7. Рассмотрим краевые задачи для ОДУ.

- $\varepsilon \dot{y}'' = (y')^2$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

  а) Получить точное решение, сделав замену переменных $y_x^{-1} = p(y)$.

  б) Численно исследовать поведение решения при $\varepsilon \to 0$ $(0 < \varepsilon < 1)$, сравнить с точным.

- $\varepsilon y'' = [y - u(x)]^{2q+1}$, $y(-1) = A$, $y(1) = B$, $q \in N$, $0 < \varepsilon \ll 1$. При $u(x) = |x|$ образуется погранслой вблизи $x = 0$.

  Рассмотреть случаи: $u(x) = |x|$, $A = 1$, $B > 1$; $u(x) = x^2$, $A > 1$, $B > 1$; $u(x) = |x|$, $A > 1$, $B > 1$.

  Что происходит при увеличении q?

- $\varepsilon y'' = y - y^3$, $y(0) = A$, $y(1) = B$, $|A| < \sqrt{2}$, $|B| < \sqrt{2}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $\varepsilon = 10^{-2}; 10^{-3}; 10^{-4}$ («пичковые» структуры).

- $\varepsilon y'' = y^3 - q$, $y(0) = A < -1$, $y(1) = B > 1$ (внутренний погранслой $x = 1/2$).

  Исследовать толщину погранслоя в зависимости от ε.

- $\varepsilon y'' = -y[y + a(x)]$, $y(0) = y_0$, $y(1) = y_1$, $a(x) = x$.

  Рассмотреть поведение решения при $\varepsilon \to 0$ (удастся ли получить погранслой типа всплеска?)

8. Численно решить задачу на нахождение собственных значений и функции волнового уравнения методами стрельбы и прогонки: $y'' = -k^2 y$, $y(0) = y(1) = 0$.

Сравнить численные решения между собой и с точными:

$$k_n = n\pi, \quad y_n \approx \sin(n\pi x), \quad n > 0.$$

Рассмотреть случай больших k.

- Использовать явный и неявный методы не ниже четвертого порядка точности, сравнить полученные решения с численным решением, полученным по методу (любому) первого порядка точности;
- для получения численного решения задач из п. $7.1 \div 7.5$ использовать методы стрельбы и прогонки (квазилинеризации). Какой из этих двух методов, на ваш взгляд, предпочтительнее?

9. Численно показать, что решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a u^\alpha \dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \alpha > 0, \\ u(\infty, t) = 0, \quad u(0, t) = c t^{1/\alpha}, \quad u(x, 0) = 0 \end{cases} \qquad (\text{П}2.15)$$

представляет собой бегущую волну, распространяющуюся с конечной скоростью, причем на фронте решение терпит разрыв первой производной (обобщенное решение). Сравните численное решение с точным:

$$u\,(t,x) = \left[\frac{\alpha v}{a}\,(x - vt)\right]^{1/\alpha}, \tag{П2.16}$$

где $v = ac^{\alpha}/\alpha$. Положить: $\alpha = 1; 3/2; 2$; $a = 0{,}1; 1; 10$. Использовать схему вида

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{1}{h}\left(k_{m+1/2}\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} - k_{m-1/2}\frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h}\right); \tag{П2.17}$$

проверить численно, какой из вариантов вычисления k предпочтительнее:

$$\begin{aligned}
&\text{а) } k_{m+1/2} = \frac{a}{2}\left[(u_m^n)^{\alpha} + (u_{m+1}^n)^{\alpha}\right],\\
&\text{б) } k_{m+1/2} = a\left(\frac{u_m^n + u_{m+1}^n}{2}\right)^{\alpha},\\
&\text{в) } k_{m+1/2} = a\left(\frac{2u_m^n u_{m+1}^n}{u_m^n + u_{m+1}^n}\right)^{\alpha},\\
&\text{г) } k_{m+1/2} = a\frac{2(u_m^n)^{\alpha}(u_{m+1}^n)^{\alpha}}{(u_m^n)^{\alpha} + (u_{m+1}^n)^{\alpha}}?
\end{aligned} \tag{П2.18}$$

- Построить профили $u(x)$ по времени ($u(t,x)$ — температура внутри сверхновой звезды при взрыве, который инициирует так называемую тепловую волну);
- положив $k = \mathrm{const} = 1$, рассмотреть численное решение, полученное при помощи разностных схем с шаблонами, приведенными на рис. П2.1.

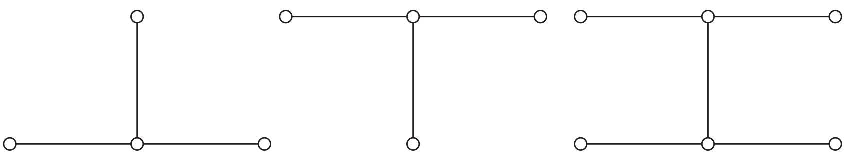


Рис. П2.1

10. Получить численное решение уравнения теплопроводности, описывающего распространение температуры

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{П2.19}$$

$$u\,(0,x,y) = 0; \quad u\,(t,0,y) = 0; \quad u\,(t,1,y) = 1;$$
$$u\,(t,x,0) = 2; \quad u\,(t,x,1) = 3,$$

используя разностные схемы расщепления:

а) $\dfrac{\widetilde{u}_{ml} - u_{ml}^{n}}{\tau} = \Lambda_1 \widetilde{u}_{ml}, \quad \dfrac{u_{ml}^{n+1} - \widetilde{u}_{ml}}{\tau} = \Lambda_2 u_{ml}^{n+1};$ (П2.20)

б) $$\begin{cases} \dfrac{u_{ml}^{n+1/2} - u_{ml}^{n}}{\tau} = \Lambda_1 \left[\xi u_{ml}^{n+1/2} + (1-\xi)\, u_{ml}^{n}\right], \\ \dfrac{u_{ml}^{n+1/2} - u_{ml}^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 \left[\xi u_{ml}^{n+1} + (1-\xi)\, u_{ml}^{n+1/2}\right], \quad \xi = 1/2; \end{cases}$$ (П2.21)

в) $$\begin{cases} \dfrac{\widetilde{u}_{ml}^{-} u_{ml}^{n}}{\tau} = \dfrac{1}{2}\left(\Lambda_1 \widetilde{u}_{ml}^{+} \Lambda_2 u_{ml}^{n}\right), \\ \dfrac{u_{ml}^{n+1/2} - u_{ml}^{n+1/2}}{\tau} = \dfrac{1}{2}\left(\Lambda_1 \widetilde{u}_{ml}^{+} \Lambda_2 u_{ml}^{n+1}\right); \end{cases}$$ (П2.22)

г) $\dfrac{\widetilde{u}_{ml} - u_{ml}^{n}}{\tau} = \Lambda_1 u_{ml}^{n}, \quad \dfrac{u_{ml}^{n+1} - \widetilde{u}_{ml}}{\tau} = \Lambda_2 \widetilde{u}_{ml},$ (П2.23)

$$\Lambda_1 u_{ml}^{n+1} = \frac{u_{m-1,l}^{n+1} - 2u_{m,l}^{n+1} + u_{m+1,l}^{n+1}}{h_x^2}; \quad \Lambda_2 = \frac{u_{m,l-1}^{n+1} - 2u_{m,l}^{n+1} + u_{m,l+1}^{n}}{h_y^2},$$

h_x, h_y — шаги по x, y.

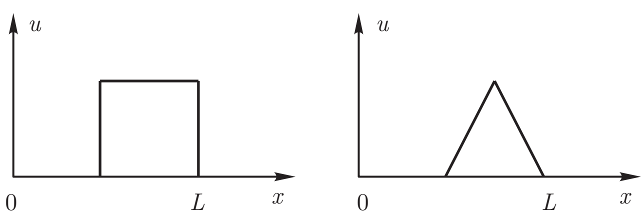
- сравнить их (по u в нескольких точках);
- исследовать сходимость численного решения по сетке.

11. Сравнить численные решения, полученные по разностным схемам Лакса, Куранта–Изаксона–Риса, Лакса–Вендроффа, Уорминга–Кутлера–Ломакса для уравнения переноса в недивергентной и дивергентной формах:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2/2)}{\partial x} = 0.$$

Начальные профили представлены на рис. П2.2.

Исследовать сходимость численных решений по сетке (при $h \to 0$, h — шаг по координате).



$0 \leqslant x \leqslant X$ $\qquad$ $0 \leqslant t \leqslant T$

Рис. П2.2

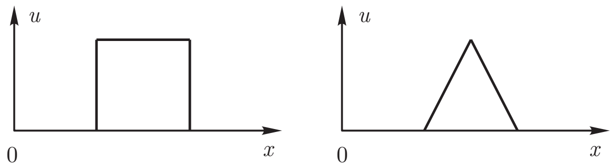
12. Сравнить численные решения, полученные по разностным схемам:

- Куранта–Изаксона–Риса,
- Мак-Кормака,
- гибридной схеме Федоренко,
- TVD,

для линейного одномерного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Начальные профили представлены на рис. П2.3.



$0 \leqslant x \leqslant X$ $\qquad$ $0 \leqslant t \leqslant T$

Рис. П2.3

Исследовать сходимость численных решений по сетке (при $h \to 0$, h — шаг по координате).

13. Рассматривается среда, находящаяся в начальный момент времени в жидком состоянии при температуре $T(x,0) > T_\text{p}$ (T_p — температура плавления). Поверхность среды при $x = 0$ поддерживается при $T(0,t) < T_\text{p}$, и при $x = 1$: $T(1,t) > T_\text{p}$. В предположении, что плотность среды не изменится при фазовом превращении, процесс затвердевания описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \rho c_\text{s}\dfrac{\partial T}{\partial t} = a_\text{s}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant y\,(t), \\ \rho c_\text{f}\dfrac{\partial T}{\partial t} = a_\text{f}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & y\,(t) \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{П2.24}$$

где $y(t)$ — положение фазового фронта, индексы s и f относятся к твердой и жидкой фазам. (П2.24) дополняется начальными и граничными условиями, а также условиями на фазовом фронте:

$$\begin{cases} u\,(x,0) = g\,(x)\,, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ u\,(0,t) = f_1\,(t)\,; \quad u\,(1,t) = f_2\,(t)\,; \\ a_\text{s}\dfrac{\partial T}{\partial x}\,(y-0) - a_\text{f}\dfrac{\partial T}{\partial x}\,(y+0) = \rho L\dfrac{\partial y}{\partial t} \end{cases} \tag{П2.25}$$

(условие баланса энергии при движении фазового фронта).

Примем (вода–лед): $x = 0$ (поверхность водоема), $x = L = 1$ м (дно водоема);

$$g(x) = \frac{7x}{L} + 273\,\text{К};$$

$$f_1\,(t) = \left[273 - 13\left(1 - e^{-10^z}\right)\right]\ \text{К};$$

$$f_2\,(t) = 280\,\text{К}; \quad l = 1\,\text{м}; \quad \rho = 10^3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

теплоемкость: вода — 4200, лед — 2100 Дж/(кг · К); коэффициент теплопроводности: вода — 0,56, лед — 2,25 Вт/(м · К); коэффициент температуропроводности: вода — $1{,}33 \cdot 10^{-7}$, лед — $1{,}08 \times \times 10^{-6}$ м^2/с; удельная теплота плавления: $3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг, температура плавления 273 К.

- Рассчитать профили $T(x)$ в различные моменты времени; представить в виде графиков;
- рассчитать и представить в виде графика положение фронта фазового перехода;
- использовать три разностные схемы.

Исследуйте сходимость численного решения по сетке, представленной на рис. П2.4.

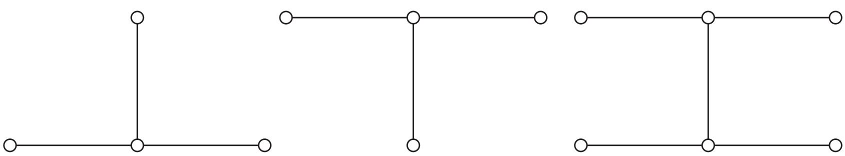


Рис. П2.4

14. Основное уравнение математической экологии — уравнение Бюргерса, описывающее перенос и диффузию загрязнений (в воде или воздухе); его линеаризованный вариант имеет вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u\,(0,t) = U, \quad u\,(L,t) = 0, \quad u\,(x,0) = 0. \end{gathered} \qquad (\text{П}2.26)$$

Здесь u — концентрация некоторого вещества, μ — коэффициент диффузии, $\{t, x\}$ — независимые переменные, $c = \text{const}$ — постоянная скорость потока (например, реки).

- Предложить явную и неявную схемы для численного решения (П2.1) и получить численное решение;
- представить результаты в виде профилей $u(x)$ в различные моменты времени;

- исследовать поведение численного решения в зависимости от μ ($\mu = 1$; 0,5; 0,01; 0,0001) и c ($c = 1$; 0,1; 0,01; 0,0001), $L = 1$.
- исследовать схемы на сходимость по сетке, т. е. при $h \to 0$ ($x \in [0{,}10]$; $t \in [0, T]$).

Точное нестационарное решение (П2.26) имеет вид (при $u(x,0) = \sin kx$ и периодических граничных условиях):

$$u\left(x,t\right) = \exp\left(-k^2 \mu t\right) \sin k\left(x - ct\right). \qquad (\text{П}2.27)$$

Проверить (численно) формулу (П2.27).

15. Для описания распространения акустических волн в несжимаемой среде можно использовать так называемую акустическую систему:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + A\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, L]\,, \quad t \in [0, T]\,,\\ \mathbf{w} = \binom{u}{p}; \quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} u & \rho^{-1} \\ \rho c^2 & 0 \end{Bmatrix},\end{gathered} \qquad (\text{П}2.28)$$

или:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,\\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\end{gathered} \qquad (\text{П}2.28\text{а})$$

где u — скорость частиц среды, p — давление, ρ — плотность среды, c — скорость звука, $\mathbf{A}$ — матрица 2×2. Система (П2.28) дополняется начальными и граничными условиями:

$$\begin{gathered}\mathbf{u}\left(x,0\right) = q_1\left(x\right),\\ p\left(x,0\right) = q_2\left(x\right);\\ \alpha_1 u\left(0,t\right) + \beta_1 p\left(0,t\right) = f_1\left(t\right)\\ \alpha_2 u\left(1,t\right) + \beta_2 p\left(1,t\right) = f_2\left(t\right)\end{gathered} \qquad (\text{П}2.29)$$

а) Введя разностную сетку с шагами τ, h используем для аппроксимации (П2.28), (П2.29) схему Лакса–Вендроффа ($\sigma = ch/\tau$; $T = n\tau, L = mh$):

$$\begin{cases} u_m^{n+1} = u_m^n - \dfrac{\sigma}{2\rho c}\left(p_{m+1}^n - p_{m-1}^n\right) + \dfrac{\sigma^2}{2}\left(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n\right),\\ p_m^{n+1} = p_m^n - \dfrac{\sigma}{2}\rho c\left(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n\right) + \dfrac{\sigma^2}{2}\left(p_{m+1}^n - 2p_m^n + p_{m-1}^n\right),\end{cases}$$

(П2.30)

или в векторной форме:

$$\mathbf{w}^n = \mathbf{w}^n - \frac{\sigma}{2}\mathbf{A}\left(\mathbf{w}^n_{m+1} - \mathbf{w}^n_{m-1}\right) + \\ + \frac{\sigma^2}{2}\mathbf{A}^2(\mathbf{w}^n_{m+1} - 2\mathbf{w}^n_m + \mathbf{w}^n_{m-1}). \quad (\text{П}2.31)$$

б) *Инварианты Римана.* Умножим первое уравнение в (П2.28) на $c\rho$, сложим полученные уравнения и вычтем первое из второго, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(p + c\rho u) + c\dfrac{\partial}{\partial x}(p + c\rho u) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(p - c\rho u) - c\dfrac{\partial}{\partial x}(p - c\rho u) = 0, \end{cases} \quad (\text{П}2.32)$$

или, в обозначениях $R = p + c\rho u$, $S = p - c\rho u$ $\Big($соответственно $u = \dfrac{R-S}{2\rho c}$, $p = \dfrac{R+S}{2}\Big)$:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + c\frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} - c\frac{\partial S}{\partial x} = 0; \quad (\text{П}2.33)$$

величины R и S называются *инвариантами Римана*; (П2.33) — уравнение в инвариантах Римана. Решение (П2.33) можно записать в виде:

$$R(x,t) = R(x - ct), \; S(x,t) = S(x + ct), \quad (\text{П}2.34)$$

т. е. R и S сохраняются вдоль характеристик $dx/dt = c$ соответственно.

- Получить численные решения (П2.28) по схеме Лакса–Вендроффа.
- получить численное решение (П2.29) по схеме Роу (или «кабаре»):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R^{n+1}_m - R^n_m}{\tau} + \dfrac{R^n_{m-1} - R^{n-1}_{m-1}}{\tau}\right) + c\dfrac{R^n_m - R^n_{m-1}}{h} = 0, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{S^{n+1}_m - S^n_m}{\tau} + \dfrac{S^n_{m+1} - S^{n-1}_{m+1}}{\tau}\right) - c\dfrac{S^n_{m+1} - S^n_m}{h} = 0, \end{cases}$$

$$R^n_m = p^n_m + c\rho \cdot u^n_m, \quad S^n_m = p^n_m - c\rho \cdot u^n_m,$$

$$u^n_m = \frac{R^n_m - S^n_m}{2\rho c}, \quad p^n_m = \frac{R^n_m + S^n_m}{2},$$

предварительно получив соответствующие (П2.32) начальные и граничные условия.

- получить численное решение задачи распада разрыва

$$u\,(x,0)=\begin{cases}u_1, & x\leqslant 0,\\ u_2, & x>0, \quad u_2>u_1>0,\end{cases}$$

$$p\,(x,0)=\begin{cases}p_1, & x\leqslant 0,\\ p_2, & x>0; \quad u_2\,(x,0)=2; \quad u_1\,(x,0)=1;\end{cases}$$

$$p_2\,(x,0)=\rho c u_2, \quad p_1\,(x,0)=\rho c u_1;$$

- сравнить эти решения, представив профили $u\,(x)$ и $p\,(x)$ в различные моменты t;
- показать сходимость численных решений, полученных по обеим схемам, по сетке (т. е. при $\tau\to 0$);
- получить численное решение (П2.32) с помощью схемы Куранта–Изаксона–Риса; соответствующий шаблон представлен на рис. П2.5.

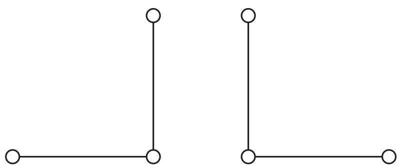


Рис. П2.5

16. Рассмотрим задачу о нагревании балки квадратного сечения, бесконечной по одной оси координат (Oz).

Пусть температура грани $ABCDA$ (рис. П2.6) поддерживается постоянной: 1 на AB, 2 на BC, 3 на CD и 4 на DA (температура приведена в относительных единицах; $T_*=100$ °C). Размер грани $L=0{,}1$ м.

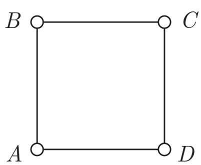


Рис. П2.6

Получить численное решение стационарной задачи теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (\text{П}2.35)$$

с приведенными граничными условиями, используя итерационные методы:

а) Якоби:

$$\frac{u^{i+1}_{m-1,l}-2u^{i+1}_{ml}+u^{i}_{m+1,l}}{h_x^2}+\frac{u^{i+1}_{m,l-1}-2u^{i+1}_{ml}+u^{i}_{m,l+1}}{h_y^2}=f_{m,l}, \quad (\text{П}2.36)$$

$mh_x=L$, $lh_y=L$ (h_x, h_y — шаги по координатам x, y);

б) Зейделя:

$$\frac{u_{m-1,l}^{i+1} - 2u_{ml}^{i+1} + u_{m+1,l}^{i}}{h_x^2} + \frac{u_{m,l-1}^{i+1} - 2u_{ml}^{i+1} + u_{m,l+1}^{i}}{h_y^2} = f_{m,l}; \quad (\text{П}2.37)$$

в) верхней релаксации ($h_x = h_y$)

$$\frac{u_{m-1,l}^{i+1} + u_{m,l-1}^{i+1}}{h^2} + \frac{u_{m+1,l}^{i} + u_{m,l+1}^{i}}{h^2} = \\ = -\frac{4}{h^2}\left[\frac{u_{m,l}^{i}}{\tau} + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) u_{m,l}^{i}\right] = f_{ml}. \quad (\text{П}2.38)$$

- Сравнить эти методы по скорости сходимости (численно и теоретически);
- проверить сходимость численного решения по сетке (т. е. при $h_x, h_y \to 0$);
- исследовать численно скорость сходимости (П2.38) от величины итерационного параметра τ;
- результаты численного решения представить в виде изолиний $T(x, y) = \text{const}$ и в виде одномерных графиков $T(x)$ при разных значениях y и $T(y)$ при разных значениях x.

17. Получить численное решение одномерных линейного и нелинейного уравнений переноса (в дивергентной и недивергентной формах):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const}; \quad (\text{П}2.39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (\text{П}2.40)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2/2)}{\partial x} = 0; \quad (\text{П}2.41)$$

$$t \in [0, T], \quad x \in [-X, X]; \quad (\text{П}2.42)$$

$$u(0, x) = \begin{cases} u_1, & x > 0, \\ u_2, & x \leqslant 0; \end{cases}$$

$T = 100$; $X = 10$; $a = 1$; $N\tau = T$, $Mh = 2X$, $M = 10^3$, (τ, h — шаги по времени и по координате) с помощью разностных схем:

- Куранта–Изаксона–Риса;
- Лакса–Вендроффа;
- гибридной схемы Федоренко;
- Хартена (TVD);
- Колгана;
- ENO-схемы.

18. Получить численное решение одномерной задачи о распаде разрыва в идеальном газе, используя систему нестационарных уравнений газодинамики

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}\,\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \tag{П2.43}$$

$$\mathbf{U} = \{\rho, u, \varepsilon\}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho} & u & \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \\ 0 & p/\rho & u \end{Bmatrix},$$

где ρ — плотность, u — скорость газа, ε — удельная внутренняя энергия газа, $\{t, x\}$ — независимые координаты; $\rho\,(0, x) = \rho_0$, $u\,(0, x) = 0$, $\varepsilon\,(x, 0) = \varepsilon_0$; уравнение состояния:

$$p - \rho\varepsilon\,(\gamma - 1) = 0, \quad \gamma = 1{,}4;$$

$$\rho\,(0, x) = \begin{cases} \rho_1, & x \leqslant 0, \\ \rho_2, & x > 0, \end{cases}$$

$$t \in [0, T]\,; \quad x \in [-X, X]; \quad N_\tau = T,$$

$$Mh = 2X, \quad M = 20, 100, 1000; \quad h \text{ — шаг по } x,\ \tau \text{ — шаг по } t.$$

Использовать сеточно-характеристический метод ($\sigma = \tau/h$):

$$\mathbf{U}_m^{n+1} = \mathbf{U}_m^n - \sigma\left[\left(\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Lambda}^{+}\mathbf{\Omega}\right)_m^n\left(\mathbf{U}_{m-1}^n - \mathbf{U}_m^n\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Lambda}^{-}\mathbf{\Omega}\right)_m^n\left(\mathbf{U}_{m+1}^n - \mathbf{U}_m^n\right)\right]. \tag{П2.44}$$

Здесь: $\mathbf{\Lambda}^{\pm} = (1/2)\,(\mathbf{\Lambda} + |\mathbf{\Lambda}|)$, $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица: $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. $\lambda_1 = u + c$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = u - c$ являются собственными числами матрицы $\mathbf{A}$;

$$\mathbf{\Omega} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \rho} & \rho c & \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \\ p & 0 & -\rho^2 \\ p & -\rho c & \frac{\partial p}{\partial \rho} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_3 \end{Bmatrix}$$

— матрица, строками которой являются соответствующие собственные векторы $\mathbf{A}$ (причем $\mathbf{A} = \mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Omega}$), получаемые из соотношения $\boldsymbol{\omega}_i\mathbf{A} = \lambda_i\boldsymbol{\omega}_i$.

19. Одна из постановок задачи взаимодействия лазерного излучения с веществом имеет следующий вид (задача физики горения, u — температура):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad r \geqslant 0, \quad z \geqslant 0; \tag{П2.45}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = I\,(r) + e^{-1/u} - \eta u; \quad r \geqslant 0, \quad z \geqslant 0;$$

$$u(r,z,0) = u_0(r,z) \geqslant 0,$$

$$u \to 0 \text{ при } \sqrt{r^2+z^2} \to \infty.$$

$e^{-1/u}$ — описывает энерговыделение реакции на поверхности образца, $-\eta u$ — теплопотери, $I(r) = I_0 e^{\left(-r^2/r_0^2\right)}$, $r_0 = 2$ мм.

- Получить численное решение задачи (П2.45) с помощью локально-одномерной разностной схемы;
- исследовать распределение температуры u по r и z в различные моменты времени;
- показать сходимость решения по сетке (т. е. при $h_x \to 0$, $h_y \to 0$);
- получить численное решение (П2.45) при помощи явной разностной схемы. Какой шаг по времени необходимо для этого выбрать?
- Исследовать поведение рассматриваемой среды в зависимости от параметров η, I_0, r_0.

20. Уравнение, описывающее как конвективные, так и диффузионные процессы, называется *уравнением Бюргерса*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mu = \text{const} > 0. \tag{П2.46}$$

Зададим начальные данные в следующем виде:

$$u(x,0) = \begin{cases} u_1, & x < x_0, \\ u_2, & x > x_0, x_0 = 0, \end{cases} \tag{П2.47}$$

$u_1 < u_2$; t, x — независимые переменные (положим: $u_1 = 1$, $u_2 = 0$; $x \in [-10, 10]$, $t \in [0, T]$).

Точное решение (П2.46) имеет вид:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_2 + \frac{u_1 - u_2}{1 + g(x,t)\exp\left\{\dfrac{u_1-u_2}{2\mu}(x - x_0 - Dt)\right\}}, \\ q(x,t) &= \int\limits_{-(x-x_0-u_2t)/\sqrt{4\mu t}}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi \Bigg/ \int\limits_{(x-x_0-u_1t)/\sqrt{4\mu t}}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi, \\ D &= \frac{u_1+u_2}{2}. \end{aligned} \tag{П2.48}$$

- Получить численное решение (П2.46), (П2.47) при $\mu = 0 \div 1{,}0$. Есть ли что-нибудь общее во всех решениях при разных μ («центр сглаженных ударных волн»)?

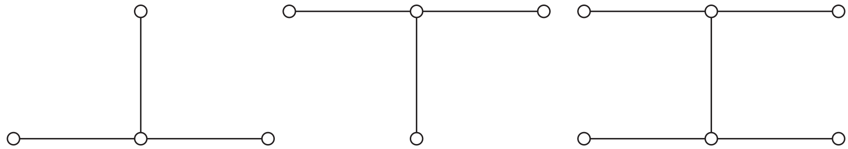


Рис. П2.7

- Использовать для численного решения (П2.46) схемы с шаблонами, приведенными на рис. П2.7;
- проверить сходимость численного решения по сетке (при $h \to 0$) и сравнить с (П2.48).

21. Для численного решения уравнения Кортевега–де Фриса (КдФ)

$$u_t + 6uu'_x + u'''_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in [-10, 10] \tag{П2.49}$$

(на границах области интегрирования ставятся условия периодичности) рассмотреть две разностные схемы (рис. П2.8 и П2.9) с шаблонами (вторая — аналог схемы Саульева для уравнения теплопроводности).

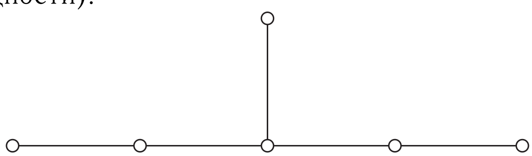


Рис. П2.8

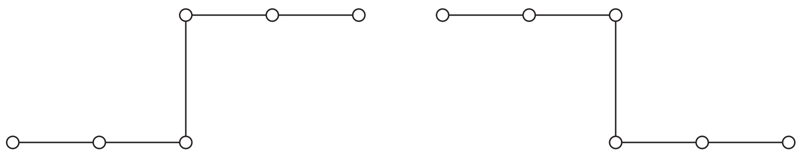


Рис. П2.9

- Сравнить численные решения, полученные по обеим схемам;
- показать сходимость по сетке (при $h \to 0$);
- рассмотреть начальные условия, представленные на рис. П2.10.

Как изменится численное решение, если к явлениям конвекции и дисперсии, описываемых уравнением КдФ, добавится диссипация

$$u_t - 6uu'_x + u''_x = \mu u''_x, \quad \mu = 10^{-4} \div 1 \tag{П2.50}$$

(показать расчетом по одной из схем на рис. П2.8, П2.9).

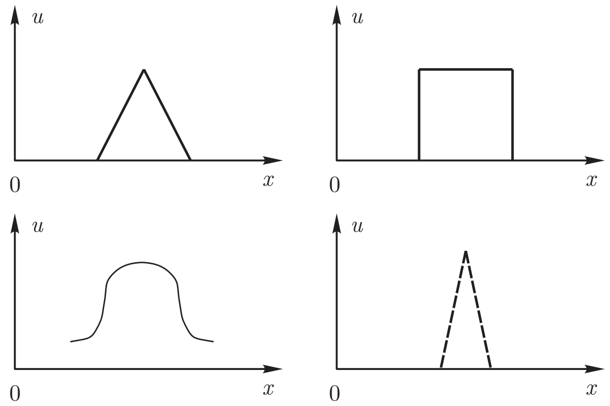


Рис. П2.10

Уравнение (П2.49) имеет бесконечное число законов сохранения:

$$\int\limits_{\Omega} u dx = C_1, \tag{П2.51}$$

$$\int\limits_{\Omega} u^2 dx = C_2, \tag{П2.52}$$

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{(u'_x)^2}{2} + u^3 \right) dx = C_3, \tag{П2.53}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Проверить любой из них.

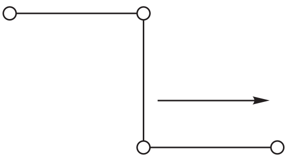


Рис. П2.11

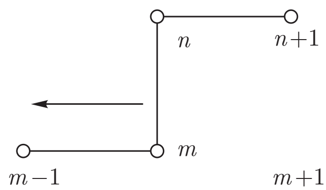


Рис. П2.12

Комментарий. Организация счета по схеме Саульева: на четных слоях счет идет слева направо (рис. П2.11) по формулам

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{1}{k^2}\left(u_{m-1}^{n+1} - u_m^{n+1} + u_m^n - u_{m+1}^n\right), \tag{П2.54}$$

на нечетных — справа налево (рис. П2.12):

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{1}{k^2}\left(u_{m-1}^{n+1} - u_m^{n+1} - u_m^n + u_{m+1}^n\right). \tag{П2.55}$$

22. Движение частицы заряда q и массы m в магнитном поле описывается системой ОДУ:

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{mc}\mathbf{v}\times\mathbf{B}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v},\\ \mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.\end{gathered} \tag{П2.56}$$

Получить численное решение задачи об отражении заряженной частицы от магнитного зеркала. В этом случае:

$$B_x = -\frac{x}{2}\cdot\frac{B_1 - B_0}{\pi l}\cdot\frac{1}{1 + \dfrac{(z-L)^2}{l^2}},$$

$$B_y = -\frac{y}{2}\cdot\frac{B_1 - B_0}{\pi l}\cdot\frac{1}{1 + \dfrac{(z-L)^2}{l^2}},$$

$$B_z = B_0 + (B_1 - B_0)\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{z-L}{l}\right)\cdot\frac{1}{\pi}.$$

Начальные данные:

$$x(0) = \frac{v_1}{\omega_0}, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0$$

($\omega_0 - qB_0/(mc)$ — ларморова частота),

$$v_x(0) = 0, \quad v_y(0) = -V_1, \quad v_z(0) = -V_1\cdot\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\omega_0 = 1, \quad \frac{B_1}{B_2} = 2, \quad V_1 = 1, \quad l = 10, \quad L = 40, \quad \alpha\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right].$$

Получить численное решение задачи о движении заряженной частицы в магнитной ловушке. В этом случае:

$$B_x = -\frac{x}{2}\cdot\frac{B_1 - B_0}{2l}\cdot\pi\cdot\sin\frac{\pi z}{l},$$

$$B_y = -\frac{y}{2}\cdot\frac{B_1 - B_0}{2l}\cdot\pi\cdot\sin\frac{\pi z}{l},$$

$$B_z = B_0 + \frac{B_1 - B_0}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi z}{l}\right).$$

Начальные условия:

$$x(0) = \frac{V_1}{\omega_0}, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad v_x(0) = 0, \quad v_y = -V_1,$$

$$v_z(0) = -V_1\cdot\operatorname{ctg}\alpha, \quad \omega_0 = 1, \quad \frac{B_1}{B_0} = 2,$$

$$V_1 = 1, \quad l = 20, \quad \alpha\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right].$$

- Использовать методы Рунге–Кутты 1-го и 4-го порядков точности;
- исследовать сходимость численных решений по сетке (при $\tau \to 0$, τ — шаг по времени).

23. Некоторые процессы в плазме, в биосистемах и в химических реакциях описываются нелинейным уравнением теплопроводности вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right] + Q\left(t\right), \tag{П2.57}$$

где $T(t,x)$ — температура среды, $\{t,x\}$ — независимые переменные, $k(T)$ — нелинейный коэффициент теплопроводности, $Q(t)$ — нелинейная функция (например, моделирующая процессы горения, детонации); обычно: $k(T) = k_0 T^{\alpha}$; $Q(T) = q_0 T^{\beta}$; $k_0, q_0, \alpha > 0$; $\beta > 1$. При $\beta > \alpha + 1$ реализуется так называемый LS-режим с обострением, при $\beta < \alpha + 1$ — HS-режим с неограниченным ростом температуры, при $\beta = (\alpha + 1)$ — S-режим (полуширина профиля температуры постоянна). При $\beta > \alpha + 1$ полуширина профиля сокращается, процесс локализуется, формируется так называемая диссипативная структура, при $\beta < \alpha + 1$ наблюдаются тепловые волны, амплитуда которых растет. Профиль задается в виде, представленном на рис. П2.13.

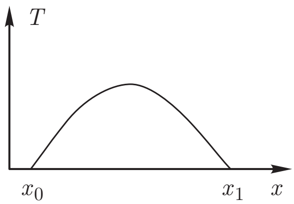


Рис. П2.13

- Проверить эти выводы численно, используя неявную схему. Положить:

$$\{k_0 = 1, \quad q_0 = 1, \quad q_0 = 1; \quad \beta = 3, \quad \alpha = 2\};$$

$$\{k_0 = 1, \quad q_0 = 1; \quad \beta = 3{,}18; \quad 1{,}667; \quad \alpha = 2\};$$

- проверить сходимость численных решений по сетке (т. е. при $h \to 0$, h — шаг по координате);
- вывести профили $T(x)$ в различные моменты времени.

24. Множество точек на фазовой плоскости, к которым стремится решение ОДУ, называется *аттрактором*. Представить численное решение следующих задач на фазовой плоскости и исследовать эти задачи на наличие аттракторов.

Аттрактор Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma y - \sigma x, & x(0) > 0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0 \\ & \qquad (y_0 = 1, z_0 = 1), \\ \dot{y} = -xz + rx - y, & \sigma = 10, \quad r = 28, \quad b = \{8/3; 10; 20\}; \\ \dot{z} = xy - bz, & t_k = 20; \quad \tau = 10^{-3}, \quad 10^{-2}. \end{cases} \tag{П2.58}$$

(σ — число Прандтля, r — число Рэлея).

Аттрактор Реслера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, & x(0) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0, \\ \dot{y} = x + \dfrac{y}{5}, & \mu > 0, \quad 0 < \mu \leqslant 10, \\ \dot{z} = \dfrac{1}{5} + z(x - \mu). \end{cases} \tag{П2.59}$$

Аттрактор Рикитаки:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + yz, & \gamma_1 \in [0{,}002; 0{,}004], \\ \dot{y} = -\mu y + xr, & \gamma_2 = 0{,}002; \quad \mu \in [0{,}2; 2], \\ \dot{z} = 1 - xy - \gamma_1 z, & x(0) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0, \\ \dot{r} = 1 - xy + \gamma_1 r, & r(0) = r(0). \end{cases} \tag{П2.60}$$

Провести исследования свойств систем ОДУ (П2.61)–(П2.63) в зависимости от параметров процессов ($\sigma, r, b, \gamma_1, \gamma_2$):

- исследовать сходимость численного решения по сетке;
- использовать методы Рунге–Кутты первого и четвертого порядков точности.

25. Нелинейное уравнение теплопроводности способно описывать распространение тепловых волн, волн горения и т. п. Рассмотрим следующие уравнения.

а) Уравнение Колмогорова–Пискунова–Петракова (КПП):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au(1-u), \quad u(-\infty, t) = 1, \quad u(\infty, t) = 0, \tag{П2.61}$$

$$\text{б)} \in [0{,}1; 10]; \quad k = \mathrm{const} = 1, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leqslant k, \\ 0, & x > k. \end{cases} \tag{П2.62}$$

2. Уравнение Зельдовича–Франка-Каменецкого (задача горения):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au(u-\varepsilon)(1-u), \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \tag{П2.63}$$

начальные и граничные условия — (П2.61), (П2.62).

- Получить численное решение (П2.61)–(П2.63) методом второго порядка точности;
- исследовать сходимость численного решения по сетке;
- построить профили $u(x)$ в различные моменты времени.

26. Нагревание пластины лазерным излучением описывается нестационарным двумерным уравнением теплопроводности:

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^N}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^N k\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[k\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial z}\right] + q, \qquad (\text{П}2.64)$$

где $T\left(t, r, z\right)$ — температура, c — коэффициент теплоемкости, $k(T)$ — коэффициент теплопроводности, $N = 0$ в плоской и $N = 1$ в цилиндрической геометрии.

а) Начальная температура:

$$T\left(0, r, z\right) = T_0\left[1 + \cos\left(2\pi z\right)\cdot\cos\left(2\pi r\right)\right] + T_1,$$
$$T_0 = 100, \quad T_1 = 2; \quad k\left(T\right) = 1, \quad c = 1, \quad q = 1.$$

В этом случае точное решение имеет вид

$$T = T_0\left[1 + e^{-8\pi^2 t}\cdot\cos\left(2\pi z\right)\cdot\cos\left(2\pi r\right)\right] + T_1. \qquad (\text{П}2.65)$$

б) $q = q_0 e^{-\left(z^z/z_0^z\right)^2}$, $t < \tau$; $q = 0$, $t > \tau$, $q_0 = 10^6$ Вт/см^2, $k_0 = 5$ мкм, $\tau = 100$ мкс, $T_0 = 300$ К; коэффициент поглощения возрастал от 0,05 для $T = T_0$ до 0,15 для $T = T_{\text{пл}}$ (температура плавления). Для железа $c = 4$ Дж/(см$^3\cdot$К), $k_{\text{т}} = 0{,}8$Вт/(см $\cdot$ К) — твердая фаза; $Q_{\text{пл}} = 2214$ Дж/см^3; $k_{\text{ж}} = 0{,}4$ Вт/(см $\cdot$ К) — расплав. Теплота плавления $Q_{\text{пл}}$ учитывается добавлением к теплоемкости величины $Q_{\text{пл}}/\left(2\cdot\Delta T_{\text{пл}}\right)$ при $T_{\text{пл}} - \Delta T_{\text{пл}} < T < T_{\text{пл}} + \Delta T_{\text{пл}}$ ($\Delta T_{\text{пл}} \approx 25 \div 50$ К). Зависимость $c_V\left(T\right)$ представлена на рис. П2.14.

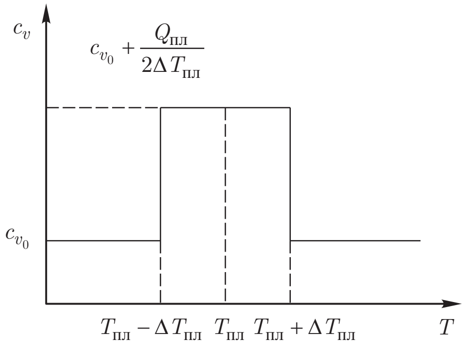


Рис. П2.14

Число частиц, испаренных с единицы поверхности:

$$N_e = \frac{2\pi m}{kT_{\text{пл}}}\, v_0^3 \alpha \exp\left[-\left(\frac{\lambda_1}{kT} + 1\right)\right], \qquad (\text{П}2.66)$$

m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, λ_1 — энергия связи кристаллической решетки, v_0 — дебаевская частота (в качестве λ_1 выбирается работа выхода, соответствующая наиболее легко испаряемой компоненте; $\lambda_1 \approx 4{,}3$ эВ). $\alpha \in [0{,}1 \div 0{,}82]$ — учет обратного потока частиц.

- Получить численное решение (П2.64) с помощью явной и неявной схем;
- сопоставить решение п. а) с точным;
- проверить сходимость решения по сетке.

27. Движение частицы в центрально-симметричном поле с потенциалом $U(r)$ описывается уравнением Шрёдингера

$$\Delta\Psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - U(r)\right]\Psi = 0, \qquad (\text{П}2.67)$$

где Δ — оператор Лапласа в сферических координатах r, Θ, φ; $\mu, \hbar$ — постоянные; решение ищется в виде

$$\Psi = Y_{\ell m}(\Theta, \varphi) \cdot R(r)\, r,$$

где $Y_{\ell m}$ — известная сферическая функция; ℓ, m — целые числа.

Обозначив

$$\lambda = \frac{2\mu}{\hbar^2}\, E, \quad V(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2}\, U(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}, \qquad (\text{П}2.68)$$

получим задачу для определения $R(r)$:

$$R_r'' - \left[V(r) - \lambda\right] R = 0, \quad r \in [0, \infty]; \quad R(0) = 0;$$

второе граничное условие — нормировки:

$$\int_0^\infty R^2(r)\, dz = 1. \qquad (\text{П}2.69)$$

- Получить численное решение задачи методом стрельбы (рис. П2.15). Обычно на бесконечности ставится условие $R(r^*, \lambda) = 0$, где r^* — достаточно большое число. Из этого уравнения методом Ньютона (или просто перебором) находим λ. Положим, что при $\lambda = \lambda_1$ имеем $R(r^*, \lambda) > 0$, при $\lambda = \lambda_2$ будет $R(r^*, \lambda) < 0$; тогда выбираем $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ и т. д. Какие трудности встретятся при численной реализации метода стрельбы?

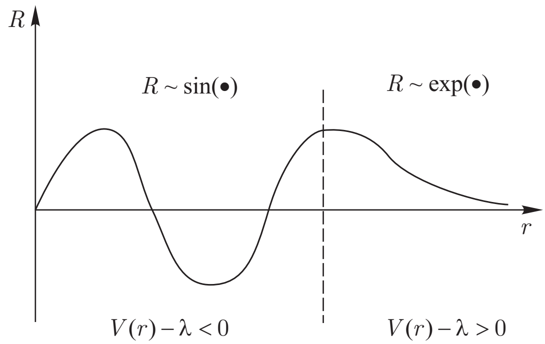


Рис. П2.15

- Получить численное решение задачи методом трехточечной прогонки;
- исследовать сходимость решения по сетке;
- получить численные решения для нескольких λ_i $(i = 1 \div 5)$.

28. Для численного решения краевой задачи ОДУ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u), \quad u(0) = U_1, \quad u(L) = U_2 \tag{П2.70}$$

воспользоваться тремя вариантами трехточечной прогонки (предварительно получив прогоночные соотношения):

а) прямая прогонка (слева направо);

б) обратная (справа налево);

в) встречные прогонки.

Положить:

$$f(u) = e^{\alpha u}; \quad f(u) = \sin(\omega u), \quad U_1 = 0, \quad U_2 = 1, \quad L = 1. \tag{П2.71}$$

29. Пусть в (П2.70) краевые условия являются периодическими. Получить формулы для трехточечной периодической прогонки и численно решить (П2.70).

Исследовать поведение численного решения в зависимости от параметров α и ω в (П2.71).

30. Для аппроксимации краевой задачи

$$\begin{gathered} u_x^{\mathrm{IV}} = f(x), \quad x \in [0, L], \quad u(0) = 0, \quad u(L) = 0, \\ u'(0) = 1, \quad u'(L) = 1, \quad f(x) = \mathrm{const} \end{gathered} \tag{П2.72}$$

получить формулы пятиточечной прогонки и численно решить (П2.72), положив $L = 1$.