Лабораторная работа №3.2.2

Резонанс напряжений в последовательном контуре

Маслов Артём

Симанкович Александр

Б01-104

01.12.2022

Аннотация

В работе исследуется резонанс напряжений в последовательном колебательном контуре. Измеряются амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики, определяются основные параметры контура.

Ключевые слова: последовательный колебательный контур, резонанс, АЧХ, ФЧХ, добротность, коэффициент затухания, постоянная времени.

Теория

Уравнение колебательного контура

При рассмотрении физических процессов в электрических цепях используются следующие предположения. Во-первых, все элементы электрической цепи считаются *идеальными*. Предполагается, что у катушек индуктивности и конденсаторов нет омического сопротивления, источник напряжения обладает нулевым сопротивлением, а источник тока бесконечно большим, и т.д. Такое представление упрощает анализ физических процессов в электрических цепях. Если же такие предположения вносят большую погрешность, то в схему добавляются дополнительные идеальные элементы, которые учитывают особенности физических процессов в конкретных случаях.

Во-вторых, рассматриваются *квазистационарные процессы*. Известно, что электромагнитные колебания распространяются с конечной скоростью. В данной работе рассматриваются такие электрические цепи, в которых время установления электромагнитных колебаний пренебрежимо мало.

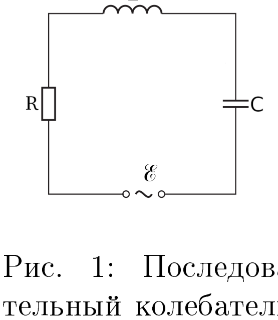

Рис. 1: Последовательный колебательный контур

Рассмотрим последовательный колебательный контур без источника ЭДС (рис. 1). Пусть напряжение на конденсаторе меняется по закону $U = U(t)$. Тогда, согласно второму правилу Кирхгофа, сумма падений напряжений равна 0:

$$L\frac{dI}{dt} + U + RI = 0$$

Ток через конденсатор определяется из соотношения

$$I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}$$

Тогда получим дифференциальное уравнения второго порядка, описывающее *свободные колебания* в линейной системе:

$$LC\frac{d^2U}{dt^2} + RC\frac{dU}{dt} + U = 0$$

Данное уравнение можно переписать в виде:

$$\ddot{U} + 2\gamma\dot{U} + \omega_0^2 U = 0$$

где введены обозначения $\gamma = \frac{R}{2L}$ – *коэффициент затухания*, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – *собственная частота* колебательной системы, $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ – *период собственных колебаний.*

Найдём решение однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$D_1 = \frac{D}{4} = \gamma^2 - \omega_0^2$$

В зависимости от знака дискриминанта квадратного уравнения возможны три случая.

1. *Затухающие колебания.*

   Рассмотрим случай, когда $D_1 < 0$. Тогда $0 < \gamma < \omega_0$, что эквивалентно

   $$0 < R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{\text{кр}}$$

   Сопротивление $R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ называется критическим, а $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – волновым.

   В рассматриваемом случае характеристическое уравнение имеет два комплексных корня

   $$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

   Величину $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ называют частотой свободных колебаний. Решением уравнения будет

   $$U(t) = U_1 \cdot e^{-\gamma t} \cdot e^{-j\omega t} + U_2 \cdot e^{-\gamma t} \cdot e^{j\omega t}$$

   где U_1 и U_2 – произвольные постоянные.

   Полученное уравнение можно представить в виде

   $$U(t) = U_0 e^{-\gamma t} sin(\omega t + \varphi_0)$$

   Данное уравнение является гармоническим с фазой $\omega t + \varphi_0$ и экспоненциально убывающей амплитудой $U_0 e^{-\gamma t}$.

График зависимости напряжения от времени представлен на рисунке 2.

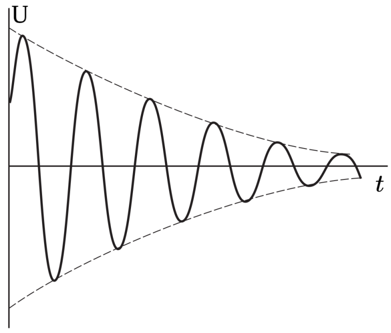

Рис. 2: Затухающие колебания

С точки зрения математики данный колебательный процесс не периодичен. Тем не менее функция $U(t)$ обращается в ноль или достигает экстремумов через один и тот же промежуток времени, который называю *периодом затухающих колебаний.*

2. *Критический режим.*

   Рассмотрим случай, когда $D_1 = 0$. Тогда

   $$\gamma = \omega_0$$

   Характеристическое уравнение имеет один корень

   $$\lambda = -\gamma$$

   Решением исходного уравнения будет

   $$U(t) = U_0 e^{-\gamma t}$$

   где U_0 – постоянная, определяемая из начальных условий.

   Заметим, что данный режим физически не реализуем, так как равенство $\gamma = \omega_0$ не может быть выполнено точно. Данный случай нужно рассматривать как переходный между затухающими колебаниями и апериодическим режимом.

3. *Апериодический режим.*

   Рассмотрим случай, когда $D_1 > 0$. Тогда $0 < \omega_0 < \gamma$. Характеристическое уравнение имеет два действительных корня

   $$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

   Решением дифференциального уравнения будет

   $$U(t) = e^{-\gamma t} \cdot (U_1 e^{-j\omega t} + U_2 e^{j\omega t})$$

   где U_1 и U_2 – произвольные постоянные.

Характеристики затухающих колебаний

Важными характеристиками колебательных систем являются добротность Q и логарифмический декремент d.

Логарифм отношения амплитуд колебаний в двух последовательных максимумах называется логарифмическим декрементом

$$d = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right)$$

Определив положения последовательных максимумов из формулы 1, можно получить следующее соотношение

$$d = \gamma T$$

где T – период затухающих колебаний.

Постоянной времени затухания τ называется время, за которое амплитуда колебаний убывает в e раз. Коэффициент затухания и постоянная времени связаны соотношением

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

Из уравнений и следует, что логарифмический декремент можно определить как число полных колебаний $N = \frac{\tau}{T}$ за время затухания τ:

$$d = \frac{1}{N}$$

Добротностью колебательной системы Q называется

$$Q \equiv \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\omega}{2\gamma}$$

Чем выше добротность колебательной системы, тем меньше будут потери энергии. Докажем данное утверждение.

Амплитуда колебаний напряжение за период уменьшается в $e^{\gamma T}$ раз. Полная энергия системы W определяется как максимальная энергия электрического поля конденсатора или магнитного поля индуктивности

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{LI^2}{2}$$

Из этого соотношения видно, что за период энергия системы уменьшается как квадрат амплитуды в $e^{2\gamma T}$ раз. Тогда потери энергии системы равно

$$\Delta W = W(t_0) - W(t_0 + T) = (1 - e^{-2\gamma T})W(t_0)$$

Если затухание мало, то есть $\gamma T \ll 1 \Rightarrow Q \gg 1$, то экспоненту можно разложить по формуле Тейлора

$$\Delta W \approx 2\gamma T W$$

$$\frac{W}{\Delta W} = \frac{1}{2\gamma T} = \frac{1}{2\pi} Q$$

Таким образом, добротность с энергетической точки зрения определяет отношении энергии системы к потерям за период.

Вынужденные колебания

Если в цепь последовательного колебательного контура включен гармонический источник ЭДС $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$, то

$$\ddot{U} + 2\gamma\dot{U} + \omega_0^2 U = \frac{\varepsilon_0}{LC}\cos(\omega t)$$

Решением неоднородного дифференциального уравнения будет сумма однородного и частного решений

$$U_{\text{общ}}(t) = U_{\text{одн}}(t) + U_{\text{част}}(t)$$

Решением однородного уравнения будут затухающие колебания

$$U_{\text{одн}}(t) = U_0 e^{-\gamma t} sin(\omega t + \varphi_0)$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$U_{\text{част}}(t) = Ae^{j\omega t}$$

Неоднородность уравнения в комплексной форме равна

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{LC}e^{j\omega t}$$

Подставив частное решение в исходное уравнение находим

$$U_{\text{част}}(t) = \frac{\varepsilon_0 e^{j\omega t}}{LC(\omega_0^2 + 2j\gamma\omega - \omega^2)}$$

Решением является только действительная часть, тогда

$$U_{\text{част}}(t) = \frac{\varepsilon_0}{LC}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}\cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Итого уравнением вынужденных колебаний будет

$$U(t) = U_0 e^{-\gamma t} sin(\omega t + \varphi_0) + \frac{\varepsilon_0}{LC}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}\cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Заметим, что амплитуда однородного решения убывает экспоненциально, а амплитуда частного решения остается постоянной. Поэтому, через большой промежуток времени, напряжение будет изменяться по закону $U(t) \approx U_{\text{част}}(t)$. Итого, установившимися вынужденными колебаниями будут гармонические колебания с частотой вынуждающей ЭДС.

Резонанс в параллельном колебательном контуре

Рассмотрим параллельный колебательный контур. Пусть к нему подключен идеальный источник ЭДС, обладающий бесконечно большим внутренним сопротивлением, задающий во внешней цепи ток, изменяющийся по гармоническому закону $I = I_0 \cos(\omega t + \phi_0)$.

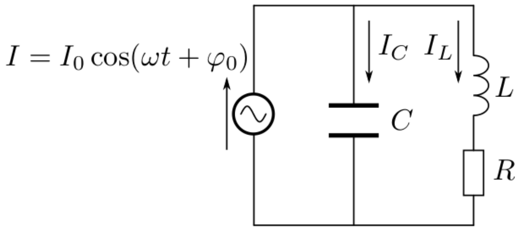

Рис. 3: Параллельный колебательный контур

Методом комплексных амплитуд определим зависимости напряжения и тока на элементах цепи:

$$I_C = I_0 \frac{1 + j\frac{\rho\omega}{R\omega_0}}{1 + j\frac{\rho}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$
$$I_L = I_0 \frac{-j\frac{\rho\omega_0}{R\omega}}{1 + j\frac{\rho}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$
$$U_C = I_0 \frac{\rho^2}{R} \frac{1 - j\frac{\rho\omega_0}{R\omega}}{1 + j\frac{\rho}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Далее будем рассматривать высокодобротный колебательный контур вблизи резонансной частоты $Q \approx \frac{\rho}{R} \gg 1$. Тогда выражения для токов примут вид:

$$I_C = QI_0 \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\cos(\omega t - \varphi_C)}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}$$
$$I_L = QI_0 \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\cos(\omega t - \varphi_L)}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}$$
$$U_C = Q\rho I_0 \frac{\cos(\omega t - \varphi_U)}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}$$

Фазы токов определяются по формулам:

$$\varphi_C = \operatorname{arctg}(\tau\Delta\omega) - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{Q}$$
$$\varphi_L = \operatorname{arctg}(\tau\Delta\omega) + \frac{\pi}{2}$$
$$\varphi_U = \operatorname{arctg}(\tau\Delta\omega) + \frac{\omega_0}{\omega}\frac{1}{Q}$$

При резонансе $\omega = \omega_0$, $\Delta\omega = 0$ и формулы можно упростить:

$$I_C = QI_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_C)$$
$$I_L = QI_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_L)$$
$$U_C = Q^2 RI_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_U)$$
$$\varphi_C = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{Q}$$
$$\varphi_L = \frac{\pi}{2}$$
$$\varphi_U = \frac{1}{Q}$$

Из полученных соотношений следует, что ток через конденсатор I_C опережает внешний ток по фазе на $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{Q} \approx \frac{\pi}{2}$. Ток через катушку индуктивности отстает от внешнего тока по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Напряжение на конденсаторе отстает от внешнего тока по фазе на $\frac{1}{Q}$.

Ток через индуктивность и конденсатор в Q раз больше внешнего тока. Поэтому резонанс в последовательном колебательном контуре называют *резонансном токов*.

С помощью полученных соотношений не трудно построить векторную диаграмму.

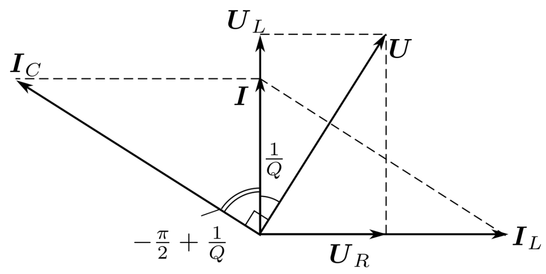

Рис. 4: Векторная диаграмма при резонансе токов

Схема экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки изображена на рисунке:

Оборудование

1. Генератор сигналов GFG-8255A.
2. Источник напряжения
3. Последовательный колебательный контур.
4. Осциллограф GOS-620.
5. Цифровые вольтметры GDM-8245.

Экспериментальные результаты

Обсуждение результатов и выводы