$M_n(\mathbb{R})$ 的可逆子空间问题简介

逯晓零

目录

1 引言 **1**

2 初探索 **1**

3 问题转化 **3**

4 结论 **6**

5 番外 **8**

1 引言

我们整篇文章的出发点是下面的问题。

问题 1.1: 设 $M_n(\mathbb{R})$ 是由所有 n 阶实方阵构成的 $\mathbb{R}$ 上的 n^2 维线性空间。求出所有满足下面条件的子空间 $V \subset M_n(\mathbb{R})$：$V - \{O\} \subset GL_n(\mathbb{R})$。

方便起见，我们把符合上述条件的 V 称为 $M_n(\mathbb{R})$ 的**可逆子空间**。我们的核心参考为 [1] 及其相关索引。

2 初探索

我们通过简单的试错和特例，发现了以下这些基础事实。

定理 2.1: (1)$M_n(\mathbb{R})$ 的所有 1 维可逆子空间为 $L(M) = \{rM \mid r \in \mathbb{R}\}, |M| \neq 0, M \in M_n(\mathbb{R})$。

(2) 若 n 为奇数，则 $M_n(\mathbb{R})$ 只有 1 维可逆子空间。

(3)$M_n(\mathbb{C})$ 只有 1 维可逆子空间。

证明. (1) 显然 1 维子空间均由 $M \in M_n(\mathbb{R})$ 生成，且当 $|M| \neq 0$ 时是可逆子空间，当 $|M| = 0$ 时不是可逆子空间，从而得证。

(2) 设 $V \subset M_n(\mathbb{R})$ 是 $k \geq 2$ 维可逆子空间，则存在一组基 $\{A_1, A_2, ..., A_k\}, |A_i| \neq 0$，且有 $\forall\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda A_1 + A_2| \neq 0$。但是，我们又有

$$|\lambda A_1 + A_2| = |A_1||\lambda I_n - (-A_1^{-1}A_2)|$$

其中 $f(\lambda)=|\lambda I_n-(-A_1^{-1}A_2)|$ 是 $-A_1^{-1}A_2$ 的特征多项式且次数为奇数，故必存在一个实根 $\lambda_0\in\mathbb{R},f(\lambda_0)=0$

从而有 $|\lambda_0A_1+A_2|=0$，矛盾。

(3) 借助代数基本定理，同 (2) 证明即可。 □

实际上，借助线性空间的基本定理可知，同一域上的同维数线性空间都是互相同构的。于是我们有一个基本的想法，对于同一维数的子空间，我们先找到一个实例，再通过线性变换来生成其它的子空间，从而就能找到同一维数下的所有线性子空间。

例如，考虑 1 维子空间，首先是基础子空间 $L(I_n)=\{rI_n\mid r\in\mathbb{R}\}$，此时对任意一个矩阵 $M\in GL_n(\mathbb{R})$，定义线性变换

$$T_M:M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R}),A\mapsto MA$$

则$T_M(L(I_n)),M\in GL_n(\mathbb{R})$ 给出了我们需要的所有一维可逆子空间。

类似的方法可以运用到更高维数情形吗？我们的畏惧点在于所有线性同构变换来自 n^2 阶矩阵 $M_{n^2}(\mathbb{R})$，为了排除它，我们先给出下面的定义。

定义 2.1: 设 $U_1,U_2\subset M_n(\mathbb{R})$ 是两个同维可逆子空间，如果存在线性变换

$$T_M:M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R}),A\mapsto MA,M\in GL_n(\mathbb{R})$$

使得 $T_M(U_1)=U_2$，我们就称 U_1 和 U_2 是同类的，并记 $U_1\sim U_2$。

接着我们来说明同类可逆子空间构成一个等价关系

定理 2.2: 可逆子空间的同类 $\sim$ 构成一个等价关系。

证明. (1) 对任意可逆子空间 U，取 $M=I_n$ 即可得自反性。

(2) 由于线性变换 $T_M(U_1)=U_2$ 是可逆的，因此有 $T_{M^{-1}}(U_2)=U_1$，从而可得对称性。

(3) 对于 $T_{M_1}(U_1)=U_2,T_{M_2}(U_2)=U_3$，显然有 $T_{M_2M_1}(U_1)=U_3$，从而可得传递性。 □

我们记 $M_n(\mathbb{R})$ 的所有 k 维可逆子空间构成的集合为 $GL_{n,k}(\mathbb{R})$，我们的下一阶段目标是求出等价类的个数 $|GL_{n,k}(\mathbb{R})/\sim|$，一个显然的结果是

$$|GL_{n,1}(\mathbb{R})/\sim|=1$$

当然在求解之前，我们必需得考虑其是否为一个有限值。我们来考虑最特殊的情形，即 $M_2(\mathbb{R})$ 的二维子空间簇

$$V_r=L(I_2,A_r),A=\begin{pmatrix}0&-1\\r&0\end{pmatrix},r>0$$

显然 V_r 两两互不同类，它们的公共一维子空间为 kI_n，接着考虑二次多项式

$$|\lambda I_2+A|=0\Leftrightarrow\lambda^2+r=0$$

显然它没有实根，从而是可逆子空间，进而导致 $|GL_{2,1}(\mathbb{R})/\sim| = +\infty$。实现 V_r 之间互相转化的变换是 (i,j) 位置的因子放缩，其对应的 n^2 阶矩阵是对角矩阵，并且满足除 $((i-1)n+j,(i-1)n+j)$ 位置为放缩因子外其它位置均为 1。但是，如果我们将此类变换引入的话，会导致可逆矩阵变成不可逆矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

因此我们不能依靠线性变换来分类同维数的可逆子空间。所以我们转而思考下一个问题，$M_n(\mathbb{R})$ 可以存在哪些维数的可逆子空间，这时我们注意到，如果我们有一个 k 维的可逆子空间，那么它的所有子空间都是可逆的，从而 $M_n(\mathbb{R})$ 就可以存在所有 $1 \leq i \leq k$ 维的可逆子空间，因此我们真正的问题是。

问题 2.3: $M_n(\mathbb{R})$ 的可逆子空间的最大维数是多少？

3 问题转化

显然我们继续考察使 $|r_1A_1 + ... + r_kA_k| \neq 0$ 成立的最大的 k 已经毫无办法了，或许我们应该从矩阵作为线性变换的角度来考虑这个问题。考虑 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\{v_1, ..., v_n\}$，如果 $A = r_1A_1 + ... + r_kA_k$ 使得

$$\{Av_1, ..., Av_n\}$$

也是一组基的话，那么自然就有 $|A| \neq 0$，反之亦然。为了将系数给带出来，我们转换观点

$$(r_1A_1 + ... + r_kA_k)v \Leftrightarrow r_1(A_1v) + ... + r_k(A_kv)$$

即视 A_iv 为一种有待线性组合的对象，故我们将

$$v_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, v \mapsto Mv, |M| \neq 0$$

称为 $\mathbb{R}^n$ 上的一个**向量场**。如果 k 个向量场 $\{v_{M_1}, ..., v_{M_k}\}$ 满足

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \{v_{M_1}(v), ..., v_{M_k}(v)\}\text{线性无关}$$

则称这 k 个向量场**线性无关**。那么 $M_n(\mathbb{R})$ 的 k 维可逆子空间和 $\mathbb{R}^n$ 的 k 个线性无关向量场是否能产生对应呢？答案是否定的，当 $v = 0$ 时，无论哪种情况 $\{v_{M_1}(v), ..., v_{M_k}(v)\}$ 都是线性相关的，这意味着 $\mathbb{R}^n$ 最多只有一个线性无关向量场，但由前面的讨论可知 $M_2(\mathbb{R})$ 有 2 维可逆子空间，所以我们必需要消除零向量的影响。

这意味着，我们需要寻找 $\mathbb{R}^n$ 中不包含零的子图形，对于子图形 $V \subset \mathbb{R}^n, 0 \notin V$，我们的第一个问题是如何定义 V 上的向量场 $v : V \to \mathbb{R}^n$？如果有困难的话，又有哪些子图形能比较好地定义向量场，更重要的是我们需要这个向量场能回应我们的问题。我们不如先考虑一些简单的情形，令

$$V=S^{n-1}=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid\sum_{i=1}^n x_i^2=1\}$$

为单位球面，并定义向量场为

$$v_M:S^{n-1}\to\mathbb{R}^n,x\mapsto Mx,|M|\neq 0$$

我们先来看正向推导，设一个 k 维可逆子空间的基为 $\{A_1,...,A_k\}$，其基本性质为

$$a_1A_1+...+a_kA_k=O\Leftrightarrow a_i=0$$

考察向量场的线性无关性，对任意的 $v\in\mathbb{R}^n$ 有等式

$$a_1(A_1v)+...+a_k(A_kv)=0\Leftrightarrow(a_1A_1+...+a_kA_k)x=0$$

如果 $a_1A_1+...+a_kA_k\neq O$，那么必有 $|a_1A_1+...+a_kA_k|\neq 0$，从而方程只有零解 $x=0$，与假设矛盾，从而 $a_1A_1+...+a_kA_k=O$，即 $a_i=0$，所以正向推导没有问题。我们来看看反向情况如何，设 k 个向量场为 $\{v_{A_1},...,v_{A_k}\}$，其满足对任意的 $v\in S^{n-1}$ 有

$$a_1(A_1v)+...+a_k(A_kv)=0\Leftrightarrow a_i=0$$

考察矩阵的线性无关性，考虑等式

$$a_1A_1+...+a_kA_k=O$$

我们只需任意作用一个向量 $x\in S^{n-1}$，即有

$$(a_1A_1+...+a_kA_k)x=0\Leftrightarrow a_1(A_1x)+...+a_k(A_kx)=0$$

从而 $a_i=0$。不过还没有结束，我们必需得保证 $|a_1A_1+...+a_kA_k|\neq 0$，此时我们发现

$$(a_1A_1+...+a_kA_k)x=0$$

只有零解，与 $x\in S^{n-1}$ 矛盾了，也就是说反向转化失败了。不过，由“可逆子空间导出线性无关向量场”，我们也得到了一个意识，当前定义的向量场太大了，需要加以限制来缩小范围，我们的问题出现在最后一步，为了保证 x 有非零解，$a_1A_1+...+a_kA_k$ 必需要降秩，由于 S^{n-1} 中的向量两两互不相关，所以我们考虑让 $r(a_1v_1+...+a_kv_k)=n-1$，且其一维解空间的方向正好对应作用的向量 x，即定义**向量场**为

$$v_M:S^{n-1}\to\mathbb{R}^n,x\mapsto P_xMx,|M|\neq 0$$

其中的 P_x 为投影矩阵，其将 Mx 中与 x 同向的成分给消除，即将 Mx 投影到以 x 为法向的平面上，此时对任意 $x\in S^{n-1}$ 有 x 与 $v_M(x)$ 垂直，即

$$v_M(v)\cdot v=0$$

同样我们需要考虑两个方向，注意到此时

$$(a_1(P_xA_1x)+...+a_k(P_xA_kx))\cdot x=0$$

是恒成立的，无法引起线性无关的传递，我们需要进行一个小小的变形，即有

$$a_1I_n+a_2A_1^{-1}A_2...+a_kA_1^{-1}A_k=O\Leftrightarrow a_i=0,1\leq i\leq k$$

考虑 $k-1$ 个向量场

$$v_i:S^{n-1}\to\mathbb{R}^n,x\mapsto P_xA_1^{-1}A_ix,2\leq i\leq k$$

对任意的 $v\in\mathbb{R}^n$ 有等式

$$a_2(P_vA_1^{-1}A_2v)+...+a_k(P_vA_1^{-1}A_kv)=0\Leftrightarrow(a_2P_vA_1^{-1}A_2+...+a_kP_vA_1^{-1}A_k)v=0$$

同时加上 a_1v 可得

$$(a_1I_n+a_2P_vA_1^{-1}A_2+...+a_kP_vA_1^{-1}A_k)v=a_1v$$

因此 v 是矩阵 $-P_v(a_2A_1^{-1}A_2+...+a_kA_1^{-1}A_k)$ 的特征向量，进一步可知 v 是 $-(a_2A_1^{-1}A_2+...+a_kA_1^{-1}A_k)$ 的特征向量，从而存在特征值 a_1 使得

$$|a_1I_n+a_2A_1^{-1}A_2+...+a_kA_1^{-1}A_k|=0$$

这意味着 $a_1I_n+a_2A_1^{-1}A_2+...+a_kA_1^{-1}A_k=O$，即 $a_i=0,2\leq i\leq k$。接着我们考虑反方向，设有 $k-1$ 个线性无关向量场

$$v_{B_i}:S^{n-1}\to\mathbb{R}^n,x\mapsto P_xB_i,2\leq i\leq k$$

其满足对任意的 $v\in\mathbb{R}^n$ 有等式

$$a_2(P_vB_2v)+...+a_k(P_vB_kv)=0\Leftrightarrow a_i=0,2\leq i\leq k$$

我们选取 I_n 和 B_i 一起来张成子空间 $V_k=L(I_n,B_2,...,B_k)$，如果有

$$a_1I_n+a_2B_2+...+a_kB_k=O$$

任意作用一个向量 $x\in S^{n-1}$ 可得

$$(a_1I_n+a_2B_2+...+a_kB_k)x=0\Leftrightarrow-(a_2B_2+...+a_kB_k)x=a_1x$$

因此 x 是 $-(a_2B_2+...+a_kB_k)$ 的特征向量，作用 P_x 矩阵 (注意 $P_xx=0$) 即可得

$$-P_x(a_2B_2+...+a_kB_k)x=0\Leftrightarrow a_2(P_vB_2v)+...+a_k(P_vB_kv)=0$$

从而 $a_k = 0, 2 \le i \le k$，进而 $a_1 = 0$，这意味着 V_k 确实是 k 维子空间，最后考察可逆性。此时对任意实数 a_i，我们需要考察

$$(a_1 I_n + a_2 B_2 + ... + a_k B_k)x = 0$$

的解空间。从条件可知 (其唯一解空间由 x 张成)

$$n - 1 = r(P_x(a_2 B_2 + ... + a_k B_k))$$

由于球面 S^{n-1} 占据了所有的方向，因此任意非零 $x \in \mathbb{R}^n$ 均有

$$(a_1 I_n + a_2 B_2 + ... + a_k B_k)x \neq 0$$

从而 $|a_1 I_n + a_2 B_2 + ... + a_k B_k| \neq 0$，即 V_k 是 k 维可逆子空间。总结一下，即有下面的定理。

定理 3.1: $M_n(\mathbb{R})$ 有一个 k 维可逆子空间，当且仅当，S^{n-1} 有 $k-1$ 个线性无关的向量场。

4 结论

我们的向量场

$$v_M : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n, x \mapsto P_x M x, |M| \neq 0$$

似乎跟常规的切向量场不太一样

$$v : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n, x \mapsto v(x), v(x) \cdot x = 0$$

实际上，如果后者赋予连续且处处非零的条件以后，是可以推到前者的，也就是说，我们所定义的向量场和微分流形中定义的**连续且处处非零的切向量场**是等价的。

1. 当 $k = 1$ 时，S^{n-1} 显然有 $k - 1 = 0$ 个线性无关的向量场，也就是说任意 1 维可逆子空间都是存在的。
2. 当 $n = 2k + 1$ 为奇数时，$S^{(2k+1)-1} = S^{2k}$ 显然没有连续且处处非零的切向量场，因此 $M_n(\mathbb{R})$ 只能有 1 维可逆子空间。
3. 如果 S^{n-1} 有 k 个线性无关的向量场，自然就有 $t < k$ 个线性无关的向量场，也就是说我们的核心目标是求出 S^{n-1} 中线性无关向量场的最大个数。

定理 4.1 (Hurwitz, Radon, Eckmann, Adams): 球面 S^{n-1} 的线性无关向量场的最大个数为 $\rho(n) - 1$。

上面的 $\rho(n)$ 是 **Hurwitz-Radon 数**，定义如下

$$n = 2^{4b+c}(2k + 1), 0 \le c < 4$$

$$\rho(n) = 8b + 2^c$$

我们注意到引起最大值改变的只有 n 中 2 的幂 $v = 4b + c$，从而对应的取值表为

v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
$\rho(n)$	1	2	4	8	9	10	12	16	17	18	20	24	$\cdots$

当然想要证明上面这个定理的话,十分的复杂,所以我也不可能再继续探究它的严格证明了，不过我们可以就这些现象引出一些有趣的东西。我们发现 $\rho(n) \le n$，而且当且仅当 $n = 1, 2, 4, 8$ 时取等号，其正好对应了下面的几个事实

1. **Hurwitz's theorem**：欧式 Hurwitz 代数只有 $\mathbb{R}$(实数)、$\mathbb{C}$(复数)、$\mathbb{H}$(四元数)、$\mathbb{O}$(八元数) 四种。

2. **Hopf fibration**：球面 S^{n-1} 中，只有 S^0, S^1, S^3, S^7 可以被 Hopf 纤维化。[1]

好了，就讲这些吧。想要更加深入探究的话，你只需装备好微分几何的知识，看下面这些资料就足够了，至于最开始的线性代数题目，似乎单纯只靠线性代数是不能解决的。

参考文献

[1] https://math.stackexchange.com/questions/1696618/.

[2] J. F. Adams (1962), Vector fields on spheres, Annals of Mathematics, 75(3): 603-632.

[3] J. F. Adams, P. Lax and R. Phillips (1965), On matrices whose real linear combinations are non-singular, Proc. Amer. Math. Soc., 16:318-322,

[4] J. F. Adams, P. Lax and R. Phillips (1966), Corrections to "On matrices whose real linear combinations are non-singular", Proc. Amer. Math. Soc., 17: 945-947.

[5] Zoran Z. Petrovi (1999), On nonsingular matrices and Bott periodicity, Publications de l'Institut Mathématique 65(79).85: 97-102.

[6] http://www.maths.nuigalway.ie/%7Erquinlan/talks/quinlan.pdf.

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Hurwitz%27s_theorem_(composition_algebras).

[8] https://math.mit.edu/~hrm/papers/vf.pdf.

[9] Vector Fields on Spheres, etc.

[10] http://ovsienko.perso.math.cnrs.fr/Publis/Hopf1.pdf.

[1]纤维丛通常是一个映射链 $S^{n-1} \hookrightarrow S^{2n-1} \to S^n$，我们称 S^{n-1} 是 S^{2n-1} 以 S^n 为底空间的纤维丛，或简单地称 S^{n-1} 可被纤维化。

5 番外

虽然我们在前面确实讨论了一大堆有的没的东西，但似乎没有一点实质性的玩意，给人一种十分空虚的感觉，因此为了充实这篇文章，我就依着线性代数的主题讲一点思想性的东西吧。在我的上一个视频中，我详细地探究了 $\varepsilon-\delta$ 语言的*用法*，我十分想要强调的是“用”这个字，要知道对于大部分非数学系的学生，$\varepsilon-\delta$ 语言是学完即扔的东西，简单来说就是，你以后需要的只是 $\varepsilon-\delta$ 语言所证明出的上级结论，而不需要 $\varepsilon-\delta$ 语言自身。但如果你是数学系的学生，且在后续还需研究实变函数、微分方程等深入分析课程时，你就会发现仅凭上级结论是无法进行足够证明的，最终还是得回归 $\varepsilon-\delta$ 语言，如果你不能获得一种 $\varepsilon-\delta$ 语言上的代数直观的话，那么对于很多后续课程的证明，你理解起来就会变得十分困难。我们想强调的是综合性的方法，即 **$\varepsilon-\delta$ 语言与上级结论的有机结合**，其往往代表了证明的两个方面“繁琐度和证明能力”，上级结论可以有效地减低证明繁琐度，但在证明能力上作为定义的 $\varepsilon-\delta$ 语言是远超上级结论的。

类似的情况也可以放到线性代数的讨论上来，矩阵和行列式其自身定义了自身的基础性，同样地我们也可以得到很多的上级结论，有时还能将其上升为“线性变换”或“双线性函数”的高度，但我还需有这样一种观点，这些都属于一种性质的约简，单纯靠上级结论确实已经可以得到很多东西了，但我们依旧不应该抛弃一些基本性的东西，因为它们至少比上级结论更“万能”一些。我向来不喜欢说空话，还是拿一道实例比较有说服力。

15. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵, 定义函数 $f(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2$. 设 $\boldsymbol{P}$ 为 n 阶可逆矩阵, 使得对任意的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 成立: $f(\boldsymbol{PAP}^{-1})=f(\boldsymbol{A})$. 证明: 存在非零常数 c, 使得 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}=c\boldsymbol{I}_n$.

这是白皮书[2]中一道让我印象很深的题目。目前我没看到，自己也没想到能仅通过“公认上级结论[3]”完成证明的方法。在矩阵的元运算中，最麻烦的无非就两个：**乘法**和**行列式** (或者与其它运算复合)

$$\text{乘法：}(a_{ij})_{m\times p}(b_{ij})_{p\times n}=(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj})_{m\times n}$$

$$\text{行列式：}(a_{ij})_{n\times n}=\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in S_n}(-1)^{N(k_1,\dots,k_n)}\prod_{i=1}^{n}a_{k_i i}$$

行列式

我们先来讨论大家一开始所接触的行列式[4]。和 ($\sum$) 积 ($\prod$) 符号的性质，在中学就应该很熟了，所以我们主要来讨论其中的另一成分**置换群** S_n 的性质。$S_n\subset\{1,2,...,n\}^n$ 总共有 $n!$ 个元素，其元素为将 $\{1,2,...,n\}$ 无重复地填到 n 个位置所形成的数组[5]，比如 S_3 的 $3!=6$ 个元素为：

$(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2),(1,3,2),(3,2,1),(2,1,3)$

[2]谢启鸿，姚慕生. 高等代数（第四版）. 大学数学学习方法指导丛书. 复旦大学出版社.P120

[3]排除把这道题直接作为上级结论的情形

[4]行列式还有一种余子式展开定义法，但在探究元运算时并不好用

[5]读者需要注意此处 S_n 元素的写法与群论的不太一样，例如 $(3,1,2)$ 在群论中的含义应该是 $1\to3,2\to1,3\to2$，因此在群论中写成 $(1,3,2)$

对于任何一个 $(k_1,...,k_n)$，我们定义它的**逆序数**为

$$N(k_1,...,k_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i,k_j<k_i}1$$

也就是说我们统计每个 k_i 后面有多少个小于它的数，然后加起来。通常我们无需关注逆序数的具体值，而只考虑其奇偶性，从而考察其对 (-1) 的影响。为了体验元运算的魅力，在行列式这部分，我们以 **Laplace 定理**来作为实例。

定理 5.1: 设 A 是 n 阶矩阵，则对任意 $1\le i_1<...<i_k\le n$ 有

$$|A|=\sum_{1\le j_1<...<j_k\le n}A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\hat{A}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}$$

对于这个定理的证明，你可以在任意一本教材或是网络上[6]找到，而我将阐述其中一种**只通过定义和代数变形**完成证明的方法，上述定理中，对于 $A=(a_{ij})$ 的子式和余子式的定义如下

$$A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}=\sum_{(t_1,...,t_k)\in S_k}(-1)^{N(j_{t_1},...,j_{t_k})}\prod_{s=1}^{k}a_{i_s j_{t_s}}$$

$$\{i'_1,...,i'_{n-k}\}=\{1,2,...,n\}-\{i_1,...,i_k\},\{j'_1,...,j'_{n-k}\}=\{1,2,...,n\}-\{j_1,...,j_k\}$$

$$\hat{A}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}=(-1)^{\sum_{s=1}^{k}(i_s+j_s)}\sum_{(t_1,...,t_{n-k})\in S_{n-k}}(-1)^{N(j'_{t'_1},...,j'_{t'_{n-k}})}\prod_{s=1}^{n-k}a_{i'_s j'_{t_s}}$$

从形式上，我们就能看到极强的对称性，实际上几乎所有的教材都是如下的组合证法：(1) 说明右边项数等于左边：$C_n^k k!(n-k)!=n!$(2) 证明右边的每一项都属于左边 (3) 证明右边的每一项互不相同。而我们可以将其写成一个代数变形的过程，对于 $\sum_{(k_1,...,k_n)\in S_n}(-1)^{N(k_1,...,k_n)}$ 我们将其拆成三步，首先任意选出 $1\le j_1<...<j_k\le n$，然后 $j_1,...,j_k$ 部分置换得到 $j_{t_1},...,j_{t_k},(t_1,..,t_k)\in S_k$，$j'_1,...,j'_{n-k}$ 部分置换得到 $j'_{t'_1},...,j'_{t'_{n-k}},(t'_1,..,t'_{n-k})\in S_{n-k}$，它们合并起来构成一个置换 $(t_1,..,t_k,t'_1,..,t'_{n-k})\in S_n$，此时有

$$\sum_{(j_{t_1},...,j_{t_k},j'_{t'_1},...,j'_{t'_{n-k}})\in S_n}(-1)^{N(j_{t_1},...,j_{t_k},j'_{t'_1},...,j'_{t'_{n-k}})}$$

$$=\sum_{1\le j_1<...<j_k\le n}\sum_{\substack{(j_{t_1},...,j_{t_k})\\(t_1,..,t_k)\in S_k}}\sum_{\substack{(j'_{t'_1},...,j'_{t'_{n-k}})\\(t'_1,..,t'_{n-k})\in S_{n-k}}}(-1)^{N(j_{t_1},...,j_{t_k})+N(j'_{t'_1},...,j'_{t'_{n-k}})}(-1)^{\sum_{s=1}^{k}j_s}(-1)^{\pm\frac{1}{2}k(k+1)}$$

[6]例如，https://www.zhihu.com/question/313725710

由于 $k(k+1)$ 必是偶数，因此最后一项有两种写法。我们上面实际是在打乱 j 指标，其最终造成的影响为

$$
\begin{aligned}
&|A| \\
=&\sum_{(k_1,\dots,k_n)\in S_n}(-1)^{N(k_1,\dots,k_n)}\prod_{i=1}^{n}a_{k_i i} \\
=&\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n}\sum_{\substack{(j_{t_1},\dots,j_{t_k})\\(t_1,..,t_k)\in S_k}}\sum_{\substack{(j'_{t'_1},\dots,j'_{t'_{n-k}})\\(t'_1,..,t'_{n-k})\in S_{n-k}}}(-1)^{N(j_{t_1},\dots,j_{t_k})+N(j'_{t'_1},\dots,j'_{t'_{n-k}})}(-1)^{\sum\limits_{i=1}^{k}j_k}(-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)} \\
&(-1)^{\sum\limits_{s=1}^{k}i_s}(-1)^{-\frac{1}{2}k(k+1)}\prod_{s=1}^{k}a_{i_s j_{t_s}}\prod_{s=1}^{n-k}a_{i'_s j'_{t_s}} \\
=&\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n}(\sum_{(t_1,\dots,t_k)\in S_k}(-1)^{N(j_{t_1},\dots,j_{t_k})}\prod_{s=1}^{k}a_{i_s j_{t_s}}) \\
&((-1)^{\sum\limits_{s=1}^{k}(i_s+j_s)}\sum_{(t_1,\dots,t_{n-k})\in S_{n-k}}(-1)^{N(j'_{t'_1},\dots,j'_{t'_{n-k}})}\prod_{s=1}^{n-k}a_{i'_s j'_{t_s}}) \\
=&\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n}A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}\hat{A}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

想要熟练掌握这种大量和式的运算，主要是两步：一是等量拆分

$$\sum_{(i_1,\dots,i_k,i'_1,\dots,i'_{n-k})\in S_n}=\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\sum_{(t_1,\dots,t_k)\in S_k}\sum_{(t'_1,\dots,t'_{n-k})\in S_{n-k}}$$

和式的乘法最后统计的个数也要相乘，因此个数等式为

$$n!=C_n^k\cdot k!\cdot(n-k)!$$

这正好是常规证明的第一步；二是和式交换和乘性交换

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j=(\sum_{i=1}^{n}a_i)(\sum_{j=1}^{n}b_j)$$

熟练理解其内涵，再建立一套整体带入和指标无关移动的思维，大量和式的运算就会变得得心应手。而在证明 Laplace 定理的时候，我们实际也就是做了这两步：等量拆分和 $\sum$ 交换，对于其中的积式 $\prod$ 我们是以整体的观点来看待的，其并未参与到交换的过程中。这时可能有人会思考了，我们能否建立一套像相对论那样的 **Einstein 求和约**来简化书写呢

$$a_i b^i = \sum_{i=1}^{n} a_i b^i$$

因为如果从求和约来看的话第二步的两个交换性质就是显然的，我们需要面对的问题无非就是：无法使用上下指标来区分哑指标和自由指标，并且正负影响该如何融入的问题。这属于笔者的一个探索目标，如果哪天有成果了就来分享给读者，现在的话大概还没有办法。

乘法

对于乘法情形我们就拿 **Cauchy-Binet 公式**来进行说明吧。

定理 5.2: 设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵，B 是 $n \times m$ 阶矩阵，则有

(1) 当 $m > n$ 时，$|AB| = 0$

(2) 当 $m \leq n$ 时

$$|AB| = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$$

子式情形其实就是一个简单观点转换和指标替换，所以就不讨论了。同样地，从教材和网络[7]可以发现各式各样的证明，而我们则是仅从代数的角度来完成证明。

$$\begin{aligned} |AB| &= |(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj})| \\ &= \sum_{(t_1, \ldots, t_m) \in S_m} (-1)^{N(t_1, \ldots, t_m)} \prod_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{t_i k} b_{ki} \end{aligned}$$

此时我们需要处理积和项 $\prod_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n}$，其总共有 n^m 项，从另一种角度上，我们可以看成 m 个和式复合，乘项为 i 其控制 a 的前指标和 b 的后指标，最终可以求得 (读者自行验证)

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{t_i k} b_{ki} \\ = &\sum_{(k_1, \ldots, k_m) \in \{1, \ldots, n\}^m} \prod_{s=1}^{m} a_{t_s k_s} b_{k_s s} \end{aligned}$$

考察两边的项数会发现，其一般是不相等的

$$m! \cdot n^m \neq C_n^m \cdot m! \cdot m!$$

实际上，其项可能出现相同的情况而导致相消，其主要发生在 $(k_1, ..., k_m)$ 中可能存在的重复指标，如果有一个 $k_i = k_j$，那么在对应的 $a_{t_s k_s}$ 中 t_i 与 t_j 的一个交换所产生的项是一样的，但此时 $N(t_1, ..., t_m)$ 会改变符号，从而使得这两项互相消除，这样互相消除以后，我们只需要考虑 $k_1, ..., k_m$ 互不相同且配上一个对应置换 S_m 的情况了，即左边的和式为

[7]例如，https://www.zhihu.com/question/338686326

$$|AB| = \sum_{(t_1,...,t_m)\in S_m} \sum_{(d_1,...,d_m)\in S_m} \sum_{1\le k_1<...<k_m\le n} (-1)^{N(t_1,...,t_m)} \prod_{s=1}^{m} a_{t_s k_{d_s}} b_{k_{d_s} s}$$

如果 $m > n$，那么第三个和式选不出任何的 $(k_1, ..., k_m)$，这意味着项已经全部互相抵消完了，即 $|AB| = 0$；进一步考虑 $m \le n$，则左右已经项数相等了，于是可以计算

$$\begin{aligned}
&|AB| \\
&= \sum_{1\le j_1<...<j_m\le n} \sum_{(t_1,...,t_m)\in S_m} \sum_{(d_1,...,d_m)\in S_m} (-1)^{N(t_1,...,t_m)} \prod_{s=1}^{m} a_{t_s j_{d_s}} \prod_{s=1}^{m} b_{j_{d_s} s} \\
&= \sum_{1\le j_1<...<j_m\le n} \sum_{(t_1,...,t_m)\in S_m} \sum_{(d_1,...,d_m)\in S_m} (-1)^{N(t_1,...,t_m)} (-1)^{N(d_1,...,d_m)} \prod_{s=1}^{m} a_{s j_{t_s}} \prod_{s=1}^{m} b_{j_{d_s} s} \\
&= \sum_{1\le j_1<...<j_m\le n} (\sum_{(t_1,...,t_m)\in S_m} (-1)^{N(t_1,...,t_m)} \prod_{s=1}^{m} a_{s j_{t_s}})(\sum_{(d_1,...,d_m)\in S_m} (-1)^{N(d_1,...,d_m)} \prod_{s=1}^{m} b_{j_{d_s} s}) \\
&= \sum_{1\le j_1<...<j_m\le n} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

上面的第二个等式是对 a_{ij} 实行 t, d 指标对换，从而产生一个新的 (-1) 项。我们很容易发现，由于 Cauchy-Binet 公式形式比 Laplace 定理形式更对称，所以证明过程也更好读懂一些。

最后我们稍微总结一下元计算基本思想，简单来讲就三步**展化并**

展 即将所有的和式往前移，积式往后移，在计算的结果上就相当于通过分配律来展开式子，使得只有一些积项的和。

化 主要是使项数左右相等所做的和式变换，比如第一例的分拆 $n! = C_n^k \cdot k! \cdot (n-k!)$、和第二例的相消 $m! \cdot n^m \to C_n^m \cdot m! \cdot m!$，有时其实还能遇到增项的情况 $a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)$，只要多实践就能慢慢熟络起来。

并 就是在化的基础上直接合并成结论的样子，没什么好说的。

例题

最后我们来讨论最开始所给的题目吧。

例 5.1: 设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 和函数 $f(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$。如果 n 阶可逆矩阵 P 满足

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), f(PAP^{-1}) = f(A)$$

则存在常数 $c \neq 0$ 使得 $P'P = cI_n$。

由于 P 与 P^{-1} 的关系比较复杂，所以我们不妨多引入一些未知数，即 $P = (p_{ij})$ 和 $P^{-1} = (q_{ij})$，则有约束

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ik}q_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

我们先来计算函数 $f(PAP^{-1}) - f(A)$，从而有

$$\begin{aligned}
&f(PAP^{-1}) - f(A) \\
=&f((\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ik}a_{kl}q_{lj})) - f(A) \\
=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}((\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ik}a_{kl}q_{lj})^2 - a_{ij}^2)
\end{aligned}$$

我们的目的是 $P'P = (\sum_{k=1}^{n} p_{ki}p_{kj})$ 的约束，则可以从任意中选取来达到目的，取 $A = E_{st}$

$$f(PAP^{-1}) - f(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_{is}q_{tj})^2 - 1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_{is}q_{tj})^2 = 1$$

再取 $A = E_{st} + E_{kl}$，则有

$$\begin{aligned}
&f(PAP^{-1}) - f(A) \\
=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_{is}q_{tj} + p_{ik}q_{lj})^2 - 2 \\
=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_{is}q_{tj})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{is}q_{tj}p_{ik}q_{lj} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_{ik}q_{lj})^2 - 2 \\
=&2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{is}q_{tj}p_{ik}q_{lj} = 2\sum_{i=1}^{n} p_{is}p_{ik}\sum_{j=1}^{n} q_{tj}q_{lj} \\
\Rightarrow&\sum_{i=1}^{n} p_{is}p_{ik}\sum_{j=1}^{n} q_{tj}q_{lj} = 0
\end{aligned}$$

上式意味着，$\sum_{i=1}^{n} p_{is}p_{ik}$ 和 $\sum_{j=1}^{n} q_{tj}q_{lj}$ 中至少一个为零。令 $t = l, s \neq k$，由 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_{is}q_{tj})^2 = 1$ 可得 $\sum_{i=1}^{n} p_{is}^2 \sum_{j=1}^{n} q_{tj}^2 = 1$，因此 $\sum_{j=1}^{n} q_{tj}q_{lj} \neq 0$，从而 $\sum_{i=1}^{n} p_{is}p_{ik} = 0$，并且进一步可知 $s = k$ 时 $\sum_{i=1}^{n} p_{is}p_{ik} \neq 0$，因此 $P'P$ 是对角矩阵。由于

$$1 = \sum_{i=1}^{n} p_{is}^2 \sum_{j=1}^{n} q_{sj}^2 \geq (\sum_{i=1}^{n} p_{is}q_{si})^2 = 1$$

因此有 $\forall 1 \leq i \leq n, \frac{p_{is}}{q_{si}} = \frac{1}{c}$，代入 $\sum_{k=1}^{n} p_{ik}q_{ki} = 1$ 可得

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ik}p_{ik} = c$$

从而有 $P'P = cI_n$，虽然和原题本质证法相同，但个人觉得过程清晰了很多。