Лабораторная работа №3.6.1 Б

Спектральный анализ электрических сигналов

Маслов Артём
Симанкович Александр
Б01-104

13.10.2022

Аннотация

В работе приводится эмпирическая теория спектрального анализа сигналов. Исследуется спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов и синусоидальных цугов. Исследуется спектр амплитудно-модулированного сигнала и сигнала, модулированного по фазе.

Введение

Поведение физической системы можно описать, рассматривая её реакцию (отклик) на входное воздействие (сигнал). Для анализа линейных систем и периодических сигналов применяется спектральный анализ. Этот метод основан на теореме Фурье, согласно которой, любую периодическую функцию можно представить в виде в суммы гармонических функций, называемых гармониками. Часто исследовать отклик системы на гармоническое воздействие проще, чем определить её реакцию на произвольный сигнал.

В данной работе сигналы создаются генератором и исследуются цифровым осциллографом. С помощью встроенной в осциллограф функции быстрого преобразования Фурье анализируется спектр сигнала.

Теоретическое введение

Прямое и обратное преобразование Фурье

Рассмотрим физическую систему, на вход которой подаётся меняющийся со временем сигнал $f(t)$. Поставим задачу определить реакцию $g(t)$ этой системы на входное воздействие, называемую *откликом*:

$$f(t) \to \boxed{\hat{\Lambda}} \to g(t).$$

Для удобства дальнейшего изложения введём оператор $\hat{\Lambda}$, который преобразует входной сигнал $f(t)$ в выходной $g(t)$:

$$g = \hat{\Lambda}(f)$$

В общем случае нахождение отклика системы для произвольного сигнала затруднительно. Если система является линейной, то для любых входных сигналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и любых чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$\hat{\Lambda}(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2) = \lambda_1 \cdot \hat{\Lambda}(f_1) + \lambda_2 \cdot \hat{\Lambda}(f_2)$$

Таким образом, решение поставленной задачи упрощается. Достаточно разложить входной сигнал в линейную комбинацию более простых составляющих, и исследовать отклик системы на каждой из них.

Пусть входной сигнал является периодическим с периодом T. Тогда согласно теоремы Фурье его можно представить в виде суперпозиции синусоид с периодами $T_0, 2T_0, 3T_0, \ldots$ или частотами $\omega_n = n\omega_0$. В комплексной форме ряд записывается в виде:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos{(\omega_n t + \varphi_n)}$$

Данное представление $f(t)$ называется *рядом Фурье*, отдельные слагаемые $a_n \cos{(\omega_n t + \varphi_n)}$ называются *гармониками*, а совокупность гармоник — *спектром*.

Удобно записать ряд Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{iw_n t}$$

При этом вводятся формальные отрицательные частоты. Докажем эквивалентность записи ряда Фурье в комплексной и вещественной формах, для этого найдём связь между a_n и c_n. Воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{i(w_n t + \varphi_n)} = \cos{(w_n t + \varphi_n)} + i \sin{(w_n t + \varphi_n)} = e^{i\varphi_n} e^{iw_n t}$$

$$a_n \cos{(w_n t + \varphi_n)} = \frac{a_n}{2} e^{i\varphi_n} e^{iw_n t} + \frac{a_n}{2} e^{-i\varphi_n} e^{-iw_n t}$$

Чтобы представление в вещественной и комплексной форме совпадали, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\begin{cases} c_n = \frac{a_n}{2} e^{i\varphi_n} \\ c_{-n} = \frac{a_n}{2} e^{-i\varphi_n} = \overline{c_n} \end{cases}$$

Оборудование

1. Цифровой генератор сигналов АКИП-3409/4.

2. Цифровой осциллограф SIGLENT АКИП 4131/1.

Экспериментальные результаты

Прямоугольный сигнал

Последовательность синусоидальных цугов

Амплитудно-модулированный сигнал

Сигнал, модулированный по фазе

Выводы