

# 非标准分析：不基于数理逻辑的介绍

逯晓零

2023 年 8 月 30 日

## 目录

1 引言	1
2 正文	1
3 尾声	2

## 1 引言

或许在认识非标准分析前,我们需要懂得一些基本的事实。非标准分析不能给你带来超越标准分析的东西,它仅仅只是一种对待分析的证明方法,任何标准分析或非标准分析中的定义、函数、谓词、定理等都是有一一对应的,这就是常说的转化原理。因此非标准分析可以给你带来超越标准分析的证明手段,当我们拥有这个工具时,就能在证明时来回游走于非标准和标准世界中,从而获得了超越标准的力量。对于预备知识,请读者熟悉标准分析的内容  $\mathcal{R} = (\mathbb{R}; +, \times, 0, 1, <)$ 。

## 2 正文

我们不会采用非主滤子或超结构的方式来引入超实数,而采用大家熟知的无穷小量,虽然理论稍有偏差,但事实证明其应用起来是完全一致的。

定义 2.1 (无穷小): (1) 对于零邻域  $0 \in U$  附近的实函数,如果有  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 我们就称  $f$  是一个无穷小,记所有无穷小的集合为  $\mathbb{R}'_\varepsilon$  且记  $\mathbb{R}'_{\text{sim}} = \{0\} \cup \mathbb{R}'_\varepsilon$

(2) 对于任意  $f, g \in \mathbb{R}'_{\text{sim}}$ , 如果有  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ , 则记  $f \sim_{\text{lim}} g$ , 由数学分析内容可知它是一个等价关系,故我们可以映入商集

$$\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R}'_\varepsilon / \sim_{\text{lim}}, \mathbb{R}_{\text{sim}} = \{0\} \cup \mathbb{R}_\varepsilon$$

(3) 我们把

$$\mathbb{R}_{\text{inf}} = \frac{1}{\mathbb{R}_\varepsilon} = \left\{ \frac{1}{f} \mid \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \right\}$$

中的元素称为无穷大

值得注意的是极限变量趋势为零就足够了，对于  $x \rightarrow a$  只需经过一个平移  $f(x+a)$  即可。我们把

$$\mathbb{R}_{\text{fin}} = \mathbb{R} + \mathbb{R}_{\text{sim}}$$

中的元素称为**有限超实数**，并把  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_{\text{fin}} \cup \mathbb{R}_{\text{inf}}$  称为**超实数**。其中有限超实数才是我们讨论的重点，如果我们能说明  $\mathbb{R}_{\text{fin}}$  是一个整环，那么相应的域构造  $\mathbb{R}^*$  就是自然的了。

**定理 2.1:** (1) 有限超实数  $\mathbb{R}_{\text{fin}}$  构成一个整环，其加法为

$$(r_1 + f) + (r_2 + g) = (r_1 + r_2) + (f + g)$$

其乘法为

$$(r_1 + f)(r_2 + g) = (r_1 r_2) + (r_1 g + r_2 f + fg)$$

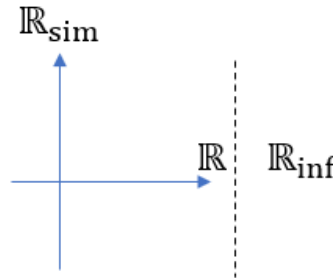
(2)  $\mathbb{R}_{\text{sim}}$  是  $\mathbb{R}_{\text{fin}}$  的理想，且有

$$\mathbb{R}_{\text{sim}}/\mathbb{R}_{\text{fin}} \cong \mathbb{R}$$

读者需要理解一点有限超实数的写法  $r + f, r \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}_{\text{sim}}$  和复数有点像，因此我们没必要往上面硬加上序结构，接下来我们将会考虑如何让标准的关系  $R \subset \mathbb{R}^n$  对应到非标准上  $R^* \subset \mathbb{R}^{n*}$ ，这样我们只要把序和函数看成一个关系就能实现两个领域之间的转化了。如果  $x, y \in \mathbb{R}^*$  满足  $x - y \in \mathbb{R}_{\text{sim}}$ ，就称  $x$  无限接近于  $y$  并记为  $x \approx y$ 。此时我们有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b &\Leftrightarrow \forall x \approx a, f(x) \approx b \\ f'(x)|_{x=a} = b &\Leftrightarrow \forall dx \in \mathbb{R}_{\text{sim}}, \frac{f(a+dx) - f(a)}{dx} \approx b \\ \int_a^b f'(x)dx = c &\Leftrightarrow f(b) - f(a) = c \end{aligned}$$

这样我们的非标准分析就建立完毕了，本质上我们只要理解了超实数，所有的一切就都是自然的了。



### 3 尾声

十分遗憾地告诉你这篇文章结束了，因为最近随便搜搜的时候发现，国内原来有关于非标准分析的详细介绍，就是金人麟老师的[这篇文章](#)，而且在小破站上连[视频](#)都有了，没办法既然撞内容了，也只能弃掉了。

## 参考文献

- [1] Robinson, Abraham (1996). *Non-standard analysis* (Revised ed.). Princeton University Press. ISBN 0-691-04490-2.
- [2] Luxemburg, W A. J, and Abraham Robinson. *Contributions to Non-Standard Analysis*. Amsterdam: North-Holland Pub. Co, 1972. Internet resource.
- [3] Robert, Alain M. *Nonstandard Analysis*. Indagationes Mathematicae 64.6(1966):432-440.
- [4] Davis, Martin. *Applied Nonstandard Analysis*. Wiley, 2019.
- [5] ISAAC GOLDBRING. *LECTURE NOTES ON NONSTANDARD ANALYSIS: UCLA SUMMER SCHOOL IN LOGIC*. url:<https://www.math.uci.edu/~isaac/NSA%20notes.pdf>.
- [6] DR. J. PONSTEIN. *NONSTANDARD ANALYSIS*. url:<https://www.rug.nl/research/som-ri/publications/ponstein.pdf>.
- [7] E. E. Rosinger. *Short introduction to Nonstandard Analysis*. url:<https://arxiv.org/pdf/math/0407178.pdf>.
- [8] A. 鲁宾逊著, 申又根, 王世强, 张锦文等译. 非标准分析. 北京科学出版社, 1980.
- [9] M.DAVIS 著, 冯汉桥, 康多寿, 栗延龄, 汪慧民等译. 应用非标准分析. 陕西师范大学出版社, 1989.