

Работа №26

Цифровые фильтры

Симанкович Александр
Б01-104

24 сентября 2023 г.

1. Ознакомительные шаги

Рассмотрим спектры оцифрованных сигналов.

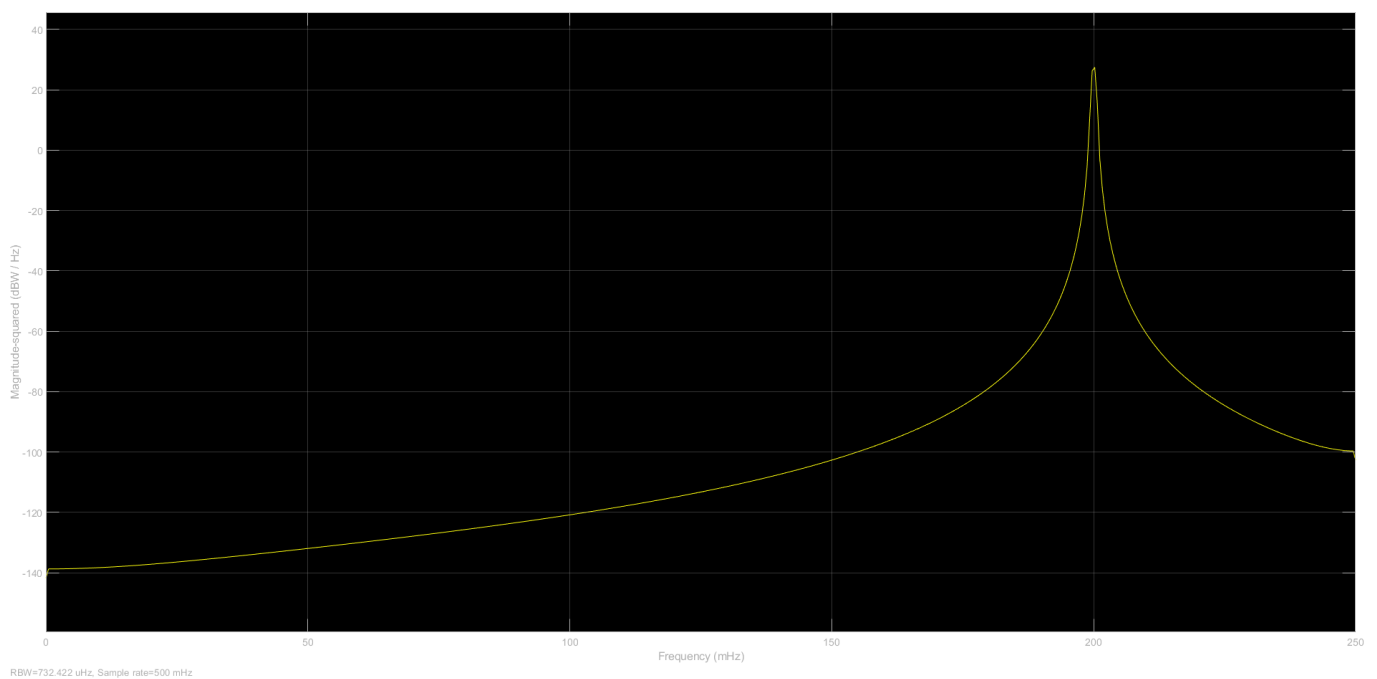


Рис. 1: Спектр оцифрованного синусоидального сигнала: с дециматором

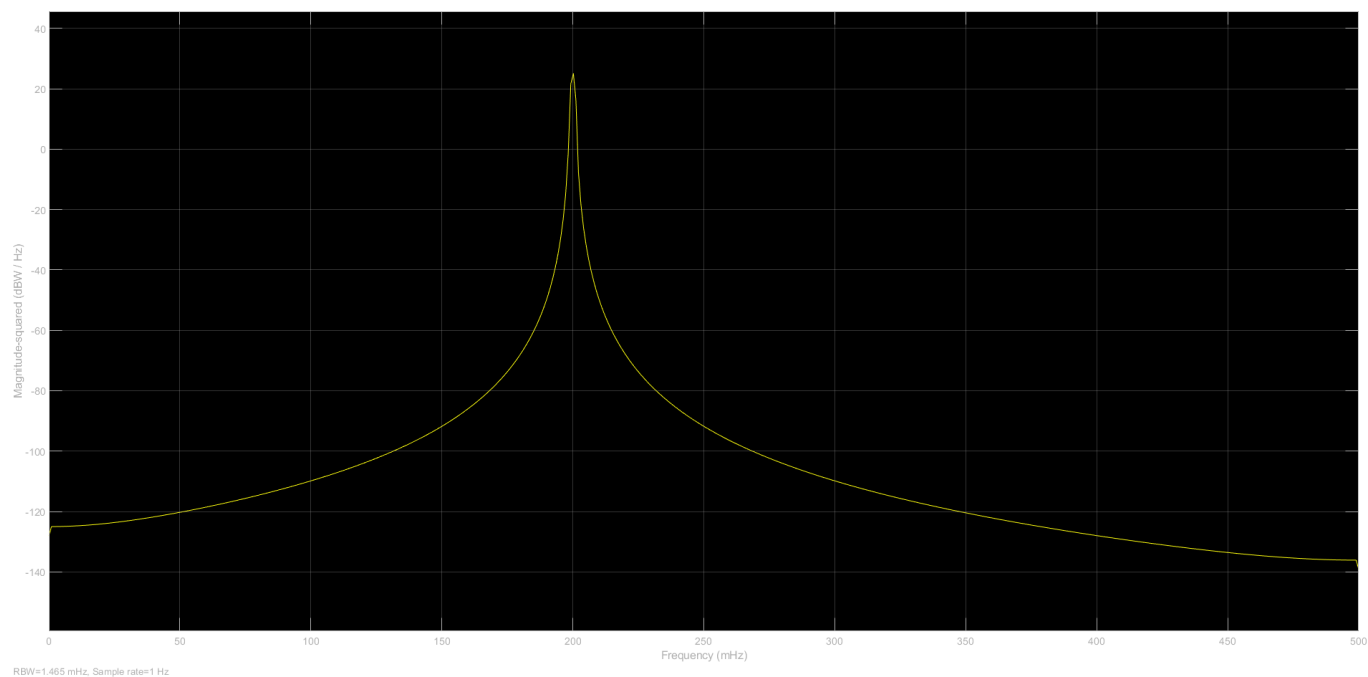


Рис. 2: Спектр оцифрованного синусоидального сигнала: без дециматора

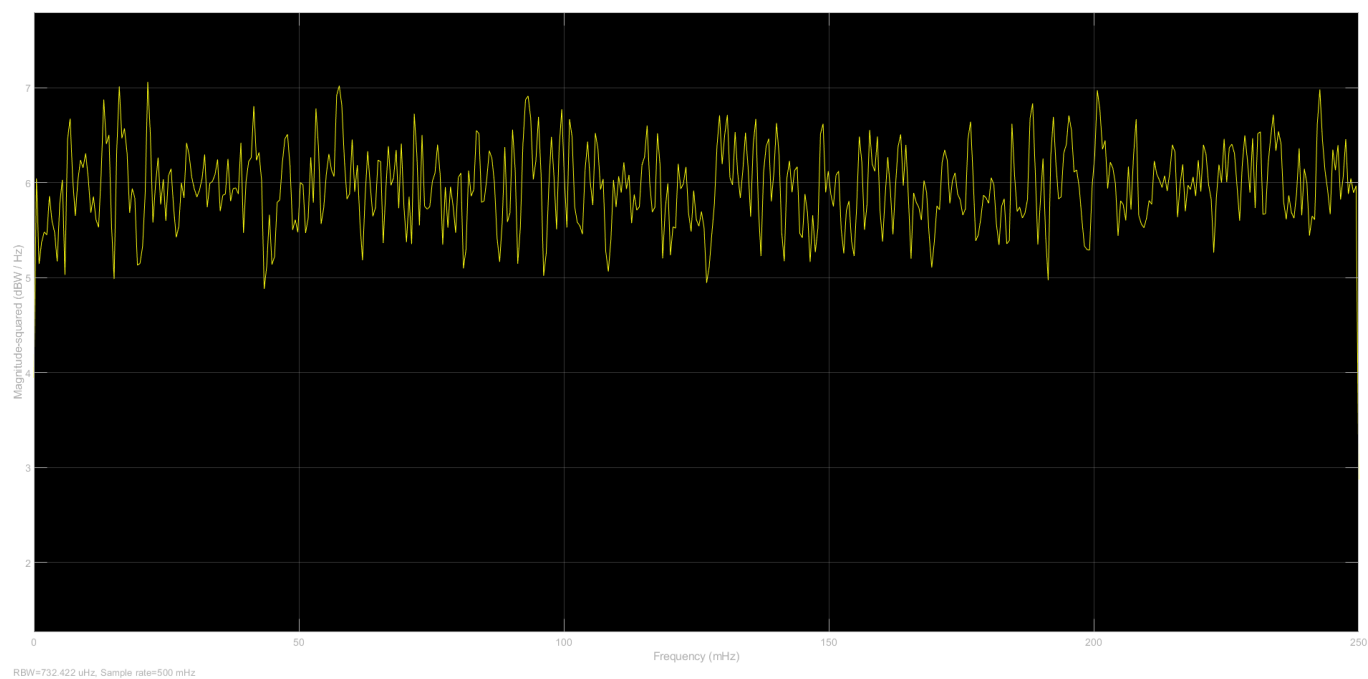


Рис. 3: Спектр оцифрованного белого шума: с дециматором

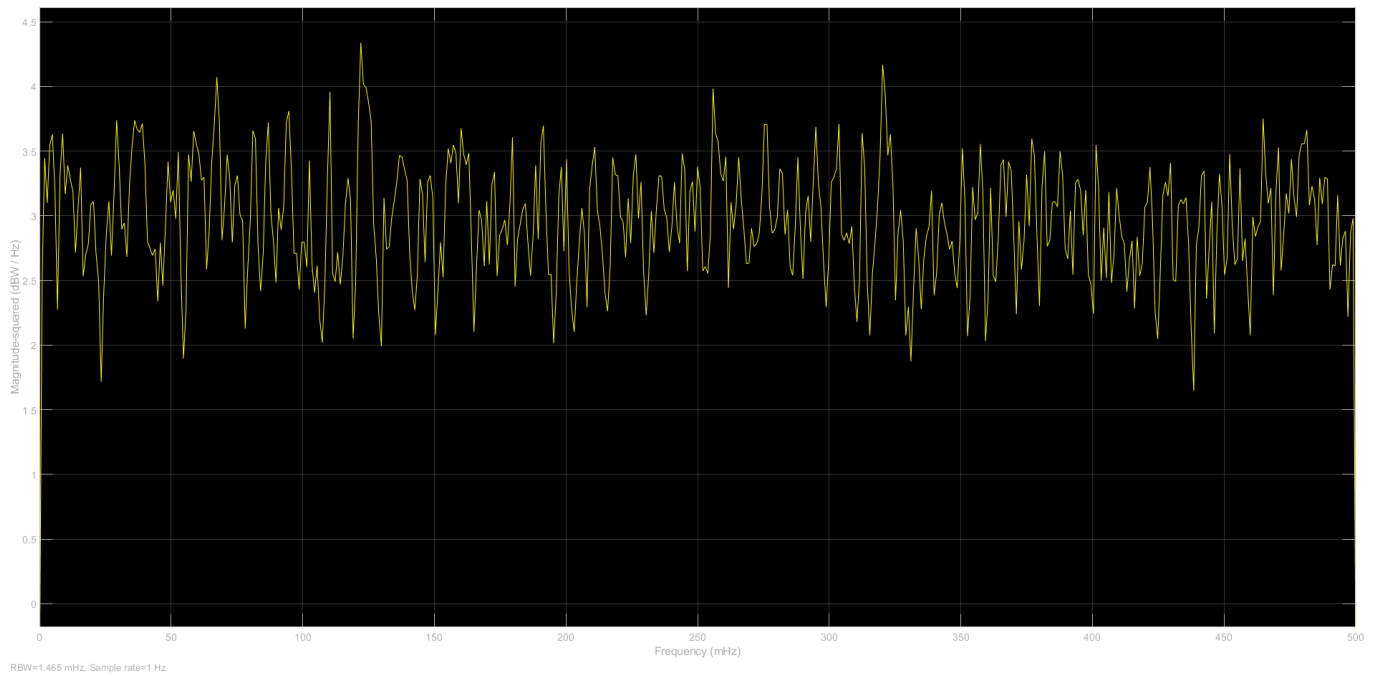


Рис. 4: Спектр оцифрованного белого шума: без дециматора

Отличие уровней на $10 \log 2 = 3 \text{ dB}$ обусловлено сужением полосы с 1 до $\frac{1}{2}$.

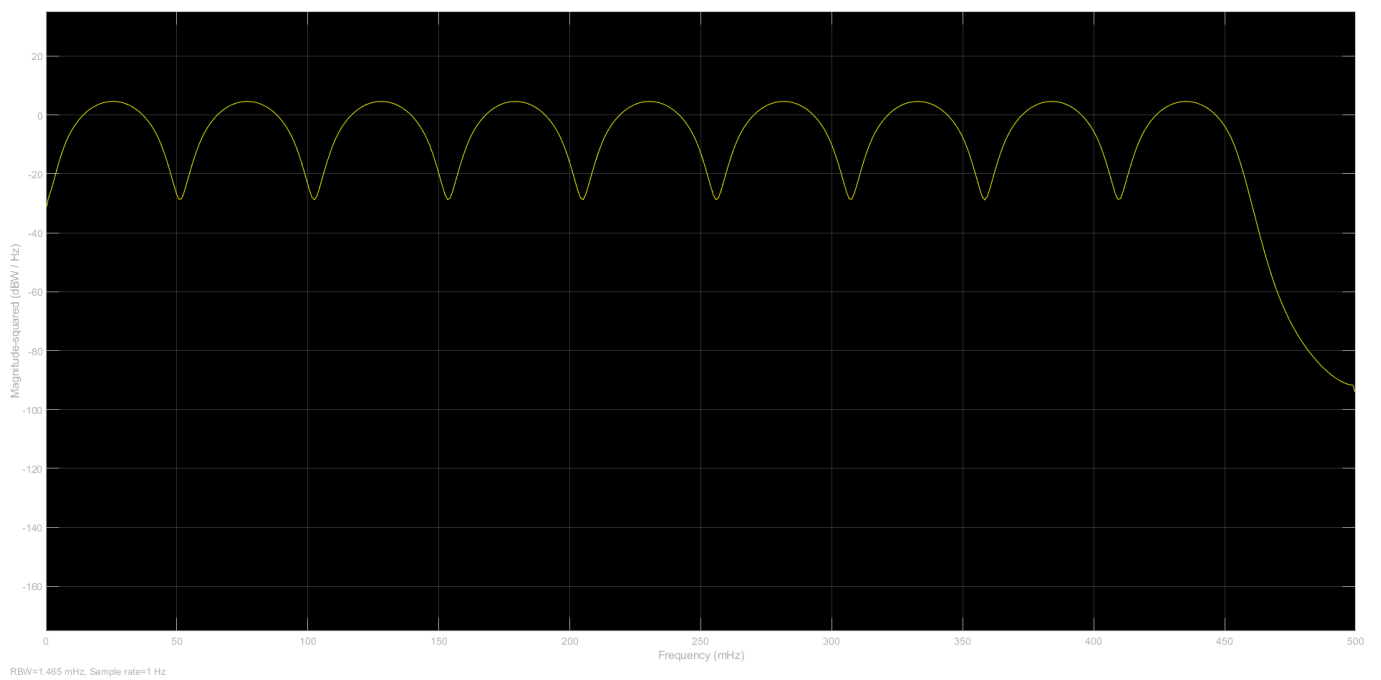


Рис. 5: Спектр свип-генератора: линейно от 0 до 0.5 за 10000 тактов

2. Фильтры первого порядка

Рассмотрим цифровой фильтр с параметрами $h = [1], g = [1, -0.7]$:

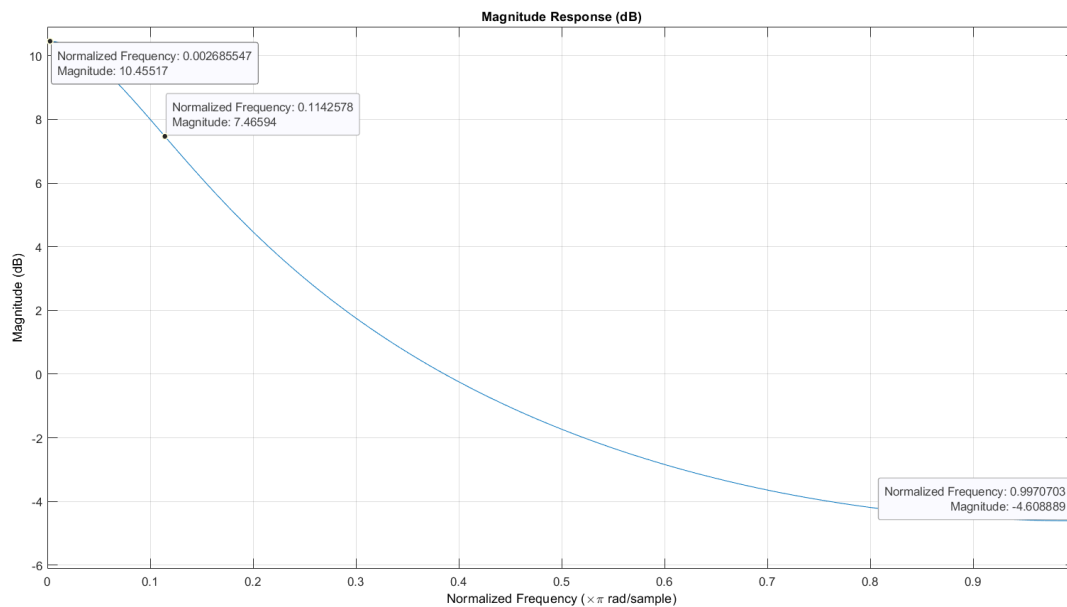


Рис. 6: Спектр интегрирующего звена

$$K(0) = 3.33 \quad K(1/2) = 0.59 \quad f_0 = 0.055 \quad \tau = 3 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\tau} = 0.053.$$

Подадим на вход гармонический сигнал:

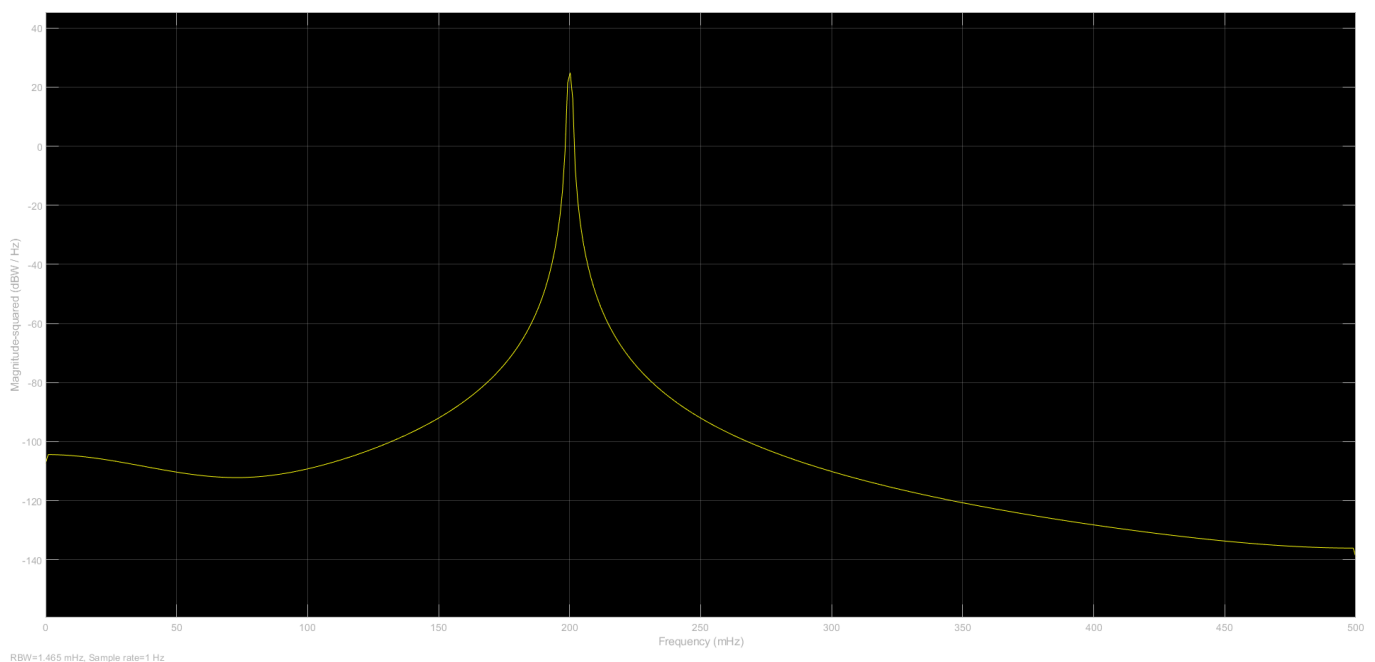
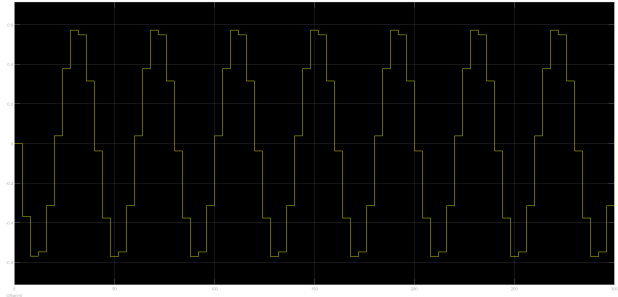
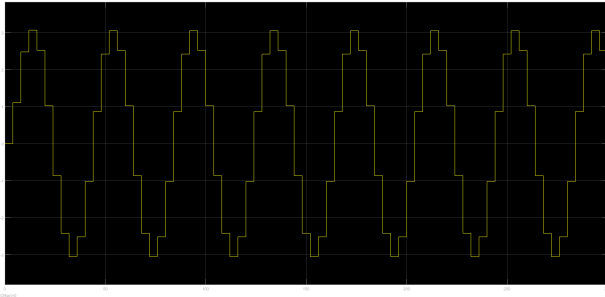


Рис. 7: Спектр оцифрованного синусоидального сигнала

Настроив на нужные частоты получим коэффициенты передачи:

$$K(0.05/2) = 34 \text{ dB} \quad K(0.95/2) = 19 \text{ dB}$$

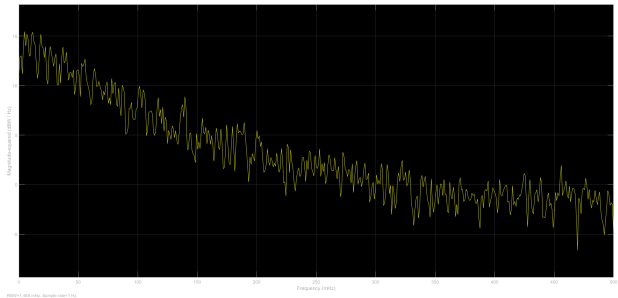
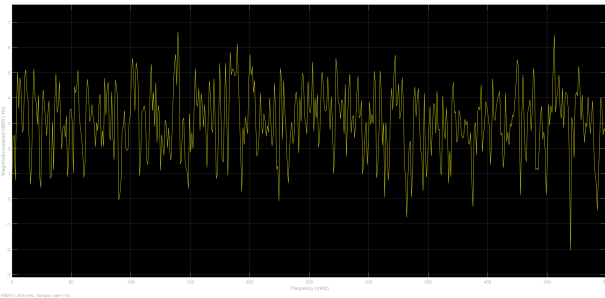
Рассмотрим осциллограммы синусоид с частотами $0.95/2$ и $0.05/2$.



Осциллограммы сигналов после фильтра: $K = 0.05/2$ (слева), $K = 0.95/2$ (справа)

Соотношение амплитуд 5.6, что сходится с усилениями.

Рассмотрим спектры шума до и после фильтра:



Спектры шума: на входе (слева) и на выходе (справа)

В середине полосы Найквиста ± 250 уровни шума одинаковы. На границе ± 500 уровень до 3 dB , уровень после -3 dB .

Изучим идеальный интегратор с $\mu = 1$: $h = [1]$, $g = [1, -0.7]$:

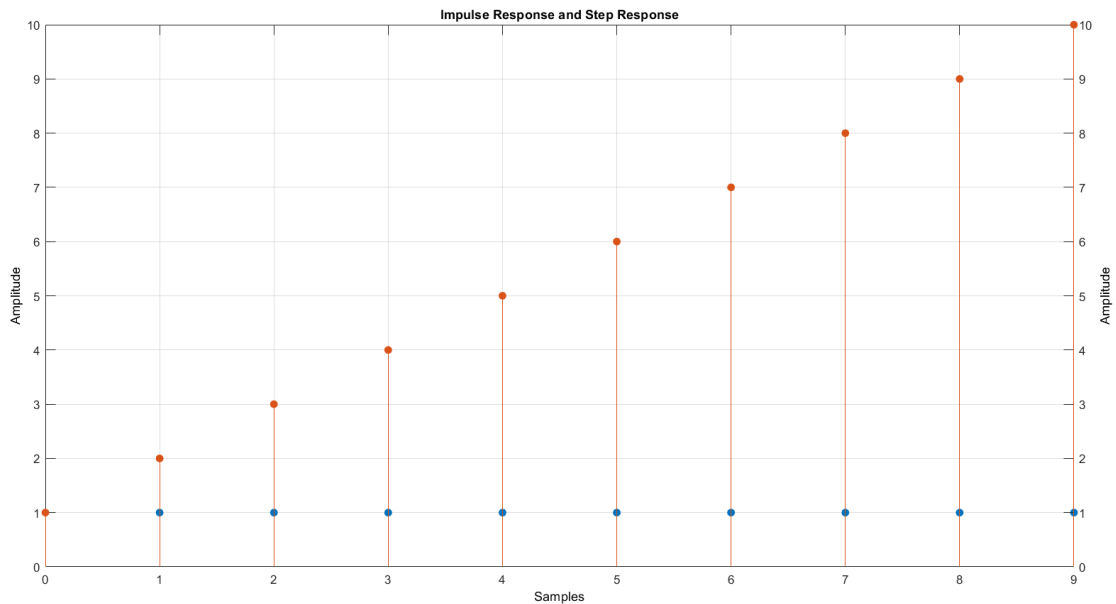


Рис. 8: Осциллограммы импульсной и переходной реакции

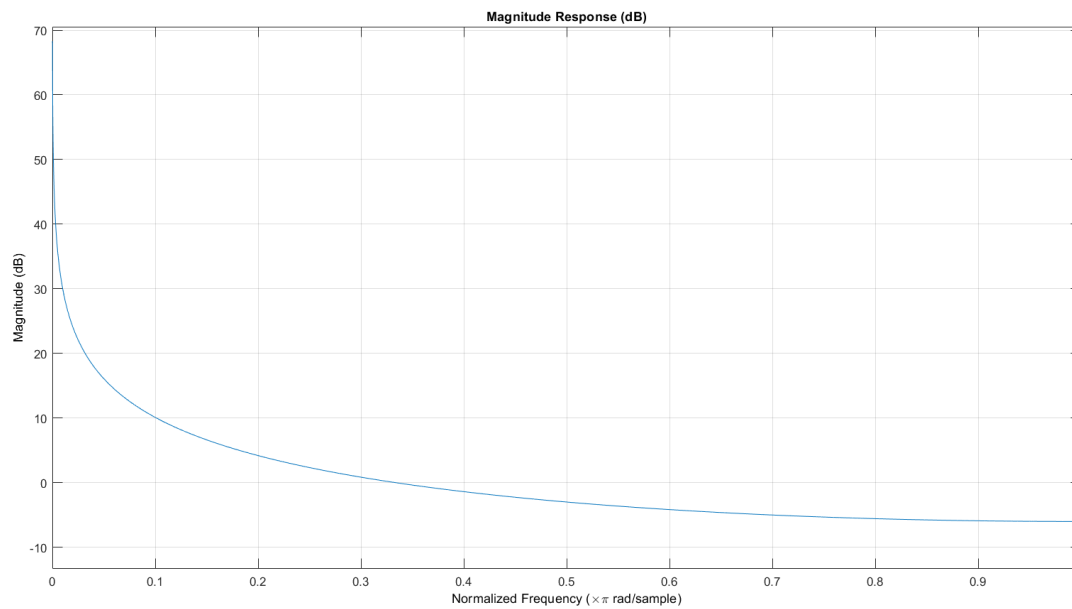


Рис. 9: Передаточная функция идеального интегратора

Реализуем дифференцирующее звено: $h = [1, -1]$, $g = [1, -0.7]$.

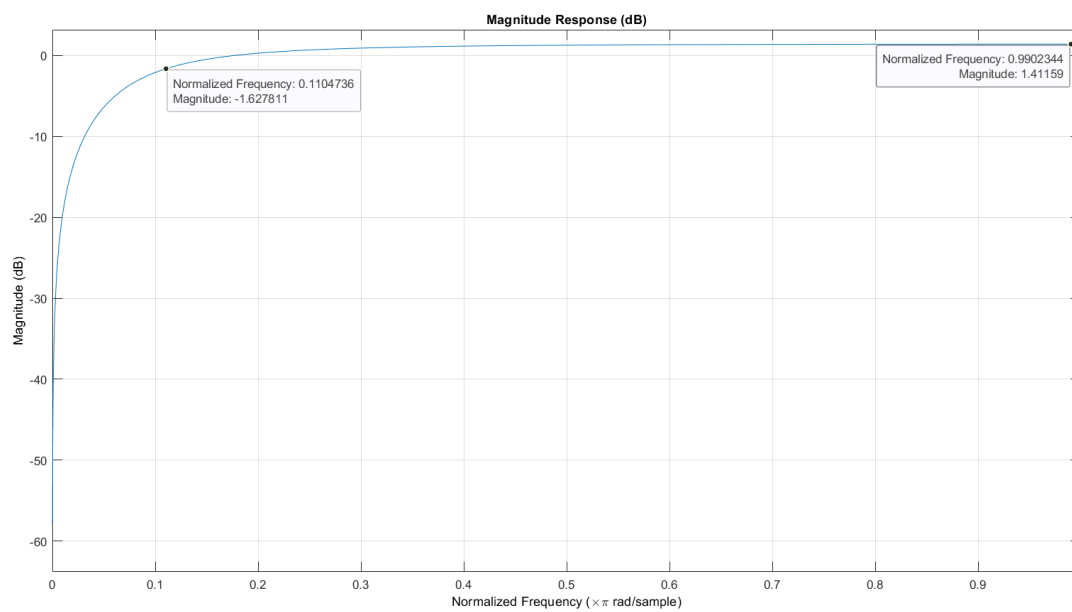


Рис. 10: Передаточная функция дифференциатора

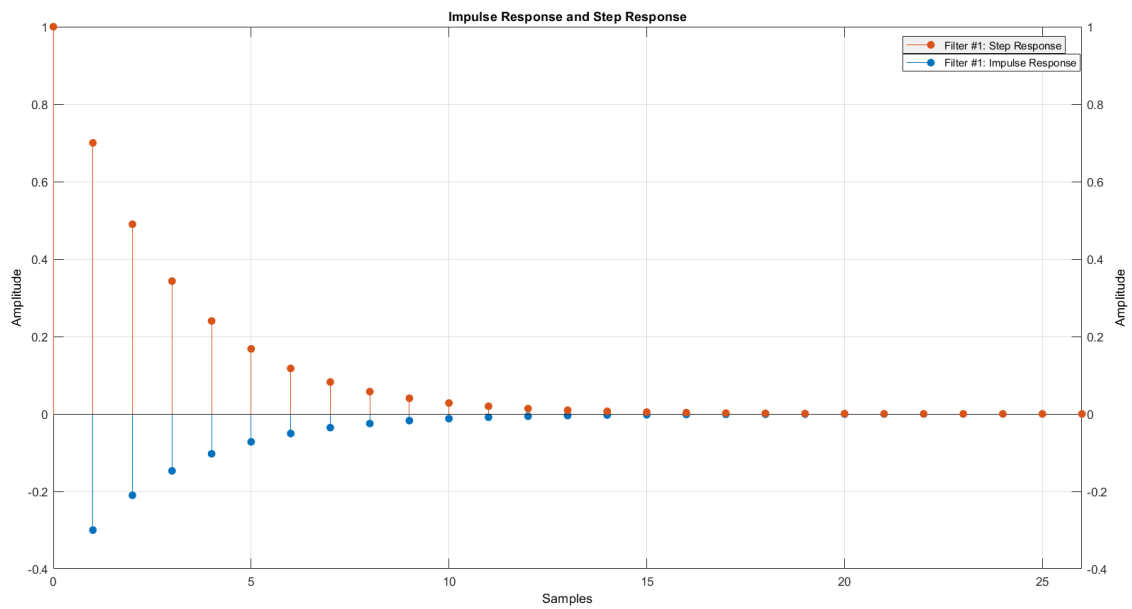


Рис. 11: Импульсная и переходная реакция дифференциатора

Формула $f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$ выполняется.

Рассмотрим также идеальный дифференциатор с $\mu = 0$:

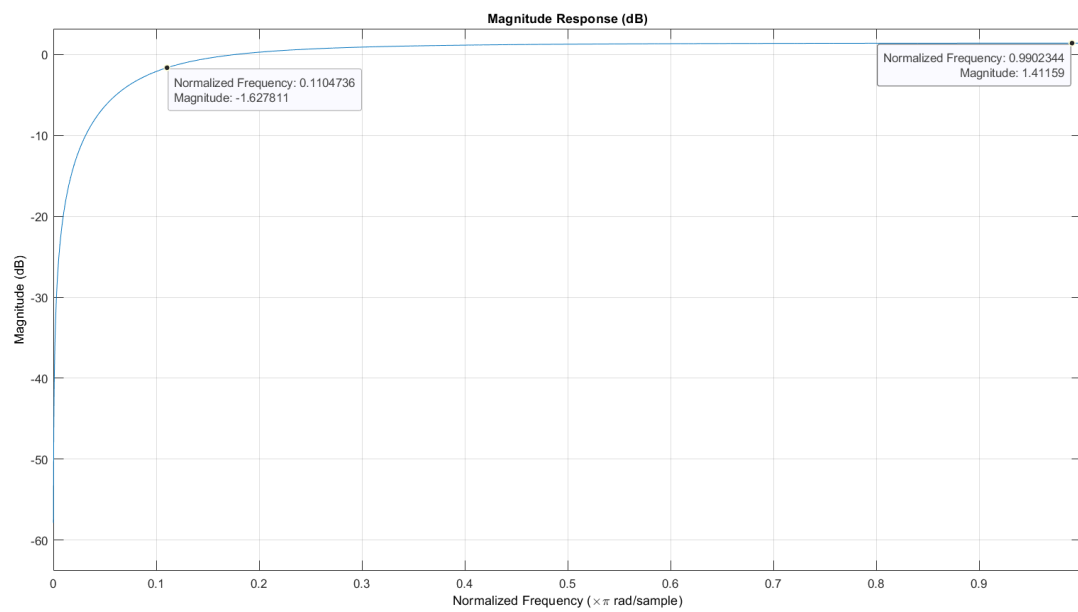


Рис. 12: Передаточная функция идеального дифференциатора

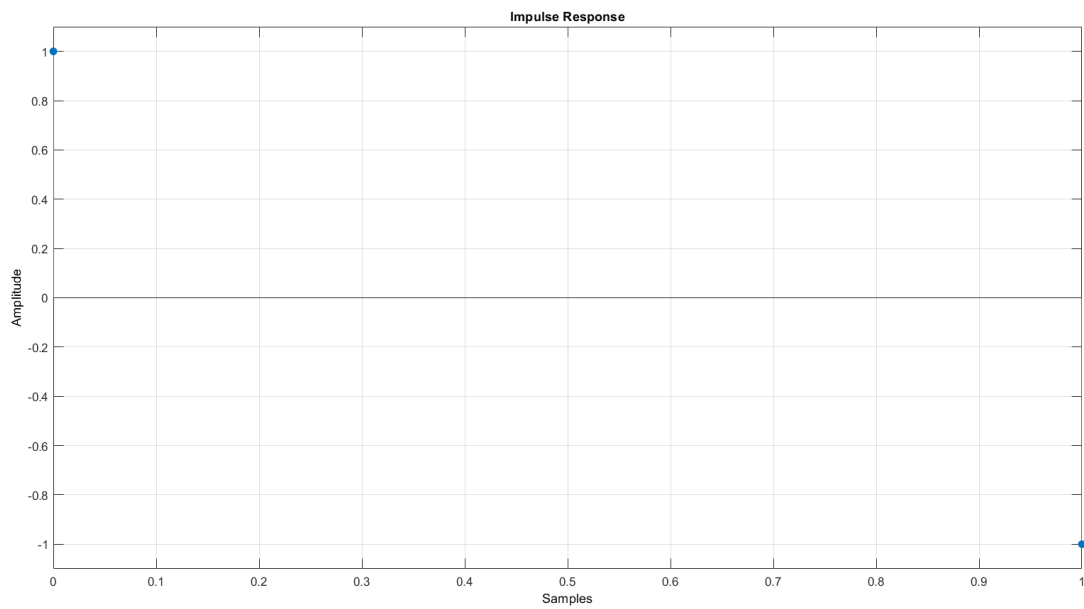


Рис. 13: Импульсная реакция дифференциатора

Переходной реакцией является δ -функция.

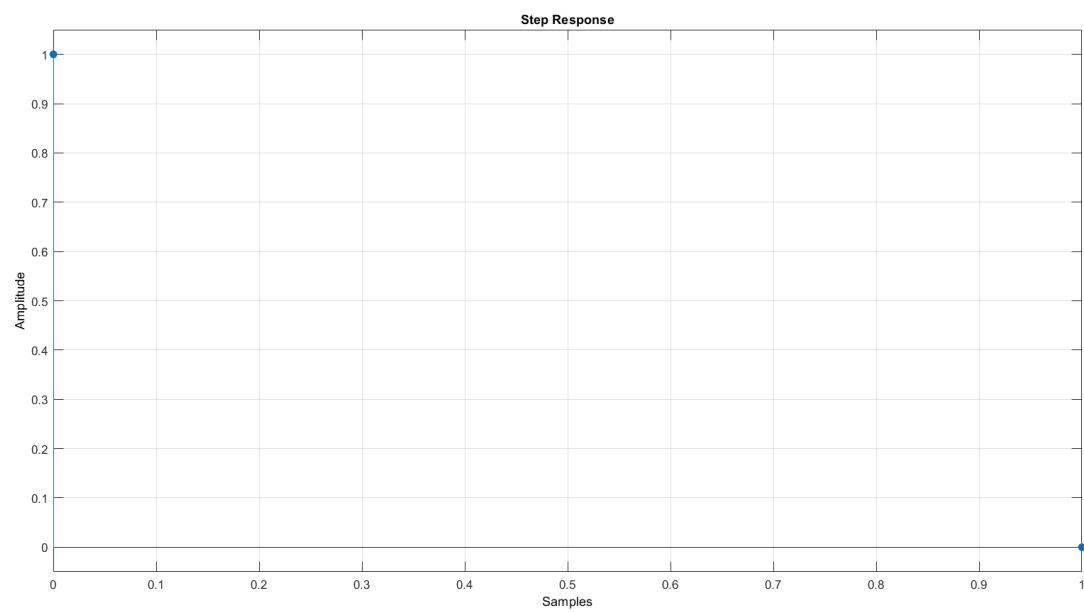


Рис. 14: Переходная реакция дифференциатора

Реализуем цифровой фазовращатель:

$$H(x) = \frac{-\mu + x}{1 - \mu x} \Leftrightarrow H(z) = \frac{1 - \mu z}{z - \mu}.$$

$$h = [-0.7, 1], g = [1, -0.7].$$

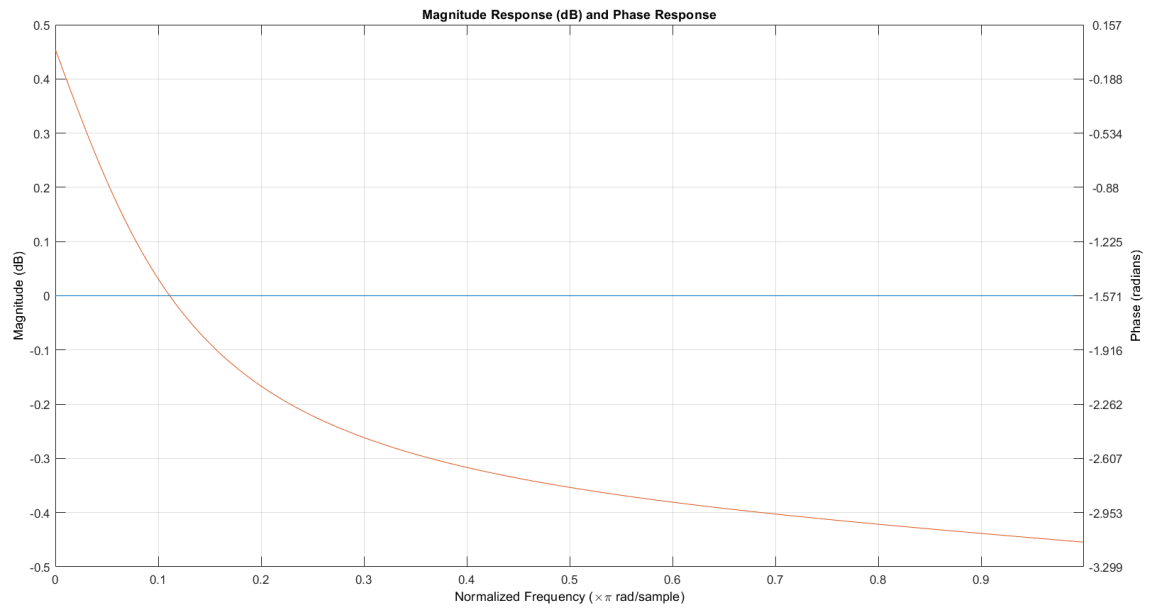


Рис. 15: Переходная реакция фазовращателя

3. Звенья второго порядка

Реализуем полосовой фильтр второго порядка:

$$H_{\text{ПФ}} = \frac{1 - x^2}{1 - 2r_{\mu} \cos(\varphi_{\mu}x) + r_{\mu}^2 x^2} \quad r_{\mu} = 0.9, \varphi_{\mu} = \pi/4.$$

$$h = [1, 0, -1], \quad g = [1, -0.9 \cdot \sqrt{2}, -0.9^2].$$

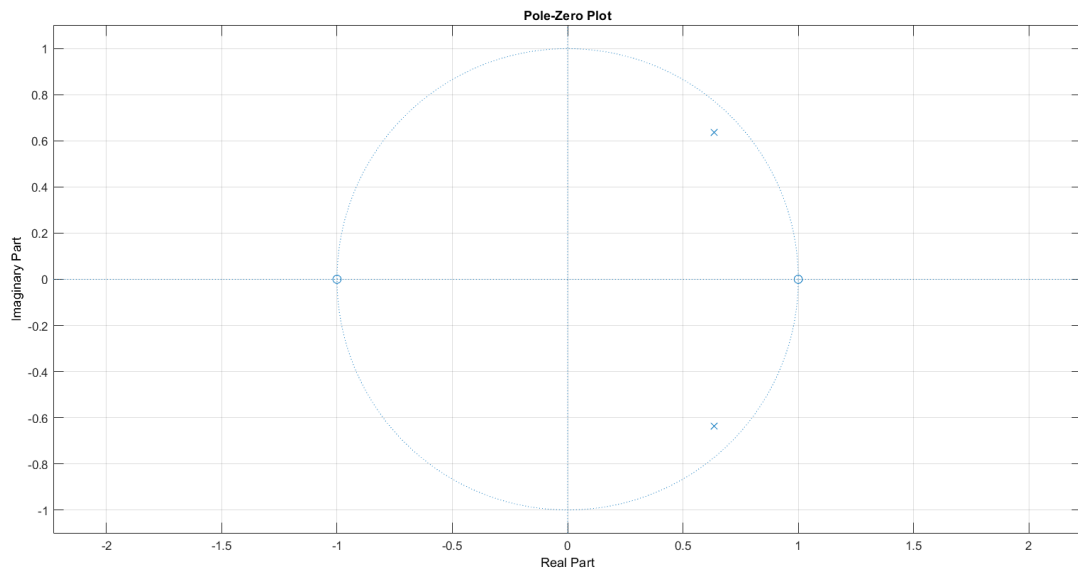


Рис. 16: Карта полосового фильтра

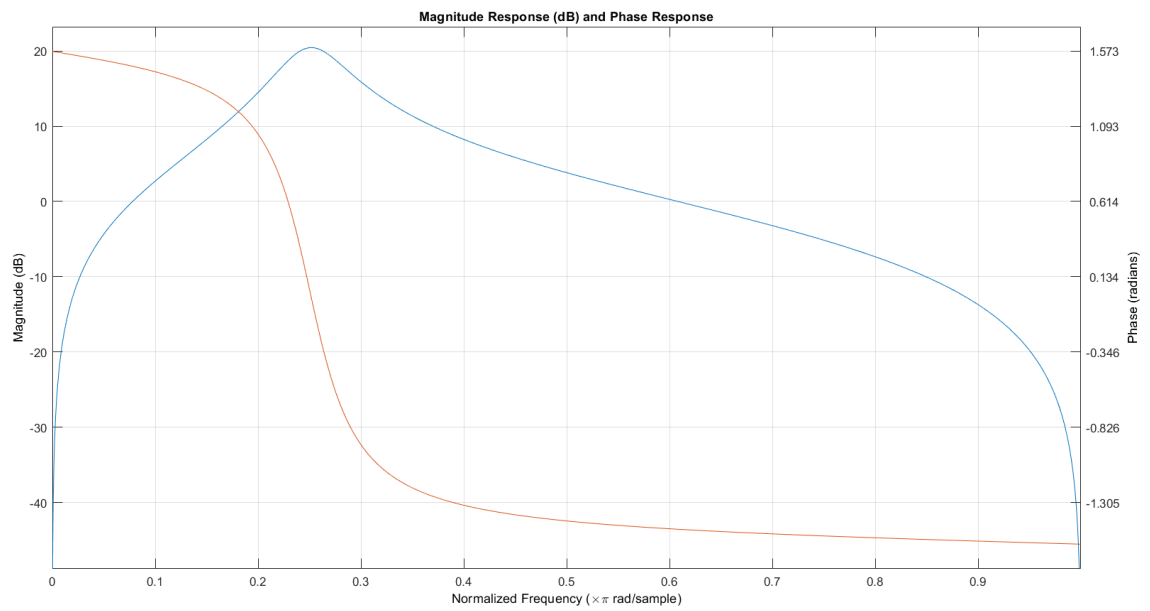


Рис. 17: Частотные характеристики фильтра

$$f_0 = 0.126 \quad \Delta f = 0.035 \quad 20 \lg K = 20.5 \text{ dB} \quad Q = f_0 / \Delta f = 3.8$$

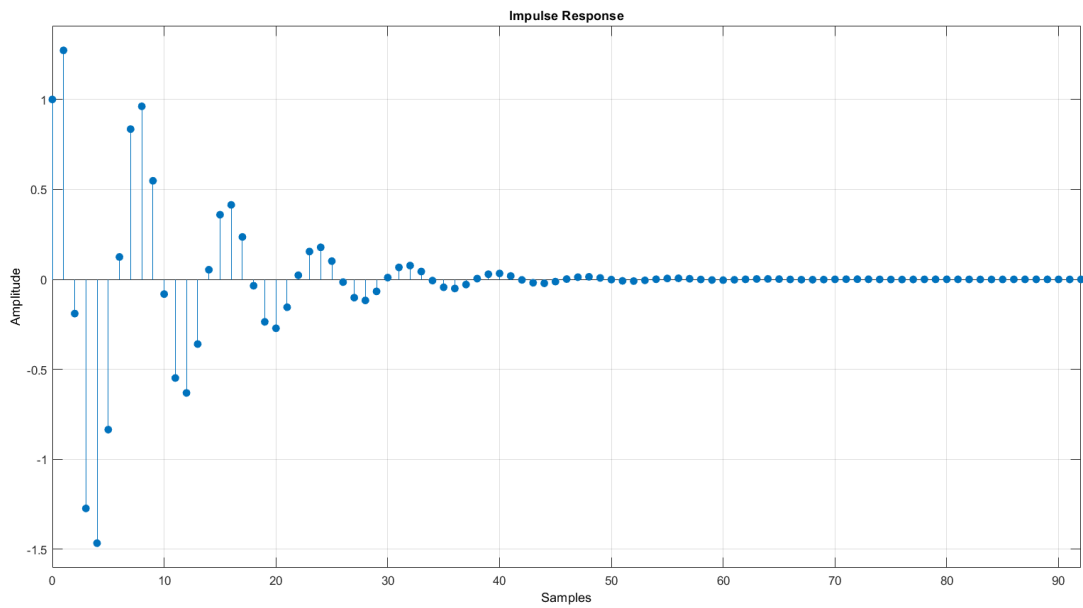


Рис. 18: Импульсная реакция

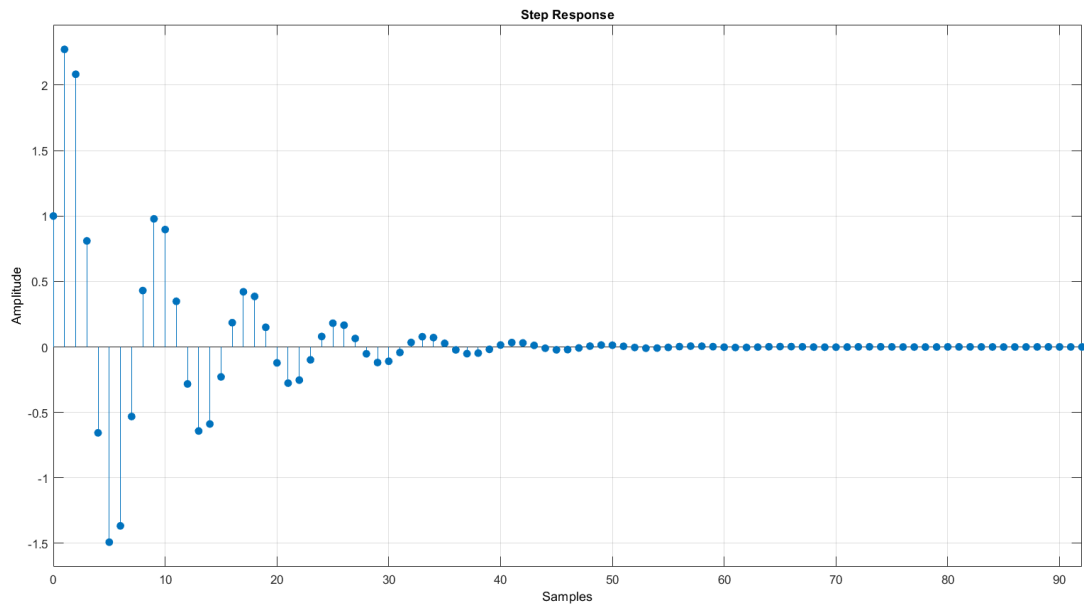


Рис. 19: Переходная реакция

Изучим зависимость фильтра от $r_\mu \rightarrow 1$. $r_\mu = 0.98$.

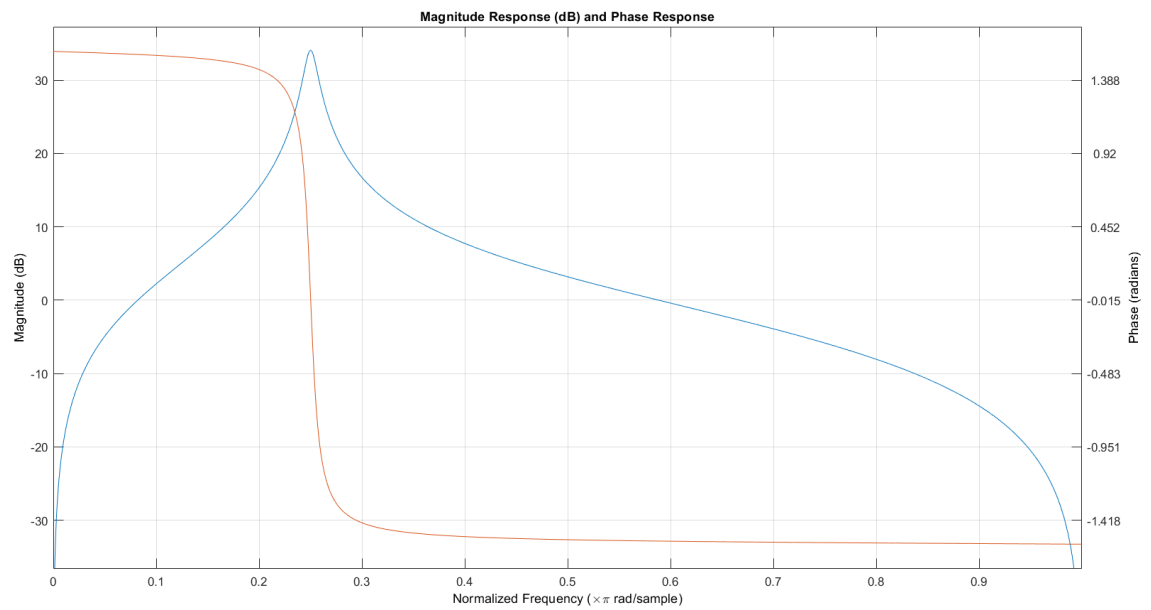


Рис. 20: Частотные характеристики фильтра

Рассмотрим трансформации в ФНЧ, ФВЧ и чисто рекурсивные фильтры:

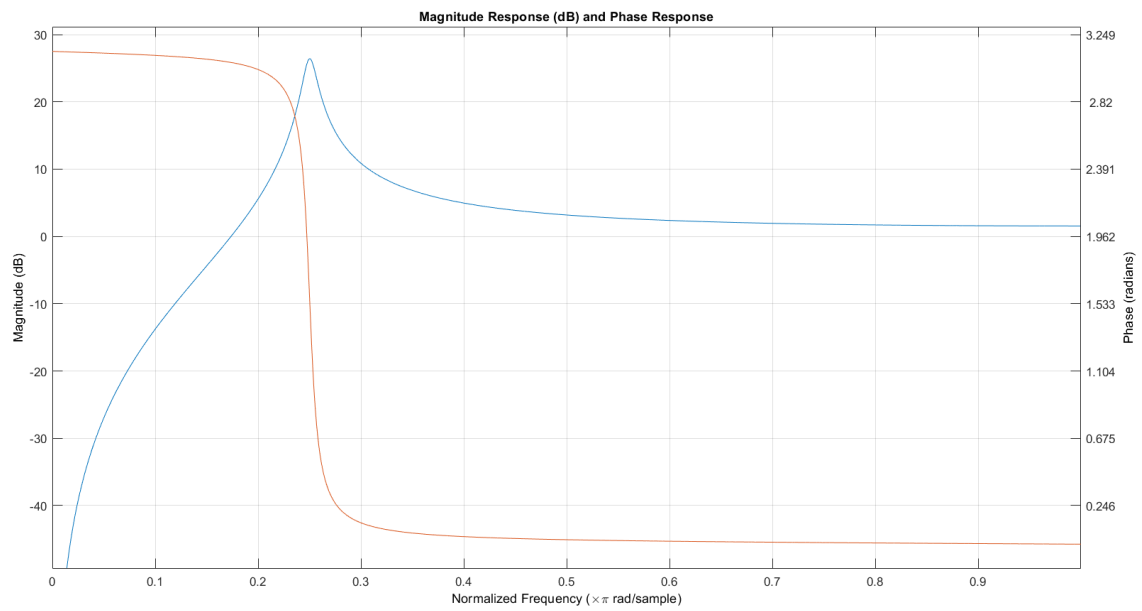


Рис. 21: Частотные характеристики ФВЧ

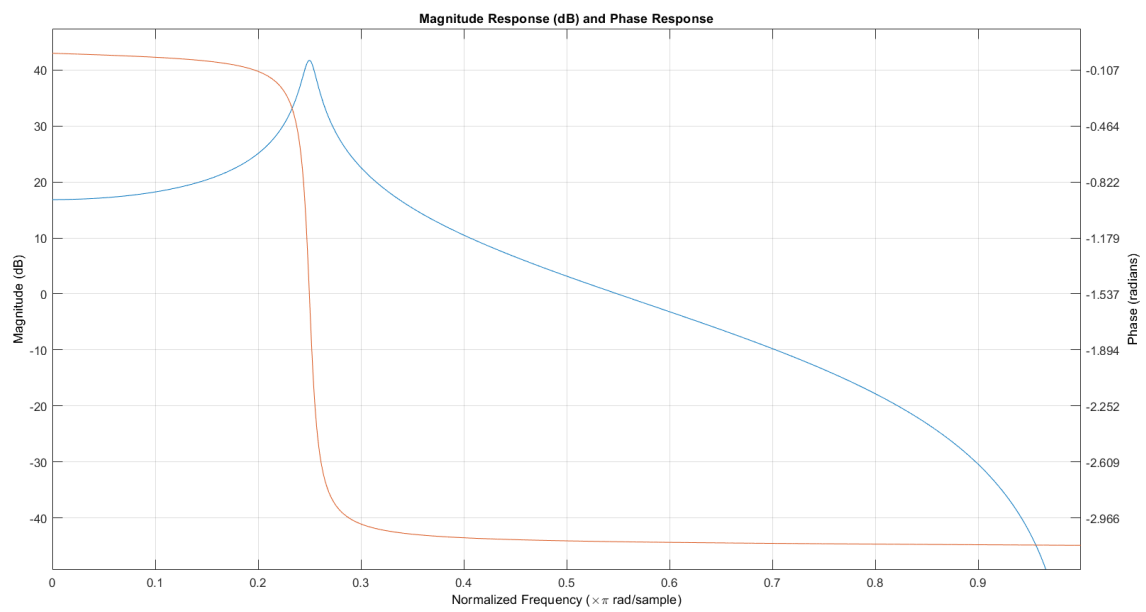


Рис. 22: Частотные характеристики ФНЧ

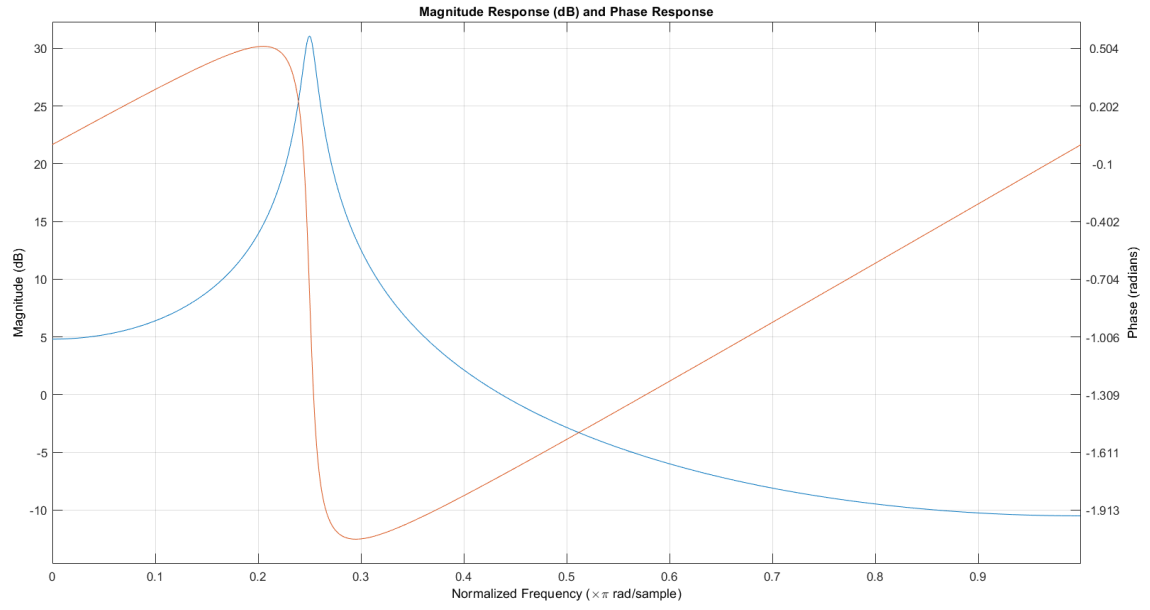


Рис. 23: Частотные характеристики чисто рекурсивного (all poles)

Рассмотрим фильтр с парой сопряженных нулей:

$$H = 1 - 2r_\nu \cos(\varphi_\nu x) + r_\nu^2 x^2, \quad r_\nu = 0.9$$

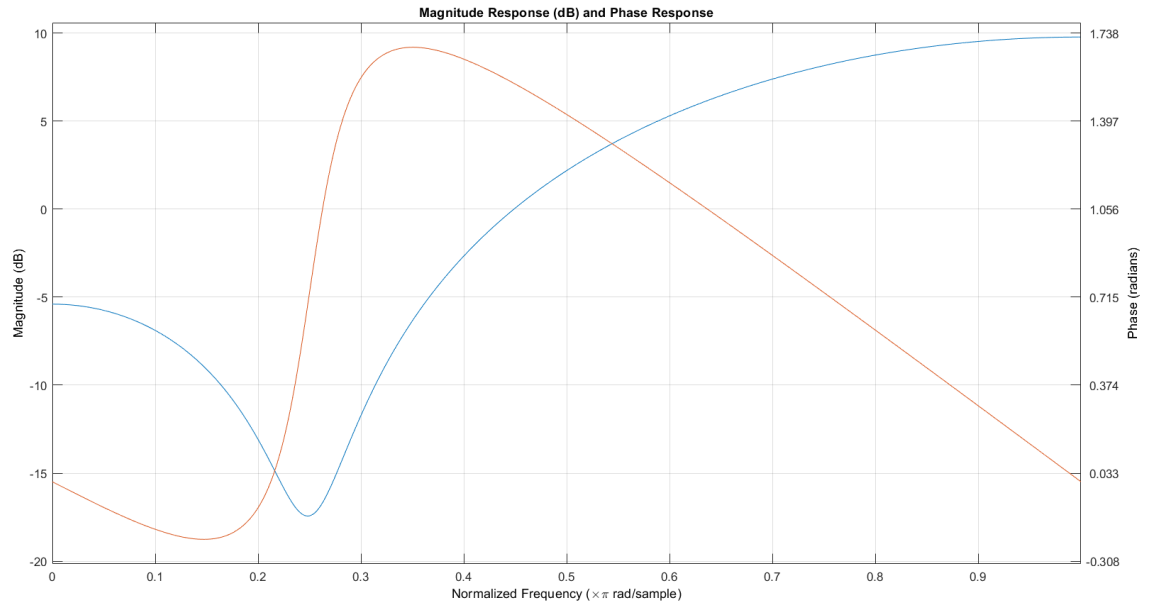


Рис. 24: Частотные характеристики фильтра с парой сопряженных нулей

Реализуем all pass фильтр с равномерной АЧХ:

$$r_\mu = 0.8 \quad r_\nu = 1.25.$$

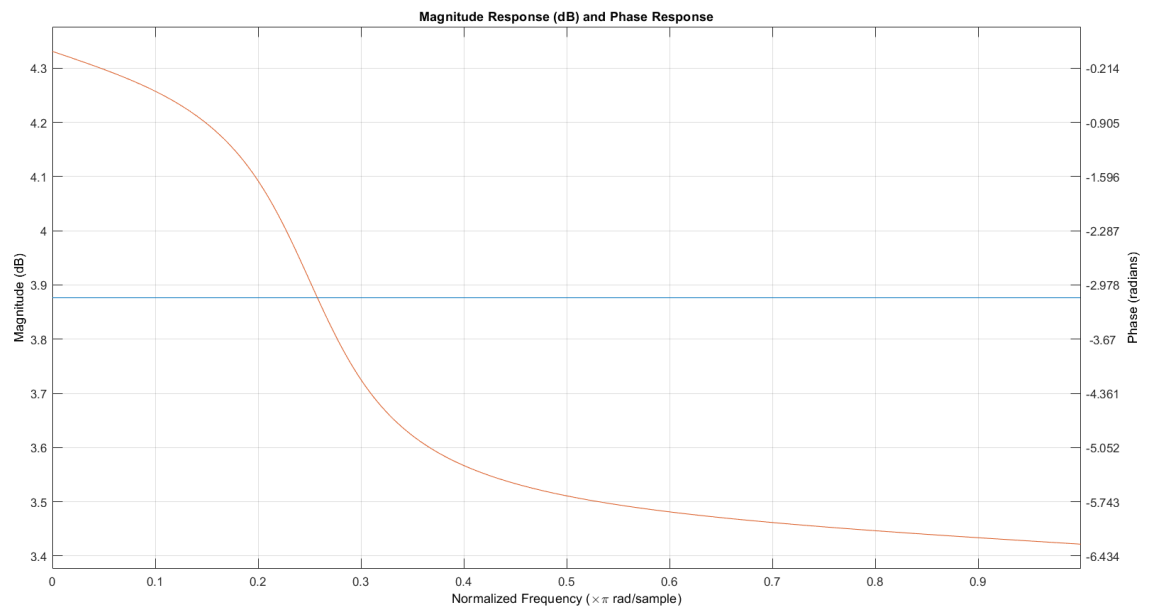


Рис. 25: Частотные характеристики фильтра

4. Нерекурсивные FIR фильтры

Все фильтры будут all zeros: $g = [1]$.

Реализуем гребенчатый $N = 3$: $H(x) = 1 - x^3 \Rightarrow h = [1, 0, -1], g = [1]$.

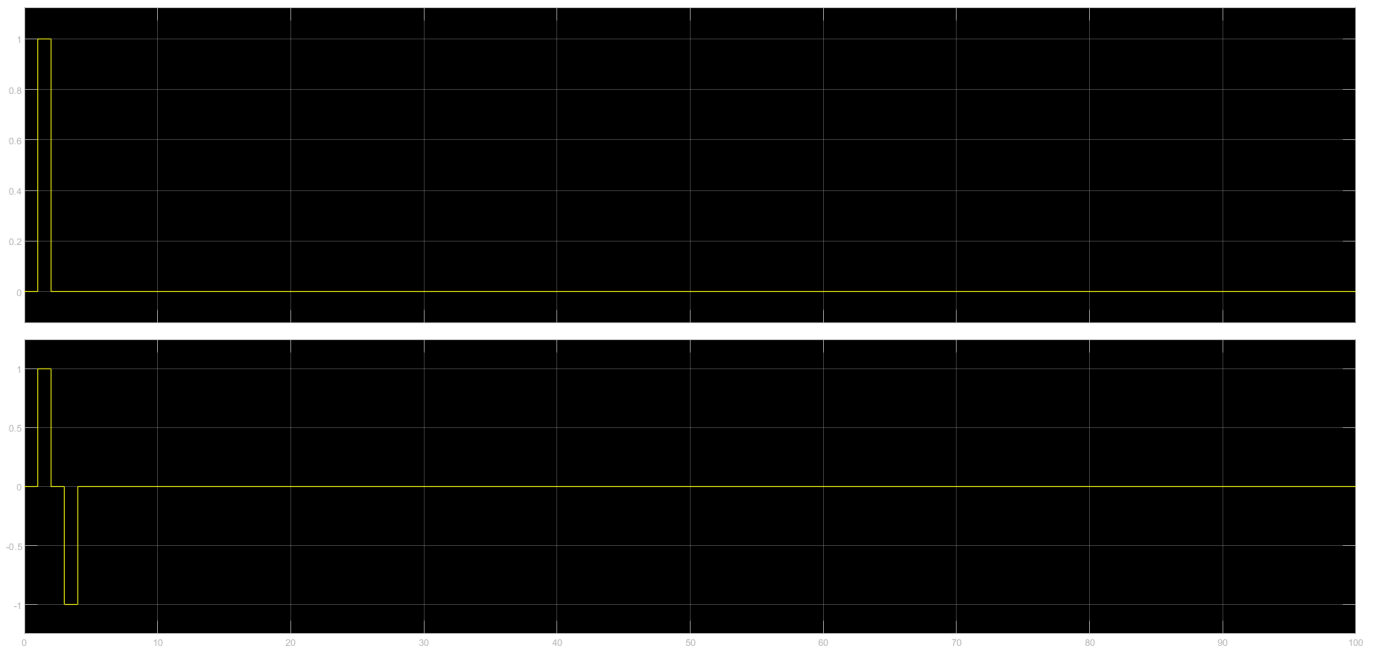


Рис. 26: Импульсная реакция фильтра

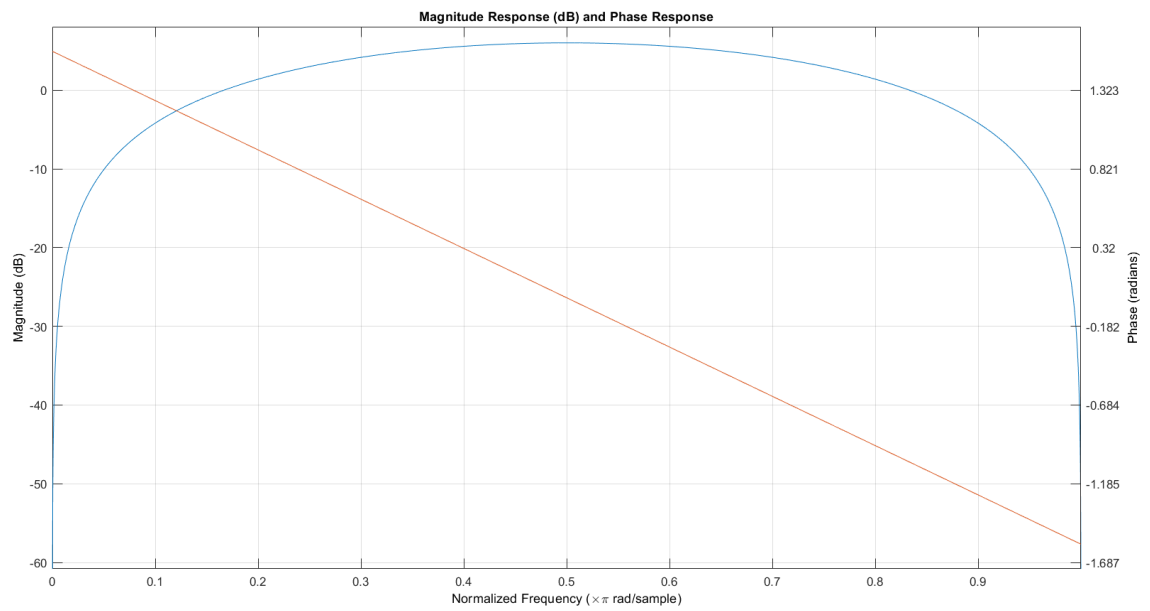


Рис. 27: Частотные характеристики фильтра

Реализуем фильтр с $N = 5$.

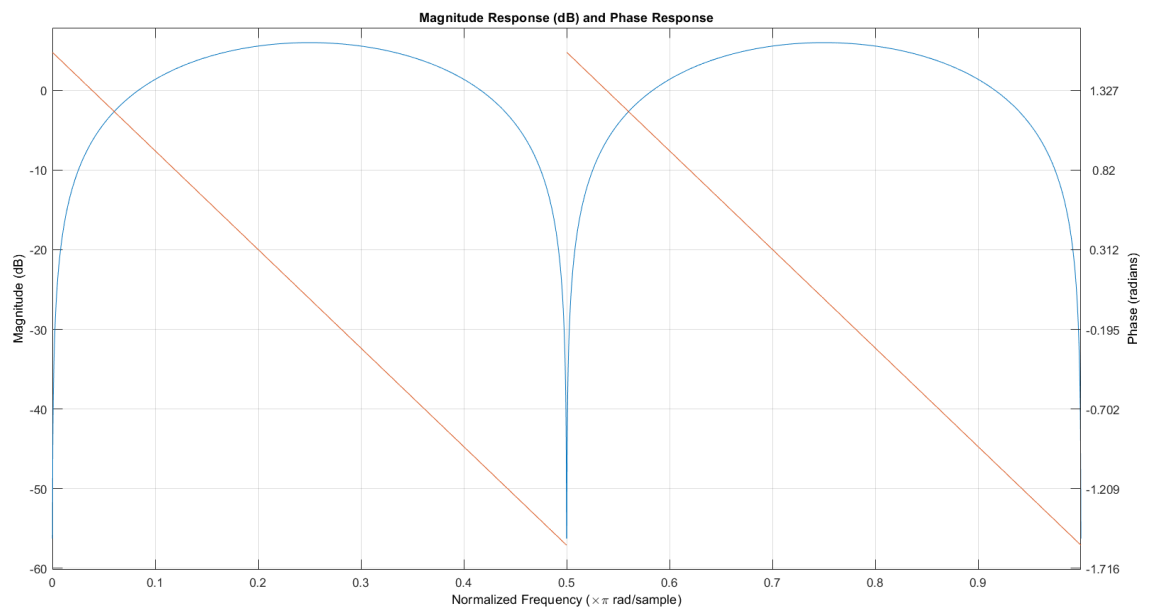


Рис. 28: Частотные характеристики фильтра

Реализуем фильтр порядка $N = 7$ с прямоугольной импульсной реакцией.

$$h = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], \quad g = [1]$$

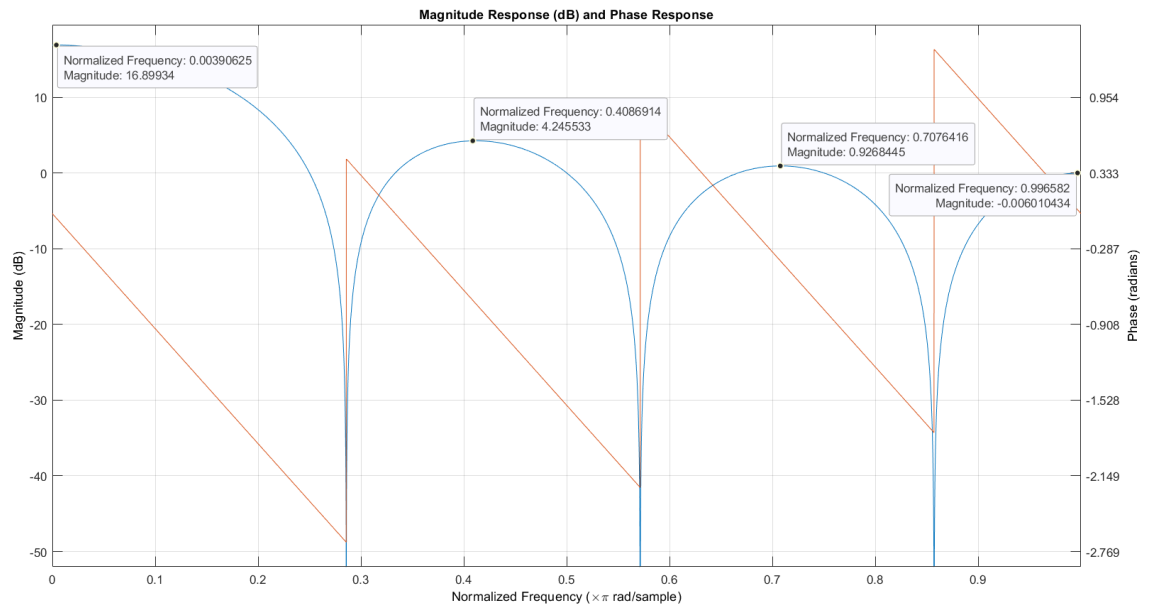


Рис. 29: Частотные характеристики фильтра

Значения затухания в пиках указаны на рисунке.

Убедимся, что разницы в пиках почти не меняются, $N = 9$:

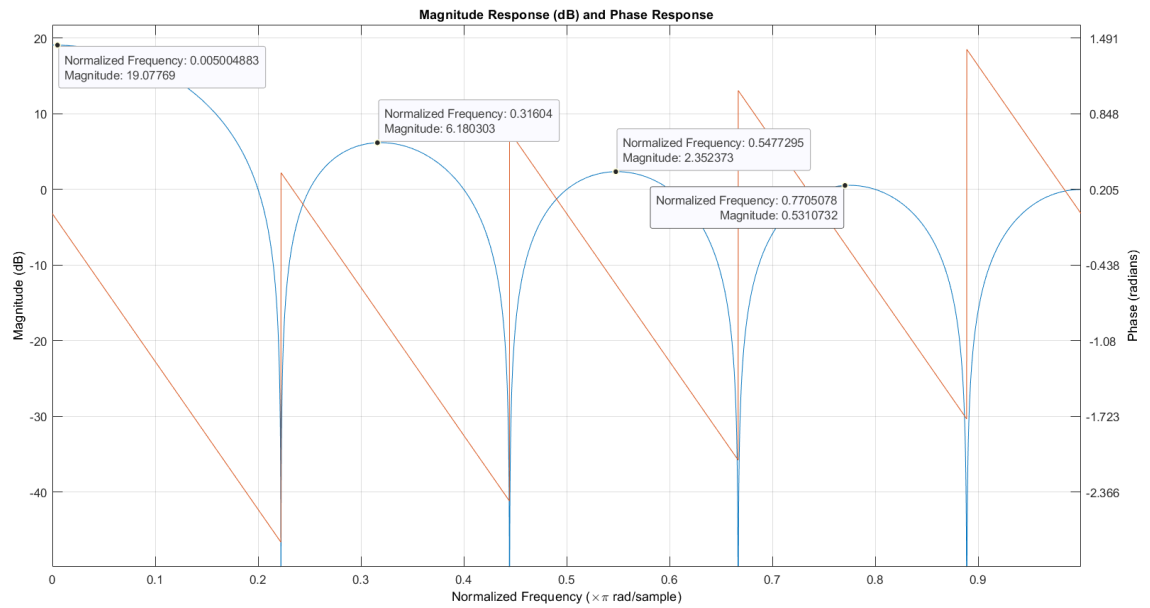


Рис. 30: Частотные характеристики фильтра

Изменения в пределах 1 dB .

Такой же фильтр дает $h = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1]$, $g = [1, -1]$.

Рассмотрим временную характеристику:

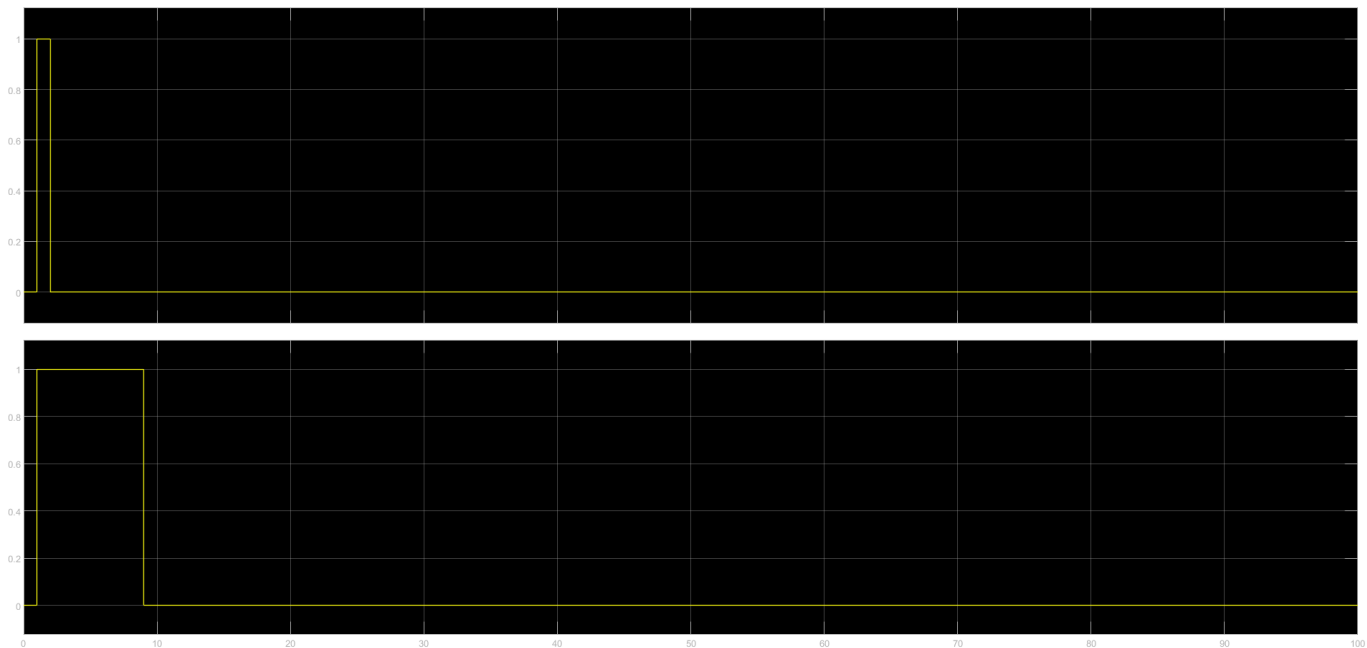


Рис. 31: Импульсная реакция фильтра

Подадим на фильтр $h = [1111]$ шум и рассмотрим спектр после фильтра с децимацией $D = 4$ и без:

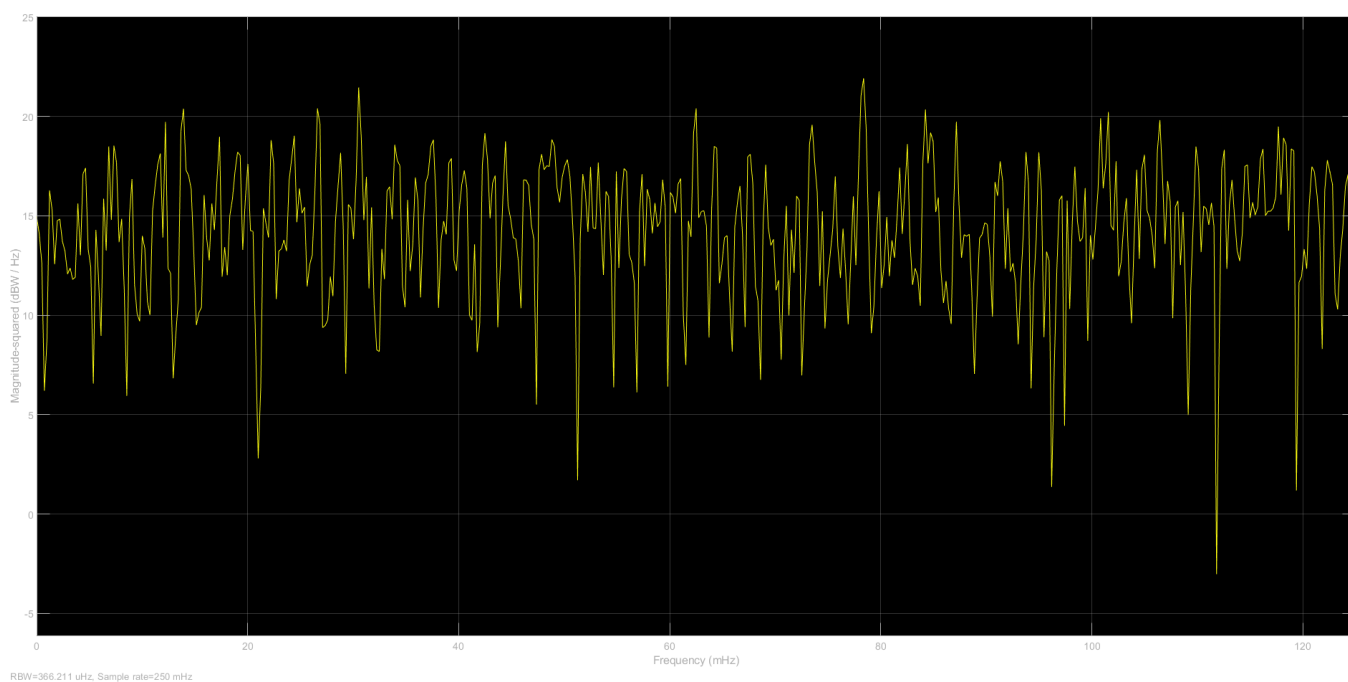


Рис. 32: Спектр фильтра с децимацией

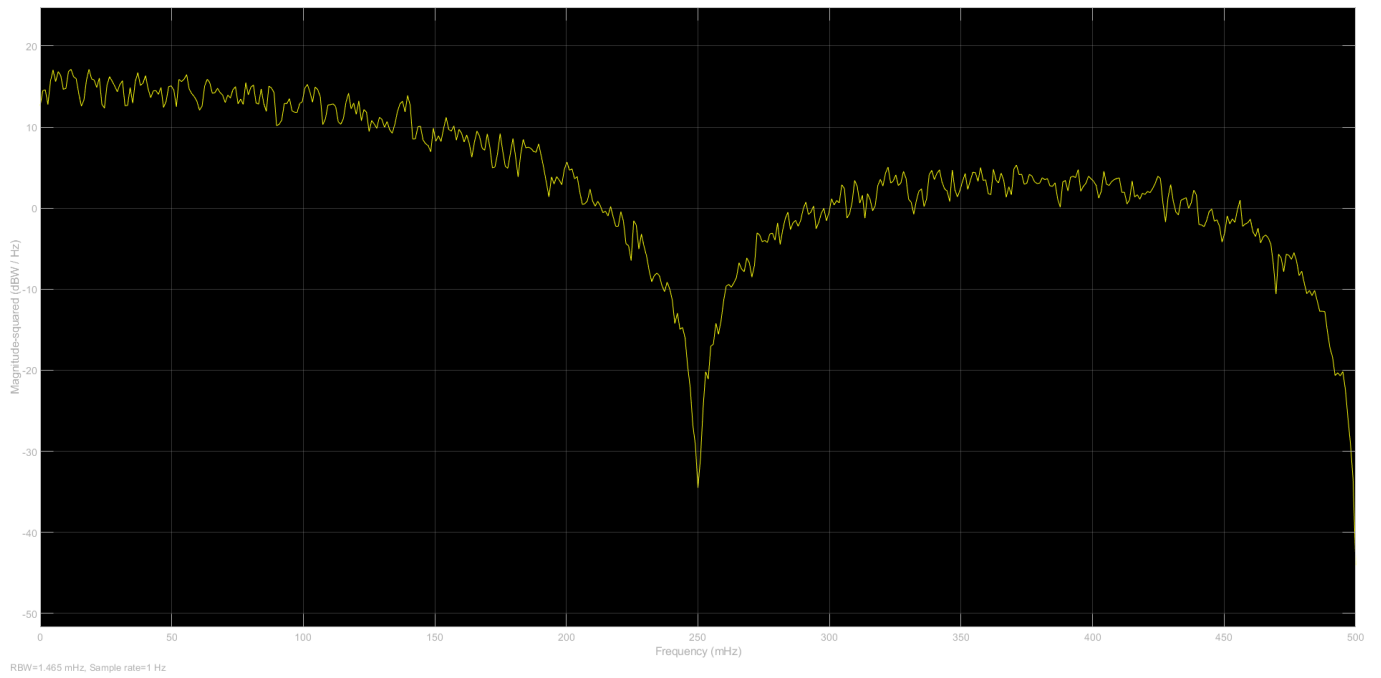


Рис. 33: Спектр фильтра без децимации

Спектр равномерен, так как $0.5/4 \approx 0.125$ лежит в пределах плато первого пика фильтра и реплицируется в полосе Найквиста.

Подадим на вход гармонический сигнал $f = 0.126/2 (\approx \pi/8)$

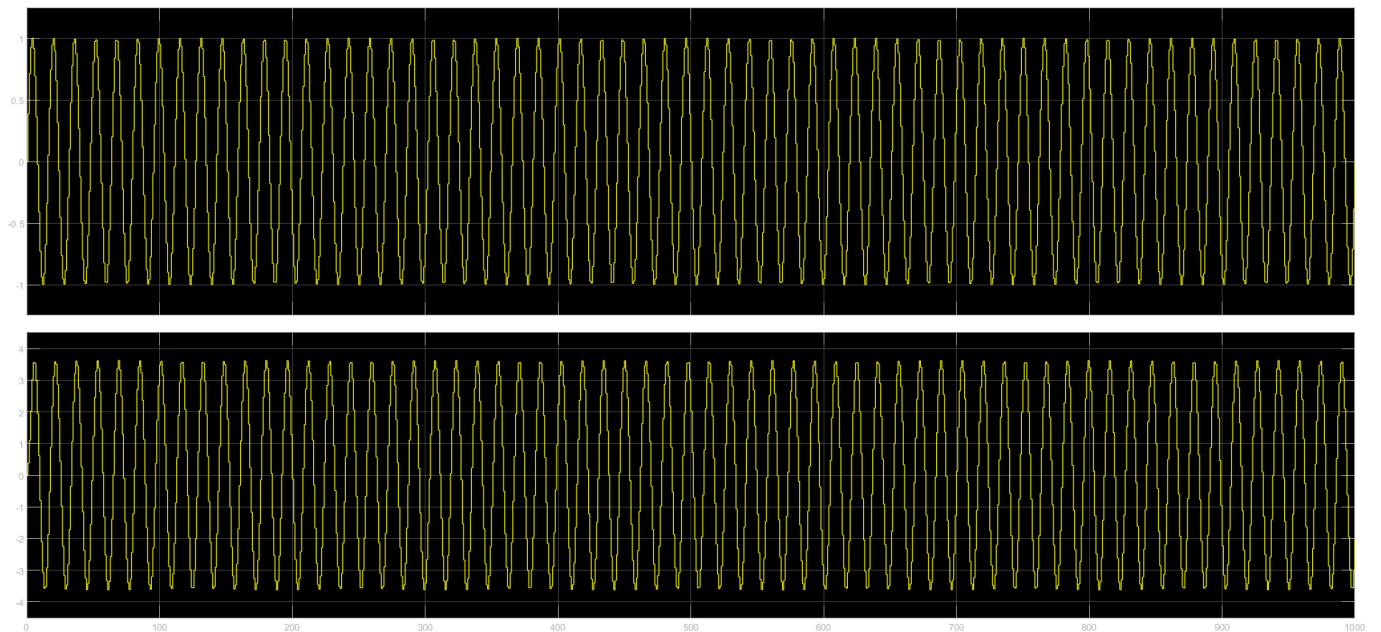


Рис. 34: Спектр фильтра без децимации

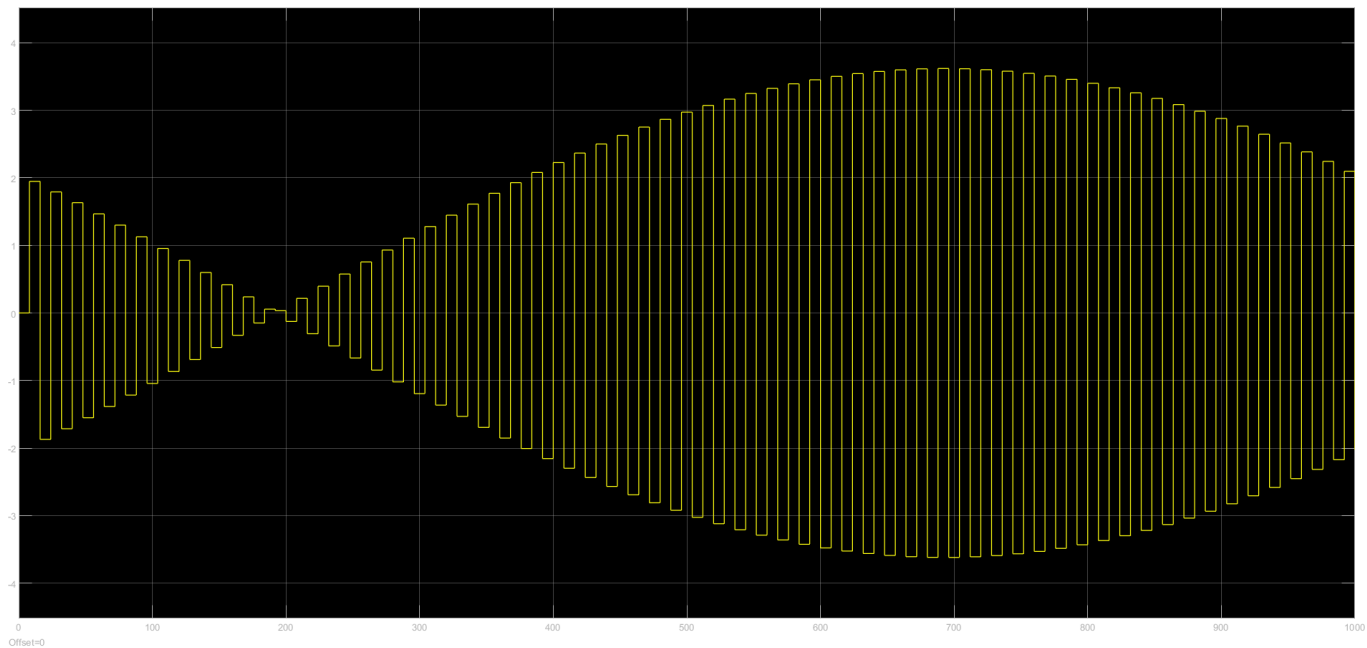


Рис. 35: Спектр фильтра с децимацией

Подадим на вход гармонический сигнал $f = 1/2 + 0.126/2 (\approx \pi/2 + \pi/8)$

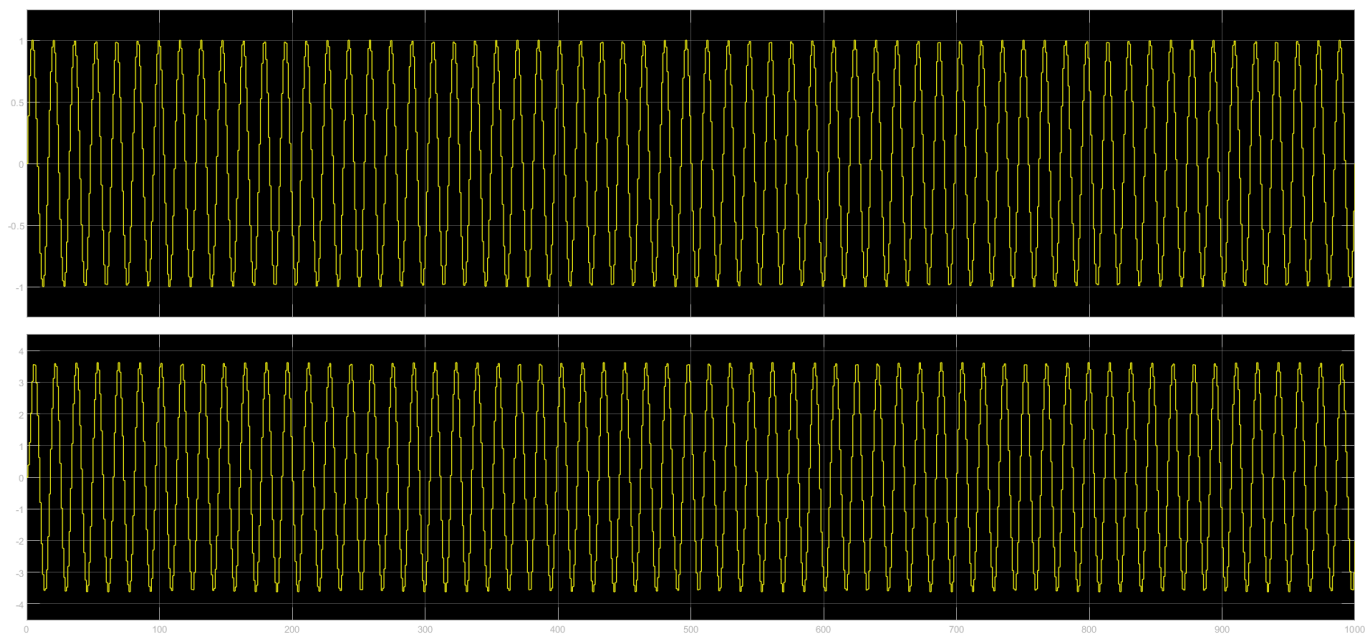


Рис. 36: Спектр фильтра без децимации

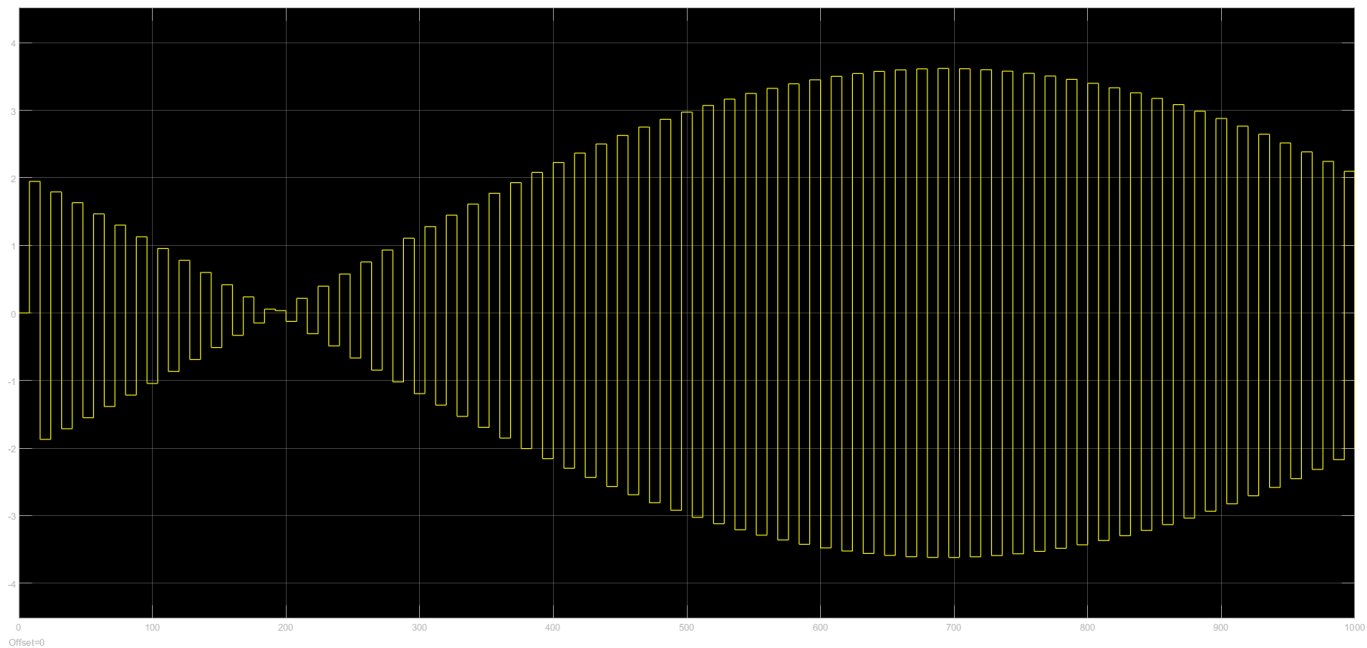


Рис. 37: Спектр фильтра с децимацией

Подадим на вход гармонический сигнал $f = 1 + 0.126/2 (\approx \pi + \pi/8)$

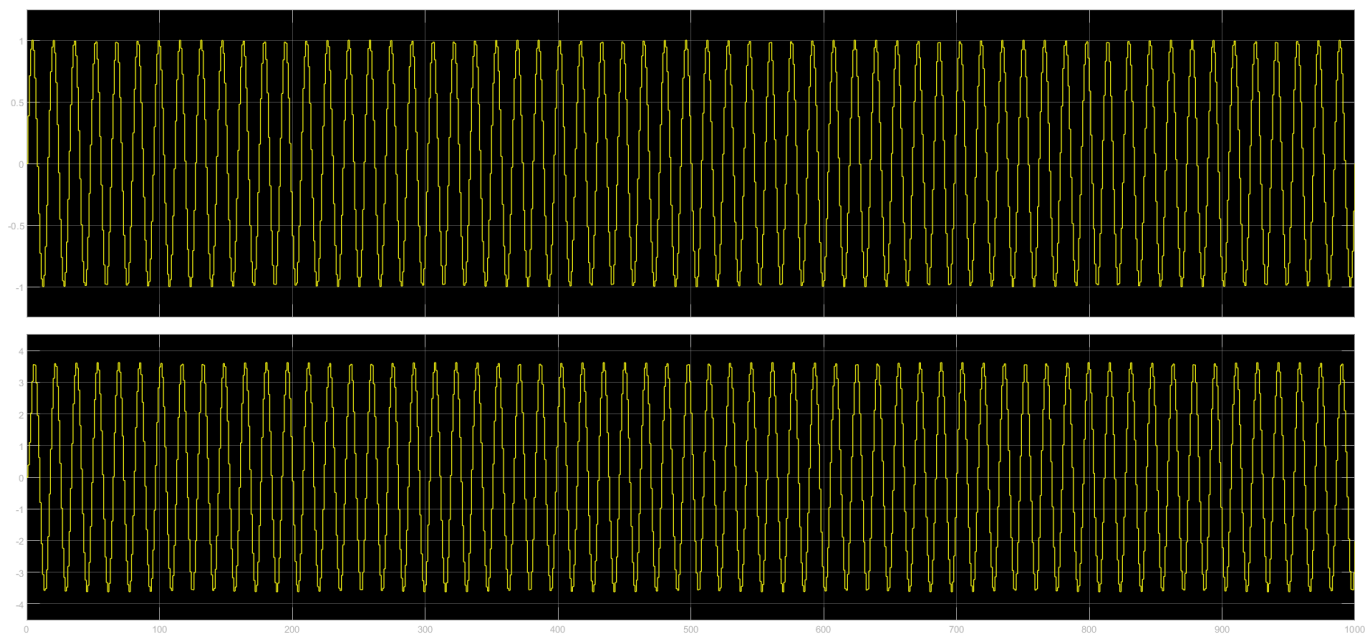


Рис. 38: Спектр фильтра без децимации

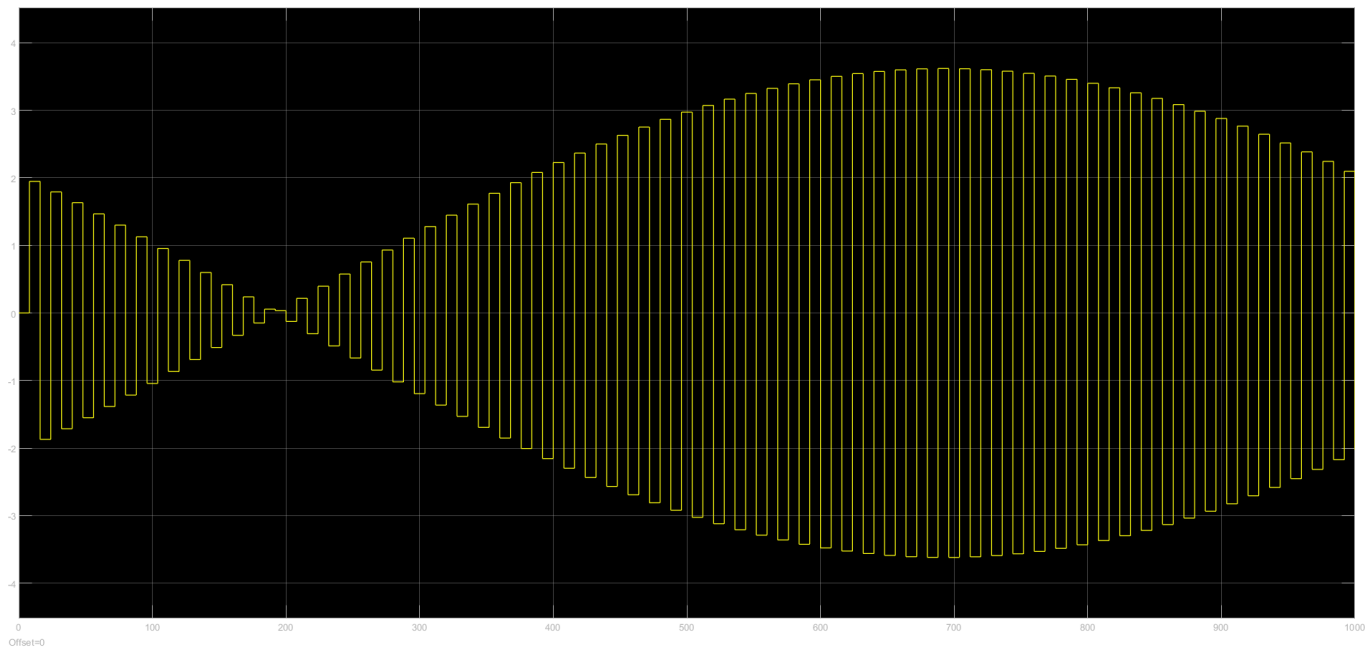


Рис. 39: Спектр фильтра с децимацией

Рассмотрим FIR фильтры с временными окнами.

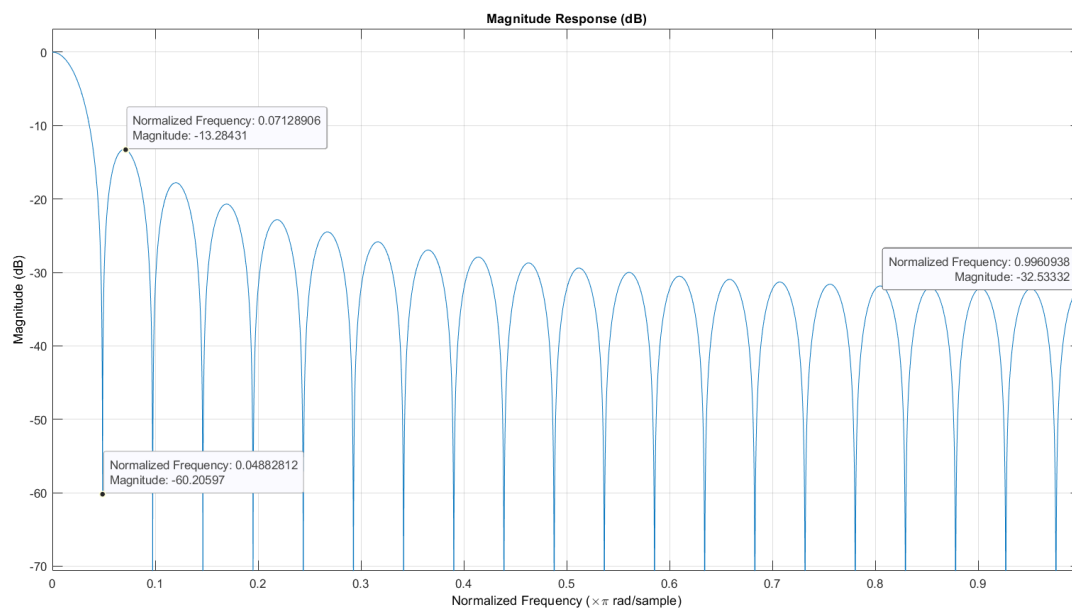


Рис. 40: Спектр FIR фильтра, прямоугольное окно

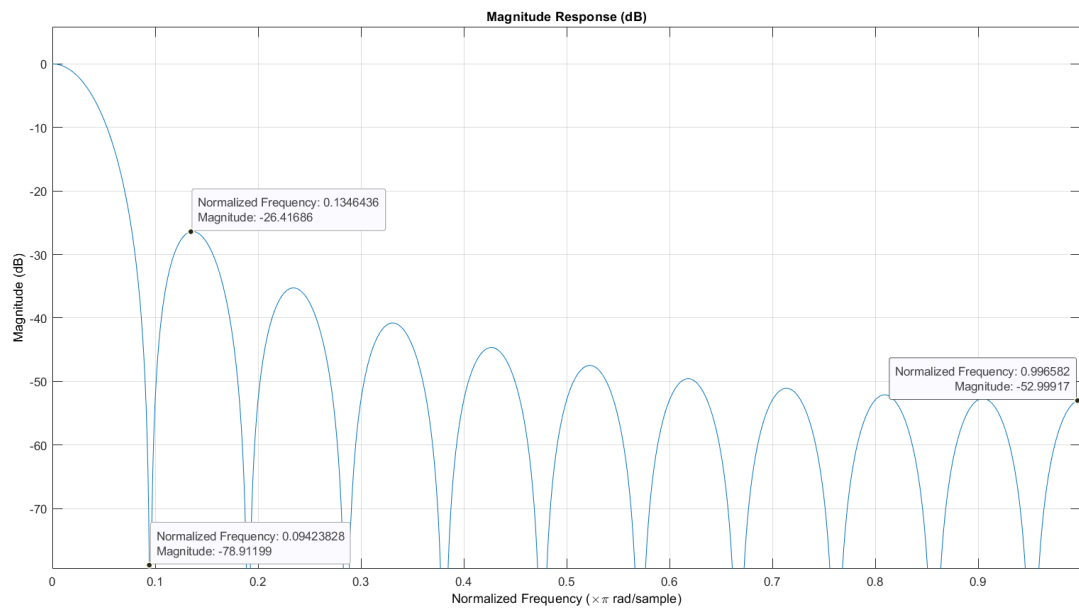


Рис. 41: Спектр FIR фильтра, треугольное окно

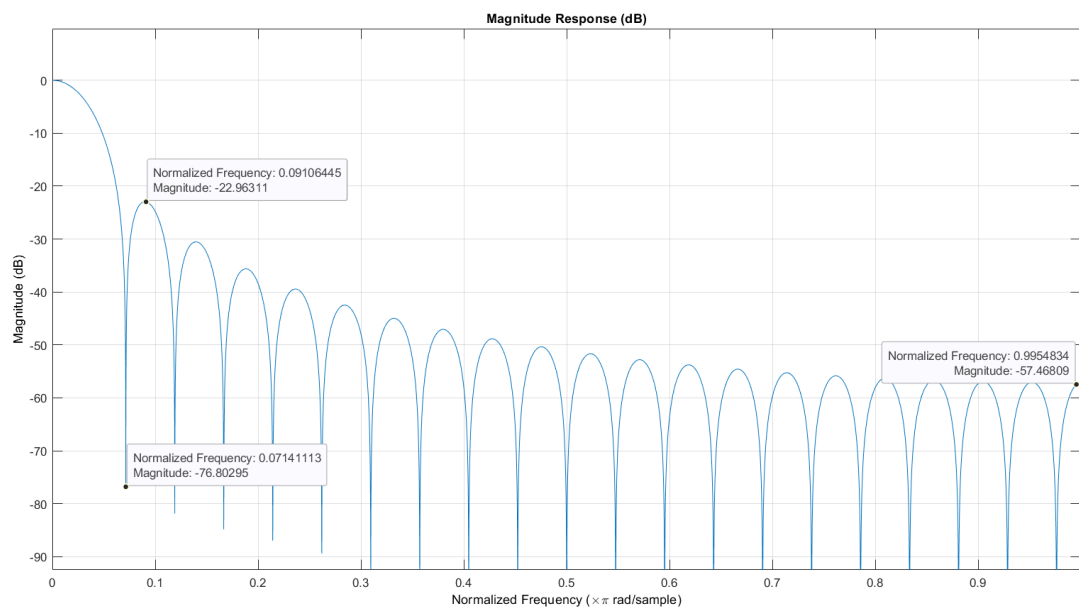


Рис. 42: Спектр FIR фильтра, гармоническая полуволна

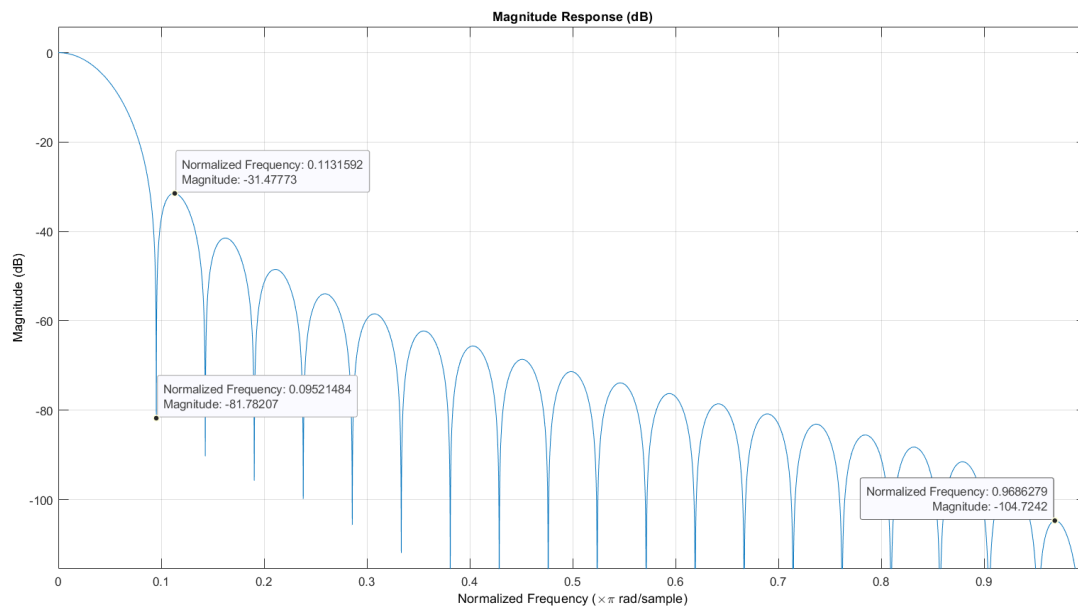


Рис. 43: Спектр FIR фильтра, приподнятый косинус

5. FDATool Matlab

Синтезируем FIR-фильтр нижних частот с характеристиками:

$$w_{pass} = 0.4 \quad w_{stop} = 0.5 \quad A_{pass} = 1 \quad A_{stop} = 60$$

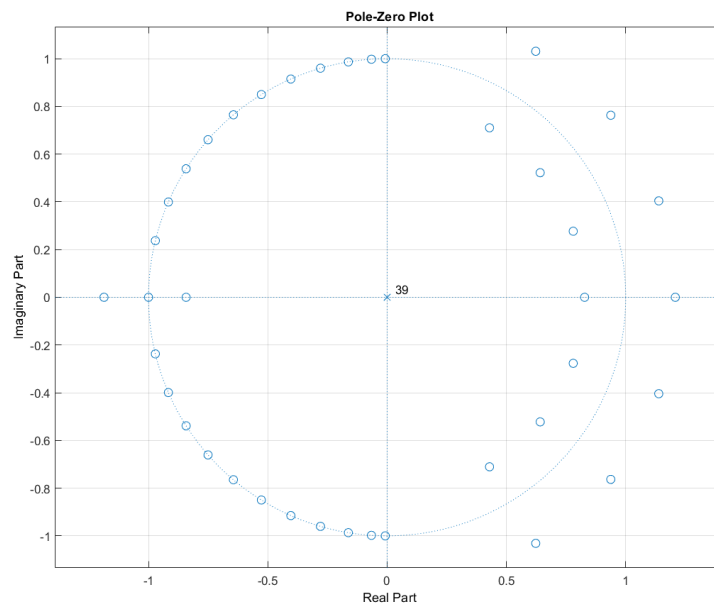


Рис. 44: Карта полюсов FIR фильтра

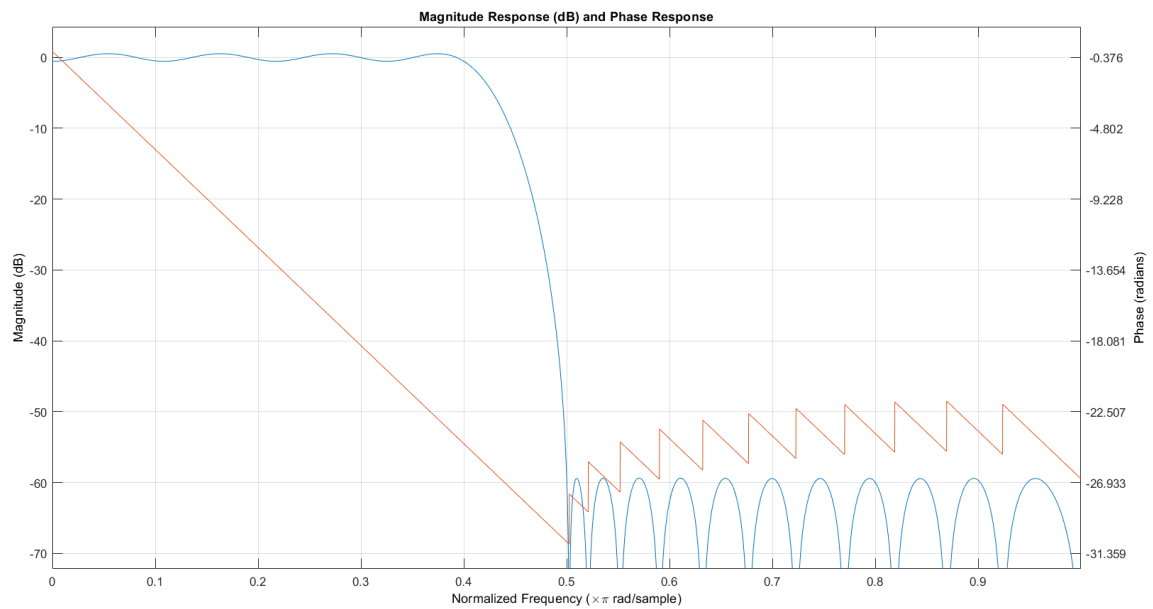


Рис. 45: Частотные характеристики FIR фильтра

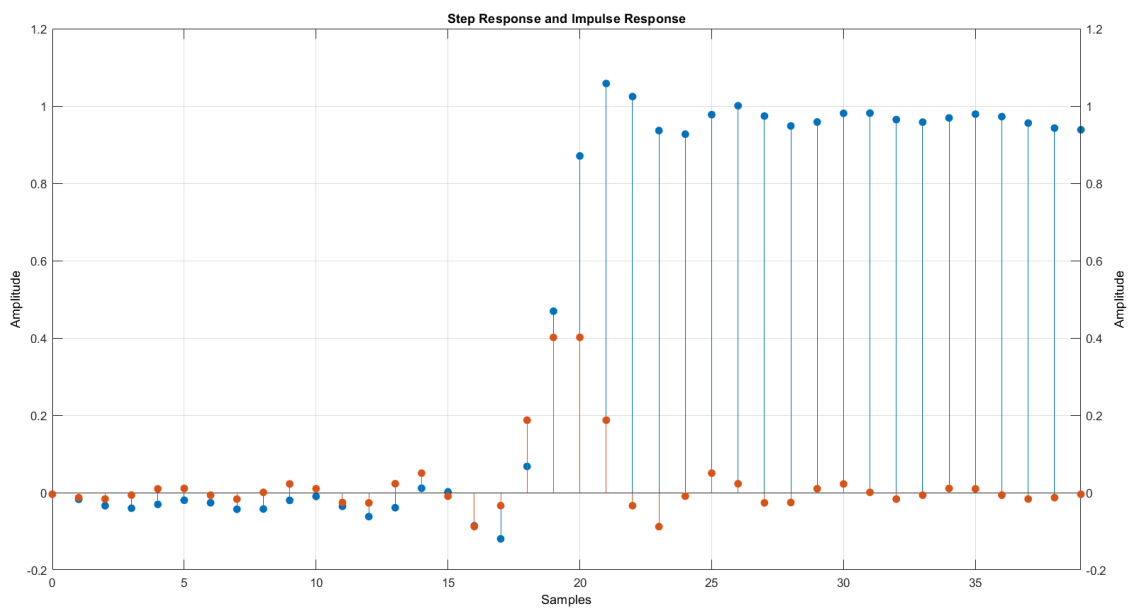


Рис. 46: Временные характеристики FIR фильтра

Синтезируем IIR-фильтр Баттерворта нижних частот с теми же характеристиками.

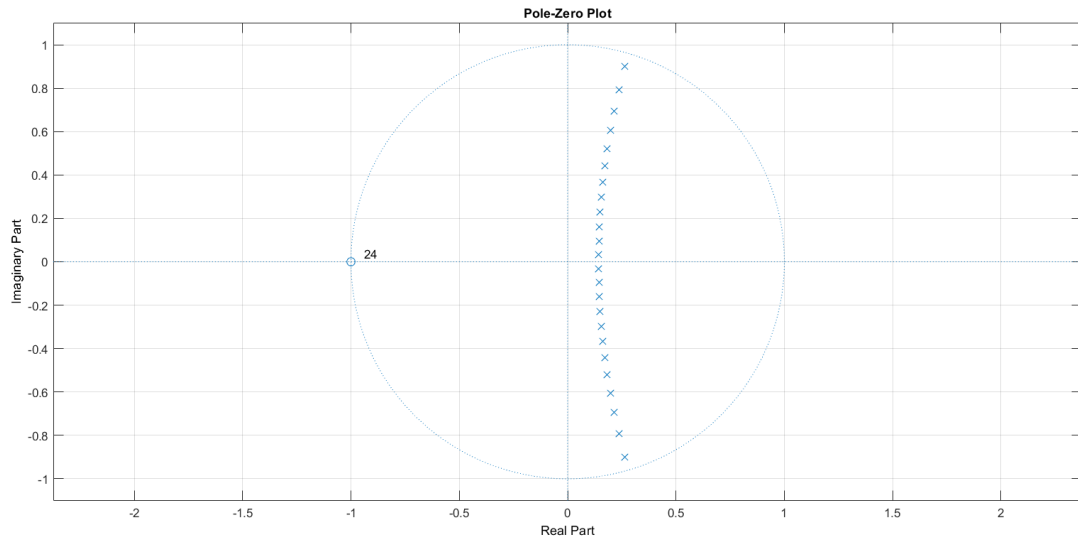


Рис. 47: Карта полюсов IIR-фильтра Баттерворта

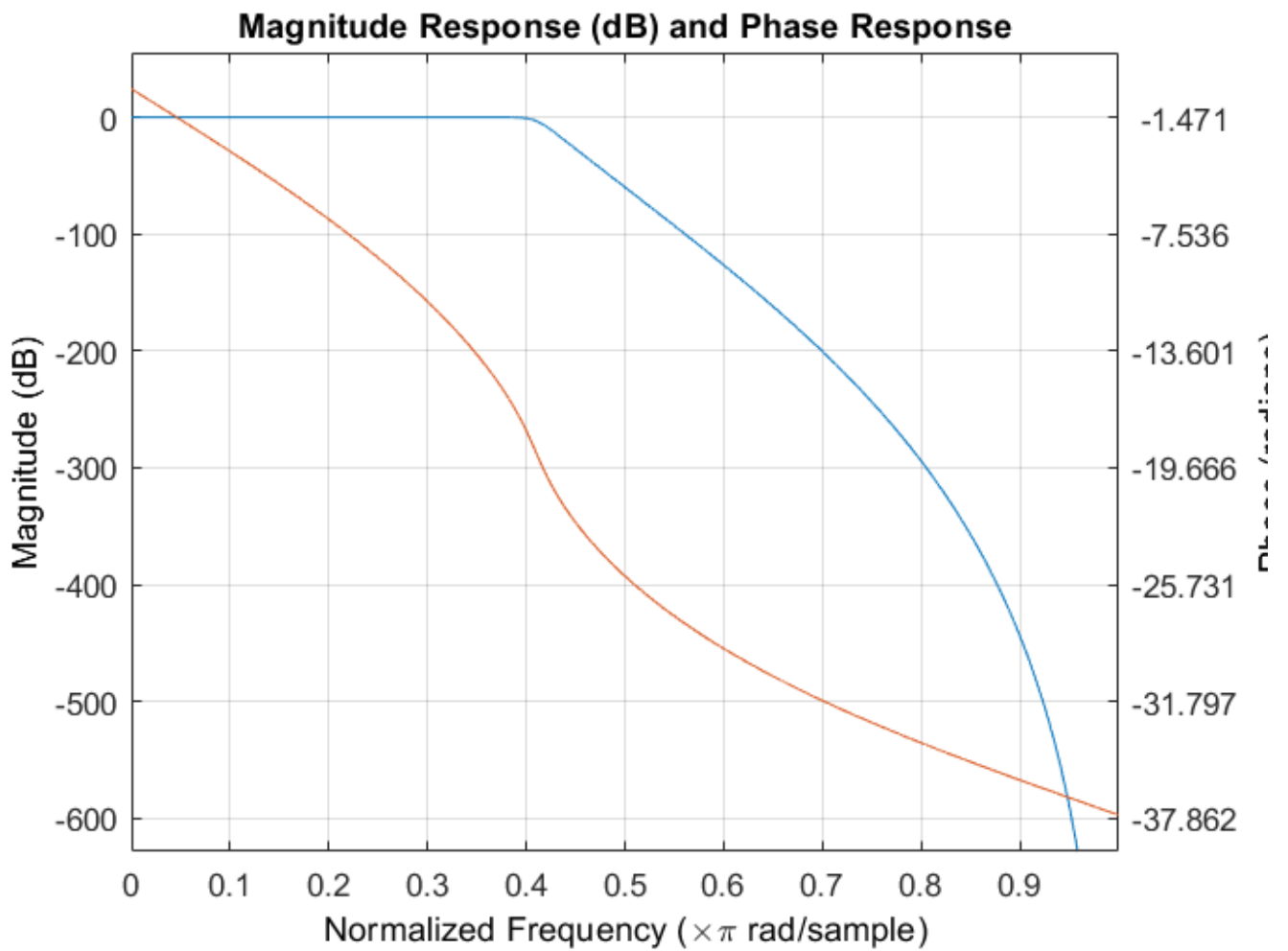


Рис. 48: Частотные характеристики IIR-фильтра Баттерворта

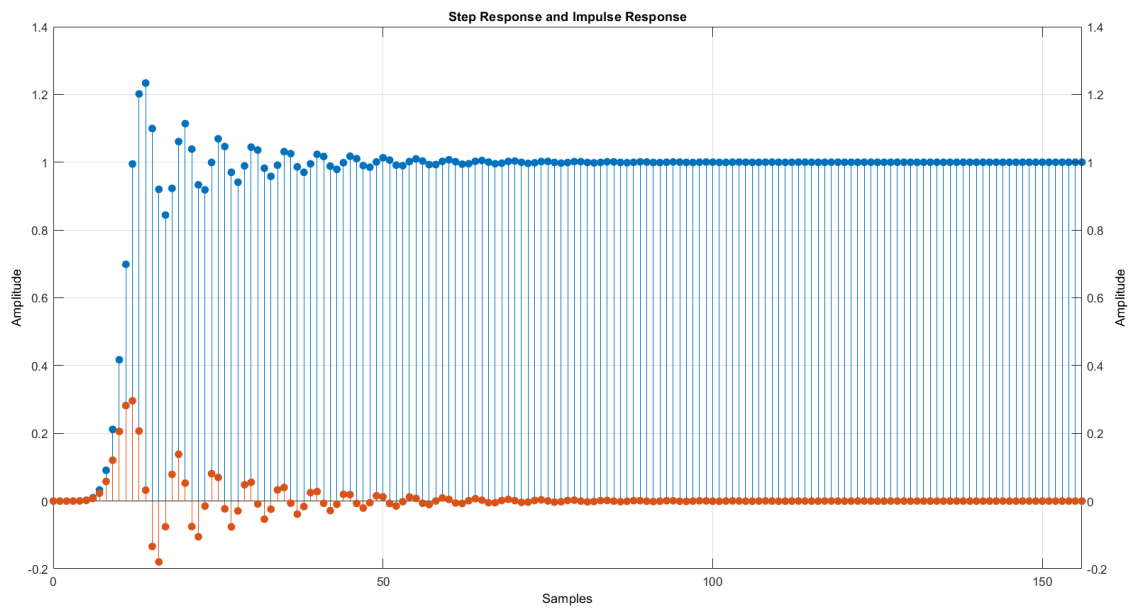


Рис. 49: Временные характеристики IIR-фильтра Баттерворта

Синтезируем IIR-фильтр Чебышева I типа нижних частот с теми же характеристиками.

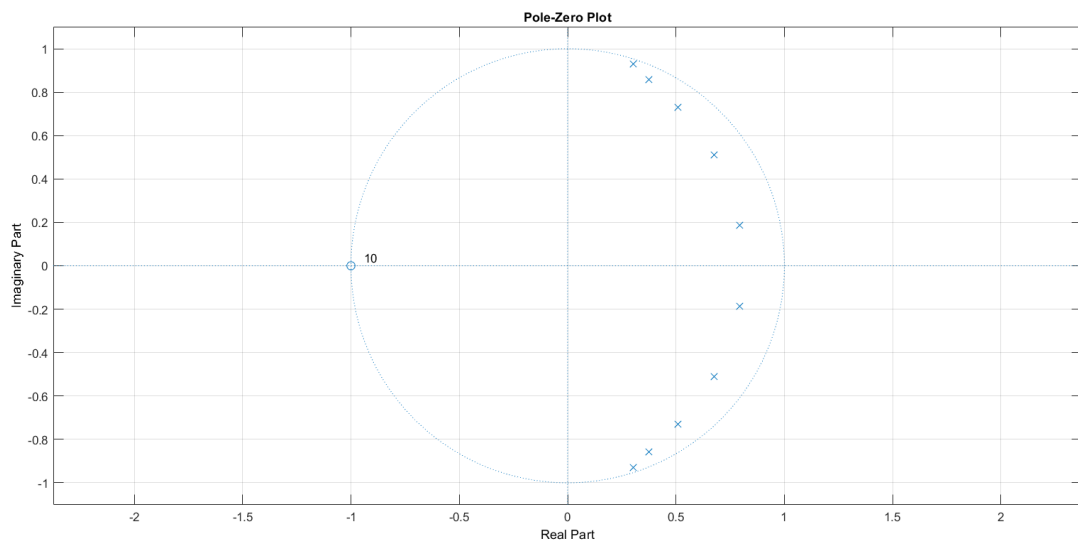


Рис. 50: Карта полюсов IIR-фильтра Чебышева I

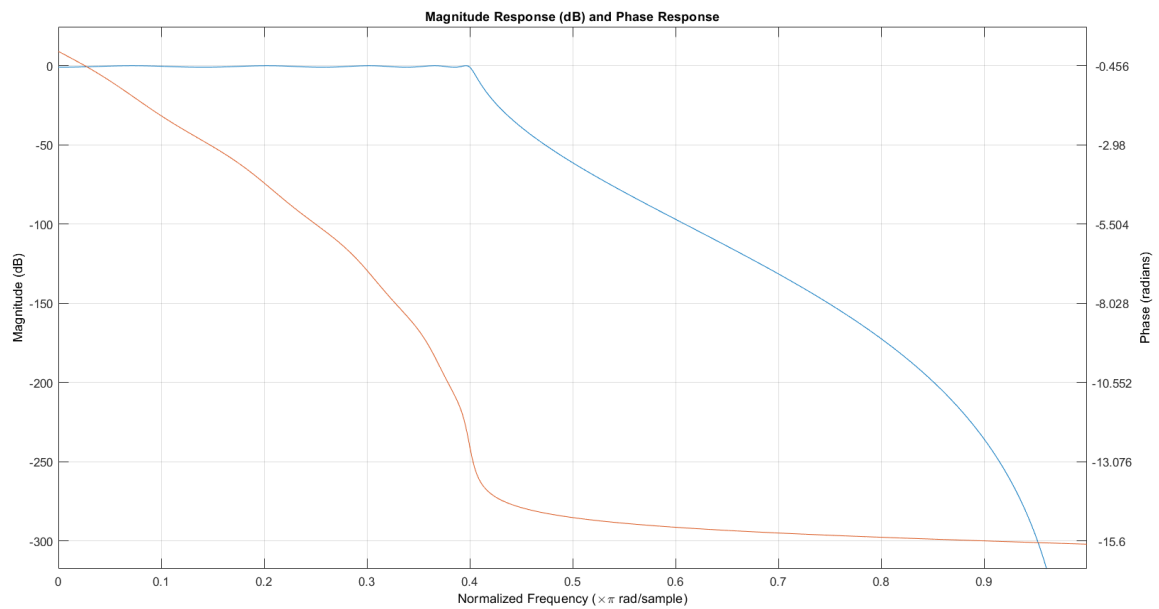


Рис. 51: Частотные характеристики IIR-фильтра Чебышева I

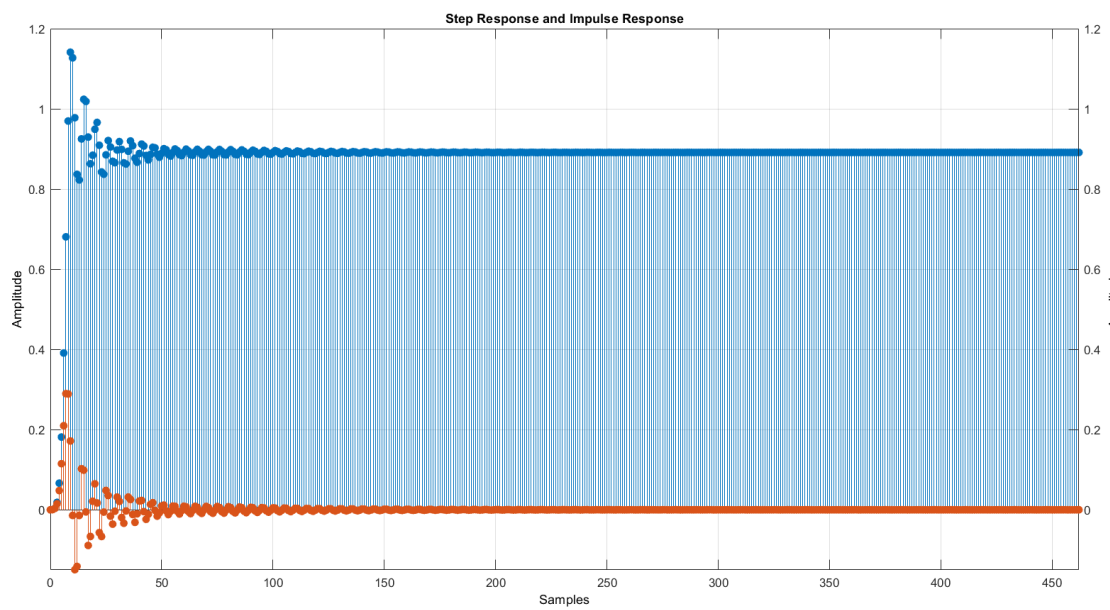


Рис. 52: Временные характеристики IIR-фильтра Чебышева I

Синтезируем IIR-фильтр Чебышева II типа нижних частот с теми же характеристиками.

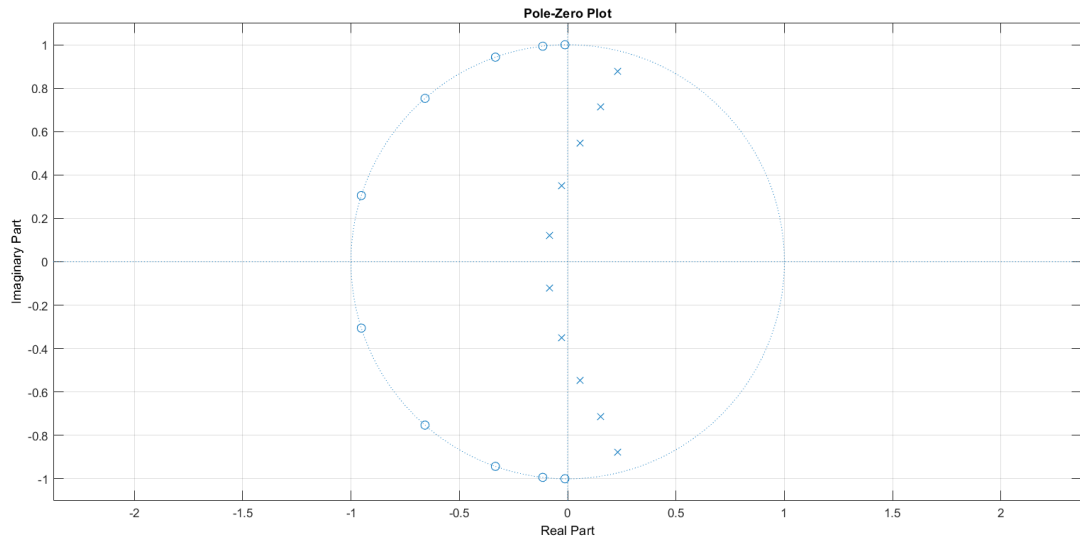


Рис. 53: Карта полюсов IIR-фильтра Чебышева II

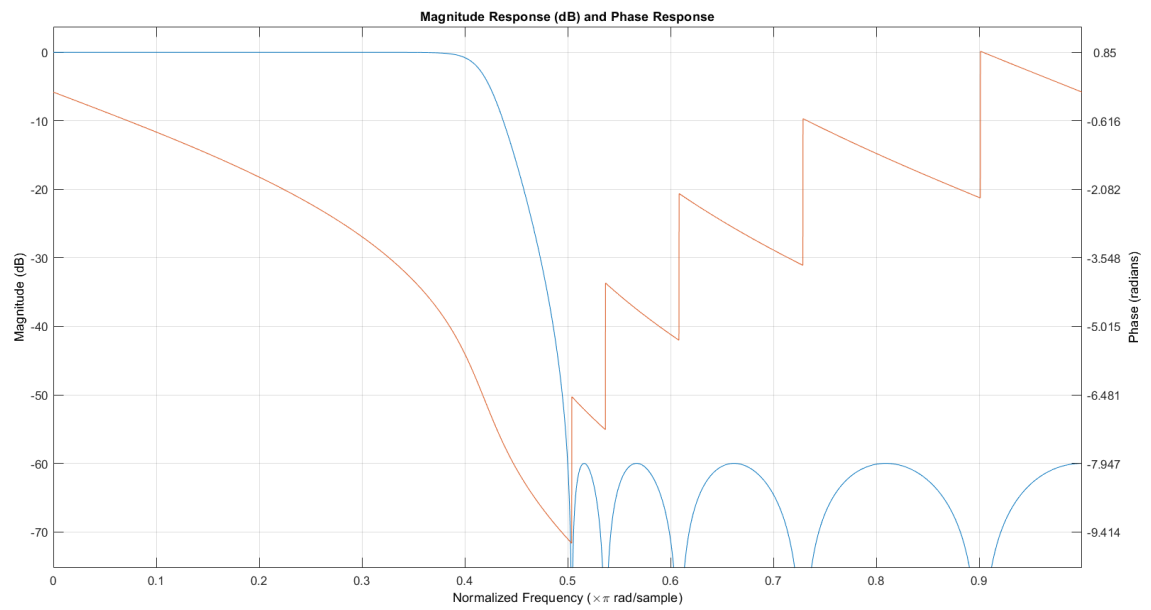


Рис. 54: Частотные характеристики IIR-фильтра Чебышева II

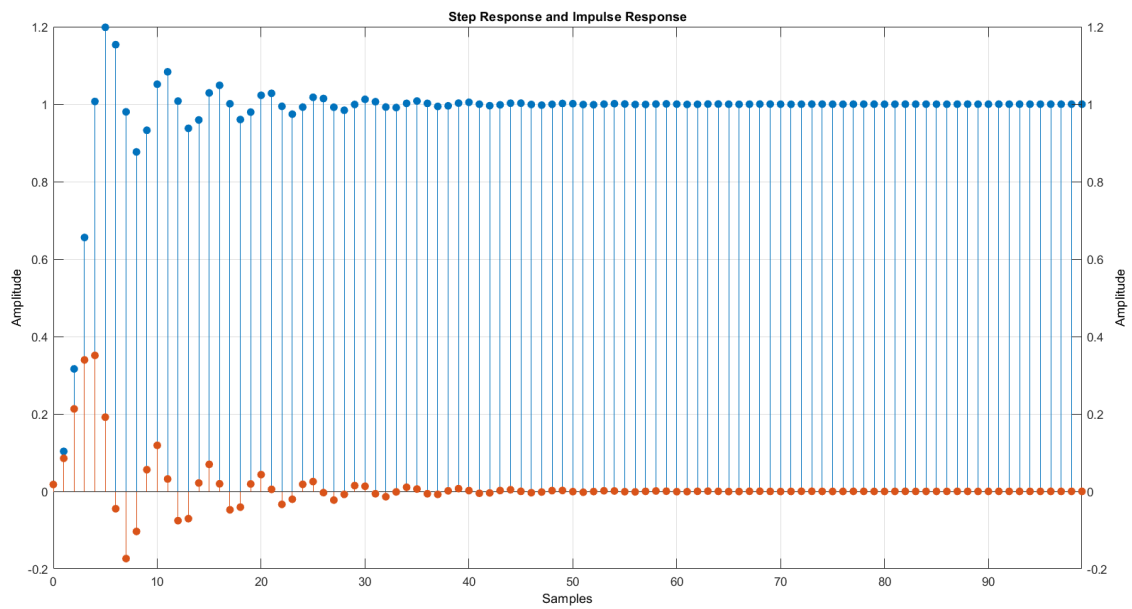


Рис. 55: Временные характеристики ИИР-фильтра Чебышева II

Синтезируем эллиптический ИИР-фильтр нижних частот с теми же характеристиками.

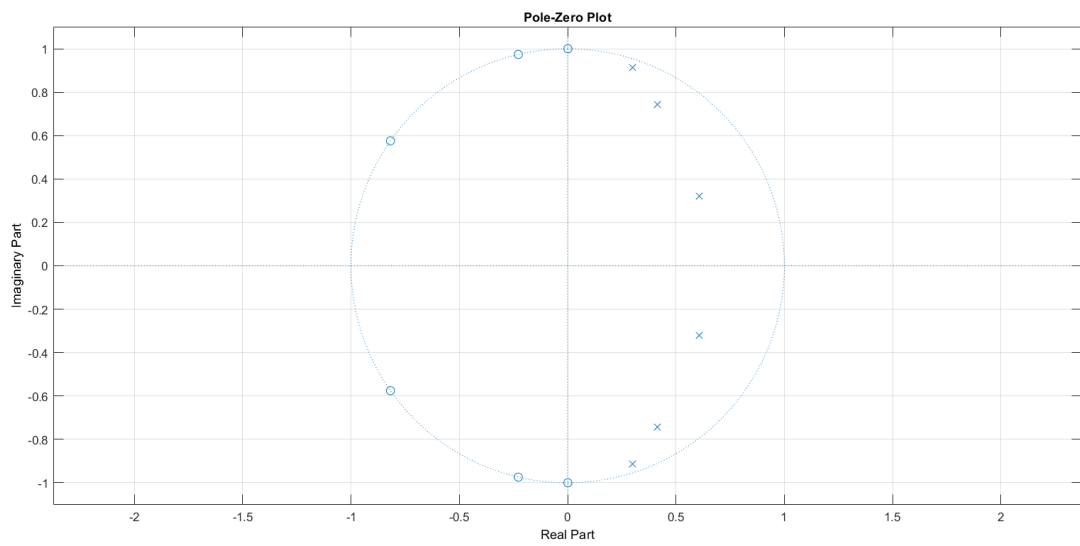


Рис. 56: Карта полюсов эллиптического ИИР-фильтра

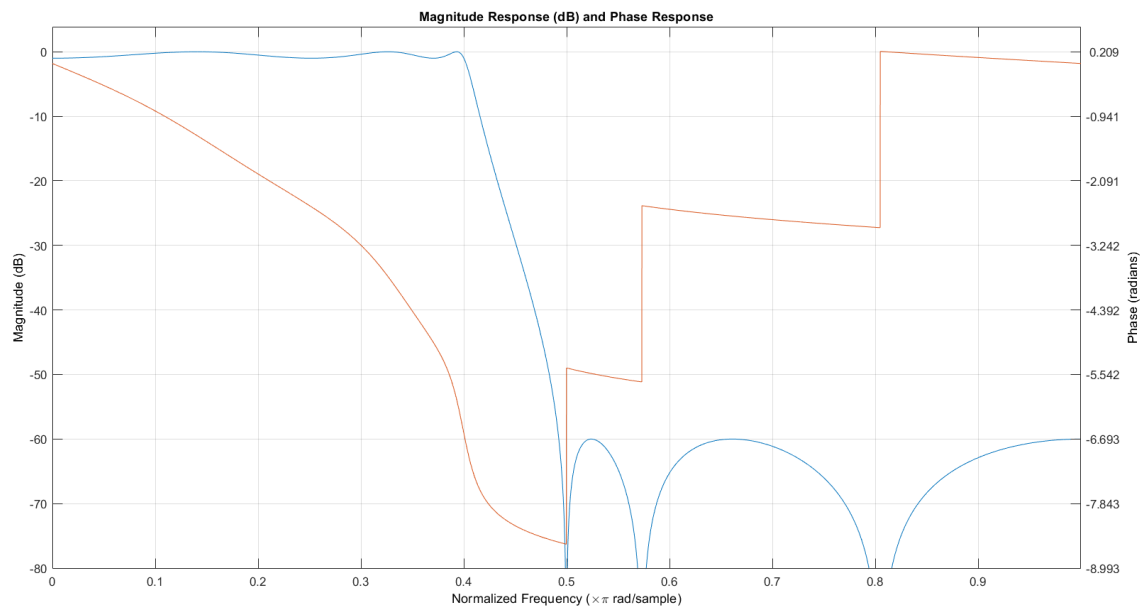


Рис. 57: Частотные характеристики эллиптического IIR-фильтра

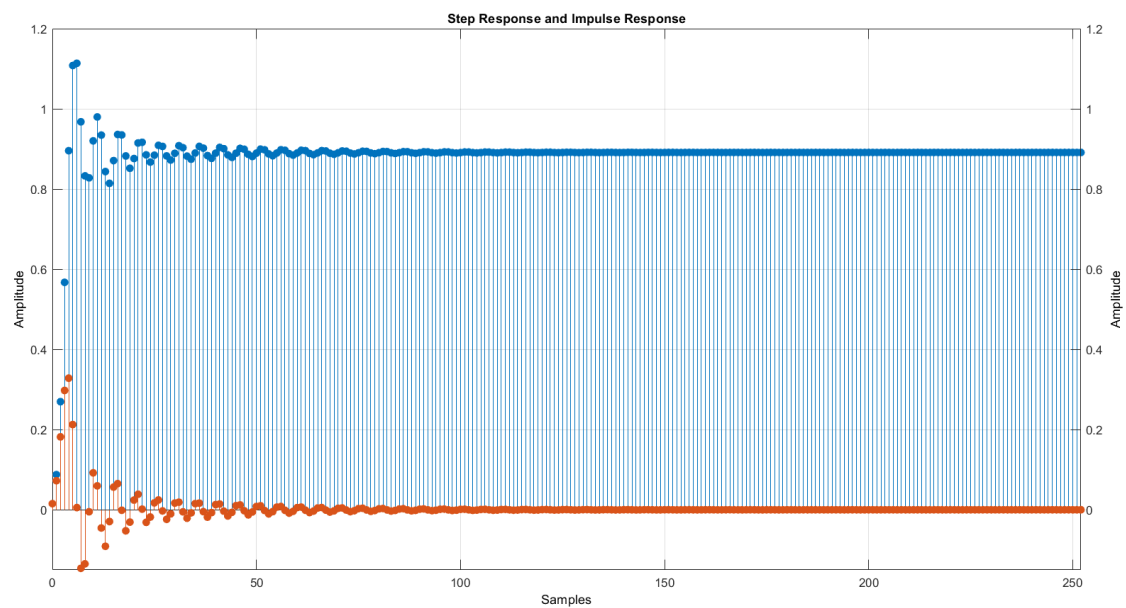


Рис. 58: Временные характеристики эллиптического IIR-фильтра

Синтезируем фильтры нижних частот (FIR-фильтр, фильтр Баттерворта, фильтры Чебышева I и II типов, эллиптический фильтр) с характеристиками:

$$w_{pass} = 0.3 \quad w_{stop} = 0.5 \quad A_{pass} = 1 \quad A_{stop} = 80$$

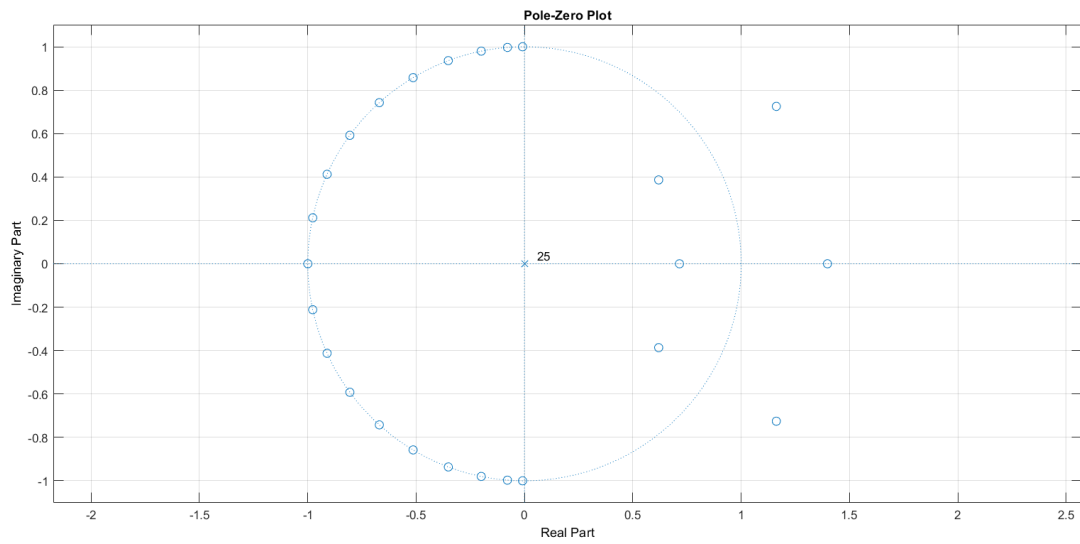


Рис. 59: Карта полюсов FIR фильтра

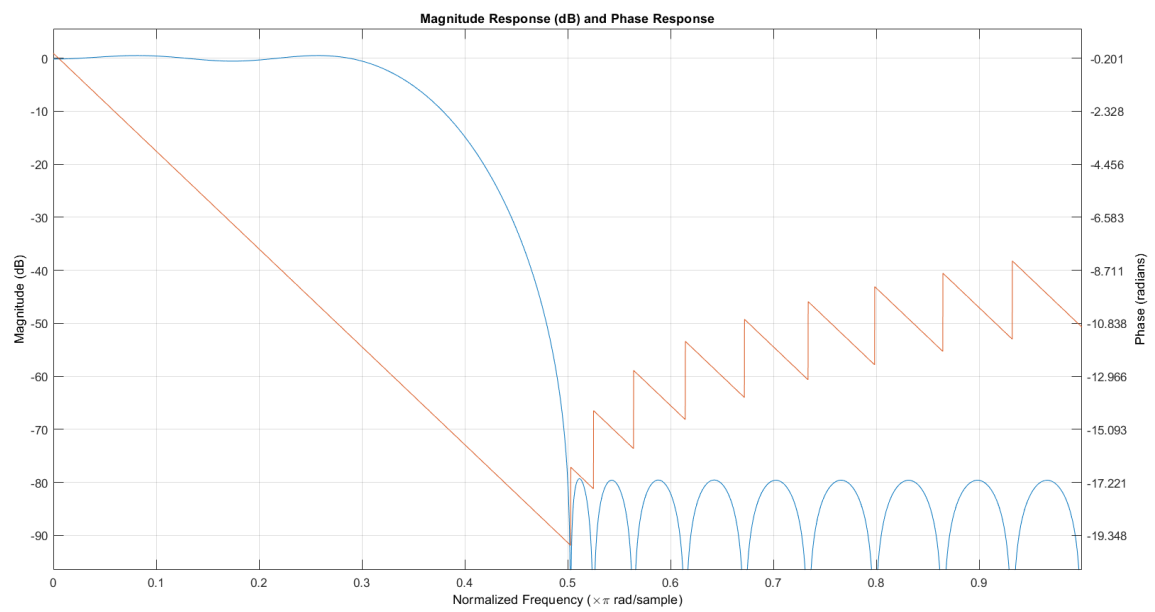


Рис. 60: Частотные характеристики FIR фильтра

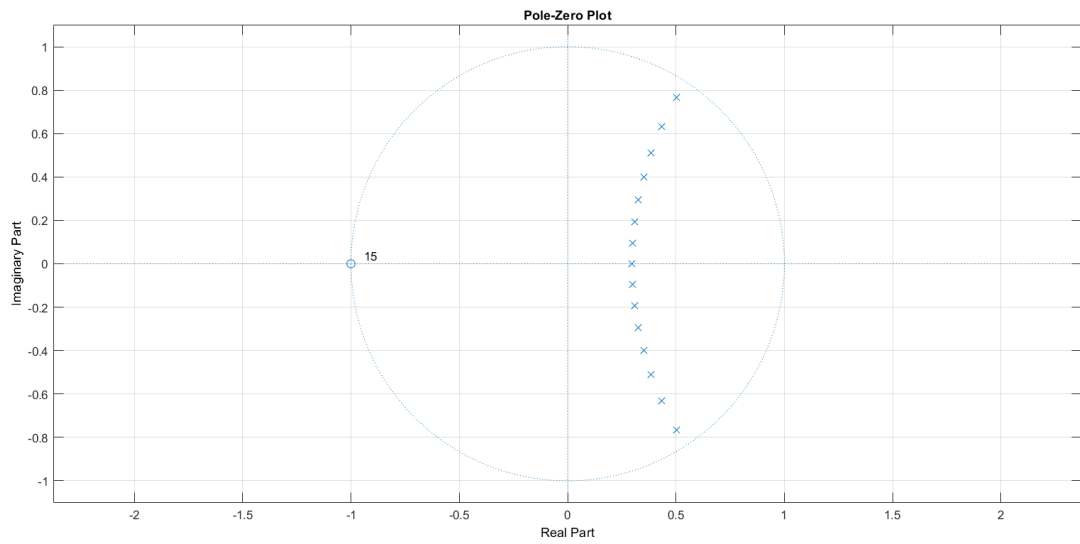


Рис. 61: Карта полюсов IIR-фильтра Баттерворта

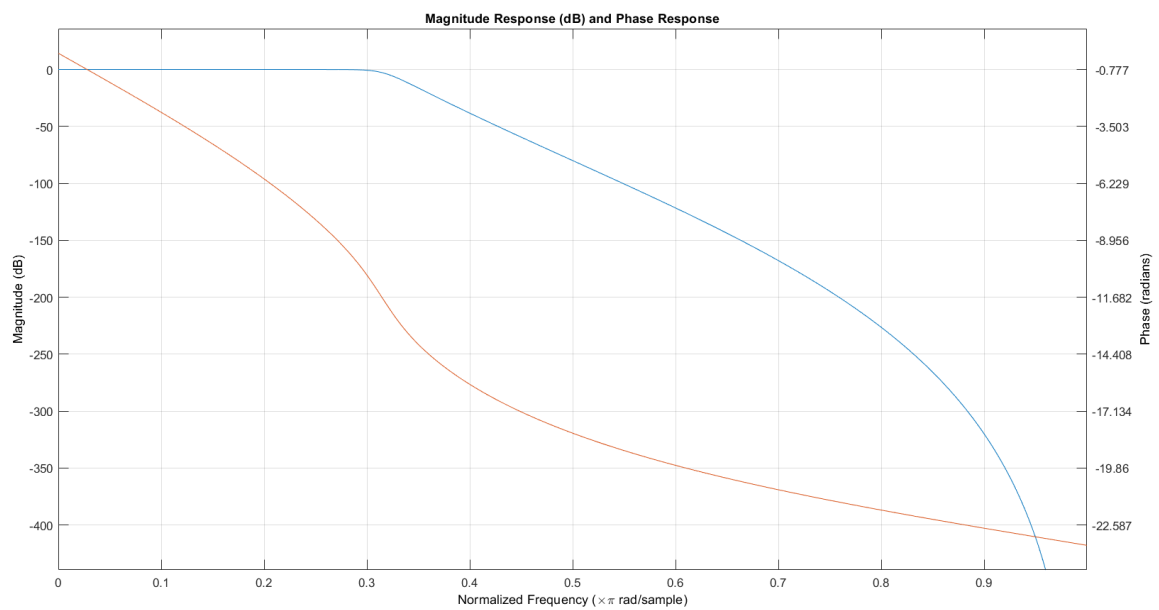


Рис. 62: Частотные характеристики IIR-фильтра Баттерворта

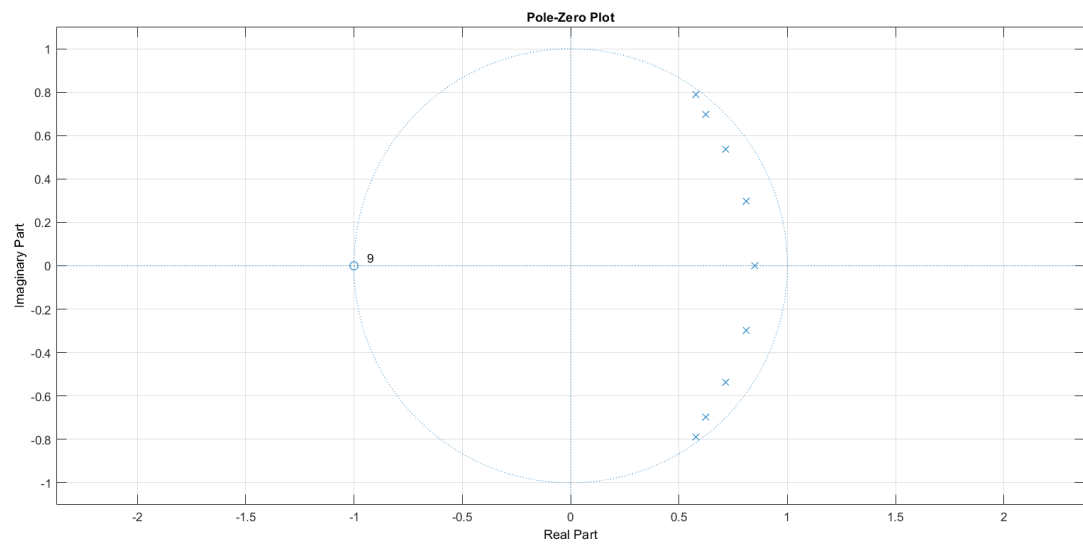


Рис. 63: Карта полюсов IIR-фильтра Чебышева I

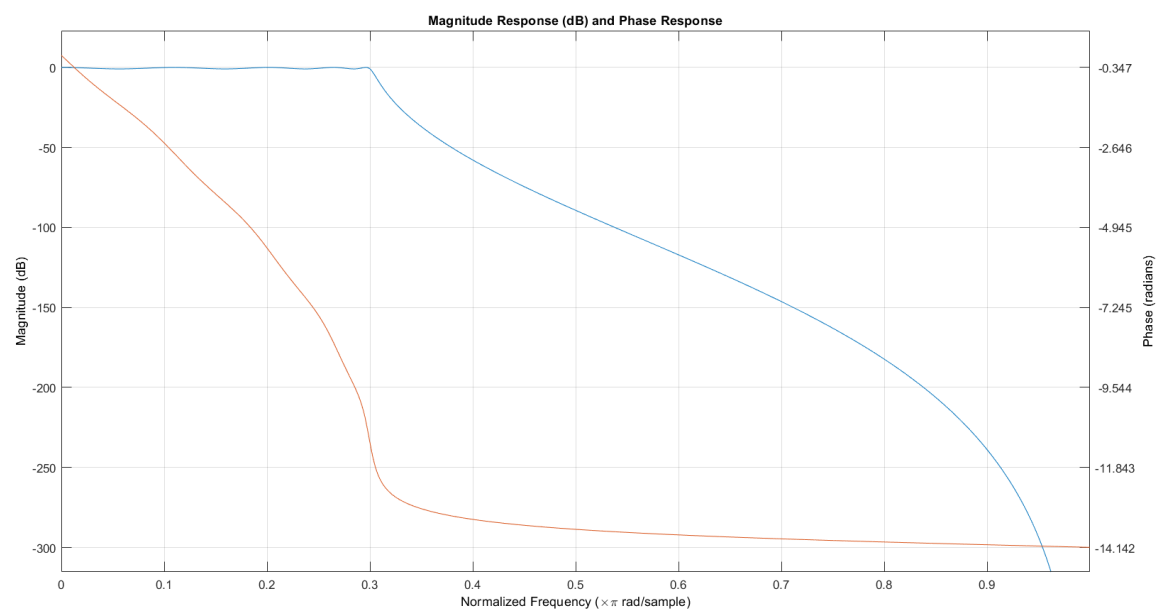


Рис. 64: Частотные характеристики IIR-фильтра Чебышева I

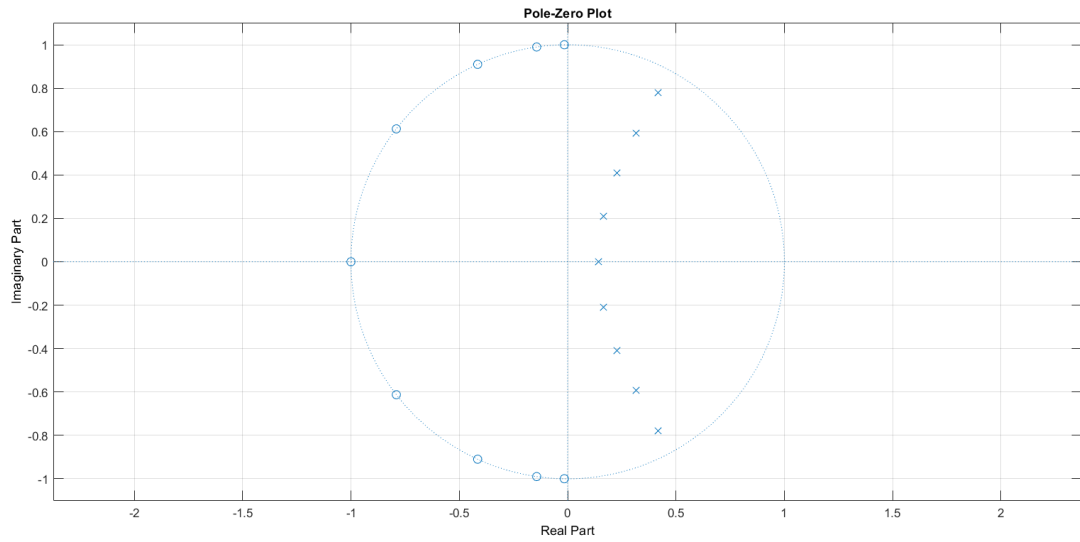


Рис. 65: Карта полюсов IIR-фильтра Чебышева II

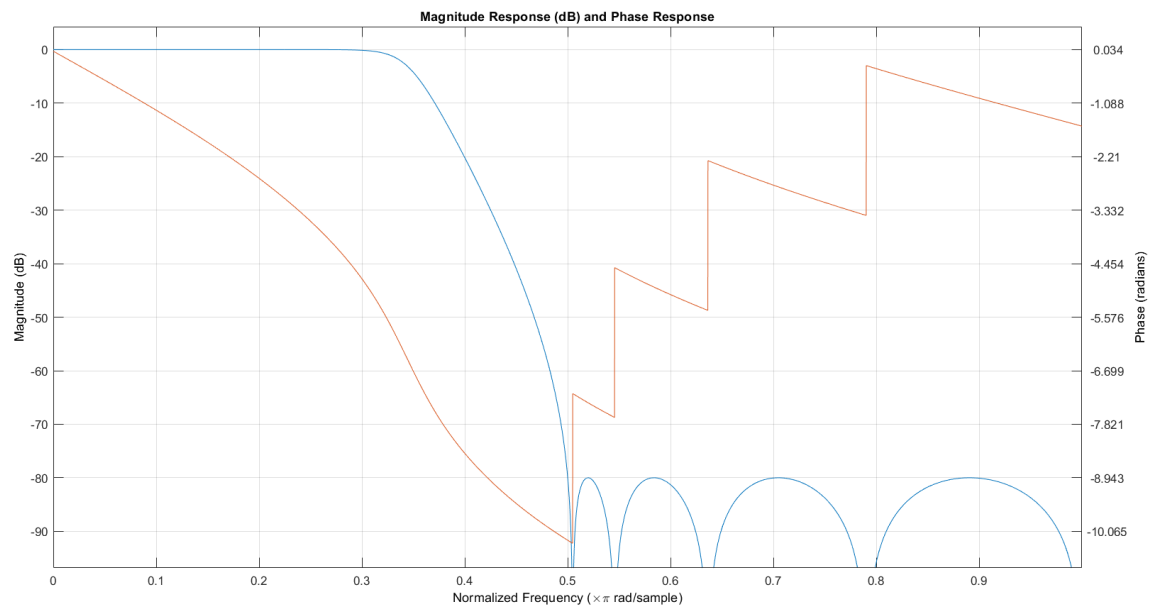


Рис. 66: Частотные характеристики IIR-фильтра Чебышева II

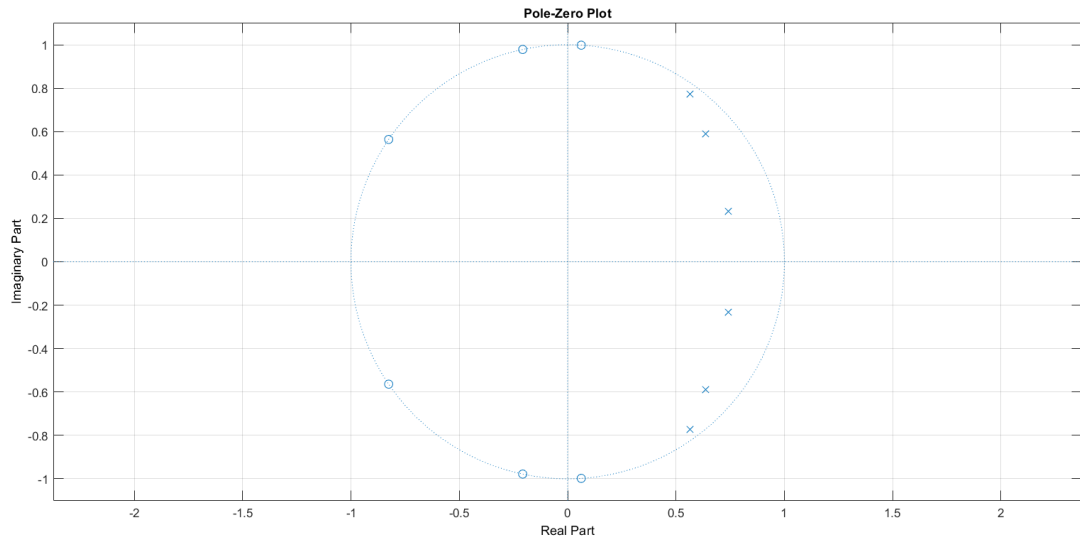


Рис. 67: Карта полюсов эллиптического IIR-фильтра

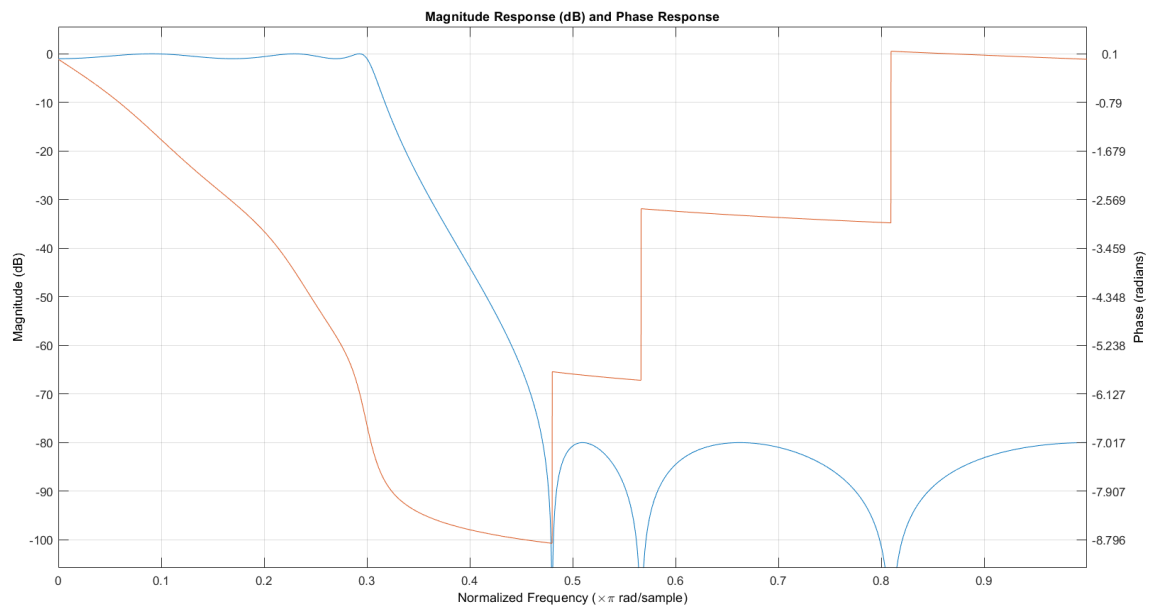


Рис. 68: Частотные характеристики эллиптического IIR-фильтра