朗兰兹纲领(Langlands Program)简介

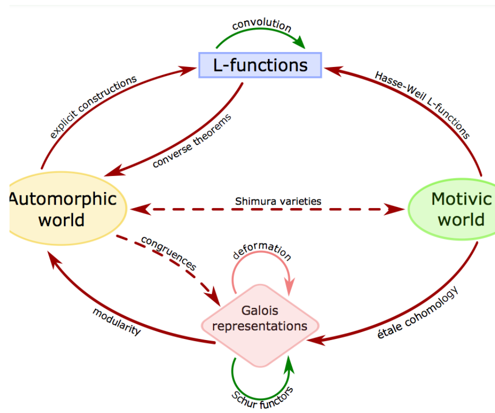
逯晓零

2023 年 1 月 11 日

目录

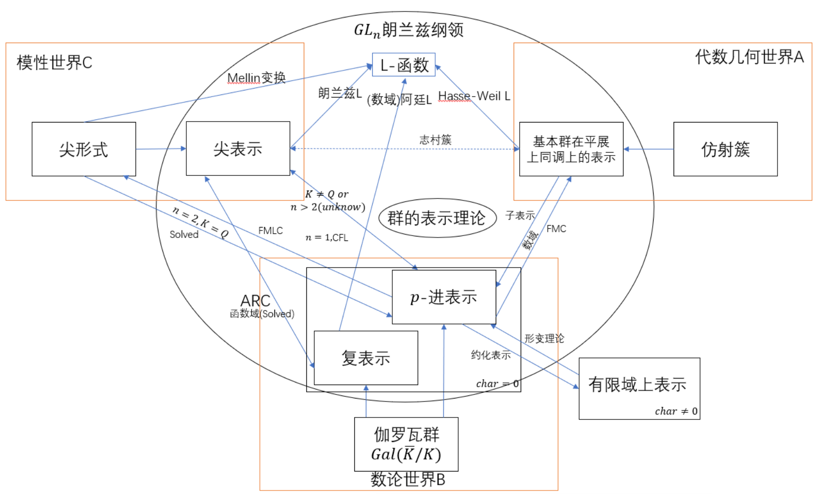
1 引言

在笔者开始讲述之前，我们先澄清一些东西。我们并不是要讲述Langlands当初所提的一系列问题[14]，而是想要阐述模性理论、群表示论和代数几何三个领域之间有着怎样的联系，我们不建议用“大一统”来称呼这些东西，因为数学的基本思想就是对一系列具有共性对象的统一性研究。



对于上图，我们主要看下面的三角形，而L-函数则是将对应领域内容藏进去的载体，我们后面会详细说明。Motivic world代表代数几何的相关东西我们记为A，Galois representations代表群表示论的相关东西我们记为B，Automorphic world代表模性理论的相关东西我们记为C，如果你的数学基础很高的话，可以直接看这两篇文章[19, 20]，我们则会从一些比较简单的东西开始介绍，并一步步深入，到达顶端，当然读者至少也要有一些十分基本的数学水平。

最后，笔者认为好高骛远是不可取的行为，应当先从简单的小事做起，并最终给出了下面这张图，它是朗兰兹纲领的一个特殊情形，还存在许多未解之谜，也是我们应该看齐关注的核心。(高清版本及注解，请翻到最后的总结图部分)

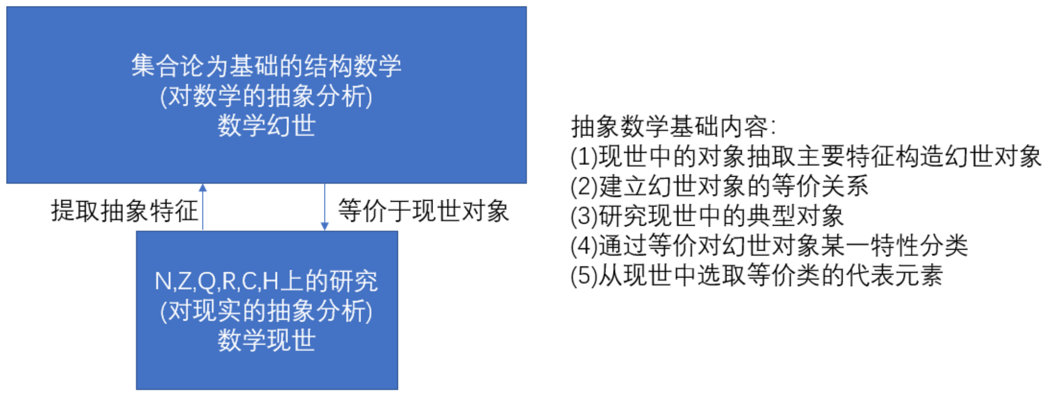


2 互反性(Reciprocity)

2.1 认识数学世界

在正式内容[1]开始前，我们先来做一些数学思想的热身(2.1-2.4都是)，至少要让读者明白我们在研究什么，不至于对概念只有云里雾里的感觉。

[1] 如果你很熟悉类域论的话，可以直接跳到2.5



我们将数学视为两大部分，一是从现实出发构造的第一级抽象世界，初等数论、初等代数、初等几何、数学分析、复变函数等都属于这一级，它们最大的特点是直观，一般的民科都栖息于这些地方，我们将其称为**数学现世**[2]。另一个则是从数学出发构造的第二级抽象世界，点集拓扑、抽象代数、微分流形、现代代数几何等都处于这一级，而真正的纯数学指得就是这一部分，它们的最大特点是以集合论为基础语言，并以集合的包含和映射，形成了几何和代数两大基础体系，我们将其称为**数学幻世**。

我们以经常要用到的域为例来体会一下其中的抽象思想，在现世中，有理数Q有加减乘除的运算，同时考虑初等数论的模p同余时，如果将同余的数都视为一个数的话，我们发现这些数也有加减乘除的运算，它们形成Z_p，特别地当p为素数时，它也有Q中类似倒数的存在。在这些一系列现世对象的启发下，我们提取一些基本特征就能得到抽象对象，域的定义了。

在幻世中，我们以集合来概括所谓的“数”组成的集合F，而数之间的运算，可以看成两个元素到一个元素的映射，$+: F^2 \to F$和$\times: F^2 \to F$，[3]数学的强大之处在于其强大的概况作用，我们不关心F到底是Q还是Z_p，只关心它能不能像Q一样的用起来，就目前的抽象对象，我们没有进行任何的性质规范，这意味着它涵盖了所有的有两个二元运算的系统，但也正因如此它们基本没有共性，对数学而言它没有研究的必要。

我们需要做的是Q提取有意义的特征以规范F中数过于宽泛以至于没有任何特性的缺点，对于所谓的“泛”，我们还能从另一个角度来看待它，泛意味着整个系统基本没有任何公理，在数学上自然也就基本没什么定理了，也就没什么好研究的了。经过数学家的努力，我们可以形成“域”这个抽象对象的一系列规范，从而在茫茫大海中找到我们所需要的对象。

定义 2.1. *对于抽象系统$(F,+,\cdot)$,如果满足*

*(1)映射$+$满足结合律、交换律、存在单位元、存在逆元。我们将映射$+$称为**加法**，并记$a+b := +(a,b)$，它的单位元称为**零元**，记为0，对于任意$a \in F$的逆元称为**相反数**，记为$-a$，并定义**减法**为$a-b := a+(-b)$*

*(2)映射$\cdot$满足结合律、交换律、存在单位元、非零元存在逆元。我们将映射$\cdot$称为**乘法**，并记$ab := \times(a,b)$，它的单位元称为F的**单位元**，记为1，对于任意非零元$a \in F$的逆元称为**倒数**，*

[2]我们只是为了后面的称呼方便才这么叫的，千万别当成专有名词了

[3]乘法有多种写法，一是方便地直接ab，体现出来的话用a·b，要更加明显的话使用a×b，这些我们都视为等价写法，怎么方便怎么来

记为a^{-1}，并定义**除法**为$a/b := ab^{-1}$

*(3)*映射$+$和$\cdot$满足分配律

则称F是**一个域**。

我们得到了“域”这个幻世对象，并对其中的特定元素进行了与现世的类似标记。域依旧是一个概括性的抽象系统，如果想要进一步区分的话就是继续添加域需要满足的性质，一般情况下，性质越多，对象就越精确，内容也就更丰富。首先我们要明白一点幻世对象本来就是一系列现世对象的等价类，但这样的等价对于域本身的研究是没有意义的，我们所希望的等价是保持域定义中的一些性质，这就是域同构的概念。

定义 2.2. 对于两个域F和E,如果存在映射$f : F \to E$满足

(1)$f(1) = 1$

*(2)*对任意$a, b \in F$有$f(a + b) = f(a) + f(b)$

*(3)*对任意$a, b \in F$有$f(ab) = f(a)f(b)$

则称f是F到E的**一个同态**，如果这个同态是可逆的*(*双射、一一对应*)*[4]，则称F与E互相**同构**。

同态有一定的作用，但范围稍微广了点，我们重点需要的是更加精细的同构。我们以同构作为域在幻世的等价关系，我们的下一步应当考察一些现世对象，比如Q、$Q(i)$、R、$C = R(i)$、Z_p(p为素数)等，但一般的有数学基础读者对这些对象应该熟的不能再熟了，因此我们的下一步自然是分类了。一个简单的方式显然是根据域元素的有限和无限分为**有限域**和**无限域**，此时Q是无限域、Z_p是有限域，但这样的分类并不是数学家所渴望的分类，有些东西性质一多分类就没完没了了，数学家所渴望的是某个性质可以成为同构分类的一个标准，即在同构意义下这个的性质是不变的，即*同构不变量*，当然这样的说法，在拓扑空间上比较常见，如同胚不变量、同伦不变量等。一个典型的分类实例是二维紧流形

1. 二维紧连通定向无边流形都微分同胚于球面或环面的连通和；

2. 二维紧连通非定向无边流形都微分同胚于二维实射影空间的连通和；

3. 二维紧连通带边流形都微分同胚于上述流形挖去若干圆盘；

更完整的二维流形分类可以参考[4]，其中的紧性、连通性、定向、带边等都是微分同胚的不变量，而球面、环面、圆盘、射影空间和它们的运算复合都属于现世，流形和它的一大堆性质都属于幻世。此时我们应该注意到了分类另一个重点，*等价关系分类几乎是无限的*，比如第三种情况，挖去若干圆盘，显然可以是一个、两个、三个...而这些情况互相都是不同胚的，但它们似乎属于同一类东西。对于域也是一样的思想，用同构来分类域情况是无限的，如Q、$Q(\sqrt{2})$、$Q(\sqrt[3]{2})$、$Q(\sqrt[4]{2})$...都是互不同构的域，就和上面分类了二维紧流形的特殊情况，我们也只分素域的特殊情况。

定义 2.3. 设E是域F的子集，如果E使用与F相同的映射系统也构成一个域的话，则称E是F的**子域**，则称F是E的**扩域**。若F没有真子集作为子域，则称F为**素域**。

那么我们就能简单的将域分为，素域的扩域和素域了，扩域理论也有不少内容，我们以后再讲，素域的内容就比较简单了，我们来定义一个区分素域的抽象性质。

[4]这些定义都是一个意思的不同叫法，以后会经常遇到类似的情况

定义 2.4. *对域F的任意元素$a \in F$，我们定义a自相加n次为$na = \underbrace{a + ... + a}_{n}$，若不存在$n$使得$na = 0$则称$F$的***特征为0***，否则存在最小的$n$使得$na = 0$此时称$F$的***特征为n***。*

域的特征是一个幻世的概念，对所有的域都适用，例如Q、R、C的特征为0，Z_P的特征为p，此时我们有下面的素域分类定理。

定理 2.1. *(1)任何域都含有唯一素域，即任何域都是素域的扩域 (2)域的特征要么为0、要么为素数p (3)特征为0的素域与Q同构，特征为素数p的素域与Z_p同构。*[5]

上面的每一步都很重要，第一步说明素域的唯一存在性，这样研究一般域可以先看向它的素域，第二步说明了特征的所有可能情况，第三部则是彻底完成了对素域的分类，并给出了素域这个幻世对象，在现世中对应的代表元素。任何幻世的研究，需要一定直观性(此处为计算直观性)的基础是找到现世的对应实体，通过这个定理，以后讨论域，实际就是讨论Q和Z_p的扩域。

最后提醒一下读者，上面笔者所做的一些概念，有些人可能会有一种似范畴论又不是范畴论的感觉，我在这做出申明，这不是范畴论，因为范畴论甚至将集合论作为自己的一个特例，在笔者看来，范畴论是集合论的一种扩展，我们知道范畴论的主要作用或者说来源实际是为代数几何提供一套语言基础，但范畴论的研究又经常落入到集合论所定义的一些对象上。有一部分人喜欢将范畴论看为幻世的进一步抽象，这是完全没有必要的，集合已经是一个泛得不能泛得概念了。还有笔者并没有考虑数理逻辑，主要因为它在数学上有点过于独立的感觉，更多时候是为理论证明提供逻辑基础得存在，从逻辑上说明一些可能和不可能得事情，真正研究幻世和现实好像基本用不到数理逻辑所产生得结果。

2.2 数论的形式化

接着我们来认识一下现代的数论研究，传统的初等数论属于现世研究，主要研究自然数集N上的整除、素数、同余、方程等。而这些东西在幻世的抽象对应物则是唯一分解整环[6]。稍微学过抽象代数的都知道N既不是域也不是环，怎么对应物就是一个整环了？那我们稍微放宽一下，考虑一下整数集Z怎么样，它是一个性质很好的欧几里得整环(Euclidean Domain)，具体的定义我们先不考虑，研究N和研究Z肯定是不一样的，但对于我们所渴求的东西是否一样呢？两者只差一个-1，1在数论中也是一个十分特别的存在，不论整除还是素数还是唯一分解定理都需要排除它，-1似乎和1是类似的存在，如果我们将$\{1, -1\}$看为基本单位，唯一分解定理好像可以写成“单位×素数积的形式”，当然如果引入负素数好像也不错。其实在许多的数论研究里，用负整数会方便很多，比如威尔逊定理(Wilson's theorem)：p是素数$\Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1(mod\, p)$，还有勒让德符号(Legendre Symbol)的取值为$\{-1, 0, 1\}$，接下来我们还是看看环这个抽象结构，来看看数论在幻世中的样子，这里我们推荐这本书籍[24]的第一、二章，基本详细地介绍了所有需要内容，看完的读者可以直接跳过本节内容。

环是最复杂的代数结构，方便起见，我们将群一并定义了，我们以后将抽象系统一写为(集合,映射1,映射2,...)的形式，且映射均是集合上的二元映射

[5]为了区分Z_p的环论性质或作为p进整数，我们一般将其记为F_p

[6]英文名是Unique Factorization Domain，简称UFD

定义 2.5. *如果一个抽象系统$(G,\cdot)$的映射$\cdot$满足结合律、存在单位元、存在逆元，则称G是一个***群**。*若映射$\cdot$进一步满足交换律，则称其是一个***交换群**[7]。

有时为了方便称呼，我们考虑比群更弱的系统，若抽象系统(G,·)的映射·满足结合律，则称其为**半群**；若进一步还存在单位元，则称为**幺半群**，各种幻世对象实际就是集合和映射满足某些性质的整体对象，一个好的叫法可以让我们清晰地了解它到底有哪些性质，性质往往可以灵活应用，比如交换律不依赖于单位元和逆元，因此我们自然可以将其应用于半群，从而得到**交换半群**，但逆元的定义依赖于单位元，因此让半群和可逆性结合得到*可逆半群*是不可行的。

定义 2.6. *如果一个抽象系统$(R,+,\cdot)$满足：*

(1)系统$(R,+)$是交换群。仿照域我们有零元0，逆元$-a$等就不过多赘述了

(2)系统$(R,\cdot)$是半群。

(3)映射$+$和$\cdot$满足分配律

*则称R是一个***环**。

沿用之前群的思想，对于半群系统(R,·)，它还具有可塑性，我们将存在单位元加上去得到**幺环**，再将交换律加上去就得到了**交换幺环**，大多书籍的环都是交换幺环，只是因为它对应了基本大部分的现世对象，性质比较好罢了。但对于数论来说还不够，我们需要“整”这个性质，它不像各种律那么明了。对于性质我们必需得考虑依赖性，比如可逆就是依赖单位元而产生的，而“整”依赖于“零因子”，它可以只对环定义

定义 2.7. *对于环$(R,+,\cdot)$的非零元$a,b\in R$如果满足$ab=0$，则称a是R的***左零因子**、*b是R的***右零因子**，*将它们统称为***零因子**。

在现世中我们可以很容易找到有零因子的环，当$n>1$时的n阶方阵$R^{n\times n}$，自然我们将“没有零因子”作为一个性质就有**无零因子环**的定义了，对于零因子我们再讲一些东西，首先引入一个以后会经常见到的符号，考虑子集$X\subset R$，定义X的**零化子**(Annihilator)为$Ann_l(X)=\{r\in R|rx=0\forall x\in X\}$和$Ann_r(X)=\{r\in R|xr=0\forall x\in X\}$，它们又可以细称为*左零化子*和*右零化子*，对于交换环它们没有区别可以直接记为$Ann(X)$，很容易发现$Ann_l(R)-\{0\}$和$Ann_r(R)-\{0\}$其实就分别是左零因子集合和右零因子集合，因此“没有零因子”可以简单地写为$Ann_l(R)=Ann_r(R)=\{0\}$。我们将无零因子幺环称为**整环**，有些书的整环还具有交换性，我们认为称为交换整环比较合适。引入一系列环的概念以后，**域**实际有另一种等价地定义，交换幺环的每一个非零元都可逆，即系统$(R-\{0\},\cdot)$是一个交换群，这个性质很强可以直接推出域是一个交换整环，如果将条件弱化为群的话，我们称其为**体**，同样可以推出体是一个整环。正因如此交换整环R可以通过添加可以元素的方式得到域$Frac(R)=\{ab^{-1}|a,b\in R\}$且是唯一的，称其为$R$的**分式域**。有了上面一系列内容的铺垫终于可以来寻找现世中数论的各种概念在幻世中的对应了，它的基础是交换整环R，自然数集Z就是一个交换整环，各种概念都能在上面定义，我们先引入符号$R^*=R-\{0\}$来排除容易产生干扰的零元，并设U为R^*的所有可逆元的集合，称为R的**单位群**，其中的元素称为**单位**，对于幺环，$1\in U$叫做**单位元**，请注意各种叫法所对应的意义。

定义 2.8. *对于交换整环R，设$a,b\in R^*$,我们给出如下一系列定义*

[7]也可以叫做阿贝尔(Abel)群，但为了体现性质还是叫成交换群比较好

*(1)*若$\exists c \in R^*$使得$b = ac$，则称a**整除**b，或a是b的**因子**，或b是a的**倍数**，并记为$a \mid b$，否则记为$a \nmid b$

*(2)*若$a \mid b$且$b \mid a$则称a与b**相伴**，并记为$a \sim b$

*(3)*若$a \mid b$且$b \nmid a$则称b为a的**真因子**，并将单位称为**平凡因子**

我们给出了数论中最基本的整除概念，我们多引入了相伴的概念，这明显是服务于Z的，它的单位群是$\{-1, 1\}$，因此$p \sim -p$，如果将相伴看成等价关系的话，我们自然可以得到余集$N = Z/\sim$，换言之相伴的概念正是N上研究与Z上研究的转化桥梁。任何单位都可作为真因子，但这样的因子没什么用，所以我们给出了平凡因子的概念，而真因子可以排除自身的情况，比如p和$-p$都可以作为p的非真因子。综合这些内容我们可以给出素数的幻世对应物。

定义 2.9. 对于交换整环R，设$p \in R^* - U$,我们给出如下一系列定义

*(1)*若p没有平凡真因子，则称p为**不可约元**，否则称其为**可约元**

*(2)*若$p \mid ab \Rightarrow p \mid a$或$p \mid b$，则称$p$为**素元**

在幻世里素元一定是不可约元，但反过来却不一定，因此我们以引入**素性**为“不可约元一定是素元”，由此素性交换整环才会更接近我们的现世中的初等数论。至于相关的性质，随便类比一下数论就能推出来，没啥好说的。实际上，这个幻世对象还是不够，比如算术基本定理，素性交换整环不一定成立，但只要再加一个可以无穷下降的性质即可，我们引入**可降**为“任何非零元可以通过除去有限个真因子变为单位”。于是可降素性交换整环可以有算术基本定理，但我们需要严格叙述一下幻世的算术基本定理该长什么样，并给出UFD的概念。

定义 2.10. 对于交换整环R，设$a \in R^* - U$,如果有

*(1)*存在不可约元$p_i (1 \le i \le r)$使得$a = p_1 p_2 ... p_r$

*(2)*在置换和相伴下上述分解是唯一的

则称R为**唯一分解整环**(简称为UFD)。

我们得到的第一个性质就是，可降素性交换整环等价于UFD，UFD是个很强的条件，实际上我们交换整环还不一定存在最大公因子，这里的最大指的是其它的公因子都是它的因子，所以相伴下最大公因子本身就不唯一，我们引入**因子性**为“任意两个非零元存在最大公因子”则有，可降因子性交换整环等价于UFD。

图1：环内元素分布

图1：环的简单包含关系

至此，我们可以知道幻世中的UFD正是我们所需要的初等数论的抽象物，最后我们给出Z的UFD结构。

定理 2.2. *整数环Z是UFD且有*

(1)单位群为$U = \{-1, 1\}$

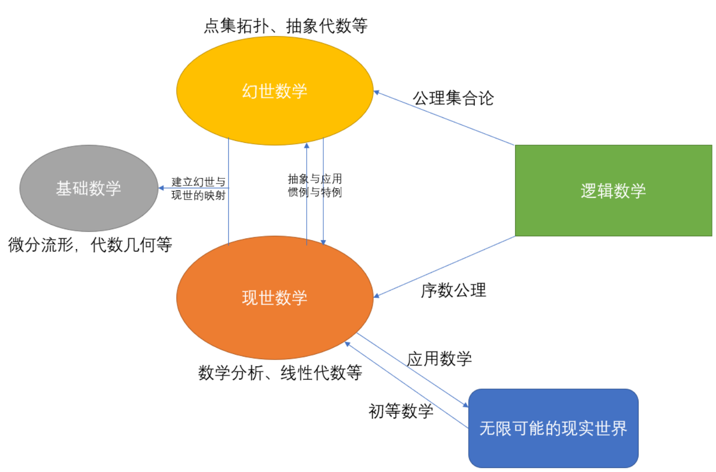
(2)不可约元和素元等价，由素数p及其相伴$-p$组成

(3)任何非零元可以写成“单位×有限个素数之积”的形式

(4)满足素性、因子性、可降

此时在上面建立同余、方程都是水到渠成的事了，但这样真的结束了吗？其实并没有，Z其实还是一个更强的环，这意味着有些数论性质在UFD中推导不出来，比如在UFD上，辗转相除求最大公因子是做不到的。辗转相除依赖于带余除法分解，其中存在大小的比较，大小的比较实际是对零的比较，但对任意的UFD不能保证单位群的阶为2，自然难以定义序。当然我们依旧可以不断在幻世填充性质，但这是永远不会结束的，一个简单的弥补办法就是让幻世对象与现世对象建立映射射关系，流形就是一个典型的例子，但这样以后幻世对象就不纯了，像素域那样可以完美建立与现世同构对应的幻世对象基本就没有多少。建立幻世到现世的映射是证明中常用的手段，往往都是用来应对幻世对象性质不足的情况，欧几里得整环(Euclidean Domain)就是一个典型例子，通过这种方式就能证明$Z[i]$是UFD。这里，我们应该意识到一点，对于绝大多数纯幻世对象只能不断逼近现世对象，而幻世与现世的混血对象才是研究的主流，因为只有它们才有较大的可能形成完整分类。

这是我们注意到素域是少有的具有完备现世分类的纯幻世对象，因此以域作为研究的基础才是真正的纯幻世研究，接下来的代数数论正是如此。域的特殊性不仅在此处，在数理逻辑中，有另一种定义数论的抽象方式，即*皮亚诺公理*(Peano axioms)，基于此我们可以得到所有的现世对象(参照[25])，哥德尔证明了这样的系统是不完备的，这个“不完备”的意思我们有空再解释。还存在一种公理方式，可以直接构造实数这个现世对象，并能证明它是完备的，但我们实际可以通过对实数提取特例得到数论系统，那么它是完备的吗？不好意思，它不完备。当我们得到一个公理系统以后，继续添加定义本质上是在添加公理，而皮亚诺公理是一种不完备公理，一旦进入系统就会产生不可被证明的定理。我们说这么多，其实想说明一点，幻世的基础是集合论，集合论能成为一个理论就是因为它定义了序数，基本所有的幻世对象都一定程度的不完备性，因此绝大多数幻世对象怎么也无法完成等价于现世对象。这些都不重要，我们只要清楚一点，幻世只能作为一种研究现世手段，而不能代替现世，就和现世数学只能是现实的研究手段而不能代替现实。最后我们给出完整的数学图谱。



2.3 代数数论

通过上面的内容，我们对数学的整体架构有了较为清晰的概念，接下来我们要讨论代数数论，我们推荐这本书籍[22]。它的第一部分属于纯幻世研究，第三部分属于幻世与现世的混血研究，把整个代数数论的体系讲得比较清晰，读过此书的可以跳过本节。由之前的讨论可以知道，环很难与现世对象形成完成分类，但是素域可以做到，而数论的研究又需要用到环，如果想要数论的纯幻世研究，或许需要由域诱导的环，它就是代数整数环，“诱导”是幻世中常用的手段，一般用来挖掘一个幻世对象可能拥有的其它幻世属性，比如每个有限点集都存在诱导拓扑，每个交换整环都存在诱导域，“诱导”就是依据一个幻世对象的特性构造出另一个幻世对象的手段，我们还是以代数整数环来详细讨论吧。

首先我们必需将域限制在**数域**上，即特征为0的域，它一定是有理数域Q的有限扩域，其实不为别的，只是因为有限域没法给出整数的概念，但Q确实有Z作为整数的定义，一般而言Z_p的扩域只能定义出代数数，却定义不出代数整数。考虑数域k，其上可以定义出多项式环$k[x]$，它是还是一个性质很强的欧几里得整环，但不是我们需要的东西，k存在子环同构于Z，以后为了方便，对于同构我们直接视为同一个东西，换言之，我们说“任意数域k的素域为Q，存在子环Z”，于是$k[x]$也存在子环$Z[x]$。

定义 2.11. *对于域k的任意扩域中的元素a，若存在$f(x) \in k[x]$使得$f(a) = 0$则称a是关于k的**代数元**，否则称为关于k的**超越元**，将k所有代数元的集合称为k的**代数闭包**，记为$\overline{k}$。特别地，我们将Q上的代数元称为**代数数**，所有代数数的集合记为$A = \overline{Q}$。*

任何数域的代数闭包也是一个域，至于怎么证就自己去探索，另一件事就是代数数所满足的多项式实际上可以弱化的$Z[x]$上去，而一般的数域就不是很清楚了。我们知道域是有“1”的概念的，它是域的单位元，那么$Z[x]$中自然可以提取出首系数为1的特殊多项式了，并将$\overline{Q}$中符合这些多项式的元素称为**代数整数**，记为$\overline{Z}$。这样的想法其实很自然的，有理数都是代数数，通过多项式$ax - b \in Z[x]$的根来定义，当首系数a为1时，它所定义的就是整数了，换言之，Q中的代数整数就是Z。

定义 2.12. *对于数域k定义它的**代数整数环**为$O_k = \overline{Z} \cap k$。*[8]

值得注意的是代数整数环只能对数域定义，而代数闭包之类的则可以对所有的域定义，一些比较简单的例子如$O_Q = Z$、$O_{Q(i)} = Z[i], i = \sqrt{-1}$、$O_{Q(\sqrt{2})} = Z[\sqrt{2}]$、$O_{Q(\sqrt{5})} = Z[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})]$等等。代数整数环如其名确实是一个交换整环，但如果它是一个UFD就更好了，就像Z那样，我们可以研究好多好多的数论性质，$Z[\sqrt{-1}]$、$Z[\sqrt{-2}]$、$Z[\sqrt{2}]$、$Z[\zeta_3], \zeta_3 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$都是性质很好的UFD，但也有不是UFD的代数整数环如$O_{Q(\sqrt{-26})} = Z[\sqrt{-26}]$，为了研究这一类对象，我们有必要引入一个符合其特征的幻世环，它就是戴德金整环(Dedekind Domain)，它有多种等价的定义。

定义 2.13. *若交换整环R满足以下任一性质*

(1)是一维、诺特、整闭的

(2)满足唯一素理想分解定理

*则称R是**戴德金整环**。*

[8]有些地方喜欢用花体$\mathcal{O}_k$来表示，但比较难写所以我们就用大写表示

通常情况下，我们都是以(1)来定义戴德金整环，然后推出(2)，接下来我们需要引入好多概念了，请做好心理准备。对于交换幺环，我们可以定义子环，但子环一般都要求它保留环的单位元，它不能用于非幺环，在环的子集比较重要的是“理想”的概念，它可以保持不少环的性质，由于非交换环，还得分*左理想*和*右理想*，并由此还能区分出*单边理想*和*双边理想*，所以我们干脆只考虑交换环，只要一个概念就够了。

定义 2.14. *对于交换环R的子集I如果有*

(1)$0 \in I$

(2)$a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$

(3)$a \in I, r \in R \Rightarrow ar \in I$

容易发现$\{0\}$和R一定是R的理想，它们称为R的**零理想**和**平凡理想**，我们还称理想$I \neq R$为R的**真理想**。另一个重要的是生成理想，设$a_1, ..., a_n \in R$则$I = \{r_1 a_1 + ... + r_n a_n | \forall i, r_i \in R\}$是$R$的一个理想，记为$I = (a_1, ..., a_n)$，并称为*由*$a_1, ..., a_n$*生成的理想*。特别地，当$n = 1$时的理想$I = (b)$称为$R$的由$b$生成的**主理想**。对于交换环$Z$，所有的$nZ = \{nz | z \in Z\}, n \in Z$都是$Z$的理想，我们可以看到理想似乎有环的运算，好像是一个交换环，事实确实如此，系统(I,+)是(R,+)的正规子群同时(I,·)也是一个交换半群，所以理想是一个交换环，这是我们可以意识到为什么环会是抽象代数中最复杂的对象了，它的子结构中有环却不一定是子环。另一种想法是能否再引入第三种运算在环上进一步扩展，这实际是线性空间的想法，我们有空再讨论。此时我们可以得到一个简单的性质**主理想**为“所有的理想都是主理想”，由此前缀我们有**主理想整环**(PID,Principal Ideal Domain)这个比较重要的概念。其实笔者看来定义一个主理想环也是可以的，但似乎没什么应用就是了，理想的另一个作用是生成商环R/I，其基于在加法上I是R的正规子群，使用陪集的相关运算，可以证明它也是一个交换环。通过商环，我们可以找出几种比较特殊的理想。

定义 2.15. *对于交换环R和真理想I我们有下面定义*

*(1)若$ab \in I \Rightarrow a \in P$或$b \in P$，则称$I$是$R$的***素理想**

*(2)若不存在真理想$A \neq I$使得$I \subset A \subset R$，则称I是R的***极大理想**

两者的意思其实都非常的明显，可以直接望文生义，素理想与之前的素元定义类似，你可能会想有没有什么不可约理想？答案是它就是极大理想，并且类似地*极大理想一定是素理想*，理想和数不一样，它是一个集合，所以我们应该用包含来代替因子，极大理想与环直接没有其它理想，相当于数和1之间没有其它因子，这时我们意识到之前的可降是否有类似的存在呢？有的，我们把这个条件称为诺特(Noetherian)，它表示“理想升链在有限步内停止”，诺特环有不少等价定义，一个就是“所以的理想都是有限生成的”。

定理 2.3. *对于交换幺环R和理想I我们有*

(1)I是素理想当且仅当R/I是整环

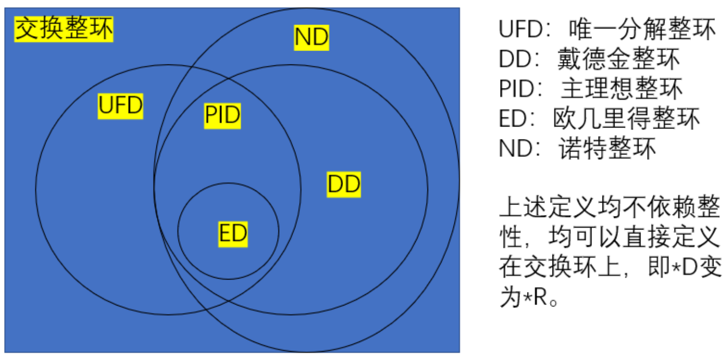
(2)I是极大理想当且仅当R/I是域

我们还是来看环Z吧，它的所有素理想都是极大理想，且都可以表示为pZ(p为素数)，而且所有的有限素域可以由此定义出来$F_p = Z/(p) = Z/pZ$。它的所有理想都是主理想$nZ = (n)$为PID，它还是一个诺特环，诺特环可以定义维数的概念，它是“素理想严格升链的长度的极大值”，称其为环的**维数**(Kurll维数)，域没有素理想维数为0，整环的维数为1，因此一维诺

特环的另一个意思是“素理想都是极大理想的诺特环”。对于交换环R的理想I和J可以定义乘法为$IJ=\{ab|a\in I,b\in J\}$,它也是个理想，但注意理想是越乘越小的，如$(2)(3)=(6),(6)\subset(2)$，因此极大理想一般可以作为因子是素理想，但这种不统一让我们不好决定将哪一个作为唯一分解的因子，因此我们给出“素理想都是极大理想”来限制戴德金整环。而诺特方面主要有两个作用，一是将这个性质转换为1维，这样它不仅能很好的排除域的情况还能将性质推广到分式理想去，另一个是“理想有限生成的特性”，它其实对应了代数整数环是一个有限Z-模的特点，不过诺特性更广一些就是了。唯一素理想分解定理此时已经很好理解了，我们最后给出“整闭”的定义，它是代数闭(即是某个域的代数闭包)的扩展。

定义 2.16. *对于交换整环R，它的分式域为F，若$a\in O_F\Rightarrow a\in R$则称$R$是***整闭的**。

因为分式域的存在性，“整闭的”只能定义在交换整环上，显然Z的分式域是Q，对应的代数整数环就是Z，所以Z是整闭的，显然这是为了将环限制在我们之前导出环的范畴内。我们搞了这么多概念，或许有些凌乱，所以下图给出了各种环之间的关系。



证明的话读者可以去看各类相关书籍，里面比较值得注意的是关系“UFD∩DD=PID”，所以如果研究数论的话，比较理想的对象是PID，当然如果是性质更强的欧几里得环就更好了。如果能证明代数整数环都是PID的话，根据库默尔(Kummer)的理论就能证明费马大定理，可惜我们只能证明“**代数整数环都是戴德金环**”，因此它们不一定有唯一分解定理，但有素理想分解定理。既然知道了，我们所研究的对象是以素理想为主的戴德金环，那我们真正能做的就是将理想视为“数”，来研究这样的理想“数”构造的集合有什么性质。考虑数域F及其代数整数环O_F，它是一个戴德金环，素理想和极大理想等价，并且所有理想都是有限生成的，考虑我们之前定义的理想乘法，将O_F所有非零理想构成的集合记为I_K^o，则它关于理想乘法构成一个*交换幺半群*，单位元为O_F，我们的想法是能否继续扩充逆元让它形成一个性质更强的群。这里我们可以思考，交换整环是怎么得到域的，它实际就是一个交换幺半群扩充为交换群的过程，但必需要求这个半群有消去律，而整环正好有这个条件。

我们来说一下构造的具体过程，考虑交换幺半群G，其满足消去律即“$\forall a,b,c\in G$有$ab=ac\Rightarrow b=c$”，并设e是它的单位元，定义一个形式集合$S=\{ab^{-1}|a,b\in G\}$和关系$ab^{-1}\sim cd^{-1}\Leftrightarrow ad=bc$，显然消去律满足时它是一个等价关系，故有商集$S/\sim$，$G$可以嵌入到$S/\sim$中去通过$ae^{-1}$，任意元素的逆元为$ea^{-1}$，因此$S/\sim$就是我们扩充得到的交换群，这样的想法和$Z$构造$Q$的想法如出一辙，只不过是幻世中进行罢了，相关证明的话自己去探索。总之，对于I_K^o，我们可以构造一个交换群I_K，下面给出严格的定义。

定义 2.17. *对于数域K和子集I如果有下面任一条件*

(1)存在非零的$a \in O_K$使得aI为O_K的非零理想

(2)I是非零的有限生成O_K-模

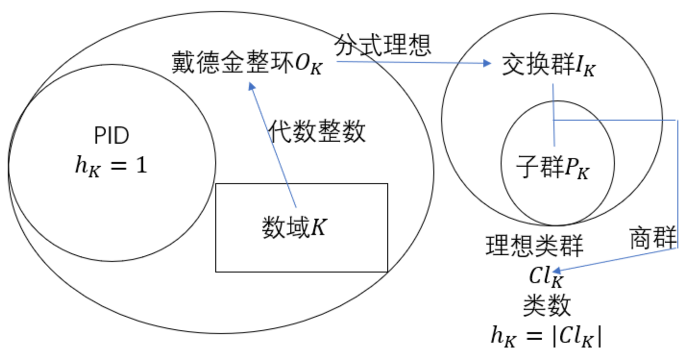
(3)$I \in I_K$

*则称I是K的**分式理想**，I_K即是所有分式理想的集合，称为**分式理想群**，为了方便我们把O_K的理想称为**整理想**。*

显然整理想和分式理想对应的就是整数和分数两个概念在理想的推广，值得注意的是分式理想是定义在域上面的，域Q的所有分式理想由$qZ(q \in Q^{\times})$得到，显然这样的理想很特殊。我们将$\alpha O_K(0 \neq \alpha \in K)$称为**主分式理想**，它们可以构成$I_K$的一个正规子群(交换群的子群都是正规子群)，称为**主分式理想群**，记为P_K。此时，我们可以得到商群$Cl_K = I_K/P_K$，称其为数域K的**(分式)理想类群**。Q的所有分式理想都是主分式理想，因此$Cl_Q = \{e\}$为平凡群。

定理 2.4. *对任意数域K，Cl_K是有限交换群，此时记$h_K = |Cl_K|$，称其为数域K的**类数**。*

由上面的讨论可以知道Q的类数为1。类数的一个重要作用是“$h_K = 1 \Leftrightarrow O_K$是PID$\Leftrightarrow O_K$是UFD”,后一步基于$O_K$是戴德金环的事实，因此类数实际衡量了一个代数整数环离唯一分解定理有多遥远。库默尔证明$x^p+y^p = z^p$(p为素数)没有整数解时，需要考虑的是分圆域$Q(\zeta_p), \zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$，只要证明它的类数$h_p = 1$，就能推出费马大定理成立，比较可惜的是$h_{23} = 3$，当然库默尔没有放弃，继续寻找是否有更弱的条件，最后得到的是$p \nmid h_p$。实际上，很多数域的类数可以计算出来参考[22]的第二部分，我们只要知道，并非所有的分圆域都如库默尔所渴求的那样，因此库默尔只能证明一大部分的费马大定理成立，却仍没有得到完整结果。我们给出下述总结，然后准备进入下一个阶段了。



想要更加深入的理解相关的数论的代数理论，混血研究是必要的，我们依旧以域作为起点，来探讨域上的混血理论。为了便于称呼，我们给出下面的概念。

定义 2.18. *域F称为**整体域**(Global Field)，如果满足下述任一情况*

*(1)F是Q的有限域扩张，此时称其为**数域**(number fields)*

*(2)F是$F_p(t)$(p为素数)的有限域扩张，此时称其为**函数域**(function fields)*

有限可分扩张一定是单代数扩张，因此R、$\overline{Q}$之类的就不是整体域。为什么不用F_p的有限扩张呢？很简单，因为它是有限的，无法完成我们接下来所要进行的“赋值”操作，另一个需要注意的是k[x]表示多项式，而k(x)表示的则是有理分式。

定义 2.19. 设F是域，一个*(非阿基米德)***赋值***(valuation)*指的是F上的一个映射$v: F \to R \cup \{\infty\}$满足对任意的$a, b \in F$有

(1)$v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$

(2)$v(a) + v(b) = v(ab)$

(3)$v(a+b) \geq min(v(a), v(b))$

这个玩意其实没什么用，比较有用的是下面绝对值的概念。

定义 2.20. 设F是域，一个**绝对值***(AbsoluteValue)*指的是映射$|\cdot|_p : F \to R_{\geq 0}$满足对任意的$a, b \in F$有

(1)$|a|_p = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(2)$|a|_p + |b|_p = |ab|_p$

(3)$|a+b|_p \leq |a|_p + |b|_p$

如果绝对值还满足下面更强的条件

(3')$|a+b|_p \leq max(|a|_p, |b|_p)$

则称其为**非阿基米德的***(nonarchimedean)*，否则称为**阿基米德的***(archimedean)*。

对任何域都存在绝对值$|0|_1 = 0$,$|$非零$|_1 = 1$，称其为**平凡绝对值**，它基本没有用处，因此一般情况下不考虑它。对于有理数域Q，其存在阿基米德绝对值$|a|_\infty = |a|$和非阿基米德绝对值$|a|_p = p^{-v_p(a)}$，其中$v_p(a)$表示有理数a中因子p的次数称为**p进赋值**。我们将$|a|_\infty$称为Q的**绝对值**，$|a|_p$称为Q的**p进绝对值**，虽然绝对值是一个混血对象，但它仍具有幻世属性，我们的下一步是定义绝对值等价的概念。它有多种定义方式，其中包括导出拓扑的等价，但我们选择比较简单的数值判断来定义等价。对于域F的任何两个绝对值$|\cdot|_1$和$|\cdot|_2$，如果存在某个正实数s使得$|a|_1 = |a|_2^s, \forall 0 \neq a \in F$，则称这两个绝对值是等价的，记为$|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2$。此时我们可以得到有理数域绝对值的分类定理了。

定理 2.5. *(1)*特征非*0*的域的绝对值只能是非阿基米德的

(2)Q的阿基米德绝对值等价于Q的绝对值，Q的非阿基米德绝对值等价于Q的某个p进绝对值

我们将整体域F的一个绝对值等价类称为F的一个**素点**(place)[9]，我们一般只研究整体域Q及其扩域，所以将$|a|_p$(p为素数或无穷)称为Q的**正则绝对值**。下一步是考虑Q有限扩域上的绝对值情况，但情况比较复杂，我们先来考虑简单的情况从而引入另一种域，用类似数学分析的方式，Q关于某个绝对值$|a|_p$存在完备化，即所有的柯西列都收敛。过程不叙述了，只要知道它一定是唯一的就行了，我们记域K关于绝对值v的完备化域为K_v。同时我们定义**局部域**(Local Field)F，如果它是某个域的完备化，并通过赋值的阿基米德性定义到局部域上，局部域其实有多种等价定义，我们采用比较好理解的一种，此时我们有下面的定理。

定理 2.6. 局部域有且只有下面三种情况

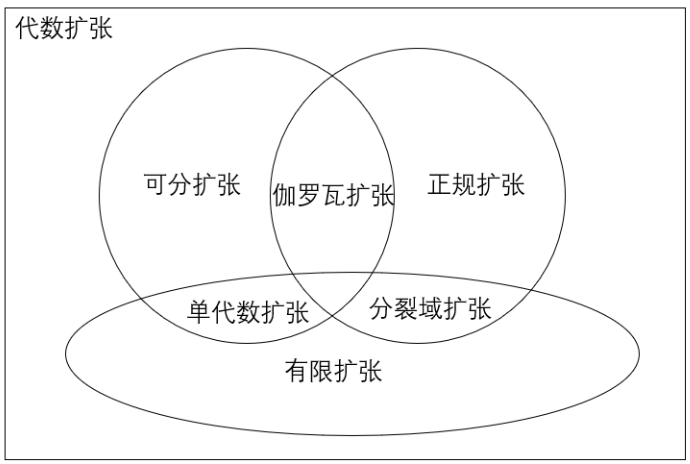
(1)R或C，它们由数域的阿基米德绝对值完备化得到

*(2)*p进数域Q_p的有限扩域，它们由数域的非阿基米德绝对值完备化得到

*(3)*洛朗级数*(Laurent series)*域$F_p((x))$的有限扩域，它们由函数域的非阿基米德绝对值完备化得到

[9] 有些地方也称为**素除子**，但素点好听一些也不易与代数几何的除子搞混

容易得到Q关于阿基米德绝对值的完备化为$Q_\infty = R$和非阿基米德绝对值的完备化为Q_p。显然存在既不是整体域，也不是局部域的域，如$\overline{Q}$，但我们似乎并不需要它就是了，有人可能会觉得“整体”和“局部”是不是叫反了，不不不，从之前素理想理想那里就应该知道，对于集合而言，越大代表越简单，因为简单才把它称为局部。以后我们会看到，在代数几何上，它们有更加明确的含义，如今听话就可以了。接下来，我们需要考虑有限扩域上的素点情况，比如能否之间从子域的素点扩充得到，实际上，对于局部域而言，它是唯一的还比较简单。我们先引入一些概念，即扩域L/K关于元素$a \in L$的**范**$N_{L/k}(a)$和**迹**$T_{L/k}(a)$，实际上，L可以视为K上的线性空间，而映射$x \mapsto ax$可以视为L上的一个线性变换，根据线性空间的基本理论，在选定特定的基后a相当于K上的矩阵M，此时我们定义$N_{L/k}(a) = det(M)$和$T_{L/k}(a) = tr(M)$，它与基的选取无关，但这样太麻烦了，应用起来不方便，我们选择一个比较偏于域理论的定义。我们先来回顾一下域扩张相关的理论，我们只解说下面这张图。



对非代数扩张，即超越扩张，其实很简单，它可以由一个个单超越扩张组成，我们定义扩张的等价为“扩域间的同构且保持子域”，那么任意域k单超越扩张$k(a)$一定等价于，多项式环$k[x]$的分式域$k(x)$，这就是我们之前所讲的有理分式域，对于交换整环而言，它是唯一的。其实对于超越数如π，则在单扩域$Q(\pi)$中π与其中的元素形成运算，这样看起来，它和未知数x其实没有什么区别，因此我们一般只考虑代数扩张。有限扩张的一个重要意义是给出了域扩张E/F的指数$n = [E : F]$，正规扩张主要用在伽罗瓦理论，伽罗瓦对应实际就是正规扩张与正规子群的对应关系，比较重要的是*可分扩张*，一般来讲不可分扩张只会出现在特征非零的无限域上，对于数域其实没有考虑的必要，但我们还是考虑普遍性比较好，可分扩张和代数扩张一样具有遗传性，因此对于不可分E/F存在中间域是F的最大可分扩张F^{sep}，于是我们可以得到$[E : F] = [E : F^{sep}][F^{sep} : F]$，我们将左边部分称为*不可分次数*，记为$[E : F]_i$，右边称为*可分次数*，记为$[E : F]_s$，即$[E : F] = [E : F]_i[E : F]_s$，对于数域而言不可分次数一定为1。

对于扩域K/F，考虑K的一个正规扩张N，定义*嵌入*$\sigma : K \hookrightarrow N$为单射域同态，如果它满足$\sigma(a) = a, \forall a \in F$，则称它是一个K到N的一个*$F$-嵌入*，由一些简单理论可以知道F-嵌入为$K/F$的可分次数$n_0 = [E : F]_s$，而对于可分扩张，如数域的扩张则容易得到，所有的F-嵌入由扩张的伽罗瓦群$Gal(K/F)$确定且$|Gal(K/F)| = [E : F]$。记全部n_0个F-嵌入为$\sigma_1, ..., \sigma_{n_0}$，对于任意$x \in K$我们可以定义它的**范**为$N_{K/F}(x) = (\prod_{j=1}^{n_0} \sigma_j(x))^{[K:F]_i}$和它的**迹**为$T_{K/F}(x) = [K :$

$F]_i \sum_{j=1}^{n_0} \sigma_j(x)$。我们实际可以证明，它们与正规扩张的选取和映射的种类无关，比如对于数域而言，我们一般选取C做为正规扩域，我们有下面的计算定理。

定理 2.7. *对于域扩张K/F，设$x \in K$在F中的极小多项式为$f(x) = x^r + c_1x^{r-1} + ... + c_r$则有*

(1)$N_{K/F}(x) = ((-1)^r c_r)^{[K:F(x)]}$

(2)$T_{K/F}(x) = -[K : F(x)]c_1$

对于域F和素点v_F，即其扩域K和素点v_K，如果有$v_K|_F = v_F$即素点在F上的限制等于v_F。则称v_K是v_F的**拓展**，v_F是v_K的**限制**，对于完备域(或局部域)，其结论是比较简单的。

定理 2.8. *设局部域F关于素点v_F是完备的，K是F的有限扩域且有$n = [K : F]$，K的素点v_K是v_F的拓展则有*

(1)K关于v_K是完备的

(2)素点v_K是唯一的，且由$v_K = \sqrt[n]{v_F(a)}, a \in K$确定

接下来，我们考虑整体域的情况，我们分两类情况讨论。首先是阿基米德素点，它只会出现在数域上，引用上述的符号，此时我们考虑数域F它是Q的n次有限扩张，并考虑Q的唯一阿基米德素点v_∞在F上的扩展。由于Q上扩张可分，所以我们可以考虑单代数扩张$F = Q(a)$，此时a在Q上的极小多项式为$Q[x]$中的n次不可约多项式，设其有r_1个实根和r_2对共轭复根，可以得到$r_1 + 2r_2 = n$，由相关理论可知，此时F有r_1个实嵌入[10]$\sigma_i : F \hookrightarrow R, \sigma_i(a) = a\ (1 \le i \le r_1)$和$r_2$对复嵌入$\sigma_i : F \hookrightarrow C, \sigma_i(a) = a\ (r_1 + 1 \le i \le n), \sigma_{r_1+j} = \overline{\sigma}_{r_1+r_2+j}\ (1 \le j \le r_2)$，此时我们可以得到下面的定理。

定理 2.9. *设F是Q的n次有限扩张，r_1和r_2如上定义，则v_∞在F共有r_1+r_2个扩展，设这些阿基米德素点为$v_1, ..., v_{r_1+r_2}$，并且$\sigma_i(1 \le i \le r_1 + r_2)$是上面定义的嵌入。此时$F$上所有阿基米德素点由$v_i(a) = v_\infty(\sigma_i(a)), a \in K$给出，并且$K$关于$v_i(1 \le i \le r_1)$的完备化为$R$，关于$v_i(r_1 + 1 \le i \le r_1 + r_2)$的完备化为$C$。*

所谓殊途同归大概就是这些东西，所以整体域的素点其实是很丰富的。接下来我们考虑数域的非阿基米德素点，依旧考虑n次代数扩张K/Q，并设$K = Q(a), a \in O_K, f(x) = x^n + c_1x^{n-1} + ... + c_n \in Z[x]$是$a$在$Q$上的最小多项式[11]，这样对于$Q$的每个由素数$p$确定的非阿基米德素点$v_p$，我们可以得到下面定理。

定理 2.10. *(1)设g为素理想$(p) \in Q$在O_K中不同素理想因子$p_1, ..., p_g$的个数，则$f(x)$可以在Q_p上分解为g个不可约多项式之积$f(x) = f_1(x)...f_g(x)$,其中$f_i(x) \in Z_p[x]$为不同的首一多项式[12]。设$n_i = deg\ f_i(x)$则有$n_1 + ... + n_g = n$*

(2)对任一素数p，v_p在K上共有g个扩展，由上面的素理想$p_i\ (1 \le i \le g)$给出[13]，并记作$P_1, ..., P_g$。设a_i是$f_i(x)$在Q_p的代数闭包中的一个根，则域K关于P_i的完备化有$K_{P_i} \cong Q_p(a_i)$。

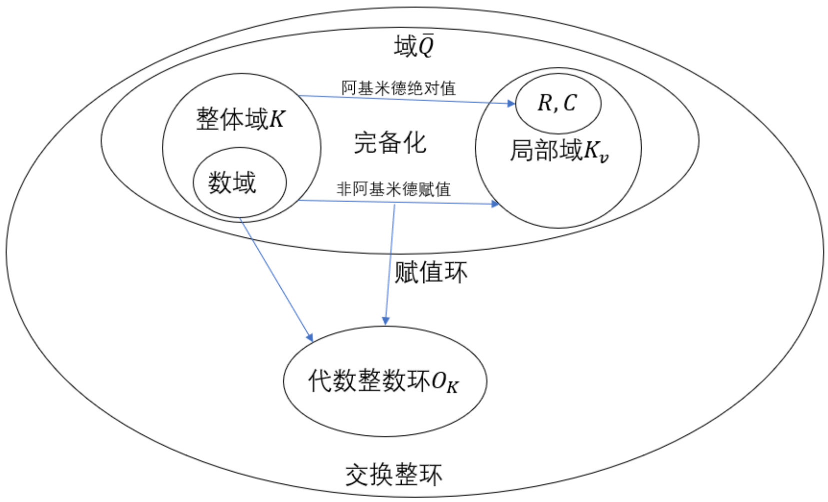
[10]准确来说是F到R的F-嵌入，但F就是自身所以就不特别指出，而将嵌入到的域指出

[11]因为此时a是代数整数，而且确实能证明这样的a是取得到了

[12]其中Z_p为p进整数环，它是p进数域Q_p的代数整数环

[13]由于具体形式比较复杂，有兴趣的读者可以查阅相关书籍，我们知道有这样的事实就行了

至于函数域我们不做过多考虑了，因为它与我们数论的距离有点远，而且说句实话，我们讲这么多与主题没有关系，但对幻世建立一个整体的认知有极大的好处。最后我们再介绍一个有用的东西，域的赋值环，之前我们对数域定义了代数整数环，而特征非零的域能否有类似的东西吗？对于特征非零的整体域确实可以得到，比如$F_p(x)$的代数整数环可以看为$F_p[x]$，排除已经定义的数域，我们只需考虑域F和它的非阿基米德素点$|\cdot|_p$，我们可以建立绝对值与赋值的对应关系$|\cdot|_p \rightleftarrows v_p$通过式子$|a|_p = \gamma^{a_p(a)}, a \in F, 1 < \gamma < 1$，值得注意的是这里的$\gamma$不论怎么变得到的都是等价的，所以上述对应就是一一的，至于下标p只是为了区分一般的绝对值。因此对于非阿基米德素点，我们可以以赋值的观点来看待它。此时我们定以域F关于非阿基米德赋值v_p的**赋值环**[14]为$O_F = \{a \in F | v_p(a) \geq 0\}$。我们可以考虑数域的非阿基米德赋值，它是代数整数环与赋值环的交界处，显然对于p进数域Q_p而言，它的赋值环和代数整数环都是Z_p，类似延拓的思想，赋值环和代数整数环是类似物，比如局部域$F_p((x))$的赋值环就是幂级数环$F_p[[x]]$，它可以看为某种意义上的代数整数环，最后给出下图总结我们的理论。



最后，我们来考虑一些，比较重要的域扩张分歧理论。在数学上，有这样一类问题，素数p能否写成多项式$f(x, y, ...)$的形式，比如$p = x^2+y^2 (x, y \in Z)$当且仅当$p \equiv 1 (mod\ 4)$。而实际上，这在幻世有另一层含义，Z上的素数能否分解为$Z[i]$上的素数，如果素数p能分解为$Z[i]$上的素数则p可以写成$x^2 + y^2$的形式，而虚数i来自于分解$x^2 + y^2 = (x - iy)(x + iy)$，考虑纯幻世对象，我们可以将$Z$和$Z[i]$分别视为$Q$和$Q(i)$的代数整数环，因为一般的代数整数环不一定是PID，因此我们用素理想代替素数，这样是合理的，因为当代数整数环是PID时，素数的分解和素理想的分解是一致的，我们可以将素理想看成素数的推广。

我们考虑一般的理论，设L是K的n次扩张[15]，即$[L, K] = n$，设$\mathfrak{p}$是O_K的素理想，则$\mathfrak{p}O_L = \{pl | p \in \mathfrak{p}, l \in O_L\}$为$\mathfrak{p}$在$O_L$中的导出理想，此时存在素理想分解$\mathfrak{p}O_L = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}...\mathfrak{p}_g^{e_g}$，其中$e_i, g \geq 1$,$\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_g$为$O_L$的素理想。对于分解，如果$O_L$的素理想$\mathfrak{B}$是$O_K$素理想$\mathfrak{p}$在$O_L$中的导出理想的分解，则我们记$\mathfrak{B} \mid \mathfrak{p}$(注意两个素理想不在一个代数整数环中)，此时我们有一个分解的判定定理。

[14] 这里的赋值环属于导出赋值环，它还有更加广义的定义，但与我们的研究没太大关系，故不做考虑

[15] 因为之前我们扩展了代数整数环的定义，因此无需限制于数域，只要排除F_p的有限扩张，即有限域的情况，就足够了

定理 2.11. *对于域扩张L/K，$\mathfrak{B}$为O_L的素理想，则*

(1)$\mathfrak{B}\cap O_K=\mathfrak{p}$为$O_K$的素理想$\Leftrightarrow \mathfrak{B}\mid\mathfrak{p}$

(2)记$\mathfrak{B}\cap O_K=\mathfrak{p}$，则$O_F/\mathfrak{B}$和$O_K/\mathfrak{p}$都是有限域，且前者是后者的扩域。

有了上面的定理，采用同样的符号，我们可以定义$\mathfrak{p}$一系列描述特征数。考察分解$\mathfrak{p}O_L=\mathfrak{B}_1^{e_1}\mathfrak{B}_2^{e_2}...\mathfrak{B}_g^{e_g}$，其中$e_i$称为$\mathfrak{p}$在$\mathfrak{B}_i$中的**分歧指数**，记为$e(\mathfrak{B}_i/\mathfrak{p})=e_i$。如果$e_i\leq 1$则称$\mathfrak{p}$在$\mathfrak{B}_i$处**非分歧**(unramified)，进一步$\mathfrak{p}$在$O_L$的素理想处非分歧则称$\mathfrak{p}$在$L$中**非分歧**，还有分歧(ramified)就很好定义了。其中的g称为$\mathfrak{p}$在L中的**分裂次数**，由于戴德金环中素理想和极大理想等价，因此我们有域扩张的指数$f_i(\mathfrak{B}_i/\mathfrak{p})=[O_F/\mathfrak{B}:O_K/\mathfrak{p}]$，并称其为$\mathfrak{p}$在$\mathfrak{B}_i$中的**剩余类次数**，进一步如果$g=[L:K]$则称$\mathfrak{p}$在$L$中**完全分解**。对于这些参数，我们有下面的定理。

定理 2.12. *$\sum_{i=1}^{g}e_if_i=n$。特别地，如果L/K是有限伽罗瓦扩张，则有$e=e_1=e_2...=e_g$、$f=f_1=f_2...=f_g$和$efg=n$。*

此时我们对分解建立了一个基本的认知，但这并不够，我们需要建立素理想的同余理论，然后我们则通过同余来判定素理想的分解情况。由于有限伽罗瓦扩张性质优良，我们强烈推荐考虑伽罗瓦扩张，这也是有原因的，有限可分扩张一定存在一个更大的扩域使其成为伽罗瓦扩域，它就是伽罗瓦闭包，当然可分条件随处可见就无所谓了。利用上面的符号，针对伽罗瓦扩域，素理想分解有下面更强的性质。

定理 2.13. *群$G=Gal(L/K)$在集合$\{\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2,...,\mathfrak{B}_g\}$上是可迁的。即对任意的$\mathfrak{B}_i$和$\mathfrak{B}_j$存在$\sigma\in G$使得$\sigma(\mathfrak{B}_i)=\mathfrak{B}_j$。*

如果令$i=j$的话，我们可以轻易得到G中关于某个素理想$\mathfrak{B}$的特殊元素集$D_{\mathfrak{B}}=\{\sigma\in Gal(L/K)|\sigma(\mathfrak{B})=\mathfrak{B}\}$，称其为$\mathfrak{B}$关于扩张$L/K$的**分解群**(decomposition group)，可以证明$D_{\mathfrak{B}}$是G的ef阶子群。对于环R和理想I，如果$a,b\in R$有$a-b\in I$则记$a\equiv b(mod\ I)$，我们将其运用于分解群定义集合$I_{\mathfrak{B}}=\{\sigma\in D_{\mathfrak{B}}|\sigma(a)=a(mod\ \mathfrak{B}),\forall a\in O_L\}$，称其为$\mathfrak{B}$关于扩张$L/K$的**惯性群**(inertia group)，可以证明它是$D_{\mathfrak{B}}$的e阶正规子群。根据伽罗瓦理论，我们可以找到它们的不变域(Inv)，分别称为**分解域**和**惯性域**，记为K_D和K_L，即F/K_D和F/K_L的伽罗瓦群分别是$D_{\mathfrak{B}}$和$I_{\mathfrak{B}}$。到此，你可能会觉得这和同余有半点关系吗，而且还有引入的子域，充满了不安。我们先来回到我们的目的，我们想要探究O_K的素理想在O_L中的分解情况，当然其中的特例就是$Z=O_Q$的素数(生成所有素理想，反之亦然)在伽罗瓦扩域$Q(a)$的代数整数环$O_{Q(a)}$上的分解情况，我们想要用某种简单的判定方法来判断，到底是不分解、非分歧还是完全分解，比如$O_{Q(\sqrt{-2})}$的情况，$p\equiv 5,7(mod\ 8)$时不分解，$p\equiv 1,3(mod\ 8)$时完全分解，$p=2$时分歧。进一步对于非PID的情况，如扩域$Q(\sqrt{5})$，对于Z则需考虑p生成的素理想(p)在$O_{Q(\sqrt{5})}$中的分解，此时我们依旧用素数模判别法，$p\equiv 2,3(mod\ 5)$时不分解，$p\equiv 1,4(mod\ 5)$时完全分解，$p=5$时分歧。细心地同学可能发现为什么没有看到非分歧但不完全的情况，实际上只是我们所举的例子都是二次域比较特殊罢了，此时$n=2$，$e=1$，由于分解时$g\geq 2$，所以f只能为1，因此二次域只有三种情况，不分解、分歧且两个相同素理想之积、完全分解且两个不同素理想之积，我们有下面的一个常用的定理。

定理 2.14. *(1)设$m \neq 1$且不能被1以外的平方数整除，令*

$$N = \begin{cases} |m| & m \equiv 1 (mod\ 4) \\ 4|m| & m \equiv 2,3 (mod\ 4) \end{cases}$$

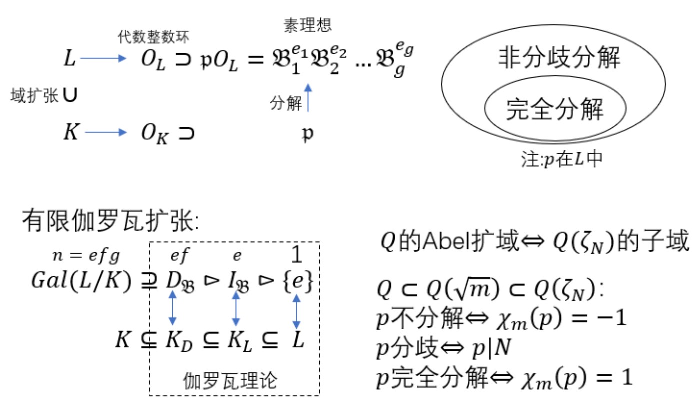
则N是满足$Q(\sqrt{m}) \subset Q(\zeta_N)$的最小自然数。

(2)考虑扩域的伽罗瓦群，有$Gal(Q(\zeta_N)/Q) \cong (Z/NZ)^{\times}$和$Gal(Q(\sqrt{m})/Q) \cong \{\pm 1\}$，由于存在限制映射$Gal(Q(\zeta_N)/Q) \to Gal(Q(\sqrt{m})/Q)$，自然可以得到诱导映射$\chi_m : (Z/NZ)^{\times} \to \{\pm 1\}$，其具有狄利克雷符号的特点自然可以视为$\chi_m : N \to \{\pm 1, 0\}$。若要具体计算，我们先定义$\theta_m : N \to \{\pm 1\}$为：(i)当$m \equiv 1(mod\ 4)$时，$\theta_m(a) = 1$ (ii)当$m \equiv 3(mod\ 4)$时，$\theta_m(a) = 1, a \equiv 1(mod\ 4)$；$\theta_m(a) = -1$,其它 (iii)当$m$为偶数时，$\theta_m(a) = 1, a \equiv 1, 1-m(mod\ 8)$；$\theta_m(a) = -1$,其它。此时有$\chi_m(a\ mod\ N) = (\prod_{l|m, l\ is\ odd\ prime} (\frac{a}{l}))\theta_m(a)$,其中$(\frac{a}{l})$为勒兰德符号。

(3)对于Z的素数p或素理想(p)有，p在$Q(\sqrt{m})$中分歧当且仅当$p|N$。

(4)同样的符号且$p \nmid N$则，p在$Q(\sqrt{m})$中完全分解当且仅当$\chi_m(p) = 1$；p在$Q(\sqrt{m})$中不分解当且仅当$\chi_m(p) = -1$

要知道，我们之所以想定义同余是因为同余可以计算，且结果可以用来判断素理想的分解情况。如果我们可以找到一个类似的东西好计算，且能拿来判断素理想的分解情况，同余是什么其实并不重要，而且原始的同余无非就是研究交换幺环Z/NZ罢了。但真正的情况是复杂的，当L/K是**Abel扩域**，即$Gal(L/k)$是交换(Abel)群时，属于类域论部分的内容，我们将在下部分详细论述；而非Abel扩域的情况，与自守形式存在某些联系，这就是我们的主题，朗兰兹纲领的内容了。而最简单情况是分圆域，包括其特例二次域，在此做个小结。



从上面的特例可以看到分歧理论与伽罗瓦群有着密切联系，因此我们先来将分歧理论引导到我们定义的群上面来。此时我们来选出伽罗瓦群的一些元素，同样考虑有限伽罗瓦扩张L/K，设$\mathfrak{p}$是O_K的素理想，它在O_L中分解的一个素因子为$\mathfrak{B}$，此时我们可以得到唯一的一个单射群同态$G = Gal((O_L/\mathfrak{B})/(O_K/\mathfrak{p})) \to Gal(L/K)$，后者的元素显然更多，重要的是我们可以在后者中找到前者唯一对应的元素，设$\sigma \in G$和$\tilde{\sigma} \in Gal(L/K)$对应，则有$\tilde{\sigma}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$，由映射限制$\tilde{\sigma} : O_L \to O_L$结合上式推出$O_L/\mathfrak{B} \to O_L/\mathfrak{B}$，则它就是$\sigma$。我们想表达在$Gal(L/K)$有一些元素$\tilde{\sigma}$，它限制形成新的自同构$\tilde{\sigma} : O_L/\mathfrak{B} \to O_L/\mathfrak{B}, x \mapsto x^{|O_K/\mathfrak{p}|}$并且构成了$G$的生成元，我们将这个元素$\tilde{\sigma}$记为$Frob_{\mathfrak{p},\mathfrak{B}}$，称为$\mathfrak{p}$关于$\mathfrak{B}$的**Frobenius置换**。对此可以推出一个简单

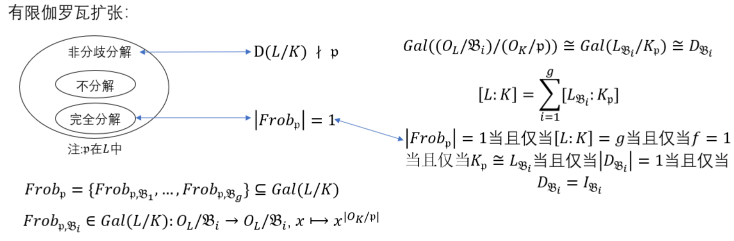
的结论，对任意$\sigma \in Gal(L/K)$有$Frob_{\mathfrak{p},\sigma(\mathfrak{B})} = \sigma(Frob_{\mathfrak{p},\mathfrak{B}})\sigma^{-1}$，结合之前群对素理想的置换作用可知，$Frob_{\mathfrak{p},\mathfrak{B}}$在$Gal(L/K)$中的共轭类与$\mathfrak{B}$无关，记为$Frob_{\mathfrak{p},L}$(或简记为$Frob_{\mathfrak{p}}$)，称其为$\mathfrak{p}$关于$L$的**Frobenius共轭类**。Frobenius共轭类中的元素也称为**Frobenius自同构**，记为$(\frac{L/K}{\mathfrak{B}}) \in Frob_{\mathfrak{p}}$，我们可以用一个更为直接的方法来定义$(\frac{L/K}{\mathfrak{B}})(\alpha) \equiv \alpha^{|O_K/\mathfrak{p}|}(mod\ \mathfrak{B}), \forall \alpha \in O_L$。此时，我们可以得到第一个判定定理。

定理 2.15. 如果$\mathfrak{p}$在L中非分歧，则$Frob_{\mathfrak{p},L} = \{e\} \Leftrightarrow \mathfrak{p}$在$L$中完全分解。

上面的判别式可以在非分歧中区分出是否完全分解，进一步我们来区分是否分歧。回忆迹$Tr_{L/K}$的定义，它输入一个L的元素，得到的值在K中，于是我们可以将其视为**迹映射**$Tr_{L/K}: L \to K$，我们可以定义O_L的一个分式理想为$D(O_L/O_K)^{-1} = \{\alpha \in L | Tr_{L/K}(\alpha O_L) \subset O_K\}$，在分式理想群中，我们把它的逆理想记为$D(L/K) = D(O_L/O_K)$，它是$O_L$的整理想，并有下面定理。

定理 2.16. 如果$\mathfrak{p}$是K的非零素理想，则$D(L/K) \mid \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{p}$在$L$中分歧。

值得注意的是有一个特殊情况，令$K = Q$则L为数域，则$Z = O_Q$的所有素理想(p)由素数p生成。此时对于数域的n次伽罗瓦扩张L/K，我们来定义一个量，$\sigma_1, ..., \sigma_n$是L到C的n个K-嵌入，$a_1, ..., a_n$是L中的n个元素，记$d_{L/K}(a_1, ..., a_n) = det((\sigma_i(\alpha_j))_{1 \leq j \leq n}^{1 \leq i \leq n})^2$，简单来说就是通过n个置换来变换n个元素后形成$n \times n$的矩阵后计算行列式，称其为$\{a_1, ..., a_n\}$关于$L/K$的**判别式**。一个简单的计算性质，$d_{L/K}(a_1, ..., a_n) = det((Tr_{L/K}(\alpha_i \alpha_j))_{1 \leq j \leq n}^{1 \leq i \leq n})$，后式是将n个元素配对相乘后计算迹形成$n \times n$的矩阵后计算行列式。另外我们简记$d_{L/K}(\alpha) = d_{L/K}(1, \alpha, ..., \alpha^{n-1})$，对于数域而言有限扩张一定是单代数扩张，设$L = K(\alpha)$则令$d_{L/K}(\alpha)$为扩张的判别式，若$K = Q$则记$d(L) = d_{L/Q}(\alpha)$。容易证明，理想$d(L)O_L$实际[16]就是$D(L/Q)$，我们可以得到$D(L/Q) \mid (p)$实际上[17]等价于$p \mid d(L)$，因此我们有$(p)$在$L$上分歧当且仅当$p \mid d(L)$，这其实是Dedekind判别式定理。值得注意的是，我们其实将不分解也视为了非分歧的情况，只是此时$e = g = 1$罢了，因为n至少为2，所以不分解一定是不完全的非分歧分解。从上面的定理可以知道，分歧的素理想的个数是有限的，因此通常情况下，我们考虑的都是非分歧情况，通常的不完全非分歧分解比较难讨论，二次域就比较明显了，它只能不分解的情况。由之前的讨论可知，对于域F的代数整数环O_F的一个素理想$\mathfrak{p}$可以诱导出一个非阿基米德赋值，我们记F关于这个赋值的完备化为$F_{\mathfrak{p}}$，于是我们自然可以得到，局部域$K_{\mathfrak{p}}$和$F_{\mathfrak{B}}$，容易得到一个自然的同构关系$Gal((O_L/\mathfrak{B})/(O_K/\mathfrak{p})) \cong Gal(F_{\mathfrak{B}}/K_{\mathfrak{p}}) \cong D_{\mathfrak{B}}$，最后一个就是我们的分解群了，终于有那么点联系了，最后展示我们的结果图，它告诉我们研究非分歧情况相当于研究分解群和惯性群间的关系。



[16] 更严谨计算有$|d(L)| = [O_L : D(L/Q)]$，后者是将理想看成环在加法上的子群所得的指数

[17] 理想是越乘越小的，所以整除的方向与数值相反

2.4 类域论

类域论简单来说就是研究Abel扩域L/K的理论，目前我认为比较有条理的参考是这个[18]，同时推荐顺便把前作[17]看了(否则符号可能有些对不上)，看过这两个的读者可以跳过本节，至于我们则快速过一遍整体内容以便理解整个体系。根据K为整体域或局部域的不同，我们可以将研究分为“整体类域论”和“局部类域论”，由之前的讨论可知，整体域通过赋值的完备化可以得到局部域，换言之，整体域的素点将两部分联系了起来，我们先来引入联系两者的桥梁。

定义 2.21. 设K是整体域，V是K的所有素点的集合，对任意素点$v \in V$，记K_v为v的完备化和O_v为K_v对应的赋值环。我们称$A_K = \{(a_v)_{v\in V} \in \prod_{v\in V} K_v | a_v \in O_v\}$为$K$的**阿代尔环**(*adéle ring*，又叫赋值向量环)，称$A_K^\times = \{(a_v)_{v\in V} \in \prod_{v\in V} K_v^\times | a_v \in O_v^\times\}$为$K$的**伊代尔群**(*idéle ring*)。我们把$A_K \cap K$的元称为**主阿代尔的**(*principal adéle*)，把$A_K^\times \cap K^\times$的元称为**主伊代尔的**(*principal idéle*)，令$C_K = A_K^\times / K^\times$并称其为**伊代尔类群**(*idéle class group*)。

我们很喜欢这本书[23]里的话，“阿代尔环或伊代尔群只是把局部的东西集中在一起进行观察，这样的东西令人疑惑，不知其有何重要”。这时我们注意到一个有趣的东西，就是在上面的对象中，整体域导出的是个整体，每一个赋值所导出的完备化是局部，就像它们名字所说的那样，我们如何来认识局部与整体呢？其实很简单，整体域与局部域是一对多的关系，就像是一条直线上有多个点一样，比如我们将Q看成整体域，它的所有素点是$\{2, 3, 5, ..., \infty\}$，可以形成一个整体环$Q_2 \times Q_3 \times Q_5 ... \times Q_\infty$，不过这玩意可不是阿代尔环，因为它要求元素必需落在赋值环上。另一件事是，如何将K视为A_K的子环，其实很简单，因为无论哪一个素点v，都有$K \subset K_v$，因此$a \in K$在A_K中的嵌入就是$(a, a, ...)$，有多少个分量就写多少个a。有时你可能会认为，这两个对象是从整体域到局部域的联系，但其实恰恰相反，阿代尔环或伊代尔群的作用是将局部域的性质联系到整体上去，我们之前就说过，局部域的性质更优秀也更简单，先研究局部域的类域论，再通过阿代尔环运用到整体域上，才是我们的整体思路，这与[18]的思路是一致的，至于A_K上的拓扑结构就无所谓懒得说了，我们只是一个简介而已，用不着做这么多事。

定理 2.17. 设K是整体域

*(1)*设$f(x_1, ..., x_n)$为K系数的次数不大于*2*的多项式，则$f(x_1, ..., x_n) = 0$在K中有解的充要条件是，对K的所有素点v满足$f(x_1, ..., x_n) = 0$在K_v中有解。

*(2)*设$f(x_1, ..., x_n)$为K系数的二次型，则$f(x_1, ..., x_n) = 0$在K中有非平凡解[18]的充要条件是，对K的所有素点v满足$f(x_1, ..., x_n) = 0$在K_v中有非平凡解。

上述定理被称为(二次的)Hasse原理，也叫“局部-整体原理”，其实它可以扩展，但只能扩展到一些特定的不定方程上，比如Q上的方程$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0$在R和Q_p均有解但在Q上没有解，所以不满足“局部-整体原理”，也就是说扩展不能随随便便，至于怎么扩展就读者自己去探索吧，我们只想表达从局部域研究整体域是有可能的。既然我们考虑Abel扩域，或许我们可以考虑极大Abel扩域K^{ab}/K的情况，其中K^{ab}是K的所有Abel扩域的并，它的存在性就不证了，具体的构造比较复杂，比较清楚的一个是“Q的所有Abel扩域都是分圆域的子域”，于

[18] 非平凡解即$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$以外的解

是我们可以得到$Q^{ab}=Q(e^{2\pi ix}:x\in Q)$，一般域的$K^{ab}$不太好求，我们假设它的存在并拿来应用就足够了。由无限伽罗瓦理论我们容易得到一个一一对应关系:$\{K$的有限Abel扩域$\}\rightleftarrows\{Gal(K^{ab}/K)$的开子群$\}$[19]。

在正式内容开始前，我们再引入一些概念，先是**离散赋值域**K的定义，它有几个前提条件，首先有一个非阿基米德赋值v，并且$O_K=\{x\in K|v(x)\geq 0\}$是它的赋值环，最后要满足$\mathfrak{m}=\{x\in K|v(x)>0\}$是赋值环的唯一极大素理想，它由满足$v(u)=1$的$u\in O_K$生成$\mathfrak{m}=(u)$，此时我们可以定义出唯一**剩余域**$O_K/\mathfrak{m}$，并把$v$称为$K$的一个**离散赋值**。很容易发现$Q_p$就是离散赋值域，$Z_p$是它的赋值环，剩余域是$F_p$；$k((x))$也是离散赋值域，$k[[x]]$是它的赋值环，剩余域是$k$。如果$A$是其分式域某个离散赋值的赋值环，则称$A$是一个**离散赋值环**，并且剩余域直接由分式域给出。对于某些域而言，非离散的非阿基米德赋值是存在的，而且与素理想有着密切关系，可以试着回想一下我们之前是如何讨论一般整体域的素点的，但值得注意的是非阿基米德赋值导出的局部域都是离散赋值域，换言之排除R和C后所有局部域可以视为离散赋值域，但反过来就不一定了。对于离散赋值域的扩张E/K，如果满足$[E:K]=[O_E/\mathfrak{q}:O_K/\mathfrak{p}]$($\mathfrak{q}$和$\mathfrak{p}$分别是$O_E$和$O_K$的唯一素理想)，则称其为**非分歧扩张**[20]。接下来我们设K是完备离散赋值域(等价于非阿基米德局部域)，F是它的剩余域，我们容易得到一个简单的对应关系：$\{K$的有限非分歧扩张$\}\rightleftarrows\{F$的有限扩张$\}$[21]。非分歧扩张有传递性，我们自然可以得到K的**极大非分歧扩张**K^{ur}，它是K的所有非分歧扩张的并，一个简单的性质是$K^{ur}\subset K^{ab}$。实际上，如果有了充分的代数数论准备，只要用两个主定理就能概括所有类域论的内容了，类域论的核心学习内容可能是证明，但对我们来说好像没什么必要就是了，先是局部类域论的主定理。

定理 2.18. *设K是局部域*

(1)存在唯一满足下面(i)(ii)的连续群同态$\rho_K:K^\times\to Gal(K^{ab}/K)$

*(i)设L为K的有限Abel扩域，则ρ_K诱导出同构$K^\times/N_{L/K}(L^\times)\cong Gal(L/K)$，其中$N_{L/K}$是***范映射***，与之前迹映射$T_{L/K}$的定义类似*

(ii)若K是以有限域F_q为剩余域的完备离散赋值域(就是排除了R和C的情况)，设v_K是相应的离散赋值，$v_{ab}:Gal(K^{ab}/K)\to Gal(F_q^{ab}/F_q)$由复合映射$Gal(K^{ab}/K)\to Gal(K^{ur}/K)\cong Gal(F_q^{ab}/F_q)$给出，前者是限制映射后者是可以证明的定理，$\rho_{F_q}:Z\to Gal(F_q^{ab}/F_q)$是一个可以被证明唯一存在的定理[22]给出的对应，则有$v_{ab}\circ\rho_K=\rho_{F_q}\circ v_K$。

(2)设U是$Gal(K^{ab}/K)$开子群，则$Gal(K^{ab}/K)$的开子群集$\to K^\times$的有限指数子群集,$U\mapsto\rho_K^{-1}(U)$是满单射(即一一对应)。

我们把定理给出的唯一映射称为(局部域的)**Artin映射**，类似地我们还有整体域的Artin映射，它构成了整体类域论的内容。

定理 2.19. *设K是整体域*

(1)存在唯一的连续群同态$\rho_K:C_K\to Gal(K^{ab}/K)$使得对$K$的所有素点$v$有$v_{ab}\circ\rho_{K_v}=i\circ v_K$。其中$v_{ab}:Gal(K_v^{ab}/K_v)\to Gal(K^{ab}/K)$是限制映射，$\rho_{K_v}:K_v^\times\to Gal(K_v^{ab}/K_v)$由局部类域论给出，$i:K_v^\times\to C_K$是由自然嵌入$K_v^\times\to A_K^\times$导出的嵌入映射。

[19]无限伽罗瓦群存在Krull拓扑结构，开集对应的就是开子群，它与有限扩张对应。还需要注意在Krull拓扑中，开子群一定是闭子群，与中间域对应的也是闭子群

[20]注意不可分扩张和非分歧扩张是不一样的

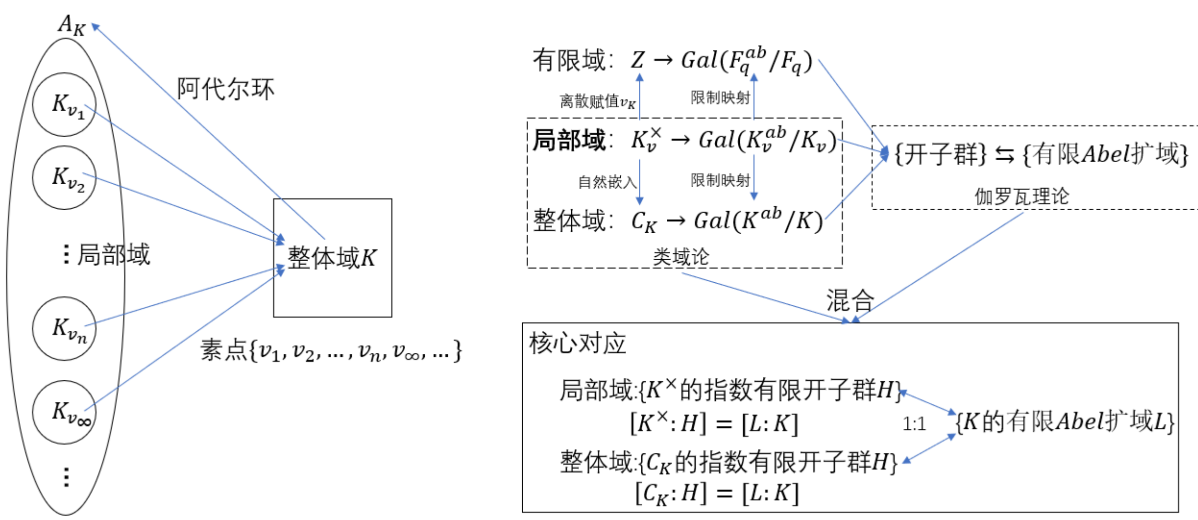
[21]有些作者喜欢将“有限可分扩张”作为后半部分，但实际上此时F一定是有限域，故一定可分

[22]此处的一一对应是:$\{F_q$的有限Abel扩域$\}\rightleftarrows\{Gal(F_q^{ab}/F_q)$的开子群$\}$

(2)设L为K的有限Abel扩域，则ρ_K诱导出同构$C_K/N_{L/K}(C_L)\cong Gal(L/K)$。范映射$N_{L/K}: C_L\to C_K$可以由$N_{L/K}: A_L^\times\to A_K^\times,(a_w)_w\mapsto(\prod_{w|v}N_{L_w/K_v}(a_w))_v$自然导出($w|v$表示$w$是素点$v$导出的素点[23])。

(3)设U是$Gal(K^{ab}/K)$开子群，则$Gal(K^{ab}/K)$的开子群集$\to C_K$的有限指数开子群集,$U\mapsto\rho_K^{-1}(U)$是满单射(即一一对应)。

其实在类域论中还有很多内容，像群的上同调、Brauer群、希尔伯特类域、分裂理论、射线理想类群等，但大多情况下它们都是为证明主定理服务的，虽然自己也能生出不少分支来，但对于我们的主题不痛不痒，放在一边也是没关系的。类域论的主定理，实际建立了域扩域的伽罗瓦群与一些特殊对象的关系，而伽罗瓦理论给出了域扩张和其伽罗瓦群的关系，如果两者联系到一起，我们其实相当于借助伽罗瓦群来把Abel扩张和某类特殊对象建立了联系，我们用一张图将上述内容整合起来。



单纯地学一个对应看起来没什么用，但应用并具体起来就不一样了，比如证明多项式运用根式可解与可解群间的对应关系，核心内容就是伽罗瓦理论中伽罗瓦扩张和正规子群的一一对应关系，而“群的结构比域稍微简单”，因此通过群来判断会比域更简单一些，数学证明的核心就是简化问题，将一个复杂的判断去除不必要因素从而得到一个简单的判定。局部域虽然是起始，但整体域包含的信息显然更多一些，因此我们就整体域来讨论一下，我们之前很关心的分歧问题是如何在C_K中表现出来的，我们直接用定理来代替讨论。

定理 2.20. 设K是整体域，L为K的有限Abel扩张，H为整体类域论给出的C_K的指数有限子群，v是K的一个素点，O_v是对应的赋值环，定义复合映射$\theta: K_v^\times\to C_K\to C_K/H$，则

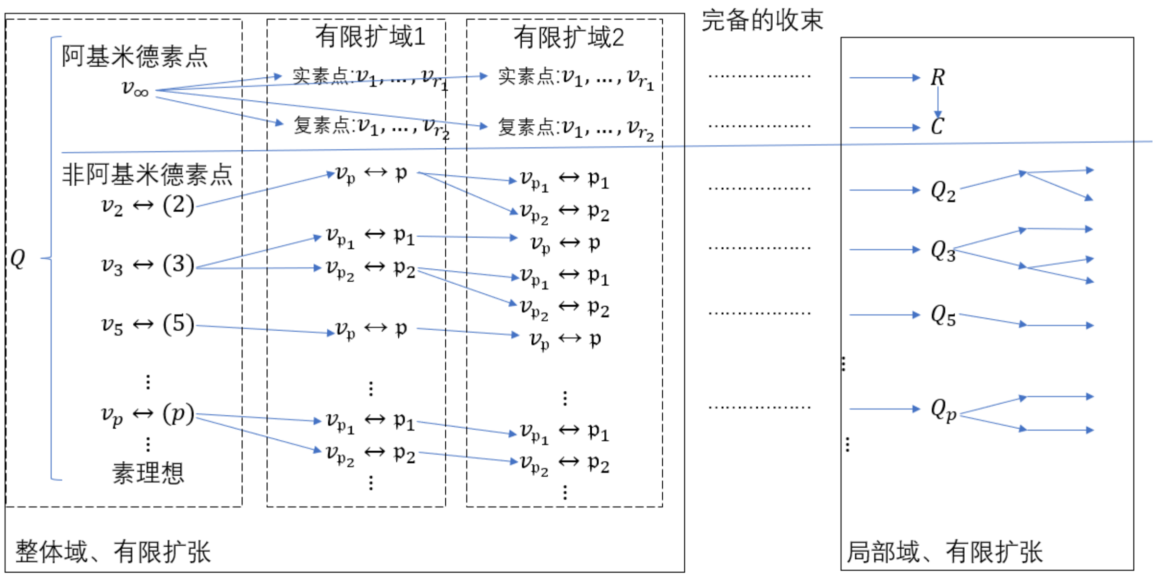
(1)v在L中完全分解当且仅当$\theta(K_v^\times)=\{e\}$

(2)若v为非阿基米德素点则，v在L上非分歧当且仅当$\theta(O_v^\times)=\{e\}$

(3)若v为非阿基米德素点且在L上非分歧，又设π_v是K_v的素元。由类域论同构$C_K/L\cong Gal(L/K)$，可以得到$\theta(\pi_v)\in C_K/L$的对应元素是$Frob_v\in Gal(L/K)$。

[23]此处请回忆一个素点是如何通过在扩域中导出新素点的，一般是一对多的关系，并且与分解出的素理想密切相关

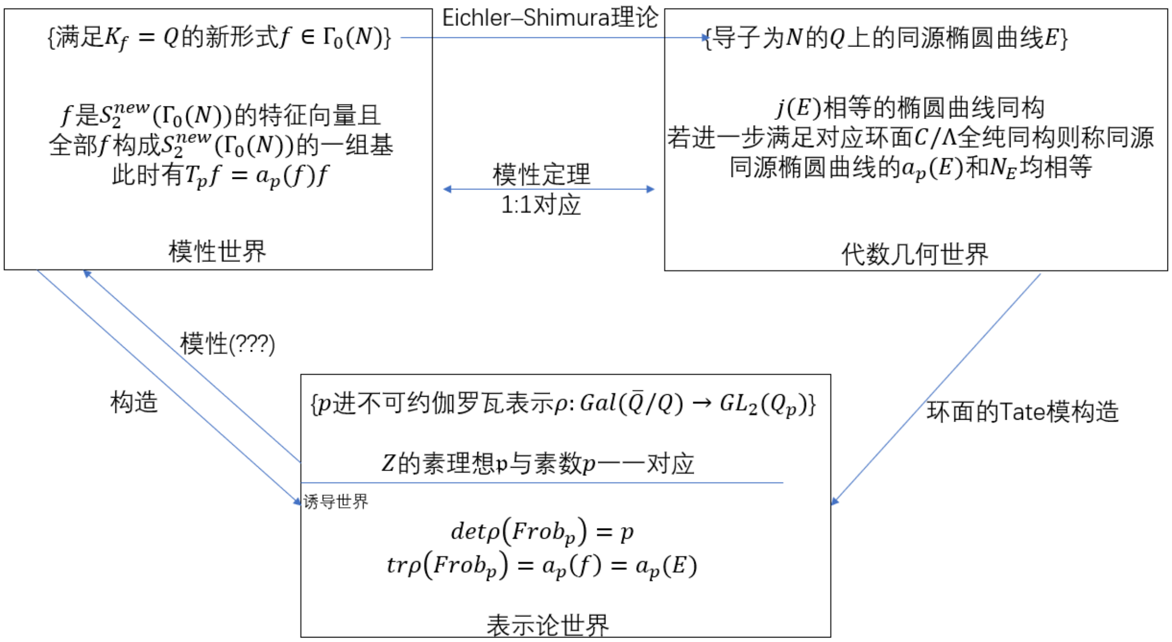
首先你会想到的第一个问题是，素理想的分歧怎么都变成了素点，虽然特征非零域我们没有讨论过，但从数域的讨论我们可以知道，素理想和非阿基米德素点是存在一一对应的，最明显的例子就是老生常谈的$Z = O_Q$了，它的素理想为$\{(2), (3), (5), ..., (p), ...\}$，而相应的非阿基米德素点为$\{v_2, v_3, v_5, ..., v_p, ...\}$。那么(1)为什么没有要求非阿基米德素点，实际上，排除对应关系的话，阿基米德素点的完全分解有另一种定义，设扩张L/K，v是K的阿基米德素点，如果v在L上导出的素点的个数等于$[L : K]$的话，则称v在L中**完全分解**。上述的对应关系，我们可以拿下面的图来说明。



我们可以看到，素点的导出和素理想的分解几乎是同步进行的，当然这不是类域论的内容，它对所有的有限扩域都是成立的，从这里我们还能看到，在非阿基米德域扩张中，局部域和整体域几乎同时在进行着扩张行为，这也决定了它与阿基米德域存在的本质区别，具体内容查看前面的内容。另外，我们还要知道一点，当域还是整体域的时候具有同一性，不论哪一个素点下的元素是可以互相对应的，但是一旦它进行了完备化，就会分裂出一系列完全不同的局部域，各局部域之间就存在了相应的差异，所以我们认为局部域确实应该属于整体域的一部分。

2.5 模性定理回顾

我们终于可以开始进入朗兰兹纲领的一角了，有关模性定理(Modularity Theorem)的具体内容讨论，请参考我B站空间`https://space.bilibili.com/1528719466`中有关费马大定理证明讨论部分的系列视频，在此我来稍微总结一下。



我们可以看到，这实际上就是朗兰兹纲领的一个缩影，直接占据了下面的一个铁三角，我们来讨论一下它们与L函数之间的关系。对于新形式f来说，它可以对任意的自然数$n > 0$定义出傅里叶展开系数$a_n(f)$，我们可以将其嵌入到一个级数中$L(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$，我们称其为新形式$f$的**L函数**，类似地对于椭圆曲线$E$而言，我们也可以定义出普遍的系数$a_n(E)$和相应的L函数$L(s,E)$，而模性定理实际上还说明了，对于一一对应的$f$和$E$有$L(s,f) = L(s,E)$。显然将L函数定义出来没啥意义，我们需要说明它的级数是否收敛，函数是否解析，解析性又是否可以延拓到整个复平面，否则又有哪些极点，这样事情的证明在代数几何和表示论上是不好完成的，但在模性世界是有可能的，因为模性世界的$L(s,f)$是由一个复变函数导出来的，同时我们还能找出相应的变换，它就是**Mellin变换**$\mathcal{M}(f)(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x)dx$，我们可以证明$f$的Mellin变换就是$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,f)$，还有像函数方程等更多的性质就不讲了。此时你就会发现，为什么往往在纲领中的表示论和代数几何都是往模性靠拢？像表示的模性、椭圆曲线的模性之类的，因为它的L函数具有解析上的可证明性，模性才是整个纲领中的大头，如果它们的L函数都变成了模性世界的L函数就可以少了很多东西。此时我们可以稍稍就此来简单说一下纲领，在代数几何世界A、表示论世界B、模性世界C中，我们想要建立的是三者的一一对应关系，理论上应该有6个才对，但实际上我们可以完全不要$A \to C$和$C \to A$，只需建立剩下的4个关系，我们自然就有$A \to B \to C$和$C \to B \to A$，这也是证明椭圆曲线上模性定理的基本思想，我们其实主要证明的还是椭圆曲线导出的表示的模性。当然这主要还是要根据我们不知道什么来考虑，比如我们唯一清楚知道的只有$A \to B$，而志村簇的上同调实际可以给出部分的$C \to A$，以此深入的话就能得到$C \to B$了，换言之就是抛弃$C \to B$来探讨$C \to A$，但不论如何，我们都必须完全证明其中的4条线才行，因为$A \to B$已知，我们只需探讨三条线即可，根据经验我们倾向与选择$B \to C$、$C \to B$和$B \to A$，第一个我们将在本节互反性(Reciprocity)内完成说明，第二个连同表示论自身的猜想将在函子性(Functoriality)内完成说明，第三个连同$A \to B$和$C \to A$将在几何的(Geometric)内完成说明。

2.6 自守表示

在模性世界中，上面的尖形式，或者是更一般的自守形式，都还是不能满足数学家的欲望，他们想要探讨更一般的存在——自守表示，其中有两本好的参考书。一本是Jayce R. Getz和Heekyoung Hahn的《An Introduction to Automorphic Representations with a view toward Trace Formulae》，另一本是Yiannis Sakellaridis的《Introduction to automorphic representations》，虽然后一本只是草稿，但从其总结性的语言中也可以窥见理论的一角，接下来让我们来好好地探究一下它。

在介绍自守表示之前，我们先来认识一个重要的概念，**约化群**(Reductive group)，其定义十分的复杂，如果你不想去理解的话，就简单地把约化群G视为GL_n(一般线性群)、SL_n(幺模群)、O_n(正交群)、SO_n(特殊正交群)、Sp_{2n}(辛群)之类的典型群的集合即可，如$G(R)$就是$GL_n(R)$、$SL_n(R)$之类的总称。如果你不想看我的初略内容介绍，可以看**线性代数群**(Linear Algebraic Groups)相关的书籍，约化群就是它的一个重要特例，至于这部分内容你想跳就跳，接下来介绍严格定义。我们不打算从范畴论的角度来定义线性代数群，因为如果写出来应该是这样的，$\mathbf{Alg}_k \xrightarrow{G} \mathbf{Grp} \xrightarrow{forget} \mathbf{Set}$，此处分别是k-代数范畴、群范畴和集合论范畴，$G$是k-群函子、$forget$是遗忘函子，两者复合形成一个k-函子$G^{\mathbf{Set}}$，如果$G^{\mathbf{Set}}$是仿射的(affine)，则称$G$是一个仿射代数群(affine algebraic group)，也可以叫做线性代数群，他俩本质是同一个东西，但涉及概念太多，不适合放在简介性的文章里，但不论如何，还是要简单地回顾一下**古典**代数几何的内容。

代数几何最开始就是假设一个代数闭域k，即域k中所有多项式的根都落在k内。接着给出两个重要的符号，设$T \subset k[x_1, ..., x_n]$，则记$Z(T) = \{P \in k^n | f(P) = 0, \forall f \in T\}$；类似地，设$Y \subset k^n$，则记$I(Y) = \{f \in k[x_1, ..., x_n] | f(P) = 0, \forall P \in Y\}$。显然两个记号具有一定的对应关系，我们自然要考虑$I(Z(T))$和$Z(I(Y))$了，先引入一个定义。

定义 2.22. *设R是交换幺环，I是R的理想，定义I的***根***(radical)为$\sqrt{I} = \{a \in R | a^n \in I, \exists n > 0\}$。若$\sqrt{I} = I$，则称$I$是一个***根理想***(radical ideal)*[24]。

此时我们马上可以得到一个简单的定理。

定理 2.21. *(1)对于每个理想$T \subset k[x_1, ..., x_n]$，有$I(Z(T)) = \sqrt{T}$*

(2)对于每个子集$Y \subset k^n$，有$Z(I(Y)) = \overline{Y}$(Y的代数闭包)

此处我们得到了点集(对应几何图形)和理想(用于定义点集的多项式组)间的对应关系，但它不够深入，我们将进一步给更深层次的对应。

定义 2.23. *(1)对于子集$Y \subset k^n$，若存在$T \subset k[x_1, ..., x_n]$使得$Y = Z(T)$，则称$Y$为***代数集**

*(2)定义代数集在k^n中的补集为开集。则开集的有限交是开集、开集的任意并是开集、空集和全空间是开集。换言之，这些开集构成k^n的一个拓扑，我们称其为***Zariski拓扑**。*另外，我们也把代数集称为k^n中的闭集*

*(3)若拓扑空间X的子集Y可以表示成两个真闭子集的并，则称Y是可约的，否则称之为***不可约的***(irreducible)*

[24]有些人喜欢把I的根称为I的根理想，又或者I是某个理想的根则称其为根理想，都只是叫法的问题罢了，能够读懂符号就足够了

*(4)*我们把k^n的不可约闭子集叫做**仿射代数簇***(affine algebraic variety)*，可以简称为仿射簇*(affine variety)*。

通过对点集的进一步区分，我们可以得到重要的对应。

定理 2.22. 在k^n的代数集和$k[x_1,...,x_n]$的根理想之间存在一一对应：$Y \mapsto I(Y)$和$I \mapsto Z(I)$。并且，代数集不可约当且仅当其对应的理想是素理想。

此时我们研究几何(不可约代数集)，则相当于研究代数(素理想)，这就是顾名思义的“代数几何”，接下来我们将专注于环$A_n = k[x_1,...,x_n]$。设$V \subset k^n$是代数集，则可以得到相应的理想$I(V) \subset A_n$，我们可以得到商环$k[V] = A_n/I(V)$，并称其为V的**坐标环**(coordinate ring)。我们来定义“k-代数”，它是代数几何的另一个表现，也是之前在范畴中出现的那个。

定义 2.24. *(1)*设R是交换幺环，M是加法$Abel$群，定义映射$R\times M \to M$为$(a,x) \mapsto ax$。若$\forall a,b,1 \in R, x,y \in M$有$a(x+y) = ax+ay$、$(a+b)x = ax+bx$、$(ab)x = a(bx)$、$1x = x$，则称$M$是一个***R*-模**[25]

*(2)*域F上的F-模称为F上的**线性空间**

*(3)*设K是交换幺环，A是一个幺环且是一个K-模[26]，且$\forall x,y \in A, a \in K$有$(ax)y = x(ay) = a(xy)$，则称$A$是一个***K*-代数***(K-algebra)*[27]。

由于需要，我们再不厌其烦地引入一点有关环的概念，如果读者十分熟悉交换代数的话，就可以简单地跳过了。

定义 2.25. *(1)*对于环R的一个元a(或理想I)，如果存在自然数n使得$a^n = 0$(或$I^n = 0$)，则称a(或I)为R的**幂零元***(nilpotent element)*(或**幂零理想***(nilpotent ideal)*)

*(2)*如果环R没有非零的幂零元，即$\forall a \in R, a^n = 0 \Leftrightarrow a = 0$，则称$R$为**约化环***(reduced ring)*

*(3)*称一个K-代数A是**约化的***(reduced)*，如果A是一个约化环

*(4)*称一个K-代数A是**有限生成的***(finitely generated)*，如果A同构于A_n关于某个理想I的商环，即$A \cong K[x_1,...,x_n]/I$。

值得注意的是称K-代数A是**有限的**(finite)，如果A是有限生成的K-模，有限K-代数一定是有限生成K-代数，但反之不一定成立。接着，我们来建立坐标环和K-代数之间的对应关系。

定理 2.23. *(1)*商环R/I是约化的当且仅当I是根理想

(2)k^n中的每个代数集都可以唯一地表示为有限个不相交的仿射簇的并

*(3)*设$V \subset k^n$是代数集，则坐标环$k[V]$是一个有限生成的约化k-代数。反之，若A是一个有限生成的约化k-代数，则存在一个代数集X使得$k[X] = A$

*(4)*设$V \subset k^n$是仿射簇，则坐标环$k[V]$是一个有限生成k-代数且是个整环。反之，若A是一个有限生成k-代数且是个整环，则存在一个代数簇X使得$k[X] = A$。

我们定义了一系列的对象，并看到了“代数集-理想-k代数”的一条对应链，我们下一步要讨论的自然是态射了。

[25]对于非交换环，可以定义左R-模和右R-模，而此处的R-模相当于两者的合并，此时给出$xa = ax$

[26]此处有三个运算，A自己的加法和乘法，还有与K形成的数乘，K-模则由A的加法和A与K的数乘组成

[27]值得注意的是，K-代数和代数K理论不是一个东西，也没有太大关系

定义 2.26. *(1)我们把仿射簇的开子集称为*__拟仿射簇__*。对于拟仿射簇$Y \subset k^n$，我们考虑函数$f: Y \to k$，如果在点$P \in Y$处，存在开领域$U(P \in U \subset Y)$和多项式$g, h \in A_n$，使得h在U上处处非零且$f = g/h$，则称f在点P处*__正则__*。如果f在Y的每个点均正则，则称f在Y上*__正则__

*(2)设X和Y是两个仿射簇，如果$\varphi: X \to Y$是连续映射(拓扑意义上)，且对每个开集$V \subset Y$和正则函数$f: V \to k$，函数$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \to k$是正则的，则称$\varphi$是$X$到$Y$的*__态射__*(morphism)*

*(3)设X和Y是两个仿射簇，如果存在态射$\varphi : X \to Y$和$\phi : Y \to X$使得$\phi \circ \varphi = id_X$、$\varphi \circ \phi = id_Y$，则称$X$与$Y$*__同构__*(isomorphism)*[28]

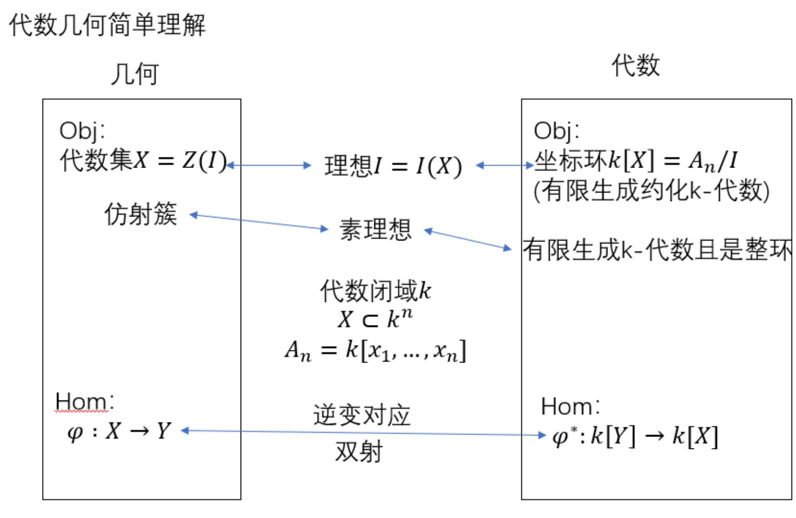
*(4)两个K-代数间的*__态射__*指的是K-线性环同态；两个K-代数间的*__同构__*指的是K-线性环同构。这里环同态$f: A \to B$的*__K-线性__*指的是$\forall x \in A, a \in K, f(ax) = af(x)$，换言之，它们作为$K$-模也是一个同态。*

显然仿射簇自身态射和同构的定义十分奇怪而繁琐，但K-代数的态射和同构的定义就相对纯粹了，结合之前所讨论的关系对应，其在态射上也可以对应起来。

定理 2.24. *(1)一个k上仿射簇间的态射$\varphi : X \to Y$可以诱导出一个k-代数间的态射$\varphi^* : k[Y] \to k[X], f \mapsto f \circ \varphi$*

(2)k上仿射簇X和Y同构，当且仅当k-代数$k[X]$和$k[Y]$同构

(3)k上代数集范畴和有限生成约化k-代数范畴是逆变等价的[29]。



至于射影相关，其实本质上与仿射没太大差别，就不讨论了，为了遵循现代的术语，接下来我们**以"仿射(代数)簇"来称呼代数集，并以"不可约仿射(代数)簇"来称呼仿射簇**。

定义 2.27. *(1)设仿射代数簇G，如果G还是一个群且群运算(乘法$G \times G \to G, (g, h) \mapsto gh$和逆元$G \to G, g \mapsto g^{-1}$)是仿射代数簇间的态射，则称$G$是一个*__线性代数群__*(linear algebraic group)*

*(2)对于线性代数群间的映射$\varphi : G_1 \to G_2$，如果其同时是仿射代数簇之间的态射和群之间的同态，则称其为线性代数群间的*__态射__。

[28]id_X和id_Y分别表示X和Y上的恒等态射，此处同构定义来自于范畴论中的方法

[29]逆变等价是因为态射对应对象反过来了，我们只需理解"代数几何"中，真正的代数指的是"有限生成约化k-代数"，而之前的理想其实并不能构成范畴上的等价，所以我们主要还是考虑坐标环

我们来介绍几个重要的线性代数群，它们都以域k为基础。

1. 域k的加法是一个群$G(k,+)$，定义仿射簇为k，对应的素理想为零理想$I=(0)$，相应的坐标环为$k[G]=k[x]$。我们把G称为**加法群**(additive group)，并记为$\mathbf{G}_a$
2. 域k的乘法是一个群$G(k^{\times},*)$，定义仿射集为$\{(x,y)\in k^2|xy=1\}$，对应的理想为$I=(xy-1)\subset k[x,y]$，相应的坐标环为$k[G]=k[x,y]/I\cong k[x,x^{-1}]$。我们把$G$称为**乘法群**(multiplicative group)，并记为$\mathbf{G}_m$
3. 接着是一般线性群$GL_n=\{A\in k^{n\times n}|det(A)\neq 0\}$，定义仿射集为$\{(A,y)\in k^{n\times n}\times k|det(A)y=1\}$，对应的理想为$I=(det(a_{ij})y-1)$，相应的坐标环为$k[GL_n]=k[a_{ij},y|1\leq i,j\leq n]/I$，[30]$k[GL_n]\cong k[a_{ij}|1\leq i,j\leq n]_{det(a_{ij})}$，最后再定义$GL_1=\mathbf{G}_m$。

有了上述几个特殊的线性代数群，我们有如下重要定理。

定理 2.25. *若G是一个线性代数群，则存在n使得G作为一个闭子群嵌入到GL_n中，即G同构于GL_n的一个闭子群。*

乘法群作为一般线性群定义的一部分，自然可以嵌入进去，而加法群则有

$$\mathbf{G}_a\to GL_2, c\mapsto\begin{pmatrix}1&c\\0&1\end{pmatrix}$$

上述的一般性定理，反过来也是成立的，即GL_n的任意闭子群都有线性代数群的结构，因此以后我们记线性代数群为$G\leq GL_n$，来表示它的这个重要特性。GL_n作为典型群，学数学的应该熟的不能再熟了，但我们还是稍微介绍一下吧，我们先从它的子群着手。

先是一些特殊样式的群，可逆上三角矩阵群$T_n=\{(a_{ij})\in GL_n|a_{ij}=0,i>j\}$、上三角单位矩阵群$U_n=\{(a_{ij})\in T_n|a_{ii}=1,1\leq i\leq n\}$、对角可逆矩阵群$D_n=\{diag(a_1,...,a_n)\in GL_n|a_i\neq 0,1\leq i\leq n\}$，它们都是$GL_n$的闭子群，自然也是线性代数群。然后是一些特殊性质的群，特殊线性群$SL_n=\{(a_{ij})\in k^{n\times n}|det(a_{ij})=1\}$、正交群$O_n=\{A\in GL_n|A^TK_nA=K_n\}$、辛群$Sp_{2n}=\{A\in GL_{2n}|A^TJ_{2n}A=J_{2n}\}$，其中几个特殊矩阵的定义为$K_n=\{(a_{ij})\in GL_n|a_{ij}=1,i+j=n+1;a_{ij}=0,other\}$，$J_{2n}=\begin{pmatrix}0&K_n\\-K_n&0\end{pmatrix}$，我们的下一步是研究一些代数群的性质。

定义 2.28. *(1)若拓扑空间X的子集Y可以表示成两个不相交的非空闭子集的并，则称Y是不连通的，否则称之为**连通的**(connected)*

*(2)对于不可约仿射簇X，我们将其坐标环$k[X]$的$Kurll$维数称为X的**维数**，记作$dim(X)$*

(3)而对于一般的仿射簇X，其有不相交不可约成分的分解$X=X_1\sqcup...\sqcup X_t$，此时定义$dim(X)=max\{dim(X_i)|1\leq i\leq t\}$

由定义可知，不可约子集一定是连通子集，反之不一定，但在线性代数群又有些不同。

[30]此处有n^2+1个变量，其中n^2个a_{ij}和1个y，另外注意对应$A\mapsto(A,det(A)^{-1})$

定理 2.26. *(1)线性代数群G的不可约成分也是连通成分，换言之，线性代数群中不可约和连通是等价的*

(2)我们将线性代数群G中包含单位元$1 \in G$的不可约成分记为G^o，则G^o是G的有限指数闭正规子群(closed normal subgroup of finite index)[31]

(3)线性代数群G的任意有限指数闭子群一定包含G^o。

上述定理对于连通(或不可约)线性代数群没太大影响，主要还是告诉我们，对于不连通的线性代数群可以提取出，连通(或不可约)成分G^o来，具体应用主要有一个。

定理 2.27. *(1)$\mathbf{G}_a$、$\mathbf{G}_m$、GL_n都是连通的*

(2)线性代数群G的任意有限指数真闭子群一定不连通

(3)对于$n \geq 2$，O_n是不连通的，此时定义$SO_n = O_n^o$，则$SO_n = O_n \cap SL_n$且是连通的

(4)对于$n \geq 2$，SL_n是连通的；对于$n \geq 1$，T_n、U_n、D_n都是连通的。

由于后面的需要，我们来引进一些群的相关概念。

定义 2.29. *(1)对于群G和元素$g, h \in G$，定义它们的**换位子**(commutant)为$[g,h] = ghg^{-1}h^{-1}$，显然对于交换群而言$[g,h] = e$*

*(2)对于群G的两个子群$H, K \leq G$，定义它们的**换位子**为它们元素换位子生成的子群，即$[H,K] = \langle [h,k] \rangle, h \in H, k \in K$*

*(3)对于群G可以定义其与自身的换位子$[G,G] = \langle ghg^{-1}h^{-1} \rangle, g, h \in G$，并称其为$G$的**换位子群**或**导群**，并定义符号$G^{(0)} = G, G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$*

*(4)如果存在自然数n使得$G^{(n)} = e$，则称G为**可解群***[32]

*(5)商群$G/[G,G]$是最大的一个交换商群，称其为G的**阿贝尔化子群**，并记为$G^{ab} = G/[G,G]$*

*(6)对于群G，我们定义它的**中心**为$Z(G) = \{g \in G | ga = ag, \forall a \in G\}$。*

虽然概念比较多，但实际上只要用多了，自然就熟了，接着引出我们的定理。

定理 2.28. *(1)设H和K是线性代数群G的子群，如果K是闭连通的，则$[H,K]$是闭连通的*

(2)$dim(\mathbf{G}_a) = dim(\mathbf{G}_m) = 1$、$dim(GL_n) = n^2$、$dim(SL_n) = n^2 - 1$。

主要还是定理的前半部分，后面就只是玩玩，因为无限群的阶没什么意义，所以找了个维数来整体感知一下。接下来，我们来介绍线性代数群的**若尔当分解**(Jordan decomposition)，此时我们要换一个角度来看待群GL_n，设V是一个n维线性空间，它的自同态群表示为$End(V)$，并将其中的可逆自同态(或自同构)记为$GL(V) \subset End(V)$，则有$GL_n \cong GL(V)$，换句话说就是在选定一组基的情况下，线性空间的自同态可以表示为一个矩阵。首先注意到，$End(V)$上可以定义加法，它与矩阵加法是一致的，所以实际上$End(V)$是一个自同态环，有$End(V) \cong M_n$(其中M_n表示$n \times n$的矩阵集)，但GL_n不是，因为全零矩阵是$End(V)$作为环的加法单位元，但不可逆，在环$End(V)$中，我们让0表示全零矩阵，1表示单位矩阵，显然$End(V)$存在幂零元，但$GL(V)$中不存在。

[31]所谓有限指数，就是指数$[G:G^o]$是有限的，只有在无限群中需要这样区分

[32]可解群的原始定义是，存在一个正规子群列，使得相邻两个群的商群是交换群，两者是等价的。实际上，导群是原来群的正规子群，且它们的商群正好形成最大的交换群，也就是说导群列自己就是一个正规子群列

定义 2.30. *(1)*对于自同态$u \in End(V)$，如果$u-1$是幂零的，则称u是**幂幺的***(unipotent)*[33]。另外，$GL(V)$的元素称为幂幺的，如果它在$End(V)$中是幂幺的

*(2)*称一个自同态$u \in End(V)$是**可对角化的***(diagonalizable)*或**半单的***(semisimple)*，如果存在一组基使得$u \in D_n \subset GL_n$。

我们先给出自同态的若尔当分解，然后再看看如何转化到我们的线性代数群上。

定理 2.29. *(1)***加法分解**：对任意的$u \in End(V)$，存在唯一的$s, n \in End(V)$，使得s是半单的、n是幂零的、$a = s + n$且$sn = ns$

*(2)***乘法分解**：对任意的$g \in GL(V)$，存在唯一的$s, u \in GL(V)$，使得s是半单的、u是幂幺的并且$g = su = us$

我们的下一步是通过线性代数群到自同构群的嵌入，利用自同构群的分解来实现线性代数群的分解。

定理 2.30. 设G是线性代数群

*(1)*对任意嵌入$\rho : G \to GL_n \cong GL(V)$和元素$g \in G$，存在唯一的$g_s, g_u \in G$，满足$g = g_s g_u = g_u g_s$且$\rho(g_s)$是半单的、$\rho(g_u)$是幂幺的

*(2)*上述分解$g = g_s g_u = g_u g_s$不依赖于嵌入的选择

*(3)*如果$\varphi : G_1 \to G_2$是线性代数群间的态射，则$\varphi(g_s) = \varphi(g)_s$和$\varphi(g_u) = \varphi(g)_u$。

基于上述定理，我们可以给出线性代数群G一些特性元素。

定义 2.31. 由上述定理给出的分解$g = g_s g_u = g_u g_s$称为$g \in G$的**若尔当分解**。如果$g = g_s$则称g是**半单的**，相应地，如果$g = g_u$则称g是**幂幺的**。此时定义子群$G_u = \{g \in G | g = g_u\}$和$G_s = \{g \in G | g = g_s\}$。如果$G_u = G$则称$G$是**幂幺的**[34]。

下面是几个简单的实例，$\mathbf{G}_a$和$U_n (n \geq 2)$都是幂幺群，而$\mathbf{G}_m$和$D_n (n \geq 1)$则只有半单元，其它代数群的情况比较复杂就不讲了。有关幂幺群，我们给出两个简单的性质。

定理 2.31. *(1)*设$G \leq GL_n$是幂幺群，则存在$g \in GL_n$使得$gGg^{-1} \leq U_n$

*(2)*先定义降中心列，$G^1 = G, G^{k+1} = [G^k, G]$，如果存在$n$使得$G^n = e$则称$G$是**幂零群***(nilpotent group)*[35]。幂幺线性代数群是幂零可解群*(nilpotent solvable group)*。

此时，我们引出了可解群，那么我们就来看看“连通可解线性代数群”的结构吧，连通部分可以由之前G^o部分得到。

定理 2.32. 设子群$H, K \leq G$，如果存在$g \in G$使得$gHg^{-1} = K$则称H与K**共轭***(conjugate)*。GL_n的连通可解子群共轭于T_n的子群，进一步则同构于T_n的子群。

接下来，我们进一步到代数群中进行讨论，在此之前再给出一些群的相关概念。

---

[33]对于一般的域，幂幺不能定义为$a^n = 1$，原因的话自己思考吧，但从矩阵角度幂幺的可以认为是其特征值均为1

[34]注意，不能用$G_s = G$来定义G是半单的，它有另外的定义

[35]注意，它与环中的幂零元没什么关系

定义 2.32. *(1)设群G的子集$S \subset G$，定义它的***中心化子***(centralizer)为$C_G(S) = \{g \in G | ag = ga, \forall a \in S\}$*

*(2)设群G的子集$K \subset G$，定义它的***正规化子***(normalizer)为$N_G(K) = \{g \in G | gKg^{-1} = K\}$*

*(3)设Q是一个群，定义它的***群环***为$ZQ = \{\sum_{x \in Q} m_x x, m_x \in Z\}$，它是一个环，加法是将$Z$系数相加，对于乘法，$Z$部分正常相乘而$Q$部分则是群运算，而两个元素相乘要用多项式展开*[36]

*(4)设群Q, K，若存在同态$\theta : Q \to Aut(K), x \mapsto \theta_x$，此时我们可以定义标量乘法$Q \times K \to K, (x, a) \mapsto xa = \theta_x(a)$，则$K$是一个左$ZQ$-模。此时，我们可以定义它们的***半直和***$G = K \rtimes Q$，其元素为$(a, x) \in K \times Q$，运算为$(a, x) + (b, y) = (a + xb, xy)$，则$G$是一个群。*

定义虽然繁琐，但应用起来就简单了很多，先给出群的半直积分解定理。

定理 2.33. *设群G的正规子群H和子群K，满足$HK = G$且$H \cap K = \{e\}$，取同态$\phi : K \to Aut(H), k \mapsto (\phi_k : h \mapsto khk^{-1})$，则有$H \rtimes K \cong G$。*

为了搞清连通可解线性代数群的结构，我们再引入一些必要的构造。

定义 2.33. *(1)如果一个线性代数群同构于直积$\mathbf{G}_m \times ... \times \mathbf{G}_m$，则称其为一个***环面***(torus)*

*(2)一个线性代数群G的***特征***(character)指的是，一个线性代数群间的态射$\chi : G \to \mathbf{G}_m$，将$G$所有特征的集合记为$X(G)$*

*(3)一个线性代数群G的***逆变特征***(cocharacter)指的是，一个线性代数群间的态射$\chi : \mathbf{G}_m \to G$，将$G$所有逆变特征的集合记为$Y(G)$。*

终于到了激动人心的时刻了，不枉我们做了这么多铺垫。

定理 2.34. *(1)一维连通线性代数群，要么同构于$\mathbf{G}_a$，要么同构于$\mathbf{G}_m$*

(2)设G是线性代数群，$T \leq G$是一个环面，则$N_G(T)^o = C_G(T)^o$且$N_G(T)/C_G(T)$有限

(3)设G是连通可解线性代数群，则

(i)G_u是G的闭连通正规子群且$[G, G] \leq G_u$

(ii)G的全部极大环面互相共轭，设T是任一极大环面则$G = G_u \rtimes T$且$N_G(T) = C_G(T)$

(4)设G是连通可解线性代数群，则$G_s \subset T$且所有幂幺元素位于G的连通幂幺子群内。

想必这么多的性质，读者可能已经有点昏了，所以我们接下来引入一个强有力的定理来分解我们的线性代数群。

定理 2.35. *(1)对于线性代数群G的一个闭子群$H \leq G$有$dim(G/H) = dim(G) - dim(H)$*

(2)设H是线性代数群G的一个闭正规子群，则G/H是一个线性代数群。

我们就举个简单的应用，如中心$Z(GL_n)$是GL_n的闭正规子群，故一般射影线性群$PGL_n = GL_n/Z(GL_n)$是线性代数群，并且$dim(PGL_n) = dim(GL_n) - dim(Z(GL_n)) = n^2 - 1$。终于可以步入我们最渴求的概念了。

[36]我们给个乘法的简单例子，$2g + 3h, 3g + 4h \in ZQ$，则$(2g + 3h)(3g + 4h) = 6(gg) + 8(gh) + 9(hg) + 13(hh) \in ZQ$，其中$gg, gh, hg, hh \in Q$，注意，$Q$不一定是交换群，所以可能有$hg \neq gh$

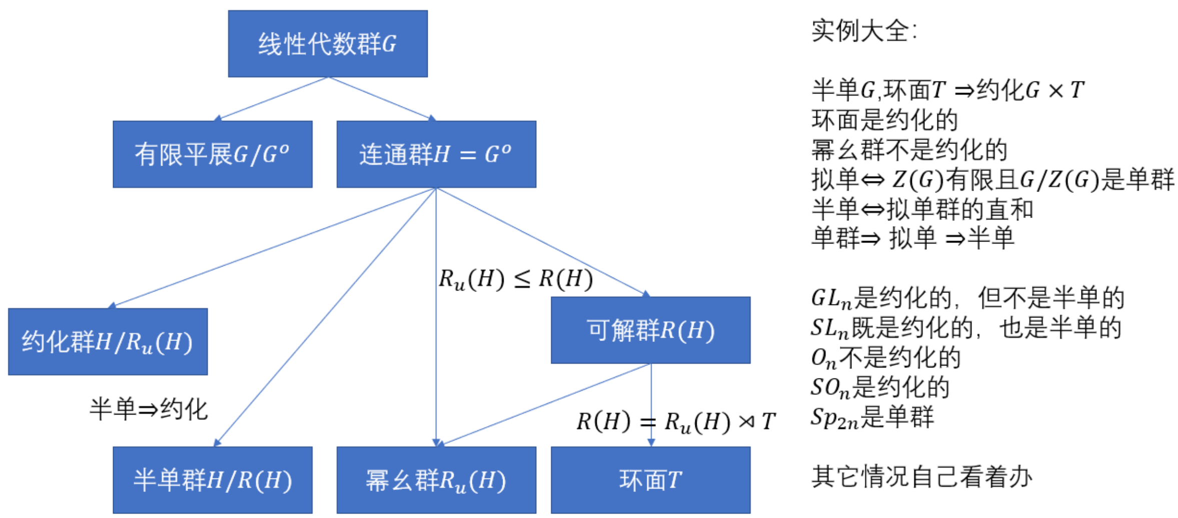
定义 2.34. *(1)线性代数群G的极大闭连通可解正规子群，叫做G的***根***(radical)，记为$R(G)$*

*(2)可以证明$R(G)_u$是G的极大闭连通幂幺正规子群，故把它称为G的***幂幺根***(unipotent radical)，记为$R_u(G)$*

*(3)如果线性代数群G有$R_u(G)=\{e\}$，则称G是***约化的***(reductive)*

*(4)如果线性代数群G是连通的且$R(G)=\{e\}$，则称G是***半单的***(semisimple)。*

对于连通群G，很容易得到$G/R(G)$是半单的且$G/R_u(G)$是约化的，下面的简图可以告诉我们线性代数群的整体构造。



你以为前置知识结束了吗？不，一个约化群的定义是不够的，接下来我们要讨论李群(Lie group)和李代数(Lie algebra)，因为我们要研究抽象物的分析性质，所以肯定绕不开这两个玩意的，它们的基本定义其实并不难。

定义 2.35. *(1)我们称M是一个n维***Lie群***(Lie group)，如果M不仅是一个群，还是一个n维光滑流形，并且群的乘法和逆元运算都是光滑映射*

*(2)设A是域F上的一个线性空间，定义乘法$A\times A\to A,(a,b)\mapsto ab$，若满足$\forall a,b,c\in A,k\in F$有$a(b+c)=ab+ac$、$(a+b)c=ac+bc$、$(ka)b=a(kb)=k(ab)$，则称$A$是$F$上的一个***代数***[37]。特别地，如果乘法还满足结合律，则称A是F上的一个***结合代数***

*(3)设$\mathfrak{g}$是域F上的一个代数，记它的乘法为$[a,b],a,b\in\mathfrak{g}$，若有$[a,a]=0(\forall a\in\mathfrak{g})$、$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0(\forall a,b,c\in\mathfrak{g})$，则称$\mathfrak{g}$为***Lie代数***(Lie algebra)*

*(4)设$\mathfrak{g},A$分别是F上Lie代数和结合代数，并且A有乘法幺元1，若有线性映射$\varphi:\mathfrak{g}\to A$使得$\varphi([x,y])=\varphi(x)\varphi(y)-\varphi(y)\varphi(x)$且$\{1,\varphi(x)|x\in\mathfrak{g}\}$生成$A$，则称$(A,\varphi)$或$A$是$\mathfrak{g}$地一个***包络代数***(enveloping algebra)*

*(5)设$\mathfrak{g}$是域F上的一个Lie代数，设(B,ι)是$\mathfrak{g}$的一个包络代数，如果对$\mathfrak{g}$的任意包络代数(A,φ)都存在唯一交换代数同态$\phi:B\to A$使得$\varphi=\phi\iota$，则称(B,ι)是$\mathfrak{g}$的一个***万有包络代数***(universal enveloping algebra)，并记为$U(\mathfrak{g})=B$。*

[37]它本质上和F-代数的定义是一样的，但F-代数可以定义在环上

首先我们可以得到，万有包络代数在同构意义下是唯一的，此时我们可以给出它的一个构造。我们先定义

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(\mathfrak{g}), T^0(\mathfrak{g}) = F, T^n(\mathfrak{g}) = \underbrace{\mathfrak{g} \otimes ... \otimes \mathfrak{g}}_{n}, n > 0$$

显然T是线性空间$\mathfrak{g}$的一个张量代数，此时我们定义J是由$\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] | x, y \in T^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\}$生成的$T$的理想，此时可以得到商环$U(\mathfrak{g}) = T/J$就是所需的。接着，我们记$\pi$为$T$到$U(\mathfrak{g})$的自然同态，因为$T^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \subset T$，因此我们定义$\iota = \pi|_{T^1(\mathfrak{g})} = \pi_{\mathfrak{g}}$，则$(U(\mathfrak{g}), \iota)$就是我们想要的万有包络代数，证明的话，自己看着办。定义其实没什么用，我们主要还是要研究一些特殊的Lie群和Lie代数。显然GL_n是非紧Lie群、SL_n是Lie群，而O_n、SO_n、Sp_{2n}都是紧Lie群，至于是实Lie群还是复Lie群取决于它们的基域，特别地，对于线性代数群G，$G(R)$是实Lie群、$G(C)$是复Lie群。接下来，我们要讨论一些有关Lie必要的东西。

定义 2.36. *设G是Lie群，则G上所有左不变向量场构成一个线性空间$\mathfrak{g}$，其乘法为向量场的李括号$[X, Y] = XY - YX$，此时$\mathfrak{g}$是一个Lie代数，称为Lie群G的Lie代数。*

这个定义多多少少需要一些流形的知识，有些抽象，而我们实际需要的是线性代数群上的Lie代数，所以我们将专注于下面的定义。

定义 2.37. *(1)设A是一个k-代数，如果k-线性映射$D : A \to A$满足$D(fg) = D(f)g + fD(g), \forall f, g \in A$，则称$D$是$A$的一个**导子**(derivation)*

(2)对k-代数A的两个导子D_1, D_2，定义乘法为$[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$，则$A$的所有导子形成一个$k$上的Lie代数，我们记其为$Der_k(A)$

(3)对线性代数群G的坐标环$k[G]$和$x \in G$，我们定义一个映射$\lambda_x : k[G] \to k[G], f \mapsto (G \to k, g \mapsto f(x^{-1}g))$。此时，我们把$Lie(G) = \{D \in Der_k(k[G]) | D\lambda_x = \lambda_x D, \forall x \in G\}$称为$G$导出的Lie代数，它是Lie代数$Der_k(A)$的子代数

*(4)设线性代数群间的态射$\varphi : G_1 \to G_2$，$1 \in G_1$是乘法群的单位元，我们定义它的**微分**(differential)为$d\varphi : T_1(G_1) \to T_{\varphi(1)}(G_2), \delta \mapsto \delta \circ \varphi^*$，其中$\varphi^* : k[G_2] \to k[G_1]$为$\varphi$的诱导态射。由于在这里切空间和Lie代数实际上是一样的，所以实际上$d\varphi$是$Lie(G_1)$到$Lie(G_2)$的Lie代数同态*

*(5)对于线性代数群的元素$x \in G$，我们定义$Int_x : G \to G, y \mapsto xyx^{-1}$，则可得到Lie代数自同构$d\ Int_x : Lie(G) \to Lie(G)$。我们记$Ad(x) = d\ Int_x, x \in G$，则有表示$Ad : G \to GL(Lie(G)), x \mapsto Ad(x)$，我们称$Ad$为$G$的**伴随表示**(adjoint representation)。*

定义虽然一大堆，但主要说了两件事，一是，线性代数群G可以导出一个Lie代数$Lie(G)$；二是，存在一个表示Ad，它是群G在$Lie(G)$作为线性空间上的表示。它们的性质就留给读者自己去研究了，接下来我们要进入正式内容，自守表示的定义了，不够还是要先引入一些概念。

定义 2.38. *(1)设(π, V)是群K的一个表示，对于每个K的不可约表示σ，我们记$V(\sigma) \le V$是所有与σ等价的V的(有限维)子表示的和[38]，即$V(\sigma) = \langle \varphi \in V : \langle \pi(k)\varphi : k \in K \rangle \cong \sigma \rangle$*

[38]有人可能会对定义感到奇怪，所以我稍微解释一下，一个表示的不可约性或者子表示的概念，都是体现在被表示的线性空间上的，所以开始我们需要假设一个整体的表示π，而它的可约性则是不清楚的，所以我们把π的子表示称为V的子表示，而且表示σ也不一定是在V上的，而$V(\sigma)$实际上就是找到σ在V上的等价部分

(2)我们定义 ***Weil*限制标量***(Weil restriction of scalars)* $Res_{k'/k}:\mathbf{AffSch}_{k'}\to\mathbf{AffSch}_k, X'(R)\mapsto X'(R\otimes_k k')$*，即是两个仿射k-概形范畴间的函子。它不是我们需要的，我们把下放到两个线性代数群间的转化，设G是域k'上的线性代数群，k'/k是有限扩张，对于一个k-代数R可以得到一个k'-代数$R\otimes_k k'$，而此转化是一个双射。换言之，给定一个k'-代数$k'[G]$，则可以得到一个相应的k-代数，此时的k-代数可以得到一个对应的k上的线性代数群，我们把它记为$Res_{k'/k}G$。*

我们来稍微说一下Weil限制标量，它主要用于线性代数群的转化，我们还是举例子来说明，$Res_{C/R}GL_1(R)=C^\times$和$Res_{C/R}GL_1(C)=C^\times\times C^\times$。先看第一种情况，$GL_1(R)$显然是$R$上的线性代数群，但由于$R\subset C$，所以$GL_1(R)$可以视为$C$上的线性代数群，容易发现$R[C^\times]\otimes_R C\cong C[GL_1(R)]$是$C$-代数同构，而$C^\times$视为$R$上的线性代数群可以通过$C$是$R$上的二维线性空间的性质来得到。对于第二种情况，也是类似地由C-代数同构$R[C^\times\times C^\times]\otimes_R C\cong C[GL_1(C)]$导出。

设F是阿基米德局部域(实际上只有R和C)两种情况，G上F上的线性代数群，我们定义$G(F)$的一个**实李代数**$\mathfrak{g}$为，$Lie(G(F))$(如果F是实的)；$Lie(Res_{F/R}G(F))$(如果F是复的)。在这种情况下，我们可以得到一个**指数映射**(exponential map)$exp:\mathfrak{g}\to G(F), D\mapsto\sum_{i=0}^{\infty}\frac{D^i}{i!}$，我们需要注意后面的算式定义，已经默认了$G(F)\le GL_n(C)$的事实，但这确实也是一个事实，而此时的Lie代数则是一般线性Lie代数$\mathfrak{gl}_n(F)\le\mathfrak{gl}_n(C)\le M_n(C)$，这样$exp$映射才能用那样的算式写出来。指数映射的重要作用是给出**Lie代数的表示**，设(π,V)是$G(F)$的一个希尔伯特空间[39]表示，此时对$\varphi\in V$和$X\in\mathfrak{g}$，我们可以定义

$$\pi(X)\varphi=\frac{d}{dt}\pi(exp(tX))\varphi|_{t=0}=\lim_{s\to0}\frac{\pi(exp(sX))\varphi-\varphi}{s}$$

当极限存在时，即可得到$\mathfrak{g}$在V上的一个表示，以后我们可以简记$X\varphi=\pi(X)\varphi$。接下来，我们要引入一个最重要的概念，即$(\mathfrak{g},K)$-模。

定义 2.39. *设$\mathfrak{g}$时一个实Lie代数，K是一个实紧Lie群，并且$Lie(K)$是$\mathfrak{g}$的子Lie代数，如果$\mathfrak{g}$和K的一个表示(π,V)满足*

(1)V是可数个有限维K-不变[40]线性空间V_i的直和，即$V=V_1\oplus...\oplus V_n$

(2)对$X\in Lie(K)$和$\varphi\in V$，$\pi(X)\varphi$存在右极限

(3)对$k\in K$和$X\in\mathfrak{g}$有$\pi(k)\pi(X)\pi(k^{-1})=\pi(Ad(k)X)$

*则称(π,V)是一个**$(\mathfrak{g},K)$-模**。设K的所有不可约等价表示的集合为$\hat{K}$，如果对任意的$\sigma\in\hat{K}, V(\sigma)$是有限维的，则称$(\pi,V)$是**容许的**(admissible)。*

这个$(\mathfrak{g},K)$-模的定义看起来很复杂，但实际上它就是一个满足一些条件的表示罢了，所以它的态射和等价则直接借用表示的即可，但我们需要注意表示的二重身份，即它同时是$\mathfrak{g}$和K的表示，在此处其实并不具体，后面运用的时候将会有更详细的说明，在此处我们先看一下三个条件说明了什么。第一个条件表明了，线性空间V其实可以是无限维的，第二个条件是因为微分运算是不能传递到子代数上去的，第三个条件则表明了这个表示与K的伴随表示的关系，所以其实K的存在主要还是要获得其中的紧性，之前我们就知道Lie群不一定是紧的。其实$(\mathfrak{g},K)$-模主要还是为了定义数域上的自守表示，如果是函数域的话就不会这么复杂了。

[39] 即要求线性空间V具有完备内积，在这种情况下才能定义测度和积分理论，以致于微分

[40] K-不变即$\pi(K)V_i=V_i$

设F是整体数域，我们将F的阿基米德素点称为**无限素点**，设V是F所有素点的集合，S是V的有限子集，我们定义符号$A_F^S=\{(x_v)_{v\in V-S}\in\prod_{v\notin S}F_v|x_v\in O_{F_v}\}$和$F_S=A_{F,S}=\prod_{v\in S}F_v$，此时可以得到$F_S\times A_F^S=A_F$，设$\infty$是$F$的所有无限素点的集合，则易得$F_\infty\times A_F^\infty=A_F$，对于$F$上约化群$G$可以很容易给出$G(F_\infty)$和$G(A_F)$之类的定义[41]。此时，我们假设$K_\infty\leq G(F_\infty)$是极大紧Lie子群，如果它是非实的则重新将其定义为$Res_{C/R}K_\infty$，接着我们定义一个实Lie代数$\mathfrak{g}=\oplus_{v\in\infty}\mathfrak{g}_v,\mathfrak{g}_v=Lie(Res_{F_v/R}G(F_v))$，定义这个实Lie代数的复化为$\mathfrak{g}^C=\mathfrak{g}\otimes_R C$，我们将复Lie代数$\mathfrak{g}^C$的万有包络代数记为$U(\mathfrak{g})$，并将$U(\mathfrak{g})$的中心记为$Z(\mathfrak{g})$。

接下来我们需要定义自守形式，它是自守表示的基础，设G是上一段所讲的约化群，根据线性代数群的基本理论存在嵌入$\iota':G\to GL_n$，此时我们可以定义嵌入

$$\iota:G\to SL_{2n},g\mapsto\begin{pmatrix}\iota'(g)&O\\O&\iota'(g^{-1})^T\end{pmatrix}$$

设$g\in G(A_F)$和F的一个素点v，我们定义$||g||_v=sup_{1\leq i,j\leq 2n}|\iota(g)_{ij}|_v$。如果$S$是$F$某些素点的集合，我们定义$||g||_S=\prod_{v\in S}||g||_v$和$||g||=||g||_\infty$。接下来终于可以定义广义上的自守形式了。

定义 2.40. *(1)设G是群，C是复数域，我们把映射$f:G\to C$称为群G上的函数。如果G是Lie群，且f是Lie群上的光滑函数，则称f是**光滑的**(smooth)，并记$C^\infty(G)$为所有光滑函数的集合*

(2)对于函数$\varphi:G(A_F)\to C$

*(i)如果存在常数$c,r\in R_{>0}$(正实数集)使得$|\varphi(g)|\leq c||g||^r$，则称$\varphi$是**缓增的**(moderate growth或者slowly increasing)*

*(ii)如果对任意$g\in G(F)$有$\varphi(gx)=\varphi(x),\forall x\in G(A_F)$，则称$\varphi$是**左G(F)-不变的**[42](left G(F)-invariant)*

*(iii)设$K^\infty\leq G(A_F^\infty)$是紧开子群并且令$K=K_\infty K^\infty$，如果$\{x\mapsto\varphi(xk),k\in K\}$生成的空间是有限维的，则称$\varphi$是**K-有限的**(K-finite)*

*(iv)如果$Z(\mathfrak{g})\varphi$是有限维的[43]，则称φ是$Z(\mathfrak{g})$**-有限的**($Z(\mathfrak{g})$-finite)*

*(3)如果一个缓增光滑函数$\varphi:G(A_F)\to C$是左G(F)-不变、K-有限、$Z(\mathfrak{g})$-有限的，则称φ是G上的一个**自守形式**(automorphic form)。所有G上的自守形式构成一个C上的线性空间，我们将其记为$\mathcal{A}(G)$。*

由于$(\mathfrak{g},K_\infty)$-模不包含非阿基米德部分，所以我们进一步定义$(\mathfrak{g},K_\infty)\times G(A_F^\infty)$**-模**也是一个表示$(\pi,V)$，它是一个$(\mathfrak{g},K_\infty)$-模的同时，$V$还是一个$G(A_F^\infty)$-模(此处为环上模的常规定义)，并且这两个模的运算可交换。如果对每个紧开子群$K^\infty\leq G(A_F^\infty)$的不变子空间$V^{K^\infty}$(即$\pi(K^\infty)V^{K^\infty}=V^{K^\infty}$)作为一个$(\mathfrak{g},K_\infty)$-模是容许的，则称它是**容许的**。它的态射定义为它两个成分各自的态射，等价由态射给出，不可约性由相应的表示给出，接下来我们要定义一个实例。

显然$\mathcal{A}=\mathcal{A}(G)$是个向量空间，我们先把表示定义出来$\pi:(\mathfrak{g},K_\infty)\times G(A_F^\infty)\times\mathcal{A}\to\mathcal{A},(X,k,g,\varphi)\mapsto(x\mapsto X\varphi(xkg))$，不过$(\pi,\mathcal{A})$不一定是一个$(\mathfrak{g},K_\infty)\times G(A_F^\infty)$-模，但是它的子商(subquotient)可以。设理想$J\leq Z(\mathfrak{g})$满足$dim_C Z(\mathfrak{g})/J$有限，我们记$\mathcal{A}(J)\subset\mathcal{A}$为所有被$J$消灭的元素[44]构成的

[41] 具体做法是，首先域F可以有$G(F)$，通过限制元素的选择就可以得到$G(O_F)$，而笛卡尔积则可以直接像$G(X\times Y)=G(X)\times G(Y)$这样得到，至于是否是代数群、紧性怎么传递之类的，读者自行去研究吧

[42] 这里需要一个映射$G(F)\times G(A_F)\to G(A_F)$，它只需将$F$作用于$A_F$的每个笛卡尔积分量即可

[43] 此处有一个Lie代数对函数的左作用，它由$Z(\mathfrak{g})$-模$C^\infty(G)$的运算得到，可以把它理解为初等数学中的求导

[44] 元素$\varphi\in\mathcal{A}$被J消灭，即$J\varphi=\{0\}$，在初等数学中可以视为求导为零的函数

子空间。可以证明这样构造出来的$\mathcal{A}(J)$就是一个$(\mathfrak{g}, K_\infty)\times G(A_F^\infty)$-模，基于这样的事实，我们最终可以给出数域$F$上的自守形式的定义了。

定义 2.41. *设G是整体数域F上的约化群，如上定义的符号，我们把同构于$\mathcal{A}$子商的一个不可约容许$(\mathfrak{g}, K_\infty)\times G(A_F^\infty)$-模，称为$G(A_F)$的一个**自守表示**(automorphic representation)。*

其实主要还是数域包括阿基米德成分才导致定义如此的复杂，如果放到整体函数域上，它只有非阿基米德素点，定义就相对简单了很多。

定义 2.42. *设G是整体函数域F上的约化群，如上定义的符号，我们把同构于$\mathcal{A}$子商的一个不可约容许的$G(A_F)$的表示，称为$G(A_F)$的一个**自守表示**(automorphic representation)。*

根据上面的定义，我们需要给出两个东西，首先是$G(A_F)$上的一个表示(π, V)称为是**容许的**，如果对任意$\sigma\in\hat{K}$有$V(\sigma)$是有限维的，此处的K是$G(A_F)$的极大子群。然后我们要定义$G(A_F)$的自守形式空间$\mathcal{A}$，对于函数$f: G(A_F)\to C$，如果它满足左$G(F)$-不变并且$\{x\mapsto f(xg)|g\in G(A_F)\}$是$G(A_F)$的一个容许表示[45]，则称$f$是一个**自守形式**。有了这两点，我们就完成了整体函数域情形下的自守表示的定义。至此，我们已经给出了所有定义在整体域F上的约化群G的自守表示，最后我们给出自守表示的分解定理。

定理 2.36. *设F是整体域，G是约化群，(π, V)是$G(A_F)$上的一个自守表示*

(1)如果F是数域，设F所有无限素点的集合为∞，则有分解$(\pi, V) = (\otimes_{v\in\infty}\pi_v, \otimes_{v\in\infty}V_v)\otimes(\otimes'_{v\notin\infty}\pi_v, \otimes'_{v\notin\infty}V_v)$，其中$(\pi_v, V_v)$，对于$v\in\infty$是一个不可约容许$(\mathfrak{g}_v, K_v)$-模，对于$v\notin\infty$是$G(F_v)$的一个不可约容许表示。

(2)如果F是函数域，则有分解$(\pi, V) = (\otimes'_v\pi_v, \otimes'_vV_v)$，其中$(\pi_v, V_v)$是$G(F_v)$的一个不可约容许表示。

上述定理其实说明了一个很简单的事实，每个自守表示都可以分解为所有素点上表示的直积，$\pi = \otimes_v\pi_v$(v遍历整体域F上的所有素点)。一般的自守表示其实并不能让配对精确化，所有就像Fermat大定理需要尖形式一样，我们需要给出自守表示“尖的”的定义。

定义 2.43. *(1)设一自守形式$\varphi\in\mathcal{A}(G)$，如果对每个G的抛物真子群的幂幺根N满足$\int_{[N]}\varphi(ng)dn = 0, \forall g\in G(A_F)$，则称$\varphi$是**尖的**(cuspidal)或一个**尖形式**(cusp form)。所有的尖形式构成一个$\mathcal{A}(G)$的子空间，我们记为$\mathcal{A}_{cusp}(G)$*

*(2)如果一个$G(A_F)$的自守表示等价于$\mathcal{A}_{cusp}(G)$的一个子商，则称这个自守表示是**尖的**(cuspidal)。*

后半部分很容易理解，前半部分却多了不少概念，其中“幂幺根”就是线性代数群中的那个“根”并且还是幂幺的，关键在于“抛物子群”，它其实也是线性代数群中的概念，只是我们没有介绍而已，所以我们马上来定义一下。

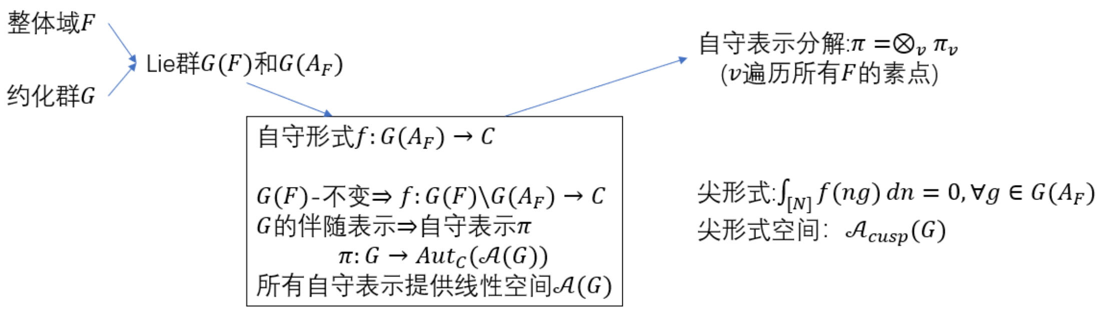
定义 2.44. *(1)对于线性代数群G，我们把它的极大闭连通可解子群称为G的**Borel子群**(Borel subgroup)*

[45]值得注意的是，这里的集合实际上是C上线性空间的自同构，而这个自同构由群$G(A_F)$的元素给出，所以它给出了一个$G(A_F)$的表示

*(2)对于线性代数群G，我们把包含G的Borel子群的闭子群称为G的**抛物子群**(parabolic subgroup)*

*(3)对于约化群G，如果它包含一个Borel子群，则称G是**拟分离的**(quasi-split)。*

它们的性质自己去研究吧，所以N其实就是G的一个子群，而积分自然就是Lie群上的积分，所以最后的关键在于$[N]$是什么，并且要求它是紧的，这样积分就能很好地得到了。对于线性代数群G，$[G]$表示它的**阿代尔商**(adelic quotient)$[G]=A_G G(F)\backslash G(A_F)$，你问我$A_G$是什么，没事当它不存在就行了[46]，这个阿代尔商放到古典的情况，其实就是同余子群的基本区域。



2.7 朗兰兹对应

在自守形式那一边，我们已经认识得差不多了，接下来我们来认识一下表示这一边。不过首先，我们需要认识韦伊群(Weil group)，然后再用韦伊群重写类域论的定理，如果在类域论上读者熟悉这方面的内容，可以跳过这部分。对于非阿基米德的局部域F，我们可以很容易的定义出Weil群，首先是之前有的一个映射$\pi: Gal(\overline{F}/F)\to Gal(\overline{k}_F/k_F)\cong Gal(F^{ur}/F)\cong\hat{Z}\cong\prod_p Z_p$，$Z$是$\hat{Z}$的子群，此时可以定义$F$的Weil群为$W_F=\pi^{-1}(Z)\subset Gal(\overline{F}/F)$。这样的定义是有局限的，我们想要的是在所有的域上定义Weil群，那么就有点复杂了。对于有限扩张E/F，我们先定义一个两个符号$Gal_E=Gal(E^{sep}/E)$和$C_E=E^\times$(F是局部域)$,A_E^\times/E^\times$(F是整体域)，此时类域论的结论可以直接表示为，一个Artin互反映射(Artin reciprocity map)$C_E\to Gal_E^{ab}$(此处需要群的上同调理论来证明一个结论：$Gal^{ab}(\overline{F}/F)\cong Gal(F^{ab}/F)$，有兴趣的读者自己去研究吧)，接下来我们将根据上述映射来给出Weil群的定义。

定义 2.45. *设F是局部域或整体域[47]，则F的**Weil群**是一个三元组$(W_F,\phi,\{Art_E\})$，其中W_F是一个拓扑群，$\phi: W_F\to Gal_F$是一个像集在值域中稠密的连续群同态，对于每个有限扩张E/F定义$Art_E: C_E\to(\phi^{-1}(Gal_E))^{ab}$是群同构。我们记$W_E=\phi^{-1}(Gal_E)$，则它们必需满足以下所有假设*

(1)对于每个有限扩张E/F，复合映射$C_E\xrightarrow{Art_E}W_E^{ab}\xrightarrow{\phi}Gal_E^{ab}$是类域论的互反映射

(2)设$w\in W_F,\sigma=\phi(w)\in Gal_F$，则对所有的$E$有$\sigma$与$Art_E$交换

(3)对所有的$E'\subset E$有包含映射与$Art_{E'}$交换

(4)映射$W_F\to\varprojlim W_{E/F}$是一个同构，其中$W_{E/F}=W_F/\overline{W_E}$(此处是拓扑闭包)。

[46]其实大多资料都喜欢写成$[G]=G(F)\backslash G(A_F)$，针对我们的积分而言其实是没影响的，而上述定义主要还是为了便于一些书籍中的研究

[47]我来帮你回忆一下，既非局部域也非整体域的域是存在的，比如代数数域$\overline{Q}$

我们就给两个简单的例子，$W_C = C^\times$和$W_R = C^\times \cup iC^\times$。通过上述定义，我们可以很容易得到约化群$GL_1$的朗兰兹对应，它就是类域论。

定理 2.37. *(1)对于整体域F，存在一个$GL_1(A_F)$的自守表示等价类集与所有连续表示$W_F \to GL_1(C)$集的一一对应*

(2)对于局部阿基米德域F，存在一个$GL_n(A_F)$的不可约容许表示等价类集与所有半单表示$W_F \to GL_n(C)$等价类集的一一对应。

此定理的前部分可以直接从Weil群上述定义得到，而后半部分是局部朗兰兹对应的特殊情况。接下来我们要定义更加一般的朗兰兹对应，不过需要先引入一些相关的符号。

定义 2.46. *(1)对于局部域F，我们定义**Weil-Deligne群**W'_F满足，当F是阿基米德域时$W'_F = W_F$；当F是非阿基米德域时$W'_F = W_F \times SL_2(C)$*

*(2)设F是非阿基米德局部域，k是F的剩余域，此时有一个群的正和列(exact sequence)$1 \to I_F \to Gal(\overline{F}/F) \to Gal(\overline{k}/k) \to 1$，我们把$I_F$称为$F$的惯性群，此时存在群的半直和分解$W_F \cong I_F \rtimes \langle Fr \rangle$，我们把$Fr$称为**(几何)Frobenius元素**[48]*

*(3)设G是一个线性代数群满足G^o是约化群，F是非阿基米德局部域[49]，一个W'_F到$G(C)$的**表示**(representation)是群同态$\rho : W'_F \to G(C)$，满足ρ在I_F的开子群上平凡、$\rho(Fr)$是半单的、$\rho|_{SL_2}$由C上的线性代数群态射$SL_2 \to G$诱导得到*

*(4)设G是F上的约化群，我们把${}^LG = \hat{G}(C) \rtimes Gal_F$称为$G$的**朗兰兹对偶群**(Langlands dual group)或**L-群**(L-group)，它给出了一个典型映射${}^LG \to Gal_F$*

*(5)对于局部域F上的约化群G，如果一个表示$\rho : W'_F \to^L G$，满足复合映射$W'_F \xrightarrow{\rho} {}^LG \to Gal_F$是Weil群定义中的$\phi$映射，则称$\rho$是一个**L-参数**(L-parameter)。如果两个L-参数在$\hat{G}(C)$中是共轭的，则称它们是**等价的**(equivalent)。*

接下来，我们来为表示定义L-函数，通过它我们可以比较轻松地将自守表示和Weil-Deligne群的表示联系起来。值得引起注意的是，自守表示要定义在整体域上，而我们上面所讨论的都是局部域，因此在我们接下来将看到的局部朗兰兹对应中，没有自守表示的身影，希望读者不要对此感到奇怪。

定义 2.47. *(1)对于Weil-Deligne群的表示可以写成一般形式$\rho : W'_F \to GL(V)$，它是完全可约的，因此有分解$V = \oplus_{n=1}^{\infty}(V_n \otimes Sym^n)$，[50]，此时我们定义$\rho$的**L-函数**为$L(s,\rho) = \prod_{n=0}^{\infty} det(1-\rho(Fr)|_{V_n^{I_F}} q^{-(s+n/2)})^{-1}$*

*(2)对于群G的表示(π, V)，我们定义V的**光滑对偶**(smooth dual)$V^\vee \subset V^* = Hom(V, C)$为$V$的对偶空间中光滑线性函数构成的子空间，此时定义群在对偶空间上的作用$G \times V^* \to V^*, (g, \lambda) \mapsto \lambda\pi(g^{-1})$，则它给出一个$V^*$上的表示$\pi^\vee$，如果$V^\vee$是它的不变子空间，我们就把$(\pi^\vee, V^\vee)$称为$(\pi, V)$的**逆步表示**(contragredient representation)*

[48] 请读者注意，这里的定义，和我们之前所给的定义其实是一样的，我们这里相当于把性质作为定义，来重温一下这些特殊的元素

[49] 值得注意的是，阿基米德情形的Weil-Deligne群就是Weil群，它的表示就是普通的群表示，换言之，我们相当于已经对所有局部域下的Weil-Deligne群定义了表示

[50] 对于张量积$V_n \otimes Sym^n$，其中Sym^n表示对称分量(通常情况下包括对称和反对称两部分)，详细请参考线性空间上的张量代数

*(3)*对于表示$\rho: W'_F \to GL(V)$和一个域的[51]非平凡加性特征$\psi: F \to C^\times$，根据*[8]*的一套复杂流程，我们能定义出**ε-因子**[52]*(ε-factor)*$\varepsilon(s,\rho,\psi)$，此时我们可以进一步定义出**γ-因子***(γ-factor)*$\gamma(s,\rho,\psi) = \frac{\varepsilon(s,\rho,\psi)L(1-s,\rho^\vee)}{L(s,\rho)}$

*(4)*设F是局部域，π和π'分别是$GL_n(F)$和$GL_m(F)$的不可约容许表示，$\psi: F \to C^\times$是一个非平凡加性特征

*(a)*如果F是非阿基米德的，参考*[7]*或*[6]*的*Lecture6*的方法[53]，可以构造出$L(s,\pi\times\pi')$、$\varepsilon(s,\pi\times\pi',\psi)$和$\gamma(s,\pi\times\pi',\psi)$

*(b)*如果F是阿基米德的，根据"定理*2.37*"给出的一一映射$\pi\mapsto\rho(\pi)$，我们令$L(s,\pi\times\pi') = L(s,\rho(\pi)\otimes\rho(\pi'))$、$\varepsilon(s,\pi\times\pi',\psi) = \varepsilon(s,\rho(\pi)\otimes\rho(\pi'),\psi)$和$\gamma(s,\pi\times\pi',\psi) = \gamma(s,\rho(\pi)\otimes\rho(\pi'),\psi)$，后面的符号由*Weil-Deligne*群情况给出。

对于GL_n情况的**局部朗兰兹对应**(local Langlands correspondence)，我们已经有了下面的定理。

定理 2.38. 对于局部域F，我们设$\Pi(GL_n)$是$GL_n(F)$所有不可约容许表示的等价类集、$\Phi(GL_n)$是所有L-参数$\rho: W'_F \to {}^L GL_n$的等价类集，则存在一个双射$rec: \Pi(GL_n) \xrightarrow{\sim} \Phi(GL_n)$满足

*(1)*如果$\pi\in\Pi(GL_1)$，则有$rec(\pi) = \pi\circ Art_F^{-1}$

*(2)*如果$\pi_1\in\Pi(GL_{n_1})$和$\pi_2\in\Pi(GL_{n_2})$，则有$L(s,\pi_1\times\pi_2) = L(s,rec(\pi_1)\otimes rec(\pi_2))$和$\varepsilon(s,\pi_1\times\pi_2,\psi) = \varepsilon(s,rec(\pi_1)\otimes rec(\pi_2),\psi)$

*(3)*如果$\pi\in\Pi(GL_n)$和$\chi\in\Pi(GL_1)$，则有$rec(\pi\otimes(\chi\circ det)) = rec(\pi)\otimes rec(\chi)$

*(4)*如果$\pi\in\Pi(GL_n)$并且π有一个中心拟特征χ，则有$det(rec(\pi)) = rec(\chi)$

*(5)*如果$\pi\in\Pi(GL_n)$，则有$rec(\pi^\vee) = rec(\pi)^\vee$。

而对于更普遍的局部朗兰兹对应，我们还处于猜想状态，当然还需要引入不少的概念，我们可以简单地把概念理解为性质的堆砌，而一个要求很多概念的对象，实际就可以认为是它有很多性质。

定义 2.48. *(1)*对于局部域F上的约化群G，如果$G(F)$的一个不可约表示π的矩阵系数落在$L^2(G(F))$*(*$G(F)$上所有平方可积函数组成的空间*)*内，则称π是***平方可积的****(square integrable)*或者***调和的****(tempered)*

*(2)*对于一个L-参数$\rho: W'_F \to {}^L G$，如果它的值域在集合论的投影映射${}^L G \to \hat{G}(C)$下的像是有界的*(*等价的说法：有紧闭包*)*，则称ρ是***调和的***

*(3)*对于线性代数群G，我们把$X^*(G) = Hom(G,\mathbf{G}_m)$的一个元素称为$G$的一个***特征****(character)*，同时把$X_*(G) = Hom(\mathbf{G}_m, G)$的一个元素称为$G$的一个***逆变特征****(cocharacter)*

*(4)*对于局部域F上的约化群G，设$|\ |$是F唯一素点对应的绝对值，我们记$G(F)^1 = \cap_{\chi\in X^*(G)} ker(|\ |\circ\chi: G(F)\to R_{>0})$，如果$G(F)$的一个不可约表示$\pi$满足$\pi|_{G(F)^1}$的矩阵系数落在$L^2(G(F)^1)$内，则称$\pi$是***基平方可积的****(essentially square integrable)*或者***基调和的****(essentially tempered)*

*(5)*连通线性代数群G的一个子群$M\le G$，如果满足商映射$G\to G/R_u(G)$在M上的限制映射$M\to G/R_u(G)$是同构，则称M是G的***Levi*子群**。

[51]此处是域论的东西，不要把它和环面的特征、还有表示的特征标给搞混了

[52]不是我不想写，只是Langlands和Deligne给的定义太繁琐了，有兴趣的读者自行去研究吧

[53]过程实在太麻烦了，还是留给有兴趣的读者去看吧

此时，终于可以引出完整的局部朗兰兹对应了，我们把它称为**局部朗兰兹猜想**(local Langlands conjecture)，可以简称为LLC。

猜想 2.1. *对于局部域F上的拟分离约化群G，设$\Pi_t(G)$是$G(F)$所有调和不可约容许表示的等价类集、$\mathit{\Phi}_t(G)$是所有调和L-参数的等价类集，则有*

(1)存在一个满射$LL:\Pi_t(G)\to\mathit{\Phi}_t(G)$，并且$\forall\rho\in\mathit{\Phi}_t(G), LL^{-1}(\rho)$是有限的，此时记$\Pi(\rho)=LL^{-1}(\rho)$

(2)如果$\Pi(\rho)$有一个元素是基调和的，则$\Pi(\rho)$内所有元素都是基调和的。并且，$\Pi(\rho)$有一个元素是基调和的当且仅当ρ的值域不在${}^LG$的真抛物子群内

(3)如果$\rho\in\mathit{\Phi}_t(G)$存在某个Levi子群$M\leq G$使得$\rho_M\in\mathit{\Phi}_t(M)$和$\rho$的像对应[54]，则$\Pi(\rho)$由$\Pi(\rho_M)$抛物诱导的表示的不可约成分构成[55]。

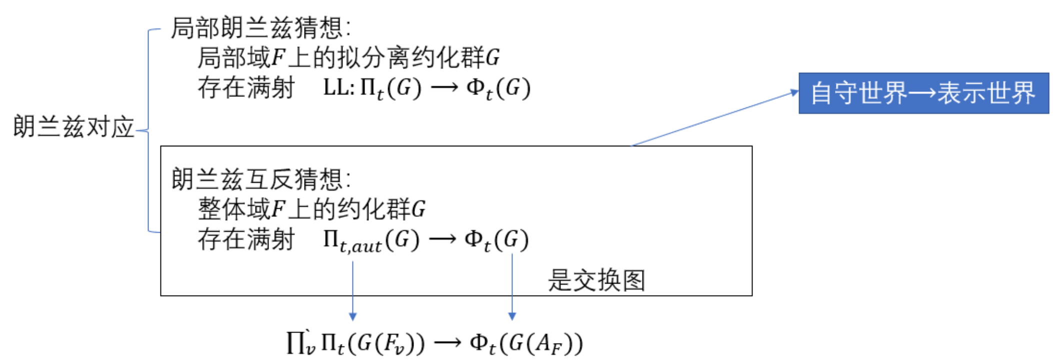
除了局部的朗兰兹对应，我们还有整体域上的朗兰兹对应，首先还是先要引入一点概念。

定义 2.49. *参考[16]和[2]这两篇文章，我们可以定义出Weil-Deligne群在整体域F上类似物**朗兰兹群**(Langlands group)$\mathcal{L}_F$，和相应F上约化群G的**L-参数**$\mathcal{L}_F\to{}^LG$*

整体域上的朗兰兹对应就是我们渴求的，模性世界B与表示论世界C之间的对应关系，并把它称为**朗兰兹互反猜想**(Langlands reciprocity conjecture)，可以简称为LRC。

猜想 2.2. *对于整体域F上的约化群G，设$\Pi_{t,aut}(G)$是$G(A_F)$的在每个素点调和的自守表示的等价类集、$\mathit{\Phi}_t(G)$是所有调和L-参数$\mathcal{L}_F\to{}^LG$的等价类集，则存在一个满射$\Pi_{t,aut}(G)\to\mathit{\Phi}_t(G)$，并且在$LLC$为真的情况下，它与映射$\prod_v'\Pi_t(G(F_v))\to\mathit{\Phi}_t(G(A_F))$交换。*

值得注意的是，朗兰兹对应给出的是模性世界B到表示世界C的对应，它没有要求单射，所以没有给出C→B的对应，虽然自守表示是一个表示，但它不一定是Weil-Deligne群或朗兰兹群的表示，如果特例化来看的话，约化群的表示和伽罗瓦群的表示还是有较大区别的。如果要思考LLC或LRC的话，其实我们有必要先把C→B构造出来，而这个构造到底如何做到，除了一些特例情况，还处在探索之中。



[54]此处要用到映射${}^LM\to{}^LG$，它由自然投影通过L-群的定义自然引出，而原来语句的意思是${}^LM\to{}^LG$的像和ρ的像一致

[55]所谓抛物诱导(parabolic induction)指的是一个函子$Ind_P^G: Rep_{sm}M(F)\to Rep_{sm}G(F)$，它将$G$的Levi子群的一个光滑表示转化为$G$的一个光滑表示，参考一些深入的表示论书籍都有这个概念；所谓不可约成分，就是一个表示的不可约子表示构成的集合

3 函子性(Functoriality)

3.1 阿廷猜想

想必对于一般性的朗兰兹对应，大家会觉得有一点过于宏大了。所以，我们来稍微讨论一下它的特殊情况，阿廷猜想(Artin conjecture)。我们先来定义表示的**阿廷L-函数**(Artin L-function)，此时的概念大家按代数数论的内容来即可。

定义 3.1. *(1)对于数域的伽罗瓦扩张K/F和一个有限维复表示$\rho: Gal(K/F) \to GL_n(C)$*

(a)对于F的某个非平凡素理想(或素点v)$\mathfrak{p}$，我们令$q = |O_F/\mathfrak{p}|$和P是满足$P \mid \mathfrak{p}$的O_K的一个素理想。当$\mathfrak{p}$在K上非分歧时，我们令$L_{\mathfrak{p}}(s,\rho) = det(1-\rho(Frob_P)q^{-s})^{-1}$；当$\mathfrak{p}$在$K$上分歧时，此时$I_P$是一个非平凡惯性群，记$V^{I_P}$是$\rho(I_P)$作用在$V$上的不变子空间，我们令$L_{\mathfrak{p}}(s,\rho) = det(1-\rho(Frob_P)|_{V^{I_P}}q^{-s})^{-1}$

(b)最后我们令$L(s,\rho) = L(s,\rho,K/F) = \prod_{\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{p}}(s,\rho)$，其中$\mathfrak{p}$遍历所有$O_F$的素理想

*(2)我们把域到$C^\times$上的连续群同态称为域的**拟特征**(quasicharacter)，并把伊代尔类群C_F的拟特征称为域的**格罗森特征**(Grossencharacter)*[56]

(3)对于域F的格罗森特征$\varphi: C_F \to C^\times$，设$\mathfrak{p}$是$O_F$的一个素理想，通过素理想对应的素点我们能得到$F$的完备域$F_{\mathfrak{p}}$，于是$\varphi$有投影分解$\varphi_{\mathfrak{p}}: F_{\mathfrak{p}}^\times \to C^\times$，设$F_{\mathfrak{p}}$的整数环为$O_{\mathfrak{p}}$

*(a)如果$\varphi_{\mathfrak{p}}$满足$\varphi_{\mathfrak{p}}|_{O_{\mathfrak{p}}^\times}$平凡，则称它是**非分歧的**(unramified)*

*(b)令$\omega_{\mathfrak{p}}$表示$O_{\mathfrak{p}}$的一个素元，我们定义$L(s,\varphi) = \prod_{\mathfrak{p}}(1-\varphi_{\mathfrak{p}}(\omega_{\mathfrak{p}})|O_F/\mathfrak{p}|^{-s})$，其中$\mathfrak{p}$遍历$O_F$的所有使得$\varphi_{\mathfrak{p}}$非分歧的素理想。我们称$L(s,\varphi)$为格罗森特征$\varphi$的**黑克L-函数**(Hecke L-function)。*

此时，我们能得到阿廷L-函数的一些简单性质。

定理 3.1. *(1)上一定义中$L_{\mathfrak{p}}(s,\rho)$与素理想P的选取无关，令$\rho(Frob_P)$的所有特征值为$\varepsilon_1,...,\varepsilon_n$，则有$L_{\mathfrak{p}}(s,\rho) = \prod_{i=1}^n(1-\varepsilon_i q^{-s})^{-1}$*

(2)$L(s,\rho_1 \oplus \rho_2) = L(s,\rho_1)L(s,\rho_2)$

(3)所有的阿廷L-函数$L(s,\rho)$在$Res(s) > 1$上收敛且全纯

(4)所有的黑克L-函数$L(s,\varphi)$除了可能在$s=1$存在一个简单极点外，在整个复平面上全纯

(5)设K/F是数域的有限伽罗瓦扩张且$Gal(K/F)$是交换群，ω是$Gal(K/F)$的一个特征[57]*，$\theta_{K/F}$为类域论中的Artin互反映射，$\varphi = \omega \circ \theta_{K/F}$是格罗森特征*

(a)$L(s,\omega,K/F) = L(s,\varphi)$

(b)若ω非平凡，则$L(s,\omega,K/F)$在整个复平面C上全纯；若ω平凡，则$L(s,\omega,K/F)$在整个复平面C上亚纯，且$s=1$是它的唯一简单极点。

上面定理的(5)部分，其实就是由类域论得到的结论，它是朗兰兹对应的特殊情况，Artin互反猜想的特殊情况。我们的目的是推广(5)的结论，其中的(b)结论可以得到所谓的**阿廷猜想**。

猜想 3.1. *对于数域的有限伽罗瓦扩张K/F和$Gal(K/F)$的一个不可约非平凡表示ρ，$L(s,\rho,K/F)$可以延拓到复数域C并且在C上全纯。*

[56]其实对于局部域，我们同样可以给出伊代尔群的定义，保持原样并限制为可逆元即可，其实就是Artin互反映射中的定义域

[57]它是表示的一维特殊情形，此时我们才有类域论的结论

通常情况下，我们不会直接证明上述结论，而是像类域论一样先证明一个互反猜想，然后把阿廷L-函数的解析性质转化为黑克L-函数。但黑克L-函数并不能够满足我们的需求，我们需要进一步定义自守L-函数，或称为朗兰兹L-函数。

定义 3.2. 首先注意到在GL_n情形的局部朗兰兹对应中，我们给出了$\rho: W'_F \to GL(V)$的L-函数$L(s,\rho)$，并且证明了GL_n在局部域下的朗兰兹对应，我们将把它推广到整体数域的情况

*(1)*设F是局部域，我们取表示的特例$\rho: W'_F \to GL_n(C)$，定义符号$W_F \to R_{>0}, w \mapsto ||w|| = |\ | \circ \theta_F \circ \pi$*(*其中$\pi: W_F \to W_F^{ab}$为到商群的自然同态，$\theta_F: F^\times \to W_F^{ab}$为局部域$F$的$Artin$互反映射，$|\ |$是局部域$F$的唯一绝对值*)*，由$\rho$我们可以自然得到$\varphi: W_F \to GL_n(C)$，我们设$X \in GL_n(C)$是满足$\varphi(w)X\varphi(w^{-1}) = ||w||X, \forall w \in W_F$的幂零元。设$q$是$F$剩余域的阶，$Fr \in W_F$满足$||Fr|| = q^{-1}$，并记$V_X^I \subset ker(X)$是$\varphi(I_F)$下的不变子空间。此时我们可以得到$L$-函数的一个等价定义$L(s,\rho) = det(1-\rho(Fr)|_{V_X^I}q^{-s})$

*(2)*在GL_n情形的局部朗兰兹对应中，设$\rho: W'_F \to GL_n(C)$对应的不可约容许表示是$\pi: GL_n(F) \to GL(V)$，此时我们定义$L(s,\pi) = L(s,\rho)$

*(3)*设F是整体域，$\pi = \otimes_v \pi_v$是$GL_n(A_F)$的一个不可约容许表示，我们定义**自守*L*-函数***(automorphic L-function)*或**朗兰兹*L*-函数***(Langlands L-function)*为$L(s,\pi) = \prod_v L(s,\pi_v)$*(*$v$遍历$F$的所有有限素点*(*非阿基米德素点*))*、$\Lambda(s,\pi) = \prod_v L(s,\pi_v)$*(*$v$遍历$F$的所有素点*)*。

目前有关朗兰兹L-函数的性质，还只有以下结论。

定理 3.2. 对于$GL_n(A_F)$的任意自守表示π，$L(s,\pi)$对足够大的$Res(s)$绝对收敛。

而朗兰兹L-函数的解析性和函数方程还处于猜想状态，但这并不影响我们给出**强阿廷猜想**(strong Artin conjecture)，或**阿廷互反猜想**(Artin reciprocity conjecture)，我们把它简称为ARC，它是朗兰兹互反猜想的更细致(约化群变小，但有更强的性质)的特例。

猜想 3.2. 设F是整体域，则对任意不可约表示$\rho: Gal(\overline{F}/F) \to GL_n(C)$，存在一个$GL_n(A_F)$的尖的自守表示$\pi$，使得在每个令$\pi$非分歧的素点上$L(s,\rho) = L(s,\pi)$。

上述猜想，给出的是π的一些符合条件的局部具有L-函数的局部对应，我们可以给出一个更精确的形式，通过每个素点上的表示来实现，但它依赖于朗兰兹函子性猜想给出的对应，这就是我们下一部分的内容了。

3.2 函子性猜想

朗兰兹函子性猜想，顾名思义，主要讨论的是L-群之间的函子转换。对于整体或局部域F上的约化群间的态射$w: G \to H$，当w的像是正规子群时，我们可以得到一个诱导全纯态射$\psi: {}^LH \to {}^LG$，比如对于包含映射$w: SL_2(R) \to GL_2(R)$我们可以得到$\psi: GL_2(C) \times Gal(C/R) \to PGL_2(C) \times Gal(C/R)$(对于可分(split)情况，半直和可以还原为笛卡儿积)。而我们函子性的目的则是，如果存在一个L-群间的全纯态射$\psi: {}^LH \to {}^LG$，(a)对于局部域，ψ能否诱导出一个对应$\Pi_t(H) \to \Pi_t(G)$(b)对于整体域，ψ能否诱导出一个自守表示到自守表示的对应。

首先，我们指出LLC(局部朗兰兹猜想)可以推出局部域的函子性猜想。假设G时拟分离的，则根据LLC部分性质，全纯态射$\psi: {}^LH \to {}^LG$可以诱导出$\psi_*: \Phi_t(H) \to \Phi_t(G)$，在LLC给出的局部朗兰兹对应，即可得到对应$\Pi_t(H) \to \Pi_t(G)$。在局部域的基础上，我们可以给出整体域的

函子性猜想，我们称其为**整体函子性猜想**(Global functoriality conjecture)，或称为**朗兰兹函子性猜想**(Langlands functoriality conjecture)，简记为LFC。但值得注意的是，由于它依赖于没有解决的猜想，所以它是一个疑问形式。

猜想 3.3. *设G和H是整体域F上的约化群并且G是拟分离的，设有一个全纯态射$\psi: {}^LH \to {}^LG$，对于F的每个素点v我们记$\psi_v: {}^LH(F_v) \to {}^LG(F_v)$为自然投影给出的限制映射，令$(\psi_v)_*: \Phi_t(H(F_v)) \to \Phi_t(G(F_v))$为根据$LLC$由$\psi_v$，此时我们让$(\psi_v)_*$还是$\Pi_t(H(F_v))$到$\Pi_t(G(F_v))$的态射，同样由$LLC$给出。对于$H(A_F)$的一个自守表示$\pi = \otimes_v \pi_v$*

(1)对每个素点v是否存在一组$\Pi_v \in (\psi_v)_*(\pi_v)$使得$\Pi = \otimes_v \Pi_v$是$G(A_F)$的一个自守表示

(2)在(1)的基础上，如果π是尖的，Π是否也是尖的。

函子性的作用在哪里呢，我们先来给一点进阶符号的定义。

定义 3.3. *(1)设F是局部域，对于一个L-参数$\rho: W_F' \to {}^LG$和一个表示$r: {}^LG \to GL(V)$可以复合得到一个表示$r \circ \rho: W_F' \to GL(V)$，此时我们可以令$L(s,\rho,r) = L(s, r\circ\rho)$、$\varepsilon(s,\rho,r,\psi) = \varepsilon(s, r\circ\rho,\psi)$和$\gamma(s,\rho,r,\psi) = \gamma(s,r\circ\rho,\psi)$*

(2)在LLC给出LL映射的情况下，设G是局部域F上的拟分离约化群，π是$G(F)$的一个不可约调和表示，我们令$L(s,\pi,r) = L(s,LL(\pi),r)$、$\varepsilon(s,\pi,r,\psi) = \varepsilon(s,LL(\pi),r,\psi)$和$\gamma(s,\pi,r,\psi) = \gamma(s,LL(\pi),r,\psi)$

(3)接着把F变成整体域，π变为自守表示，进一步定义$L(s,\pi,r) = \prod_v L(s,\pi_v,r)$和$\varepsilon(s,\pi,r) = \prod_v \varepsilon(s,\pi_v,r,\psi_v)$($v$遍历$F$的所有素点)。

此处的L-函数和之前L-函数区别在于，它将表示通过L-群分解成了两个部分，这样我们可以就可以运用LFC来对ARC进行讨论。我们回到Artin情况，来讨论表示$\rho: Gal(K/F) \to GL_n(C)$，将$\rho$与$GL_1^o = GL_1(C)$的平凡表示进行张量积，我们可以得到一个表示$r_\rho: {}^LGL_1 \to GL_n(C)$，再设一个平凡表示$1: GL_1(A_F) \to {}^LGL_1$，此时可以得到$L(s,1,r_\rho) = L(s,\rho)$，换言之我们将$\rho$分解成了两个部分。自然嵌入$GL_1 \to GL_n$可以自然得到${}^LGL_n \to {}^LGL_1$，通过LFC我们就可以得到一个$GL_n(A_F)$的对应自守表示，我们把它记为$r_\rho(1)$，于是我们可以得到另一种形式的阿廷互反猜想。

猜想 3.4. *(1)$L(s,\pi,r)$是亚纯的，且满足函数方程$L(s,\pi,r) = \varepsilon(s,\pi,r)L(1-s,\pi^\vee,r)$*

(2)设F是整体域，如果$\rho: Gal(K/F) \to GL_n(C)$是一个不可约表示，则存在$GL_n(A_F)$的一个尖的自守表示，使得对$F$所有的素点有$\pi_v = r_\rho(1)_v$。

其中的(2)就是阿廷互反猜想通过函子性猜想得到的另一种表述，最后我们来列举一些已知的Artin互反猜想成立的情况。

定理 3.3. *(1)当n=1时，阿廷互反猜想由类域论得到*

(2)如果F是数域且$Gal(K/F)$是幂零群，则阿廷互反猜想成立

(3)如果F是数域，考虑二维表示$\rho: Gal(K/F) \to GL_2(C)$

(a)如果F是全实域且ρ是奇的，则阿廷互反猜想成立

(b)如果ρ是二面的(dihedral)或四面的(tetrahedral)或八面的(octahedral)，则阿廷互反猜想成立。

对于(2)参考[1]，(3)(a)参考[3]，(3)(b)参考[15][21]。其中的(3)(a)如果$F=Q$，其实就是Serre模猜想的进一步结论，对于n=2我们主要考虑(3)(b)的分类，根据Klein的分类定理，它还差一种二十面的(icosahedral)情况，所以连$n = 2$的情形的互反猜想我们也还没有完全得证。显然别说朗兰兹对应了，连阿廷互反对应，都还处于很遥远的阶段，有关互反性和函子性还有大量的研究理论在其中，只可惜我们没法在这一小篇简介中全部引入，只能留给喜欢挖掘金子的读者了。注意到叙述ARC时我们没有限制F为数域，那是因为函数域情形已进被证明了更广泛的结论(参考[13])。

3.3 基本引理

(内容待定中)，有的时候研究自守表示可能比研究纲领本身更有意义，就比如和自守形式迹公式相关的基本引理(Fundamental lemma)，千万不要好高骛远，应该先从简单的东西开始，比如先把自守L-函数的亚纯性给证明了，又或者先把阿廷互反猜想n=2情形给证了，至少此时的自守形式研究地比较透彻。

猜想 3.5. *(1)对于每个$f^G \in C_c^\infty(G(F))$存在$f^H \in C_c^\infty(H(F))$满足，对所有有相同特征多项式的强正则半单元素γ_H和γ_G和与f^G无关的因子$\Delta(\gamma_H,\gamma_G)$有等式$\mathbf{SO}_{\gamma_H}(f^H)=\Delta(\gamma_H,\gamma_G)\mathbf{O}^{\kappa}_{\gamma_G}(f^G)$*

(2)设$1_{G(O_F)}$和$1_{H(O_F)}$分别是$G(O_F)$和$H(O_F)$的特征函数，如果$f^G=1_{G(O_F)}$、$f^H=1_{H(O_F)}$，则(1)的等式成立

(3)设$\gamma_1 \in \mathfrak{g}_1(F)$和$\gamma_2 \in \mathfrak{g}_2(F)$是有相同特征多项式的正则半单元素，则有等式$\mathbf{SO}_{\gamma_1}(1_{\mathfrak{g}_1(O_F)}) = \mathbf{SO}_{\gamma_2}(1_{\mathfrak{g}_2(O_F)})$。

上述猜想中的(2)(3)称为朗兰兹纲领的基本引理，由吴宝珠于[5]完成证明，并且还给出了因子$\Delta(\gamma_H,\gamma_G)$和$H$的具体形式。基本引理是朗兰兹对应能成立的前提，换言之，如果基本引理不成立就没有所谓的朗兰兹对应了，但事实是它成立了，这相当于给朗兰兹对应成立的可能性提供了经一步证据。自守形式中还有许多用于支撑朗兰兹对应成立的猜想，如果能证伪其中的一个的话，我们就相当于证伪了整个朗兰兹对应，这是多好的一件美逝。对的，证伪其实没什么用，它只会让进一步完善朗兰兹对应，并使其变得更加复杂。自守形式是个综合性极强的东西，对其进行深入理解，有助于我们对数学的各个领域有个感性的认真，所以学习自守形式绝对是利大于弊的。

4 几何的(Geometric)

4.1 范畴论

由于我们接下来讨论的内容涉及代数几何，那么范畴论就是必需要理解的东西了。如果读者熟悉此部分内容的话可以跳过，而我们将以最简洁地方式把范畴论的核心内容进行讨论，只要满足我们的需求就足够了。首先，我们给出**类**(class)，它就是把一堆东西放在一起且有基本

的集合运算[58]但没有任何公理。类其实就是我们中学所认识的集合，但它并不是真正的集合论，真正集合论必需要由一系列的公理来进行限制，以防止罗素悖论，所以集合其实是类的特殊情形。但集合论基本就是现代数学的基础，因此对于范畴论核心主要有两部分，一是不依赖集合论来讨论范畴，二是使范畴向集合靠拢，总之我们一步步来。

定义 4.1. *一个**范畴**(category)$\mathcal{C}$由三部分组成：**对象**(object)的一个类$obj(\mathcal{C})$、**态射**(morphism)一个类$hom(\mathcal{C})$和态射的**复合**(composition)。每个态射$\alpha \in hom(\mathcal{C})$与两个对象相关，我们分别称作**源**(source)($X \in obj(\mathcal{C})$)和**像**(target)($Y \in obj(\mathcal{C})$)，并引入记号$\alpha : X \to Y$或$X \xrightarrow{\alpha} Y$，并将所有源为X像为Y的态射组成的类记为$hom(X,Y) \subset hom(\mathcal{C})$。对任意三个对象$X, Y, Z \in obj(\mathcal{C})$，它们的复合为$hom(X,Y) \times hom(Y,Z) \to hom(X,Z), (f,g) \mapsto gf$。并且满足以下两条公理*

*　　**复合的结合性**：如果$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$，则有$h(gf) = (hg)f$*

*　　**单位态射**：对任意$X \in obj(\mathcal{C})$存在$1_X \in hom(X,X)$满足，对任意$X \xrightarrow{f} Y$有$f1_X = f = 1_Y f$*

*　　(1)如果一个范畴$\mathcal{C}$满足，对任意两个对象$X, Y \in obj(\mathcal{C})$，$hom(X,Y)$是集合。并且对任意对象$X, Y, X', Y' \in obj(\mathcal{C})$，$hom(X,Y) \cap hom(X',Y') \neq \varnothing$当且仅当$X = X'$且$Y = Y'$。则称$\mathcal{C}$是**局部小的**(locally small)*

*　　(2)如果一个范畴$\mathcal{C}$满足，$obj(\mathcal{C})$和$hom(\mathcal{C})$是集合，则称$\mathcal{C}$是**小的**(small)。*

大部分范畴都是局部小的，我们列举一些例子。集合范畴**Set**，$obj(\mathbf{Set})$为所有(集合)组成的类，$hom(\mathbf{Set})$为所有(映射)组成的类，(**Set**,集合,映射)。类似地我们有，群范畴(**Grp**,群,群同态)、阿贝尔群范畴(**AbGrp**,阿贝尔群,群同态)、拓扑范畴(**Top**,拓扑空间,连续映射)、右R模范畴($\mathbf{Mod}_R$,右R-模,R-模同态)、左R模范畴(${}_R\mathbf{Mod}$,左R-模,R-模同态)、幺环范畴(**Ring**,幺环,幺环同态)、环范畴(**Rng**,环,环同态)、线性空间范畴($\mathbf{Vec}_k$,k上的线性空间,线性映射)、k-代数范畴($\mathbf{Alg}_k$,k-代数,代数同态)。我们还可以找一个小的范畴，首先我们注意到，如果$\mathcal{C}$是只有一个对象的小的范畴，那么$hom(\mathcal{C})$以范畴的复合为运算形成一个幺半群。反过来思考，对于一个幺半群G，让G是唯一的对象，G中的每个元素通过左作用构成$hom(G,G)$的元素，复合通过群的运算实现，其就构成一个小的范畴。

定义 4.2. *(1)设$\alpha : X \to Y$。如果一个态射$\beta : Y \to X$满足$\alpha\beta = 1_Y$且$\beta\alpha = 1_X$，则称β是α的一个**逆**(inverse)。如果α的逆存在且唯一，则记其为α^{-1}，并称α是一个**同构**(isomorphism)，X和Y是**同构的**(isomorphic)，并记$X \cong Y$*

*　　(2)$\mathcal{C}$的**子范畴**(subcategory)指的是一个范畴$\mathcal{D}$，满足$obj(\mathcal{D}) \subset obj(\mathcal{C})$、$hom(\mathcal{D}) \subset hom(\mathcal{C})$、$\mathcal{D}$的复合是$\mathcal{C}$的复合、$\mathcal{D}$的单位态射是$\mathcal{C}$的单位态射、对任意$X, Y \in obj(\mathcal{D}), hom_{\mathcal{D}}(X,Y) \subset hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$*

*　　(3)设$\mathcal{D}$是$\mathcal{C}$的子范畴，如果对任意的$X, Y \in obj(\mathcal{D}), hom_{\mathcal{D}}(X,Y) = hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$，则称$\mathcal{D}$是$\mathcal{C}$的**满子范畴**(full subcategory)*

*　　(4)对一个范畴$\mathcal{C}$，我们定义它的**对偶范畴**(opposite category)$\mathcal{C}^{op}$为：$obj(\mathcal{C}^{op}) = obj(\mathcal{C})$、对任意$X, Y \in obj(\mathcal{C}), hom_{\mathcal{C}^{op}}(Y,X) = hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$。对$\alpha \in hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$我们记其对应元素为$\alpha^{op} \in hom_{\mathcal{C}^{op}}(Y,X)$，则$\mathcal{C}^{op}$复合为$\alpha^{op}\beta^{op} = (\beta\alpha)^{op}$。*

[58]基本运算：类的属于包含、类间的对应，类间对应的单满双射，但**没有交并运算和空类的概念**，因为交并运算涉及序数公理又或者空类会导致序数公理，从而会直接导致集合论

我们举个简单的例子就是，$\mathbf{AbGrp}$是$\mathbf{Grp}$的满子范畴。显然对偶范畴只是换了个表述，把X到Y的态射表述成了Y到X，并没有实质性的改变，因此显然对任一范畴$\mathcal{C}$有$(\mathcal{C}^{op})^{op}=\mathcal{C}$。接下来，我们来看两个范畴间的转化。

定义 4.3. 设$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是两个范畴

*(1)一个**(协变)函子**(covariant functor)*$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$由两个对应组成：$obj(\mathcal{C})\to obj(\mathcal{D}),X\mapsto F(X)$、$hom(\mathcal{C})\to hom(\mathcal{D}),f\mapsto F(f)$。并且满足，$\forall f\in hom_{\mathcal{C}}(X,Y),F(f)\in hom_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$、$\forall X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z,F(gf)=F(g)F(f)$、$\forall X\in obj(\mathcal{C}),F(1_X)=1_{F(X)}$

*(2)一个**逆变函子**(contravariant functor)*$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$由两个对应组成：$obj(\mathcal{C})\to obj(\mathcal{D}),X\mapsto F(X)$、$hom(\mathcal{C})\to hom(\mathcal{D}),f\mapsto F(f)$。并且满足，$\forall f\in hom_{\mathcal{C}}(X,Y),F(f)\in hom_{\mathcal{D}}(F(Y),F(X))$、$\forall X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z,F(gf)=F(f)F(g)$、$\forall X\in obj(\mathcal{C}),F(1_X)=1_{F(X)}$。

范畴好像大部分都是定义和实例组成，比如接下来我们来举一些函子的例子。函子$F:\mathbf{Ring}\to\mathbf{AbGrp}$，对象的对应是环$(R,+,\times)$到阿贝尔群$(R,+)$(环是加法阿贝尔群)，态射的对应是环同态到群同态(环同态是一个群同态)，像这样遗忘一些性质的函子，我们称其为**遗忘函子**(forgetful functor)。再举一个逆变函子$F:\mathbf{Grp}\to\mathbf{Grp}$，对象的对应是群$G$到它的导群$[G,G]$，态射的对应是群同态到同态在导群上的限制，线性空间的对偶也给出一个逆变函子$F:\mathbf{Vec}_k\to\mathbf{Vec}_k$，另外给出函子$\mathcal{C}\to\mathcal{D}$那么$\mathcal{C}^{op}\to\mathcal{D}$就是一个逆变函子。为了区分集合论的映射，我们采用$\rightsquigarrow$来表示函子的具体对应，比如$F:\mathbf{Grp}\to\mathbf{Grp},G\rightsquigarrow[G,G]$，接下来，我们进一步讨论函子间的态射。

定义 4.4. *(1)设$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是两个范畴，F和G是两个$\mathcal{C}$到$\mathcal{D}$的函子。一个**自然变换**(natural transformation)$T:F\to G$由一个对应$obj(\mathcal{C})\to hom(\mathcal{D}),A\mapsto T_A\in hom(F(A),G(A))$给出，并且满足$\forall A,B\in obj(\mathcal{C}),f\in hom_{\mathcal{C}}(A,B)$有$G(f)T_A=T_BF(f)$。如果自然变换$T:F\to G$满足对任意$A\in obj(\mathcal{C}),T_A$是一个同构，则称$T$是一个**自然同构**(natural isomorphism)*

*(2)如果$T:F\to G$是两个函子间的自然同构，则称F和G是**同构的**(isomorphic)*

*(3)令$1_{\mathcal{C}}$表示范畴到自身的恒等函子。对于两个范畴$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$，如果存在两个函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$和$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$使得$FG=1_{\mathcal{D}}$和$GF=1_{\mathcal{C}}$，则称$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是**同构的***

*(4)对于两个范畴$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$，如果存在两个函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$和$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$使得$FG$与$1_{\mathcal{D}}$同构并且$GF$与$1_{\mathcal{C}}$同构，则称$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是**等价的**(equivalent)*

*(5)将(4)中的函子变为逆变函子，则给出了**逆变等价的**(anti-equivalent)或**对偶的**(dual)。*

范畴的等价是比范畴的同构更弱的一个概念，且运用也更加广泛。$\mathbf{AbGrp}$与$\mathbf{Mod}_Z$是同构的，有限维线性空间范畴$\mathbf{FVec}_k$和有限维列空间(column space)范畴$\mathbf{FCol}_k$是等价但不同构的[59]。实际上，每个自然变换可以定义复合，并且每个函子到自身有恒等自然变换$1_F:F\to F$，此时对任意两个范畴$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$，令$\mathcal{C}$到$\mathcal{D}$的所有对象作为函子，这些函子间的自然变换作为态射，则可以形成一个范畴$[\mathcal{C},\mathcal{D}]$，称其为**函子范畴**(functor category)，并且如果$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是小的则$[\mathcal{C},\mathcal{D}]$是局部小的，此时概念成功进行了轮回，因此读者也不用担心再继续套娃定义自然变换间的态射了[60]。我们的下一步自然是讨论，函子范畴和范畴间的关系了。

[59] $\mathbf{FCol}_k$是小范畴但$\mathbf{FVec}_k$不是

[60] 另外，我们不能令范畴作为对象，函子作为态射来构成一个范畴，因为其中存在罗素悖论

定义 4.5. 对一个函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$和两个对象$X,Y\in obj(\mathcal{C})$，我们可以得到一个诱导对应$F_{X\to Y}: hom_{\mathcal{C}}(X,Y)\to hom_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$

*(1)*如果$\forall X,Y\in obj(\mathcal{C}),F_{X\to Y}$是单射*(injective)*，则称$F$是**局部单的***(faithful)*

*(2)*如果$\forall X,Y\in obj(\mathcal{C}),F_{X\to Y}$是满射*(surjective)*，则称$F$是**局部满的***(full)*

*(3)*如果$\forall X,Y\in obj(\mathcal{C}),F_{X\to Y}$是双射*(bijective)*，则称$F$是**局部双的***(fully faithful)*

*(4)*如果对任意$Y\in obj(\mathcal{D})$存在$X\in obj(\mathcal{C})$使得Y与$F(X)$同构，则称F是**稠密的***(dense)*

*(5)*如果F既是局部双的又是稠密的，则称F是**一个等价***(equivalence)*

*(6)*对应一个逆变函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，我们将$F^{op}:\mathcal{C}^{op}\to\mathcal{D}$作为(协变)函子的概念可以定义到$F$上。如果$F^{op}$是一个等价，则称$F$是**一个逆变等价***(anti-equivalence)*或**对偶***(duality)*。

上述的概念都是函子的自身性质，并且它与范畴间存在对应关系。

引理 4.1. *(1)*两个范畴$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是等价的，当且仅当存在一个等价$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$

*(2)*两个范畴$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是逆变等价的，当且仅当存在一个逆变等价$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$

*(3)*设两个范畴$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$和一个局部双的函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，则$\forall X,Y\in obj(\mathcal{C}),X\cong Y\Leftrightarrow F(X)\cong F(Y)$。

我们注意到在范畴里的态射，它只是一个符号，除非是某个具体的范畴，否则态射并不表示一个元素到一个元素的对应，而态射很明显是集合中映射概念的推广，那么我们有必要让态射具有单满双的性质，如何在范畴中进行描述，其实并不难。

定义 4.6. 设$f\in hom(A,B)$是范畴$\mathcal{C}$中的一个态射

*(1)*如果对任意态射$f,h\in hom(C,A)$有$fg=fh\Rightarrow g=h$，则称f是**一个单态射***(monomorphism)*

*(2)*如果对任意态射$f,h\in hom(B,C)$有$gf=hf\Rightarrow g=h$，则称f是**一个满态射***(epimorphism)*

*(3)*如果f既是一个单态射又是一个满态射，则称f是**一个双态射***(bimorphism)*。

它们的简单运算性质就不讲了，我就提一个重要的性质。

引理 4.2. 若态射f是一个同构，则f是一个双态射。

上述定理的逆定理不一定成立，比如环范畴Rng中，整数环到有理数环的包含态射，是一个双态射但不是一个同构。如果一个范畴$\mathcal{C}$满足每一个双态射都是同构，则$\mathcal{C}$是一个**平稳范畴**(balanced category)。**Set**、**Grp**、$\mathbf{Mod}_R$都是平稳范畴，**Rng**和**Top**不是平稳范畴。接下来，我们将借助函子理论来让范畴与集合论范畴产生联系，并引出著名的范畴论定理。

定义 4.7. 设$\mathcal{C}$是一个局部小[61]的范畴

*(1)*对每个$A\in obj(\mathcal{C})$，我们可以定义一个函子$h^A:\mathcal{C}\to\mathbf{Set},X\rightsquigarrow hom_{\mathcal{C}}(A,X)$，并且态射对应为$(f:X\to Y)\rightsquigarrow(hom_{\mathcal{C}}(A,X)\to hom_{\mathcal{C}}(A,Y),g\mapsto fg)$

*(2)*对于一个函子$F:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$，如果存在$A\in obj(\mathcal{C})$使得$F$同构于$h^A$，则称$F$是**可表达的***(representable)*或称F**被*A*表达***(represented by A)*

*(3)*对每个$\alpha\in hom_{\mathcal{C}}(B,A)$，可以定义一个自然变换$T^\alpha:h^A\to h^B$，它由$T^\alpha_X:h^A(X)\to h^B(X),g\mapsto g\alpha$给出。相应地，对每个自然变换$T:h^A\to h^B$，令$\alpha_T=T_A(1_A)\in h^B(A)$，则有$\alpha\in hom_{\mathcal{C}}(B,A)$。此处给出了，自然变换与态射的对应关系

[61]这样才能使得相应的态射类是一个集合对象

*(4)*设$F:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$是一个函子，$A\in obj(\mathcal{C})$是一个对象。对每个自然变换$T:h^A\to F$，有一个元素*(*即范畴$\mathbf{Set}$的对象*(*集合*)*的元素*)*$\alpha_T=T_A(1_A)\in F(A)$。相应地，对每个元素$a\in F(A)$，可以定义一个自然变换$T^a:h^A\to F$，它由$T^a_X:h^A(X)\to F(X),g\mapsto F(g)(a)$给出，注意到$F(g)\in hom_{\mathbf{Set}}(F(A),F(X))$，此处$f(g)(a)$表示集合论中[62]对元素$a$使用映射$F(g)$。

利用上面的记号，我们可以给出范畴论的一个重要结论**米田引理**(Yoneda Lemma)，我们记$Nat(h^A,F)$表示h^A到F的所有自然变换组成的类。

引理 4.3. *设$\mathcal{C}$是一个局部小范畴，$F:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$是一个函子，$A\in obj(C)$是一个对，则对应$Nat(h^A,F)\to F(A),T\mapsto\alpha_T$和对应$F(A)\to Nat(h^A,F),a\mapsto T^a$都是双射。*

对于米田引理和相应的符号，有对应的逆变版本就留给读者自己去探索了。这样我们就充分理解了局部小范畴与集合论之间的关系，此时我们可以利用之前的函子范畴，给出只依赖于一个范畴的更细致的函子范畴。

推论 4.1. *设$\mathcal{C}$是一个局部小范畴，我们有一个范畴$\mathcal{C}^\vee=[\mathcal{C},\mathbf{Set}]$，并且我们将它所有可表达函子构成的子范畴记为$\mathcal{C}^\vee_{rep}$*

*(1)*对任意$A,B\in obj(\mathcal{C})$，我们有一个对应的双射$Nat(h^A,h^B)\cong hom_{\mathcal{C}}(B,A)$

*(2)*特别地，存在局部满的逆变函子$\mathcal{C}\to\mathcal{C}^\vee,A\rightsquigarrow h^A$，并且$\mathcal{C}$和$\mathcal{C}^\vee_{rep}$是对偶的

*(3)*两个函子h^A和h^B是同构的，当且仅当对象A和B是同构的。

由于后面需要，我们再记一个范畴$\mathcal{C}^\wedge=[\mathcal{C}^{op},\mathbf{Set}]$。虽然范畴论远不止这些东西，比如与代数几何研究相关的阿贝尔范畴，但核心的概念和内容，我们已经讲得差不多了。

4.2 层理论

与古典代数几何建立在数域上的代数集不同，现代代数几何建立在拓扑空间的概形上，现代代数几何与古典代数几何真正研究深入的东西其实基本差不多，只是它们的理论基础不同，现代代数几何所涵盖的范围更大。在现代代数几何中，主要要给出层和概形这两个重要的概念，它的一种表述方式是传统的集合论，但它有那么一点点晦涩繁琐。既然我们将一些性质吸收到了范畴中，那么我们其实可以使用范畴论的语言，来更加简洁地给出相应的概念，并且还能定义更广泛的现代代数几何。开始之前，我们先要给出拓扑空间的推广，**格罗滕迪克拓扑**(Grothendieck Topology)，它是一种范畴上的拓扑。

定义 4.8. *(1)*对于范畴$\mathcal{C}$和对象$U\in obj(\mathcal{C})$，我们记$hom(U)=\{\alpha\in hom(\mathcal{C})|\exists A,\alpha\in hom(A,U)\}$，即所有以$U$为像的态射组成的类

*(a)*我们称$S\subset hom(U)$是U上的一个**筛子***(sieve)*，如果满足$(V\to U)\in S\Rightarrow(W\to V\to U)\in S$。显然$hom(U)$是$U$上最大的筛子

*(b)*设S是C上的一个筛子，$h\in hom(D,C)$是一个态射，我们记$S_h=\{g\in hom(D)|hg\in S\}$，则它是$D$上的一个筛子

*(2)*范畴$\mathcal{C}$上的***(*格罗滕迪克*)*拓扑**，指的是一个类$\{SCov_U\}_U$，其中U遍历整个$\in obj(\mathcal{C})$，$SCov_U$表示U上的一些筛子组成的类，并且满足以下的公理

[62]在范畴论中，只有函子(将一个对象变为另一个对象)和自然变换(将一个函子变为另一个函子)可以使用类似的记号，而态射只是一个符号不能使用类似的记号，除非是为某个具体的态射，比如集合论中的映射

GT1:$hom(U) \in SCov_U$

GT2:如果$S_1 \subset S_2 \subset hom(U)$是筛子，则$S_1 \in SCov_U \Rightarrow S_2 \in SCov_U$

GT3:设$h \in hom(U, V)$，则$S \in SCov_V \Rightarrow S_h \in SCov_U$

GT4:设S, S'是U上的两个筛子。如果$S' \in SCov_U$且$\forall h \in S', S_h \in SCov_V$，则$S \in SCov_U$。

对于定义，不要觉得麻烦，把每个条件当成一个可以用定理，然后直接把符号直接看成相应的对象即可，比如我们可以直接把范畴$\mathcal{C}$看成一个格罗滕迪克拓扑，如果我们需要相应的符号的话，就把格罗滕迪克拓扑看成$(\mathcal{C}, \{SCov_U\}_U)$，我们不打算研究这玩意，因为接下来还得给出极限的定义。首先，在集合论范畴**Set**中的一列可数对象簇$\{X_n\}_{n \in N}$可以定义反向极限$\lim_{\leftarrow} X_n$，我们将把这个定义推广到范畴上去。但我们注意到，在范畴中没有自然数集N，换言之我们需要再找一个范畴来充当指标集。

定义 4.9. 设范畴I是局部小的

*(1)*令范畴**Set**里的一个单元素集合对象为$\{pt\} \in obj(\mathbf{Set})$，定义一个逆变函子$pt_{I^\wedge} : I^{op} \to \mathbf{Set}, i \rightsquigarrow \{pt\}$。对于任一逆变函子$\beta : I^{op} \to \mathbf{Set}$，我们定义$\beta$的**投影极限***(projective limit)*$\varprojlim \beta = hom_{I^\wedge}(pt_{I^\wedge}, \beta)$

*(2)*设$\mathcal{C}$是一个局部小的范畴。对任意逆变函子$\beta : I^{op} \to \mathcal{C}$，我们定义一个逆变函子$\varprojlim \beta \in obj(\mathcal{C}^\wedge)$，并通过下面公式给出定义$\varprojlim \beta : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}, X \rightsquigarrow \varprojlim (h^X \beta)$。如果$\varprojlim \beta$对应的函子是可表达的，则称$\varprojlim \beta$是$\beta$的**投影极限**

*(3)*设$\mathcal{C}$是一个局部小的范畴。如果对任意的逆变函子$\beta : I^{op} \to \mathcal{C}$都存在投影极限，则称$\mathcal{C}$***(在I上)容许投影极限****(admits projective limits indexed by I)*。如果I是小的，则称$\mathcal{C}$***(在I上)容许小的投影极限****(admits small projective limits indexed by I)*。

由于局部小条件经常用到，所以接下来(包括后面的章节)如果不加说明，我们的所有用到的范畴都是局部小。别紧张所有的定义都是我们的武器，接下来我们直接给出层的概念。

定义 4.10. *(1)*设$\mathcal{C}$和$\mathcal{A}$是两个范畴。我们记所有$\mathcal{C}$到$\mathcal{A}$的逆变函子构成类为$PSh(\mathcal{C}, \mathcal{A}) = obj([\mathcal{C}^{op}, \mathcal{A}])$，我们把任一$\mathcal{F} \in PSh(\mathcal{C}, \mathcal{A})$称为$\mathcal{C}$到$\mathcal{A}$的一个**预层***(presheaf)*。我们进一步记$PSh(\mathcal{C}) = PSh(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$

*(2)*如果范畴$\mathcal{C}$是小的，且带有格罗滕迪克拓扑，则把它称为一个**网***(site)*。我们用X来简记这个网，并记$\mathcal{C}_X$为这个网的范畴，并且把预层中的符号变为$PSh(X, \mathcal{A}) = obj([\mathcal{C}_X^{op}, \mathcal{A}]), PSh(X) = PSh(X, \mathbf{Set})$

*(3)*设X是一个网，$\mathcal{A}$是一个容许小的投影极限的范畴。对于一个预层$\mathcal{F} \in PSh(X, \mathcal{A})$我们通过$\mathcal{F}(A) = \varprojlim_{(U \to A) \in hom(A)} \mathcal{F}(U), A \in \mathcal{C}_X^\wedge$可以得到一个逆变函子$\mathcal{F} : (\mathcal{C}_X^\wedge)^{op} \to \mathcal{A}$。如果对任意同构$A \to U, U \in \mathcal{C}_X, A \in \mathcal{C}_X^\wedge$态射$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(A)$是同构，则称$\mathcal{F}$是一个**层***(sheaf)*。我们把$X$上所有层导出的$PSh(X, \mathcal{A})$的子范畴记为$Sh(X, \mathcal{A})$，它是一个满子范畴，并记$Sh(X) = Sh(X, \mathbf{Set})$。

通常代数几何的预层是拓扑空间开集范畴$\mathbf{Op}_X$到阿贝尔群范畴的逆变函子，要求了更多的性质，但预层的主要还是为了引出层的概念，层的概念才是核心，所以我们放宽预层的条件，而只给层增加了需求的预设。定义层以后，在非范畴的代数几何中，会将拓扑空间X的层$\mathcal{F}$扩展为环拓扑空间$(X, \mathcal{O}_X)$，它才是主要的研究对象，并且当它同构于一个特殊环拓扑空

间$(Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$时称为仿射概形，而这个特殊的空间实际上就是古典代数几何中的对象用概形的语言重写一遍得到的。虽然传统的概形扩展了古典代数几何的研究对象，但不存在本质的扩展，因此在概形理论中，真正进行拓展了的研究，实际应该是对环拓扑空间的研究，而它就相当于是在研究层。为什么本节要叫做层理论，因为一旦涉及概形，实际就已经落入了古典代数几何的研究对象之中，而且实际上绝大多数使用范畴论研究代数几何的，基本都是在层这个对象的层面上，比如阿贝尔层(Abelian Sheaf)、扭层(Twisted Sheaf)之类的。所以接下来，我们来做个降级，用非范畴的语言给出概形的完整定义，从而来结束本节。

定义 4.11. 设X是一个拓扑空间

*(1)*我们定义一个范畴$\mathbf{Op}_X$，$obj(\mathbf{Op}_X)$为所有X的开集，则$obj(\mathbf{Op}_X)$在包含关系下可以构成一个偏序集，此时通过偏序关系可以诱导出$hom(\mathbf{Op}_X)$的态射为$x \to y \Leftrightarrow x \leq y$，复合由关系的传递性给出

*(2)*我们把$\mathcal{F} \in Sh(\mathbf{Op}_X, \mathbf{AbGrp})$称为拓扑空间$X$上的一个**阿贝尔群层***(sheaf of Abelian group)*

*(3)*我们把$\mathcal{F} \in Sh(\mathbf{Op}_X, \mathbf{Rng})$称为拓扑空间$X$上的一个**环层***(sheaf of ring)*

*(4)*我们把$\mathcal{F} \in Sh(\mathbf{Op}_X, \mathbf{Alg}_R)$称为拓扑空间$X$上的一个***R*-代数层***(sheaf of R-algebra)*

*(5)*对于环层$\mathcal{F}$和$x \in X$。我们定义$\mathcal{F}$在x处的**茎***(stalk)*为一个环$\mathcal{F}_x = \varinjlim_U \mathcal{F}(U)$，这个正向极限遍历$x$的所有开领域。考虑$s \in \mathcal{F}(U)$，对任意$x \in U$，我们记$s_x$是$s$在$\mathcal{F}_x$里的像，我们把$s_x$称为$s$在$x$处的**芽***(germ)*。显然映射$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x, s \mapsto s_x$是一个环同态

*(6)*如果X和它的一个环层$\mathcal{O}_X$满足$\forall x \in X$茎$\mathcal{O}_{X,x}$是一个局部环，则记$(X, \mathcal{O}_X)$并称其是一个**环拓扑空间***(ringed topological space)*

*(7)*设A是一个交换幺环，记$Spec(A)$为所有素理想的集合，则它形成一个拓扑空间，故有环拓扑空间$(Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$。我们将同构于$(Spec(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$的环拓扑空间称为**仿射概形***(affine scheme)*

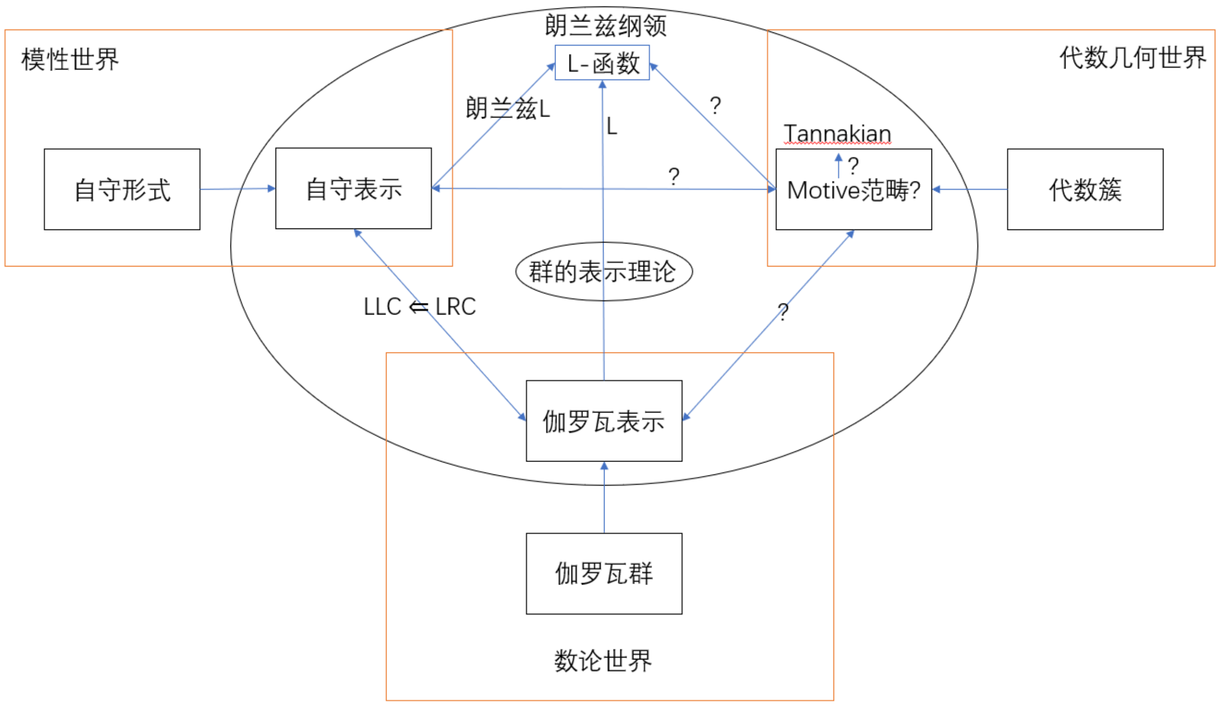
*(8)*如果一个环拓扑空间由多个仿射概形粘合*(*被开集覆盖，每个开集的上的限制是仿射概形*)*而成，则称它是一个**概形***(scheme)*。

通过定义，我们可以很容易地认识层和概形，因此对于它们的深入讨论，在简介中就没必要说了。理解概形，我们只需认识它是代数几何的一种书写语言，真正的研究还是得靠我们之前所给的古典代数几何，而我们之所以要推广，主要是为了引出我们的纲领，代数几何的预览就到此为止吧。

4.3 想要什么

几何朗兰兹或许是最麻烦的一个存在，主要还是因为现代代数几何是一个过于庞大的理论，涵盖了数学基本所有的精确理论，具体应该将什么代数几何对象作为铁三角的一部分还处于未知中，对于几何朗兰兹最广泛的看法是，Tannakian范畴和自守表示范畴的一些可能等价，从而给出的对应，但在代数几何那里还存在一些子问题，能否有是Tannakian范畴的motive范畴。但我们有几点需要知道，首先Tannakian范畴是与表示论相关的范畴但不完全是表示论范畴，它与代数几何的对象有一些联系，但它不能完全是代数几何的对象；其次，Motive范畴除了一些特例(如pure motive，Tate motive，Chow motive等)，更严格泛用的存在还处于Grothendieck的

梦里，几何朗兰兹正确的路径是首先建立一个不知是否存在的motive范畴到Tannakian范畴的嵌入，在这样性质的基础上再与其它的两个对象，自守表示和(伽罗瓦)表示产生关系；最后，我们发现不论是代数几何世界还是模性世界都是有研究表示的，表示只是一个用于连接三个世界的桥梁，所以表示论世界B必需精确为伽罗瓦表示世界，不论是Weil-Deligne群还是朗兰兹群其实都是伽罗瓦群的推广，从代数数论中可以发现，伽罗瓦群在研究中起着重要作用，换言之，世界B所代表的实际上是数论世界。



在这里推荐一个小站点`https://people.math.harvard.edu/~gaitsgde/GL/`，它收集了一些与几何朗兰兹相关的研究。在这一节中，我们将稍微介绍一下Tannakian范畴，并给出一些简单Motive范畴的构造，此处内容并不是经典的几何朗兰兹，而是探究代数几何与表示之间的联系，实际上经典看法的几何朗兰兹的是在[11]中提出的猜想，我也会在下一节介绍这种情况，读者可以自行选择观看。

定义 4.12. *设R是一个交换环*

(1)如果一个范畴$\mathcal{C}$满足对任意$M,N\in obj(\mathcal{C})$，$hom(M,N)$可以形成一个R-模并且范畴的复合是R-双线性的[63]，*则称(C)是* ***R-线性的*** *(R-linear)*

(2)设$\mathcal{C}$是一个R-线性范畴，如果在其上有一个R-双线性的[64]*函子$\otimes:\mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C},(X,Y)\rightsquigarrow X\otimes Y$满足结合律、交换律和存在单位对象*[65]*$\mathbb{I}$，则称$\mathcal{C}$是一个* ***张量范畴*** *(tensor category)*

(3)两个张量范畴间的函子F，如果满足$F(A\otimes B)=F(A)\otimes F(B)$且$F(\mathbb{I})=\mathbb{I}$，则称$F$是一个 ***张量函子*** *(tensor functor)*

[63] R-双线性，即$\forall f\in hom(X,Y),g\in hom(Y,Z),r\in R,(rg)f=g(rf)=r(gf)$，注意这里是跨模的

[64] 即对符合条件的$f\otimes g\in hom(\mathcal{C}\times\mathcal{C}),r\in R$有$(rf)\otimes g=f\otimes(rg)=r(f\otimes g)$，此处要求

[65] 注意，此处不一定构成幺半群，因为$obj(\mathcal{C})$不一定是集合，对应不一定是映射

*(4)*设一个张量范畴$\mathcal{C}$。设两个对象$X, Y \in obj(\mathcal{C})$如果函子[66]$\mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}, T \rightsquigarrow hom(T \otimes X, Y)$被$A \in obj(\mathcal{C})$表达，则记$\underline{Hom}(X, Y) = A$。如果对任意$X, Y \in obj(\mathcal{C})$都有$\underline{Hom}(X, Y)$，则有一个诱导的函子$Hom : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}, (X, Y) \rightsquigarrow \underline{Hom}(X, Y)$，并把它称为$\mathcal{C}$的**内*Hom*函子***(internal Hom functor)*

*(5)*设张量范畴$\mathcal{C}$存在内Hom函子。我们记$X \in obj(\mathcal{C})$的**对偶***(dual)*为$X^{\vee} = \underline{Hom}(X, \mathbb{I})$。如果$X = X^{\vee\vee}$，则称$X$是**自反的***(reflexiv)*

*(6)*如果一个张量范畴满足，存在内Hom函子、$\underline{Hom}(X_1, Y_1) \otimes \underline{Hom}(X_2, Y_2) = \underline{Hom}(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes Y_2)$、每个对象都是自反的，则称它是**刚性的***(rigid)*。

对于范畴而言，张量相当定义了对象的乘法，而态射的复合可以视为态射的乘法，由抽象代数的基本思想，下一步自然是考虑定义对象或态射的加法，这就是加性范畴的来源，它定义了态射的加法和对象的双积。

定义 4.13. 设$\mathcal{C}$是一个范畴

*(1)*如果对任意$X, Y \in obj(\mathcal{C})$满足，$hom(X, Y)$是阿贝尔加法群且$\forall f, f' \in hom(A, B), g, g' \in hom(B, C), (g + g')(f + f') = gf + gf' + g'f + g'f'$，则称$\mathcal{C}$是**预加性的***(preadditive)*。我们把$hom(X, Y)$的单位元称为**零态射***(zero morphism)*，并记0_{XY}

*(2)*设$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是两个预加性范畴，如果函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$满足$\forall f, g \in hom(A, B), F(f + g) = F(f) + F(g)$，则称$F$是**加性的***(additive)*

*(3)*设一个对象$T \in obj(\mathcal{C})$，如果满足对任意$A \in obj(\mathcal{C}), |hom(A, T)| = 1$，则称$T$是**终对象***(terminal object)*。设一个对象$S \in obj(\mathcal{C})$，如果满足对任意$A \in obj(\mathcal{C}), |hom(S, A)| = 1$，则称$S$是**始对象***(initial object)*。我们把既是终对象又是始对象的对象称为**零对象***(zero object)*

*(4)*对一个对象类$\{A_i\} \subset obj(\mathcal{C})$。如果存在对象$A$和一个态射类$\{\pi_i : A \to A_i\}$使得，对任意对象$B \in obj(\mathcal{C})$和一个态射类$\{f_i : B \to A_i\}$存在唯一$f \in hom(B, A)$满足$\pi_i f = f_i$*(universal,* 泛性或万有性*)*，则称(A, π_i)是A_i的**积***(product)*，并记$A = \Pi_i A_i$。如果存在对象A和一个态射类$\{\pi_i : A_i \to A\}$使得，对任意对象$B \in obj(\mathcal{C})$和一个态射类$\{f_i : A_i \to B\}$存在唯一$f \in hom(A, B)$满足$f\pi_i = f_i$，则称(A, π_i)是A_i的**余积***(coproduct)*，并记$A = \amalg_i A_i$。如果$C \in obj(\mathcal{C})$即是$\{A, B\}$的积又是$\{A, B\}$的余积，则称C是$\{A, B\}$的**双积***(biproduct)*，并记$C = A \oplus B$

*(5)*如果$\mathcal{C}$是一个预加性范畴，满足存在零对象且任意两个对象的双积存在，则称$\mathcal{C}$是**加性的***(additive)*。

如果想要一个范畴去适应代数几何，单纯的加性并不够，我们需要与同调理论适配的性质，它就构成了我们接下来要认识的阿贝尔范畴。

定义 4.14. 设$\mathcal{C}$是一个加性范畴

*(1)*对一态射$f \in hom(A, B)$。如存在$K \in obj(\mathcal{C}), \eta \in hom(K, A)$满足，$\eta$是单态射且$f\eta = 0_{KB}$、对任意$g \in hom(D, A)$如果$fg = 0_{DB}$则存在$\tau \in hom(D, K)$使得$\eta\tau = g$*(*泛性或万有性*)*，则称$\eta$是$f$的**核***(kernel)*，并记$\eta = ker(f)$

*(2)*对一态射$f \in hom(A, B)$。如存在$W \in obj(\mathcal{C}), \pi \in hom(B, W)$满足，$\pi$是满态射且$\pi f = 0_{AW}$、对任意$g \in hom(B, D)$如果$gf = 0_{AD}$则存在$\tau \in hom(W, D)$使得$\tau\pi = g$，则称$\pi$是$f$的**余核***(cokernel)*，并记$\pi = coker(f)$

[66] 由于协变函子和逆变函子存在对偶性，以后我们将它们统称为函子，并且$\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$形状的函子表示逆变函子，$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$形状的函子表示协变函子

*(3)*如果$\mathcal{C}$满足，每个态射都有核和余核、每个单态射都是核、每个满态射都是余核，则称$\mathcal{C}$是**阿贝尔的***(abelian)*或称它是一个**阿贝尔范畴***(abelian category)*。

接下来，我们来考虑阿贝尔范畴上一些函子的相关概念，并给出综合性极强的一个范畴。

定义 4.15. 设$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是两个阿贝尔范畴

*(1)*如果态射$f \in hom(A, B)$可以唯一分解为$f = me$且m是单态射、e是满态射，则称m是f的**像**，并记$m = im(f)$；称e是f的**余像**，并记$e = coim(f)$

*(2)*设一个态射序列$\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-2} \cdots$，如果满足$\forall n, im(f_{n+1}) = ker(f_n)$，则称这个态射序列是一个**正合列***(exact sequence)*

*(3)*如果一个加性函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$满足，对任意$\mathcal{C}$中的一个正和列$\cdots \to X_i \to X_{i-1} \cdots$，$\cdots \to F(X_i) \to F(X_{i-1}) \cdots$也是一个正和列，则称$F$是**正合的***(exact)*

*(4)*设$\mathcal{C}$是R上的一个张量范畴。如果$\mathbf{C}$是阿贝尔的并且张量函子$\otimes$是加性的，则称它是**阿贝尔张量范畴***(abelian tensor category)*。特别地，如果还有$R = hom(\mathbb{I}, \mathbb{I})$，则称$\mathcal{C}$是一个**阿贝尔张量性范畴***(abelian tensorial category)*。

请不要对上述定义(4)中的$R = hom(\mathbb{I}, \mathbb{I})$，因为一个R-模如果是自由模的话，就有可能和原来的环相等。接下来，我们终于可以引入核心的概念了。

定义 4.16. 设F是域，$\mathcal{C}$是F上的刚性阿贝尔张量性范畴。令F'是F的代数扩张，则$\mathcal{C}$上的**纤维函子***(fibre functor)*指的是一个正和局部单的张量范畴$\omega : \mathcal{C} \to \mathbf{FVec}_{F'}$。如果$\mathcal{C}$存在一个纤维函子，则称$\mathcal{C}$是一个***Tannakian*范畴**。如果纤维函子中$F' = F$则称这个*Tannakian*范畴是**中性的***(neutral)*。

我们记$\mathbf{Rep}_F(G)$是由群G在域F上的有限维表示构成的范畴。接下来，我们将说明Tannakian范畴和仿射群概形上的表示是等价的。不过，我们要稍微讲一下仿射群概形，其实仿射群概形就是我们之前所讲的线性代数群放到仿射概形的情况，当然有些作者也喜欢把概形的情况叫做仿射代数群，虽然叫法千奇百怪，但只要我们抓住其核心，即一个代数几何对象上具有群结构并且群运算是态射，然后随便找个自己喜欢的叫法就行了。

定义 4.17. 设k是交换幺诺特环

*(1)*对任一k-代数A，我们得到一个函子$Spec(A) : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Set}, R \rightsquigarrow hom_k(A, R)$。如果一个函子$X : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Alg}_k$具有$Spec(A)$的形式，则称$X$是一个**仿射概形**，把所有仿射概形构成的范畴记为$\mathbf{AffSch}_k$，它是$[Alg_k, Alg_k]$的一个子范畴

*(2)*如果一个函子$G : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Grp}$*(*通过遗忘函子可以将$\mathbf{Grp}$转化为$\mathbf{Set}$，从而可以使用表示的概念*)*被一个$k$-代数表示，则称$G$是一个**仿射群概形**，把所有仿射群概形构成的范畴记为$\mathbf{AffGrpSch}_k$，它是$\mathbf{AffSch}_k$的子范畴

*(3)*一个仿射概形$G = Spec(A)$，如果满足A是有限生成的，则称它是**有限型的***(of finite type)*。如果k是域，则把有限型的仿射群概形称为**仿射代数群***(ane algebraic group)*

*(4)*设R是一个k-代数，V是一个有限秩的自由k-模，我们定义$GL_V(R) = \{R\text{-模自同态}V \otimes_k R \to V \otimes_k R\}$，显然$R$是可写可不写的，如果$V = k^n$则有同构$GL_V \cong GL_n$。显然其中$GL_V$和$GL_n$都是典型的仿射群概形。仿射群概形$G$的**表示***(representation)*是一个态射$G \to GL_V$，如果$V = k^n$则可以得到对应的之前的表示范畴$\mathbf{Rep_k(G)}$，它是$\mathbf{AffGrpSch}_k$的子范畴。

上述概念和传统下的定义差不多，接下来进入我们的核心内容。通常情况下，我们会将上面的k加强为域，于是V就是一个线性空间，于是必然有同构$V = k^n$，于是我们将自然得到遗忘函子$\omega : \mathbf{Rep_k(G)} \to \mathbf{FVec}_k$，它可以诱导出一个函子$\underline{Aut}^{\otimes}(\omega) : \mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Alg}_k, A \rightsquigarrow Aut(\omega \otimes_k A)$(此处$\omega \otimes_k A, X \rightsquigarrow \omega(X) \otimes_k A$是一个张量函子，将一个张量范畴(可以特指$\mathbf{Rep_k(G)}$)对象对应到$\mathbf{FVec}_A$子范畴的对象)，它是一个仿射群概形，我们记$\mathbf{G}(\omega) = \underline{Aut}^{\otimes}(\omega)$，此时我们将得到核心定理。

定理 4.1. *对于一个域F上的中性Tannakian范畴$\mathcal{C}$，设它的纤维函子为ω，则$\mathcal{C} \to \mathbf{Rep}_F(\mathbf{G}(\omega))$是一个范畴的等价。*

介绍完中性Tannakian范畴，接下来我们来探究如何构造经典的motive范畴。想必除了仿射簇和仿射概形，大家可能还听到射影簇和射影概形，但我们用的多的终究还是仿射，虽然从簇的观点来看，仿射簇和射影有那么一些区别，但从概形观点来看，其实它们都只是概形的一种，我们来稍微定义一下吧。

定义 4.18. *(1)设k是代数闭域，则其上的$n+1$维线性空间为k^{n+1}，定义关系$a \sim b, a, b \in k^{n+1}$为$\exists \lambda \in k - \{0\}, a = \lambda b$，则$\sim$是一个等价关系，于是可以定义商集$Pk^n = k^{n+1}/\sim$，并把它称为域$k$上的$n$维**射影空间**(projective space)。它与线性空间有类似的性质，可以定义代数集(要将多项式限制为齐次元素)，有Zariski拓扑，此时我们把Pk^n中的不可约代数集称为**射影代数簇**(projective algebraic variety)，可以简称为射影簇(projective variety)，我们把射影簇的开子集称为**拟射影簇**。同样为了遵循现代术语，接下来我们**以“射影(代数)簇”来称呼代数集，并以“不可约射影(代数)簇”来称呼射影簇**，射影簇其实可以看成具有一定限制的仿射簇的子对象，因此我们通常**代数簇来称呼仿射簇的粘合***

*(2)对于交换幺环R，通过R-模我们可以类似地定义PR^n，其上可以定义拓扑(Zariski拓扑)和环(坐标环)层，更能形成一个环拓扑空间，总之它是一个概形。于是我们把同构于PR^n闭子概形的一个概形称为**射影概形**(projective scheme)*

*(3)注意到概形的定义不依赖于簇，依赖于一个交换幺环R，因此我们可以从概形来定义簇，相当于特例化。我们把域(交换幺环加强为域)k上的有限型的仿射概形称为域k上的**仿射簇**，我把域k上的射影概形称为**射影簇**，被有限个域k上的仿射簇的仿射开子概形覆盖的称为k上的**代数簇**。此处定义将k加强为代数闭包，则与古典代数几何遵循现代术语的定义是一样的，即此处的簇可能是可约的。另外，仿射簇相当于代数簇的闭子簇情况，射影簇相当于代数簇的开子簇情况*[67]

(4)设A是一个局部诺特环，它的唯一素理想为$\mathfrak{m}$，剩余域为k，则可得到$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$是$k$上的线性空间。如果此时有$dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = dim(A)$，[68]*则称$A$是**正则的**(regular)*

(5)对一个概形X，如果它是有限个仿射开子集[69]*X_i的并并且$\mathcal{O}_X(X_i)$是*[70]*诺特环，则称**诺特的**(Noetherian)。如果X的每一点都有一个诺特的开领域*[71]*，则称X是**局部诺特的**(locally Noetherian)。容易证明，代数闭域上的代数簇都是局部诺特的*

[67] 虽然看起来射影簇自身不带有有限的条件，但实际上它被包含在了射影概形的定义中

[68] 前一个是线性空间维数，后一个是Krull维数

[69] 仿射开子集U，指X的开子集，并且满足$(U, \mathcal{O}_X|_U)$是仿射概形

[70] 此处是函子的对应，可以理解为把环层升级为诺特环层

[71] 同样指函子对应到一个诺特环

*(6)*对一个局部诺特概形X，如果对一点$x \in X$茎$\mathcal{O}_{X,x}$是正则的，则称X在x处**正则***(regular)*。每点正则给出概形正则，非正则点叫做奇异点，非正则概形叫做奇异概形，但都必需定义在局部诺特概形上

*(7)*设A是一个k-代数，对一域扩张K/k，则我们记$A_K = A \otimes_k K$，则它是一个K-代数。此时对域k上的代数簇X，我们通过它的k-代数的对应，可以得到一个K上的代数簇X_K，但注意这种行为不能在一般的概形上进行，通过这种方式可以将一般性的代数簇转化为代数闭域上的代数簇。设域k上的代数簇X，$\overline{k}$是k的代数闭包，如果点$x \in X$满足$X_{\overline{k}}$来自x的点[72]都是正则的，则称X在x处**光滑***(smooth)*。如果X在每点都光滑则称X是光滑的，其等价于$X_{\overline{k}}$是正则的。

虽然概形看起来是个很复杂的东西，但下放到簇的情形我们就很好理解了，例如一个域k上的代数簇X，它的坐标环为$k[X]$，那么它的环拓扑空间写法就是$(X, X \to k[X])$，所以层概念中的函子实际上是就是在簇中，代数簇到它坐标环的对应。我们将域k上所有光滑仿射簇的范畴记为$\mathbf{SVar}_k$。介绍motive前，我们还需要认识一个东西，代数闭链(algebraic cycle)，它与上同调理论有着密切联系。所谓代数簇的维数(dimension)，可以是它作为拓扑空间的维数，也可以是它坐标环的Krull维数，它们本质都是等价的，子簇的余维数(codimension)指是簇的维数减去子簇的维数。

定义 4.19. *(1)*一个环如果只有0是幂零的，则称这个环是**约化的***(reduced)*。对一概形$(X, \mathcal{O}_X)$，如果对$x \in X$有$\mathcal{O}_{X,x}$是约化的，则称X在x处**约化***(reduced)*。如果X在每点都是约化的，则称X是**约化的***(reduced)*。显然，代数闭域上的代数簇都约化的

*(2)*设X是域k上的光滑射影簇

*(a)*我们把X的不可约约化闭子簇称为**素闭链***(prime cycle)*，把余维数为j的素闭链构成的集合记为$X^{(j)}$，我们把它们作为自由生成元而生成的一个自由阿贝尔群记为$C^j(X) = Z[X^{(j)}]$，并记$C(X) = \oplus_j C^j(X)$*(j遍历所有可能的余维数，从0到X的维数)*，我们把$C(X)$的元素称为一个**代数闭链***(algebraic cycle)*

*(b)*我们记$C_{rat}(X) \subset C(X)$为$\Phi \cap \{t_0\} \times X - \Phi \cap \{t_1\} \times X$*($t_0, t_1 \in P^1 k$, Φ为不包含$\{x\} \times X$的$P^1 k \times X$的子簇)*形式的元作为生成元生成的子群。如果两个代数闭链的差属于$C_{rat}(X)$则称它们是**有理等价的***(rationally equivalent)*。我们剔除有理等价的部分即可以得到**周*(*炜良*)*环***(Chow ring)*$Chow(X) = C(X)/C_{rat}(X)$

*(c)*记$C_{num}(X) \subset C(X)$为所有元素g生成的子群，其中$g \in C^r(X)$满足对任意$f \in C^{dim(X)-r}(X)$有$fg = 0$。[73]。如果两个代数闭链的差属于$C_{num}(X)$则称它们是**数值等价的***(numerical equivalence)*

*(d)*将*(b)*定义中的$P^1 k$替换为一个曲线*(curve,*代数簇的一维不可约成分*(*子簇*))*，即可以得到$C_{alg}(X)$。如果两个代数闭链的差属于$C_{alg}(X)$则称它们是**代数等价的***(algebraic equivalence)*

*(3)*一个代数闭域k上的系数域为K*(*特征为零的域*)*的***Weil*上同调理论***(Weil cohomology theory)*由三部分组成：一个由k上的光滑射影簇范畴到级交换[74]K-代数范畴的逆变函子$H^*, X \rightsquigarrow \oplus_i H^i(X)$*(*[75]我们将态射对应记为$f \mapsto f^*$*)*、对每个光滑射影簇$X$有一个**迹***(trace)*映射$Tr_X : H^{2dim(X)} \to$

[72]此处首先要运用簇上点到坐标环上元素的一一对应，然后此时可以通过k-代数的诱导运算导出一系列新坐标环上的点(此处是一变多)，然后就可以在新簇上找到一系列对应的点，所以X的点到$X_{\overline{k}}$的点是一对多的关系

[73]此处为代数闭链的庞加莱对偶$fg \in C^{dim(X)}(X) = Z$

[74]级交换(即graded commutative)，首先它是一个分次代数(graded algebra)，deg表示元素的次数，然后齐次元素满足$ab = (-1)^{deg(a)deg(b)} ba$

[75]此处是以分次代数中元素的次数为依据而给出的在线性空间上的直和分解

K、对每个光滑射影簇X和余维数为c的不可约闭子簇Z有一个**上同调类***(cohomology class)*$cl(Z) \in H^{2c}(X)$。并且满足以下公理

有限性:$H^i(X)$作为线性空间是K上有限维的，并且除$0 \le i \le 2dim(X)$以外$H^i(X) = 0$

***Kunneth*性**:如果$p_X : X \times Y \to X$和$p_Y : X \times Y \to Y$是典型笛卡儿积投影，则K-代数同态$H^*(X) \otimes_K H^*(Y) \to H^*(X \times Y), a \otimes b \mapsto p_X^*(a)p_Y^*(b)$是一个同构

***Poincare*对偶**:Tr_X是一个同构，并且$\forall 0 \le i \le 2dim(X)$双线性映射$H^i(X) \otimes_K H^{2dim(X)-i}(X) \to K, a \otimes b \mapsto Tr_X(ab)$是完美配对[76]

迹映射相容性:$Tr_{X\times Y}(p_X^*(a)p_Y^*(b)) = Tr_X(a)Tr_Y(b), a \in H^{2dim(X)}(X), b \in H^{2dim(Y)}(Y)$

同调类外积:对每个不可约闭子簇$Z \subset X, W \subset Y$有$cl(Z \times W) = p_X^*(cl(Z))p_Y^*(cl(W))$

同调类前推:对每个态射$f : X \to Y$,不可约子簇$Z \subset X$,$a \in H^{2dim(Z)}(Y)$，有$Tr_X(cl(Z)f^*(a)) = mTr_Y(cl(f(Z))a)$，其中$m$为态射$Z \to f(Z)$的度*(degree)*

同调类回拉:对每个态射$f : X \to Y$,不可约子簇$Z \subset Y$，如果满足$f^{-1}(Z)$的所有不可约成分$W_1, ..., W_r$的维数都是$dim(Z) + dim(X) - dim(Y)$、要么f在Z的领域上平坦要么$f^{-1}(Z)$光滑、$f^{-1}(Z) = \sum_{i=1}^r m_i W_i$，则$f^*(cl(Z)) = \sum_{i=1}^r m_i cl(W_i)$

点情形:如果记$x = Spec(k)$，则$cl(x) = 1$并且$Tr_x(1) = 1$

*(4)*设H^*是一个*Weil*上同调理论，X是一个光滑射影簇，我们定义$C_{hom}(X) = ker(Chow(X) \otimes \mathbb{Q} \to H^*(X))$。如果两个代数闭链的差属于$C_{hom}(X)$则称它们是**同调等价的***(homologically equivalent)*。此时我们重新定义有理周环$CH(X) = Chow(X) \otimes \mathbb{Q}$

*(5)*设$\sim$表示一种满足某些条件的等价[77]，比如同调等价或有理等价或数值等价或代数等价，其实还有没提到的*Smash-nilpotence*等价，我们记$A^i_\sim(X) = C^i(X)/\sim, A_\sim(X) = \oplus_j A^j_\sim(X)$。设$X, Y$是两个光滑射影簇，假设$X$的连通成分为$X_1, ..., X_n$，它们的维数分别为$d_1, ..., d_n$，我们定义从$X$到$Y$的**级***(degree)*为$r$的**配对***(correspondence)*群为$Corr^r_\sim(X, Y) = \oplus_{i=1}^n A^{d_i+r}_\sim(X_i \times Y)$，并简记$Corr_\sim(X, Y) = Corr^0_\sim(X, Y)$

*(6)*我们定义k上的**配对范畴**$\mathbf{Corr}_\sim(k)$，它的对象光滑射影簇，态射为$hom(X, Y) = Corr_\sim(X, Y)$。设三个对象$X, Y, Z$，我们定义$p_{XY} : X \times Y \times Z \to X \times Y$为投影映射，类似地有$p_{XZ}, p_{YZ}$，对$f \in hom(X, Y), g \in hom(Y, Z)$我们定义复合为$gf = (p_{XZ})_*(p_{XY}^*(f)p_{YZ}^*(g))$。在此基础上，我们再定义一个逆变函子$h : \mathbf{SVar}_k \to \mathbf{Corr}_\sim(k)$，对象的对应是直接恒等对应[78]，态射的对应是$f \mapsto \Gamma_f$，其中$\Gamma_f : X \to X \times_k Y$是由$f : X \to Y$诱导的**图态射***(graph morphism)*。$X \times_k Y$表示X和Y在k上的**纤维积***(fibered product)*，虽然好像是笛卡儿积，但放到了概形上，具有了万有性[79]。$\mathbf{Corr}_\sim(k)$是一个张量范畴，其上的张量结构为$h(X) \otimes h(Y) = h(X \times Y)$

*(7)*我们定义k上的***effective motive*范畴**$\mathbf{Mot}^{eff}_\sim(k)$。它的对象为$(X, p)$，$X$为光滑射影簇，$p \in Corr_\sim(X, X)$并且是幂零的。态射为$hom((X, p), (Y, q)) = qCorr_\sim(X, Y)p$，复合同上，它也是一个张量范畴其上的结构为$(X, p) \otimes (Y, q) = (X \times Y, p \times q)$。在此基础上有一个张量函子$\sharp$: $\mathbf{Corr}_\sim(k) \to \mathbf{Mot}^{eff}_\sim(k), X \rightsquigarrow (X, 1_X)$，态射的对应由态射的定义直接给出。取特例$X = P^1k$，则在$\mathbf{Mot}^{eff}_\sim(k)$中有分解$P^1k = \mathbb{I}_k \oplus \mathbb{L}$，其中$\mathbb{L} = (Spec(k), 1_{Spec(k)})$为***Lefschetz motive***，并简

[76]这个完美配对没啥其它的意思

[77]这种等价别称为adequate relation，它还与一个交换环A相关，但我们需要的只是一些特例，所以就不给出adequate relation的完整定义，此处我们特化A为有理数域Q

[78]为了区别簇所属的范畴，我们特别记为$X \rightsquigarrow h(X)$

[79]即对任意两个态射$f : Z \to X, g : Z \to Y$，存在唯一态射$(f, g) : Z \to X \times_k Y$，使得$f = p_X \circ (f, g)$和$g = p_Y \circ (f, g)$。上面的$\Gamma_f$，实际是给出$1 : X \to X$和$f : X \to Y$而存在的唯一态射

记它的张量积$\mathbb{L}^n = \mathbb{L}^{\otimes n} = \underbrace{\mathbb{L} \otimes ... \otimes \mathbb{L}}_{n}$

*(8)*我们定义k上的***(pure)motive*****范畴**$\mathbf{Mot}_\sim(k)$。它的对象为$(M,i), M \in obj(\mathbf{Mot}^{\mathit{eff}}_\sim(k)), i \in \mathbb{Z}$，它的态射为$hom((M,i),(N,j)) = \varinjlim_n hom_{\mathbf{Mot}^{\mathit{eff}}_\sim(k)}(M \otimes \mathbb{L}^{n+i}, N \otimes \mathbb{L}^{n+j})$，复合同上，它也是一个张量范畴。在此基础上有一个张量函子$\mathbb{L}^{-1} : \mathbf{Mot}^{\mathit{eff}}_\sim(k) \hookrightarrow \mathbf{Mot}_\sim(k), M \rightsquigarrow (M,0)$，态射的对应由态射的定义直接给出。此时，我们令$\mathbb{T} = \mathbb{L}^{-1}$，称其为***Tate motive***。将$\sim$特例化，我们把$\mathbf{Mot}_{rat}(k)$称为***pure Chow motive***。

经过了十分漫长的构造我们得到了一个较长的范畴转化链

$$\mathbf{SVar}_k \xrightarrow{h} \mathbf{Corr}_\sim(k,A) \xrightarrow{\sharp} \mathbf{Mot}^{\mathrm{eff}}_\sim(k,A) \xrightarrow{\mathbb{L}^{-1}} \mathbf{Mot}_\sim(k,A)$$

我们把这个三个步骤分别叫做Linearization、pseudoabelianization、Inversion。其实如果单纯看结果的话，单纯就只是$\mathbf{SVar}_k \xrightarrow{h} \mathbf{Mot}_\sim(k,A), X \rightsquigarrow (X, 1_X, 0)$，好像什么变化都没有，但实际上它的丰富性质都藏到了范畴里面，这和很多抽象理论是一样的，不能只是看到群、域、环、拓扑之类的东西只是一个集合，而应该看其上被赋予的结构和丰富的定义性质。我们再次提醒，此处只是典型motive的一个构造，并不是Grothendieck梦中的motive，目前我们已知的结论是下面这个。

定理 4.2. 设F是特征为零的域，k是任意域，则$\mathbf{Mot}_{num}(k,F)$半单F-线性的阿贝尔张量性范畴。

其实如果有一系列假设成立[80]的话，则$\mathbf{Mot}_{num}(k,Q)$可以变成半单Tannakian范畴，我们特别地把它记为$\dot{\mathbf{Mot}}_{num}(k,Q)$，并且当$k$的特征为零[81]时我们可以来构造伽罗瓦群，首先我们把H^*选为经典上同调理论，于是任一嵌入$\sigma : k \hookrightarrow C$可以得到一个纤维函子$H^*_\sigma : \dot{\mathbf{Mot}}_{num}(k,Q) \to \mathbf{FVec}_k$，于是它是中性的，于是根据Tannakian范畴的理论可以得到Q上的一个仿射群簇$\mathbf{G}_{\mathbf{Mot},k} = \underline{Aut}^{\otimes}(H^*_\sigma)$。此时，我们随便找一个光滑射影簇$X$，将它生成的子Tannakian范畴对应的仿射群簇记为$\mathbf{G}_{\mathbf{Mot},k}(X)$，我们把它叫做$X$的motivic Galois group。如果$k$还满足是非阿基米德域，我们可以直接给出p进伽罗瓦，从而实现我们之前所说的$A \to B$(代数几何世界到伽罗瓦表示世界)，我们记$\Gamma_k = Gal(\overline{k}/k)$，则有函子$\mathcal{R}_{Tate} : \dot{\mathbf{Mot}}_{num}(k,Q_p) \to \mathbf{Rep}_{Q_p}(\Gamma_k)$，它的实现公式为$Q_p \otimes_Q A^j(X) = H^{2j}_{et}(X, Q_p(j))^{\Gamma_k}$，其中$H^{2j}_{et}(X,Q_p(j))$是Tate结(Tate twist)的被$\Gamma_k$作用的上平展上同调群(下一节我们会详细构造)，**Tate猜想**(Tate’s conjecture)猜测这个函子是局部双的，从而完成$B \to A$(伽罗瓦表示世界到代数几何世界)。对于一般性的特征为零域k，虽然不参与朗兰兹但也有相应的猜想，设$\mathbb{Q}\mathbf{HS}$表示Q上的纯霍奇结构(pure Hodge structure)组成的范畴，则我们根据霍奇理论可以得到函子$\mathcal{R}_{Hodge} : \dot{\mathbf{Mot}}_{num}(k,Q) \to \mathbb{Q}\mathbf{HS}$，**霍奇猜想**(Hodge conjectur)等价于这个函子是局部双的。实际上，motive的另一个重要作用是给出代数几何对象的L-函数(称其为motivic L-function，它一直不是我们的重点，有兴趣的请参考文献[12])，而将motive范畴视为Tannakian范畴则是为了给出表示，只有当代数几何对象具有这两种性质时，它才有资格参与到朗兰兹纲领的对应中去，由于L-函数属于隐藏性的对应，而表示论才是明

[80]我们把它们称为格罗滕迪克标准猜想(Grothendieck’s standard conjecture)：k的特征为零下有，“The K unneth components of the diagonal Δ_X are algebraic”、“The Lefschetz involution $*_{L,X}$ is algebraic”、“The quadratic form $q_H(X)$ with values in Q is positive definite”，“Homological equivalence coincides over Q with numerical equivalence，也就是$A^*_{num}(X) \otimes Q = A^*_{hom}(X) \otimes Q$”

[81]特征非零时，无法构造纤维函子，它是非中性范畴

面上的，所以就如我们开头所说，我们把Tannakian范畴作为代数几何参与朗兰兹纲领的对象，但要产生较严格对应的话，必需特例化为光滑射影簇的motive范畴。但我们还要知道这都是建立在格罗滕迪克标准猜想成立的情况下，所有比起考虑一般性的几何朗兰兹，特殊情况更值得我们去考虑，还之前的LLC一样，我们应该先从简单的地方做起，这就是我们下一部分的内容了。

4.4 特殊情形

通过前一节对几何朗兰兹的初步探索，我们发现在进行几何朗兰兹时，伽罗瓦表示论世界B应该进一步精确为**p-进伽罗瓦表示**(即伽罗瓦群在p-进数域上的表示)，而这也周转回了我们的模性定理。按照计划，接下来我们要探究所谓的Fontaine-Mazur猜想，其中的一个重要概念是Tate结，对此我们主要要做三件事，一是得到范畴上的同调函子，二是构造平展上同调从而诱导出p-进上同调并研究其上的表示，三是在此基础上得到特例Tate结。这实际上是椭圆曲线构造Tate模的推广，我们一步步地来吧。以后记$(\mathcal{A},T)$来表示一个范畴$\mathcal{A}$和一个函子$T:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$满足$T$是等价(因此有$T^{-1}$)。

定义 4.20. 设$(\mathcal{A},T)$满足$\mathcal{A}$是加性范畴

*(1)*一个态射序列$\cdots A_{n+1}\xrightarrow{f_{n+1}}A_n\xrightarrow{f_n}A_{n-1}\cdots$如果满足对任意的$n$有$f_nf_{n+1}=0_{A_{n+1}A_{n-1}}$，则称它是**一个复链***(complex)*

*(2)*我们定义一个范畴$\mathcal{A}_\ulcorner$。它的对象是$X\in obj(\mathcal{A})$配了一个$d_X\in hom(X,T(X))$，并把(X,d_X)叫的**微分对象***(differential object)*。对任意$f\in hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$如果$T(f)\in hom(T(X),T(Y))$满足$T(f)d_X=d_Yf$，则把$f$叫做**微分态射**，我们令$hom_{\mathcal{A}_\ulcorner}(X,Y)$为所有是微分态射的$f\in hom(X,Y)$组成，此时直接使用$\mathcal{A}$的复合作为$\mathcal{A}_\ulcorner$的复合

*(3)*一个微分对象(X,d_X)如果满足$T(d_X)d_X$是零态射，则称X是**一个复链***(complex)*。我们定义一个$\mathcal{A}_\ulcorner$的一个满子范畴$\mathcal{A}_\lrcorner$，它的对象为$obj(\mathcal{A}_\ulcorner)$中的复链[82]，我们把$\mathcal{A}_\lrcorner$的态射叫做**复链态射**

*(4)*对任一微分态射$f\in hom(X,Y)$，如果存在态射$u\in hom(X,T^{-1}(Y))$满足$f=T(u)d_X+T^{-1}(d_Y)u$，则称f**同伦于*0****(homotopic to zero)*。如果态射$f,g\in hom(X,Y)$满足$f-g$同伦于*0*，则称它们是**同伦的***(homotopic)*。我们记$Ht(X,Y)=\{f\in hom_{\mathcal{A}_\ulcorner}(X,Y)|f\text{同伦于}0\}$，显然同伦构成集合$hom_{\mathcal{A}_\ulcorner}(X,Y)$的一个等价关系，我们记商集为$hom(X,Y)/Ht$。这时我们定义一个**同伦范畴***(homotopy category)*$K_d(\mathcal{A})$有$obj(K_d(\mathcal{A}))=obj(\mathcal{A}_d)$、$hom_{K_d(\mathcal{A})}(X,Y)=hom(X,Y)/Ht$，复合可以直接继承[83]。类似可以得到$K_d(\mathcal{A})$的一个满子范畴$K_c(\mathcal{A})$。

设$\mathcal{C}$是一个阿贝尔范畴，对于态射$f\in hom(A,B)$我们把核和余核定义中那个具有万有性的对象分别记为$Ker(f)$和$Coker(f)$，那个具有万有性的态射采用原记号$ker(f):Ker(f)\to A$和$coker(f):B\to Coker(f)$，同样地我们把像分解定义中的那个对象记为$Im(f)$，则有$im(f):Im(f)\to B$和$coim(f):A\to Im(f)$，总结就是我们有下面一张万有图。

$$\begin{tikzcd} Ker(f) \arrow[r, hook, "ker(f)"] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "coim(f)"'] & & Y \arrow[r, two heads, "coker(f)"] & Coker(f) \\ & & Im(f) \arrow[ur, hook, "im(f)"'] & & \end{tikzcd}$$

[82]满子范畴，已经给出了态射和复合

[83]需要证明同伦于0的两个态射的复合一样是同伦于0的

接下来我们考虑，任一复链$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$可以证明有下面的一张交换图

$$\begin{tikzcd}
& Im(f) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & Ker(g) \arrow[dl, hook] & \\
X \arrow[ur, two heads] \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & & Z \\
& Coker(f) \arrow[rr, two heads] & & Im(g) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

我们记$u: Ker(g) \to Coker(f)$由上面交换图的复合给出，我们记对象$H(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z) = Im(u)$，并把它称为这个复链的**上同调**(cohomology)，于是这个复链正合等价于$H(X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z) = 0$(0表示零对象，以后不再提醒)。接下来，我们上述范畴配备一个等价$(\mathcal{A}, T)$，对任意一个对象$X \in obj(\mathcal{A}_c)$，我们定义$H(X) = H(T^{-1}(X) \to X \to T(X))$，并进一步定义$Z(X) = Ker(d_X)$和$B(X) = Im(T^{-1}(d_X))$，此时我们可以得到一个单态射链$B(X) \hookrightarrow Z(X) \hookrightarrow X$和一个正合列$0 \to B(X) \to Z(X) \to H(X) \to 0$，我们把$H(X)$称为对象$X$的**上同调**，此时我们可以得到一个加性函子$H: \mathcal{A}_c \to \mathcal{A}, X \rightsquigarrow H(X)$。可以证明这个函子可以保持同伦的性质，简单来说就是，它进一步给出了函子$H: K_c(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}, X \rightsquigarrow H(X)$。

定义 4.21. 设$(\mathcal{A}, T)$满足$\mathcal{A}$是加性范畴

*(1)范畴$\mathcal{A}$中的一个**三角**(triangle)指的是态射链$X \to Y \to Z \to T(X)$。三角之间的**态射**是一个显而易见的交换图，从而自然得到同构的定义。*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d] & T(X_1) \arrow[d, "T(f)"] \\
X_2 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Z_2 \arrow[r] & T(X_2)
\end{tikzcd}$$

*(2)我们称$\mathcal{A}$是**三角性范畴**(triangulated category)，如果其配有由三角组成的类$DT(\mathcal{A})$(我们顺便把里面的元素称为**好三角**(distinguished triangle))，并且满足以下公理*

***TR0**:如果一个三角$a \cong b \in DT(\mathcal{A})$则$a \in DT(\mathcal{A})$*

***TR1**:三角$X \xrightarrow{1_X} X \to 0 \to T(X)$(中间部分为零对象的特性)属于$DT(\mathcal{A})$*

***TR2**:对任意$f \in hom(X, Y)$，三角$X \xrightarrow{f} Y \to Z \to T(X)$属于$DT(\mathcal{A})$*

***TR3**:三角$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$属于$DT(\mathcal{A})$当且仅当三角$Y \xrightarrow{-g} Z \xrightarrow{-h} T(X) \xrightarrow{-T(f)} T(Y)$属于$DT(\mathcal{A})$*

***TR4**:给出任意两个$DT(\mathcal{A})$的$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$和$X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{g_1} Z_1 \xrightarrow{h_1} T(X_1)$，还有两个态射$a \in hom(X, X_1)$和$b \in hom(Y, Y_1)$满足$f_1 a = bf$，则有一个态射$c \in hom(Z, Z_1)$给出这两个三角间的态射*

***TR5**:给出任意三个$DT(\mathcal{A})$的三角，$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z_1 \to T(X)$，$Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{k} X_1 \to T(Y)$和$X \xrightarrow{gf} Z \xrightarrow{l} Y_1 \to T(X)$，则存在一个$DT(\mathcal{A})$的三角$Z_1 \to Y_1 \to X_1 \to T(Z_1)$使得下图交换(虚线表示由存在性给出的态射，实线为假设和定义给出的态射，1表示恒等态射以后我们不再写下标了)*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "1"] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & T(X) \arrow[d, "1"] \\
X \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1"] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & T(X) \arrow[d] \\
Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "1"] & T(Y) \arrow[d] \\
Z_1 \arrow[r, dashed] & Y_1 \arrow[r, dashed] & X_1 \arrow[r, dashed] & T(Z_1)
\end{tikzcd}
$$

*(3)设$(\mathcal{D},T)$是三角范畴，$\mathcal{C}$是阿贝尔范畴。如果一个加性函子$F:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$满足，对任意好三角$X\to Y\to Z\to T(X)$有$F(X)\to F(Y)\to F(Z)$是正合列，则称$F$是**上同调的**(cohomological)。*

我们可以证明$K_c(\mathcal{A})$是一个三角性范畴，并且函子$H:K_c(\mathcal{A})\to\mathcal{A}, X\rightsquigarrow H(X)$是上同调的。我们令$K_c(\mathcal{A})$中满足$H(X)\cong 0$的对象$X$组成的满子范畴记为$\mathcal{N}$，则$\mathcal{N}$是$K_c(\mathcal{A})$的三角子范畴。此时我们记$D(\mathcal{A})=K_c(\mathcal{A})/\mathcal{N}$，并把它称为$(\mathcal{A},T)$的**导出范畴**(derived category)。我们记$T^0(X)=X, T^k=T(T^{k-1}(X))$并进一步记$X[k]=T^k(X)$，此时对任意两个对象$X,Y\in obj(\mathcal{A})$，我们定义$\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{A}}(X,Y)=Hom_{\mathcal{A}}(X,Y[k])$，类似地我们可以得到$\mathrm{Tor}^{\mathcal{A}}_k$，过程不再赘述。

定义 4.22. *设一个加性范畴$\mathcal{A}$*

*(1)我们定义一个新的范畴$\mathcal{A}^Z$，它的对象为$\{X_n\}_{n\in Z}, X_n\in obj(\mathcal{A})$，它的态射为$\{f_n:X_n\to Y_n\}_{n\in Z}, f_n\in hom(X,Y)$。我们定义与$\mathcal{A}$相关的**分次范畴**(graded category)$(Gr(\mathcal{A}),T)$是在上述范畴基础上(即$Gr(\mathcal{A})=\mathcal{A}^Z$)配备满足$(T(X))_n=X_{n+1}, X=\{X_n\}\in Gr(\mathcal{A})$的函子，它也是一个加性范畴，因此我们记$C(\mathcal{A})=Gr(\mathcal{A})_c$*

*(2)我们有$X\in obj(C(\mathcal{A}))$是一个复链，如果对$|n|\gg 0$(即足够大以后的所有数)均有$X_n=0$，则称X是**有界的**(bounded)，我们把所有有界复链组成的$C(\mathcal{A})$的一个满子范畴记为$C^*(\mathcal{A})$。我们记$K(\mathcal{A})=K_c(Gr(\mathcal{A}))$，并记$K^*(\mathcal{A})$为满足$obj(K^*(\mathcal{A}))=obj(C^*(\mathcal{A}))$的$K(\mathcal{A})$的满子范畴*

*(3)对于函子H我们一样使用记法$H^0=H, H^k=H(H^{k-1})$，并令$N^*(\mathcal{A})=\{X\in K^*(\mathcal{A})|H^k(X)\cong 0,\forall k\}$，此时由于分次范畴给出了$T$，我们定义$D^*(\mathcal{A})=K^*(\mathcal{A})/N^*(\mathcal{A})$，并把它称为$\mathcal{A}$的**导出范畴**(derived category)。*

设两个阿贝尔范畴$\mathcal{A}_1$和$\mathcal{A}_2$和一个函子$F:\mathcal{A}_1\to\mathcal{A}_2$，如果三角函子$K^*(F):K^*(\mathcal{A}_1)\to K^*(\mathcal{A}_2)$关于$N^*(\mathcal{A}_1)$和$N^*(\mathcal{A}_2)$是万有右局部化的，则称$F$是**右可导出的**(right derivable)，此时我们令F的局部化为$R^*F=K^*(F)/N^*(F)$，并进一步定义$R^kF=H^kR^*F$。我们把$R^*F:D^*(\mathcal{A}_1)\to D^*(\mathcal{A}_2)$称为$F$的**右导出函子**(right derived functor)，并把R^kF称为F的**k-次导出函子**(k-th derived functor)。

设X是一个概形(自然可以看成一个拓扑空间)，我们简记$\mathbf{AGSh}_X=Sh(\mathbf{Op}_X,\mathbf{AbGrp})$，则对任意一个阿贝尔范畴$\mathcal{A}$，可以证明函子$F:\mathbf{AGSh}_X\to\mathcal{A}$是右可导出的，从而可以给出$F$的右导出函子$R^kF$，此时我们已经得到了同调理论需要的同调函子，下一步是构造平展上同调，不过我们需要先研究一下，平展概形的概念。

定义 4.23. *(1)设A是一个交换幺环，M是一个A-模，如果函子$F:\mathbf{Mod}_R\to\mathbf{Mod}_R, N\rightsquigarrow M\otimes_A N$是正合的，则称$M$在$A$上**平坦**(flat)*

*(2)*一个概形的态射$f : X \to Y$和一点$x \in X$，如果满足$\mathcal{O}_{X,x}$在$\mathcal{O}_{Y,f(x)}$上平坦，则称f在x处**平坦**。如果f在每点都平坦，则称f是**平坦态射***(flat morphism)*

*(3)*对一个概形的态射$f : X \to Y$。如果满足Y的每个拟紧开子集在X里的逆像都是拟紧的[84]，则称f是**拟紧的***(quasi-compact)*。如果对角映射$X \to X \times_Y X$满足每个拟分离开子集的逆像都是拟分离的，则称f是**拟分离的***(quasi-separated)*

*(4)*设A是一个交换幺环，B是一个A-代数，如果存在n和$A[t_1, ..., t_n]$有限生成理想I使得B同构于$A[t_1, ..., t_n]/I$，则称B是**有限表示的***(of finite presentation)*

*(5)*一个概形的态射$f : X \to Y$。如果对每点$x \in X$，都存在一个在Y中的$f(x)$的仿射开领域$V = Spec(B)$和[85]一个在$f^{-1}(V)$中的x的仿射开领域$U = Spec(C)$使得C是一个有限表示的B-代数，则称f是**局部有限表示的***(locally of finite presentation)*。如果f还是拟紧的、拟分离的，则称f是**有限表示的**

*(6)*我们用$(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$来表示环拓扑空间间的态射，并用$f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$来表示诱导的局部环同态。如果$f$是拓扑空间的开浸入，且对任意一点$x \in X$有$f_x^\sharp$是同构，则称$f$是一个**开浸入***(open immersion)*

*(7)*设概形的态射$f : X \to Y$是局部有限表示的。对一点$x \in X$，如果对角映射$X \to X \times_Y X$是x领域内的一个开浸入，则称f在x处**分歧***(unramified)*。显然它等价于，$\mathfrak{m}_{f(x)}\mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x$且$k(x)$是$k(y)$的有限可分扩张[86]

*(8)*设概形的态射$f : X \to Y$是局部有限表示的。对一点$x \in X$，如果f在x处分歧且平坦，则称f在x处**平展***(etale)*。如果它在每点平展，则称f是**平展态射***(etale morphism)*

*(9)*设一概形X。如果一概形U存在一个态射$\pi : U \to X$，则称U是一个***X*-概形***(X-scheme)*，并把U称为**基概形**，π称为**结构态射**。如果结构态射π是平展的，U是一个**平展的***(etale)*。我们把具有万有性[87]的概形间态射$f : U \to V$称为***X*-态射**，我们把它视为X-概形间的态射，态射复合继承集合映射的复合，则这些符合条件的X-概形构成一个范畴记为X_{et}。如果层$\mathcal{F} \in Sh(X_{et}, \mathbf{AbGrp})$是正合函子，称其为$X$上的一个**平展层***(etale sheaf)*。

接着前面的讨论，显然之前的函子F可以作用在平展层范畴上，即对任一平展层$\mathcal{F}$有$F, \mathcal{F} \rightsquigarrow F(\mathcal{F})$，根据$F$给出的右导出函子，我们有$R^kF, \mathcal{F} \rightsquigarrow R^kF(\mathcal{F}) = H^kR^*F(\mathcal{F})$，即给出了一个同调函子。对任一平展层$U \in obj(X_{et})$，我们记$H^k_{et}(U, \mathcal{F}) = H^kR^*F(\mathcal{F})(U)$，特别地有$X \in obj(X_{et})$，我们把$H^k_{et}(X, \mathcal{F})$称为$\mathcal{F}$的一个**平展上同调群**(etale cohomology group)。读者可能看得有点头晕了，但如果一层层剖析的话，我们很容易发现，平展上同调群实际上是阿贝尔范畴$\mathcal{A}$的导出范畴$D^*(\mathcal{A})$的对象。我们注意到从层角度考虑平展上同调的话，自由度是很高的，包括函子F、阿贝尔范畴$\mathcal{A}$和平展层$\mathcal{F}$，但我们不需要这么广泛的理论，也就是接下来我们将以此来构造代数簇的p-进上同调理论，它是一种由平展上同调给出的典型Weil上同调理论。首先，我们需要构造p-进层。

定义 4.24. 设X是一个诺特概形，E是p-进域Q_p的有限扩张，R是p-进整数环Z_p在E中的整闭

---

[84] 拓扑学的概念随便找本拓扑学的书吧应该都有，包括后面的

[85] 此处表示开领域是某个环的素理想集

[86] 对任意一点$x \in X$，$O_{X,x}$的唯一极大理想记为$\mathfrak{m}_x$，$k(x)$表示相应的剩余域，于是此处的定义与伽罗瓦扩张分歧的概念具有一致性

[87] 即对$\pi : U \to X$和$\rho : V \to X$，满足$\rho f = \pi$的$f : U \to V$且有类似性质的态射时可以进行唯一转化

包，设R一个元素λ满足[88] $R/(\lambda^n)$是有限域且R的特征为p。我们考虑层$\mathcal{F} \in Sh(X_{et}, \mathbf{Mod}_R)$

*(1)*如果对任一$U \in obj(X)$，有$\mathcal{F}(U) = \otimes_R ker(\lambda^n : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U))$*(*其中$\lambda^n$为$R$-模间的态射，表示$R$-模中的元素乘以$\lambda^n$，它可以诱导一个自然变换$\lambda^n : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$，以后出现类似情况我们均不写出$U$*)*，则称$\mathcal{F}$是一个**λ-扭层***(λ-torsion sheaf)*

*(2)*我们考虑由一系列λ-扭层构成的逆向系统$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n, u_n)_{n\in Z}, u_n : \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_{n-1}$满足有某个$n_0$使得$\forall n \le n_0, \mathcal{F}_n = 0$*(*表示将对象对应为空集对象的函子*)*。给定一个整数，我们记$\mathcal{F}[r]$为一个诱导的λ-扭层逆向系统，定义为$(\mathcal{F}[r])_n = \mathcal{F}_{n+r}, u_{n+r} : (\mathcal{F}[r])_n \to (\mathcal{F}[r])_{n-1}$。此时，对$r \ge 0$我们可以进一步诱导一个典型态射$\mathcal{F}[r] \to \mathcal{F}$由一系列的$u_n$对应给出，而$r \le 0$可以给出$\mathcal{F} \to \mathcal{F}[r]$

*(3)*对一个λ-扭层逆向系统$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$，如果存在$r \ge 0$使得$(\mathcal{F}[r] \to \mathcal{F}) = 0$，则称它是一个**空系统***(null system)*

*(4)*一个λ-扭层逆向系统$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n, u_n)_{n\in Z}$，如果满足$\mathcal{F}_n$是可构造的且$\forall n < 0, \mathcal{F}_n = 0; \forall n \ge 0, \lambda^{n+1}\mathcal{F}_n = 0$，并且$u_n : \mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_n$由$R$-模同构$\mathcal{F}_{n+1}/\lambda^{n+1}\mathcal{F}_{n+1} \cong \mathcal{F}_n$给出，则称$\mathcal{F}$是一个**λ-进层***(λ-adic sheaf)*。

上面的名字有点难听，我们令$R = Z_p$，则它的唯一素理想由素数p生成。对一特征为p的可分代数闭域k，我们记$\mu_n(k) = \{\zeta \in k | \zeta^n = 1\}$，则它将一个域对应到一个阿贝尔群。接下来类似地，对任意$U \in obj(X_{et})$，我们可以得到函子$\mathcal{O}_{X_{et}} : X_{et} \to \mathbf{Alg}_R, U \rightsquigarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$和$\mathcal{O}^*_{X_{et}} : X_{et} \to \mathbf{Alg}_R, U \rightsquigarrow \Gamma(U, \mathcal{O}^*_U)$[89]，则它们都是平展层(请注意遗忘函子的存在，以后我们不再提醒)，此时我们将态射$n : \mathcal{O}^*_{X_{et}} \to \mathcal{O}^*_{X_{et}}, s \mapsto s^n$(由R-代数进行诱导)的核记为$\mu_{n,X}$，进一步可以得到$\mu_{p^n,X}$是一个$(p)$-扭层，于是我们构造逆向系统$(\mu_{p^{n+1},X}, u_n)$，其中$u_n : \mu_{p^{n+1},X} \to \mu_{p^n,X}, s \mapsto s^p$，容易证明它是一个$(p)$-进层，我们把它记为$Z_p(1)$，并把它称为$X$的**p-进层**(p-adic sheaf)。请读者注意一点，此时p-进层的构造是完全确定的，不存在因为R或平展层的不同而导致差异。接着，我们要构造表示，由于接下来我们要继续研究表示，所以我们保持λ-进层的状态，先来研究一下比较通用的表示理论。如果一个λ-进层$\mathcal{F}$满足$\mathcal{F}_n$是局部常数的，则称它是**光滑的**(lisse)，对于构造表示光滑是个很重要的条件。

定义 4.25. 设X是一个概形

*(1)*令$s = Spec(k_s)$是由可分闭域k_s张成的谱[90]，如果有态射$\gamma : s \to X$，则称γ是X的一个**几何点***(geometric point)*。如果X存在一个几何点γ，则把对(X, γ)称为一个**点概形***(pointed scheme)*

*(2)*一个概形S的一个**平展覆盖空间***(etale covering space)*指的是一个有限平展态射$X \to S$，并把X称为S的平展覆盖。此时X是一个S-概形，因此它给出左作用于X上的S-自态射[91]群，记为$Aut(X/S)$，对偶地，把右作用记为$G = Aut(X/S)^o$。如果有$S = X/G$，则称$X \to S$是**伽罗瓦平展覆盖空间***(galois etale covering space)*

*(3)*设(S, γ)是连通诺特点概形。我们把它的点连通伽罗瓦覆盖空间组成的范畴的对偶记为I，并且对任意$i \in obj(I)$我们记(X_i, α_i)为对应的点连通伽罗瓦覆盖。根据相关定理其存在一个逆

[88] 实际上R是一个离散赋值环，(λ)是由唯一λ生成的R的唯一极大素理想

[89] 右上角的$^\circ$表示环里面的可逆元

[90] 此时在拓扑空间的基础上有了概形的结构

[91] 到自身的S-态射，根据态射的公理要求可以构成一个群，左作用指的是平展覆盖空间在态射复合中的位置

向系统，因此我们可以给出$\pi(S,\gamma)=\varprojlim_i Aut(X_i/S)^o$，并把它称为$(S,\gamma)$的**基本群**(*fundamental group*)。更重要地是，可以证明连通诺特概形的基本群在同构意义下是唯一的。

对任一连通诺特概形概形X，显然一点$x\in X$可以看成一个几何点$\{x\}\to X$，我们设$\{x\}=Spec(k_x)$，我们记几何点$\overline{x}:Spec(\overline{k_x})\to X$由上述态射诱导给出，设$\mathcal{F}$是$X$上的一个层，我们进一步记$\mathcal{F}_{\overline{x}}=\Gamma(\{x\},\mathcal{O}_{\{x\}}=\mathcal{F}|_{\{x\}})$，更近一步对一个$\lambda$-进层$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_n)$，我们记$\mathcal{F}_{\overline{x}}=\varprojlim_n(\mathcal{F}_n)_{\overline{x}}$。设一点$x\in X$，此时我们进一步精确之前的函子为$F,\mathcal{F}\rightsquigarrow\mathcal{F}_{\overline{x}}$，则此时对应的阿贝尔范畴为$\mathcal{A}=\mathbf{Mod}_R$，为了适配$\lambda$-进层中的作用，我们将基本群$\pi(X,\overline{x})$作用到$\mathbf{Mod}_R$的对象上，如果限制$\lambda$-进层是光滑，则可以证明这个函子是一个等价，此时$X$上的平展上同调群是一个R-模。根据上面的理论，通过一系列的研究，可以发现有函子$F^*:\mathbf{SVar}_k\to\mathbf{Alg}_{Z_p}$，具体做法是，我们令$X$是$k$上的光滑射影簇，随便选取一点[92]，使用p-进层带入这个函子，从而得到一个Z_p-模进一步还是一个Z_p-代数，其它的东西的构造不做讨论，总之可以证明，它给出了一个Weil上同调理论，我们把它称为**p-进上同调理论**，此时有基本群在p-进域上的表示$\pi(X,\overline{x})\to GL(V)$，$V=H^k_{et}(X,Z_p(1))$是一个$Z_p$-代数。或许，读者很容易觉得概形上的同调理论，好像有那么一点点复杂，但没办法现代的代数几何就是这么一个宏大的理论，还请读者注意一点，概形上还有一种叫切赫上同调(Cech cohomology)的理论，这两者是完全不一样的，但切赫上同调可以与一些经典的上同调理论进行对应，但概形特例为微分流形时，它可以对应德拉姆上同调(de Rham Cohomology)。比较复杂的东西就讨论到这里，接下来我们来探究如何在代数簇上得到Tate结，即将上面的过程进行特例化。

接下来，按照与$Z_p(1)$类似的方法，我们可以得到一系列的p-进层$Z_p(m)=(Z/p^{n+1}(m))$，对任意域k上的光滑射影簇X，我们定义它的**p-进上同调群**(p-adic cohomology group)为

$$H^k_{et}(X,Q_p)=\varprojlim_n H^k_{et}(X,Z_p(n))\otimes_{Z_p}Q_p$$

则我们很容易得到一些性质，k的特征为零时$H^k(X,Q_p)$是Q_p上的有限维线性空间，是个分次代数即有运算$H^i(X,Q_p)\times H^j(X,Q_p)\to H^{i+j}(X,Q_p)$，其实就是Weil上同调理论的各种性质，此时同调理论的系数域为Q_p，所以我们继承其中的符号。中间我们来插播一个东西，**Hasse-Weil L-函数**也可叫做**Hasse-Weil zeta-函数**，它可以给出符合条件的代数簇的L-函数，在有限域情况下，本来它的存在性和一系列与黎曼zeta函数相关的性质都是Weil猜想的一部分，但现在它已经被证明了，此处就讲一下它是如何构造的。设k是特征为p的有限域且$|k|=q$，记$\overline{X}=X\times_k\overline{k}$，$f:\overline{X}\to\overline{X},x\mapsto x^q$为Frobenius映射和$n=dim(X)$，则我们有

$$L(X,s)=\prod_{i=1}^{2n}(exp(\sum_{r=1}^{\infty}Tr_X((f^r)^*,H^i_{et}(\overline{X},Q_p))\frac{s^r}{r}))^{(-1)^i}$$

它可以通过det进行简化，我们就不讨论了，读者稍微知道一下这个函数就行了。有限域有那么一点复杂，至于一般数域的话，就还是处于未知状态了，就如我们之前所说需要依靠一个存在性不太确定的motive来构造，当然有些特例还是比较清楚的，比如Q上椭圆曲线E的$L(E,s)$就是模性定理的内容了，其实Q上的光滑射影簇都可以定义这个函数，它的基本技巧是依靠p-进域从而转化为有限域的情况，然后在根据不同素数p的分歧情况，再给出相应的欧拉积，其实这和椭圆曲线有异曲同工之处，回到我们的正题。

[92]回忆Tate模的构造，有一个仿射点，或坐标原点，是可以任意选取，无所谓的

通过之前的内容，容易发现μ_m是X的平展层，我们定义$Q_p(n)=\mu_p^{\otimes n}(n\geq 0)$，它是$X$上的一个层，我们把它称为**Tate结**，我们来以此构造一个p-进伽罗瓦表示。设X是数域k上的光滑射影簇，定义伽罗瓦群$G=Gal(\overline{k}/k)$，由于平展同调群$H_{et}^j(X,Q_p(m))$也是Q_p上的线性空间。此时X是一个诺特连通概形，使用之前的函子我们可以知道，每个光滑p-进层给出基本群的一个表示，简单来说我们目前有一个表示

$$\pi(X,\overline{x})\to GL(H_{et}^j(X,Q_p(m)))\to GL(H_{et}^j(X,Q_p(m))\otimes_{Q_p}\overline{Q_p})\subset GL_n(\overline{Q_p})$$

其中n为同调群的维数，注意它不是同调群的上标，只能确定它是有限的。我们的目的是让基本群与伽罗瓦群G建立联系，但我们需要稍微研究一下基本群的结构才行。有兴趣的读者参考([SGA 1] V 2-5.)，它给出了下面这条关键定理。

定理 4.3. *设一个域K，和包含它的一个可分闭域F，设一个几何点$\gamma:Spec(F)\to Spec(K)$，记$K^s\subset F$是$K$的可分闭包，则有$\pi(Spec(K),\gamma)\cong Gal(K^s/K)$*

由于k是数域，因此$k^s=\overline{k}$，又因为X是代数簇，因此它同构于一个素谱张成的空间，根据几何点$\overline{x}:Spec(\overline{k}_s)\to X$的定义可知，$\overline{k}_s$是包含的$F$一个可分闭域。因此，我们有梦寐以求的p-进伽罗瓦表示如下

$$\rho:Gal(\overline{k}/k)\cong\pi(X,\overline{x})\to GL(H_{et}^j(X,Q_p(m)))$$

这就是，我们之前所说的$A\to B$世界对应的特殊情况，总结一下就是使用Tate结作为p-进层，从而给出基本群的一个p-进表示，再借助基本群的性质变为伽罗瓦群的表示。需要注意的一点是，这个表示不一定是不可约的，但是我们可以很容易地通过平展上同调群的子空间来得到不可约表示，我们下一步需要考虑的应该是$B\to A$世界的对应了，那么一个p-进不可约伽罗瓦表示是否可以看成这样构造表示的子表示呢，可惜的是它并不像在$B\to C$世界对应中复表示那么纯正，必需得加上一个条件，我们来讲解一下它的意思吧。

定义 4.26. *设k是数域，$\rho:Gal(\overline{k}/k)\to GL_n(\overline{Q_p})$是一个$p$-进表示*

(1)如果rho是不可约的且同构于之前构造的$Gal(\overline{k}/k)\to GL(H_{et}^j(X,Q_p(m)))$的一个不可约子表示[93]*，则称$\rho$**来自代数几何**(come from algebraic geometry)*

*(2)首先有关表示是**潜在半稳定的**(potentially semi-stable)，请参考[9]和[10]*[94]*。如果ρ在k的有限个素点以外非分歧，且$\rho|_{D_v}$(其中D_v为k在素点v上的分解群，v经过所以非阿基米德素点)是潜在半稳定的，则称ρ是**几何的**(geometric)。*

一个表示是几何的，虽然名字是这么叫的，但它实际上是表示自身的性质，通过这个概念，我可以得到我们的核心猜想了，即**Fontaine-Mazur猜想**，我们把它简记为FMC。

猜想 4.1. *设k是数域，一个不可约表示$\rho:Gal(\overline{k}/k)\to GL_n(\overline{Q_p})$是几何的当且仅当它是来自代数几何的。*

既然我们都介绍了几何伽罗瓦的概念，不如顺便介绍通过p-进表示将伽罗瓦世界B和模性世界C联系起来的猜想，当然它也是朗兰兹对应的特例，但它与ARC不同，ARC是通过复表示

---

[93] 我们必需让两个表示在不可约的时候建立联系，否则可能出现不对应的情况

[94] 由于它是为证明和猜想而引入的概念，并不泛用，所以有兴趣的读者自行研究

将B世界和C世界联系起来，当然目前这个猜想只有特殊情况能给出严格的对应，更一般的就不得而知了。我们先来回忆一些简单的模表示的内容，对任意一个归一($a_1 = 1$)特征形式($T_p f = a_p f$)$f \in S_k(N,\chi) \subset S_k(F_1(N))$，设它的系数域为$K_f = Q(\{a_n\})$，对一个素数$p$，设$O_{K_f}$的一个极大素理想$\lambda$满足$\lambda \mid (p)$，并记$K_{f,\lambda}$来自素理想分解诱导的域分解$K_f \otimes_Q Q_p = \prod_{\lambda|(p)} K_{f,\lambda}$，它是$Q_p$的一个代数扩域，此时我们可以得到一个表示

$$\rho : Gal(\overline{Q}/Q) \to GL_2(K_{f,\lambda}) \subset GL_n(\overline{Q_p})$$

它有一系列重要的性质就不回顾了，我们只要知道一点"一个归一特征形式$\longrightarrow$一个二维伽罗瓦群的p-进表示"，可以看到如果有反过来的猜想那么首先就要先限制$k = Q, n = 2$，尖形式的更一般替代物就不是尖形式了，而是尖的自守表示了，这已经进入了朗兰兹对应的内容了。我们称一个表示$\rho : Gal(\overline{Q}/Q) \to GL_n(\overline{Q_p})$是**模的**(modular)，或**来自模理论**，如果它同构于上面由模形式诱导的一个表示。实际上。最后我们有下面的猜想，即**Fontaine-Mazur-Langlands猜想**，我们把它简记为FMLC。

猜想 4.2. *对任一奇的、几何的不可约表示$\rho : Gal(\overline{k}/k) \to GL_n(\overline{Q_p})$，存在整数$r$使得$\chi_p^r \rho$来自模理论。*

之前我们稍微用了一下霍奇结构，它是霍奇理论的东西，霍奇理论属于上同调理论的延申，它给出了上同调群一种有着霍奇结构的分解，值得注意的是，这里的上同调群不是我们之前所说的平展上同调理论里的东西，而是切赫上同调理论里的东西。我们先给出一个典型的霍奇理论定理，来感受一下吧。

定理 4.4. *设X是一个紧凯勒(Kähler)流形，则有上同调群的直和分解$H^m(X,\mathbb{C}) = \oplus_{p+q=m} H^{p,q}(X)$和相应的霍奇对称性$\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$，其中$H^{p,q}(X) = \{[\alpha] \in H^{p+q}(X,C) | \alpha \in A^{p,q}(X), d\alpha = 0\}$。*

虽然X是一个复流形，但这里的上同调群实际上就是切赫上同调在微分流形[95]上的特例，即德拉姆上同调群，这种同调理论可以给出一种同调等价，首先代数闭链在数值等价下形成的商群是$A^{p,q}(X)$，而这个商群的元素在同调等价下形成了同调群的生成元[96]，因此我们使用$[\alpha]$来表示α形成的等价类。我们知道同调群实际上是线性空间，所以这里的分解实际上是线性空间的直和分解，所谓的霍奇结构实际上就是一种符合某些条件的线性空间分解，我们来给出严格定义。为了便利性，我们根据上面的分解可以给出，霍奇结构的另一个重要部分，霍奇滤子，的定义$F^p H^k(X,C) = \oplus_{r \geq p} H^{r,k-r}(X)$，霍奇结构正是由这两部分构成。

定义 4.27. *一个**权为n的Q上的(纯)霍奇结构**(pure Hodge structure)由Q上的有限维线性空间V和一个**有限递减滤子**(finite decreasing filtration)(也可以称为**霍奇滤子**(Hodge filtration))F^k构成，并且满足$F^p V \cap \overline{F^{n+1-p} V} = 0$和$C \otimes_Q V = F^p V \oplus \overline{F^{n+1-p} V}$。*

实际上，在前一个定理中，我们通过霍奇分解给出霍奇滤子，而此处则是通过这个有限递减滤子给出霍奇分解。一旦给出霍奇滤子F^k，我们可以通过下面的方式来得到相应的霍奇分解。

[95] 复流形可以视为特殊实流形

[96] 实际上这些生成元就是Weil上同调理论中的元素$cl(Z)$，它与X的一个不可约闭子概形Z相关

$$V^{p,n-p} = F^pV \cap \overline{F^{n-p}V}, V_C = C \otimes_Q V = \oplus_{p\in Z} V^{p,n-p}$$

通常情况下的霍奇结构，指的就是Q上的纯霍奇结构，实际还有混合霍奇结构(mixed Hodge structure)、R上的极化霍奇结构(polarized Hodge structure)。研究概形的上同调群(自然可以特例为代数簇、流形等)上的霍奇结构，比如存在性、与其它对象的联系等，就构成了霍奇理论的主要内容。对任意一个光滑射影代数簇X和它的一个上同调群$H^{2p}(X,C)$，可以证明它存在霍奇结构，此时我们定义它的**霍奇类**为$H^p_{Hodge}(X) = H^{2p}(X,Q) \cap H^{p,p}(X)$，于是我们可以得到著名的**霍奇猜想**(Hodge Conjecture)，如下。

猜想 4.3. *对任一C上的光滑射影簇X，设它的不可约闭子簇为$Z_1,...,Z_n,...$，则任一$[x] \in H^p_{Hodge}(X)$都可以写成$cl(Z_1),...,cl(Z_n),...$的有理线性组合的形式。*

到此，我们已经把上一节所留下的问题给全部解决了，包括$B \to A$、$A \to B$和霍奇猜想，最后一节我们来稍微看看这个没什么希望的模性世界C与代数几何世界C的微弱联系吧。

4.5 志村簇

最后，我们来稍微认识一下志村簇。不想看我写的，就看J.S.Milne大佬写的吧`https://www.jmilne.org/math/xnotes/svi.pdf`，笔者很多知识都是从他的一堆开放文章那里学的。我们先来介绍一下群的双陪集的概念，它是群陪集的推广。

定义 4.28. *设一个群G和它的两个子群$H,K \le G$(不必相异)*

*(1)任取一个元素$a \in G$，我们把$HaK = \{hak|h \in H, k \in K\}$称为$G$的一个**双陪集**(double coset)*

(2)定义子群乘法$HK = \{hk|h \in H, k \in K\}$，显然$a \in H \cup K \Rightarrow HaK = HK$。容易证明双陪集和陪集一样，可以将完全分解群$G$，即$G = \sqcup_{x\in G} HxK$，其中$\sqcup$表示将不相交的集合取并

*(3)对任意$x,y \in G$可以定义等价关系$x \sim y \Leftrightarrow \exists h \in H, k \in K, hxk = y$，此时我们定义$G$的**双陪集空间**(double coset space)为$H\backslash G/K = G/\sim$，请注意和陪集一样只有限制子群一些条件才能使它成为一个群，但它不像陪集只要求正规子群那么简单[97]。*

更多有关双陪集的性质请参考`http://en.wikipedia.org/wiki/Double_coset`，笔者也不知道为什么国内抽象代数基本都没介绍这个东西，因此我们再这里稍微提一下。对一个约化群G，我们来讲一下$G(R)$和G_V两个符号的区别，前一个符号中，R可以是环也可以是域，它表示这种类型群在相应环或域上取值的情况得到的群，比如$GL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{Z})$之类的，后一个符号中，$V$是一个线性空间退化情形则变成域，它表示在这种群限制下域自同态构成的代数群，比如$GL_V = GL(V), SL_V = \{a \in GL_V | det(a) = 1\}$($det$之类的是可定义的，我们不做过深讨论)。

定义 4.29. *设G是有理数域Q上的约化群。我们定义一个**志村对**(Shimura datum)指(G,X)，X是态射$h : \mathbb{S} \to G_R$[98]在群$G(R)$中的一个共轭类[99]，并且满足*

[97]有时如果不考虑商群，我们会将左陪集等价类和右陪集等价类分别记为G/K和$H\backslash G$。此时H是正规子群可以推出$H\backslash G/K = G/HK$，K正规子群可以推出$H\backslash G/K = HK\backslash G$

[98]回忆$\mathbb{S} = Res_{C/R}GL_1$表示Deligne环面，并且给出一个表示$\mathbb{S} \to G_V \to GL_V$(后部分为线性代数群的嵌入性质)相当于给出一个霍奇结构

[99]如果$gxg^{-1} = y$则称x和y共轭，相互共轭的元素构成的子集称为一个共轭类，共轭类也可以完全分解群$G(R)$

SV1:对所有的$h\in X$，$Lie(G_R)$上[100]的$\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$[101]型霍奇结构由$Ad\circ h$定义[102]

SV2:对所有的$h\in X$，满足$\{g\in G_R^{ad}(C)|g=Int_h(\overline{g})\}$是紧群[103]

SV3:不存在G^{ad}的因子[104]H，使得任意h在H上的投影是平凡的。

按照一般的说法，共轭类X所满足的那些公理，主要是为了使得X可以由对称有界域的有限并得到。对一个Q上的志村对(G,X)，我们记A_f表示Q的阿代尔环在有限素点上的投影，即$A_Q=A_f\times R$，则对$G(A_f)$的任意一个紧开子群K，我们先定义一个双陪集空间。

$$Sh_K(G,X)=G(Q)\backslash(X\times G(A_f))/K$$

此时，我们可以给出需要的核心定义了，简单来说就是如果$Sh_K(G,X)$是一个代数簇则称它是一个志村簇。

定义 4.30. 设(G,X)是一个志村对

*(1)*对一个代数簇，如果存在一个G的紧开子群K使得这个代数簇具有$Sh_K(G,X)$的形式，则称它是一个与(G,X)相关的**志村簇***(Shimura variety)*

*(2)*我们可以定义群$G(A_f)$在一个志村簇集和上的作用，$G(A_f)\times\{Sh_K(G,X)\}\to\{Sh_K(G,X)\},(g,Sh_K(G,X)$ $Sh_{g^{-1}Kg}(G,X)$，作用还包括志村簇内点的转化$G(Q)\backslash X\times G(A_f)/K\to G(Q)\backslash X\times G(A_f)/(g^{-1}Kg),[x,a]\mapsto[x,ag]$

*(3)*一个逆向系统$Sh(G,X)=\varprojlim_K Sh_K(G,X)$配备了*(2)*中$G(A_f)$的作用*(*$K$经过$G(A_f)$足够小的紧开子群*)*，则称它是一个由$(G,X)$定义的**志村簇***(Shimura variety)*。

虽然看起来(1)和(3)都定义了志村簇，但其实它们有本质的区别，在(1)定义中的志村簇处于代数几何的世界中，它是一个代数簇，所以我们称它与一个志村对相关，而在(3)中定义的志村簇处于模性世界中，它是什么并不知道，只知道它是一个逆向极限系统，且可以由一个志村对给出。所以，我们认为志村簇可能联系着这两个世界，这样的理由看起来好像不充分，但实际上，在模性定理中的Eichler-Shimura构造的起点实际就是志村簇的一个特例。

$$X(\Gamma)\to J(X(\Gamma))\to A_f(X(\Gamma))\to E_f$$

如果从整体上来看，整个构造实际是从模曲线得到一系列不互相同源的椭圆曲线，而这些互不同源的椭圆曲线由线性空间$S_k(\Gamma)$的归一特征形式给出，当然最后一步必需建立在$K_f=Q$的基础上，但是阿贝尔簇A_f本身就是代数簇，就已经到了代数几何世界，到不到E_f倒是无所谓的。更一般的情形就不得而知了，而且能否联系起来还是一个问题，所以在纲领之中我们使用虚线来表示这个联系，而且使用伽罗瓦表示来连接的话有更多的理论可以参考，只能说志村簇是一种思考方向，但似乎不太主流。最后我们来稍微讲一下为什么起点是一个志村簇。对任意一个同余子群$\Gamma\le GL_2(Z)$可以证明存在一个紧开子群$K\le GL_2(A_f)$使得$\Gamma=GL_2(Q)\cap K$。进一步探讨可以得到$det(K)=\hat{Z}^\times$，此时我们令$X=GL_2(Q)$，于是就很容易得到。

[100]回忆Lie代数是一个线性空间

[101]即分解$H^0=\oplus_{p+q=0}H^{p,q}$，根据定义性质$(-2,2)$表示的$H^{-2,2}$是空的

[102]此处表示映射给出的霍奇滤子

[103]对一个群G，我们记$G^{ad}=G/Z(G)$，如$GL_n^{ad}=PGL_n$

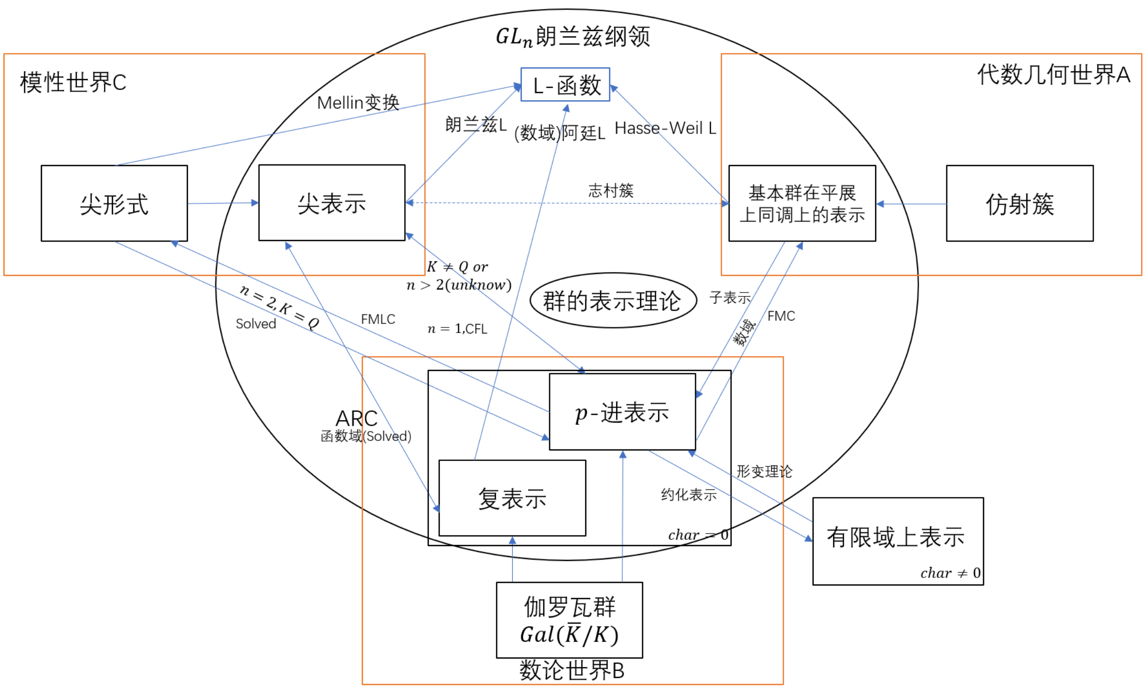
[104]因子(factor)H指$H\le G$是子群且存在子群K使得$G=HK$

$$X(\Gamma) = \Gamma \backslash GL_2(R) \cong GL_2(Q)\backslash GL_2(A_Q)/K \cong Sh_K(GL_2, GL_2(Q))$$

请注意，$X(\Gamma)$虽然是一个紧复流形，但不一定是一个代数簇[105]，所以这样的定义应该属于(3)，于是我们可以进一步遍历所有的同余子群，从而得到一个将所有模形式集成在一起的逆向系统。

$$Sh(GL_2, GL_2(Q)) = \varprojlim_{\Gamma} X(\Gamma) = \varprojlim_{K} Sh_K(GL_2, GL_2(Q))$$

当然也别把逆向极限看成太玄的东西，它其实就是把一些东西有规律的集成起来，在此处的指标集[106]由子群给出，逆向极限比起一般笛卡尔集的好处在于性质的保持。目前志村簇的研究都集中在特殊的例子上，在笔者看来整体上的志村簇还是有那么一点玄乎，所以也不打算做过多的讨论，只能留给有兴趣的读者了。对笔者而言，则是没办法，伽罗瓦表示还是太香了，而且还和数论联系紧密，所以实在不想在这个模模糊糊的东西上做太大文章。至此，我们的纲领介绍终于结束了，我们有缘再见。



其中，CFL为类域论、ARC为阿廷互反猜想、FMLC为Fontaine-Mazur-Langlands猜想、FMC为Fontaine-Mazur猜想。

参考文献

[1] J. Arthur and L. Clozel, *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, 1989.

[105] 黎曼证明了，一维紧复流形是射影代数簇

[106] 实际上，指标集不一定要求可数，只要可排序即可，子集簇都是可排序的

[2] James Arthur, *A note on the automorphic langlands group*, Canadian Mathematical Bulletin **45** (2002), 466 – 482.

[3] Stéphane Bijakowski, *Formes modulaires surconvergentes, ramification et classicité*, arXiv: Number Theory (2015), 2463–2518.

[4] Edward M. Brown and Robert Messer, *The classification of two-dimensional manifolds*, Transactions of the American Mathematical Society **255** (1979), 377–402.

[5] Ngô Bao Châu, *Le lemme fondamental pour les algebres de lie*, https://arxiv.org/pdf/0801.0446.pdf, 2008.

[6] James W. Cogdell, *Lectures on l-functions, converse theorems, and functoriality for gl(n)*, Lectures on Automorphic L-functions (J.W. Cogdell, H. Kim and R. Murty, eds). Fields Institute Monographs No.20, AMS, Providence, 2004, 1–96., 2007.

[7] ———, *L-functions and functoriality*, 2011.

[8] Pierre Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, Modular Functions of one Variable II, Proc. internat. Summer School, Univ. Antwerp 1972, Lect. Notes Math. 349, 501-597 (1973)., 1973.

[9] Jean-Marc Fontaine, *Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables*, Périodes p-adiques - Séminaire de Bures, 1988 (Jean-Marc Fontaine, ed.), Astérisque, no. 223, Société mathématique de France, 1994, talk:8 (fr). MR 1293977

[10] ———, *Représentations p-adiques semi-stables*, Périodes p-adiques - Séminaire de Bures, 1988 (Jean-Marc Fontaine, ed.), Astérisque, no. 223, Société mathématique de France, 1994, talk:3 (fr). MR 1293972

[11] B. Mazur J.M. Fontaine, *Geometric galois representations*, Internat. Press, Cambridge, MA, pp. 41-78, 1995. MR1363495 (96h:11049), 1993.

[12] Minhyong Kim, *An introduction to motives i: classical motives and motivic l-functions*, 2010.

[13] Laurent Lafforgue, *Chtoucas de drinfeld et correspondance de langlands*, Inventiones mathematicae **147** (2002), no. 1, 1–241.

[14] R. Langlands, *Problems in the theory of automorphic forms*, 1970.

[15] ———, *Base change for gl(2)*, 1980.

[16] Ein Märchen and Robert P. Langlands, *Automorphic representations , shimura varieties , and motives*, 2001.

[17] J.S. Milne, *Algebraic number theory*, https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ant.html.

[18] ———, *Class field theory*, https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/cft.html.

[19] Persiflage, *New results in modularity, part* Ⅰ, https://www.galoisrepresentations.com/2017/06/23/new-results-in-modularity-part-i/.

[20] ———, *New results in modularity, part* Ⅱ, https://www.galoisrepresentations.com/2017/06/23/new-results-in-modularity-part-ii/.

[21] J. Tunnell, *Artin’s conjecture for representations of octahedral type*, 1981.

[22] 冯克勤, 代数数论, 科学出版社, 2000.

[23] 加藤和也，黑川信重，斋藤毅, 数论.*1,fermat*的梦想和类域论, 高等教育出版社, 2009.

[24] 孟道骥，陈良云，史毅茜，白瑞蒲, 抽象代数Ⅰ：代数学基础, 科学出版社, 2010.

[25] 建午，曹之江，刘景麟, 实数的构造理论, 人民教育出版社, 1981.