\#b(u) = \#b(v) > 0))$

Táto pravá kongruencia $\sim$ sa skladá z niektorých tried rozkladu $\Sigma^* / \sim$ a má presne o 1 väčší index ako $\sim_L$