

# РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Маслов Артём

Симанкович Александр

Б01-104

01.12.2022

## Аннотация

В работе исследуется резонанс напряжений в последовательном колебательном контуре. Измеряются амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики, определяются основные параметры контура.

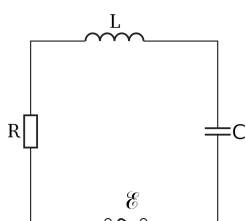
**Ключевые слова:** последовательный колебательный контур, резонанс, АЧХ, ФЧХ, добротность, коэффициент затухания, постоянная времени.

## Теория

### Уравнение колебательного контура

При рассмотрении физических процессов в электрических цепях используются следующие предположения. Во-первых, все элементы электрической цепи считаются *идеальными*. Предполагается, что у катушек индуктивности и конденсаторов нет омического сопротивления, источник напряжения обладает нулевым сопротивлением, а источник тока бесконечно большим, и т.д. Такое представление упрощает анализ физических процессов в электрических цепях. Если же такие предположения вносят большую погрешность, то в схему добавляются дополнительные идеальные элементы, которые учитывают особенности физических процессов в конкретных случаях.

Во-вторых, рассматриваются *квазистационарные процессы*. Известно, что электромагнитные колебания распространяются с конечной скоростью. В данной работе рассматриваются такие электрические цепи, в которых время установления электромагнитных колебаний пренебрежимо мало.



Рассмотрим последовательный колебательный контур без источника ЭДС (рис. 1). Пусть напряжение на конденсаторе меняется по закону  $U = U(t)$ . Тогда, согласно второму правилу Кирхгофа, сумма падений напряжений равна 0:

$$L \frac{dI}{dt} + U + RI = 0$$

Рис. 1: Последовательный колебательный контур

Ток через конденсатор определяется из соотношения

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt}$$

Тогда получим дифференциальное уравнения второго порядка, описывающее *свободные колебания* в линейной системе:

$$LC \frac{d^2 U}{dt^2} + RC \frac{dU}{dt} + U = 0$$

Данное уравнение можно переписать в виде:

$$\ddot{U} + 2\gamma \dot{U} + \omega_0^2 U = 0$$

где введены обозначения  $\gamma = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – собственная частота колебательной системы,  $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$  – период собственных колебаний.

Найдём решение однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$D_1 = \frac{D}{4} = \gamma^2 - \omega_0^2$$

В зависимости от знака дискриминанта квадратного уравнения возможны три случая.

1. *Затухающие колебания.*

Рассмотрим случай, когда  $D_1 < 0$ . Тогда  $0 < \gamma < \omega_0$ , что эквивалентно

$$0 < R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{\text{кр}}$$

Сопротивление  $R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  называется критическим, а  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  – волновым.

В рассматриваемом случае характеристическое уравнение имеет два комплексных корня

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Величину  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  называют частотой свободных колебаний. Решением уравнения будет

$$U(t) = U_1 \cdot e^{-\gamma t} \cdot e^{-j\omega t} + U_2 \cdot e^{-\gamma t} \cdot e^{j\omega t}$$

где  $U_1$  и  $U_2$  – произвольные постоянные.

Полученное уравнение можно представить в виде

$$U(t) = U_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Данное уравнение является гармоническим с фазой  $\omega t + \varphi_0$  и экспоненциально убывающей амплитудой  $U_0 e^{-\gamma t}$ .

График зависимости напряжения от времени представлен на рисунке 2.

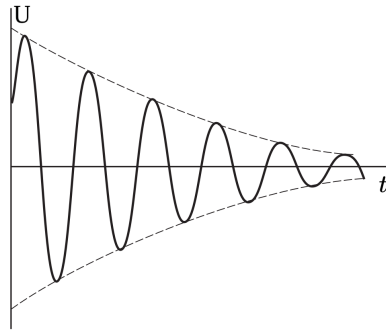


Рис. 2: Затухающие колебания

С точки зрения математики данный колебательный процесс не периодичен. Тем не менее функция  $U(t)$  обращается в ноль или достигает экстремумов через один и тот же промежуток времени, который называю *периодом затухающих колебаний*.

## 2. Критический режим.

Рассмотрим случай, когда  $D_1 = 0$ . Тогда

$$\gamma = \omega_0$$

Характеристическое уравнение имеет один корень

$$\lambda = -\gamma$$

Решением исходного уравнения будет

$$U(t) = U_0 e^{-\gamma t}$$

где  $U_0$  — постоянная, определяемая из начальных условий.

Заметим, что данный режим физически не реализуем, так как равенство  $\gamma = \omega_0$  не может быть выполнено точно. Данный случай нужно рассматривать как переходный между затухающими колебаниями и апериодическим режимом.

## 3. Апериодический режим.

Рассмотрим случай, когда  $D_1 > 0$ . Тогда  $0 < \omega_0 < \gamma$ . Характеристическое уравнение имеет два действительных корня

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Решением дифференциального уравнения будет

$$U(t) = e^{-\gamma t} \cdot (U_1 e^{-j\omega t} + U_2 e^{j\omega t})$$

где  $U_1$  и  $U_2$  — произвольные постоянные.

## Характеристики затухающих колебаний

Важными характеристиками колебательных систем являются добротность  $Q$  и логарифмический декремент  $d$ .

Логарифм отношения амплитуд колебаний в двух последовательных максимумах называется логарифмическим декрементом

$$d = \ln \left( \frac{A_n}{A_{n+1}} \right)$$

Определив положения последовательных максимумов из формулы 1, можно получить следующее соотношение

$$d = \gamma T$$

где  $T$  – период затухающих колебаний.

*Постоянной времени затухания*  $\tau$  называется время, за которое амплитуда колебаний убывает в  $e$  раз. Коэффициент затухания и постоянная времени связаны соотношением

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

Из уравнений и следует, что логарифмический декремент можно определить как число полных колебаний  $N = \frac{\tau}{T}$  за время затухания  $\tau$ :

$$d = \frac{1}{N}$$

Добротностью колебательной системы  $Q$  называется

$$Q \equiv \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\omega}{2\gamma}$$

Чем выше добротность колебательной системы, тем меньше будут потери энергии. Докажем данное утверждение.

Амплитуда колебаний напряжение за период уменьшается в  $e^{\gamma T}$  раз. Полная энергия системы  $W$  определяется как максимальная энергия электрического поля конденсатора или магнитного поля индуктивности

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{LI^2}{2}$$

Из этого соотношения видно, что за период энергия системы уменьшается как квадрат амплитуды в  $e^{2\gamma T}$  раз. Тогда потери энергии системы равно

$$\Delta W = W(t_0) - W(t_0 + T) = (1 - e^{-2\gamma T})W(t_0)$$

Если затухание мало, то есть  $\gamma T \ll 1 \Rightarrow Q \gg 1$ , то экспоненту можно разложить по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} \Delta W &\approx 2\gamma TW \\ \frac{W}{\Delta W} &= \frac{1}{2\gamma T} = \frac{1}{2\pi} Q \end{aligned}$$

Таким образом, добротность с энергетической точки зрения определяет отношении энергии системы к потерям за период.

## Вынужденные колебания

Если в цепь последовательного колебательного контура включен гармонический источник ЭДС  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$ , то

$$\ddot{U} + 2\gamma\dot{U} + \omega_0^2 U = \frac{\varepsilon_0}{LC} \cos(\omega t)$$

Решением неоднородного дифференциального уравнения будет сумма однородного и частного решений

$$U_{\text{общ}}(t) = U_{\text{одн}}(t) + U_{\text{част}}(t)$$

Решением однородного уравнения будут затухающие колебания

$$U_{\text{одн}}(t) = U_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$U_{\text{част}}(t) = A e^{j\omega t}$$

Неоднородность уравнения в комплексной форме равна

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{LC} e^{j\omega t}$$

Подставив частное решение в исходное уравнение находим

$$U_{\text{част}}(t) = \frac{\varepsilon_0 e^{j\omega t}}{LC(\omega_0^2 + 2j\gamma\omega - \omega^2)}$$

Решением является только действительная часть, тогда

$$U_{\text{част}}(t) = \frac{\varepsilon_0}{LC} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Итого уравнением вынужденных колебаний будет

$$U(t) = U_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{\varepsilon_0}{LC} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Заметим, что амплитуда однородного решения убывает экспоненциально, а амплитуда частного решения остается постоянной. Поэтому, через большой промежуток времени, напряжение будет изменяться по закону  $U(t) \approx U_{\text{част}}(t)$ . Итого, установившимися вынужденными колебаниями будут гармонические колебания с частотой вынуждающей ЭДС.

## Резонанс в последовательном колебательном контуре

Рассмотрим последовательный колебательный контур. Пусть к нему подключен идеальный источник ЭДС, обладающий бесконечно малым внутренним сопротивлением, задающий во внешней цепи напряжение, изменяющееся по гармоническому закону  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \phi_0)$ .

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

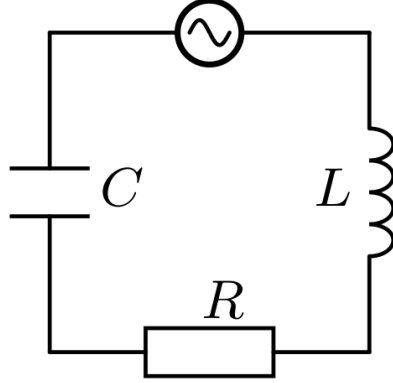


Рис. 3: Последовательный колебательный контур

Методом комплексных амплитуд определим зависимости напряжения и тока на элементах цепи:

$$\begin{aligned} U_C &= \varepsilon_0 \frac{\rho}{Z_0} \frac{\omega_0}{\omega} \cos(\omega t - \varphi_C) \\ U_L &= \varepsilon_0 \frac{\rho}{Z_0} \frac{\omega}{\omega_0} \cos(\omega t - \varphi_L) \\ I &= \frac{\varepsilon_0}{Z_0} \cos(\omega t - \varphi_I) \\ Z_0 &= R \sqrt{1 + \left[ \frac{\rho}{R} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^2} \\ \varphi_I &= \arctg \left[ \frac{\rho}{R} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \\ \varphi_C &= \varphi_I + \frac{\pi}{2} \\ \varphi_L &= \varphi_I - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Далее будем рассматривать высокочастотный колебательный контур вблизи резонансной частоты  $Q \approx \frac{\rho}{R} \gg 1$ . Тогда полученные уравнения можно упростить:

$$\begin{aligned} U_C &= \frac{Q \varepsilon_0 \omega_0}{\omega \sqrt{1 + (\tau \Delta \omega)^2}} \cos(\omega t - \varphi_C) \\ U_L &= \frac{Q \varepsilon_0 \omega}{\omega_0 \sqrt{1 + (\tau \Delta \omega)^2}} \cos(\omega t - \varphi_L) \\ I &= \frac{\varepsilon_0}{R \sqrt{1 + (\tau \Delta \omega)^2}} \cos(\omega t - \varphi_I) \\ Z_0 &= R \sqrt{1 + (\tau \Delta \omega)^2} \\ \varphi_I &= \arctg \tau \Delta \omega \end{aligned}$$

При резонансе  $\omega = \omega_0$ ,  $\Delta\omega = 0$  формулы принимают еще более наглядный вид:

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R} \cos(\omega_0 t - \varphi_I)$$

$$U_L = Q\varepsilon_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_L)$$

$$U_C = Q\varepsilon_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_C)$$

$$\varphi_I = 0$$

$$\varphi_C = \frac{\pi}{2}$$

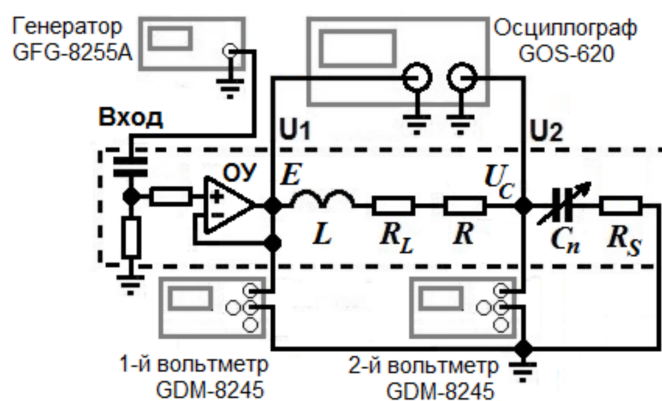
$$\varphi_L = -\frac{\pi}{2}$$

Из полученных соотношений следует, что напряжение на конденсаторе  $U_C$  отстает от внешнего тока по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ . Напряжение на индуктивности опережает внешний ток по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ .

Напряжение на конденсаторе и индуктивности в  $Q$  раз больше внешнего напряжения. Поэтому резонанс в последовательном колебательном контуре называют *резонансом напряжений*.

## Схема экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки изображена на рисунке:



Генератор синусоидального сигнала подключается к схеме через усилитель. Напряжение на входе и конденсаторе измеряется вольтметрами и осциллографом. Предполагается, что индуктивность и емкость обладают активным сопротивлением, которое учитывается резисторами  $R_L$  и  $R_S$ .

В работе исследуются амплитудно- и фазо- частотные характеристики данной схемы.

## Оборудование

1. Генератор сигналов GFG-8255A.
2. Источник напряжения
3. Последовательный колебательный контур.

4. Осциллограф GOS-620.

5. Цифровые вольтметры GDM-8245.

## Экспериментальные результаты

Для контуров с различными ёмкостями  $C_n$ , меняя их с помощью переключателя на блоке, измерим резонансные частоты  $f_0$  и напряжения  $U_C$  при установленном в напряжении  $\mathcal{E}$  на выходе генератора. Для каждого значения  $C_n$  по данным эксперимента проведем расчёт параметров стенда.

Рассчитаем средние значения  $L$  и  $R_L$  и их погрешности для использования в дальнейшем (см. таблицу 1).

	$\bar{x}$	$\sqrt{(x_i - \bar{x})^2/n}$	$\sigma_{\text{сл}}$	$\sigma$
$L$ , мкГн	992.1	5.3	4.8	5.1
$R_L$ , Ом	4.0	0.3	0.3	0.3
	$\bar{x}$	$\sqrt{(x_i - \bar{x})^2/n}$	$\sigma_{\text{сл}}$	$\sigma$
$L$ , мкГн	979.5	5.7	5.1	5.5
$R_L$ , Ом	3.7	0.3	0.3	0.3
	$\bar{x}$	$\sqrt{(x_i - \bar{x})^2/n}$	$\sigma_{\text{сл}}$	$\sigma$
$L$ , мкГн	994.8	2.2	2.0	2.8
$R_L$ , Ом	3.9	0.3	0.3	0.3

Таблица 1: Параметры катушки по трем сериям измерений

Для контуров с двумя разными ёмкостями измерим амплитудно-частотные  $U_C(f)$  и фазово-частотные  $\varphi(f)$  характеристики.

Построим графики амплитудно-частотные характеристик  $U_C(f)$  для выбранных контуров (см. рис. 4).

Построим на одном графике амплитудно-частотные характеристики в безразмерных координатах  $x = \frac{f}{f_0}$ ,  $y = \frac{U_C}{U_C(f_0)}$ . По ширине резонансных кривых на уровне  $1/\sqrt{2}$  определим добротности  $\mathcal{Q}$  соответствующих контуров:

$$\mathcal{Q}(33.2 \text{ нФ}) = 21.3 \pm 0.4$$

$$\mathcal{Q}(67.4 \text{ нФ}) = 16.0 \pm 0.3$$



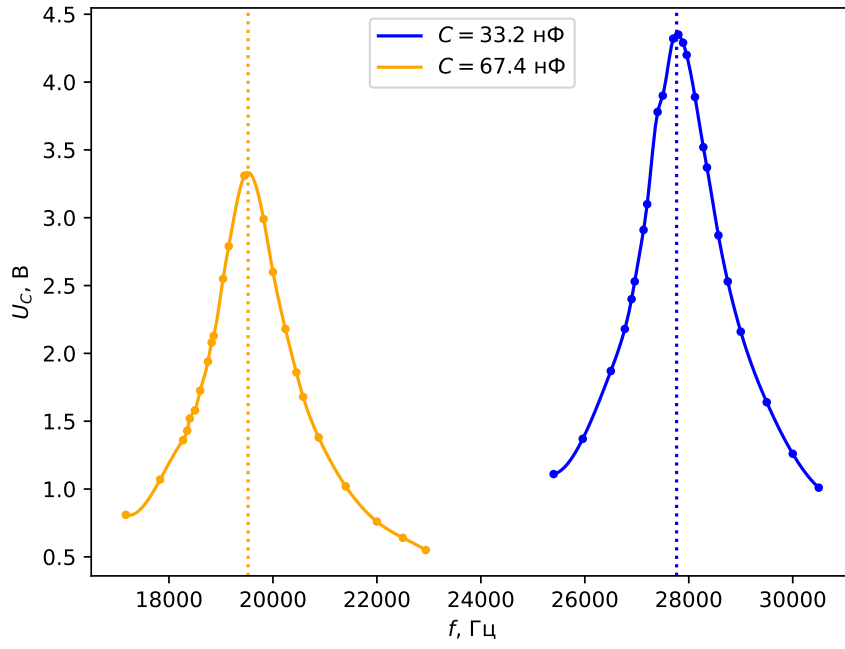


Рис. 4: Графики АЧХ

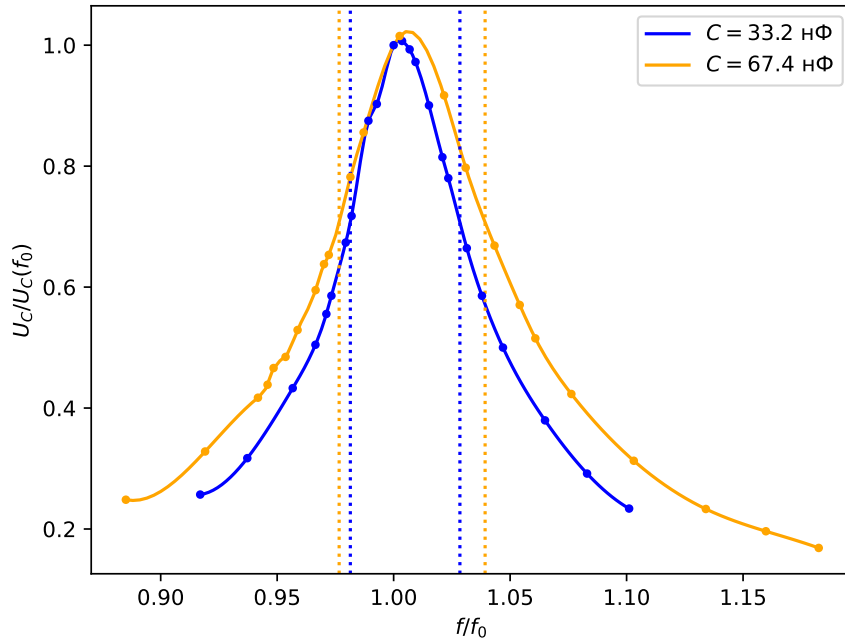


Рис. 5: Графики нормированных АЧХ

Построим на одном графике фазово-частотные характеристики в безразмерных координатах  $x = \frac{f}{f_0}$ ,  $y = \frac{\varphi}{\pi}$ . По этим характеристикам определим добротности контуров по расстоянию между точками по оси  $x$ , в которых  $y$  меняется от  $1/4$  до  $3/4$ :

$$Q(33.2 \text{ нФ}) = 19.3 \pm 0.5$$

$$Q(67.4 \text{ нФ}) = 14.5 \pm 0.3$$

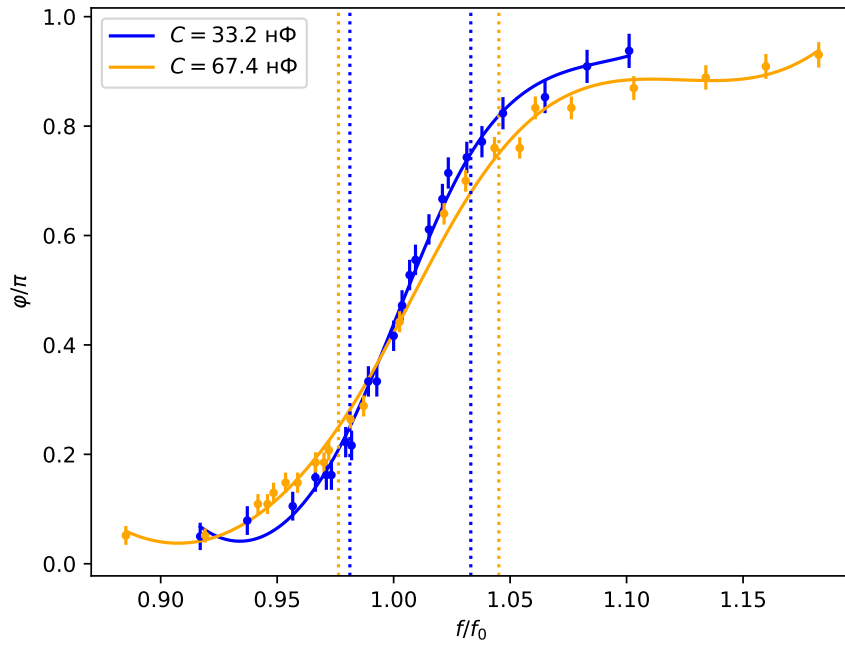


Рис. 6: Графики нормированных ФЧХ

## Обсуждение результатов и выводы

В работе было исследовано явление резонанса напряжений в последовательном контуре. Проведены измерения АЧХ и ФЧХ контура, определена добротность  $Q$  для двух значений емкости  $C$ .

$$C = 33.2 \text{ нФ} : Q_{\text{АЧХ}} = 21.3 \pm 0.4, Q_{\text{ФЧХ}} = 19.3 \pm 0.5$$

$$C = 67.4 \text{ нФ} : Q_{\text{АЧХ}} = 16.0 \pm 0.3, Q_{\text{ФЧХ}} = 14.5 \pm 0.3$$

Дальнейшие направления исследования могут затрагивать явление сдвига резонансных частот для напряжений на катушке  $L$  и конденсаторе  $C$ :<sup>1</sup>.

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2 - 1}{2Q^2}} \quad \omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}}$$

<sup>1</sup>Основы теории цепей 4-е изд., Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.И., 2013.