

# СКИН-ЭФФЕКТ В ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ

Маслов Артём

Симанкович Александр

Б01-104

17.11.2022

## Аннотация

В работе исследуется явление скин-эффекта в полем медном цилиндре. Определяется значение проводимости  $\sigma$ .

**Ключевые слова:** переменное магнитное поле, скин-эффект.

## Теория

*Скин-эффектом* называется явление протекания токов высокой частоты в тонком поверхностном слое проводника. Скин-эффект проявляется в виде уменьшения амплитуды колебаний внутри проводника и увеличения в поверхностном слое.

Качественно скин-эффект объясняется явлением электромагнитной индукции. Рассмотрим длинный цилиндрический проводник (рис. 1), по которому течет ток  $J$ . Согласно закону Био-Савара-Лапласа, электрический ток создает магнитное поле  $B$ , силовые линии которого представляют собой окружности с центром на оси проводника.

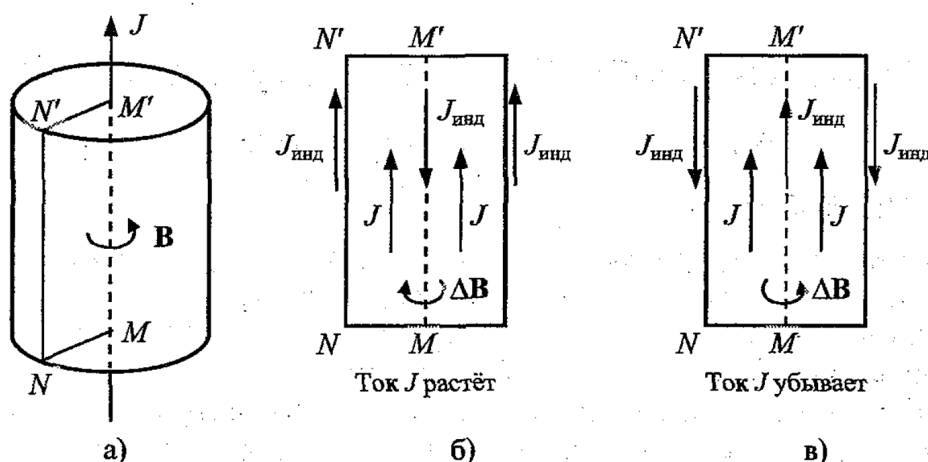


Рис. 1: а) – переменный ток внутри проводника. б) и в) – случаи увеличения и уменьшения тока.

Рассмотрим контур  $NMM'N'$  внутри проводника. По закону электромагнитной индукции при изменении магнитного потока сквозь этот контур, создаётся индукционное электриче-

ское поле:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{\text{инд}} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$$

При возрастании тока через проводник  $\frac{dJ}{dt} > 0$ , индукционный ток сонаправлен с внешним током на отрезке  $NN'$  и противоположно направлен на отрезке  $MM'$ . При убывании тока  $\frac{dJ}{dt} < 0$ , индукционный ток будет сонаправлен на отрезке  $MM'$  и противоположно направлен на отрезке  $NN'$ . Таким образом, индукционное электрическое поле стремится скомпенсировать изменение внешнего поля внутри проводника и усилить на поверхности. В этом и заключается суть скин-эффекта.

## Скин-эффект в квазиодномерном случае



Рис. 2

Рассмотрим бесконечно большой, плоский проводник (рис. 2). Пусть вдоль границы проводника металл-вакуум течет переменный ток  $J = J_0 \cos \omega t$ . Найдём объёмное распределение токов внутри проводника. В силу соображений симметрии и однородности проводника будем считать, что напряженность  $E = E(z, t)$  и плотность тока  $j = j(z, t)$  зависят только от расстояния до поверхности проводника  $z$  и времени  $t$ .

Из уравнений Максвелла получим уравнение плоской электрической волны. Согласно закону Ома плотность тока  $j$  связана с напряженностью электрического поля  $E$  проводимостью  $\sigma$  соотношением:

$$j = \sigma E$$

Далее будем предполагать, что характерная частота изменения поля достаточно мала, а проводимость металла велика, чтобы можно было пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости. Также будем считать, что  $\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$  и в среде нет нескомпенсированных зарядов  $\rho = 0$ . Тогда уравнения Максвелла можно записать в виде:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0$$

Применим операцию ротор к первому уравнению:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\sigma \mathbf{E})$$

Из теории поля известно тождество:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$$

Тогда получится уравнение плоской волны:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\mu_0\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

В одномерном случае  $E = E(z, t)$  и волновое уравнение записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu\mu_0\sigma \frac{\partial E}{\partial t}$$

Для случая гармонических колебаний тока с частотой  $\omega$ , решения будем искать в виде:

$$E(z, t) = E_0(z) \cdot e^{-i\omega t}$$

Решением дифференциального уравнения будет

$$E(z, t) = E_0(0) \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}(1-i)\right) \cdot \exp(-i\omega t)$$

Где введено обозначение  $\Lambda = \sqrt{\frac{2}{\mu\mu_0\sigma\omega}}$  Тогда распределение плотности тока внутри проводника будет равно

$$j(z, t) = \sigma E(z, t) = j_0(0) \cdot \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right) \cdot \exp\left(i\left(\frac{z}{\Lambda} - \omega t\right)\right)$$

Проанализируем полученный результат. Ток в проводнике будет распределен по гармоническому закону с частотой  $\omega$ . На расстоянии  $\Lambda$  от поверхности проводника амплитуда уменьшится в  $e$  раз. То есть переменный ток  $j$  и переменное электрическое поле  $E$  проникают внутрь проводника на характерное расстояние  $\Lambda$ , называемое *толщиной скин-слоя*. При увеличении частоты толщина скин-слоя уменьшается, поэтому высокочастотные токи будут распределены вдоль тонкого поверхностного слоя. В случае идеального проводника, когда  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda \rightarrow 0$  токи тоже будут распределены по поверхности проводника.

## Скин-эффект в полем цилиндре

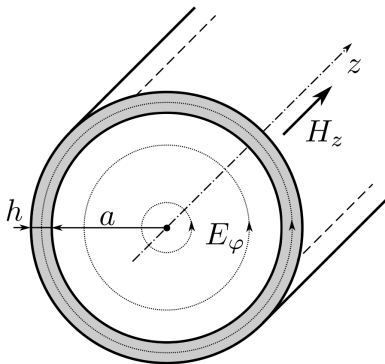


Рис. 3

В работе изучается скин-эффект в медном цилиндре, помещенном внутрь соленоида. Найти теоретическое распределение электромагнитного поля внутри такого цилиндра является сложной задачей, поэтому для упрощения вычислений и эксперимента используются следующие предположения. Цилиндр должен быть длинным, чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами и считать электромагнитное поле зависящим только от расстояния до оси симметрии цилиндра. Так как измерить поле внутри твердого тела невозможно, то используется полый цилиндр. Измерив поле внутри цилиндра, можно вычислить поле на его границе. Чтобы можно было пренебречь

кривизной стенок цилиндра и в малой области считать их плоскими, стенки цилиндра должны быть тонкими.

Магнитное поле внутри цилиндра направлено вдоль оси  $z$ , а вихревое электрическое поле

всюду перпендикулярно радиусу. Пусть электромагнитное поле изменяется по гармоническому закону с частотой  $\omega$ :

$$H_z = H(r) \cdot e^{i\omega t}$$

$$E_\varphi = E(r) \cdot e^{i\omega t}$$

На границе цилиндра касательные к поверхности компоненты как  $\mathbf{E}$ , так и  $\mathbf{H}$  непрерывны. Так как внутри цилиндра ток отсутствует, то магнитное поле внутри цилиндра является однородным.

$$H_z(r, t) = H_1 e^{i\omega t}$$

По закону Фарадея найдем вихревое электрическое поле:

$$E_\varphi \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \mu_0 \frac{dH_z}{dt}$$

$$E(r) = -\frac{1}{2} \mu_0 r \cdot i\omega H_1$$

На границе цилиндра  $E_1 = -\frac{1}{2} i\omega a \mu_0 H_1$ .

Найдем распределение поля внутри стенки. Поле внутри стенки описывается уравнением скин-эффекта.

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = i\omega \sigma \mu_0 H$$

Зададим следующие граничные условия:

$$H(0) = H_0$$

$$H(h) = H_1$$

Решения будем искать в виде:

$$H(x) = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x}$$

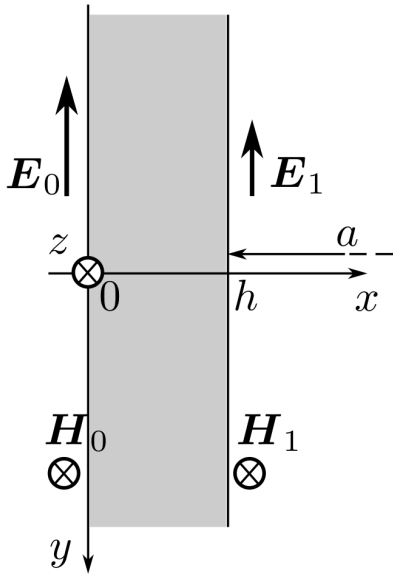


Рис. 4: Поле в стенке цилиндра. Решением дифференциального уравнения, удовлетворяющего данным начальным условиям будет

$$H_1 = \frac{H_0}{\operatorname{ch} ah + \frac{1}{2} \alpha a \operatorname{sh}(\alpha h)} \quad (1)$$

где  $\alpha = \sqrt{i\omega \sigma \mu_0} = \frac{1+i}{\Lambda}$ .

Проанализируем предельные случаи.

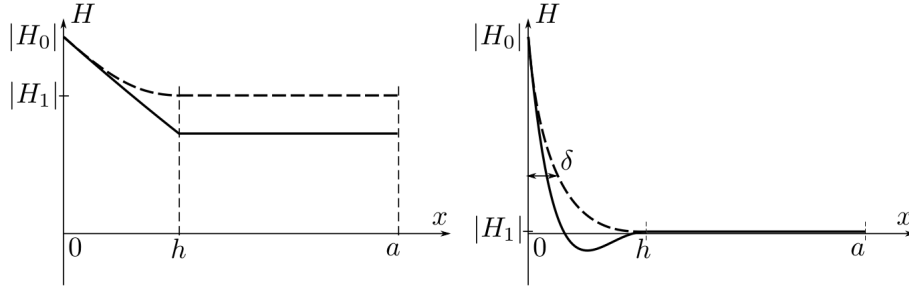


Рис. 5: Распределение амплитуды колебаний магнитного поля изображено пунктиром, мгновенное значение в некоторый момент времени – сплошной линией. Слева случай низких частот  $\Lambda \gg h$ , справа случай высоких частот  $\Lambda \ll h$ .

1. Случай низких частот  $\Lambda \gg h$ . Толщина скин-слоя превосходит толщину цилиндра, поэтому магнитное поле не полностью затухает внутри стенки цилиндра и имеет некую постоянную составляющую внутри полости.  $\alpha h \ll 1$ ,  $\text{ch } \alpha h \approx 1$ ,  $\text{sh } \alpha h \approx \alpha h$ .

$$H_1 \approx \frac{H_0}{1 + i \frac{ah}{\Lambda^2}}$$

Тогда отношение модулей амплитуд будет равно:

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{ah}{\Lambda}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} (ah\sigma\mu_0\omega)^2}} \quad (2)$$

Колебания  $H_1$  отстают по фазе от  $H_0$  на угол

$$\psi = \arctg \left( \frac{ah}{\Lambda} \right)^2. \quad (3)$$

2. Случай высоких частот  $\Lambda \ll h$ . Толщина скин слоя меньше толщины стенки, поэтому внутри цилиндра магнитное поле будет равно 0.  $\alpha h \gg 1$ ,  $\text{sh } \alpha h \approx \text{ch } \alpha h \approx \frac{1}{2}e^{\alpha h}$ .

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{4}{\alpha a} e^{-\alpha h} = \frac{2\sqrt{2}\Lambda}{a} e^{-\frac{h}{\Lambda}} e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{\Lambda}\right)}$$

Тогда отношение модулей амплитуд будет равно:

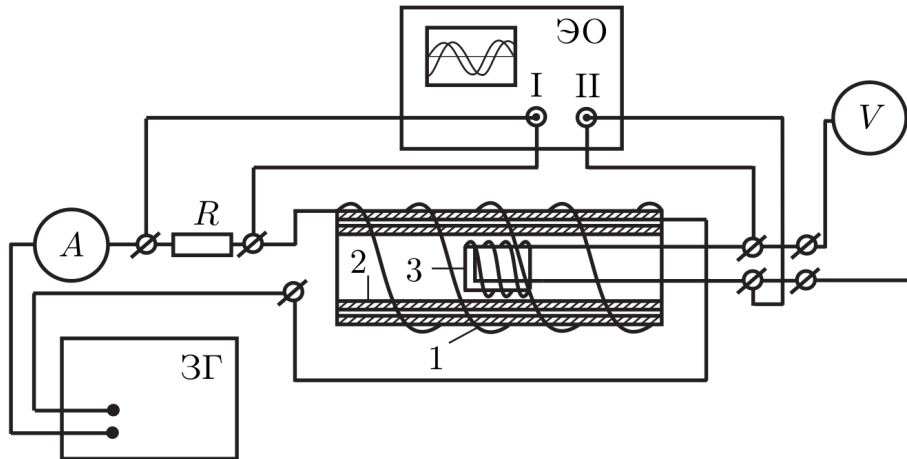
$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{2\sqrt{2}\Lambda}{a} e^{-\frac{h}{\Lambda}} \quad (4)$$

Колебания  $H_1$  отстают по фазе от  $H_0$  на угол

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\Lambda} \quad (5)$$

# Схема экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки изображена на рисунке:



Переменное магнитное поле создаётся соленоидом, подключенным к генератору звуковой частоты ЗГ. Соленоид намотан на полый цилиндрический каркас из поливинилхлорида 1, в который вставлен медный цилиндр 2. Для измерения магнитного поля внутри цилиндра используется измерительная катушка 3. Действующие значения тока и напряжения в цепи измеряются соответственно амперметром  $A$  и вольтметром  $V$ . Для измерения сдвига фаз используется осциллограф ЭО. Один вход осциллографа подключен к резистору, напряжение на котором пропорционально току в цепи. Второй вход подключен к измерительной катушке.

ЭДС индукции, возникающая в измерительной катушке равна

$$U = -SN \frac{dB_1(t)}{dt} = -i\omega\mu_0 SN H_1 e^{i\omega t}$$

Действующее значение напряжения, измеряемое вольтметром

$$U = \frac{SN\omega}{\sqrt{2}} \mu_0 |H_1|$$

Магнитное поле внутри цилиндра пропорционально напряжению и обратно пропорционально частоте:

$$|H_1| \propto \frac{U}{\nu}$$

Магнитное поле снаружи катушки пропорционально пропускаемому току:

$$|H_0| \propto I$$

Тогда

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = C \cdot \frac{U}{\nu I} \quad (6)$$

где  $C$  – некоторая константа. Эта константа может быть экспериментально измерена при малых частотах, так как при  $\nu \rightarrow 0$ , выполняется  $\frac{|H_1|}{|H_0|} \rightarrow 1$ .

Так как материал, из которого изготовлен цилиндр может содержать примеси, то в ра-

боте измеряется проводимость данного цилиндра  $\sigma$ . Для измерения  $\sigma$  измеряется зависимость сдвига фаз между  $H_1$  и  $H_0$  от  $\nu$  в областях низких, высоких частот. Также измеряется индуктивность экрана  $L$  от частоты  $\nu$ .

Важно отметить, что, поскольку сигнал на измерительной катушке 3 пропорционален не полю, а его производной, то сдвиг фаз  $\psi = \varphi - \pi/2$ , где  $\varphi$  – измеренная на экране осциллографа разность фаз между входами I и II.

## Оборудование

1. Генератор звуковой частоты.
2. Вольтметр.
3. Амперметр.
4. Электронный осциллограф.
5. Измерительная катушка.
6. Медный цилиндр.

## Экспериментальные результаты

Оценим значение частоты  $\nu_h$ , при котором толщина скин-слоя равна толщине стенок экрана  $h = 1.5$  мм, приняв значение проводимости медного экрана  $\sigma = 5 \cdot 10^7$  См/м.

$$\nu_h = \frac{1}{\pi \sigma \mu_0 h^2} = 2250 \text{ Гц.}$$

Исследование полей проведем в трех диапазонах частот  $\nu$ : низкие ( $0.01\nu_h \div 0.05\nu_h$ ), средние ( $0.05\nu_h \div 0.5\nu_h$ ) и высокие ( $0.5\nu_h \div 15\nu_h$ ).

### Низкие частоты

Согласно (6) соотношение между полем внутри  $H_1$  и полем снаружи  $H_0$  зависит от тока в катушке и напряжения на вольтметре. Введем обозначения  $\xi = \frac{U}{\nu I}$  и  $\xi_0 : \xi = \xi_0 \cdot \frac{H_1}{H_0}$ .

При малых частотах толщина скин-слоя больше толщины стенок экрана, выполняется приближение (2). Тогда

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{1}{\xi_0^2} + \left( \frac{a h \mu_0 \sigma \pi \nu}{\xi_0} \right)^2.$$

Построим график  $\frac{1}{\xi^2}(\nu^2)$ .

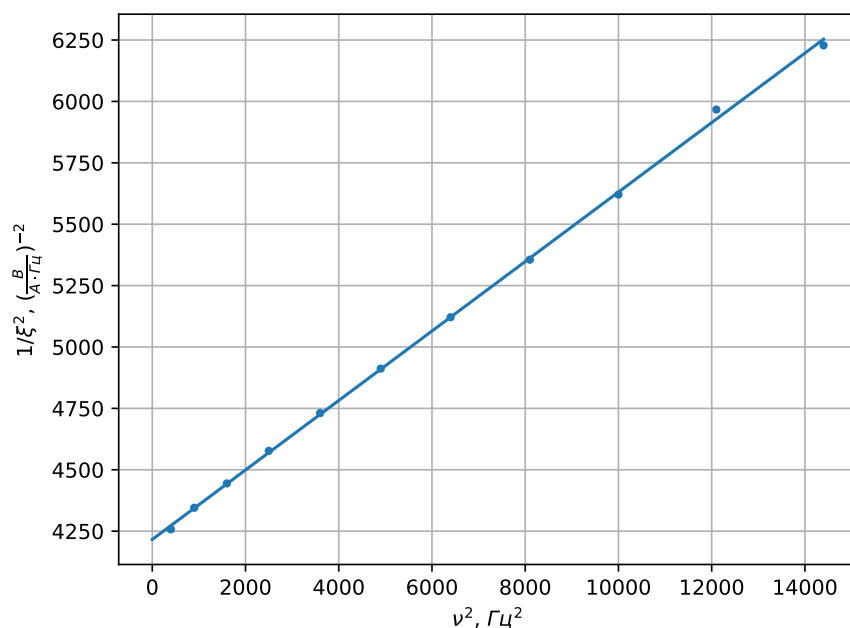


Рис. 6: Зависимость  $\frac{1}{\xi^2}$  от частоты тока  $\nu^2$

Найдем параметры графика  $y = kx + b$  по методу наименьших квадратов. По ним определим  $\xi_0 = 0.0154$  и проводимость фильтра  $\sigma = \frac{\sqrt{k}\xi_0}{ah\mu_0\pi} = 4.35 \cdot 10^7 \frac{\text{С}_\text{М}}{\text{М}}$ .

## Средние частоты

Для данного диапазона частот мы можем определить сдвиг фаз между  $U$  и  $I$ , определяемый (3).

Построим график  $\tan \psi(\nu)$ .

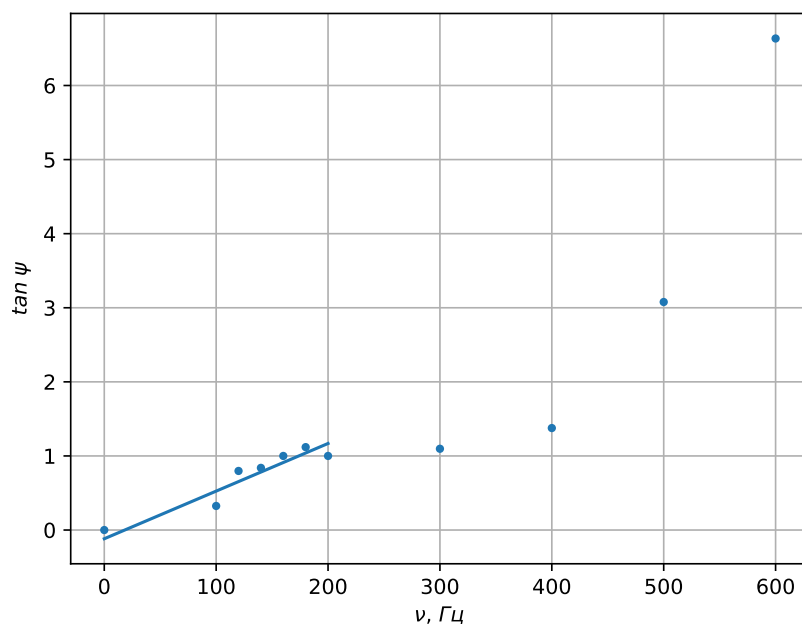


Рис. 7: Зависимость  $\tan \psi$  от частоты тока  $\nu$



Линейность зависимости быстро исчезает, однако этого достаточно для еще одной оценки проводимости  $\sigma = \frac{k}{ah\mu_0\pi} = 4.83 \cdot 10^7 \frac{\text{С}_\text{М}}{\text{м}}$ .

## Высокие частоты

Для данного диапазона выполняется приближение (5).

Построим график  $(\psi - \frac{\pi}{4})(\frac{1}{\sqrt{\nu}})$ .

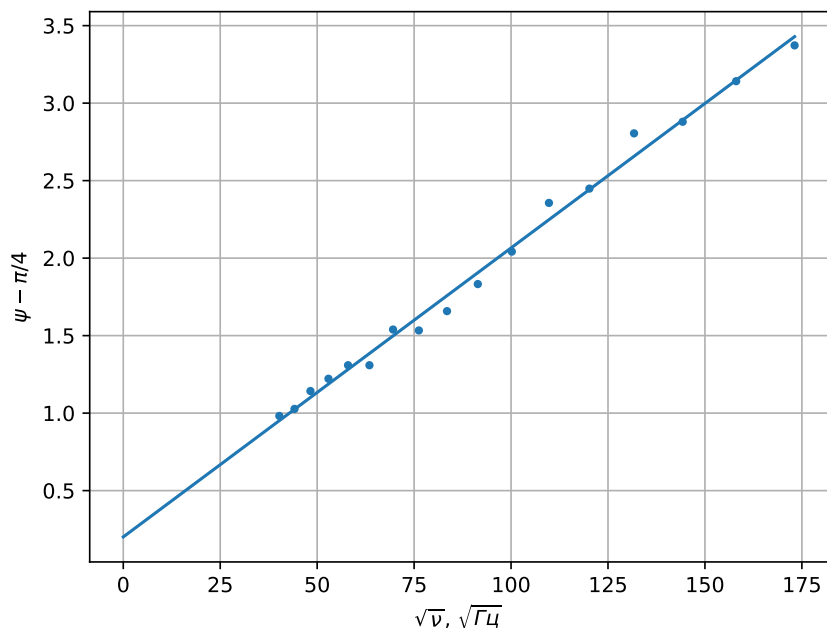


Рис. 8: Зависимость  $\psi - \frac{\pi}{4}$  от частоты тока  $\sqrt{\nu}$

Оценим проводимость  $\sigma = \frac{k^2}{h^2\mu_0\pi} = 3.91 \cdot 10^7 \frac{\text{С}_\text{М}}{\text{м}}$ . Значение проводимости в данной серии измерений значительно отличается от остальных  $\sigma$ .

## Индуктивность

Также скин-эффект влияет на индуктивность соленоида с медным цилиндром внутри  $L$ . Из-за скин-эффекта магнитное поле не проникает внутрь соленоида, поэтому уменьшается индуктивность  $L$ .

Измерим индуктивность фильтра с помощью RLC-метра.

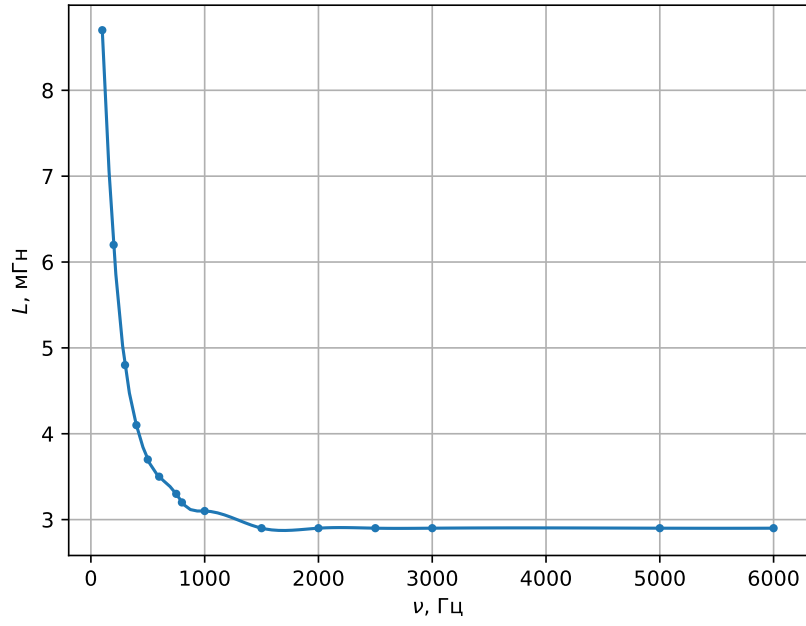


Рис. 9: Зависимость  $L$  от частоты тока  $\nu$

Для индуктивности будет выполняться следующее соотношение:

$$\frac{L_{max} - L}{L - L_{min}} = (\pi a h \mu_0 \sigma \nu)^2.$$

Построим линеаризованный график.

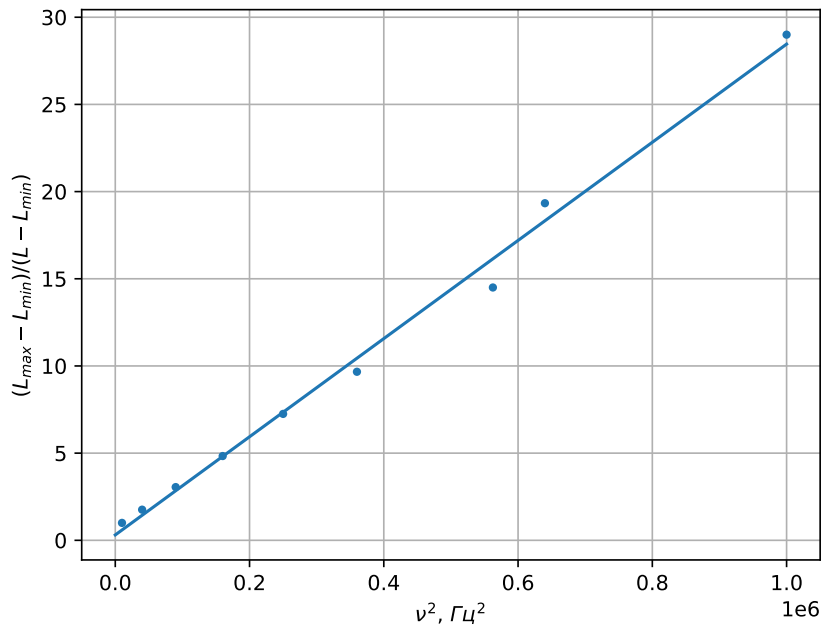


Рис. 10: Зависимость  $(L_{max} - L_{min})/(L - L_{min})$  от частоты тока  $\nu^2$

Определим проводимость  $\sigma = \frac{\sqrt{k}}{a h \mu_0 \pi} = 3.98 \cdot 10^7 \frac{\text{С}_\text{М}}{\text{м}}.$

## Общие результаты

Сведем результаты в один график. Для этого построим экспериментальный график по всем значениям, собранным в работе, а также построим теоретические графики по (1) для измеренных  $\sigma$ .

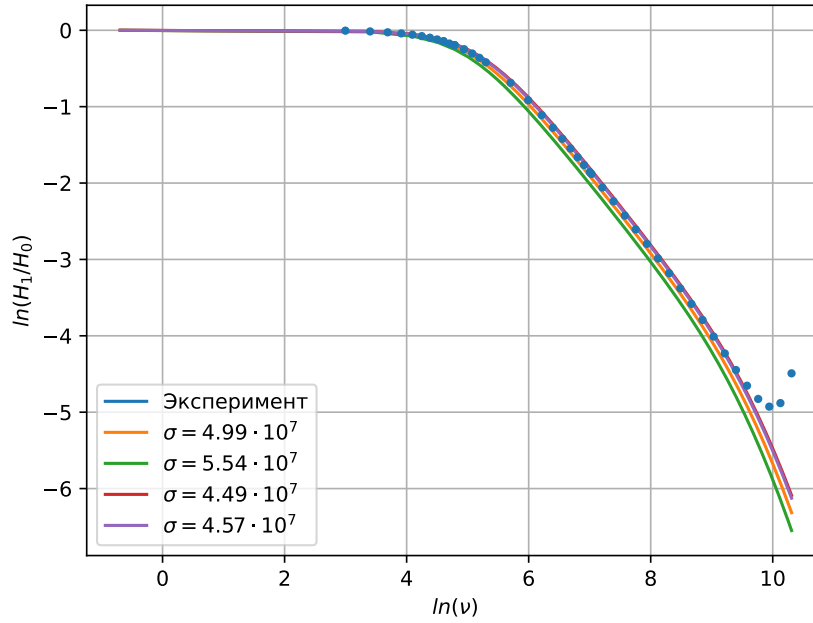


Рис. 11: Зависимость  $\frac{|H_1|}{|H_0|}$  от частоты тока  $\nu$

Как можно видеть, экспериментальные точки хорошо сходятся с теоретическими кривыми для различных  $\sigma$ .

## Выводы

В работе исследовался скин-эффект в медном полом цилиндре.

Была экспериментально подтверждена зависимость модуля магнитного поля  $H_1$  внутри цилиндра от величины внешнего магнитного поля  $H_0$  при низких частотах

$$|H_1| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \left(\frac{ah}{\Lambda}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}}$$

где  $a$  – радиус цилиндра,  $h$  – толщина стенок цилиндра,  $\Lambda = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$  – толщина скин-слоя.

Была определена проводимость медного цилиндра в области низких частот

$$\sigma = 4.35 \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

Экспериментально была подтверждена теоретическая зависимость сдвига фазы между магнитным полем внутри цилиндра  $H_1$  и вне  $H_0$  в области низких частот:

$$\text{tg } \psi = \left(\frac{ah}{\Lambda}\right)^2.$$

Была определена проводимость медного цилиндра вторым способом в области средних частот:

$$\sigma = 4.83 \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

Экспериментально была подтверждена теоретическая зависимость сдвига фазы между магнитным полем внутри цилиндра  $H_1$  и вне  $H_0$  в области высоких частот:

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\Lambda}$$

Была определена проводимость в области высоких частот:

$$\sigma = 3.91 \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$

С помощью  $RLC$ -метра была определена проводимость цилиндра:

$$\sigma = 3.98 \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}}$$