证明 $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-11}}{2}]$ 是 Euclidean 整环

逯晓零

目录

1 证明

做法来自于这里。为了说明一个整环 R 是 **Euclidean 整环**，需要完成以下几件事情

(1) 定义次数函数：$N : R - \{0\} \to \mathbb{N} - \{0\}, N(0) = 0$

(2) 验证乘法性质：$\forall g, f \in R, g \neq 0, N(f) \leq N(fg)$

(3) 验证带余除法：$\forall g, f \in R, g \neq 0, \exists q, r \in R, f = qg + r, N(r) < N(g)$

对于任意的 $x = a + b\frac{1+\sqrt{-11}}{2} \in \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-11}}{2}], a, b \in \mathbb{Z}$，我们定义次数函数为

$$N(x) = x\overline{x} = (a + b\frac{1+\sqrt{-11}}{2})(a + b\frac{1-\sqrt{-11}}{2}) = a^2 + ab + 3b^2$$

换言之，$N(x)$ 表示复数 x 的模，其结果为整数，容易验证

$$g \neq 0 \Rightarrow N(fg) = |fg| = |f||g| \geq |f| = N(f)$$

所以我们主要聚焦于带余除法。我们做一个基础转化

$$a+b\frac{1+\sqrt{-11}}{2} = (a+\frac{b}{2})+\frac{b}{2}\sqrt{-11} = a_1+b_1\sqrt{-11}, a_1-b_1 \in \mathbb{Z}, a_1, b_1 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \Rightarrow N(a_1+b_1\sqrt{-11}) = a_1^2+11b_1^2$$

假设 $\omega = \frac{1+\sqrt{-11}}{2}, f = a_1 + a_2\omega, g = b_1 + b_2\omega$，并计算它们的商为

$$\frac{f}{g} = \frac{a_1 + a_2\omega}{b_1 + b_2\omega} = c_1 + c_2\sqrt{-11}, c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$$

对于 c_2，我们可以找到一个与它最近的半整数 $\frac{q_2}{2}$ 并且满足 $|c_2 - \frac{q_2}{2}| \leq \frac{1}{4}$。接着再找一个与 $c_1 - \frac{q_2}{2}$ 最近的整数 t 并且满足 $|(c_1 - \frac{q_2}{2}) - t| \leq \frac{1}{2}$，我们记 $q_1 = 2t + q_2$，则有

$$|c_1 - \frac{q_1}{2}| = |c_1 - \frac{2t+q_2}{2}| = |(c_1 - \frac{q_2}{2}) - t| \le \frac{1}{2}$$

此时我们令 $q = \frac{q_1}{2} + \frac{q_2}{2}\sqrt{-11} \in \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-11}}{2}]$ 和 $\frac{r}{g} = (c_1 - \frac{q_1}{2}) + (c_2 - \frac{q_2}{2})\sqrt{-11}$，由于 $f, g, q \in \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-11}}{2}]$，因此

$$r = f - qg \in \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-11}}{2}]$$

此时有

$$N(r) = ((c_1 - \frac{q_1}{2})^2 + 11(c_2 - \frac{q_2}{2})^2)N(g) \le ((\frac{1}{2})^2 + 11(\frac{1}{4})^2)N(g) = \frac{15}{16}N(g) < N(g)$$

这种证明对 $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}], \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]$ 均适用，而下一种情形 $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ 不是 Euclidean 整环，证明也就因此失效了。

2 附赠问题

此部分我们来考虑 Lebesgue 可测性。对于 $E \subset \mathbb{R}^n$，其定义主要有两个步骤，首先是由可列开矩形覆盖得到**外测度**为

$$m^*(E) = \inf\{\sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| \mid E \subset \cup_{k=1}^{+\infty} I_k\}$$

由于实数是完备的，由确界原理即可知任何集合都有外测度。进一步如果外测度满足如下的 **Caratheodory 条件**

$$\forall T \subset \mathbb{R}^n, m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

则称 E 为可测集，不满足 Caratheodory 条件的则称为不可测集。诸多事实表示，不可测集是广泛存在的，例如 Vitali 集、Bernstein 集、Sierpinski 集、大部分 Hamel 基、某些 Luzin 集等，对于可测集的研究已经十分深入了，最核心的内容是“可测集 $=$*Borel* 集 $\pm$ 零测集”。为了讨论不可测集，我们先探究一些简单的情况，例如假设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是**有界的**，此时参考 [1] 我们可以引入一种**内测度**，其定义的一种方案是可列闭矩形填充的上确界，又或者我们可以找一个包含它的矩形 I_E 并给出

$$m_*(E) = |I_E| - m^*(I_E - E), E \subset I_E$$

于是我们有以下的核心定理。

定理 2.1: 有界集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测当且仅当 $m^*(E) = m_*(E)$。

显然一般有界不可测集所满足的性质为 $0 \le m_*(E) < m^*(E) < +\infty$。显然可测集中有不可测子集 ($[0,1]$ 中的 Vitali 集)、不可测集中也有可测子集 (不可测集必不可列，其中任意可列个点构成可测子集)，那么不可测集是否有我们值得探究的内容呢？我们知道任意有界无穷集必

有收敛列，那么我们思考这样一个问题**收敛列的个数有多少**？显然对于区间 $[0,1]$，其上的序列个数为

$$\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1 = |[0,1]|$$

所以真正值得区分的应该是可列个 $\aleph_0$ 了，而且对于一个收敛性 $\{a_n\}$ 我们随便加上或减去或修改有限项均不改变收敛性，所以我们进一步考虑收敛值的个数 (即导集 E' 的元素个数)。如果 $m_*(E) > 0$,那么我们只需取 $E = V \cup [0, m_*(E)]$(V 为 $\mathbb{R}$ 上的 Vitali 集),就有 $[0, m_*(E)] \subset E'$，其并非我们想要的，于是我们给出如下猜想。

猜想 2.2: 如果 $E \subset [0,1]$ 是不可测集且 $m_*(E) = 0$，则 E' 是可列集。

参考文献

[1] 徐森林, 胡自胜, 金亚东, 等. 实变函数习题精选 [M]. 清华大学出版社,2011.