

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Маслов Артём

Симанкович Александр

Б01-104

13.10.2022

Аннотация

В работе приводится эмпирическая теория спектрального анализа сигналов. Исследуются спектры периодической последовательности прямоугольных импульсов, синусоидальных цугов и спектр амплитудно-модулированного сигнала.

Введение

Поведение физической системы можно описать, рассматривая её реакцию (отклик) на входное воздействие (сигнал). Для анализа линейных систем и периодических сигналов применяется спектральный анализ. Этот метод основан на теореме Фурье, согласно которой, любую периодическую функцию можно представить в виде суммы гармонических функций, называемых гармониками. Часто исследовать отклик системы на гармоническое воздействие проще, чем определить её реакцию на произвольный сигнал.

В данной работе сигналы создаются генератором и исследуются цифровым осциллографом. С помощью встроенной в осциллограф функции быстрого преобразования Фурье анализируется спектр сигнала.

Теоретическое введение

Прямое и обратное преобразование Фурье

Рассмотрим физическую систему, на вход которой подаётся меняющийся со временем сигнал $f(t)$. Поставим задачу определить реакцию $g(t)$ этой системы на входное воздействие, называемую *откликом*:

$$f(t) \rightarrow \boxed{\hat{\Lambda}} \rightarrow g(t).$$

Для удобства дальнейшего изложения введём оператор $\hat{\Lambda}$, который преобразует входной сигнал $f(t)$ в выходной $g(t)$:

$$g = \hat{\Lambda}(f)$$

В общем случае нахождение отклика системы для произвольного сигнала затруднительно. Если система является линейной, то для любых входных сигналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и любых чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$\hat{\Lambda}(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2) = \lambda_1 \cdot \hat{\Lambda}(f_1) + \lambda_2 \cdot \hat{\Lambda}(f_2)$$

Таким образом, решение поставленной задачи упрощается. Достаточно разложить входной сигнал в линейную комбинацию более простых составляющих, и исследовать отклик системы на каждой из них.

Пусть входной сигнал является периодическим с периодом T . Тогда согласно теоремы Фурье его можно представить в виде суперпозиции синусоид с периодами $T_0, 2T_0, 3T_0, \dots$ или частотами $\omega_n = n\omega_0$. В комплексной форме ряд записывается в виде:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

Данное представление $f(t)$ называется *рядом Фурье*, отдельные слагаемые $a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ называются *гармониками*, а совокупность гармоник — *спектром*.

Удобно записать ряд Фурье в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}$$

При этом вводятся формальные отрицательные частоты. Докажем эквивалентность записи ряда Фурье в комплексной и вещественной формах, для этого найдём связь между a_n и c_n . Воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} = \cos(\omega_n t + \varphi_n) + i \sin(\omega_n t + \varphi_n) = e^{i\varphi_n} e^{i\omega_n t}$$

$$a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) = \frac{a_n}{2} e^{i\varphi_n} e^{i\omega_n t} + \frac{a_n}{2} e^{-i\varphi_n} e^{-i\omega_n t}$$

Чтобы представление в вещественной и комплексной форме совпадали, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\begin{cases} c_n = \frac{a_n}{2} e^{i\varphi_n} \\ c_{-n} = \frac{a_n}{2} e^{-i\varphi_n} = \overline{c_n} \end{cases}$$

Оборудование

1. Цифровой генератор сигналов АКИП-3409/4.
2. Цифровой осциллограф SIGLENT АКИП 4131/1.

Экспериментальные результаты

Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

Теоретическое описание спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов приведено на рисунке 1.

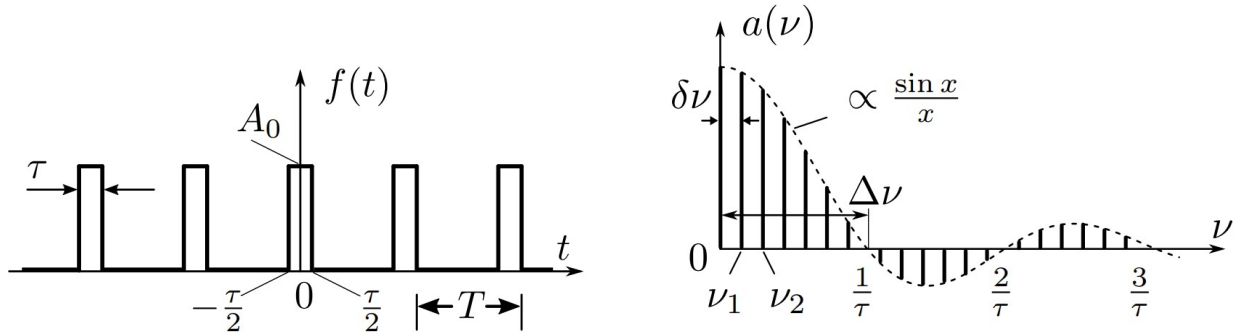


Рис. 1: Периодическая последовательность импульсов и её спектр.

Настраиваем генератор на прямоугольные импульсы с частотой повторения $\nu_T = 1$ кГц (период $T = 1$ мс) и длительностью импульса $\tau = \frac{T}{20} = 50$ мкс. Снимки экрана электронного осциллографа приведены на рисунках 2 и 3. На первом снимке видно, что половина ширины спектра составляет $\Delta\nu = 20$ кГц, что совпадает с рассчитанной выше.

Из соотношения неопределенности $\Delta\nu \cdot \tau = 1 \Rightarrow \Delta\nu = 20$ кГц, где $\Delta\nu$ – половина ширины главного спектра.

На снимках 2 приведены спектры для различных частот ν_T . Видно, что ширина спектра для них практически не меняется, тогда как меняется расстояние между соседними компонентами спектра.

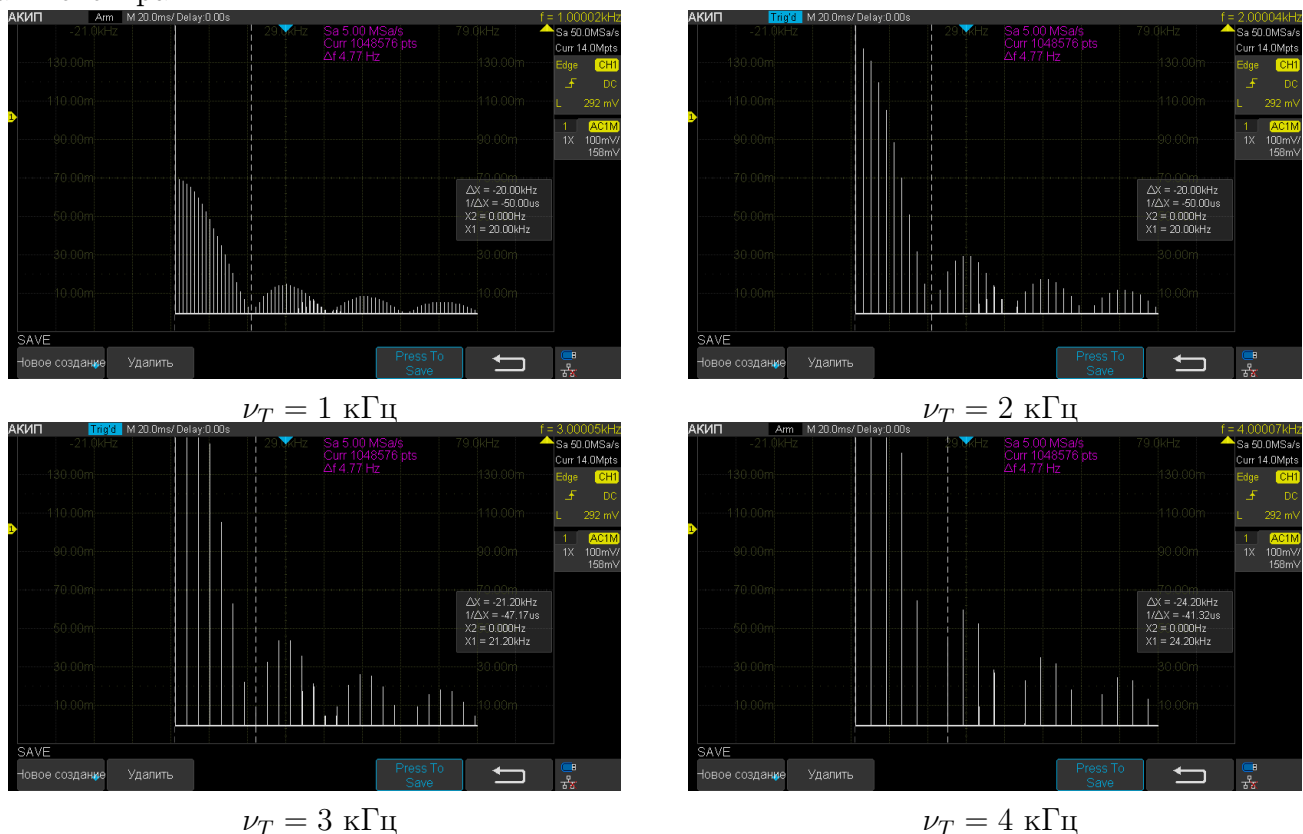
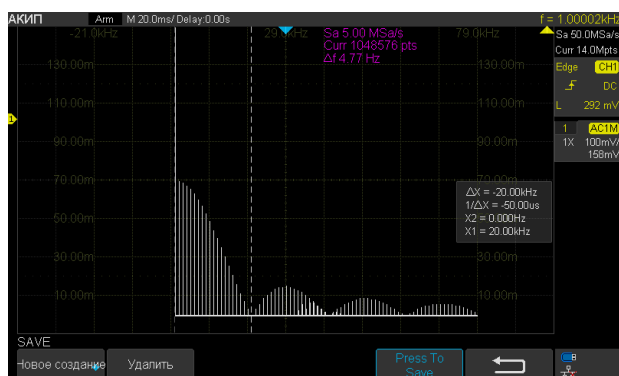
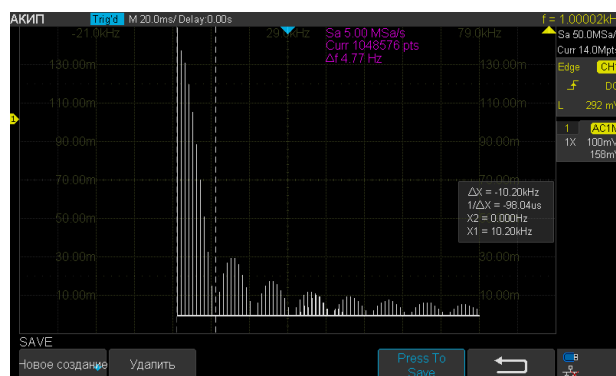


Рис. 2: Изменения спектра при увеличении ν

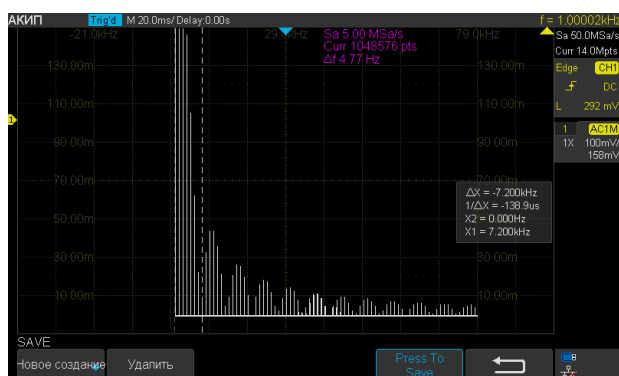
На снимках 3 спектры при различных τ . Изменение τ влияет только на ширину спектра.



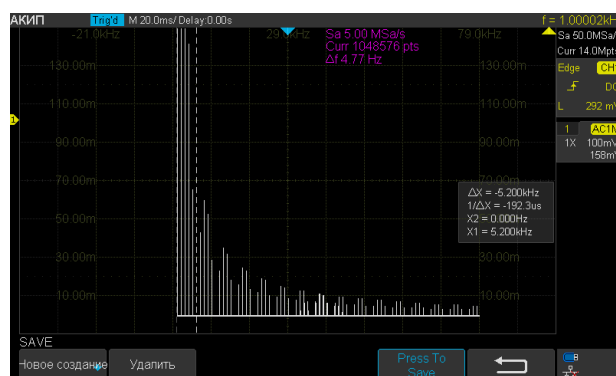
$\tau = 50$ мкс



$\tau = 100$ мкс



$\tau = 150$ мкс



$\tau = 200$ мкс

Рис. 3: Изменения спектра при увеличении τ

Измерим высоты гармоник спектра при $\nu_T = 1$ кГц, $\tau = 100$ мкс. Теоретические значения высот вычисляются по формуле (??). Снимок спектра приведен на рисунке 5, график измеренных значений и огибающая приведены на рисунке 4. Нормировка a_n проведена по высоте пика спектра.

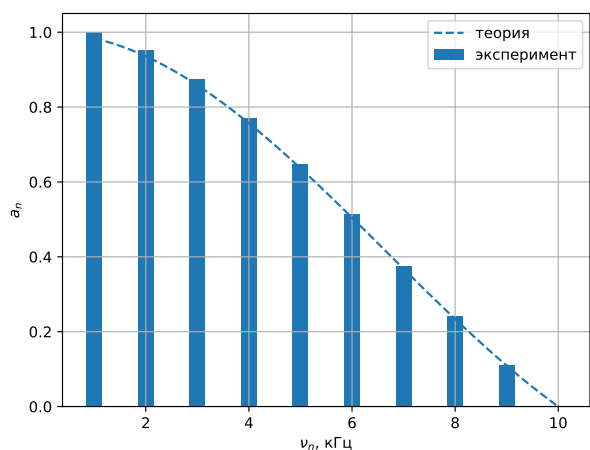


Рис. 4: Спектр и огибающая

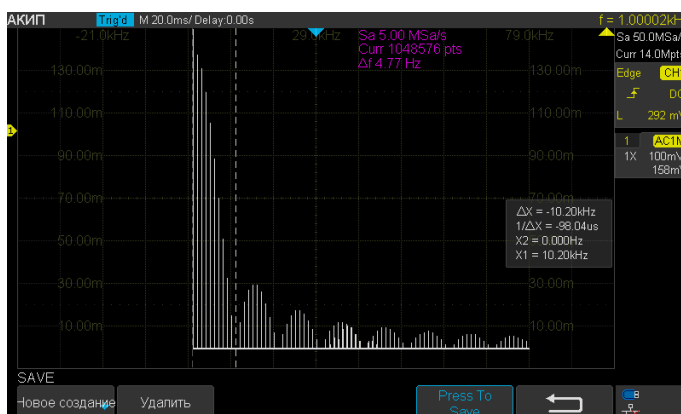
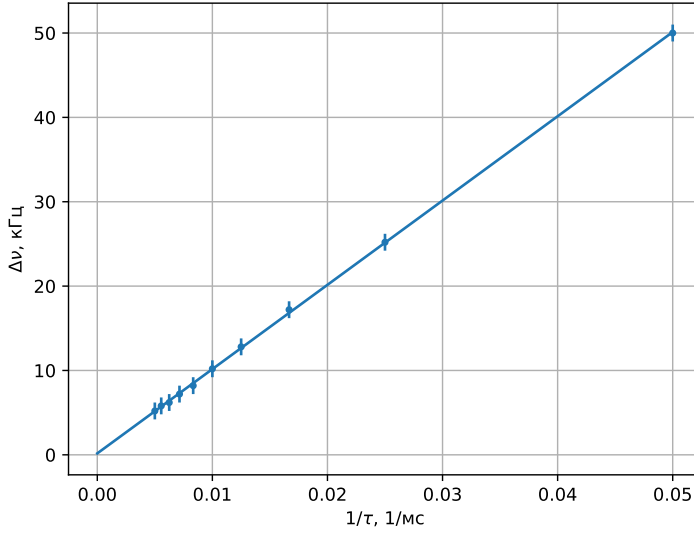


Рис. 5: Снимок экспериментального спектра

Проверим выполнимость соотношения неопределенностей $\Delta\nu \cdot \tau = 1$. Для этого измерим зависимость ширины спектра $\Delta\nu(\tau)$ при постоянной $\nu_T = 1$ кГц.



| $\Delta\nu$, кГц | τ , мс | $\frac{1}{\tau}$, 1/мс |
|-------------------|-------------|-------------------------|
| 5.2 | 200 | 0.0050 |
| 5.8 | 180 | 0.0056 |
| 6.2 | 160 | 0.0063 |
| 7.2 | 140 | 0.0071 |
| 8.2 | 120 | 0.0083 |
| 10.2 | 100 | 0.0100 |
| 12.8 | 80 | 0.0125 |
| 17.2 | 60 | 0.0167 |
| 25.2 | 40 | 0.0250 |
| 50.0 | 20 | 0.0500 |

Рис. 6: График зависимости $\Delta\nu(\frac{1}{\tau})$

| \bar{x} | σ_x^2 | \bar{y} | σ_y^2 | r_{xy} | a | Δa | b | Δb |
|-----------|--------------|-----------|--------------|----------|--------|------------|------|------------|
| 1.46e-02 | 1.73e-04 | 1.48e+01 | 1.73e+02 | 1.73e-01 | 998.99 | 4.92 | 0.17 | 0.10 |

Таблица 1: Обработка МНК

Погрешность эксперимента коррелирует с погрешностью коэффициента наклона. Следовательно, рассчитаем количественный критерий точности:

$$\mathcal{C} \approx \frac{\Delta a}{a} \approx 0.5\%$$

Спектр периодической последовательности синусоидальных цугов

Теоретическое описание спектра периодической последовательности цугов приведено на рисунке 7.

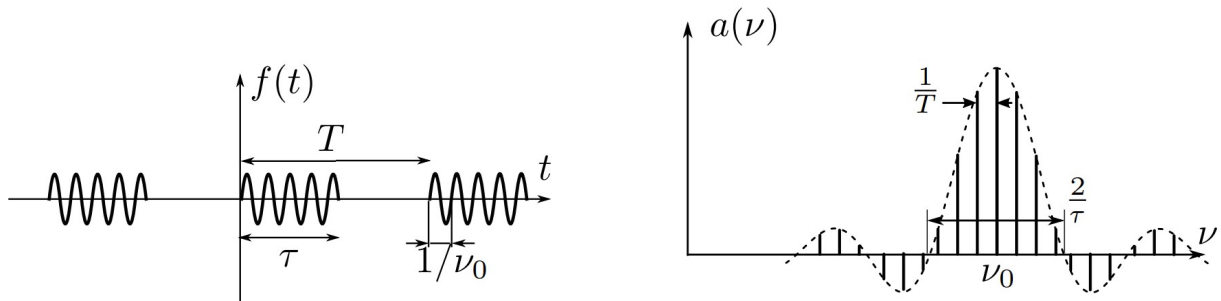


Рис. 7: Периодическая последовательность импульсов и её спектр.

На вход осциллографа подаем последовательность цугов. Период повторения $T = 1$ мс ($\nu_T = 1$ кГц), число периодов в одном импульсе $N = 5$ (длительность импульса $\tau = N/\nu_0 = 100$ мкс). Несущие частоты возьмем $\nu_0 = \{50, 70, 90\}$ кГц. Снимки приведены на рисунке 8.

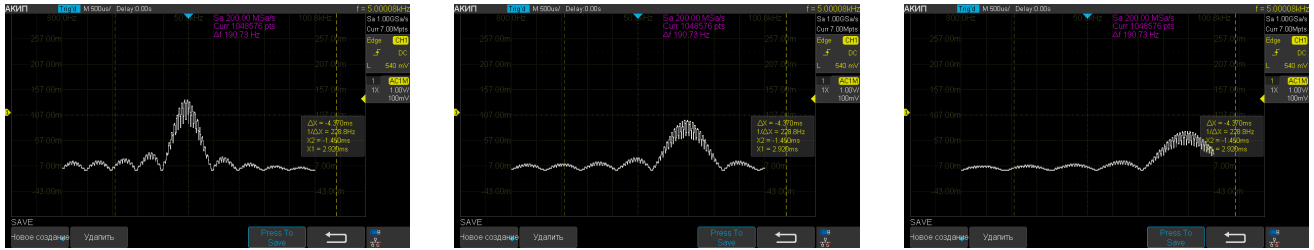
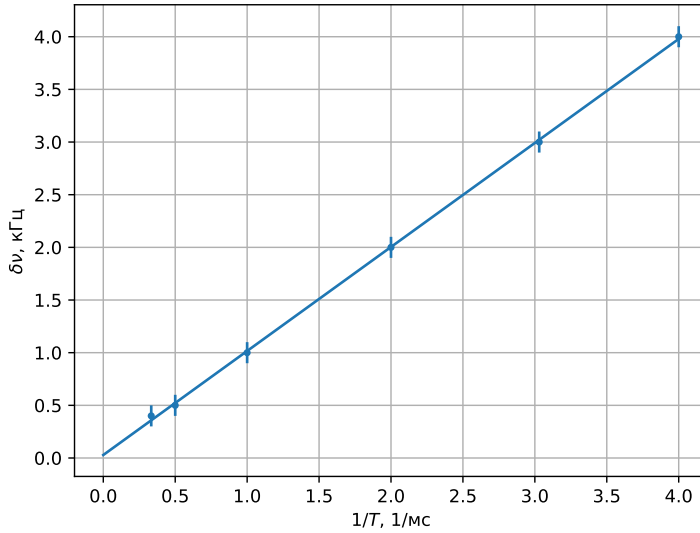


Рис. 8: Изменение спектра при увеличении несущей частоты

На снимках видно, что при увеличении несущей частоты спектр сдвигается, при этом центр спектра находится в ν_0 , это характерное отличие последовательности синусоидальных цугов от прямоугольных импульсов. На изменения T , τ спектр реагирует аналогично 2, 3.

Проверим выполнимость соотношения неопределенностей для T : $\delta\nu \cdot T = 1$. Для этого измерим зависимость $\delta\nu(T)$.



| $\delta\nu$, кГц | T , мс | $\frac{1}{T}$, 1/мс |
|-------------------|----------|----------------------|
| 1.0 | 1.00 | 1.0000 |
| 2.0 | 0.50 | 2.0000 |
| 3.0 | 0.33 | 3.0303 |
| 4.0 | 0.25 | 4.0000 |
| 0.5 | 2.00 | 0.5000 |
| 0.4 | 3.00 | 0.3333 |

Рис. 9: График зависимости $\Delta\nu(\frac{1}{\tau})$

| \bar{x} | σ_x^2 | \bar{y} | σ_y^2 | r_{xy} | a | Δa | b | Δb |
|-----------|--------------|-----------|--------------|----------|------|------------|------|------------|
| 1.81e+00 | 1.81e+00 | 1.82e+00 | 1.77e+00 | 1.79e+00 | 0.99 | 0.01 | 0.03 | 0.02 |

Таблица 2: Обработка МНК

Оценим погрешность как

$$C \approx \frac{\Delta a}{a} \approx 1.0\%.$$

Спектр гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Теоретическое описание гармонического сигнала, модулированного по амплитуде приведено на рисунке 10.

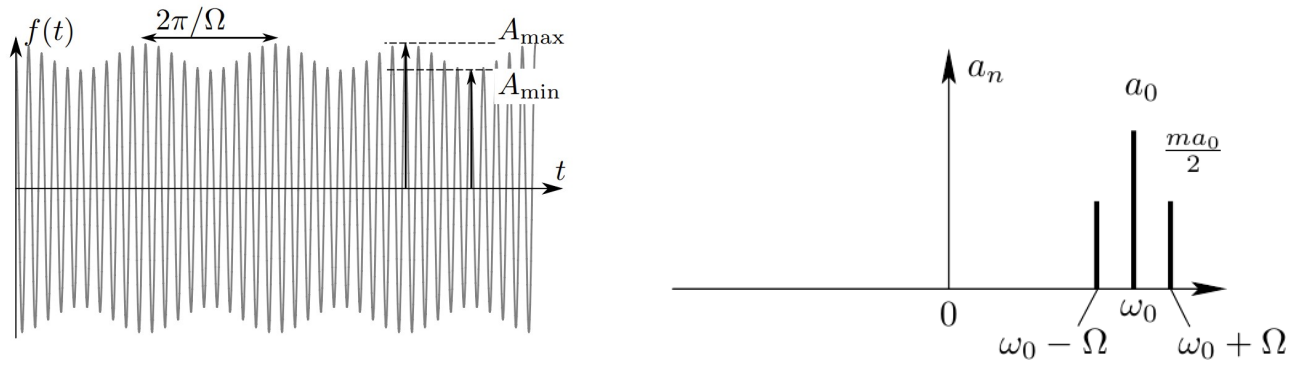


Рис. 10: Амплитудная модуляция и её спектр.

Настраиваем генератор на частоту несущей $\nu_0 = 50$ кГц, частоту модуляции $\nu_{\text{мод}} = 4$ кГц и глубину модуляции $m = 0.5$. Частоты модуляции возьмем $\nu_{\text{мод}} = \{4, 8, 12\}$ кГц. Фотографии экрана электронного осциллографа приведены на рисунке 11.

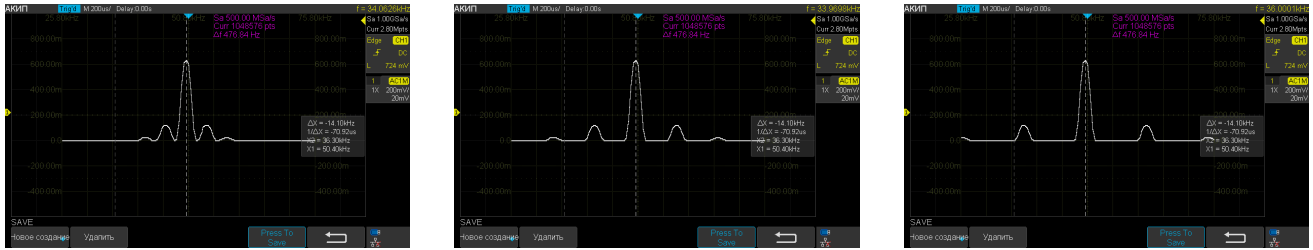
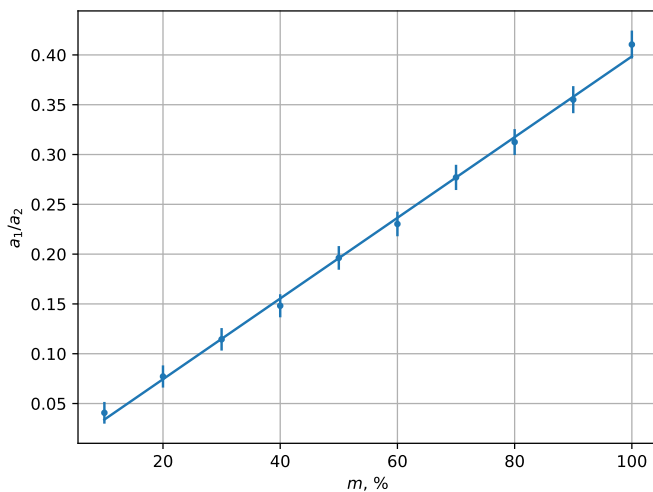


Рис. 11: Изменения спектра при увеличении $\nu_{\text{мод}}$

Меняя на генераторе глубину модуляции m в диапазоне от 10% до 100%, измерим отношение $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}$ амплитуд боковой и основной спектральных линий. Строим график зависимости $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}(m)$ (см. рис. 12).



| $m, \%$ | $a_{\text{осн}}, \text{ мВ}$ | $a_{\text{бок}}, \text{ мВ}$ | $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}$ |
|---------|------------------------------|------------------------------|---|
| 10 | 688.0 | 28.0 | 0.0407 |
| 20 | 674.0 | 52.0 | 0.0772 |
| 30 | 664.0 | 76.0 | 0.1145 |
| 40 | 648.0 | 96.0 | 0.1481 |
| 50 | 632.0 | 124.0 | 0.1962 |
| 60 | 608.0 | 140.0 | 0.2303 |
| 70 | 592.0 | 164.0 | 0.2770 |
| 80 | 576.0 | 180.0 | 0.3125 |
| 90 | 552.0 | 196.0 | 0.3551 |
| 100 | 536.0 | 220.0 | 0.4104 |

Рис. 12: График зависимости $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}(m)$

| \bar{x} | σ_x^2 | \bar{y} | σ_y^2 | r_{xy} | $a \cdot 10^3$ | $\Delta a \cdot 10^3$ | b | Δb |
|-----------|--------------|-----------|--------------|----------|----------------|-----------------------|-----------|------------|
| 5.50e+01 | 8.25e+02 | 2.16e-01 | 1.36e-02 | 3.34e+00 | 4.05 | 0.07 | -6.61e-03 | 4.33e-03 |

Таблица 3: Обработка МНК

Погрешность эксперимента коррелирует с погрешностью коэффициента наклона. Следовательно, рассчитаем количественный критерий точности:

$$\mathcal{C} \approx \frac{\Delta a}{a} \approx 3\%$$

Заключение и выводы

Данная работа демонстрирует точность модели спектрального анализа, описывающей структуру различных сигналов. С помощью спектрального анализа можно вычислить реакцию линейной стационарной системы на произвольный периодический сигнал как сумму реакций на его гармонические составляющие, что сильно упрощает расчеты.