代数分析几何简介

逯晓零

2023 年 3 月 2 日

目录

1 引言

在这篇文章中，我们讨论的主题是几何(Geometry)，而两个前缀代数(Algebraic)和分析(Analytic)代表了现代几何的两个研究方向，我们的目的是使读者对当今的几何理论有一个全面的认识，并理清各个几何理论间的联系。全文共有四个部分，在热身篇中，我们将分别认识代数几何和分析几何的前身，并且引入现代几何的基本抽象结构——拓扑；在基础篇中，我们将带领大家从层理论的角度来理解现代的几何结构；而最后的代数篇和分析篇中，则介绍我们的核心内容。

2 热身:知识回顾

2.1 计算的工具——线性代数

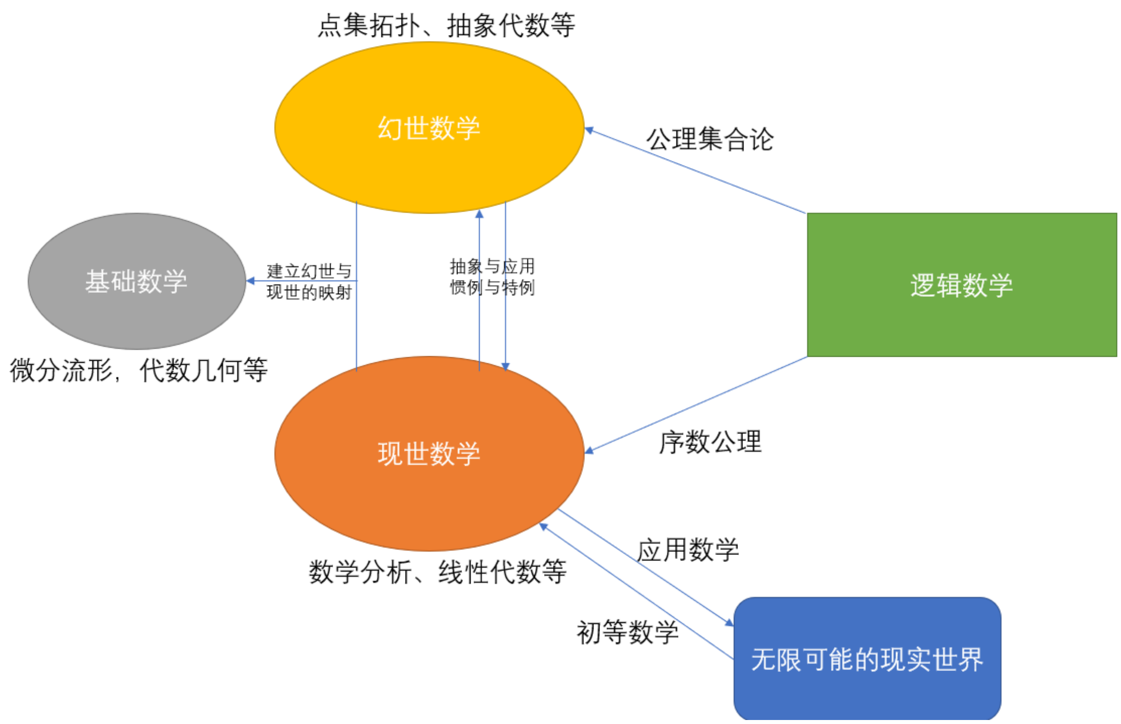
2.1.1 抽象转化

通常大家所学的线性代数，其实就是研究**矩阵**(Matrix)，矩阵嘛，就是将数字排成一个表，然后就可以进行各种运算了，比如加减法$A_{m\times n}\pm B_{m\times n}$、乘法$A_{r\times s}B_{s\times t}$、数乘$kA$、转置$A^T$、行列式$det(A_{n\times n})$或$|A_{n\times n}|$、迹$Tr(A_{n\times n})$、逆$A^{-1}_{n\times n}, |A_{n\times n}|\neq 0$等等，如果是复矩阵[1]还能定义，共轭$\overline{A}$、共轭转置$A^H=\overline{A^T}$。顺便还能定义一些特殊矩阵，比如单位阵$I$、零矩阵$O$、对称矩阵$A=A^T$、共轭对称[2]矩阵$A=A^H$、对合矩阵$A^2=I$、幂等矩阵$A^2=A$、幂零矩阵$A^m=O,\exists m\in\mathbb{N}$、幂幺矩阵$A^m=I,\exists m\in\mathbb{N}$、正交矩阵$A^{-1}=A^T$、酉矩阵(么正矩阵)$A^{-1}=A^H$、对角矩阵$diag(a_{11},...,a_{nn})$、正定矩阵$x^TAx>0,\forall x\in R^n$，有些定义其实是有条件的比如逆

[1]实际上，实矩阵看成复矩阵也一样可以定义的，只是没啥意义就是了

[2]有时也把共轭转置称为厄米(Hermitian)转置，相应的对称称为厄米矩阵，笔者认为这没必要，对于简单的事物还是以特性称呼更好

矩阵要求矩阵必需是方阵且可逆[3]，正定矩阵要求实对称，这些都是很容易看出来的。矩阵之间的关系也是很重要的，比如相似$A = P^{-1}BP, \exists P$、相合$A = P^{H}BP, \exists P$，研究关系变换所保持的特征量也很重要。在上述概念基础上，矩阵的另一个重要内容是，研究**方阵**的**特征值**和**特征向量**，核心就一个式子$Av = \lambda v$和一个特征多项式$|A - \lambda I|$。或许很多人在初学矩阵的时候，好像就两个核心应用，一是用克莱姆(Cramer)法则来解多元线性方程，二是研究二次型$P(x) = x^{T}Ax$理论。矩阵论还有一个重要的内容是**秩**(rank)，为什么我们一直没有提它呢，向量、向量的线性相关都是可以很好定义的，把矩阵中线性无关向量的最大个数称为秩也是一件很容易的事。我们回忆一下，在[1]中，我们曾经给出了下面的数学基本框架图。



矩阵论正是现世数学中的对象，但我们必需指出一点，矩阵作为一个基本对象，它的公理依赖性过高，比如实数上的矩阵，它必需要先完成实数的定义，而从序数公理(Peano axioms)构造出实数来有一段漫长的过程，这样矩阵作为一个基本对象是不合格的，因为通常我们研究矩阵不会去关心矩阵的内容，而是矩阵的表性，换言之实数的性质是没有用的，但因为这样拖累了矩阵的前进是不划算的。我知道你可能还是一脸迷糊，简单粗暴地来说，对于矩阵你是更愿意写成一个符号A，还是一个数字表格呢。将矩阵的研究放到幻世数学中，我们才能对矩阵有本质的深入研究，当然学习现世矩阵本身是很重要的，因为它是理解幻世的基础。接下来我们将借助幻世的代数结构来发现矩阵，这样它只会依赖于集合论公理，性质将更为本质，有关群和环的内容我们在[1]中已经讨论得很详细了，所以我们将直接从域开始。

所谓的**域**F，其实就是一个有**加法**$a + b$和**乘法**ab的抽象系统，首先加法构成一个交换群，单位元记为0，逆元记为$-a$，其次$F - \{0\}$和乘法也构成一个交换群，单位元记为1，逆元记为a^{-1}，最后再加上一个两种运算间的分配律作为联系，虽然有不少等价定义，但笔者认为这样的看法是最自然的。至于域之间的**同态**可以直接由它作为幺环的同态继承过来，即保持加

[3] 可逆，也可以说成非奇异，指的是行列式非零

法、乘法和1，当同态是一个可逆的映射时就变成了**同构**，这些都是比较基本的内容，我们接下来可以进入主题了。

定义 2.1: 设k是域

(1)如果一个交换群$(V,+,\mathbf{0})$，与k有**数乘**运算$k\times V\to V,(a,v)\mapsto av$并且满足$\forall a,b,1\in k,u,v\in V$有，$a(u+v)=au+av$、$(a+b)v=av+bv$、$(ab)v=a(bv)$、$1v=v$，则称$V$是$k$上的**线性空间**或向量空间，在这个系统中我们把k和V的元素分别称为**标量**和**向量**

(2)设V是k上的线性空间，如果$U\subset V$满足，$\mathbf{0}\in U$、$u_1,u_2\in U\Rightarrow u_1+u_2\in U$、$u\in U,a\in k\Rightarrow au\in U$，则称$U$是$V$的**子空间**。

线性空间里的元素就是我们中学所学向量的抽象代表，它包含了向量所拥有的性质，我们需要注意到这里有两个加法群，域的零元(加法群的单位元)0和线性空间的单位元$\mathbf{0}$是完全不同的存在，但接下来为了使我们的抽象结构更加统一，我们就和加法一样把$\mathbf{0}$记为0，至于怎么区分直接看运算。我们之所以把群区分为加法群和乘法群，主要是因为环结构的需要，而更近一步的结构，我们基本遇不到了，主要因为它们基本都可以由加法和乘法推出，其实线性空间上也可以加上一个乘法结构。

定义 2.2: 设$\mathcal{A}$是域F上的一个线性空间，如果有个乘法运算$\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A},(a,b)\mapsto ab$满足$\forall a,b,c\in\mathcal{A},k\in F$有，$a(b+c)=ab+ac$、$(a+b)c=ac+bc$、$(ka)b=a(kb)=k(ab)$，则称$\mathcal{A}$是$F$上的**代数**

在代数的最后一条性质中，实际上就是说明数乘运算与乘法运算是如何进行交互的。“代数”这个抽象结构，就像它的名字那样，已经算是一个定义在代数顶端的结构了。是吗？难道不能在“代数”这个结构上再定义一个矩阵空间啥的吗？其实类似的问题，我们在[1]的范畴论那章也讨论过，范畴之上有函子，函子之上有自然变换，自然变换之上只能回到范畴，我们的目的就是为了防止无限定义。同样地，域之上有线性空间、线性空间之上有线性变换、而线性变换则回到了环，域和环从结构上是一脉相承的只是性质稍微多了点而已。不过在此之前，我们先来引入线性空间上的一些重要内容。

定义 2.3: 设V是域k上的一个线性空间，$X=\{v_1,...,v_n\}\subset V$是一个向量集

(1)我们把形如$v=a_1v_1+...+a_nv_n,a_i\in k$的向量$v$称为$X=\{v_1,...,v_n\}$的**一个线性组合**，我们把$X=\{v_1,...,v_n\}$所有线性组合构成的集合记为$\langle v_1,...,v_n\rangle$或$\langle X\rangle$，并称为由$X=\{v_1,...,v_n\}$张成的子空间

(2)如果存在非全零标量$a_1,...,a_n\in k(\exists i,a_i\neq 0)$使得$\sum_{i=1}^n a_iv_i=0$，则称$X=\{v_1,...,v_n\}$是**线性相关**的，否则称为**线性无关**的

(3)我们把V中元素个数最大(可能是无穷)的线性无关向量集称为V的一组**基**，而这个最大值称为V的**维数**，并记为$dim_k(V)$或$dim(V)$

(4)设W是域k上的线性空间，如果映射$T:V\to W$满足$\forall u,v\in V,a\in k$有，$T(u+v)=T(u)+T(v)$、$T(av)=aT(v)$，则称T是一个**线性变换**。如果T还是一个双射，则称T是**非奇异的**或是一个**同构**。如果存在非奇异线性变换$T:V\to W$则记$W\cong V$

(5)容易定义线性变换$T:V\to W$的**核**$\ker T=\{v\in V|T(v)=0\}$和**像**$\mathrm{im}T=\{w\in T|w=T(v),\exists v\in V\}$。容易证明它们构成子空间，我们把核$ker(T)$的维数称为$T$的**零度**，把

像$im(T)$的维数称为T的**秩**。

在定义(3)中，我们充分利用了集合论的性质，有些作者喜欢将张成V的线性无关向量集称为基，此时需要证明所有基的元素个数都是相等的，这样才能把基中元素的个数称为维数。使用(3)的定义我们也无需考虑线性无关向量集的存在性，如$\varnothing$可以看成零维、域k可以看成一维，当然在证明一些定理时有些不便，但我们倒是无所谓就是了。实际上，由于域和环的抽象结构是类似的，我们可以定义域上线性空间和线性变换在环上的类似物，即模和模同态，但我们依旧选择在域上研究，因为域上线性空间有个重要定理，对于环上模而言是没有的。

定理 2.1: 如果V是域k上的n维线性空间，则$V \cong k^n$。

由于环没有类似的性质，所以我们要给出类似性质的模，我们通常将幺环R上同构于R^n的模称为**秩**为n的**自由模**，由于我们给出的是幺环，没有交换性，所以此处的模通常指左模。上述性质对于构造矩阵是十分重要的，所以通常我们在域的层面讨论矩阵，而不在环上，但可以取环上的点。接下来我们将指出线性变换的本质就是矩阵，它比起单纯的排布更加本质，具有重要的不变性。

定义 2.4: 设$V = \langle v_1, ..., v_n \rangle = \langle X \rangle$和$W = \langle w_1, ..., w_m \rangle = \langle V \rangle$是域$k$上的线性空间，$T : V \to W$是一个线性变换。则$T$在基$X, Y$下的**矩阵**指$m \times n$矩阵$A = (a_{ij}), a_{ij} \in k$，并且满足$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$，我们记${}_Y[T]_X = A$。

虽然在读者的观点看起来，好像又变回来矩阵作为排布表格的定义，但不是这样的，我们将指出线性变换其实就是矩阵，只是它在不同的基下有不同的表现形式，但不同表现形式之间是本质上等价的，任何一种表现都可以作为一个矩阵论。

定理 2.2: 设V和W分别是域k上的n维和m维线性空间，记一切线性变换$T : V \to W$组成的集合为$Hom_k(V, W)$，由k中元素组成$m \times n$矩阵的集合为$Mat_{m\times n}(k)$。则对任意V的基X和W的基Y，映射$Hom_k(V, W) \to Mat_{m\times n}(k), T \mapsto_Y [T]_X$都是双射。

上述定理告诉我们，矩阵和线性变换是一一对应的，也就是说，如果我们从矩阵转到线性变换的话，就可以无需考虑矩阵的内容到底是什么了。不过还没有结束，我们还需要其上代数结构的对应，从而在上述定理基础上实现运算的对应。这其实很简单，矩阵的乘法就是线性变换作为映射的复合${}_Z[ST]_X = ({}_Z[S]_Y)({}_Y[T]_X)$，逆来自非奇异线性变换${}_X[T^{-1}]_Y = ({}_Y[T]_X)^{-1}$，加法可以定义为$T, S : V \to W, (T + S)(a) = T(a) + S(a), a \in V$但作用并不大就是了。通过这些，我们发现如果$n$维线性空间存在区别，那么$Hom_k(V, W)$的确定性就不高，但由于线性空间同构定理[4]的存在，我们自然可以如此进行看待$Hom_k(k^n, k^m) = Mat_{m\times n}(k)$。由于在矩阵论中方阵研究的比较多，而它对应的就是自同态了$End(k^n) = Hom_k(k^n, k^n) = M_n(k)$，其上的加法可以互相兼容，此时$End(k^n)$可以形成一个环，于是到达了我们的目标。当然我们可以进一步选取非奇异自同态，即可以得到$GL_n(k)$或$GL(k^n)$，但它没有零元，只是一个乘法群。此时，我们终于可以下结论了，**研究向量就是研究线性空间，研究矩阵就是研究线性变换，研究线性代数就是研究线性空间和线性变换**，这样我们就无需关心矩阵填充数字是需要R这样丰富的性质，只需具有域的特性即可，而且还能从填充这个行为分离开来，直接考虑矩阵本身这个

[4] 值得注意的是，这个定理基于上述理论推导出来，但我们为了讲解，进行了因果倒置

对象A，即一个线性变换，其实后者才是我们需要的。

2.1.2 内积与双线性函数

通过上述对应，我们发现矩阵重要的转置运算不能轻易定义出来，但它又关联了几种特殊的重要矩阵。实际上，虽然我们无法找到转置运算，因为它本来就是由我们所抛弃的排布定义出来的，但是我们可以研究与之相关的一些重要东西。如果我们选取实数域$F = R$或复数域$F = C$，则对任意线性空间F^n，我们可以选取归一正交基$\{(1,0,...),(0,1,...),...\}$，则$F^n$之间线性变换的矩阵就可以得到我们传统意义的矩阵论。如果需要在一般线性空间中找到标准正交基的话，那么向量的度量是很重要的，这就是我们下面的概念，为了方便以后我们将域F上的线性空间写成F^n。

定义 2.5: 设$V = F^n$是一线性空间

(1)如果映射$f : V \times V \to F$满足$\forall a_1, a_2, b_1, b_2, a, b \in V, k_1, k_2 \in F$有，$f(k_1a_1 + k_2a_2, b) = k_1f(a_1, b) + k_2f(a_2, b)$和$f(a, k_1b_1 + k_2b_2) = k_1f(a, b_1) + k_2f(a, b_2)$，则称$f$是$V$上的一个**双线性函数**

(2)设f是一双线性函数，$X = \{v_1, ..., v_n\}$是V的一组基，我们记$a_{ij} = f(v_i, v_j)$，此时我们把n阶方阵(a_{ij})称为f在基X下的**度量矩阵**。此时f有显性表达式$f(x, y) = x^TAy$。我们一样可以定义其对应的线性变换，但没有必要，不过我们可以得到新的一一对应“n阶方阵$\leftrightarrow$n维线性空间上的双线性函数”，请牢记这个对应

(3)一旦定义出双线性函数f它的转置已经很明显了即$f^T(x, y) = f(y, x)$，但我们不太需要，我们进一步讨论其重要的特性。如果$f(a, b) = f(b, a), \forall a, b \in V$则称$f$是**对称的**；如果$f(a, b) = -f(b, a), \forall a, b \in V$则称$f$是**反对称的**

(4)由于F可以看成一维线性空间，我们将线性变换$f : V \to F$称为V上的一个**线性函数**，把所有V上的线性函数的集合记为$V^* = Hom(V, F)$。可以证明它构成一个线性空间，并且在V的一组基$X = \{v_1, ..., v_n\}$下f有显性表达式$f(x) = \sum_{i=1}^n f(v_i)x_i, x = \sum_{i=1}^n x_iv_i$，此时可以给出同构$Hom(V, F) \to V = F^n, f \mapsto (f(v_1), ..., f(v_n))$，即有$V^* \cong V$，并把$V^*$称为$V$的**对偶空间**。进一步考虑$V^{**} = (V^*)^*$，此时同构$V^{**} \cong V$不依赖基的选取，有自然同构，故我们认为$V^{**} = V$

(5)对于一个双线性函数f和向量$v \in V$，我们定义两个线性函数$f_{v,R} : V \to F, a \mapsto f(a, v)$和$f_{v,L} : V \to F, a \mapsto f(v, a)$。设$X = \{v_1, ..., v_n\}$是$V$的基，我们把$V^*$的子空间$\langle f_{v_i,R}, f_{v_i,L} | v_i \in X\rangle$称为$f$的**秩空间**。并把秩空间的维数称为$f$的**秩**。此时，我们可以定义如果$f$是满秩的，则称$f$是**非退化的**。

此时，我们借助(线性变换，双线性函数)这个强大的体系，基本可以研究所有的矩阵理论了，并且通过选取基可以回归传统的矩阵理论，而引入线性函数是为了将其对应到向量，这样对于矩阵和向量我们可以有一个更加统一的看法。至于二次型，可以直接看成对称的双线性函数$f(a, a)$。不过好像我们还是没有解决基的归一正交性，此时我们必需找一个合适的双线性函数来进行度量，从而得到归一性。不论是二次型的正定还是归一的度量，核心在于我们必需在域上引入序结构，而只有特征为零的定义了绝对值的域才有自然的序结构，通常我们不会去研究p-进线性代数，又由于共轭属于复数的特有运算，所以我们接下来只讨论在同构意义下唯二

的两个阿基米德局部域R和C，值得注意的是不考虑分析情况，我们需要的只是R上的序结构和C的共轭和模。

定义 2.6: (1)设V_1, V_2是V的子空间，我们定义它们的和为$V_1+V_2=\{a_1+a_2|a_1\in V_1, a_2\in V_2\}$。如果$V'=V_1+V_2$满足$\forall a\in V'$存在唯一表示$a=a_1+a_2, a_1\in V_1, a_2\in V_2$，则称$V'$是$V_1$和$V_2$的**直和**，并记$V'=V_1\oplus V_2$

(2)如果$V=R^n$上的对称双线性函数f，满足$\forall a, f(a,a)\geq 0$且$f(a,a)=0\Leftrightarrow a=0$，则称$f$是**正定的**。我们把$V=R^n$上的一个正定对称双线性函数称为$V$的一个**实内积**，并把$(V,f)$称为**实内积空间**。同时，我们把有限维实内积空间称为**欧式空间**(或Euclidean空间)

(3)设$V=C^n$是一线性空间，如果映射$f: V\times V\to C$满足$\forall a,b,c\in V, k_1,k_2\in C$有，$f(a,b)=\overline{f(b,a)}$和$f(k_1a+k_2b,c)=k_1f(a,c)+k_2f(b,c)$，则称$f$是一个**复对称双线性函数**。如果复对称双线性函数f满足$\forall a, |f(a,a)|\geq 0$且$f(a,a)=0\Leftrightarrow a=0$，则称$f$是**正定的**。我们把$V=C^n$上的一个正定复对称双线性函数的模称为$V$的一个**复内积**，并把$(V,f)$称为**复内积空间**，或**酉空间**，或**幺正空间**。同时，我们把有限维复内积空间称为**厄米空间**(或Hermitian空间)

(4)设线性空间$V=F^n(F=R$或$F=C)$有一个内积$f: V\times V\to R$(注意复数时把函数的模$|f|$称为内积)。此时可以定义向量$a\in V$的**长度**为$|a|=\sqrt{f(a,a)}$，并把$|a|=1$的向量称为**单位向量**。进一步我们定义向量$a,b\in V$的**角度**为$cos(\langle a,b\rangle)=\frac{f(a,b)}{|a||b|}$，角度只是为了感知$\langle a,b\rangle=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow f(a,b)$存在的。此时，我们将满足$f(a,b)=0$称为是**正交的**，并记$a\perp b$。我们还能定义两个两个向量间的**距离**为$d(a,b)=|a-b|$。我们把互相正交的单位向量构成的基称为**标准正交基**或称为归一正交基。最后，我们定义子空间$U\subset V$的**正交补**为$U^{\perp}=\{v\in V|f(v,u)=0,\forall u\in U\}$。

我们定义内积的主要目的是给出了，两类重要矩阵的对应，即“正交矩阵$\leftrightarrow$实内积”、“酉矩阵$\leftrightarrow$复内积”。此时读者需要认识到虽然复对称双线性函数不是一个双线性函数，但复内积是一个双线性函数，因此也可以放到之前方阵的对应链中，我们把实内积和复内积统称为**内积**，并把运算记为(a,b)，并把配有内积的线性空间$V=F^n$称为**内积空间**，由于内积构造不是所有线性空间都存在的，所以接下来我们把内积空间和线性变换联系起来。

定义 2.7: 设$V=F^n$是内积空间，内积(a,b)是一个满足特定条件的双线性函数

(1)如果线性变换$T\in End(V)$满足$(T(a),T(b))=(a,b),\forall a,b\in V$，则称$T$是一个**正交变换**

(2)如果线性变换$T\in End(V)$满足$(T(a),b)=(a,T(b)),\forall a,b\in V$，则称$T$是一个**对称变换**。

从线性变换的角度来看，酉性和正交性是一类东西，如果非得将酉和正交进行区分，则必需分别在复数域和实数域中进行特例构造才行。对称的道理也是一样的，如果要把共轭对称区分出来的话，就必需特例化为复数域上的线性空间。一个常用的记号，正交群$O(V)\subset GL(V)$，和酉群$U_n(C)=O(C^n)$。笔者必需指出翻译所带来的困扰，酉的英语是unitary，属于音译，从特性上应该翻译为幺正，正交的英语是orthogonal，在外语文献中喜欢将unitary作为上述变换的统一名称，而将正交作为实数情况下的特例，笔者只能给的建议是，从特性上来认识对象，而不是从名称上。我们发现不论是实内积，还是复内积，它们都是对称双线性的。实际上，我们可以扩展内积的内涵，得到正交空间，但由于没有序结构，将不存正定性，从而没有长度角

度等概念，但由于存在1和0，我们还是可以得到弱化的正交基。

定义 2.8: 对于线性空间$V = F^n$，我们把其上的一个对称双线性函数f称为V的一个**内积**，并把(V, f)称为**正交空间**，如果f是非退化的，则称(V, f)是**正则的**。接下来，我们来抽取一些类似内积空间的定义

(1)如果非零向量$a \in V$满足$f(a, a) = 0$，则称a是**迷向的**。如果(V, f)包含一个迷向向量，则称(V, f)是**迷向的**

(2)如果向量$a, b \in V$满足$f(a, b) = 0$，则称它们是互相**正交的**。对于子集$S \subset V$，可以定义它的**正交补**为$S^{\perp} = \{v \in V | f(v, s) = 0, \forall s \in S\}$

(3)如果一组基$X = \{v_1, ..., v_n\}$满足，$f(v_i, v_j) = 0(i \neq j)$且$f(v_i, v_j) = 0, \pm 1$，则称$X$为**标准正交基**。

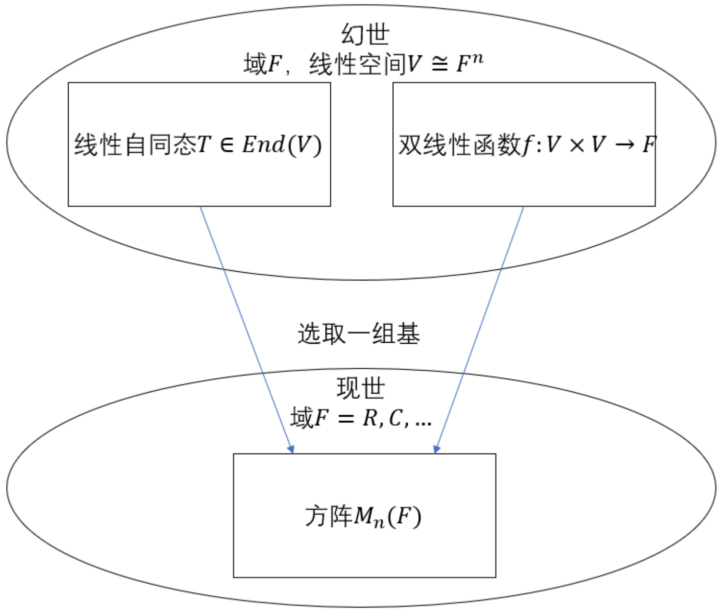
由于迷向元素的存在，我们不能把归一给限制起来，内积结果自然可以为零。正交的特性，可以将线性空间进行直和分解，算是最重要的性质了。

定理 2.3: 设F的特征非2，(V, f)是正交空间，则对V的任一有限维正则子空间W有$V = W \oplus W^{\perp}$。

迷向是个不太好的性质，但由于非迷向一定正则，所以利用正则空间，可以给出相应的正交变换$f(a, b) = f(T(a), T(b))$。既然都用来对称，最后就再来用个反对称，就能得到我们的辛了，它的英语是symplectic，也是音译。

定义 2.9: 对于线性空间$V = F^n$，我们把其上的一个反对称双线性函数f称为V的一个**辛内积**，并把(V, f)称为**辛空间**，如果f是非退化的，则称(V, f)是**正则的**。

辛空间的所有向量都是迷向的，并且有限维正则辛空间的维数一定是偶数，所有我们通常见到的辛群，或辛矩阵基本都是偶数阶的，而辛变换同样可以定义为保持内积不变。其实笔者，以前学酉、辛、正交什么的也是很容易搞混的，在我看来确实是术语的问题比较大。比如，辛看成由四元数体H上模的保内积变换来导出。正是由于这些乱七八糟的性质，我们最好就是不要在抽象理论中考虑特殊矩阵，使用常规的对应来理解就行了，即"(线性变换自同态，双线性函数)$\leftrightarrow$方阵"和"(线性变换自同构，非退化双线性函数)$\leftrightarrow$可逆方阵"。如果考虑内积，和保内积性，就放到对应的实数域R和复数域C上，值得注意的是四元数集H是一个**体**(即域的乘法没有交换性)，所以常规意义的辛有多种含义，$Sp(2n, R)$和$Sp(2n, C)$指的就是我们上述定义的这种辛，而$Sp(2n)$则指的是与四元数相关的辛。类似的用法是酉$U(n)$和正交$O(n)$，它们分别是与复数C和实数R相关，这种不带域符号的辛、酉、正交，通常表示内积已经确定给出来的，比如实向量内积$(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$、复向量内积$(x, y) = x_1 \overline{y_1} + ... + x_n \overline{y_n}$等等。



其实最大的问题就一个，逆定义在线性变换中，而转置定义在双线性函数中，而这两个结构虽然可以通过矩阵联系，但很难把运算给兼容起来，结果就只能通过选取基回到矩阵本身的理论了。至于，行列式和迹，它们都是特殊的线性函数，必需实体化才是可计算的。矩阵的相似，实际说明它们来自同一个线性变换，矩阵的相合，则说明它们来自同一个双线性函数。由于合同和相似不对等，所以我们不认为线性变换和双线性函数有确定的对应关系。

2.1.3 张量与多重线性函数

通常研究解析几何，我们多运用线性变换侧的东西，并以双线性函数侧的东西为辅，而张量属于双线性函数侧的扩展，它通常运用于微分几何，不过我们还是趁热打铁地马上引入比较好。张量有一种类似矩阵的传统定义法，属于物理系学的东西，我们作为高贵的数学系应该从更加抽象的角度来理解张量，而且这样的理解才会更加的本质，这样也符合数学该有的作风。

定义 2.10: 设$V_1, \ldots, V_r$都是域F上的线性空间，如果映射$T: V_1 \times \ldots \times V_r \to F$满足$\forall a_i, b_i \in V_i, k \in F$有，$T(a_1, \ldots, a_i + b_i, \ldots, a_r) = T(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_r) + T(a_1, \ldots, b_i, \ldots, a_r)$和$T(a_1, \ldots, ka_i, \ldots, a_r) = kT(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_r)$，则称$T$是一个**多重线性函数**。我们把一个多重线性函数$T_q^p: \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q} \to F$，称为$V$上的一个**(p,q)型张量**，p称为**逆变次数**，q称为**协变次数**，并把(0,q)型张量称为**q阶协变张量**，把(p,0)型张量称为**q阶逆变张量**。我们把V上所有(p,q)型张量的全体记为$T_q^p(V)$。

根据上面定义，(0,0)型张量为标量，(0,1)型张量即一阶协变张量，也就是线性函数，也就是向量，(0,2)型张量即二阶协变张量，也就是双线性函数，也就是矩阵。或许你现在最大的疑问是，V^*和V的区别在哪，简单来讲V^*与V根据基的不同有无数中同构方式，而V^{**}与V的同构与基无关或者是同构是唯一的，因此(1,0)型张量也视作向量。其实，这就是大家在代数几何中常见的万有性，我们来看一下另一种等价的构造方法。

定义 2.11: 设V, W是域F上的线性空间，如果存在一个F上的线性空间U_0和一个双线性映射T_0:

$V\times W\to U_0$满足

(1)$U_0=\langle im(T_0)\rangle$，即$U_0$由$T_0$的像生成的线性空间

(2)对任意F上的线性空间U和双线性映射$T_2:V\times W\to U$，存在线性变换$T\in Hom(U_0,U)$，使得$T_2=TT_0$

则称(U_0,T_0)为V和W的**张量积**，并记为$U_0=V\otimes W$。

此时我们可以先定义张量空间$T_q^p(V)=\underbrace{V\otimes...\otimes V}_{p}\otimes\underbrace{V^*\otimes...\otimes V^*}_{q}$，并把它的元素称为一个(p,q)型张量。由于张量积隐含了一个多重线性函数，所以虽然符号看起来和之前是反了过来，但实际上是一样的，接下来有一个核心定理，来阐述张量的万有性。

定理 2.4: 设V,W是域F上的线性空间，则一定存在一个张量积$(U_0,T_0),U_0=V\otimes W$。并且如果$(U,T),U=V\otimes W$也是张量积，则存在唯一线性同构$S\in Hom(U_0,U)$使得$T=ST_0$。

万有性的关键在于同构是否唯一，通过上述的思考，我们知道通过张量积来构造张量和直接构造多重线性函数是等价的。张量也是一种抽象体，可以通过选取基来将它具体表现为一个数的排布，而这些排布在不同基下通过线性同构进行转化。请理解这些东西，张量的数学严格定义还表明了，张量与坐标无关的特性，$Hom(T_q^p(F^n),F)\cong T_p^q(F^n)$。此时，张量积$(U_0,T_0),U_0=V\otimes W$的内部元素为$a\otimes b=T_0(a,b)\in U_0,a\in U,b\in V$，它给出了元素张量积的定义，此时张量积又可以视为一个双线性映射$a\otimes b:V^*\times W^*\to F,(f,g)\mapsto f(a)f(b)$，因此两种定义是等价的，并且对偶空间和原空间要交换位置。

定理 2.5: 设V是F上的n维线性空间，则$T_q^p(V)$是一个n^{p+q}维线性空间。更进一步有

(1)直和$\oplus_{p,q\geq 0}T_q^p(V)$以张量积$\otimes$作为乘法构成一个分次结合代数。分次即$T_q^p\otimes T_s^r=T_{q+s}^{p+r}$，结合即$(T\otimes S)\otimes R=T\otimes(S\otimes R)$

(2)所有逆变张量$T(V)=\oplus_{p=0}^{\infty}T_0^p(V)$或所有协变张量$\oplus_{p=0}^{\infty}T_p^0(V)$，构成(1)中代数的子代数。我们称$T(V)$为**张量代数**。

协变张量和逆变张量作用基本是相同的，如果考虑抽象代数结构，我们一般使用逆变张量，因为此时容易使用张量积，如果是应用层面，我们一般使用协变张量，因为多重线性函数比较好进行计算。对称性在协变张量也更好定义，首先读者要熟悉置换群S_n，并且对于$\sigma\in S_n$，定义$sign(\sigma)=1$(偶置换)或-1(奇置换)，我们使其作用于张量代数(不论协变还是逆变，但不能混变)$T(V)$，做法为对一个p-阶张量$T_{x_1,...,x_p}$和一个置换$\sigma(T)=T_{x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(p)}}$，即按照置换来交换变量的位置。

定义 2.12: 设线性空间V上的p阶张量$T\in T(V)$

(1)如果$\forall\sigma\in S_p,\sigma(T)=T$，则称$T$是**对称张量**。类似地，如果$\forall\sigma\in S_p,\sigma(T)=sign(\sigma)T$，则称$T$是**反对称张量**。所有p-阶对称张量记为$S^p(V)\subset T(V)$或$\mathrm{Sym}^p(V)$，所有p-阶反对称张量记为$A^p(V)\subset T(V)$或$\mathrm{Alt}^p(V)$

(2)更进一步，我们把$S_p(T)=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\sigma(T)$称为**对称化算子**，把$A_p(T)=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}sign(\sigma)\sigma(T)$称为**反对称化算子**。

通过上述的运算，我们有一些简单的性质，比如$S^p(V)=S_p(T(V))$和$A^p(V)=A_p(T(V))$，其实还是有一些非对称的存在，但是我们可以通过直和来分解成两个部分，比如二阶张量$T^2(V)=$

$S^2(V)\oplus A^2(V)$，由于张量代数是一个分次代数，它的直和分解为$T(V)=F\oplus V\oplus T^2(V)...\oplus T^p(V)...$，我们只关注张量的阶，而不管协变还是逆变，其中$F=T^0(V)$为常量，$V=T^1(V)$为向量。

定义 2.13: (1)对任意一个张量$T\in T(V)$，我们把它按$T(V)=\oplus_i T^i(V)$的分解$T=\sum_i T_i$称为它的**齐次分解**。如果T满足$\forall i, T_i\in S^i(V)$，则称T是**对称张量**，它的全体记为$S(V)$。类似的有反对称张量全体$A(V)$，对称化算子$S=\sum_{i=0}^{\infty}S_i$和反对称化算子$A=\sum_{i=0}^{\infty}A_i$

(2)容易证明$S(V)\cong T(V)/ker(S)$，可以将对称化算子$S(V)$的元素视为$S(x), x\in T(V)$构成的等价类，我们定义$S(V)$中的乘法为$S(x)S(y)=S(x\otimes y)$，则$S(V)$是一个交换结合代数。我们把$S(V)$称为V上的**对称代数**

(3)使用和(2)一样的思想，$A(V)\cong T(V)/ker(A)$，$A(V)$是一个非交换结合代数，其上的乘法我们喜欢表示为$S(x)\wedge S(y)=S(x\otimes y)$。我们把$S(V)$称为$V$上的**外代数**。

对于张量主要能认识就行了，核心要理解对偶空间和原空间之间的关系，另外我们也看到了所谓“线性代数”中线性的含义，其实就是无处不在的多重线性函数。至于“对称代数”和“外代数”都只是张量代数的子代数，而张量积则是一直贯穿整个代数的乘法。

2.2 计算的几何学——解析几何

2.2.1 变换群思想

解析几何，简单来说就是建立直角坐标系，并为几何图形，找到对应的代数方程，比如中学的圆锥曲线$ax^2+by^2=1$，本科的二次曲面$ax^2+by^2+cz^2=1$。至于一次直线和一次平面都是平凡的。在此基础上，还能将平行、垂直、法线等，转化为代数上的特征。所以，更多的时候，解析几何其实就是一个查公式并且计算的过程，这样的几何并不有趣，而且繁琐的计算让我们只能将三维二次作为最高上限，比如三次曲线在解析几何上就没什么研究了，因为更高维、更高次的解析几何，有了一个更加合乎情理的称呼“代数几何”。而解析几何，只是代数几何在历史遗留下的前身罢了。

在解析几何中，唯一一个有参考价值的思想是变换群的思想，我们来稍微介绍一下。如果不考虑位置因素，圆$x^2+y^2=1$和$(x-a)^2+(y-b)^2=1$都是一个东西，只是因为我们建立的坐标系不同罢了。我们考虑实空间R^n，其上可以定义内积，因此得到一个欧几里得空间；考虑复空间C^n，其上可以定义内积，因此得到一个酉空间；考虑四元数空间H^n，其上可以定义内积，因此得到一个辛空间。我们将这三种空间，统一记为F^n，其对应的内积记为$(a,b), a,b\in F^n$。对于空间F^n，可以定义线性自同构$T: F^n\to F^n$，并将其上所以线性自同构的全体记为$GL(F^n)$，其构成一个群，并且选定一组基后，可以与可逆矩阵有一个同构$GL(F^n)\cong GL_n(F)$，这些都是线性代数中的内容了。

一个**几何**，由空间F^n和变换群$S\le GL(F^n)$构成。我们把任一子集$V\subset F^n$在变换S下形成的等价类称为一个**图形**，记为$[V]$，因此图形的性质必需是满足在S下不变的性质。我们把$(R^n, O(n))$称为**欧式几何**、$(C^n, U(n))$称为**酉几何**、$(H^n, Sp(n))$称为**辛几何**。如果只是在抽象的角度，我们什么都理解不了，我们举一些简单的例子，比如在欧式几何下，$(x-a)^2+(y-b)^2=1$才是一个图形，而$(x-a)^2+(y-b)^2=1$和$(x-a)^2+(y-b)^2=2$则是两个图形，因此圆形可以定义半径这个性质。我们把$(R^n, GL(n))$称为**仿射几何**，在这种几何下$(x-a)^2+(y-b)^2=$

1和$(x-a)^2+(y-b)^2=2$是同一个图形，因此无法定义半径这个性质，实际上在仿射几何下，连圆也无法定义，因为$(x-a)^2+(y-b)^2=1$和$c(x-a)^2+(y-b)^2=1$也是同一个图形。如果只是定义圆的话，我们可以定义收缩变换群$KO(n)=\{kO(n),k\in F\}$，则在几何$(R^n,KO(n))$我们可以定义出圆，但不能定义出圆的半径。

变换群其实就是一种研究不同变换下有哪些不变量的方法，其实如果更近一步的话可以研究变换使相应的变换量产生了哪些改变。通常这里的变换群都是线性变换群，所产生的几何都是**线性几何**，并且一定会处于“仿射几何”和“欧式几何”之间$O(n)\le S\le GL(n)$。如果要产生**非线性几何**，有两者方式，一是减小欧式几何的变换群，这样的几何会使得度量性质因位置而发生改变，这就是曲面上的几何，只有借助微分才能更好的研究，另一种则是包含欧式变换群的更大的非线性变换群，这样的几何真的存在吗？只能说，这是行不通的。但其实大家可能听过非欧几何，如果大家有理解我之前所说的线性代数的话，那么内积的定义其实是不唯一的，传统的欧式内积是$(a_1,...,a_n)(b_1,...,b_n)=a_1b_1+...+a_nb_n$，我们可以通过定义其它的内积来使得$(R^n,O(n))$生成其它类型的几何，我们来讲一下怎么构造这些度量。

平面且坐标无关的非欧几何大概就两种，双曲几何和球面几何。首先，我们注意到内积(a,b)可以导出度量$d(a,b)=\sqrt{(a-b,a-b)}$，但反之却不行，所以内积空间的性质其实比度量空间更强，如果我们想要得到非欧几何就有必要将保持内积弱化为保持度量。首先我们接取欧式下的一些计算性质，比如长度什么的，反正线性空间都是$V=R^n$，并选取标准正交基为$\{(1,0,...),(0,1,...),...\}$，我们先定义一个圆集$C_r=\{v\in R^n:|v|=r\}$，对任意两个不等的在$C_r$内的向量$P,Q\in R^n$，设它们确定的直线为$l_{PQ}$，则它与$C_r$有两个交点(必需选取基)$R_1,R_2$，此时定义$d(P,Q)=\frac{r}{2}ln(\frac{PR_1}{PR_2}+\frac{QR_1}{QR_2})$为**罗式度量**，定义$d(P,Q)=\frac{ir}{2}ln(\frac{PR_1}{PR_2}+\frac{QR_1}{QR_2})$为**黎式度量**。值得注意的是，这些几何都是非线性的，所以我们考虑映射$T:F^n\to F^n$全体构成的群$Hom(F^n)$，我们将保持相应距离构成的子群记为$D=\{T\in Hom(F^n):d(x,y)=d(T(x),T(y)),\forall x,y\in F^n\}$。这样，罗氏度量下的$(R^n,D)$称为**双曲几何**，黎式度量下的$(R^n,D)$称为**球面几何**。

我们必需指出，上面的思想显得稍微愚钝了一些，如果要认识非欧几何，最好的办法应该是考虑其对应的曲面模型，但这样就必需要暂时离开线性代数，这样就基本脱离了我们的初衷了。在这里，我们只是想介绍变换群这种思想，笔者不得不说，变换群思想虽然是过去式，但几何对象的等价思想在现代的几何中也是很重要的。当然摆脱线性的限制，寻找更加广阔的非线性几何，还是得靠我们的“代数几何”。或许解析几何，我们也只能到此为止了，我们只能徘徊于欧式几何和仿射几何之间，但这恰好也是解析几何的主要研究内容。

2.2.2 射影与仿射

代数几何的核心研究对象是，仿射概形和射影概形及粘合而成的概形。我们前面已经探讨了，欧式几何的变化群$O(n)$和仿射几何的变换群$GL(n)$，它们本应该涵盖了所有的线性几何，为什么还会有个也属于线性几何的射影几何呢？如果只是在同一维度下来看，射影几何确实广于仿射几何，但如果将维度的视野放广，n维射影几何实际上是$n+1$维仿射几何的子几何，所以它依旧没有逃出基本的线性框架$O(n)\le P(n-1)\le GL(n)$，只是维度上的藐视罢了$O(n-1)\le GL(n-1)\le P(n-1)$，但为什么射影几何会被单独的选出来呢？核心有两个，一是简单，二是紧闭。

我们先来讲一下前一个，通常我们认为线性空间F^n及其自同构群$GL(F^n)$代表了仿射几何。

构造射影几何，需要先建立点的等价关系，即$l \sim s \Leftrightarrow l = ks, \exists k \in F$，对于等价类的全体我们记为$[l] = \{s \in F^n : s \sim l\}$，此时代表射影几何的空间是商集$PF^{n-1} = F^n/\sim$，此时我们要求选出保持这些等价类的子群来代表射影几何的变换群$P(n-1) = GL(PF^{n-1}) = \{T \in GL(F^n) : T[l] = [l], \forall [l] \in PF^n\}$。这样，我们得到的$(PF^{n-1}, P(n-1))$就是在变化群观点下的**射影几何**。在传统二维解析几何中，你可能有这样的回忆，就是我们通常把(x_1, x_2)称为仿射坐标，$k(x_0, x_1, x_2)$称为射影坐标，在射影坐标中必需要在前面带一个变动系数来表明不同形式的等价性。

当然射影几何的存在，主要还是为了可以使用简单的方法来产生紧闭性。初学射影几何，大家对它的最大印象可能就是存在无穷远点，射影平面还能存在无穷远直线，从而使得两条直线相交。我们必需得指出，此处并非欧几何的相交，而是因为直线相交的概念产生了变化，而传统非欧几何则是因为直线的定义产生了变化，一个简单的事实是球面S^2是定向微分流形，实射影平面PR^2是非定向微分流形，因此不可能微分同胚，前者代表了所有直线相交的非欧几何，后者代表了所有直线相交的射影几何。那么无穷远处的点存在代表了什么呢？那就是紧性和闭性，这些属于拓扑的东西，我们后面再讲。我们从大家熟知的开集和闭集来思考，传统的仿射空间是一个“开”的存在，简单来说就是怎么也无法到达边界，一个简单的例子是如果流形采用局部同胚于R^n方式来定义就无法得到带边界的流形，一个妥协的方法是让它局部同胚于$R^n_{\geq 0}$，而射影平面就不同了，它是一个“闭”的存在，存在所谓的边界，就是我们的无穷远几何体。因此在代数几何中我们会看到这样一个事实，仿射子概形都是开子概形，而射影概形都是闭子概形。当然，带边流形的定义，我们不可能采用局部同胚于PR^n的方法，因为我们不明白PR^n上的数学分析该怎么样，但是从代数的角度来看的话，PR^n的线性性质比$R^n_{\geq 0}$更优秀，后者带了个序结构，因此在射影概形中，我们不会让它来自$R^n_{\geq 0}$。

2.2.3 分离手术

最后，我们来讨论一下如何从解析几何的思想中，引出传统的代数几何。从解析几何的深入探究中，我们可以知道，它的本质就是建立，图形和方程间的关系，我们先来完成这个第一步。所谓的坐标，实际上就是一个线性空间F^n配上了一组标准正交基，如果我们想要得到不依赖坐标的图形，实际就是删去配备的标准正交基，再实际考虑线性空间本身F^n，因此任意一个子集$U \subset F^n$实际上都是仿射意义上的图形。只有图形是不能称为代数几何的，还需要代数方程来与这个图形产生对应，比如圆$x^2 + y^2 = 1$，它可以写成这样的形式$x^2 + y^2 - 1 = 0$，即多项式$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \in F[x, y]$的零点，所以在代数方我们使用$F[x_1, ..., x_n]$的任一元素的零点，你可能会想，非得是多项式吗，来个$sin(x) - y = 0$或者$e^x - y = 0$不行吗，我们必需指出“纯代数”是无法产生分析对象的，可能是中学各种$sin(x)$和e^x用多了，你才会产生它们也算代数一份子的错觉，稍微想想也明白，三角函数和指数函数是不可能纯代数定义的，我也不多说了，你们自己去想吧。

只是$F[x_1, ..., x_n]$一个元素的零点显然不够。比如空间的直线，必需要靠两个平面相交来定义$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0, b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0$，因此我们必需进一步扩展为子集$I \subset F[x_1, ..., x_n]$所有元素的公共零点，但这还是不够，因为$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$和$k(a_1x + a_2y + a_3z + a_4) = 0$显然定义的是同一个曲线。因此我们必需选则理想$I \subset F[x_1, ..., x_n]$所有元素的公共零点，这样我们就得到一个优秀的代数代表对象了。显然此时，几何方的$U \subset F^n$是不能任

意选取的，一些乱七八糟的无序子集显然是没啥意义的。因此我们定义如果子集$U \subset F^n$满足存在一个理想$I \subset F[x_1,...,x_n]$使得$U=\{x \in F^n : f(x)=0, \forall f \in I\}$是公共零点集，则称其为代数集。

首先，我们用了零点的概念，因此存在解方程的过程，如果是一般的域，那么根就可能出现在域外，这样显然是麻烦的，因此我们必需假设F是代数闭域来保证零点不会出现意外。另一方面，我们发现了重根的问题，比如$(x^2+y^2-1)^n=0$看起来好像比$x^2+y^2-1=0$的零点多，但实际所决定的点是完全一样的，如果是后者倒是无所谓，关键是前面的方程会使我们一叶障目，由它生成的理想(x^2+y^2-1)和理想(x^2+y^2-1)决定同一曲线，确是不同的理想。因此我们必需限定理想$I \subset F[x_1,...,x_n]$为根理想，即有$I=\sqrt{I}$。这样通过希尔伯特零点定理，我们就能得到，由解析几何得到代数几何的第一步产物了，(“代数集”一一对应于“根理想”)。

为啥只是第一步呢？因为代数几何比解析几何更进一步的地方就是，它还有第二步，从而使得代数几何成为了真正意义上的代数几何。首先，我们必需注意到(“代数集”$\leftrightarrow$“根理想”)是不完全的几何代数对应，它们只是对象的对应，没有实现态射的对应。回顾，我们之前讨论的变换群思想，比如仿射几何$(F^n, GL(F^n))$，那么此时我们可以定义代数集的等价为$U \sim V \Leftrightarrow \exists T \in GL(F^n), T(U)=V$，这样就给出了仿射几何下代数集的态射，那么根理想呢？显然在代数中，我们从来没有思考过，理想可以建立什么同态的概念。所以，理想来作为代数方是有缺陷的，此时我们的做法是构造一个坐标环$A=F[x_1,...,x_n]/I$，或许我们不清楚商环到底有意义(实际上是有几何意义的)，但它至少从理想这种非核心对象，晋升为了纯粹的抽象代数对象，环，实际上更近一步，它是域F上的一个代数。代数方的代表是代数，怎么会有如此巧合一个事实，由于域F上的代数，叫起来有些拗口，所以我们把它称为“F-代数”。其实单纯的F-代数完全对应，比如它不一定来自多项式环关于理想的商环等等，所以我们通常会将其限制为“有限生成的约化F-代数”。F-代数是抽象代数的对象之一，因此由同构的概念，其实可以证明“代数集同构当且仅当它们的F-代数同构”，这样我们才真正意义上实现了范畴上的对应(对象对应+态射对应)。于是代数几何的真正对应链应该是这个，在代数闭域F下((“F上的代数集”,“根理想”)一一对应于“有限生成的约化F-代数”)。

虽然，解析几何和传统代数几何都是过去式，都是处于代数几何这个大框架下的东西。但是，这些基础的思想准备，对于学习更抽象的代数几何是有极大帮助的，我们不仅要学会如何从更抽象的代数几何回归到传统的代数几何，也要学会如何反过来。我们还要知道一点，在代数几何中“线性代数”起着不可或缺的作用。

2.3 连续的工具——微积分

2.3.1 极限与一元实函数分析

通常大家所学的微积分，其实就是研究**导数和积分**的，我们必需指出一元实分析是所有分析学的基础，包括复分析、多元微积分等。有关分析学的名字有好多，像微积分啊、数学分析、实变函数啊、复变函数啊之类的，我们就统一叫成**分析学**了，它指的是研究如何将特定对象局部线性化并研究逆过程的学科，我们以一元实分析，即$f: U \subset R \to R$的分析学来理解这个东西。

通常大家所认为的分析学都是“函数的分析学”，即我们讨论所有实函数构成的集合$\{f : U \subset R \to R\}$，由于集合论的映射要求每点有定义，所以函数选取的定义域是实数域的子集，

这样还有另一个用处是选处合格区间，比如$f(x)=\frac{1}{x}$我们可以看成正负两个部分放到这个集合中去，这样我们可以将性质定义作用到全局上去。

首先是“特定对象”的概念，任意拿一个函数来进行局部线性化是不大可能的事情，所以挑选出特定对象是必要的，我们将指出“局部”表示“连续”，“线性化”表示“可导”；而“连续”引出极限，“可导”引出微分。函数在一点连续，就是在这一点的极限等于函数值，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，根据拓扑学的知识可以知道，如果这样的定义成立，那么我们就能找到一个“很小”的包含这个点的开领域，使得映射是连续映射，从而得到了我们的局部。我们把它变成一个定理来说明。

定理 2.6: 对于任意一个实函数$f:U\to R,U\subset R$，如果f在$x_0\in U$处是连续的，那么存在一个开领域$x_0\in V\subset U$，使得$f|_V:V\to f(V)$是一个拓扑空间的连续映射。如果$f|_V$还是一个单射，则它是一个拓扑同胚。

有人会说，拿一个性质更强的连续，来推一个性质更弱的连续，不是本末倒置了吗？先别急，我的目的是为了引出“幻世的分析学”，这不是在给你做点心理准备嘛。此处，我们要认识这样一个命运共同体的事实(点连续，极限存在，局部领域)，现在的问题在“极限存在”上，显然有一个十分特别的情况是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，这往往都是十分恶趣味的存在，比如直线特地扣个点往上移什么的，讨论这些都是没啥意义的，所以我们通常使用的都是如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，就将极限值作为补充定义，并将这种恶趣味的奇点叫做“可去奇点”，就像名字那样去除就行了，这样数学世界也会更加和谐一些。此时，我们的讨论域减小为了**连续实函数**空间$C^0(R)=\{f:U\subset R\to R:\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\forall x_0\in U\}$。

在一元实函数中，“可导”和“可微”是等价，我们后面会指出“可微实际是可导张成的空间”，对于导数，大家的第一印象可能是计算切线斜率$k_{x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$，而且我还知道大家会直接把微分那个莫名其妙的定义$\exists A,\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\Rightarrow dy=Adx$给忽略掉，直接把导数看成微分学的核心内容。在以“计算为核心的本科”确实无可厚非，而且传统教材的符号实在过时了，里面的dy,dx一直给人一种莫名其妙的感觉。只考虑一点x_0的微分，根据微积分的知识我们知道有$dy=f'(x_0)dx$，有没有发现这像某个东西，没错，就是射影几何定义中的等价类，$l\sim k\Leftrightarrow l=ks,\exists k\in R$，如果我们把存在的$f'(x_0)\in R$视为系数的话，那么实际上它给出了$R^2$中在上述等价下的一个等价类，其实就是在这点的切线，它可以视为R^2的一维子空间，但我们注意到这样一个事实，$f'(x_0)$的值与坐标选取有关，但这个等价类与坐标的选取无关。我们先来做点小准备，先看函数图像$(U,f(U))\in R^2$，它与坐标的选取是有关的，如果想要把线性空间和函数联系起来，要么只能让线性空间配有与函数同样的一个基，要么就是去除函数与坐标相关的性质，对于后者已经快进入流形切空间的思想了，所以我们现阶段先考虑前一种方案。实际上，选取了基的一维线性空间，可以看成R上的一个线性变换，其实就是切线在坐标系下有方程$y=f(x):R\to R$，我们不会把方程写出来，因为有许多要考虑的情况。此时，我们就可以把这样的性质变成一个定理来说明了。

定理 2.7: 对于任意一个实函数$f:U\to R,U\subset R$，如果f在$x_0\in U$处是可导的，那么存在一个线性变换$T:R\to R\in GL(R)$，使得$T(x_0)=f(x_0)$，并且$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-T(h)}{h}=0$。

聪明的读者可以轻松地发现，它就是把导数值移到了左边，但此处我们实际想表达的是

“这个线性变换与函数运算的联系”。实际上，对于连续我们有另外一种看法就是$\lim\limits_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0))=0$，从这些东西到底能看出什么呢？好像啥也看不出来，但我们确实实现了单点的线性化，即得到一个线性变换，并且通过极限式联系了两者。此时，我们得到了**可微实函数**空间$C'(R)=\{f:U\to R\in C^0(R):f$在$U$上可微$\}$。这其实还没有结束，我们还必需考虑导函数，本科有这样一个结论就是“$f(x)$可导不一定能推出$f'(x)$是连续的”，他们通常会给出补充定义的$f(x)=x^2 sin(1/x),x\neq 0,f(0)=0$来作为实例，虽然振荡间断点特殊得要死，但确实存在，不过另一方面我们也不需要这种鬼函数，要的也是这个函数的左边或右边，换言之，研究函数的“开局部”性质才是我们最需要的，所以比起可微实函数，我们更想要的是**连续可微实函数**空间$C^1(R)=\{f:U\to R\in C'(R):f$的导函数连续$\}$。这样我们就回到了连续实函数中，可以得到一系列的n阶连续可微函数空间$C^\infty(R)\subset ...C^n(R)\subset C^{n-1}(R)\subset ...C^2(R)\subset C^1(R)\subset C'(R)\subset C^0(R)$，它们的关系都是真包含，其中$C^\infty(R)$表示**实解析函数**空间。笔者，在这里只是想让你理清各种实函数之间的关系，连续可微可以总结出下面定理。

定理 2.8: 对于任意一个实函数$f:U\to R,U\subset R$，如果f在$x_0\in U$处是连续可导(或连续可微)的，那么存在一个线性变换$T:R\to R\in GL(R)$，使得$T(x_0)=f(x_0)$，并且$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)-T(h)}{h}=0$，同时其诱导的映射$U\to GL(R),x\mapsto T$是拓扑空间的连续映射。

通过上面的一系列探讨，我们知道了，建立微分理论的核心在于，极限的定义，所以接下来我们来探究幻世数学怎么才能拥有极限。实际上，“拓扑+偏序+网”，就可以构成一个极限理论，虽然它是纯粹的幻世对象，但这样的理论没有计算性质，也没有完备性，因为它是以“拓扑”这个几何对象作为基底，所以用处是有限的。实际上，广泛运用的极限理论应该是“实数+度量+完备性”，度量其实就是建立了任意集合和实数之间的联系，从而运用实数上的性质来完成一般以集合论为基础的幻世对象的极限理论，因此我们在最初就指出过一元实分析是所有分析学的基础，接下来我们详细说明一下吧。

定义 2.14: (1)对于非空集合X和映射$d:X\times X\to R$，如果满足$\forall x,y,z\in X$有，$d(x,y)\geq 0$且$d(x,y)\Leftrightarrow x=y$、$d(x,y)=d(y,x)$、$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$，则称$d$是$X$上的**一个度量**，并把$(X,d)$称为**一个度量空间**

(2)设(X,d)是一个度量空间，我们记符号$B(x_0,r)=\{x\in X:d(x_0,x)<r\},r>0$，即要求它必需非空

(i)如果子集$A\subset X$满足$\forall x\in A$都存在$B(x,r)\subset A$，则称A是**一个开集**

(ii)对一点x和子集$U\subset X$。如果存在开集V使得$x\in V\subset U$，则称U是x的**一个领域**

(iii)如果子集$A\subset X$满足$X-A$是开集，则称A是**一个闭集**

(iv)对于子集$A\subset X$。如果存在实数$m>0$使得$\forall x,y\in A,d(x,y)\leq m$，则称$A$是**有界集**。此时记$\mathrm{diam}A=\sup\{d(x,y)|x,y\in A\}$，并把它称为$A$的**直径**。

显然此处的各种开集、闭集、领域等比拓扑空间的有更好的计算性质。此时我们指出，集合论是存在序数的，因此我们默认自然数集$\mathbb{N}$的存在，实在不行把它看成R中的一个子集也行，反正度量空间都已经用到了实数。

定义 2.15: 设(X,d)是度量空间

(1)我们把映射$f:\mathbb{N}\to X$称为X的**一个序列**。并且我们简记$x_n=f(n),\forall n\in\mathbb{N}$，则序列可

以记为$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$或$\{x_n\}$

(2)对于一个序列$\{x_n\}$，如果$x \in X$满足$\forall\varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N}$使得$n > m \Rightarrow d(x, x_n) < \varepsilon$，则称$\{x_n\}$**收敛于**$x$，或称$x$是$\{x_n\}$的**极限**，并记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$。

有关极限有两个核心的定理，一是与开领域的关系，二是极限的唯一性，它们其实都来自于实数的性质。

定理 2.9: (1)设(X, d)是度量空间。则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$当且仅当，对$x$的任意领域$V$存在$n_0 \in \mathbb{N}$使得$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V$

(2)度量空间(X, d)的每个收敛序列的极限是唯一的。

看起来我们好像完成了极限理论，但并非如此。虽然，我们不会给出证明，但后面我们会发现如果只是度量空间的话，在证明中会产生很多无法证明的性质，所以完备度量空间的极限理论才是足够的。

定义 2.16: 设(X, d)是度量空间

(1)对一序列$\{x_n\}$，如果$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$使得$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$，则称$\{x_n\}$是**柯西列**

(2)如果(X, d)的每一个柯西列都是收敛的，则称(X, d)是**完备的。**

上述定义有一个很显然的基础是“所有收敛序列都是柯西列”，这个其实也没啥好说的，我们主要还是引出一个拓扑相关的性质，即区间套定理。

定理 2.10: 设(X, d)是度量空间。如果$\{A_n\}$满足$\forall n$，A_n是X的有界闭集且$A_{n+1} \subsetneq A_n$，则称$\{A_n\}$是X的**一个区间套**。如果(X, d)是完备的，则任意的区间套$\{A_n\}$有$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam} A_n = 0$且存在唯一的$x = \cap_{n=0}^{\infty} A_n$。

接下来，我们需要给出极限理论的另一个重要内容，即映射连续的概念，注意它和极限是不同的存在。

定义 2.17: 设(X, d_1)和(Y, d_2)是度量空间，$f : X \to Y$是映射。对于一点$a \in X$，如果$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$使得$d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$，则称$f$在$a$处**连续**。如果$f$在$X$的任意点上连续，则称$f$是**连续映射。**

最后我们可以指出，所谓连续就是极限存在的意思，它由一个定理给出。

定理 2.11: 设(X, d_1)和(Y, d_2)是度量空间，则映射$f : X \to Y$在$x \in X$处连续当且仅当，对任意X中的收敛序列$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$。

在传统实分析中，我们其实是使用这个定理来作为连续的定义，所以才会出现一些意外的情况，从而导致我们无法认知连续和极限存在的关系。但此处我们定义处了局部的领域，给出了连续的局部特性，从而使得连续和极限真正意义的联系了起来，这里其实就是我们之前所说的命运共同体(点连续，极限存在，局部领域)，而局部领域其实体现在连续的定义中，即被度量控制的性质，它的另一重含义是将连续点的开领域映射为开领域，这个我们将会在拓扑空间中见到。

2.3.2 微分与积分

如果只是度量空间上的极限理论是不足以建立微积分理论的，上述意义的极限理论只能给出分析研究中的“局部”，而如果要实现线性化的话，就必需引入特殊的度量空间上的极限理论，线性空间是个优秀的选择，此时我们的核心架构是“线性空间+范数+完备性”，即巴拿赫(Banach)空间，虽然它是完备度量空间的特例，但反过来说就是巴拿赫空间比完备度量空间更细致。接下来，让我们来介绍一番吧，线性空间在之前已经介绍过来，我们先来定义范数，它其实也要求一个有序结构的集合。度量、范数、内积是一脉相承下来的，都要求对应到一个有偏序结构的集合，通常用的基本都是实数R，我们也这样来做，因为除了上面的序结构，零元、绝对值、甚至是分析性质，都是要用到的。

定义 2.18: 设V是配有绝对值的域F上的线性空间，如果存在一个映射$\lambda : V \to R$满足$\forall x, y \in V$有，$\lambda(x) \geq 0$且$\lambda(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$、$\lambda(ax) = |a|\lambda(x), \forall a \in R$、$\lambda(x + y) \leq \lambda(x) + \lambda(y)$，则称$\lambda$是$V$上的一个**范数**，并把$(V, \lambda)$称为**赋范线性空间**。

实内积空间(V, f)可以通过$\lambda(x) = \sqrt{f(x, x)}$给出一个范数，从而成为一个赋范线性空间。我们要求域配有绝对值$|| : F \to R$是因为第二条性质的要求，有些书喜欢将F限制为数域并使用常规绝对值，笔者认为这是不够的，比如数域Q上就存在多种绝对值，它们将诱导出不同的结果。此时，读者应该要意识到为什么一元分析是所有分析的基础，因为赋范线性空间的条件中已经暗藏了一个可以进行完备化的绝对值，$F = R$配普通绝对值可以得到一元实分析、$F = C$配模绝对值可以得到一元复分析、$F = Q_p$配p-进绝对值可以得到一元p-进分析。首先，我们有一个重要的等价性定理。

定理 2.12: 对于线性空间V上的两个范数λ_1和λ_2，如果存在$c \in R$使得$\forall x \in V, \lambda_1(x) \leq c\lambda_2(x)$，则称$\lambda_1$弱于$\lambda_2$。如果$\lambda_1$弱于$\lambda_2$且$\lambda_2$弱于$\lambda_1$，则称这两个范数是**等价的**。此时可以得到，有限维线性空间上的范数都是等价的。

通常对于赋范线性空间，我们记$|a|, a \in F$为域的绝对值，$||v||, v \in V$为线性空间的范数。虽然我们不会去讲相关的证明，但我们必需指出域的绝对值在证明线性空间范数上是有一定地位的，如果同样的线性空间$V = Q^n$中Q配备不同的绝对值，那么得到的范数是不等价的。接下来，我们将把绝对值和范数分别完备化，此时我们只需要借助度量空间的相关内容即可迅速完成定义。

定义 2.19: (1)对于配备绝对值的域$(F, |\cdot|)$，其可以给出一个度量$d : F \times F \to R, (x, y) \mapsto |x - y|$，如果$(F, d)$是完备度量空间，则称$(F, ||)$是**完备的**

(2)对于赋范线性空间$(V = F^n, ||\cdot||)$，其可以给出一个度量$d : V \times V \to R, (x, y) \mapsto ||x - y||$，如果$F$是完备的且$(V, d)$是完备度量空间，则称$(V, ||\cdot||)$是**完备的**。我们完备赋范线性空间称为**巴拿赫空间**。

由于大多数的书籍对赋范线性空间的定义，都要求基域$F = R$或$F = C$，因此要求它完备的时候可以不管基域，由于p-进分析的存在，我们就只能加上域完备的限制，此时我们要有这样一个认知链，“多元分析学基于一元分析学，一元分析学基于一元实分析”。由于在度量空间上，我们已经建立了连续和极限的理论，所以就不再重复定义了。

定义 2.20: 设$E=K^n$和$F=K^m$是赋范线性空间，记它们之间的所有线性变换构成的集合为$L(E,F)$。令$G\subset E$是开集，$f:G\to F$是映射

(1)对一点$x\in G$和向量$y\in E$，如果存在$s\in F$使得$\lim\limits_{|h|\to 0}\dfrac{||f(x+hy)-f(x)-hs||}{|h|},h\in K$，则称$f$在$x$处沿$y$**可微**，并把$s$称为$f$在$x$处沿$y$的**方向导数**，记为$Df(x,y)$。如果$f:G\to F$在$G$上每一点的每个方向都可微，则记映射$Df:G\times G\to F,(x,y)\mapsto Df(x,y)$

(2)对一点$x\in G$，如果存在$T\in L(E,F)$使得$\lim\limits_{||h||\to 0}\dfrac{||f(x+h)-f(x)-T(h)||}{||h||}=0,h\in E$，则称$f$在$x$处**可微**，并把$T$称为$f$在$x$处的**导数**，记为$Df(x)$。如果$f:G\to F$在$G$上每一点都可微，则记映射$Df:G\to L(E,F),x\mapsto Df(x)$。

可以看到一个事实，我们将导数的定义嫁接到了实数上，此处的极限实际上用的是一元实分析的极限，那么之前的"完备"用处何在呢？简单来说就是，完备相当于额外给出了一些收敛的性质，这对于证明一些定理而言是相当重要的，例如重要的隐函数存在定理。下面先给出一些简单的性质。

定理 2.13: (1)如果映射$f:G\subset E\to F$在$x\in G$处可微，则$\forall y\in E$有$(Df(x))(y)=Df(x,y)$

(2)如果映射$f:G\subset E\to F$在$x\in G$处可微，则f在x处连续且导数是唯一的

(3)在可微下，各种运算法则成立，包括但不限于复合的链式法则、加法、乘法，但它们都必需使用方向导数，即$D(gf)(a)=Dg(f(a))Df(a)$、$D(f+g)(x)=Df(x)+Dg(x)$之类的，而这正是线性的含义所在。

请注意，连续、可微都是一种局部性质，当然我们大多数见到的都是延拓到整个定义域的连续和可微。还有就是上述性质(1)的逆命题不一定成立，(2)也是一样的连续也不能推出可微。至于偏导数，其实就是选定基以后，沿基向量方向的方向导数，此时"方向连续"也是一个必要的存在，我们给出它的定义，它只能定义在赋范线性空间上，一般的度量空间不存在方向的概念。

定义 2.21: 设X和$(Y,||\cdot||)$都是域$(F,|\cdot|)$上的赋范线性空间，$f:X\to Y$是映射。对于一点$a\in X$和方向$y\in X$，如果$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$使得$|x|<\delta\Rightarrow||f(a+xy)-f(a)||<\varepsilon$，则称$f$在$a$处沿$y$**连续**。

我们可以看到，方向连续其实不依赖定义域的范数，这一点仔细考察方向导数也可以发现，一个简单的性质是在一点沿同一方向"方向导数$\Rightarrow$方向连续"。方向代表的就是一元分析学，我们更希望探究的是，在什么时候方向可以推出整体。首先，必需明确一点"一点处的所有方向可微(或连续)$\nRightarrow$一点处可微(或连续)"，这些例子在二元微积分里随便都能找到，就不多说了。但反过来是显然成立的，所以我们想要知道的就是该加什么条件。

定义 2.22: 设$E=K^n$和$F=K^m$是赋范线性空间，记它们之间所有连续的线性变换构成的集合为$B(E,F)\subset L(E,F)$。令$G\subset E$是开集，$f:G\to F$是映射

(1)对一点$x\in G$，如果任意的$u\in E$均存在$Df(x,u)$，则称f在x处**弱可微**

(2)如果f在$x\in G$处弱可微。对一点$u\in E$，如果存在$T\in B(E,F)$使得$Df(x,u)=T(u)$，则称$Df(x,u)$是f在x处的一个**有界线性弱微分**

(3)如果f在x处存在一个有界线性弱微分$T\in B(E,F)$，则称f在x处**弱可导**。此时，我们

把$df(x): E\to F, u\mapsto T(u)$称为$f$在$x$处的一个**弱导数**

(4)如果f在x处可微且它的导数$Df(x)\in B(E,F)$，则称f在x处**强可导**。此时，我们把$Df(x): E\to F, u\mapsto T(u)$称为$f$在$x$处的一个**强导数**

(5)对一点$x\in G$和子集$U\subset E$，如果f在x处弱可导且弱导数$df(x)$满足，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$有$0<|t|<\delta\Rightarrow\forall u\in U, ||t^{-1}(f(x+tu)-f(x))-df(x)(u)||<\varepsilon$，则称在$x$点处的弱导数$df(x)$在$U$上是**一致的**。

我们必需指出，此处的弱导数才是我们通常所见到的方向导数和相应的偏导数，因为之前所定义的可能不具有连续性(泛函分析给出，线性变换连续性和线性算子有界性的等价，线性算子是线性变换的推广)，性质显然弱了一些。另外我们注意到强可导是可以推出可微的，它是一个性质足够的可微。而一致性，则是在看这样的一个弱导数在其它方向是否具备相同的线性，显然只要一周具有一致的线性就可以推出强可微，即下面的定理。

定理 2.14: 设$E=K^n$和$F=K^m$是赋范线性空间。令$G\subset E$是开集，$f: G\to F$是映射，则f在x处强可导当且仅当，f在x处弱可导且弱导数$df(x)$在$\{u\in E: ||u||=1\}$上是一致的。此时弱导数和强导数相等，即$df(x)=Df(x)$。

其实我们可以稍微加强一下条件，把一致性换成连续性也可以正向推出可微。由于弱导数$df: G\to L(E,F)$和导数$Df: G\to L(E,F)$的值域还没有建立度量，所以我们有必要引入其上的一种度量，它可以由空间的范数来诱导线性变换上的范数从而诱导出度量，其实学过泛函分析的应该很熟悉的。另外这个定理还能指出连续线性变换和线性变换间的关系。

定理 2.15: 设$E=K^n$和$F=K^m$是赋范线性空间，则$L(E,F)$也是一个赋范线性空间，其上的范数为$T\in L(E,F), ||T||=\sup\{||T(x)||: ||x||\le 1\}$。如果$K$是完备的，则$B(E,F)=L(E,F)$。如果$E$和$F$是巴拿赫空间，则$L(E,F)=B(E,F)$是巴拿赫空间。

上述定理一方面指出了，弱导数和导数都可以视为度量空间之间的映射，另一方面指出了在完备赋范线性空间上，方向导数和导数才能存在较好的联系，即弱导数和强导数间的联系。此时自然可以引出连续可微的概念，我们有下面的一个定理。

定理 2.16: 设$E=K^n$和$F=K^m$是赋范线性空间，令$G\subset E$是开集，$f: G\to F$是映射。如果f在任一开集$\Omega\subset E$上弱可导，且弱导数$df:\Omega\to B(X,Y)$在x_0处连续，则f在x_0处强可导。

上述定理实际上就是，各方向上有连续偏导推出可微在抽象上的推广。借助这些概念，我们最后再来引出多次导数。接下来，我们只考虑域K为完备的情形，此时我们把强导数称为导数，有界线性弱微分称为方向导数，强可导称为可微，弱可微称为方向可微，并且有$B(E,F)=L(E,F)$，这样才是一个合格的微分理论。

定义 2.23: 设X和Y是赋范线性空间，容易得到n个X的笛卡尔积X^n是赋范线性空间，结合之前定理$B(X^n,Y)$也是赋范线性空间，并且有连续的双射$B(X^n,Y)\to B(X^k,B(X^{n-k},Y))$。借助特殊情况$B(X,B(X^{n-1},Y))=B(X^n,Y)$，对于映射$f: X\to Y$，我们可以定义

(1)对于方向$u_1,...,u_n\in X$，定义符号$d^nf(x;u_1,...,u_n)=d(d^{n-1}f)((x;u_1,...,u_{n-1}),u_n), n>1; d^1f(x;u_1)=df(x,u)$，如果存在$T\in B(X^n,Y)$使得$d^nf(x;u_1,...,u_n)=T(u_1,...,u_n)$，则称$d^nf(x;u_1,...,u_n)$为**一个n阶方向导数**。对单一方向$u\in X$记$d^nf(x,u)=d^nf(x;u,u,...,u)$，

在最大值时称f在x处沿u方向**n阶可微**

(2)只要递归$D^n f(x)=D(D^{n-1}f)(x)\in B(X^n,Y)$存在，就把$D^n f(x)$称为$f$的**n阶导数**，并在最大值时称$f$在$x$处**n阶可微**。

对于强可微的情况，我们可以轻松地得到一些性质，此时出现了领域性质，请关注这一点。

定理 2.17: 设X和Y是赋范线性空间，令$G\subset E$是开集，$f:G\to F$是映射

(1)对一点$x\in X$，如果f在$x\in G$的某个领域内n-1阶可微，在x处n阶可微，则任意的n阶方向导数存在且$D^n f(x)(u_1,...,u_n)=d^n f(x;u_1,...,u_n)$

(2)如果f在G上n阶可微，则$d^n f(x;u_1,...,u_n)=d^n f(x;u_{\sigma(1)},...,u_{\sigma(n)}),\forall\sigma\in S_n$

(3)设G是凸集，如果f在G上n阶可微，则对$x_0,x_0+h\in G$有

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}D^k f(x_0)(h^k)+R_n(h)$$

且

$$||R_n(h)||\le\frac{1}{n!}\sup\{||D^n f(x_0+th)(h^n)||,0<|t|<1\}$$

如果f在G上是n阶连续可微的，则有

$$||R_n(h)||=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-|t|)^{n-1}||D^n f(x_0+th)(h^n)||d|t|$$

我们只能对一点说可微，而不能说连续可微，连续可微必需在一个开集上说，我们把在开集G上的n阶连续可微的映射集记为$C^n(G)$，并记$C^\infty(G)=\cap_{n=0}^\infty C^n(G)$，把$C^n(G)$的元素称为$G$上的$C^n$**映射**，把$C^\infty(G)$的元素称为$G$上的**光滑映射**。还有一些更强的定理必需在更细致的希尔伯特空间中才能证明，我们就不考虑了，最后给出反函数定理和隐函数定理来结束微分的介绍。对于开集$U\subset X,V\subset Y$，如果$f:U\to V$是双射且$f\in C^p(U),f^{-1}\in C^p(V)$，则称$f$是$C^p$**微分同胚**。如果在一点$x_0\in U$处存在领域$U_0$使得$U_0\to f(U_0)$是$C^p$微分同胚，则称$f$在$x_0$处**局部**$C^p$**微分同胚**，有了这些准备就可以描述我们的定理了。

定理 2.18: 设X,Y,Z是巴拿赫空间

(1)令$U\subset X$是开集，$x_0\in U,p\ge1$。如果$f:U\to Y$在x_0处局部C^p微分同胚，则$Df(x_0):X\to Y$是可逆的

(2)令$U\in X\times Y$是开集，记$(x_0,y_0)\in U$，$f:U\to Z$是连续映射。如果有$f_y:U/Y\subset X\to Z,x\mapsto f(x,y)$处处可微、$Df_x:U\to B(X,Z),(x,y)\mapsto Df_y(x)$在$(x_0,y_0)$处连续、$Df_x(x_0,y_0)\in B(X,Z)$可逆、$f(x_0,y_0)=0$，则存在$r>0,\delta>0$使得$||y-y_0||<\delta$时$f(x,y)=0$在$||x-x_0||<r$内存在唯一的连续映射$g:Y\to X$满足$x_0=g(y_0)$

(3)令$U\in X\times Y$是开集，记$(x_0,y_0)\in U,p\ge1$，$f:U\to Z$是C^p映射。如果$Df_x(x_0,y_0)\in B(X,Z)$可逆、$f(x_0,y_0)=0$，则存在$r>0,\delta>0$使得$||y-y_0||<\delta$时$f(x,y)=0$在$||x-x_0||<r$内存在唯一映射$g:Y\to X$满足$x_0=g(y_0)$且g在$||y-y_0||<\delta$内p阶连续可微。

最后，我们来看看积分吧，实际上，微分几何之所以叫做微分几何是因为主要使用微分理论，积分只是辅助作用，但既然来了，我们就来讨论一下吧。通常的积分指的是R^n上的勒贝

格(Lebesgue)积分，它是在特殊的线性空间R^n上使用特殊的勒贝格测度建立的积分理论。最广泛的想法是将积分建立在测度空间上，这些概率论经常用的，它过于广泛了，我们还是稍微特殊一些，最好还能和上面的赋范线性空间兼容，这样“微积分”才是一个较好的整体。测度论的核心步骤有两个，一是选取集类作为可测集，二是为可测集赋予合规的度量。

定义 2.24: 设集合X和它的子集构成的集类$\mathcal{F}$

(1)如果有$X \in \mathcal{F}$、$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c = X - A \in \mathcal{F}$、$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$，则称$\mathcal{F}$是$X$上的一个$\sigma$**代数**。此时我们把$(X, \mathcal{F})$称为**可测空间**，任意$U \in \mathcal{F}$称为**可测集**

(2)对于可测空间$(X, \mathcal{F})$，如果映射$f : X \to R$满足$\forall a \in R, \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{F}$，则称$f$是**可测函数**

(3)对于可测空间$(X, \mathcal{F})$，如果存在映射$P : \mathcal{F} \to R \cup \{+\infty\}$使得，$P(\varnothing) = 0$、$\forall E \in \mathcal{F}, P(E) \geq 0$、$\{E_n\}, E_n \in \mathcal{F}$互不相交则$\Rightarrow P(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$，则称$P$是$(X, \mathcal{F})$上的**一个测度**

(4)我们把X、σ代数$\mathcal{F}$和测度P构成的整体$(X, \mathcal{F}, P)$称为**一个测度空间。**

虽然我们建立的只是一个空壳，没有具体填充可测的概念和具体的测度，但是由于我们同样地与实数R建立了联系，因此已经就足够建立一个积分框架了。首先记扩充实数$\overline{R} = R \cup \{\infty\}$，我们记所有可测函数$f : X \to \overline{R}$的全体为$M(X, \mathcal{F}, P)$，同时记所有非负可测函数的全体为$M^+(X, \mathcal{F}, P)$，我们把只取有限个值的可测函数称为**简单函数**，定义示性函数$\chi_A(x) = 0, x \notin A; = 1, x \in A$，于是取n个实数的简单函数的形式为$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x)$，其中$\varphi(E_i) = a_i$。

定义 2.25: 设$(X, \mathcal{F}, P)$是测度空间

(1)对于简单函数$\varphi \in M^+(X, \mathcal{F}, P)$，我们定义它的**积分**为$\int \varphi dP = \sum_{i=1}^{n} a_i P(E_i)$

(2)对于函数$f \in M^+(X, \mathcal{F}, P)$，我们定义它的**积分**为$\int f dP = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int \varphi dP$，其中$\varphi$取遍所有符合条件的简单函数

(3)对于函数$f \in M(X, \mathcal{F}, P)$，如果$\int f^+ dP, f^+ : U \subset X \to \overline{R}_{>0}, x \mapsto f(x)$和$\int f^- dP, f^- : U \subset X \to \overline{R}_{>0}, x \mapsto -f(x)$均是有限的，则称$f$是**可积的**，并记它的**积分**为$\int f dP = \int f^+ dP - \int f^- dP$，我们记全体可积函数为$L = L(X, \mathcal{F}, P)$。

这里相当于在整个定义域上积分，这是没有毛病的，在某个区间上积分只要它也是测度空间，结果都是一样的，虽然这样的框架看起来又大又泛，但是因为借助了实数，有许多经典简单结论都是存在的。

定理 2.19: (1)对任意的$f, g \in L = L(X, \mathcal{F}, P), a \in R$有$(af : X \to \overline{R}, x \mapsto af(x)) \in L, f + g \in L$，同时有$\int af dP = a \int f dP$和$\int (f + g) dP = \int f dP + \int g dP$

(2)函数列$\{f_n\} \subset M^+(X, \mathcal{F}, P)$单调递增并且$\lim_{n\to\infty} f_n = f$，则$\int f dP = \lim_{n\to\infty} \int f_n dP$

(3)对任一函数列$\{f_n\} \subset M^+(X, \mathcal{F}, P)$有$\int \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n dP \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n dP$

(4)对任意$f \in M^+(X, \mathcal{F}, P)$，它给出$X$的一个测度$I(E) = \int_E f dP$ (5)对任一函数列$\{f_n\} \subset M^+(X, \mathcal{F}, P)$有$\int (\sum_{i=1}^{\infty} f_n) dP = \sum_{i=1}^{\infty} (\int f_n dP)$

(6)$P(E) = 0 \Rightarrow \int_E f = 0, \forall f \in L(X, \mathcal{F}, P)$，还有大量的不等性质不想赘述了

(7)**几乎处处**指的是排除**零测集**$(P(E) = 0)$。对一函数列$\{f_n\} \subset L(X, \mathcal{F}, P)$，设它几乎处

处收敛于可测函数f。如果存在$g \in L(X, \mathcal{F}, P)$使得$|f_n| \leq g, \forall n$，那么$f$可积且$\int f dP = \lim_{n\to\infty} \int f_n dP$。

积分说到底计算才是核心，一般性的积分理论都是给出一个大框架，大框架下是没有任何计算理论的，因此去探究各种实际的测度才是积分学真正该干的事情，而我们大框架则是给出了，积分和一元实数上极限理论的普遍交换性质，研究更多虚无的大框架内容其实也没啥意思，有关最重要的勒贝格积分的内容，请读者自己去参考相关"实变函数"的书籍吧。接下来，我们试着将测度空间联系到赋范线性空间。

定理 2.20: 考虑空间$L = L(X, \mathcal{F}, P)$

(1)我们将几乎处处相等的函数称为是**等价的**，并记$[f] \subset L$为与$f \in L$等价的所有函数，设等价类构成空间为$L^1 = L^1(X, \mathcal{F}, P)$。则$L^1$是赋范线性空间，它的范数为$||[f]||_1 = \int |f| dP$

(2)对于$1 < p < +\infty$，我们定义$L^p = L^p(X, \mathcal{F}, P) = \{[f] \in L^1 : \int |f|^p dP < +\infty\}$。则$L^p$是赋范线性空间，它的范数为$||f||_p = (\int |f|^p dP)^{\frac{1}{p}}$

(3)我们定义$L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{F}, P) = \{[f] \in L^1 : |f| < +\infty\}$。则$L^\infty$是赋范线性空间，它的范数为$||f||_\infty = \sup\{S(N) = \sup_{w \notin N}\{|f(w)|\} : N \in \mathcal{F}, P(N) = 0\}$

(4)若$1 \leq p \leq +\infty$则L^p是巴拿赫空间

(5)$L^p (1 \leq p < +\infty)$是可分空间，即存在一个可数子集$\Gamma \subset L^p$使得$\forall f \in L^p, \varepsilon > 0, \exists g \in \Gamma, ||f - g||_p < \varepsilon$

(6)L^2是希尔伯特空间，即定义的实内积$(f, g) = \int fg dP$所诱导的度量是完备的。

通过上面的简单定理，我们得到了一个实数域上的巴拿赫空间L^p，因此上面有之前建立的微分理论，此时可以发现一个有趣的现象即"所有连续函数都可积"，所以可积的理论是大于可微的理论的，我们点到为止，更多的内容就留给自行去探索吧。

2.3.3 复分析

最后，我们再来稍微提一下复分析，我们在上一部分介绍的微分理论实际就是泛函分析的基础内容的缩略，而积分理论就是实变函数的基础内容，既然后者带一个实，我们应该意识到了，之前的积分理论不包括复积分。至于微分部分其实已经被包含在了框架中，我们有两种看法，一是把复数看成$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$，并使用模$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$，另一种是直接看域的一元分析理论$\mathbb{C}$，相应的绝对值也是模$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$，这两种微分是等价的，即"一元复可微等价于两个二元实函数可微+C-R方程"。显然可微复变函数与可微二元实函数的最大区别是多了一个C-R方程，正因如此使得任意可微复变函数都是光滑的，请注意这个性质是因为使用了具体的范数所以才产生的，虽然看起来二元函数和复数的范数定义基本一致，但是复数有个$i^2 = -1$的性质，它使得两个坐标存在联系，换句话就是限制变强了，而二元实函数的两个坐标不具有这样的关联，因此性质更弱，但范围更广。一元复函数的可微理论大概就这些，复变函数更精彩的部分是积分理论，它不在我们之前所讨论的大框架下，所以我们来稍微讨论一下。

定义 2.26: 设C是复平面上一条光滑(C^∞可微)的简单(没有交叉点)曲线$C : [0, 1] \to \mathbb{C}$，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z = x + iy$是一复变函数。先把曲线$C$任意分成n个小弧段，设分点为$A =$

$z_0, z_1, ..., z_{n-1}, z_n = B$，然后在弧$\overset{\frown}{z_{k-1} z_k}$上任取点$\zeta_k$，并记$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$，接着设$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n}\{|\Delta z_k|\}$。此时，如果极限和式$\int_C f(z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$存在，则称$f$在$C$上**可积**，并把其值称为$f$沿$C$从$A$到$B$的**复积分**。

此处其实是传统的积分定义，甚至连黎曼积分都算不上，黎曼积分使用上下达布(Darboux)和相等来定义，不过这两种积分是等价的就是了。那为什么不能和实数一样放到之前的大框架下呢？这其实很显然，因为测度函数要求值域必需是实数，如果替换成复数的话，那么序结构不存在，就无法定义出可测函数了，失去了这个根基就失去了一切，那么使用模怎么样$|f(z)|$，这属实是想多了，取模后的函数失去了很多信息，根本就没有研究的价值。注意到多元实函数中的“曲线积分”和“曲面积分”与复积分有一个共同特点，即都是具有方向的积分，但它们却处于测度的大框架下，实际上，复函数的共轭函数在相应曲线下积分值的实部就等于对应的曲线积分，所以复积分相当于做了更多的事，并把多做的事藏在了虚部中，也正因如此，复积分也比一般的二元曲线积分有更强的性质，即“全纯区域内的闭积分为零，且两点间的积分值与路径无关”。为什么$\mathbb{R}$和$\mathbb{C}$都是作为完备的存在，非得进行区别对待呢？其实显然可以发现，那就是零点所导致的代数性质有很大差异，$\mathbb{C}$是代数闭域，而$\mathbb{R}$却不是。此时，我们又可以意识到一件重要的事情，当我们考虑流形和代数簇的联系时，我们往往只会考虑复流形，比如周(炜良)定理(Chow theorem)，就是断言复流形$P\mathbb{C}^n$的解析子簇是代数簇，模性定理的正向构造中也是从一个复流形$X(\Gamma)$开始的。

定理 2.21 (代数基本定理): 对任意的$f(z) \in \mathbb{C}[z]$，存在$z \in \mathbb{C}$使得$f(z) = 0$。

不要小看零点这个代数性质在复变函数中的作用，首先零点和其倒函数的奇点存在一一对应，“$f(z)$的n阶零点$\Leftrightarrow 1/f(z)$的n阶奇点”，因此在复变函数中研究奇点比实变函数存在更多的便利。复变函数另一个重要的性质，就是解析延拓的唯一性。

定理 2.22 (解析开拓原理): 设复平面$\mathbb{C}$的区域(即连通开集)$D_1, D_2, D = D_1 \cap D_2$，且$f_1(z)$在$D_1$内解析，$f_2(z)$在$D_2$内解析，并且$f_1(z) = f_2(z), z \in d$，则函数$f(z) = [f_1(z), z \in D_1 - d; f_2(z), z \in D_2 - d; f_1(z) = f_2(z), z \in d]$在$D = D_1 \cup D_2$上单值解析。

这个定理看起来好像平平无奇的，好像就是说函数可以粘合起来，然后转念一想，拿个二元实函数行不行，实际上多元实函数可以进行连续延拓。

定理 2.23 (连续延拓定理): 设F是$\mathbb{R}^n$中的闭集，$f: F \to \mathbb{R}$是连续函数，且满足有界$|f(x)| \leq M, x \in F$，则存在连续函数$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$使得$g(x) = f(x), x \in F$。

虽然看起来好像天差地别，但它们本质都是在说定义域扩大这一回事，首先解析肯定是比连续更强的，其次如果将复函数视为二元实函数的话，它可以自动满足连续延拓定理，它本质就是一个拓扑上的性质定理，而且复变函数在闭集上有最大模原理，可以自动满足有界的条件。那么反过来考虑，开集上可微的实函数能粘合在一起吗，首先闭集粘合是不现实的，边界可微是无法定义的，和复变函数必需在开集上解析一样，其次实变函数存在多种可微性“连续$>$可微$>$光滑$>$解析”，在实变函数中单点光滑和单点解析不能等价，单点解析要求局部的泰勒展开收敛到函数，在复变函数中的可微关系是这样的“连续$>$可微$=$光滑$>$解析”，放到局部开集上的话就是“连续$>$可微$=$光滑$=$解析”，最后延拓的关键其实在于解析性，解析性说明了

一件重要的是“开集内任意一点都可以互相计算”，而复变函数在局部上正因为有“光滑=解析”，导致我们可以通过求导的手段得到一个可计算的幂级数来计算领域内的值，从而使得造就了复变函数的解析延拓性，而实函数的局部区域内只有“光滑>解析”，因此求导所得的计算可能无法计算出领域内的值，从而无法实现光滑延拓。从深层次的代数原因来考虑，最大的祸根主要是因为$\mathbb{R}$不是代数闭域，而代数中的多项式属于计算的代表，我们把复变函数的微分整体性写出来就是，“幂级数收敛$\leftrightarrow$满足C-R方程$\leftrightarrow$积分路径无关”。复变函数的解析延拓，有另一个作用是实现“黎曼面”，我们来稍微讲讲吧。

首先是复平面内，有两个最著名的多值函数，即幂函数$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, z = re^{i\theta}$和对数函数$w = \mathrm{Ln}z = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi)$，破解这些函数多值性的最简单办法就是$k = 0$从而得到单值函数，这样有什么问题吗？这会使得$w = \sqrt[n]{z}$在正半轴上$R_{\geq 0}$失去解析性，比如拿单叶分支$w = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$来说，从上往实轴$x + hi \to x(h, x \in R_{\geq 0})$的极限是$\sqrt{x}e^{i\frac{0}{n}}$，而从下往实轴$x - hi \to x(h, x \in R_{\geq 0})$的极限是$\sqrt{x}e^{i\frac{2\pi}{n}}$，其实我们发现核心的问题是辐角的不连续，此处我们限制$0 \leq \theta < 2\pi$，更普遍的方式是$-\pi < \theta < \pi$，此时会更明显的出现$\sqrt{x}e^{-i\frac{\pi}{n}}$和$\sqrt{x}e^{i\frac{\pi}{n}}$，如果角度的底下没有$n$的话，这两个值确实相等，但是由于$n$的存在导致“角度的循环变换与线性的计算产生了不协调”。以笔者的观点来看，我希望大家以这种观点来看待这个多值性，对任意一个角度而言存在一个$k \in \mathbb{N}$使得$k\theta = \theta$，而对一个单纯的实数而言不存在这样的性质，但是它们的计算被混合在一起了，想要消解就必需使得这这种运算互相协调起来，协调域是不可能的时期，但协调特定的函数是可以的，比如对$w = \sqrt[n]{z}$，此时对于辐角有$n\theta = \theta$，那么我们只需要让w有n个“不同的值”$w_1, ..., w_n$使得$\forall n, w_i^n = w_i$，在这种协调下，(w, z)就能形成协调的连续对应，更进一步还是解析的。换言之，它们的实际对应本质是$\mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$，但是后者存在粘合部分，设$\mathbb{C}^n = \mathbb{C}_1 \times ... \mathbb{C}_i \times ... \times \mathbb{C}_n, i \in \mathbb{Z}_n$($\mathbb{Z}_n$是$n$阶循环加法群)，此时我们可以把$\mathbb{C}_i$和$\mathbb{C}_{i+1}$，(我们取辐角系为$0 \leq \theta < 2\pi$)进行这样的粘合$x - hi \in \mathbb{C}_i \to x \in \mathbb{C}_{i+1}(h \to 0, x \in R_{\geq 0})$，简单来说就是“每个分支的$R_{\geq 0}$轴被上一个分支的下面靠近，而自己的下面靠近下一个分支的$R_{\geq 0}$轴”。这样得到的$\sqrt[n]{z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$就是连续的，并且是$z^n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$的反函数。其实后面这一点才是最重要的，当一个函数可逆的时候，就可以拿来作为解析同胚，这在证明复曲面的“单值化定理”起着重要作用，上面的讨论还是有些不严谨的，我们最后再来严格表述一下。

我们对一点$a \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$考虑记$f_a(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n & a \in \mathbb{C} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} & a = \infty \end{cases}$表示在$a$点附近解析的函数，因为解析延拓定理的存在，我们只需要这种附近完全确定的函数就能确定函数在整个复平面上的情况，此时我们定义集$\mathcal{R} = \{(a, f_a(z)) : f_a(z)$取遍$a$附近所有不同的解析函数$\}$，此时我们再定义所有解析函数的集合为$C^{\infty}(\mathbb{C}) = \{f : U \to \mathbb{C} : U$是一个区域(连通开集)并且$f$在上面解析$\}$，于是我们有下面的核心定理。

定理 2.24: (1)$\mathcal{R}$*是一维复流形*

(2)$\mathcal{R}$的连通开集与$C^{\infty}(\mathbb{C})$的元素一一对应。

对任一$(f : U \to \mathbb{C}) \in C^{\infty}(\mathbb{C})$，设它对应的连通开集为$A_f \subset \mathcal{R}$，则它是一个开子复流形，我们称$A_f$为$f$的**黎曼面**，此时对一点$a \in U$，它在$A_f$中有多个$\{f_a(z)\}$，把这个集合的元素称为$f$在$a$处的一个**连通分支**，显然单点解析得到的分支可以直接延拓到整个定义域上的连通分支了。最后，我们再来讲一讲多元复变函数，其上也有不少奇妙的性质。

考虑连通开集$U \in \mathbb{C}^n$，我们把在其上的解析函数$f : U \to \mathbb{C}$的全体记为$H(U)$，此时会出

现n个变量$z=(z_1,...,z_n)$，记$f=u+iv, z_i=x_i+iy_i$，我们引入算子$\frac{\partial}{\partial z_j}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j}-i\frac{\partial}{\partial y_j})$和$\frac{\partial}{\partial \bar{z_j}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j}+i\frac{\partial}{\partial y_j})$，并定义复平面的子集$D_j=\{z_j\in\mathbb{C}:\exists z\in U\}$，此时我们可以得到。

定理 2.25: 如果$\frac{\partial f}{\partial \bar{z_j}}=0$在$D_j,(j=1,...,n)$上恒成立，则$f\in H(U)$。

上面算是简单的微分理论了，都在大框架下，接下来主要还是介绍零点和奇点性质，多元复函数的奇点性质表现在，**全纯开拓**上(全纯和解析是一个意思，为了区分一元复变函数情况，以后统一称为全纯)，即区域上的全纯函数解析开拓后仍然全纯，在一元复函数并没有这样的性质，比如$f(z)=\frac{1}{z-a}$的任意不包含a的区域上都是全纯的，但无论这些区域上怎么延拓在a处都无法全纯。这种现象的核心是下面的两个定理。

定理 2.26: (1)对连通开集$U\subset\mathbb{C}$，如果$f:U\to\mathbb{C}$是全纯函数，则f在U中的零点一定是孤立的

(2)对连通开集$U\subset\mathbb{C}^n(n>1)$，如果$f:U\to\mathbb{C}$是全纯函数，则$f$在$U$中的零点一定不是孤立的。

我们之前就说明，零点和奇点有互相对峙的关系。虽然多元复函数具有全纯开拓性，但它不一定能像一元复函数那样解析延拓到整个复平面，即不能像通过一个局部就直接确定出整个复空间上的函数，我们可以把这种有延拓性质的局部给分离出来，给个定义。

定义 2.27: 对于连通开集$U\subset\mathbb{C}^n$，如果不存在$U'\supsetneq U$使得$\forall f\in H(U),\exists g\in H(U)$满足$g$由$f$进行解析延拓得到，则称$U$是一个**全纯域**。

定理 2.27: (1)$\mathbb{C}$中的所有开集都是全纯域

(2)$\mathbb{C}^n(n>1)$一定存在一个非全纯域。

当然我们也可以试着在$\mathbb{C}^n$中找一些好用的全纯域，比如欧式凸域，任意一个复平面截面的连通开集就符合条件。复变函数还有许多其它的内容，但因为我们主要用到的也就微积分性质，所以就不做过多讨论了，读者只要从整体上理解各种函数的关系，和一些特别的性质就足够了。

2.4 连续的几何学——微分几何

2.4.1 局部理论

或许你会发现微分几何，也是建立直角坐标系，并研究相应方程的过程，比如研究球面$x^2+y^2+z^2=1$，既然如此干脆都叫坐标上的代数几何算了，我们不能以如此粗浅的看法来简单思考，解析几何研究的对象不具有分析性质，即多项式$F[x_1,...,x_n]$，它可以直接在线性空间F^n上研究，而微分几何研究的对象不具有分析性质，即一般光滑曲面$f(x_1,...,x_n)=0$，它必需在完备的线性空间F^n上研究。也就是说，解析几何的研究更泛，但性质却更加初略，但能稳定解析几何性质的对象$F[x_1,...,x_n]$却比微分几何更窄$f(x_1,...,x_n)=0$，研究空间和空间上映射的方向是不一样的。普通的微分几何，最多只能研究空间R^3中的几何，即**曲线**$f_1(x,y,z)=0\cap f_2(x,y,z)=0$和**曲面**$f(x,y,z)=0$，并不是不能深入研究，而是更大的微分流形框架出现了，这和解析几何其实道理是一样的，不是不能研究，只是没必要研究，我们通常所生活世界的几何，也就只有三维。

所谓微分几何的局部，就是研究曲线或曲面一点的附近的性质。而其中的曲线理论又是最为简单的，我们可以分分钟就把它介绍完，而且后面我们会看到，曲线的理论可以看成曲面的子理论，因此“三维微分几何的核心研究对象是曲面”，请记住这一点。首先我们指出用交线来定义曲线是代数几何的做法，其次我们用E^3来表示欧式空间$\mathbb{R}^3$，并用$\{O;e_1,e_2,e_3\}$来表示右手螺旋的坐标$\{O;i,j,k\}$，这主要是习惯和便利的问题，我们也采用这样的做法，在微分几何中，我们使用映射$r:(a,b)\to E^3,t\mapsto(x(t),y(t),z(t))=x(t)e_1+y(t)e_2+z(t)e_3$来表示一个**曲线**，如果这个曲线还满足$x(t),y(t),z(t)$在$(a,b)$上至少3阶连续可微且$|\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}|>0,\forall t\in(a,b)$就把$r$称为一个**正则曲线**，这就是我们主要的研究对象，3阶可以理解为这是三维空间，而后一个条件实际是$r'(t)\neq 0$，这些都是为了保证可以实现局部线性的必需条件。

接下来我们考虑正则曲线$r(t)\in Hom((a,b),E^3)$，对一点$t_0\in(a,b)$，我们把$X(u)=r(t_0)+ur'(t_0)\in L(R,E^3)$称为$r(t)$在$t_0$处的**切线**。我们试着从中提取处单位向量，就需要借助弧长参数，首先我们可以定义任意一段弧$(c,d)\subset(a,b)$的长度为

$$s(c,d)=\int_c^d|r'(t)|dt$$

特别地，我们令$s(t)=s(a,t):(a,b)\to(0,l)$，其中$l$表示这段曲线的总长度，则$s$是一个双射，此时我们可以转化曲线的参数为$r(s):(0,l)\to E^3$，并把它称为曲线的**弧长参数**。可以证明弧长参数最大的特点是$r'(s)=\frac{\mathrm{d}r(s)}{\mathrm{d}s}$是单位向量，此时我们记$t(s)=r'(s)$，并把它称为曲线的**切向量**，此时$t'(s)$虽然不是单位向量，但我们可以有单位化的手续，先令$\kappa(s)=|t'(s)|$，此时如果$\kappa(s)\neq 0$则$n(s)=\frac{1}{\kappa(s)}t'(s)$是单位向量，并把它称为曲线的**主法向量**，此时我们使用向量的外积$b(s)=t(s)\wedge n(s)$(向量外积)即可以得到曲线的**副法向量**，这样我们就可以在曲线上的一点得到了一个右手坐标系$\{r(s);t(s),n(s),b(s)\}$。嗯，很好，这就是微分几何，那这到底有啥用呢？我们研究各种几何对象的一种思想就是得到各种特征量，从而将明显的区分出来，如果是一个具有计算性质的特征就更好了，比如平面上的直线和曲线很显然有区别，但区别在哪里呢，通过微积分计算就可以发现，直线其实就是每点切线斜率相等的直线。这里也是同样的道理，我们把$\kappa(s_0)$称作曲线$r(s)$在s_0处的**曲率**，更进一步定义$\tau(s)=n'(s)b(s)$(向量内积)，把$\tau(s_0)$称为曲线$r(s)$在s_0处的**挠率**，$\kappa(s)$和$\tau(s)$就是拿来度量空间曲线的两个核心性质，而平面曲线的$\kappa(s)=0$，所以不存在挠率。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix}t(s)\\n(s)\\b(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\kappa(s)&0\\-\kappa(s)&0&\tau(s)\\0&-\tau(s)&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t(s)\\n(s)\\b(s)\end{bmatrix}$$

定理 2.28: (1)设空间曲线r的曲率$\kappa>0$，则r落在一个空间平面$Ax+By+Cz+D=0$内的充要条件是$\tau\equiv 0$

(2)空间曲线的弧长、曲率、挠率在刚体运动下是不变的

(3)对任意E^3中两条同弧长参数区间(a,b)的曲线$r_1(s)$和$r_2(s)$，如果有$\kappa_1(s)\equiv\kappa_2(s)>0$且$\tau_1(s)\equiv\tau_2(s)$，则存在一个刚体运动$T$使得$r_1=T(r_2)$

(4)如果$\kappa(s)>0$和$\tau(s)$是(a,b)上两个连续可微函数，则存在E^3的弧长参数曲线$r(s),s\in(a,b)$，使得κ和τ分别为它的曲率和挠率。

曲线的局部理论也就这么点，接下来我们还是来考虑更为丰富的局部曲面理论。我们使用映射$r:D\subset\mathbb{R}^{\not{2}}\to E^3,(u,v)\mapsto(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=x(u,v)e_1+y(u,v)e_2+z(u,v)e_3$来表

示一个**曲面**，参数表示的好处在于，我们可以研究一个局部，而不需要考虑一个整体曲面$f(x,y,z)=0$。同样地，如果还满足$x(u,v),y(u,v),z(u,v)$在D上至少3阶连续可微(自然可求偏导)且$r_u=(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u})\wedge r_v=(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v})\neq 0$(即线性无关)，则称它是**正则曲面**，后一个条件和曲线一样就是为了保证它确实是双参数的曲线。

接下来我们只考虑正则曲面$S:r(u,v)\in Hom(D,E^3)$，对于局部理论我们同样先考虑一点$P=(a,b)\in D$，由假设可知$r_u(a,b)$和$r_v(a,b)$是两个线性无关的向量，此时我们可以令它们生成的二维线性空间为$T_P(S)=\langle r_u(a,b),r_v(a,b)\rangle$，并把它称为$S$在$P$处的**切平面**，并把过$P$点且垂直与切平面的直线称为**法线**，此时我们也能得到一个坐标系$(P:r_u(a,b),r_v(a,b),r_u(a,b)\wedge r_v(a,b))$。我们把区域$D$内的一条正则曲线$r(u(t),v(t)),u(0)=a,v(0)=b$称为曲面$S$上的一条过$P$的曲线，有个这些简单内容，我们有下面定理。

定理 2.29: (1)对于正则曲面S上的任意一点P，$T_P(S)$等于曲面S上过P曲线的切向量全体

(2)曲面的切平面和法线与参数选取无关。

或许我们有必要解释一下什么叫做“参数选取无关”，这并不是说它们在“数值上是不变的”，而是说它们的转化方式和参数的转化是一致的。如果曲线有一个参数变换$\sigma:(u_1,v_1)\to(u_2,v_2)$是双射且雅可比(Jacobi)行列式$\frac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}\neq 0$，此时我们认为$r(u_1,v_1)=r(u_2(u_1,v_1),v_2(u_1,v_1))$是一个参数变换，如果某种几何对象$l:S\subset U\to E^3$也满足$l(u_1,v_1)=l(u_2(u_1,v_1),v_2(u_1,v_1))$就称$l$与$r$的**参数选取无关**。我们先计算一系列的参数$E=r_ur_u$、$F=r_ur_v$、$G=r_vr_v$(这里的向量乘法都是内积，以后不再提醒了)、然后记法向$n=\frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}$，再计算一系列的参数$L=r_{uu}n$、$M=r_{uv}n$、$N=r_{vv}n$。此时，我们记

$$\mathrm{I}=ds^2=Edudu+2Fdudv+Gdvdv$$

$$\mathrm{II}=Ldudu+2Mdudv+Ndvdv$$

并把I称为曲面的**第一基本形式**，把II称为曲面的**第二基本形式**。虽然第一基本形式在几何上可以计算弧长，但笔者认为，“形式”就应该是形式，是不应该具备实际意义的，把它们直接看成$\mathrm{I}:D\to\mathbb{R}^3,(u,v)\mapsto(E,F,G)$和$\mathrm{II}:D\to\mathbb{R}^3,(u,v)\mapsto(L,M,N)$，笔者认为这样也是合理的，关键还是在一点处计算处的六个参数，它描述了曲面的基本局部形状。

定理 2.30: (1)曲面的第一基本形式与参数选取无关

(2)曲面的第一基本形式在合同变换下不变

(3)曲面，在第二基本形式正定或负定(即$LN-M^2>0$)处点的附近是凸的(或凹的，主要看怎么取法向)，在第二基本形式不定(即$LN-M^2<0$)处点的附近是马鞍型的

(4)曲面的第二基本形式，在同向参数变换(即$\frac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}>0$)下相同，在反向参数变换(即$\frac{\partial(u_2,v_2)}{\partial(u_1,v_1)}<0$)下变号，即$\mathrm{II}(u_2,v_2)=-\mathrm{II}(u_1,v_1)$

(5)曲面的第二基本形式，在刚体运动下不变，在反向刚体运动下变号。

请注意刚体运动和合同变换的区别，合同变换指$O(3)+P$即经过一个正交变换$T\in O(3)$后再沿P平移，而刚体运动指$SO(3)+P$，它排除了$det(T)=-1,T\in O(3)$即镜面反射的情况，此时把“合同变换-刚体运动”的部分称为反向刚体运动。通过上面的一系列定理，我们知道了曲面的一些决定参数，但是似乎好像还是不能完全由这六个参数来确定曲面，因此我们需

要计算更多的参数来描述曲面的性状。我们在曲面上随便找一条过P的使用弧长参数的曲线$l: r(u(s),v(s))$，此时我们定义

$$k_n(l)=L(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s})^2+2M\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}+N(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s})^2$$

由于曲面过点的弧长参数曲线和此点切平面内的单位向量有一一对应关系，我们可以对切向量$w=\lambda r_u+\mu r_v\in T_P(S)$定义类似的量

$$k_n(\frac{w}{|w|})=L\lambda^2+2M\lambda\mu+N\mu^2$$

由简单的探究可以发现对于单位向量有$|w|=E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2$，于是我们最终可以定义

$$k_n(w)=\frac{L\lambda^2+2M\lambda\mu+N\mu^2}{E\lambda^2+2F\lambda\mu+G\mu^2}$$

此时我们把$k_n(w)$称为向量w的**法曲率**，我们可以把这个数视为$k_n:T_P(S)\to\mathbb{R}$，显然由定义式就可以知道它的变换性质和第二基本形式是一样的。当$LN-M^2>0$时，此处的法曲率都是同号的，它的表现形状就是我们之前所说的凸的样子，我们把这样的点称为**椭圆点**；当$LN-M^2<0$时，法曲率将给出两个渐进方向，它在点附近分出四个区域，相对两个区域的凹凸情况一致，而相邻两个区域凹凸情况相反，它的表现形状就是我们之前所说的马鞍的样子，我们把这样的点称为**双曲点**；当$LN-M^2=0$时，我们把这样的点称为**抛物点**，特别地，我们把$L=M=N=0$的点称为**平点**。显然，法曲率应该会存在一种类似线性空间的结构，如果我们能只通过切空间就得到法曲率，就是一件比较好的事，我们可以来定义一个线性变换

$$\mathcal{W}:T_P(S)\to T_P(S),v=\lambda r_u+\mu r_v\mapsto-(\lambda n_u+\mu n_v)$$

上述变换运用了，单位法向量求导后的分量落在复平面内的性质，而且这个变换与参数选取无关，此时对任意单位向量$v\in T_P(S)$就会有一个简单的性质$k_n(v)=\mathcal{W}(v)v$，此时根据线性代数理论可知$\mathcal{W}$应该有两个特征值的，如果细心计算的话，它就是下面方程的根

$$k^2-\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}k+\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=0$$

我们把这两个根记为k_1,k_2，并把它们称为这点的**主曲率**，把$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$称为**平均曲率**，把$K=k_1k_2$称为**高斯曲率**。所有的法曲率可以由主曲率算出$k_n(v)=k_1cos^2\theta+k_2sin^2\theta$，所以其实主曲率的用途远大于法曲率。此时我们有一个很好的判断性质，$K>0$表示椭圆点，$K<0$表示双曲点，$K=0$表示抛物点。我们把$k_1=k_2=k$时的点称为**脐点**，特别地把$k\neq0$时称为**圆点**。其实微分几何，对于一个实际的曲面，就是一个算算算的理论，目前我们有一大批的局部参数，$(\mathrm{I},\mathrm{II},k_1,k_2,K,H)$，它们基本已经把局部描述了个遍，其实有些书还有第三基本形式$\mathrm{III}=n_un_ududu+n_un_vdudv+n_vn_vdvdv$，说实话几个量算来算去，搞再多也其实得不到什么新东西，其实我们现在最大的疑问在于第一、二基本形式中的du,dv到底意味着什么，实际上，它们隶属于外代数，是二次微分式，还有就是如何让第一、二基本形式像曲率和挠率一样来决定曲面，或者说怎样的第一、二基本形式可以决定一个曲面。实际上，它们需要满足一种运动方程，即点变动时的Gauss-Codazzi方程，我们来介绍一下吧。

运用之前的参数曲面$r(u,v)$和参数单位法向量$n(u,v)$，我们定义$g_{ij}=r_ir_j, b_{ij}=r_{ij}n=-r_in_j$(i,j取遍u和v)，因此$(g_{ij})$和$(b_{ij})$都是2阶方阵。我们记$u^1=u, u^2=v, r_i=r_{u^i}, n_i=n_{u^i}$，并规定爱因斯坦求和约为，指标出现上下相同时就对其取遍1和2，例如此时有

$$dr=r_idu^i=r_1du^1+r_2du^2$$

$$\mathrm{I}=g_{ij}du^idu^j=g_{11}du^1du^1+g_{12}du^1du^2+g_{21}du^2du^1+g_{22}du^2du^2$$

$$\mathrm{II}=b_{ij}du^idu^j=b_{11}du^1du^1+b_{12}du^1du^2+b_{21}du^2du^1+b_{22}du^2du^2$$

进一步定义符号$g^{ij}=(g_{ij})^{-1}, b_i^j=b_{ik}g^{kj}, g=det(g_{ij}), b=det(b_{ij})$，由于我们要研究变换规律，求导就必要的运算了，其需要下面的特殊记号

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}),\Gamma_{kij}=g_{kl}\Gamma_{ij}^l$$

即Christoffel符号，虽然它看起来有点复杂，但它其实就是把求导的具体内容通过一般运算表达出来的结果，即我们有下面的结论

$$\begin{cases}\frac{\partial r}{\partial u^i}=r_i, i=1,2 & (M_1)\\ \frac{\partial r_i}{\partial u^j}=\Gamma_{ij}^kr_k+b_{ij}n, i,j=1,2 & (M_2)\\ \frac{\partial n}{\partial u^i}=-b_i^jr_j, i=1,2 & (M_3)\end{cases}$$

我们把上面的三个方程称为曲面在自然坐标$\{r:r_1,r_2,n\}$下的**运动方程**。此时，我们再引入一个Riemann记号

$$R_{lijk}=g_{lm}(\frac{\partial\Gamma_{ij}^m}{\partial u^k}-\frac{\partial\Gamma_{ik}^m}{\partial u^j}+\Gamma_{ij}^n\Gamma_{nk}^m-\Gamma_{ik}^n\Gamma_{nj}^m)$$

此时，我们借助交换求偏导的性质和方程的独立性，运动方程可以推出更简单的三个方程，即

$$\begin{cases}R_{1212}=-(b_{11}b_{22}-(b_{12})^2) & (G_1)\\ \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2}-\frac{\partial b_{12}}{\partial u^1}=b_{1i}\Gamma_{12}^i-b_{2i}\Gamma_{11}^i & (C_1)\\ \frac{\partial b_{21}}{\partial u^2}-\frac{\partial b_{22}}{\partial u^1}=b_{1i}\Gamma_{22}^i-b_{2i}\Gamma_{21}^i & (C_2)\end{cases}$$

我们把上面的三个方程称为曲面的**Gauss-Codazzi方程**或者**结构方程**。接下来借助这些方程理论，我们有一系列的定理来表明第一、二基本形式的用处。

定理 2.31: *(1)如果两个曲面在同一参数下第一、二基本形式相同，那么它们相差一个刚体运动*

(2)如果有一系列的参数$\Gamma_{ij}^k, b_{ij}, b_j^i$满足Gauss-Codazzi方程，则存在该点的一个领域及其上的一个曲面$r(u,v)$，使得$g_{ij}du^idu^j$和$b_{ij}du^idu^j$分别是这个曲面的第一基本形式和第二基本形式。

至此，我们基本已经把第一、二基本形式的地位给完全确定了下来，它在满足一定条件的情况下可以局部完全确定一个曲面，就和曲线的曲率和挠率一样，或许唯一的疙瘩就是这些方程和计算都丑不拉几的，一点数学的美感都没有，但完全没事，我们只要敢于定义符号，美感就是分分钟的事情，请跟着我一起来吧。首先，我们要将自然坐标$\{r: r_u, r_v, n\}$，进行Schmidt正交化，即

$$e_1 = \frac{r_u}{|r_u|}, e_2 = \frac{r_v - (r_v e_1)e_1}{|r_v - (r_v e_1)e_1|}, e_3 = e_1 \wedge e_2$$

此时的标准正交基构成的框架$\{r: e_1, e_2, e_3\}$就会好用很多了。此时我们要定义和原来坐标关联的变换矩阵$A = (a_{ij})$，计算就能得到

$$\begin{bmatrix} r_u \\ r_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

借助这些系数，我们可以轻松地定义两个一次微分形式

$$\begin{cases} \omega_1 = a_{11}du + a_{21}dv \quad (= dre_1) \\ \omega_2 = a_{12}du + a_{22}dv \quad (= dre_2) \end{cases}$$

最后我们需要对正交活动标架求导，同样地，我们可以定义出一系列求导相关的系数ω_{ij}，它由下面三个方程确定

$$de_i = \omega_{i1}e_1 + \omega_{i2}e_2 + \omega_{i3}e_3, \quad i = 1, 2, 3$$

最后我们再定义一个矩阵$B = (h_{ij})$，别怕这是最后一个了

$$[\omega_{13}, \omega_{23}] = [\omega_1, \omega_2]B, B = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}$$

接下来，我们有一系列的简单结论，运算证明过程就留给大家自己去探索吧。

1）标架的运动方程：

$$\begin{cases} dr = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 & (Y_1) \\ de_1 = \omega_{12}e_2 + \omega_{13}e_3 & (Y_2) \\ de_2 = \omega_{21}e_1 + \omega_{23}e_3 & (Y_3) \\ de_3 = \omega_{31}e_1 + \omega_{32}e_2 & (Y_4) \end{cases}$$

其中$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 (1 \le i, j \le 3)$；

2）曲面的结构方程：

$$\begin{cases} d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 & (S_1) \\ d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1 & (S_2) \\ d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} & (S_3) \\ d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23} & (S_4) \\ d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13} & (S_5) \end{cases}$$

3）各种特征值：

$$\mathrm{I} = \omega_1\omega_1 + \omega_2\omega_2$$

$$\mathrm{II} = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23}$$

$$\mathrm{III} = \omega_{13}\omega_{13} + \omega_{23}\omega_{23}$$

$$\omega_{13} \wedge \omega_{23} = K du \wedge dv$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

$$K = \det B, H = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}B$$

注意到上面使用了外代数，它的整体理论我们已经在线性代数中讲过了，在这里我们就简单的定义一下外微分。**一阶外微分形式**指$fdu + gdv$，对于两个外微分形式定义它们的外积为$(f_1du + f_2dv) \wedge (g_1du + g_2dv) = (f_1g_2 - f_2g_1)du \wedge dv$，此时，令**二阶外微分形式**指$fdu \wedge dv$，其中外积具有线性和反对称性，这来自线性代数的外代数。最后定义**外微分**，零阶外微分形式时$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$，一阶外微分形式时$d(fdu + gdv) = (-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u})du \wedge dv$，二阶外微分形式时$d(fdu \wedge dv) = 0$，注意这些都是定义不是性质，虽然可以形象定义，再通过线性代数的外代数理论来简化成上面的形式，但笔者觉得实在是多此一举，干脆直接搞成定义算了，虽然给人有点不明所以的感觉就是了。

2.4.2 整体理论

对于一点的局部性质，我们差不多也玩腻了，接下来我们来看看整体上的微分几何吧，在这里我们将得到许多美妙的结论，而且还能试着发现平面上的非欧几何在曲面上的模型。对于E^3中两个曲面的一一对应$\sigma : S_1 \to S_2$，如果任意S_1上曲线C的长度与$\sigma(C)$相等，则称σ是**等距变换**。我们把S_1上两条曲线在交点处切向量的夹角叫做两条曲线的夹角，如果一一对应$\sigma : S_1 \to S_2$保持任意两条曲线的夹角，则称σ是**保角变换**。此时，我们可以得到最简单的一个定理。

定理 2.32: (1)任意等距变换都是保角变换

(2)任意曲面上的每一点都有一个领域，它可以和欧式平面$\mathbb{R}^2$的一个区域间建立保角变换

(3)高斯曲率K只与第一基本形式有关，即$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$。互为等距(即存在一个等距变换)的曲面，在对应点处的高斯曲率相等。

由于接下来我们考虑整体微分几何性质是，需要一种特殊微分的，我们接下来就把它定义出来。

定义 2.28: 对于E^3中的一曲面$S: r(u,v) \in Hom(D,E^3)$

(1)我们把映射$v: D \to E^3, P \mapsto v \in T_P(S)$称为$S$上的一个**切向量场**，它可以由局部正交活动标架显式地写为$v = f_1e_1 + f_2e_2$

(2)对切向量场$v = f_1e_1 + f_2e_2$，我们定义它的**协变微分**$Dv = (df_1 + f_2\omega_{21})e_1 + (df_2 + f_1\omega_{12})e_2$

(3)设$P,Q \in S$，$\gamma: r(u(t),v(t)), t \in (a,b)$为$S$上的连接$P,Q$的曲线，设$v|_\gamma: (a,b) \to E^3, t \mapsto v(\gamma(t)) \in T_{\gamma(t)}(S)$是切向量场在$\gamma$上的截取，如果有$\frac{Dv|_\gamma(t)}{\mathrm{d}t} \equiv 0$则称$v$沿$\gamma$**平行**。

有关这些东西，我们马上可以给出一些简单的性质。

定理 2.33: (1)切向量场的协变微分与标架的选取无关，并且有$Dv = (dve_1)e_1 + (dve_2)e_2$

(2)协变微分有基础的微分性质，如$D(v+w) = Dv + Dw$、$D(fv) = dfv + fDv$、$D(vw) = Dvw + vDw$

(3)曲面上任意一曲线，只要确定其上的一个切向量，那么沿这条曲线平行的切向量场是唯一的

(4)沿同一曲面上的曲线平行的切向量场在曲线上的内积恒为常数。

有了这些基础的概念，我们现在可以来研究曲面上的几何了，首先是曲面上的直线。

定义 2.29: 对于E^3中的一曲面$S: r(u,v) \in Hom(D,E^3)$，设一弧长参数曲线为$l: r(s) = r(u(s),v(s))$，此时令正交标架的一个分量为$e_1 = \frac{dr}{ds}$

(1)我们把$k_g(l) = \frac{De_1}{\mathrm{d}s}e_2$称为$l$的**测地曲率**

(2)我们把曲面上测地曲率为0的曲线称为曲面的**测地线**。

由于曲线都可以找到弧长参数，所以定义对任意曲线成立，此处的测地线实际上就是“直线”的概念在曲面上的推广，比如平面的测地线其实就是直线，我们可以有下面的一系列简单性质。

定理 2.34: (1)测地曲率只与第一基本形式有关，并且有$\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2$

(2)弧长参数曲线$l: r(s) = r(u^1(s),u^2(s))$是测地线当且仅当，满足下面的**测地线方程**

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2u^1(s)}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^1_{ij}\frac{\mathrm{d}u^i(s)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j(s)}{\mathrm{d}s} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2u^2(s)}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^2_{ij}\frac{\mathrm{d}u^i(s)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j(s)}{\mathrm{d}s} = 0 \end{cases}$$

(3)切平面上的一个单位向量唯一确定一个在这点以其为切向量的测地线

(4)等距变换将测地线变为测地线

(5)曲面上的曲线是测地线当且仅当，这条曲线的主法向量与曲面的法向量平行

(6)曲面上连接两点的长度最短曲线是测地线。

实际上性质(6)也可以作为测地线的定义，但是计算会变得很繁琐，它其实是古典物理的一种用法，作为数学生，我们还是采用更加合理的定义比较好。如果，测地线代表了平面几何的直线，那么我们应该可以自然地模仿平面几何，通过测地线来建立曲面上的坐标。我们设S:

$r(u,v) \in Hom(D,E^3)$是E^3中的曲面，在一点$P \in S$附近，我们设过P的曲面上一条弧长参数测地线为$x(u)$，再设一条同样过P的曲面上一条弧长参数测地线为$y(v)$，且$x(u)$与$y(v)$在P处正交(即夹角为$\frac{\pi}{2}$)，此时我们可以得到曲面上的一个**测地平行坐标系**为一一对应$\{P:(u,v)\}:\mathbb{R}^2 \to S,(u,v) \mapsto r(x(u),y(v))$，此时曲面的第一基本形式为

$$ds^2 = du^2 + G(u,v)dv^2$$

我们虽然说过第一基本形式与参数选取无关，但实际上它具体的计算表达式还是会随曲线的选取而改变，而此时的第一基本形式算是比较好看的一种，即$E=1,F=0$，又由于(u,v)是弧长参数，所以我们有$u=0 \Rightarrow G(0,v)=1$和$v=0 \Rightarrow G(u,0)=1$，即此时的第一基本形式可以直接通过(u,v)参数来计算弧长。测地坐标也和平面坐标一样可以建立极坐标的形式，首先对任意一个单位切向量$v \in T_P(S)$，由之前的定理我们可以唯一找到一条曲面上的测地线$\gamma_v(s)$，此时我们可以定义测地射线为$\gamma(v,s):S_P^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \subset T_P(S) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to S,(v,s) \mapsto \gamma_v(s)$($S_P^1$表示切平面内的单位向量)，此时对任意一个切向量$w \in T_P(S)$，我们定义指数映射为

$$\exp_P : T_P(S) \to S, w \mapsto \gamma(\frac{w}{|w|},|w|)$$

此时对$T_P(S)$平面内任意一个标准正交坐标$\{P:e_1,e_2\}$，可以建立一个直角坐标系$N_P(x^1,x^2):T_P(S) \to S, w = x^1e_1 + x^2e_2 \mapsto \exp_P(w)$，我们把它称为曲面在$P$处的**法坐标系**，此时通过平面的基本分解结论可以得到一组参数

$$\begin{cases} x^1 = \rho cos(\theta) \\ x^2 = \rho sin(\theta) \end{cases}$$

可以得到一组参数$\{P:\rho,\theta\}:\mathbb{R}^2 \to S,(\rho,\theta) \mapsto N_P(\rho cos(\theta),\rho sin(\theta))$，并把它称为曲面的**测地极坐标系**，我们可以看到所谓的坐标系其实就是将一对实数变到曲面上的对应，当然不一定要求是双射，因为测地极坐标系就不是，因此我们也可以把坐标系看成曲面的一个坐标参数，比如测地平行坐标参数$r(u,v)$、法坐标参数$r(x^1,x^2)$、测地极坐标参数$r(\rho,\theta)$，它们的共同特点是两个参数均为零时对应P点。这样我们自然有一些简单的性质。

定理 2.35: (1)法坐标系$N_P(x^1,x^2)$是曲面在P附近处的正则参数，即$(x^1,x^2):\mathbb{R}^2 \to S$将垂直对应为垂直

(2)设在法坐标参数下曲面的第一基本形式为$\mathrm{I} = g_{ij}dx^idx^j$(使用求和约)，则有$g_{ij}(P) = \delta_{ij}$(迪利克雷符号)和$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(P) = 0, \forall i,j,k = 1,2$

(3)在测地极坐标参数$r(\rho,\theta)$下的曲面有，$\mathrm{I} = ds^2 = d\rho^2 + G(\rho,\theta)d\theta^2$、$\lim_{\rho \to 0}\sqrt{G} = 0$、$\lim_{\rho \to 0}\frac{\partial(\sqrt{G})}{\partial \rho} = 1$

(4)曲面上连接两点的测地线是所有连接两点的长度最短的曲面曲线。

此时，我们终于明白了，第一基本形式中的微分符号确实有一定的意义所在，而不是一个空虚的符号。在测地极坐标参数下我们考虑高斯曲率为常数的曲面，当$K=0$时有$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2d\theta^2$，它给出了**平面欧式几何**的空间模型；当$K = \frac{1}{a^2} > 0$时有$ds^2 = d\rho^2 + a^2sin^2(\frac{\rho}{a})d\theta^2$，它给出了**球面非欧几何**的空间模型；当$K = -\frac{1}{a^2} < 0$时有$ds^2 = d\rho^2 + a^2sinh^2(\frac{\rho}{a})d\theta^2$，它给出了**双曲非欧几何**的空间模型。非欧几何有一种通过公理化的思想来导出的方法，但首先我们

不能使用欧几里得的那五条不完整的公理，而应该使用希尔伯特在“几何基础”中所给出的五组公理才是完善的，但这样的几何学在计算上是很劳累的，而且通过改变平行公理是否能得到所有的非欧几何是不清楚的，但通过微分几何的构造方式，我们知道了常高斯曲率的曲面上的几何只有这么三种，而且我们还给出了更丰富的计算性质。最后，我们来稍微介绍一下曲面上的**Gauss-Bonnet**公式。

定理 2.36: 设$D\subset S$是曲面上的分段光滑区域，即边界$\partial D=C_1\cup...\cup C_n, P_i=C_i\cap C_{i+1}\in S$满足$C_i$是曲面上的光滑曲线，设在顶点$P_i$处的外角(即夹角的补角)为$\alpha_i$，则有公式

$$\int\int_D KdA+\int_{\partial D}k_g ds+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2\pi$$

虽然公式确实简单，但有许多需要注意的细节，首先必需要在弧长参数坐标下进行积分，第一处是常规的二元实函数的曲面积分，其中的微元有关系式$d\omega_{12}=-KdA$即$dA=\omega_1\wedge\omega_2$，第二处是常规的二元实函数的曲线积分，其中的核心微元关系式是$ds=drdr=\sqrt{\mathrm{I}}$，至于其它的就没啥好说的了。微分几何的基础理论，我们基本就全都讲完了，而剩下的无非就是各式各样的结论，我们在这里就列举一下。

定理 2.37: (1)设$C:r(t)\in Hom([0,l],E^2)$为平面的简单闭曲线(即无限可导且没有自交点的首尾相接的曲线)，我们把$i=\frac{1}{2\pi}\int_0^l\kappa(s)ds$称为$C$的**旋转指数**。那么，$i=\pm1$

(2)对于长度为L的平面闭曲线C，设它围成区域的面积为A，则有$L^2-4\pi A\geq 0$，等号成立当且仅当A是一个圆

(3)对于平面曲线我们把满足$\frac{d\kappa}{ds}=0$的点称为**顶点**，并把$\kappa>0$的曲线称为**凸曲线**。那么，平面凸曲线上至少有四个顶点。

由于，二元实函数不能像复变函数一样进行解析粘合，因此对于更大的光滑曲面，我们不能单纯只用一组参数$r(u,v)$来表示，此时我将简单地进入流形思想地雏形，即曲面的光滑粘合思想。

定义 2.30: (1)设子集$S\subset E^3$，且有$S=\cup_i S_i$。如果满足，$\forall i, S_i$是正则曲面、只要$S_{ij}=S_i\cap S_j$非空则S_{ij}是正则曲面且$r_j^{-1}r_i: r_i^{-1}(S_{ij})\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$是可微映射，则称$S$是**光滑曲面**，并把$S_i$连同局部坐标的整体$(S_i,r_i)$称为$S$的一个**曲面片**

(2)我们把曲面片(S_i,r_i)上的一个单位法向量n_i称为曲面片的一个**定向**。如果光滑曲面$S=\cup_i S_i$满足在$S_i\cap S_j\neq\varnothing$上的每点的法向量相同，则它给出了$S$上的一个向量场$n:S\to E^3, P\mapsto n_P$，称为$S$的一个**定向**。存在一个定向的光滑曲面称为**可定向的**

(3)如果光滑曲面S是E^3中的有界无边闭集，则称S是**紧致的**。

一个典型的例子就是球面$x^2+y^2+z^2=r$，它在整体上是光滑曲面，但不是整体上的正则曲面，而是局部上的正则曲面，它还是一个可定向的紧致曲面。接下来是一些简单的性质。

定理 2.38: (1)可定向光滑曲面的第二基本形式可以定义在整个曲面上

(2)在紧致光滑曲面上必存在一个高斯曲率大于0的点

(3)设光滑曲面上的一个分段光滑区域$D\subset S$可三角剖分(这个后面我们在拓扑部分会给出

定义，此时它给出了一个欧拉示性数$\chi(D)=face-edge+vector)$，则有

$$\int\int_D KdA+\int_{\partial D}k_g ds+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2\pi\chi(D)$$

(4)对于光滑曲面S上的一个单位切向量场$v:S\to E^3$，我们把$v(P)=0$称为它的一个**奇点**。设单位切向量场v的全部奇点为$\{P_1,..,P_n\}$，记u为与v处处正交的另一个唯一单位切向量场，则它们给出了一个自然正交标架$\{P(x_1,x_2):e_1=u_P,e_2=v_P\}$，我们我再定义$r_\varepsilon=\{P\in S:x_1^2+x_2^2=\varepsilon^2\}$为曲面上的**测地圆**，此时再记符号$I(v,P_i)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{r_\varepsilon}\omega_{12}$，最后我们把$I(v)=\sum_{i=1}^{n}I(v,P_i)$称为向量场$v$的**指数**。此时，如果$S$时紧致的，则有$I(v)=\chi(S)$。

虽然还有大量的结论，但笔者觉得这几个定理就足够来品味微分几何了，因为以后我们会进一步在流形这个更大的框架中思考这些东西，所以这些东西差不多也该够了吧。不不不，最后我们再讲一下包络思想，它是流形纤维丛的原型。其实也很简单，对于光滑曲面S上的每一点P，我们都可以找到一个切平面$T_P(S)$，那么我们可以构造一个整体$T(S)=\cup T_P(S)\subset E^3$，它包含了曲面所有的切平面，这样我们就可以把$T(S)$称为$S$的一个**线性包络**，显然切平面的主要特点是存在唯一一个交点$P=T_P(S)\cap S$，如果我们将线性空间一般化为光滑曲面$S_P(S)$，此时对每一点$P\in S$配备的光滑曲面有$P=S_P(S)\cap S$，于是也有一个整体$S(S)=\cup S_P(S)\subset E^3$，但这还不能称为一包络，因为不同的线性空间$T_P(S)$和$T_Q(S)$之间是同构的，因此我们要求$S_P(S)$之间可以通过刚体运动互相转化，此时把$S(S)$称为$S$的一个**包络**。好了，我们就讲这些吧，这回是真的结束了。

2.4.3 运用复平面

在微分几何的结尾处，我们再来简单引入一下，复数运用于曲面可以带来哪些便利，这也为后面的复流形是更强的偶数维实流形的思想奠定基础。就以大家喜闻乐见的非欧几何来讨论一下吧，很快的，不用急。首先，我们注意到在曲面上，“等距变换”和“定义一个长度”是等价的，在之前我们构造非欧几何的曲面模型的时候，要求高斯曲率是恒为常数的目的，其实就是为了保持曲面上的等距变换可以保持住相关的性质，使得其上的几何学和原点的选取无关，如果放到平面上来看的话，就应该是$\mathbb{R}^2$内的等距变换保持一种长度，至于这种长度是怎么在其它地方实现，我们并不关心。换言之，如果我们可以找到一种长度$d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_{\geq 0}$，使得$d(x,y)=d(T(x),T(y)),T\in GL_2(\mathbb{R}^2)$，我们就能找到空间中的一个常高斯曲率曲面，使得其上的测地线长度和这个距离等价。如果想要更加便利的话，我们将使用$d:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$来表示一个距离，此时的一些限制可以转化为存在一个非负二阶连续可微的函数$\rho:U\subset\mathbb{C}\to\mathbb{R}_{\geq 0}\subset\mathbb{C}$使得

$$d(z_1,z_2)=\inf_{\gamma:(z_1,z_2)\to\mathbb{C}}\int_\gamma\rho(z)dz,ds^2=\rho^2|dz|^2$$

成立，则称ρ是一个**度量**。其中的ds^2其实就是通常的微分弧长，而$|dz|^2=dx^2+dy^2,z=x+iy$，所以度量就相当于是一个转化公式，这和曲面上的理论也是一样的，只不过它们的表现形式是第一基本形式。接下来，我们定义在这个度量下的**曲率**为

$$K(z,\rho)=-\frac{\Delta\ln\rho(z)}{\rho^2(z)},\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$$

接下来我们就能得到各种几何了，当$\rho(z)=1,U=\mathbb{C}$时，称其为**欧式度量**；当$\rho(z)=\frac{2}{1-|z|^2},U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$时，称其为**庞加莱(Poincare)度量**；当$\rho(z)=\frac{2}{1+|z|^2},U=\overline{\mathbb{C}}$时，称其为**球度量**。于是，欧式度量给出欧式几何，庞加莱度量给出双曲几何，球度量给出球面几何。这些都只是用来给出非欧几何模型的，想研究的话就留给读者自行探索了，我们需要知道的是平面上的三种几何，至少有四种传统观点，一是传统的公理观点、二是射影变化群的观点、三是空间曲面的观点、四是平面度量的观点。

2.5 存粹的几何学——点集拓扑

2.5.1 基本内容

所谓的拓扑学，其实就是一个研究子集的理论，听起来确实有点玄乎，但纯粹的几何就是这么一回事，大家可能会认为中学的平面几何应该是纯几何，但并非如此，垂直、平行、角度、长度等概念都是属于代数的计算性质，将它们从空间中分离开来，得到的才是纯粹的几何，这时还能剩下什么呢？你会发现就只有，像直线相交、点在线上、线在面上之类的“结合性质”，即希尔伯特几何学公理系统的第一组公理，“结合公理”。实际上，在平面几何公理系统中还有“顺序公理”、“合同公理”、“连续公理”、“平行公理”这四组，顺序公理对应了实数的序性质，在幻世中即“序结构”，合同公理表明了度量性质，在幻世中我们通过拓扑结构和代数结构对应来实现，即“层思想”，连续公理表明了实数的完备性，对应幻世的“完备度量空间”，而它与拓扑结构的联系就是“连续映射”，至于最后的平行公理只是拿来区分不同种类的平面几何。对于代数结构我们已经见多识广了，而拓扑结构与代数结构的对应则是整篇文章的核心内容，但它并不归预备知识管。因此，我们的**存粹几何学**就三个内容，几何的结合性质结构，即“拓扑”，几何的连续性质结构，即“连续映射”，还有一个可能经常用到的“序结构”。对于集合X，我们把它所有子集构成的集合记为2^X，即有$x\in 2^X\Leftrightarrow x\subset X$。

定义 2.31: 设一集合X

(1)我们把子集$R\subset X\times X$称为X上的一个**关系**，如果$x,y\in X$且$(x,y)\subset R$则记xRy

(2)如果一个关系$\sim$满足$\forall x,y,z\in X$有，$x\sim x$、$x\sim y\Rightarrow y\sim x$、$x\sim y,y\sim z\Rightarrow x\sim z$，则称$\sim$是一个**等价关系**，此时可以构造**商集**为$X/\sim=\{[x]\subset 2^X:\forall y\in[x],x\sim y\}$

(3)如果一个关系$\leq$满足$\forall x,y,z\in X$有，$x\leq x$、$x\leq y,y\leq z\Rightarrow x\leq z$、$x\leq y,y\leq x\Rightarrow x=y$，则称$\leq$是一个**偏序关系**。如果偏序关系$\leq$满足$\forall x,y\in X$，$x\leq y$或$y\leq x$至少一个成立，则称$\leq$是一个**全序关系**。全序关系可以诱导出一个序结构，即记$x<y\Leftrightarrow x\leq y,x\neq y$，此时任意元素可以进行任意的比较

(4)如果集簇$\mathscr{A}\subset 2^X$满足，$\varnothing,X\in\mathscr{A}$、$A,B\in\mathscr{A}\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{A}$、$\{A_i\}\subset\mathscr{A}\Rightarrow\cup_i A_i\in\mathscr{A}$，则称$\mathscr{A}$是$X$上的一个**拓扑**。如果$X$上可以构造一个拓扑$\mathscr{A}$，则称$X$是一个**拓扑空间**，并把$\mathscr{A}$的元素称为$X$的**开集**。

我们可以看到一个拓扑空间实际上相当是一个定义了开集的集合，而开集满足最重要的有限交和任意并仍是开集。比如我们说$\mathbb{R}$是一个拓扑空间相当于指明它是一个整体$(\mathbb{R},\{\cup(a,b)\})$，

但我们通常都默认拓扑结构的存在，并表明如果说X是一个拓扑空间，则表示我们可以使用“开集”这个词了。首先任意集合X都有两个简单的拓扑构造，即**平庸拓扑**$\{\varnothing, X\}$和**离散拓扑**2^X，如果对$\mathbb{R}$使用离散拓扑的话，单点集$\{x\}$和闭区间$[a,b]$都可以是开集，所以对于实际的集合我们最好要指明什么是“开集”，而一旦有了开集的概念，点集拓扑就可以给出一系列的相关概念，这样可以极大的减少定义的重复性，这也是点集拓扑存在的一个重要意义。接下来就是概念大杂烩了，有点没意思，但也得坚持下来。

定义 2.32: 设X是拓扑空间

(1)对$x \in X, U \subset X$，如果存在开集V使得$x \in U \subset V$，则称U是x的**领域**。我们把x处所有领域构成的集合称为**领域族**，并记$\mathscr{U}(x)$。把包含x的开集称为x的**开领域**，并把它们的全体记为$\mathscr{U}^o(x)$，显然有$\mathscr{U}^o(x) \subset \mathscr{U}(x)$

(2)对$x \in X, \mathscr{V}(x) \subset \mathscr{U}(x)$，如果有$\forall U \subset \mathscr{U}(x), \exists V \subset \mathscr{V}(x), V \subset U$，则称$\mathscr{V}(x)$是$x$的**领域基**

(3)对$A \subset X$，如果$A^c = X - A$是开集，则称A是**闭集**

(4)对$x \in X, A \subset X$。如果$\forall U \in \mathscr{U}(x), U \cap A \neq \varnothing$，则称$x$是$A$的**附着点**，$A$的所有附着点的集合称为$A$的**闭包**，并记作$\overline{A}$。如果$\forall U \in \mathscr{U}(x), U \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$，则称$x$是$A$的**凝聚点**，$A$的所有凝聚点的集合称为$A$的**导集**，并记作$d(A)$

(5)对$x \in X, A \subset X$。如果存在开集V满足$x \in V \subset A$，则称x是A的**内点**，A的所有内点的集合称为A的**内部**，并记作A^o。如果x是A^c的内点，则称x是A的**外点**，A的所有外点的集合称为A的**外部**，并记作A^e

(6)对$x \in X, A \subset X$。如果$\forall U \in \mathscr{U}(x), U \cap A \neq \varnothing, U \cap A^c \neq \varnothing$，则称$x$是$A$的**边界点**，$A$的所有边界点的集合称为$A$的**边界**，并记作$\partial A$。

术语虽然一大堆，但是性质都是很简单且平凡的，我们直接把它们列举出来。

定理 2.39: 设X是拓扑空间

(1)$A \subset X$是开集当且仅当，$\forall x \in A, A \in \mathscr{U}(x)$

(2)设$\mathscr{B} \subset 2^X$是所有闭集的全体，则有$\varnothing, X \in \mathscr{B}$、$A, B \in \mathscr{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{B}$、$\{A_i\} \subset \mathscr{B} \Rightarrow \cap_i A_i \in \mathscr{B}$

(3)$\overline{A}$是所有包含A的闭集的交，即包含A的最小闭集。A^o是所有包含于A的开集的并，即包含于A的最大开集。$A \subset X$是闭集当且仅当$A = \overline{A}$。$A \subset X$是开集当且仅当$A = A^o$。$A \subset X$既开又闭当且仅当$\partial A = \varnothing$

(4)$\overline{A} = A \cup d(A)$、$A^e = (A^c)^o$、$(A^o)^c = \overline{A^c}$、$\overline{A} = A^o \cup \partial A$、$A^o = \overline{A} - \partial A$、$\partial A = \overline{A} - A^o$。

其中比较重要的是(1)和(2)，它们其实表示了一个事实，就是“定义一点的领域基”和“定义闭集”都可以等价地给出一个拓扑，有两个比较著名的例子是**Krull拓扑**和**Zariski拓扑**，前者定义在一个伽罗瓦群$G = Gal(K/F)$上，它给出“单位元的领域基”为$\mathscr{U}(e) = \{Gal(E/F) \subset G : F \subset E \subset K, E$是$F$的有限伽罗瓦扩张$\}$，后者定义在代数闭域的线性空间$k^n$上，将其中的代数集$U = \{x \in k^n : \forall f \in I, f(x) = 0\}(\exists I \subset k[x_1, ..., x_n])$定义为“闭集”。至于剩下的就是为了让你熟悉一下相关概念，同时我们必需指出一些可能出现的情况，比如$A \neq \overline{A}^o$和$A \neq \overline{A^o}$，多搞些实例就会有更加清晰的认识。另外，度量空间也可以诱导一个拓扑，“开集”就是度量空间所定义的开集，我们通常研究的$\mathbb{R}^n$和$\mathbb{C}^n$，又或者是更一般的赋范线性空间上的拓扑，指

的都是这个，我们以后不再提醒，请读者牢记这一点。

定义 2.33: 设$(X,\mathscr{A})$是拓扑空间

(1)如果$\mathscr{C}\subset\mathscr{A}$满足$\forall A\subset\mathscr{A},\exists\mathscr{C}_A\subset\mathscr{C},A=\cup_{B\in\mathscr{C}_A}B$，则称$\mathscr{C}$是$\mathscr{A}$的**基**，简称**拓扑基**

(2)设X上有一个全序关系$\leq$且至少有两个元素。我们定义集簇$\mathscr{C}\subset 2^X$由下面的元素构造

(a)X的所有开区间$(a,b)=\{x\in X:a<x<b\}$

(b)如果X存在最小元a_0(即$\forall x\in X,a_0\leq x$)，X的所有区间$[a_0,b)=\{x\in X:a_0\leq x<b\}$

(c)如果X存在最大元b_0(即$\forall x\in X,x\leq b_0$)，X的所有区间$(a,b_0]=\{x\in X:a<x\leq b_0\}$

则$\mathscr{C}$是某个拓扑的基，我们把它生成的拓扑称为X上的**序拓扑**。

实际上$\overline{\mathbb{R}}$上的拓扑就可以看成由其上的序结构所生成的拓扑，其中的$-\infty$是最小元，$+\infty$是最大元。而拓扑基所能生成的拓扑的唯一性有相关的定理进行支撑。

定理 2.40: 设$(X,\mathscr{A})$是拓扑空间

(1)$\mathscr{C}$是拓扑基$\Leftrightarrow\forall x\in X,V\in\mathscr{U}(x),\exists B\in\mathscr{C},x\in B\subset V$

(2)$\mathscr{C}$是拓扑基$\Leftrightarrow\forall A\in\mathscr{A},x\in A,\exists B\in\mathscr{C},x\in B\subset A$

(3)如果$\mathscr{C}\subset 2^X$满足，$\cup_{B\in\mathscr{C}}B=X$、$\forall A,B\in\mathscr{C},A\cap B\neq\varnothing\Rightarrow A\cap B\in\mathscr{C}$，则$X$上存在以$\mathscr{C}$为基的唯一拓扑。

最后，我们来介绍拓扑结构的连续映射，它是“连续性”在拓扑结构上的推广。

定义 2.34: 设X,Y是拓扑空间，$f:X\to Y$是映射

(1)如果对任意Y的开集V，$f^{-1}(V)$是X的开集，则称f是**连续映射**

(2)对一点$x\in X$，如果$\forall U\in\mathscr{U}(f(x)),\exists G\in\mathscr{U}(x),f(G)\subset U$，则称$f$在$x$处**连续**

(3)如果对任意X的开集A，$f(A)$是Y中的开集，则称f是**开映射**。如果对任意X的闭集A，$f(A)$是Y中的闭集，则称f是**闭映射**

(3)如果f是连续双射，且$f^{-1}:Y\to X$也是连续的，则称f是一个**同胚映射**。如果X和Y之间存在一个同胚映射，则称X与Y**同胚**，并记为$X\cong Y$。

同胚是一种比双射强一些的对应，我们最后给出上述内容的性质就差不多可以结束本章内容了。

定理 2.41: 设X,Y是拓扑空间，$f:X\to Y$是映射

(i)下面的条件互相等价

(1)f在x处连续

(2)$\forall V\in\mathscr{U}(f(x)),f^{-1}(V)\in\mathscr{U}(x)$

(3)任意的领域基$\mathscr{V}(f(x))$有，$\forall V\in\mathscr{V}(f(x)),f^{-1}(V)\in\mathscr{U}(x)$

(ii)下面的条件互相等价

(1)f是连续映射

(2)f在x上每一点都连续

(3)如果对任意Y的闭集V，$f^{-1}(V)$是X的闭集

(4)(什么是网自己看着办)对X中的任意网$S=\{S(n):n\in D\}$有$f(\lim S)\subset\lim f(S)$

(iii)**常值映射**$f(X)=\{c\}\subset Y$是连续映射，**恒等映射**$i:X\to X, x\mapsto x$是连续映射，连续映射的复合是连续映射

(iv)同胚$\cong$是所有拓扑空间构成集合的等价关系

(v)如果$f:X\to Y$是双射，则下面的条件互相等价

(1)f是同胚映射

(2)f是连续的开映射

(3)f是连续的闭映射

(4)$A\subset X$是开集当且仅当$f(A)\subset Y$是开集

(5)$A\subset X$是闭集当且仅当$f(A)\subset Y$是闭集。

到此，我们基本已经搞清了拓扑的一些基础内容，对于集合的几种运算所生成的子空间、积空间、商空间如何继承拓扑请读者自行去探索吧。接下来我们将以这些内容为基础，来讲一下拓扑空间的各种可能出现的特性。

2.5.2 各种性质

拓扑空间可能出现的基础性质，无非就那么几大类，连通性、分离性、紧性，我们想要的是拓扑同胚下不变的性质，接下来我们来介绍一下吧，和之前也是同样地概念轰炸，理解什么的，都是不存在的，只要实例玩多了，自然就会熟络起来。

定义 2.35 (**连通性**): 设X是拓扑空间

(1)如果子集$A,B\subset X$满足$\overline{A}\cap B=A\cap\overline{B}=\varnothing$，则称$A,B$是$X$中的**隔离子集**。如果存在非空隔离子集$A,B$使得$A\cup B=X$，则称$X$是**不连通空间**，否则称$X$是**连通空间**。如果$G\subset X$作为子空间是连通的，则称$G$是$X$的**连通子集**

(2)如果子集$A\subset X$满足$\overline{A}=X$，则称A在X中**稠密**

(3)如果X的一个连通子集$A\subset X$满足，对任意连通子集$B\subset X$当$B\subset A$时有$B=A$，则称A是X的**一个连通分支**

(4)如果一点$x\in X$满足$\forall U\in\mathscr{U}(x)$存在$x$的连通领域$V$使得$V\subset U$，则称$X$在$x$处是**局部连通的**。如果$X$在每一点处都是局部连通的，则称$X$是**局部连通空间**

(5)对$[0,1]\subset\mathbb{R}$使用$\mathbb{R}$的拓扑，以后对不加说明的子集均指继承来的拓扑。对$a,b\in X$，我们把连续映射$f:[0,1]\to X, f(0)=a, f(1)=b$称为$X$中从$a$到$b$的**一条道路**。如果$\forall x,y\in X$都存在一条连接$x$与$y$的道路，则称$X$是**道路连通空间**。如果$G\subset X$作为子空间是道路连通的，则称$G$是$X$的**道路连通子集**

(6)如果X的一个道路连通子集$A\subset X$满足，对任意道路连通子集$B\subset X$当$B\subset A$时有$B=A$，则称A是X的**一个道路连通分支**

(7)如果一点$x\in X$满足$\forall U\in\mathscr{U}(x)$存在$x$的道路连通领域$V$使得$V\subset U$，则称$X$在$x$处是**局部道路连通的**。如果$X$在每一点处都是局部道路连通的，则称$X$是**局部道路连通空间**。

定理 2.42: 设X,Y是拓扑空间

(1)含有连通稠密子集的拓扑空间是连通空间。道路连通空间是连通空间。局部道路连通空间是连通的当且仅当它是道路连通的

(2)$\mathbb{Q}$在$\mathbb{R}$中稠密。$\mathbb{R}^n$和它的区间$[a,b]^n$都是道路连通的，$\mathbb{R}^n$是局部连通的

(3)设$f:X\to Y$是连通空间之间的连续映射，则$f(X)$是Y的连通子集。特别地，“连通”是同胚不变量

(4)设$f:X\to Y$是连续的开映射且X是局部连通的，则$f(X)$是局部连通的。特别地，“局部连通”是同胚不变量

(5)设$f:X\to Y$是连续映射且X是道路连通的，则$f(X)$是道路连通的。特别地，“道路连通”是同胚不变量。

定义 2.36 (**分离性**): 设X是拓扑空间

(1)如果X的任意一点都存在一个可数领域基，则称X满足**第一可数公理**或称X是**第一可数空间**

(2)如果X存在一个可数基，则称X满足**第二可数公理**或称X是**第二可数空间**

(3)如果X存在一个可数稠密子集，则称X是**可分空间**

(4)如果集簇$\mathscr{A}\subset 2^X$满足$\forall x\in X,\exists A\in\mathscr{A},x\in A$，则称其为$X$的一个**覆盖**。如果$\mathscr{A}$由开集组成，则称其为**开覆盖**

(5)如果X的每个开覆盖都存在一个可数子覆盖，则称X是**Lindelof空间**

(6)如果$\forall x,y\in X$且$x\neq y$满足，或者存在一个x的开领域U使得$y\notin U$、或者存在一个y的开领域V使得$x\notin V$，则称X是T_0**空间**

(7)如果$\forall x,y\in X$且$x\neq y$满足，存在一个x的开领域U使得$y\notin U$，则称X是T_1**空间**

(8)如果$\forall x,y\in X$且$x\neq y$满足，x和y分别存在一个开领域U和V使得$U\cap V=\varnothing$，则称X是T_2**空间**或者称X是一个**Hausdorff空间**

(9)对$A,U\subset X$。若$A\subset U^o$，则称U是A的一个**领域**。如果对每一点$x\in X$和每个不包含x的闭集$A\subset X$，存在x的一个开领域U和A的一个开领域V使得$U\cap V=\varnothing$，则称X是**正则空间**

(10)既是T_1又是正则的空间，则称为T_3**空间**

(11)如果对任意两个不相交的闭集$A,B\subset X$，存在A的一个开领域U和B的一个开领域V使得$U\cap V=\varnothing$，则称X是**正规空间**

(12)既是T_1又是正规的空间，则称为T_4**空间**

(13)如果对每点$x\in X$和每个不包含x的闭集$B\subset X$，存在一个连续映射$f:X\to[0,1],f(x)=0$且$\forall y\in B,f(y)=1$，则称X是**完全正则空间**

(14)既是T_1又是完全正则的空间，则称为$T_{3\frac{1}{2}}$**空间**或者称X是一个**Tychonoff空间**

(15)如果$\forall x,y\in X$且$x\neq y$满足，x和y分别存在一个开领域U和V使得$\overline{U}\cap\overline{V}=\varnothing$，则称$X$是$T_{2\frac{1}{2}}$或者称$X$是一个**Urysohn空间**

(16)如果任意两个隔离子集$A,B\subset X$分别存在开领域U和V满足$U\cap V=\varnothing$，则称X是**完全正规空间**

(17)既是T_1又是完全正规的空间，则称为T_5**空间**。

定理 2.43: (1)我们简记“完全”为P(Perfect)、“正则”为R(Regular)、“正规”为N(Normal)，则有

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
T_5 & \Rightarrow & T_4 & \Rightarrow & T_{3\frac{1}{2}} & \Rightarrow & T_3 & & & & & & & & \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow, & T_3 & \Rightarrow & T_{2\frac{1}{2}} & \Rightarrow & T_2 & \Rightarrow & T_1 & \Rightarrow & T_0 \\
PN & \Rightarrow & N & & PR & \Rightarrow & R & & & & & & & &
\end{array}$$

(2)“第二可数空间”$\Rightarrow$“第一可数空间”，“第二可数空间”$\Rightarrow$“可分”，“第二可数空间”$\Rightarrow$“Lindelof”。“第一可数”、“第二可数”、“可分”和“Lindelof”是同胚不变量

(3)“T_i”($i = 0, 1, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}$)是同胚不变量，且可遗传(即子空间保持相应的性质)。“T_4”是同胚不变量，且闭遗传(即闭子空间保持相应的性质)。“完全正规”是同胚不变量，且可遗传

(4)每个度量空间都是T_4空间。正则Lindelof空间是完全正则空间。正则第二可数空间是完全正规空间。

定义 2.37 (**紧性**): 设X是拓扑空间

(1)如果X的每个开覆盖都存在有限子覆盖，则称X是**紧空间**。如果子集$B \subset X$作为子空间是紧的，则称B是X的**紧子集**或称B是**紧集**

(2)如果X的每个可数开覆盖都存在有限子覆盖，则称X是**可数紧空间**

(3)如果X的每个无限子集都有聚点(即凝聚点)，则称X是**聚点紧空间**

(4)如果X的每个序列都有收敛子序列，则称X是**序列紧空间**

(5)如果X的每点都存在一个紧领域，则称X是**局部紧空间**

(6)对X的两个覆盖$\mathscr{A}$和$\mathscr{B}$，如果$\forall A \in \mathscr{A}, \exists B \in \mathscr{B}, A \subset B$，则称$\mathscr{B}$是$\mathscr{A}$的**加细**

(7)对集簇$\mathscr{A} \subset 2^X$。如果$\forall x \in X$，存在x的领域U_x使得它只与$\mathscr{A}$的有限个成员相交，则称$\mathscr{A}$是**局部有限的**

(8)如果X的每个开覆盖$\mathscr{A}$都存在一个局部有限的开覆盖$\mathscr{B}$，使得$\mathscr{B}$是$\mathscr{A}$的加细，则称X是**拟紧空间**

设X, Y是拓扑空间

(1)如果存在一个映射$f: X \to Y$满足$X \cong f(X)$，则称f是一个**嵌入**，或称X可以**嵌入到**Y

(2)设Y是紧T_2空间，如果同胚映射$f: X \to f(X) \subset Y$满足$\overline{f(X)} = Y$，则称Y是X的一个**紧化**，并记(X, f, Y)，如果$Y - f(X)$是单点集，则把它称为**单点紧化**

(3)设X的两个紧化为$(X, f, Y), (X, g, Z)$，如果存在一个连续映射$h: Y \to Z$使得$hf = g$，则记$(X, f, Z) \leq (X, g, Y)$。

定理 2.44: (1)“紧”、“局部紧”是同胚不变量，且闭遗传。“拟紧”是闭遗传的

(2)在紧T_2空间中，“紧子集”$\Leftrightarrow$“闭集”，“紧空间”$\Rightarrow$“$T_2 \Leftrightarrow T_3 \Leftrightarrow T_4$”

(3)“紧空间”$\Leftrightarrow$“可数紧空间+Lindeloff”、“可数紧空间”$\Leftrightarrow$“聚点紧空间+T_1”、“序列紧空间”$\Leftrightarrow$“可数紧空间+第一可数”、“紧空间”$\Leftrightarrow$“可数紧空间+拟紧”

(4)在$\mathbb{R}^n$中，“紧子集”$\Leftrightarrow$“有界闭集”。$\mathbb{R}^n$是局部紧空间，$\mathbb{R}$是拟紧空间

(5)拓扑空间X可单点紧化当且仅当，X是非紧的局部紧T_2空间，且同胚意义下它是唯一的

(6)设(X, g, Z)是单点紧化，则对任意紧化(X, f, Y)均有$(X, g, Z) \leq (X, f, Y)$。

或许大家可能会对大批的概念感到劳累，但我们实际需要认识的无非就是“同胚不变量”，很多以拓扑为基础的结构都需要研究分类定理，它们的基础前提是拓扑同胚，因此如果有两个对象，它们的某些同胚不变量是不同的，就可以直接把它们分开了。比如非紧空间$\mathbb{R}^n$和紧空间S^n(n维球面)无论它们的其它构造有多复杂，首先在拓扑层面上的紧性就可以直接把它们区分开来。实际上，还有一个比较好的不变量，我们马上引入一下。

定义 2.38: 设X是拓扑空间，$A \subset X$

(1)如果$\overline{A}^o = \varnothing$，则称$A$是**无处稠密集**

(2)如果A可以表示成可数多个无处稠密集的并，则称A是**第一纲集**

(3)不是第一纲集的子集称为**第二纲集**

(4)如果X的任意非空开集都是第二纲集，则称X是**Baire空间**。

定理 2.45: (1)每个局部紧的T_2空间是Baire空间。完备度量空间是Baire空间

(2)“Baire”是同胚不变量，且开遗传(即开集保持性质)。

此处我们第一次见到开遗传，也算是长见识了。上面的这些拓扑不变量，其实依旧没有离开集合论本身，性质基本都无法太深入，一般用的比较多的也就紧性和连通性了，在下一部分内容中，我们将见识到最强大的两个拓扑不变量，“同调群”和“基本群”，它们是代数拓扑的内容，也是我们最该理解的东西。

2.6 几何利器——同伦同调

2.6.1 单纯同调

虽然我们可以直接在一般拓扑空间上建立同调理论，但是笔者认为先认识一种特殊拓扑空间“单纯复形”及进一步的“可剖分空间”，研究上面的单纯同调，再去探究更复杂的同调，才是由浅入深，提高理解的好办法，而且“单纯同调”虽然不够普遍，但计算更简单，又有什么不去学习的理由呢？我们废话不多说，直接先把研究的对象给定义出来吧。

定义 2.39: (1)对线性空间$V = F^n$，如果存在映射$V \times V \to \mathbb{R}, (a, b) \mapsto ab$满足$\forall x, y, z \in V, a, b \in F$有，$(ax + by)z = axz + byz$、$xy = yx$、$xx \geq 0$且$xx = 0 \Leftrightarrow x = 0$，则称$V$是一个**内积空间**或**(线性)欧式空间**，习惯记为$E^n = V$

(2)设$V = F^n$是线性空间，如果$q+1$个元素$a_0, a_1, ..., a_q \in V$存在$k_0, ..., k_q \in F$满足，$\exists i, k_i \neq 0$、$k_0 + k_1 + ... + k_q = 0$、$k_0a_0 + k_1a_1 + ... + k_qa_q = 0$，则称这$q + 1$个元素是**仿射相关的**，否则称为**仿射无关的**

(3)设$a_0, ..., a_k$在欧式空间E^n中仿射无关，我记集合

$$A^k = \{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i : \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$$

并称其为由$a_0, ..., a_k$张成的**(k维)单形**，有时也记$A^k = (a_0a_1...a_k)$，并称a_i为A^k的**顶点**，我们把$\{a_0, ..., a_k\}$子集张成的单形称为A^k的**面**，我们记所有j维面构成的集合为$F^j(A^k), 0 \leq j \leq k$，并记$F(A^k) = \cup F^j(A^k)$。容易证明在诱导链“内积->范数->度量->拓扑”下，任意单形都是E^n的一个闭子空间

(4)对两个单形A^k和B^l，要么$A^k \cap B^l = \varnothing$，要么$A^k \cap B^l$同时是$A^k$和$B^l$的面，则称$A^k$和$B^l$是**规则相处的**

(5)欧式空间E^n中的一个由单形构造的集合K如果满足，$\forall A^k \in K, F(A^k) \subset K$、任意的$A^k, B^l \in K$是规则相处的，则称$K$是一个**(单纯)复形**。与单形类似，记$|K| = \cup_{A^k \in K} A^k$，则它也是$E^n$的一个闭子空间

(6)对于一个复形K，我们把它里面最高维单形的维数称为K的**维数**，并记$\dim K$。如果$L \subset K$也是一个复形，则称它是K的**子复形**。我们把K中至多p维的单形构成的子复形称为K的**p维骨架**，并记为K^p，并把K^0称为K的**顶点**。

复形其实算是一个很好理解的东西，放到$\mathbb{R}^3$中其实就是多面体，而单形相当于构成多面体的基本元素，“0维单形”即点、“1维单形”即线段、“2维单形”即三角形，“3维单形”即四面体，显然E^n中单形和复形的维数最大只能是n。对于复形的很多结论都比较平凡，比如单形自己的面规则相处、对于n维复形K有$K^n=K$、$|K|$是E^n的紧子集之类的，所以我们也不过多解释了，接下来我们来引入拓扑空间可剖分的概念，它是我们研究的核心对象。

定义 2.40: 设X是拓扑空间

(1)如果存在一个复形K和同胚映射$f:|K|\to X$，则称(f,K)是X的一个**单纯剖分**，并称X是**可剖分空间**，有时我们也称K是X的一个单纯剖分。更进一步，如果$\dim K=2$则称X是**可三角剖分的**[5]

(2)对于一个Abel(交换)群$(G,+)$，我们定义它“乘法”$\mathbb{Z}\times G\to G,(n,x)\mapsto nx$是幂运算，即$nx=\underbrace{x+...+x}_{n},(-n)x=-(nx),x\in G,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$。如果有一组元素$\{g_i\}\subset G$满足，$\forall g\in G,\exists n_i\in\mathbb{Z},g=\sum n_ig_i$，则称$\{g_i\}$**生成**$G$，如果$\{g_i\}$还是有限的则称$G$是**有限生成的**。如果$\{g_i\}$生成$G$且$\forall g\in G,g=\sum n_ig_i$是唯一的，则称$G$是**自由的**，并把$\{g_i\}$称为它的**基**，基中元素的个数称为**秩**

(3)记S_n是置换群，A_n是所有偶置换构成的交错群。对任意一个单形$(a_0a_1...a_n)$，显然$\forall\sigma\in S_{n+1},(a_{\sigma(0)}a_{\sigma(1)}...a_{\sigma(n)})$表示同一单形，因此我们可以为单形的表示赋予一个**定向**，如果规定$+(a_0a_1...a_n)$，则规定$\forall\sigma\in A_{n+1},+(a_{\sigma(0)}a_{\sigma(1)}...a_{\sigma(n)});\forall\sigma\in(S_{n+1}-A_{n+1}),-(a_{\sigma(0)}a_{\sigma(1)}...a_{\sigma(n)})$，即偶置换保持单形的符号，奇置换改变单形的符号。

容易得到，可剖分空间是紧的、可度量化[6]空间，而可三角剖分是我们之前在微分几何中需要的一个概念，在这里我们顺便引入一下，此时欧拉示性数可以定义为“$\chi(X)=$二维单形个数(face)-一维单形个数(edge)+零维单形个数(vector)”。自由Abel群和线性空间有些类似，但前者的系数最多也只是一个环，后者的系数却能是一个域。而单形的定向主要是为了排除因为点的描述位置不同而导致运算结果差异，接下来我们将使用单形作为基本元素来进行运算，接下来就是我们的核心概念“单纯同调”了。

定义 2.41 (**单纯同调**): 设X是可剖分空间，n维复形K是X的一个单纯剖分

(1)对任意一个集合$S=\{x_i\}$，我们定义一种线性形式和$\sum n_ix_i,n_i\in\mathbb{Z}$，记所有这种形式构成的集合为$V(S)$，对其中任意的两个元素$\sum a_ix_i,\sum b_ix_i\in V$，定义“加法”为$\sum a_ix_i+\sum b_ix_i=\sum(a_i+b_i)x_i$，定义“单位元”为$\sum n_ix_i,n_i=0$，定义“逆元”为$-\sum a_ix_i=\sum(-a_i)x_i$，则$V(S)$是一个自由Abel群，此时称$V(S)$是**由$S$生成的自由Abel群**

(2)我们将K中所有$p(0\leq p\leq\dim K)$维单形生成的自由Abel群记为$C_p(K)$，并且规定当$p<0$或$p>\dim K$时为平凡群，此时称其为K的**p维(整数)链群**，并把$C_p(K)$的元素称为**p维链**。此时，设$C_p(K)$的基为$\{x_i\}$，我们规定$-x_i\in C_p(K)$表示x_i作为单形时的相反定向，即如果$x_i=(a_0a_1...a_p)$则存在奇置换σ使得$-x_i=-(a_{\sigma(0)}a_{\sigma(1)}...a_{\sigma(n)})$

(3)设$C_p(K)$和$C_{p-1}(K)$的基分别为$\{x_i^p\}_i$和$\{x_i^{p-1}\}_i$，我们规定删除第j个顶点运算为$\{x_i^p\}_i\to\{x_i^{p-1},-x_i^{p-1}\}_i,x=(a_0a_1...a_p)\mapsto x_j=(a_0...a_{i-1}a_{i+1}...a_p)$。此时，对任意$p$维单形$x\in\{x_i^p\}_i$我

[5]有时也把“可剖分”叫做“可三角剖分”，因为更高维的单形看起来也像是一堆三角形拼接在一起而成的

[6]即存在一个度量空间，使得拓扑空间的拓扑由这个度量诱导

们定义运算$\partial(x)=\sum_{j=0}^{p}(-1)^j x_j$，此时我们可以定义**边缘同态**为

$$\partial: C_p(K)\to C_{p-1}(K), \sum n_i x_i \mapsto \sum n_i \partial(x_i)$$

(4)此时我们记$Z_p(K)=\{x\in C_p(K):\partial x=0\}$，并称其为$K$的**p维闭链群**。再记$B_p(K)=\{x\in C_p(K):\exists y\in C_{p+1}(K),\partial y=x\}$，并称其为$K$的**p维边缘链群**。当有$\partial\partial=0\Rightarrow B_p(K)\subset Z_p(K)$时我们可以定义[7]商群

$$H_p(K)=Z_p(K)/B_p(K)$$

并把它称为K(或者X，此时可记$H_p(X)$)的第p个**(单纯)同调群**。

对于单纯同调群，我们有下面这些比较简单的性质。

定理 2.46: (1)对任意复形K和链$\sigma\in C_p(K)$均有$\partial\partial(\sigma)=0$。换言之，任意复形都有同调群

(2)如果$h:K\to L$是可剖分空间的同胚则存在群同构$h_*:H_p(K)\to H_p(L)$，即"单纯同调群"是可剖分空间的同胚不变量。换言之，可剖分空间有同构意义下的唯一同调群

(3)我们把群G中所有有限阶元构成的子群称为它的**挠子群**，挠子群等于自身的群称为**挠群**。设G是一个有限生成的Abel群，T是它的挠子群，则有

(a)存在一个秩为β的自由Abel子群F使得，$G=F\oplus T$，并称F为G的**自由子群**

(b)存在k个有限阶循环子群$T_1,...,T_k,t_i=|T_i|>1$使得，$t_1|t_2|...|t_k$(整除升列)且$T=T_1\oplus...\oplus T_k$

其中β和$t_1,...,t_k$由G唯一确定。此时，我们把β称为G的**Betti数**，把$t_1,...,t_k$称为G的**挠系数**

(4)如果K是有限复形，则$H_p(K)$是有限生成的。此时，我们把相应同调群的Betti数和挠系数，分别称为K的**p维Betti数**和**挠系数**。如果可剖分空间存在一个有限复形剖分，则称它是**有限可剖分空间**。对于有限可剖分空间X，我们记它的p维Betti数为β_i，此时把$\chi(X)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i$称为$X$的**欧拉示性数**，其中的$n$是相应复形的维数

(5)对于有限可剖分空间X的任意一个剖分K，设K是n维复形且其中i维单形的个数是r_i，则有$\chi(X)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i r_i$。

值得注意的是证明同调群的拓扑不变性是比较困难的工作，首先从复形的连续映射$h:|K|\to|L|$构造一个诱导群同态$h_*:H_p(K)\to H_p(L)$就需要不少精力，接着证明复形同胚导致群同构，最后我们还要在转移到可剖分空间上，值得注意的是可剖分空间的连续映射不能诱导同调群的同态，想要深入了解的读者可以参考代数拓扑的相关书籍。至于欧拉示性数其实从复形剖分来算是比较简单的，因为计算同调群的时候就需要选一个复形剖分，所以还不如直接用剖分来算。通常情况下，我们可以直接把可剖分空间通过任意选择一个剖分从而看成复形，单纯同调最大的特点就是好计算，笔者就算一个十分简单的实例，更多的就不适合放在一个简介性的文章中了。另外任何的$H_p(X)(p<0)$都是平凡群，引入的目的其实只是为了在$C_0(X)$时有边缘同态，从而使得定义显得协调一些，所以它没什么好计算的，可以直接无视掉。

我们考虑2维球面$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2=r^2,r>0\}$，定义点$A=(0,0,0),B=(1,0,0),C=(0,1,0),D=(0,0,1)$和复形$K=\{(ABC),...,(AB),...,(A),...\}$，则$K$是$S^2$的一个单纯剖分，同胚映射其实是一个挺弱的条件，我们只需要把四面体$ABCD$缩小到球面的内

[7]阿贝群的子群都是正规子群

部，并在四面体里面任意取一个点，做任意方向射线就可以得到同胚映射$|K| \to S^2$了。此时$\dim K = 2$，因此$H_p(S^2)(p > 2) = 0$(请注意这里的“0”指的是平凡群)，显然$B_2(K) = \{0\}$，注意到$\partial((ABC)+(ACD)+(BDC)+(ADB)) = BC-AC+AB+CD-AD+AC+DC-BC+BD+DB-AB+AD = 0$，且有$Z_2(K) = \{k((ABC)+(ACD)+(BDC)+(ADB)) : k \in \mathbb{N}\}$，故$H_2(S^2) = Z_2(K)/B_2(K) \cong \mathbb{Z}$。显然$Z_1(K) = B_1(K)$，此处可以通过有向线段来思考，因为对于一维链有$\partial(ij) = j - i$，而二维链的边缘同态结果$\sum(ij)$的运算可以简化成$\sum(j-i)$，因此$H_1(S^2) = Z_1(K)/B_1(K) = 0$。最后，显然$Z_0(K) = C_0(K)$，直接写出$B_0(K)$是有些困难的，但我们知道“商群”实际上也可以视为“关于某个等价关系的商集”，而这个等价关系是对任意$x, y \in Z_p(K)$有，$x \sim_p y \Leftrightarrow x - y \in B_p(K)$，此时我们也称闭链$x, y$是**同调的**，借助这个等价关系则有$Z_p(K)/B_p(K) = Z_p(K)/\sim_p$。此时，我们对$x, y \in Z_0(K)$容易发现$x \sim_0 y \Leftrightarrow x = ky, k \in \mathbb{Z}$，故此时$H_0(S^2) = Z_0(K)/\sim_0 \cong \mathbb{Z}$。总结一下，2维球面$S^2$上的同调群就是。

$$H_i(S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , i = 0, 2 \\ 0 & , i \neq 0, 2 \end{cases}$$

显然第0个同调群$H_0(X)$有一定的特殊性，实际上，它有一种通过等价的通用性算法，而结果就是下面的这个定理。

定理 2.47: 可剖分空间X的第0个同调群$H_0(X)$是自由Abel群。我们在X的每个道路连通分支上取一点构成子集$B \subset K$，则有$H_0(X) \cong V(B)$，即B构成$H_0(X)$的一组基，$H_0(X)$是由B生成的自由Abel群。

因此只要X是道路连通的可剖分空间，我们就可以立即得到$H_0(X) = \mathbb{Z}$，比如单点复形、n维实心球、柱面、环面、n维球面、莫比乌斯带、射影平面、克莱因瓶等等，它们的典型特征是“任意一点都可以走到另一点”，即道路连通。最后，我们再来介绍一下“上同调”，它是在定性的证明分析中用得比较多的一种同调。

定义 2.42 (**单纯上同调**): 设K是n维复形

(1)记$C_p(K)$和$C_{p-1}(K)$的基分别为$\{x_i^p\}_i$和$\{x_i^{p-1}\}_i$，显然边缘同态$\partial : C_p(K) \to C_{p-1}(K)$给出了一个矩阵$A = (a_{ij}), a_{ij} \in \mathbb{Z}$满足

$$\partial(x_i^p) = \sum_j a_{ij} x_j^{p-1}$$

此时我们把A称为K的第p个**关联矩阵**，这时我们可以定义**上边缘同态**$\delta : C_{p-1}(K) \to C_p(K)$为

$$\delta(x_j^{p-1}) = \sum_i a_{ij} x_i^p$$

(2)此时我们记$Z^p(K) = \{x \in C_p(K) : \delta x = 0\}$，并称其为$K$的**p维上闭链群**。再记$B^p(K) = \{x \in C_p(K) : \exists y \in C_{p-1}(K), \delta y = x\}$，并称其为$K$的**p维上边缘链群**。当有$\delta\delta = 0 \Rightarrow B^p(K) \subset Z^p(K)$时我们可以定义商群

$$H^p(K) = Z^p(K)/B^p(K)$$

并把它称为K的第p个**(单纯)上同调群**。

至于可剖分空间的上同调群是一样地写就行了，没啥好说的。上同调群和同调群有一个重要的联系定理，我们把它放到下面的性质中去。

定理 2.48: (1)对任意复形K和链$\sigma \in C_p(K)$均有$\delta\delta(\sigma)=0$。换言之，任意复形都有上同调群

(2)如果K是有限复形则有，$H^p(K)$和$H_p(K)$的自由子群相同，$H^{p+1}(K)$和$H_p(K)$的挠子群相同。

通过上面的定理可以知道，"同调群"和"上同调群"可以互相确定，所以我们只需研究任意一种理论就足够了，同调群便于计算，而上同调群则便于证明，只能说各司其职吧。

2.6.2 奇异同调

单纯同调，简单而且好算，但是最多只能定义在可剖分空间上，如果想要定义更一般的同调群，就该借助我们的奇异同调了。其实，有了之前的思想准备，同调的思想我们已经大致摸清了，就是先定义链群，再定义链群间的转化同态，最后通过商群$\ker/\mathrm{im}$即可得到同调群。所以，我们也没啥好铺垫的，直接给出一般拓扑空间上同调群的定义。

定义 2.43 (**奇异同调**): 设X是拓扑空间

(1)我们在$\mathbb{R}^\infty$取出无限个点$\varepsilon_0=(0,0,0...),\varepsilon_1=(1,0,0...),\varepsilon_2=(0,1,0,...),...,\varepsilon_p=(a_1=0,a_2=0,...,a_p=1,...),...$，并把p维单形$\Delta_p=(\varepsilon_0\varepsilon_1...\varepsilon_p)$称为**p维标准单形**

(2)我们把任意一个连续映射$T:\Delta_p\to X$称为X的**一个p维奇异单形**，并把所有p维奇异单形的集合记为$S_k(X)$。设R是一个幺环，我们记以R为系数生成的群(构造方法和之前的一样)是

$$S_k(X,R)=\{\sum_i \alpha_i\Gamma_i:\alpha_i\in R,\Gamma_i\in S_k(X)\}$$

(3)对任意$a_0,a_1...,a_p\in\mathbb{R}^j$，我们定义映射$l(a_0,a_1...,a_p):\Delta_p\subset\mathbb{R}^\infty\to\mathbb{R}^j,(x_1,...,x_p,0,0...)\mapsto a_0+\sum_{i=1}^p x_i(a_i-a_0)$。此时我们可以定义删点映射$l_{p,i}:\Delta_{p-1}\to\Delta_p,x\mapsto l(\varepsilon_0,...,\varepsilon_{i-1},\varepsilon_{i+1},...,\varepsilon_p)(x)$(去掉无用的0以后$\Delta_p$可以视为$\mathbb{R}^p$的元素)。然后我们对奇异单形$T\in S_p(X)$可以定义$\partial(T)=\sum_{i=0}^p(-1)^iTl_{p,i}\in S_{p-1}(X)$，最后我们可以定义**边缘同态**为

$$\partial:S_p(X,R)\to S_{p-1}(X,R),\sum\alpha_i\Gamma_i\mapsto\sum\alpha_i\partial(\Gamma_i)$$

(4)此时我们记$Z_p(X,R)=\{x\in S_p(X,R):\partial x=0\}$和$B_p(X,R)=\{x\in S_p(X,R):\exists y\in S_{p+1}(X,R),\partial y=x\}$。当有$\partial\partial=0\Rightarrow B_p(X,R)\subset Z_p(X,R)$时我们可以定义商群

$$H_p(X,R)=Z_p(X,R)/B_p(X,R)$$

并把它称为X的第p个**(奇异)同调群**。

我们的疑问应该是有很多的。首先标准单形我们不一定要选取Δ_p，只要具有一定结构的单形都是可以的，但由于后面证明的需要，选取的标准当然越简单越好，其实选择区间$[0,1]^p\subset\mathbb{R}^p$也还不错，对其定义删点映射会简单很多$l_{p,i}:[0,1]^{p-1}\to[0,1]^p,(x_1,...,x_{k-1})\mapsto(x_1,...x_{i-1},1,x_i...,x_{k-1})-(x_1,...x_{i-1},0,x_i...,x_{k-1})$，但是它会导致某些异常，从而需要进行特别处理，所以大多数的书还是采用上面的这种方法。接着，我们发现系数好像只用到了R里面的加法交换群，那么能否把它弱化成加法交换群呢？群的同调理论确实可以，但是大量实际表明，选取幺环会有更多良

好的性质，而且此时$S_p(X,R)$是一个R-模，具有一定线性空间的类似性质，实际上，同调代数构造复形也要求链上的每个元素是模，更重要的是此时还有万有系数定理(Universal coefficient theorem)，它表明了此种情况的同调群都可以由$R=\mathbb{Z}$时的同调群来计算，我来给出一下性质总结吧。

定理 2.49: 设X,Y是拓扑空间，R是幺环

(1)则连续映射$h:X\to Y$可以直接诱导同态映射$h_*:S_p(X,R)\to S_p(Y,R),T\mapsto fT$，且有$f\partial=\partial f,\partial\partial=0$。换言之，任意拓扑空间都有同调群。"奇异同调群"是同胚不变量

(2)设Tor表示Tor函子(没事到时候我们来讲讲同调代数)，则有一个短正合列

$$0\to H_n(X,\mathbb{Z})\otimes R\to H_n(X,R)\to Tor_1^R(H_{n-1}(X,\mathbb{Z}),R)\to 0$$

(3)如果X是可剖分空间，则整系数奇异同调群与单纯同调群同构，即$H_k(X,\mathbb{Z})\cong H_k(X)$。

在奇异同调上进行同态诱导可比在单纯同调上简单太多了，当然了我们渴求的主要有两个方面的内容，一个是系数定理，这样我们实际上只需要研究整系数的奇异同调群，这也是大多数代数拓扑学教程采用的思路，另一个是与单纯同调的同构，这告诉我们想要计算同调群的话，如果拓扑空间可剖分，就应该优先考虑单纯同调群。至于奇异同调嘛，看这定义就知道计算起来会有多困难，但是它的定义简单，使得我们在证明相关定理时反而会便捷很多。有了同调，我们接下来要考虑的当然是，与之对偶的上同调了。

定义 2.44 (**奇异上同调**): (1)设A,G都是(加法)Abel群，我们记所有A到G群同态构成的集合为$\mathrm{Hom}(A,G)$，定义$f,g\in\mathrm{Hom}(A,G)$的加法为$(f+g)(a)=f(a)+g(a)$，单位元为$f(A)\equiv e$(e是G的单位元)，逆元为$(-f)(a)=-f(a)$，则$\mathrm{Hom}(A,G)$构成一个加法Abel群。再设B是Abel群，对任意一个同态$f:A\to B$我们定义它的**对偶**为$f_*:\mathrm{Hom}(B,G)\to\mathrm{Hom}(A,G),g\mapsto gf$

(2)设X是拓扑空间，我们定义

$$S^k(X,R)=\mathrm{Hom}(S_k(X,R),R)$$

并令$\delta:S^{k-1}(X,R)\to S^k(X,R)$是边缘同态$\partial:S_k(X,R)\to S_{k-1}(X,R)$的对偶

(3)此时我们记$Z^p(X,R)=\{x\in S^p(X,R):\delta x=0\}$和$B^p(X,R)=\{x\in S_p(X,R):\exists y\in S_{p-1}(X,R),\delta y=x\}$。当有$\delta\delta=0\Rightarrow B^p(X,R)\subset Z^p(X,R)$时我们可以定义商群

$$H^p(X,R)=Z^p(X,R)/B^p(X,R)$$

并把它称为X的第p个**(奇异)上同调群**。

通过一般的抽象方法，上同调的定义简单得难以置信，这或许就是抽象的好处，至于联系嘛，也是简简单单的。

定理 2.50: (1)对任意拓扑空间X和奇异链$\sigma\in S_p(X,R)$均有$\delta\delta(\sigma)=0$。换言之，任意拓扑空间都有上同调群

(2)如果X是可剖分空间，则整系数奇异上同调群与单纯上同调群同构，即$H^k(X,\mathbb{Z})\cong H^k(X)$

(3)对拓扑空间X，当R为主理想整环时，设Ext表示Ext函子(和Tor一样我们在后面的同调代数中讨论)，G是任意一个R-模，则有一个短正合列

$$0 \to Ext^1_R(H_{i-1}(X,R),G) \to H^i(X,G) \to \mathrm{Hom}(H_i(X,R),G) \to 0$$

(4)设拓扑空间X有n个道路连通分支，则有$H_0(X,R) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}}_{n}$，每个道路连通分支任取一点构成这个自由Abel群的一组基。

实际上，我们只需要得到一个链群和相应的边缘同态，剩下的同调和上同调理论直接交给同调代数的理论就行了，我们在这里只能算是预热一下，让读者稍微感受一下同调的基本思想。上面的第三个定理，实际上也被称作“上同调的万有系数定理”(universal coefficient theorem for cohomology)，它是用了告诉你上同调与同调之间关系的定理，由于有限复形的有限难以在拓扑空间中定义，所以我们有了R为主理想整环的限制，比如当$R=\mathbb{Z}$且H_p和H_{p-1}是有限生成$\mathbb{Z}-$模时，就可以退化为之前的联系定理了，即$H^p(X)=F_p \oplus T_{p-1}$(其中$F_p$为$H_p(X)$的自由子群，$T_{p-1}$为$H_{p-1}(X)$的挠子群)。最后，我们来介绍一下CW复形，在基本所有的拓扑空间中，包括之前所提到的“单纯复形”和“可剖分空间”，算是目前已知最好算奇异同调群的一种了，一般的奇异同调群从定义来看就没什么计算的可行性，甚至不仔细约化的话，可能连球面S^2都算不出来，而对于可剖分空间，虽然我们说它计算便捷，但实际上只是表明它有确实的计算路径，实际的计算量是挺大的，想要付诸实践还是比较困难的。所以有了我们的CW复形。

定义 2.45: (1)我们定义n维实心闭球为$D^n=\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1\}, |(x_1,..,x_n)| = \sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$，并定义n维实心开球为$B^n=(D^n)^o=\{x \in \mathbb{R}^n : |x|<1\}$。设有一个拓扑空间列

$$\varnothing = K^{-1} \subset K^0 \subset K^1 ... \subset K^p \subset ...$$

对其中每个$n>-1$都有一簇拓扑空间集(可以没有元素)$\{e_i^n\}_i, \forall i,j, (e_i^n)^o \cap \partial(e_j^n)^o = \varnothing$使得

(a)$\forall i, e_i^n \cap K^{n-1} = \partial(e_i^n)$且$K^n = K^{n-1} \cup (\cup_i e_i^n)$

(b)对每个e_i^n存在一个连续映射$f_i^n : S^{n-1} = \partial(D^n) \to \partial(e_i^n)$和一个同胚映射$g_i^n : B^n \to (e_i^n)^o$

此时，我们把$X = \cup_i K^i$称为一个**胞腔复形**，并把$\{e_i^n\}_{n,i} = \cup_n \{e_i^n\}_i$称为$X$上的**胞腔构造**，把$K^n$称为$X$的**n维骨架**。我们记$\dim X = \sup\{n : \{e_i^n\}_i \ne \varnothing\}$，把它称为$X$的**维数**。我们把$e_i^n$称为$X$的**一个n维胞腔**。如果$e_i^n \cap \partial(e_j^m)$我们就称$e_j^m$是$e_i^n$的一个**接触面**

(2)如果一个胞腔复形$(X,\{e_i^n\})$满足

(C:闭包有限性 closure finiteness)任意的e_i^n只有有限个接触面

(W:弱拓扑性 weak topology)$S \subset X$是闭集当且仅当，任意的$S \cap e_i^n$是e_i^n中的闭集

则称X是一个**CW复形**。如果$\{e_i^n\}$是有限集，则称X是**有限的**。

笼统理解的话，所谓的CW复形其实就是把各种不同维数的实心球粘合起来而成的拓扑空间。值得注意的是，我们所给的定义也叫做“正则CW复形”，如果想要一般性的CW复形，就要需要弱化一些性质，但笔者觉得，性质足够我们来研究理解就行了。

定理 2.51: (1)可剖分空间(或单纯复形)自然地是CW复形。因为我们可以把p维单形自然地视为p维胞腔

(2)CW复形是拟紧的完美正规T_2空间

(3)设一个CW复形$(X,\{e_i^n\},K^n)$，我们记$D_p(X)=H_p(K^p,K^{p-1})$(相对同调在同调代数里再讲吧)，并记其诱导的边缘同态为$\partial:D_p(X)\to D_{p-1}(X)$，对其用类似的方法可以得到的同调群$H_p^D(X)=\mathrm{ker}\partial/\mathrm{im}\partial$，则有$H_p^D(X)\cong H_p(X,\mathbb{Z})$。

虽然，CW复形同调群的计算定理用到了同调代数，读者可能暂时不理解，但我们可以简单地去理解它，就是我们可以去一层层$(p-1\to p)$地计算骨架的某种同调群(即相对同调)，从而得到CW复形的第p个同调群。这时我们可以发现，如果这个CW复形是有限的，那么在有限次层数后，所有的同调群都是平凡的。我们拿球面S^n举例子，它的胞腔构造是$\{e^0\cong D^0,e^n\cong D^n\}$，其中$e^0$是一点，用来和变形后的实心球$e^n$粘合成一个n维球面的，它对应的骨架链为$(K^0=e^0)=K^1=...=K^{n-1}\subset(K^n=K^{n-1}\sqcup(e^n)^o)=...$，所以$S^n$是一个有限n维CW复形。显然对于相同部分是平凡群，而对于有变换部分，又是简单的球体情形，于是就可以轻松地得到，n维球面的同调群了。

$$H_i(S^n,\mathbb{Z})=\begin{cases}\mathbb{Z} & ,i=0,n\\ 0 & ,i\neq 0,n\end{cases}$$

实际上，CW复形同调群的计算，相当于单纯复形计算过程在拓扑空间中的抽象化，只是我们把单纯复形中边缘运算变成了一个可以计算的相对同调群，从而我们无需考虑哪些单纯同调中繁琐的运算。有关同调的话题，差不多可以结束了，其实我们真正需要知道的只有一点，那就是“奇异同调群”是一个性质很丰富的拓扑不变量，至于计算什么的，随便找找就有很多前人的结果了，我们拿来用就行了。

2.6.3 同伦

同伦，在$\mathbb{R}^n$空间中看起来和同调是一个十分像的存在，导致很多时候我们甚至之间把同伦和同调看成同一个东西了，但实际上，同伦并不像同调那样与$\mathbb{R}^n$有那么密切的关系，它最多只用到了$[0,1]\subset R$上的拓扑，因此同伦其实是比同调更偏向几何这一方的。废话说再多也没用，我们还是来感受一下吧。

定义 2.46: 设X,Y是两个拓扑空间

(1)对两个映射$f,g:X\to Y$，如果存在连续映射$H:X\times[0,1]\to Y$使得$\forall x\in X,H(x,0)=f(x),H(x,1)=g(x)$，则称$f$与$g$**同伦**，并记$f\simeq g$

(2)如果存在两个映射$f:X\to Y,g:Y\to X$使得fg,gf都与恒等映射同伦，即$fg\simeq 1_Y:Y\to Y,gf\simeq 1_X:X\to X$，则称$X$与$Y$**同伦**，或说$X$与$Y$**伦型相同**，并记$X\simeq Y$

(3)我们特别地考虑拓扑空间$I^n=[0,1]^n$和一点$x_0\in X$，在所有I^n到X的映射$\mathrm{Hom}(I^n,X)$中我们选出子类$\mathrm{Hom}_{x_0}(X)=\{f\in\mathrm{Hom}(I^n,X):f(\partial I^n)=x_0\}$，显然同伦$\simeq$也是$\mathrm{Hom}_{x_0}$的等价关系，此时我们令

$$\pi_n(X,x_0)=\mathrm{Hom}_{x_0}(X)/\simeq$$

接下来，我们来构造$\mathrm{Hom}_{x_0}(X)$上的加法结构。对任意$f,g\in\mathrm{Hom}_{x_0}(X)$，先令加法为(即

沿一个轴压缩一半再拼接)

$$(f+g)(t_1,t_2...,t_n)=\begin{cases} f(2t_1,t_2...,t_n) & 0\le t_1\le \frac{1}{2} \\ g(2t_1-1,t_2...,t_n) & \frac{1}{2}\le t_1\le 1 \end{cases}$$

此时$\forall [f],[g]\in \pi_n(X,x_0),[f]+[g]:=[f+g]\in \pi_n(X,x_0)$。接着我们定义单位元为$f_0(I^n)=x_0$，它可以直接继承为$[f_0]\in \pi_n(X,x_0)$，最后我们再定义逆元为(即使路径具有方向性)

$$(-f)(t_1,t_2...,t_n)=f(1-t_1,t_2...,t_n)$$

此时$[f]\in \pi_n(X,x_0),-[f]:=[-f]\in \pi_n(X,x_0)$。可以证明在上面体系下，$\pi_n(X,x_0)$是一个群，我们把它称为$X$的第n个**同伦群**

(4)任取一点$x_0\in X$，如果$\forall 1\le k\le m,\pi_k(X,x_0)=0$，则称$X$是**m连通的**。特别地，我们把“1连通”称为**单连通**，把“0连通”称为**道路连通**。

有关同伦，我们可以立即有一些简单的性质。

定理 2.52: (1)拓扑空间同胚推出拓扑空间同伦，$X\cong Y\Rightarrow X\simeq Y$。同伦$\simeq$，不仅是所有拓扑空间构成集合的等价关系，还是两个拓扑空间之间所有映射的等价关系

(2)如果X是道路连通的拓扑空间，则$\forall x_0,y_0\in X,\pi_n(X,x_0)\cong \pi_n(X,y_0)$。此时，我们特别地把$X$的同伦群记为$\pi_n(X)$，并称为$X$的**基本群**

(3)在基本群情形下，$\pi_n(X),n\ge 2$是Abel群，$\pi_n(X\times Y)=\pi_n(X)\oplus \pi_n(Y),n\ge 1$

(3)“奇异同调群”、“固定点的同伦群”、“基本群”是同伦不变量。

在某种意义上，我们可以把“同伦”视为一种拓扑不变量，这样我们就可以在同胚分类中把不同伦的拓扑空间直接分开了。由于同伦比同胚更弱，所以实际上对于一些可能的不变量，我们可以先考虑它是否同伦不变，如果是的话就可以不用考虑同胚了，如果不是我们就回到同胚来进行思考，当然对于证明，一般都是逐渐加强，先考虑同胚再考虑同伦。有关同伦群，我们还有一些值得说的事，如果同伦群选的基点在两个不同的道路连通分支上，那么生成的同伦群基本没什么关系，因此如果在两个同伦的拓扑空间上的两个分别不同的的道路连通分支上选点，它们就不是同伦不变量了。但固定点情形下就不同了，设拓扑空间同伦给出的映射是$f:X\to Y$，那么就有$\pi_n(X,x_0)\cong \pi_n(X,f(x_0))$，不过我们平常研究地更多的也是道路连通情形，因为对于两个分开的拓扑空间，分开研究就行了，没必要看成一个整体来给自己找麻烦，因此我们通常研究的都是基本群。由于一般性的基本群和拓扑空间的一系列性质一样，过于宽泛了，因此很多时候都是要穿插到具体的实例拓扑空间中，才能有更好的性质，在我们当前的框架下实在是给不出什么有趣的新东西了，所以我们还是把基本群看成和紧性、分离性、连通性之类的泛性质比较好，而且同伦群是同伦不变量，那么自然就是同胚不变量了，因此在同胚分类中基本群也可作为一个分类限制，比如我们著名的“庞加莱猜想”就是下面的定理(已经被证明了)。

定理 2.53: 设$S^n=\{(x_0,...,x_n)\in \mathbb{R}^{n+1}:x_0^2+...+x_n^2=1\}$表示n维球面。如果一个n(n>1)维微分流形$M$满足，$H_k(M)=H_k(S^n),\forall k\in \mathbb{N}$且$\pi_1(M)=0$，则有同胚$M\cong S^n$。

到此，我们总算是把所有的预备知识给说完了，接下来就是我们的主题“代数分析几何”了。

3 基础:层理论

3.1 范畴观、结构与公理

在我的上一篇文章[1]中已经讨论过了范畴的概念。范畴论的基本观点是研究三个核心对象，范畴=(对象、态射、复合)、函子=(对象对应、态射对应)、自然变换=函子到函子的对应。不知道你有没有这样的想法，把范畴中的obj也看成集合，把复合看成映射，那么我们是否可以这样定义范畴呢？

定义 3.1 (**范畴论相关概念的伪定义**): (1)设X是一个集合，如果对每个$x,y\in X$存在一个集合$hom(x,y)$，对每个$x,y,z\in X$存在一个映射$hom(x,y)\times hom(y,z)\to hom(x,z),(f,g)\mapsto gf$，满足

(a)对任意的$x,y,z,t\in X,f\in hom(x,y),g\in hom(y,z),h\in hom(z,t)$有$(hg)f=h(gf)$

(b)对任意的$x\in X$存在$1_X\in hom(x,x)$。并且$\forall f\in hom(x,y)$有$f1_X=f=1_Yf$

那么我们把$hom(x,y)$的元素称为x到y的**态射**，记$hom(X)=\cup_{x,y\in X}hom(x,y)$，并把$(X,hom(X))$称为一个**范畴**

(2)设$(X,hom(X)),(Y,hom(Y))$是两个范畴，$F:(X,hom(X))\to(Y,hom(Y))$是一映射。并且满足

(a)对任意的$x,y\in X,f\in hom(x,y)$有$F(f)\in hom(f(x),f(y))$

(b)对任意的$x,y,z\in X,f\in hom(x,y),g\in hom(y,z)$有$F(gf)=F(g)F(f)$

(c)对任意的$x\in X$有$f(1_x)=1_{f(x)}$

此时我们把F称为X到Y的一个**函子**

(3)剩下的类似，就省略了。

有人可能会觉得最大的问题是循环定义，比如集合论范畴**Set**，定义成一个集合就有点问题了(用集合定义集合)，而且可能总是隐隐约约地觉得不是很对劲，但就是说不出来哪里奇怪的(有一种说不出来的“违和感”)。对于前一段，你们应该要问为什么$hom(x,y)$在常规的范畴中被定义成集合，难道这就不是循环定义了吗，既然它可以被定义成集合，那把obj和hom都定义成集合又有什么不行呢？我们要不先来看一下“违和感”在哪里，此时我们需要先看一下类似的东西。比如环$(R,+,\times)$，R是一个集合，并且带有两个映射$+:R^2\to R,\times:R^2\to R$满足某些性质；比如拓扑空间$(X,\mathscr{A})$，$X$是一个集合，并且带有一个集簇$\mathscr{A}\subset 2^X$满足某些性质；比如等价关系$(X,\sim)$，$X$是一个集合，并且带有一个子集$\sim\subset X\times X$满足某些性质。最后看看我们的范畴$(X,hom(X))$，$X$是一个集合，并存在一个集合$hom(X)$满足某些性质。不知道，你看出了问题在哪里吗？其实，我想基本所有本科生可能都没有学过公理集合论，对集合本身的概念就是很模糊的，对集合论的悖论也停留在“我没用说谎”这种层面上。在解决上面这些疑问之前，我们们先来看看集合论到底有哪些公理。

定义 3.2 (ZFC**公理**): **(ZF1)外延公理**:$\forall x\forall y(\forall z(z\in x\leftrightarrow z\in y)\to x=y)$

(ZF2)空集合存在公理:$\exists x\forall y(\neg y\in x)$,def : $x=\varnothing$

(ZF3)无序对集合存在公理:$\forall x\forall y\exists z\forall u(u\in z\leftrightarrow u=x\vee u=y)$,def : $z=\{x,y\}$

(ZF4)幂集合存在公理:$\forall x\exists y\forall z(z\in y\leftrightarrow\forall u(u\in z\to u\in x))$,def : $y=2^x$

(ZF5)并集存在公理:$\forall x\exists y\forall z(z\in y\leftrightarrow\exists u(u\in x\wedge z\in u))$,def : $y=x\cup z$

(ZF6) 分离公理模式:$\forall y\exists z\forall u(u\in z\leftrightarrow u\in y\wedge A(u))$
(ZF7) 替换公理模式:$\forall x\exists_1 yA(x,y)\to\forall x\exists y\forall z(z\in y\leftrightarrow\exists u\in xA(u,z))$

$$\exists_1 yA(x,y)=\exists y(A(x,y)\wedge\forall z(A(x,z)\to z=y))$$

$$\exists u\in xA(u,z)=\exists u(u\in x\wedge A(u,z))$$

(ZF8) 无穷公理:$\exists x(\varnothing\in x\wedge\forall y\in x(y\cup\{y\}\in x))$

$$\forall y\in xA(y)=\forall y(y\in x\to A(y))$$

(ZF9) 正则公理:$\forall x(x\neq\varnothing\leftrightarrow\exists y\in x\forall z\in y(\neg z\in x))$
(AC) 选择公理:$\forall x\forall y\in x(y\neq\varnothing\to\exists f(F(f)\wedge\forall y\in xf(y)\in y))$

只有存在符号$\exists$被放在最开始，才能把特殊的常量给定义出来，即只有空集是最特殊且可定义的，而放在中间的存在只能定义出函数，比如并集。实际上，通过空集可以构造出序数公理(以ZF8无穷公理为基础)，其实这才是康托尔所研究的集合论。“常量、变量、函数、谓词、公式、连接词”都是数理逻辑的内容，到时候我会专门写一篇文章来讲的。我们回到我们的主题，就是为什么“范畴的伪定义”存在维和感，我们主要关注ZF2到ZF5的存在性公理，它指出在集合论中，我们可以写下，空集$\varnothing$，写下集合$\{X,Y\}$，写下子集簇2^X，写下并集$X\cup Y$，而集合间的关系用谓词来表示，在集合论中只有$x\in y$是天生的谓词，其它的谓词通过公式的简化来实现，比如$x\subset y=\forall u(u\in x\to u\in y)$。接下来，其实最重要的是给出“笛卡儿积”，它可以引出关系、映射等概念。值得注意的是$\{x,y\}$只能给出无序对，而笛卡尔积(x,y)是有序对，即(x,y)和(y,x)是不同元素，所以不能从ZF3推出笛卡尔积的存在，但是我们可以借助它给出有序对，我们给出def : $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$，此时就有$(y,x)=\{\{y\},\{x,y\}\}$，于是笛卡尔积就变得可以定义了，即可以从ZFC公理中证明形式定理$\forall x\forall y\exists z(u\in x\wedge v\in y\leftrightarrow(u,v)\in z)$，此时可以定义def : $z=x\times y$。

其实，读者无需过于理解公理集合论的东西。我们想要指出的是“范畴的伪定义”在试图给集合论添加公理，如果仔细地探究数学的一些形式化结构的话，可以发现，对于环$(R,+)$，映射$+\subset R^2\times R$是公理集合论下可存在的；对于拓扑空间$(X,\mathscr{A})$，拓扑$\mathscr{A}\subset 2^X$是公理集合论下可存在的；对于等价关系$(X,\sim)$，关系$\sim\subset X\times X$是公理集合论下可存在的。那么范畴做了什么呢？对于一个集合X，它先凭空捏造一个集合$hom(X)$，首先它的合理性就应该遭到质疑，接着它又莫名其妙让这个集合需要满足某些约束。你知道这是什么意思吗？那就是它在妄图扩充公理集合论，“存在一个集合是不合法的，除非它是确实存在的，否则它只能作为公理集合论的公理存在”，对于结构数学这是必需理解的一个东西，既然说到了“公理，结构”这两个著名的数学对，我们就先来讲讲何时需要公理，又何时使用结构。

我曾经在数学基本图中指出，除去数理逻辑，只有两类公理需要定义“集合论公理”和“序数公理”，但是我却又在公理集合论指出，集合论公理可以导出序数公理，那不完全就是说只要集合论就行了吗？事实确实是这样的，但是我就是想把它们区分出来，以表示它们完全是处于两个世界的东西。首先，从“公理集合论” 构造序数是很简单的，即$0=\varnothing,1=\{\varnothing\},2=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}...$，用“皮亚诺的序数公理”来说就是“$\{\varnothing,n\}$是$n$的后继，$\varnothing$不是任何元素的后继”，从ZF2和ZF3可以推出这样是合理的。至于序数构造出实数和复数，总觉得一大堆的书都有讲，实在没啥好说的。那我们为什么选择把“幻世”和“现世”给分开来呢，因为幻世确实在“研

究集合这个概括性对象”而虽然现世“只是研究集合构造序数的特例”但却有丰富成果。集合论的核心对象只有两个，集合和映射，集合自身只能放在公理集合论中，所以只能研究子集，于是就构造了“拓扑结构”，映射虽然是关系的特例，但它确实被独立了出来，研究集合上的映射就构成了“代数结构”。这正是结构数学的两个核心研究对象，基本所有的构造都是以它们为基础而搭建的。实际上，之所以承认“序数公理”的地位就是因为历史的原因，理解的原因，而且它构造出来的$\mathbb{R}^n$具有大量的研究和极其丰富的结构性质，基本所有幻世的抽象结构都可以在其中找到古典元件，而且人类认识数学的起点也是序数，序数构造出的结构又接近现实，笔者认为“现世就应该作为大众的数学而单独具有地位”，至于幻世那就是只属于数学家的浪漫了。

请知道一点，数学家所推崇的是“尽可能少的公理”，我们不可能为群、环、拓扑等更多的抽象结构都去建立公理，而且公理可不是条件，对于条件，即抽象结构所列出的性质我们当然希望多一些好，就算矛盾了，我们也可以直接申明这个结构不存在，然后再减少条件，但对于公理，我们还得考虑它们是否矛盾、是否相容，任意添加公理是破坏性极大的。集合论虽然看起来平凡，但正是因为平凡，导致了它的概况性，导致了它的公理可以作为基本所有结构存在的基石，没错，我们正是想歌颂集合论的伟大。“集合论是研究无穷的理论”，我希望读者能理解这点，为什么普遍认为集合论是19世纪末由康托尔建立，难道前人对“一个元素属于集合”这种简单的思想都没有吗？简直可笑。要知道，在集合论之前就有群的概念，但现代的群都建立在集合之上。其实，前人认识集合，也认识无穷，但不知道什么是无穷，要知道连集合论公理都是康托尔给出来的，而是由策梅洛(Zermelo)和弗伦克尔(Fraenkel)等提出来的。我们再知道，无穷集是很普遍存在的，如果没有对无穷有深入研究的话，我们使用总是会小心翼翼的，第一次对无穷的研究可能是“微积分”了，它是从无穷小为基础考虑的无穷，而集合论则是直接从无穷大来考虑无穷。最后，我们还是说我们的主题吧。

我们认为“范畴”是一个数理逻辑对象，笔者更愿意把它称为“类逻辑”，它与另外两者逻辑的关系是“类逻辑$<$一阶逻辑$<$命题逻辑”，由于我们还没介绍数理逻辑，所以我们可以把它认为是一套新的符号系统，由由于它在一阶逻辑之上，所以所有的谓词、量词在类逻辑中都是可以使用的。那么这套系统，到底添加了什么样的符号呢？我们就以例子来说事，函子$F:\mathbf{Grp}\to\mathbf{Grp}, G\rightsquigarrow[G,G]$和遗忘函子$F:\mathbf{AGrp}\to\mathbf{Set}, G\rightsquigarrow G$蕴含了多少信息。显然地，虽然它们看起来和映射好像每什么两样，但却蕴含了比映射更多的信息。它不仅保持了对象的对应，还保持了对象间态射的对应，或许你可能会说，在集合论中写成两个映射不行吗，哦，然后你会恍然大悟，干脆把范畴定义成两个集合构成的对$(X, hom(X))$。是吗，你开心就好，我嘛还是以符号系统的角度进行考虑，符号往往会让人对数学概念变得清晰，遗忘函子就是我们时常忘记的东西，比如很多空间(度量空间、概形、流形)都具有到拓扑空间的遗忘函子，这也意味着，一旦函子建立，即定义出开集，那么闭集、连续映射、紧性、分离性、连通性等等，都无需再重新定义了。我们设域k上代数集构成的范畴是$\mathbf{ATop}_k$，那么代数几何相当于建立了函子$F:\mathbf{ATop}_k\to\mathbf{Alg}_k$，我们发现左边代表了几何对象，右边代表了代数对象，那么我们可以将函子进行一般化$F:\mathbf{Op}_X\to\mathbf{AGrp}$，这就是阿贝尔层的范畴化思考，通常我们可以加强层的性质，比如变成环层$F:\mathbf{Op}_X\to\mathbf{Ring}\to\mathbf{AGrp}$，后面的一步是遗忘函子。我们还能极限加强层，变为古典代数几何研究的代数簇，即$F:\mathbf{ATop}_k\to\mathbf{Op}_X\to\mathbf{Alg}_k\to\mathbf{Ring}\to\mathbf{AGrp}$，第一步是构造Zariski拓扑从而得到遗忘函子，第二步是强化层的性质，后面两步则是相应的遗

忘函子。所以，我们认为范畴论最大的特点，还是提供了一套蕴含丰富内容的符号系统，即认为它是数理逻辑的对象。或许笔者没有讲清楚，范畴提供的符号有个特点，那就是凭空产生却符号一阶逻辑，“凭空产生”对于大部分符号都是不存在的，因为大多符号其实都是简记，用数理逻辑的说法就是，它只是将公式进行了简写。比如就在前面的段落中，符号$x \subset y$其实就是公式$\forall u(u \in x \to u \in y)$的简写。

虽然以我的观点来看，范畴并不是一个让我喜欢的东西。但又由于它是一套常用的符号，所以我们必需像使用集合那样对范畴也是信手拈来才行，即我们需要建立一套“范畴观”。这其实是一个大家都有的东西，如果函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$和函子$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$都存在，那么研究范畴$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$都是一样的，最著名的例子就是代数几何“研究代数集$\leftrightarrow$研究满足特殊性质的代数”，这里的一样并不意味着我们只研究一个方面，而是哪里方便就研究哪里，“数形结合”正是这样的意思，某些形的特点可以简化代数运算，某些代数运算又可以看出形的隐蔽特性。如果函子不可逆只是单向的$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，那么就说明$\mathcal{D}$简化了$\mathcal{C}$的某些性质，最著名的当然是到拓扑的遗忘函子，所有的“连续纯几何”直接放到了拓扑中研究。实际上，奇异同调群函子$F : \mathbf{Top} \to \mathbf{AGrp}$也有这样的特性，它将某些拓扑空间的性质转化到了同调群上，比如第0个同调群$H_0(X)$可以看出拓扑空间X道路连通分支的个数。但同调群并不能完全代表拓扑空间，所以它相当于给不出反过来的函子的意思。知道为什么笔者不喜欢范畴吗？因为很多书籍时刻透露着范畴的思想，却怎么也不肯用上范畴的语言来简化符号体系，只能说看着心烦。我拿通常书籍对层的定义来说事。

定义 3.3: (1)设X是一个拓扑空间，一个(阿贝尔群、环、代数)**预层**$\mathcal{F}$，由两部分构成：对每个开集$U \subset X$有一个(阿贝尔群、环、代数)$\mathcal{F}(U)$、对每个开集包含$U \subset V$有一个(阿贝尔群、环、代数)同态$\rho_{UV} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$，并且满足

(a)$\mathcal{F}(\varnothing) = 0$

(b)$\rho_{UU} = 1_{\mathcal{F}(U)}$

(c)对三个开集包含有$W \subset U \subset V$有$\rho_{UW} = \rho_{VW}\rho_{UV}$。

(2)如果一个**预层**$\mathcal{F}$满足

(a)对开子集$U \subset X$和$s \in \mathcal{F}(U)$，设$\{U_i\}_i$是U的一个开覆盖。如果$s|_{U_i} = 0, \forall i$那么$s = 0$

(b)记$s_i \in \mathcal{F}(U_i)$。如果$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$那么存在$s \in \mathcal{F}(U)$使得$s|_{U_i} = s_i$

我们就把它称为一个**层**。

我不明白的一点是，为什么很多时候范畴论既然已经作为代数几何的先修课了，为什么就不能把代数几何里的符号给我简化一下。而且，上述概念实际上定义了，阿贝尔层、环层、代数层等一系列的概念，但我发现很多书籍存在误导，导致我的学生很多时候都直接把“阿贝尔层”当成了“层”。但好像也没什么问题，因为中间总会有一个“环拓扑空间”做跳板，环的特点自然就被带了过去。层是我们在这部分核心讨论的对象，我希望读者能以范畴论的观点来看带它，即把层看成一个具有一些限制的逆变函子$\mathcal{F} : \mathbf{Op}_X \to \mathcal{C}$，而$\mathcal{C}$是一个抽象代数的范畴，可以是$\mathbf{Alg}_k \to \mathbf{Ring} \to \mathbf{AGrp}$这条链中的任意一个对象，在这种观点下，或许符号还是比较经典，但性质已经完全不同了。请读者牢记这些东西，或许我们还是游走在经典语言之中，但我如果冒出像“函子$\mathcal{F}$”“对任意开集U，环$\mathcal{F}(U)$满足...”这样的语句请不要觉得惊奇，接着让我们带着“范畴观”来认识层理论吧，我们的旅程开始咯。

3.2 层的基本理论

我们先来给出，层在范畴论下的严格定义，但我们同时也指出，使用符号时可以像经典那样的用起来。我们先来回忆一下$\mathbf{Op}_X$范畴是什么，首先$obj(X)$是拓扑空间X的所有开集，对于态射，如果$V \subset U$则$hom(V, U) = \{i : V \to U(x \mapsto x)\}$，否则令$hom(V, U) = \varnothing$，这样它就构成了一个“开集范畴”。另外读者需注意我特别喜欢用的符号$\{x_i\}_i \subset X$或者$\{X_i\}_i \subset 2^X$，它们的完整写法应该是$\{x_i\}_{i \in I}$，其中的I叫做指标集，但是指标集只是一个集合不具备任何额外的性质，它的目的只是为了区分集合中的各个元素，以便于我们做一些运算，所以我们干脆就懒得写了，包括笛卡儿积$\prod_i X_i$和并集$\cup_i X_i$也是一个道理，之所以不使用$\mathbb{N}, \mathbb{R}$或它们的子集是因为，集合的可数性不能被它们全部囊括，而抽象领域情况又太多了。

定义 3.4: (1)设X是一个拓扑空间，$\mathcal{C}$是一个范畴且存在到$\mathbf{Set}$范畴的遗忘函子[8]。我们把任意一个逆变函子$\mathcal{F} : \mathbf{Op}_X \to \mathcal{C}$称为$X$上的取值为$\mathcal{C}$的**预层**(presheaf)。并且对任意开集$U \in obj(\mathbf{Op}_X)$记其对应元素为$\mathcal{F}(U) \in obj(\mathcal{C})$，对任意态射$(V \subset U) \in hom(V, U)$记它的对应元素为$\rho_{UV} \in hom(\mathcal{F}(U), \mathcal{F}(V))$，并且称其为$U$在$V$上的**限制态射**(restriction morphism)，并把$\mathcal{F}(U)$的任一元素称为U上的一个**截影**(section)

(2)设$\mathcal{F}$是拓扑空间X上的预层。对任意开集$U \subset X$和开覆盖$U = \cup_i U_i$，我们定义一个态射图[9]为

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{p_0} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

其中前半部分的p_0由一系列的限制映射$\rho_{UU_i} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U_i)$构成，而后半部分的$p_1, p_2 : \mathcal{F}(U_i) \times \mathcal{F}(U_j) \rightrightarrows \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$由指标的投影映射$I \times I \to I, p_1 : (i, j) \mapsto i, p_2 : (i, j) \mapsto j$限制映射和相应的限制映射$\mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$一起构成

(3)设$\mathcal{F}$是拓扑空间X上的预层，如果对任意开集$U \subset X$和开覆盖$U = \cup_i U_i$，由(2)定义的态射图满足

Sh1:p_0是单态射

Sh2:p_0是p_1, p_2的**等值子**(equalizer)，即$p_1 p_0 = p_2 p_0$并且p_0具有**万有性**(universal，或称为泛性)，即如果另一态射p_0'也满足$p_1 p_0' = p_2 p_0'$则存在态射h使得$p_0' = p_0 h$

此时我们称$\mathcal{F}$是拓扑空间X上的**层**(sheaf)。

虽然层的抽象定义看起来有那么一点复杂，但它其实和非范畴的定义是一样的，就是任意开集U所对应的结构$\mathcal{F}(U)$，可以由开覆盖粘合而成并且与开覆盖的选取无关。实际上，对于层的两个性质就有一个等价定理。

定理 3.1: 设$\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{Op}_X, \mathbf{AGrp})$是拓扑空间$X$上的预层，如果对任意开集$U \subset X$和开覆盖$U = \cup_i U_i$满足

$$0 \to \mathcal{F}(U) \xrightarrow{d_0} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d_1} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_{ij} := U_i \cap U_j)$$

是正合列，则$\mathcal{F}$是一个层。对任意的[10]$s \in \mathcal{F}(U)$我们记$s|_V := \rho_{UV}(s) \in \mathcal{F}(V)$，则上述的$d_0$由$s \mapsto$

[8]笔者认为这种意义下的范畴，性质才足够优良，而且还便于我们可以使用一些集合论的东西，而且大多数优秀的代数结构都是定义在集合上的

[9]它其实是由一系列的对象和态射构成的整体

[10]这些操作都需要我们之前假设的遗忘函子才能实现

$s|_{U_i}$构成，上述的d_1由$(s_i, s_j) \mapsto s_i|_{U_{ij}} - s_j|_{U_{ij}}$，此处的减法来自阿贝尔群的代数结构。

如果我们需要足够好的性质，则至少要求范畴的遗忘函子为$\mathcal{C} \to \mathbf{AGrp}$，这也是大多数传统代数几何所做的基本要求，而且此时它与上一节中层的定义是等价的。由于层只是在预层上添加性质而不是添加结构，因为我们可以认为层的态射就是预层的态射，根据范畴论的基本内容，预层的**态射**指的就是其作为函子时的自然变换，等价性也可以直接套用过来，我们就不多讲了。接下来，我们来稍微复习一下[11]，正向系统和逆向系统，它们在代数几何中广泛的使用着。

定义 3.5: (1)如果偏序集$(I, \leq)$满足$\forall i, j \in I, \exists k \in I$使得$i \leq k, j \leq k$，则称$I$是一个**定向集**(directed set)。

设范畴$\mathcal{C}$和定向集I

(2)对每个$i \in I$我们给出$X_i \in obj(\mathcal{C})$，对每个$i \leq j$我们给出$\phi_{ij} \in hom(X_i, X_j)$。如果有$\phi_{ii} = 1_{X_i}$且$\forall i \leq j \leq k, \phi_{ik} = \phi_{jk}\phi_{ij}$，则称$(\{X_i\}_i, \phi_{ij})$是一个**正向系统**(direct syetem)

(3)对于一个正向系统$(\{X_i\}_i, \phi_{ij})$。对于$Z \in obj(\mathcal{C})$，我们记$Hom((\{X_i\}_i, \phi_{ij}), Z)$中的每个元素是，一系列态射$\phi_i \in hom(X_i, Z)$构成的整体$\{\phi_i\}_i$并且满足$\forall i \leq j, \phi_i = \phi_j\phi_{ij}$。如果存在$D \in obj(\mathcal{C})$和$\{\Phi_i\}_i \in Hom((\{X_i\}_i, \phi_{ij}), D)$使得对任意的$Z \in obj(\mathcal{C})$有

$$hom(D, Z) \to Hom((\{X_i\}_i, \phi_{ij}), Z), \varphi \mapsto \{\varphi\Phi_i\}_i$$

是一个双射[12]，则称$(D, \{\Phi_i\}_i)$是$(\{X_i\}_i, \phi_{ij})$的**正向极限**(direct limit)，或称为**归纳极限**(inductive limit)。如果正向极限是唯一的[13]，我们就记

$$D = \varinjlim_i X_i$$

(4)对每个$i \in I$我们给出$X_i \in obj(\mathcal{C})$，对每个$i \leq j$我们给出$\phi_{ij} \in hom(X_j, X_i)$。如果有$\phi_{ii} = 1_{X_i}$且$\forall i \leq j \leq k, \phi_{ik} = \phi_{ij}\phi_{jk}$，则称$(\{X_i\}_i, \phi_{ij})$是一个**逆向系统**(inverse syetem)

(5)对于一个逆向系统$(\{X_i\}_i, \phi_{ij})$。对于$Z \in obj(\mathcal{C})$，我们记$Hom(Z, (\{X_i\}_i, \phi_{ij}))$中的每个元素是，一系列态射$\phi_i \in hom(Z, X_i)$构成的整体$\{\phi_i\}_i$并且满足$\forall i \leq j, \phi_i = \phi_{ij}\phi_j$。如果存在$P \in obj(\mathcal{C})$和$\{\Phi_i\}_i \in Hom(P, (\{X_i\}_i, \phi_{ij}))$使得对任意的$Z \in obj(\mathcal{C})$有

$$hom(Z, P) \to Hom(Z, (\{X_i\}_i, \phi_{ij})), \varphi \mapsto \{\Phi_i\varphi\}_i$$

是一个双射，则称$(P, \{\Phi_i\}_i)$是$(\{X_i\}_i, \phi_{ij})$的**逆向极限**(inverse limit)，或称为**投影极限**(projective limit)。如果逆向极限是唯一的，我们就记

$$P = \varprojlim_i X_i$$

值得注意的是全序集一定是定向集但反过来就不一定了，比如集合由包含诱导的序关系，它是有序的但不是定向的，引入定向集的目的就是想使用和之前一样的指标性质，因为指标集可以自然地得到定向集。另外，我们很容易从定义中发现，正向极限和逆向极限的对偶关系。

[11]主要发现层好像没啥可以写的东西了，所以拿点东西来凑数

[12]这其实是之前一直所说的万有性的形式化

[13]实际上，可以在范畴上证明，正向极限存在就一定唯一，逆向极限也是一样的

$$\varinjlim_i X_i = \varprojlim_i X_i^{op}$$

左右两边分别来自范畴$\mathcal{C}$的正向系统和对偶范畴$\mathcal{C}^{op}$中相对应的逆向系统。实际上$X = \prod_i X_i$也可以看成逆向系统的极限，其中范畴为**Set**，定向集为任一指标集并且用$i \le j \Leftrightarrow i = j$作为偏序关系，此时有系统$(\{X_i\}_i, \phi_{ii})$，定义集合论的投影映射$\Phi_i : X \to X_i, (..., x_i, ...) \mapsto x_i$，于是可以得到$X = \varprojlim_i X_i$。还有一个典型的例子是p-进整数的定义，即$\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$，其中$\mathbb{N}$使用的是自然数自带的序结构。

定义 3.6: 设$\mathcal{F}$是X上的一个预层，对一点$x \in X$记它的开领域族为$\mathfrak{U}(x)$，设其通过包含关系得到定向集。我们把正向极限

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U\in\mathfrak{U}(x)} \mathcal{F}(U)$$

称为$\mathcal{F}$在x处的**茎**(stalk)。对任一$s \in \mathcal{F}(U)$，正向系统给出了像$s_x := \Phi(s) \in \mathcal{F}_x$，我们把$s_x$称为$s$在$x$处的**芽**(germ)。此时可以诱导处一个映射$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x, s \mapsto s_x$，并且进一步可以得到

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x$$

借助上述的概念，我们就能得到一些从预层升级为层的手段。

定理 3.2: (1)预层$\mathcal{F}$满足(Sh1)当且仅当，$\mathcal{F}(U) \to \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x$是单射

(2)如果预层$\mathcal{F}$满足(Sh1)则，它是一个层当且仅当，如果一系列的芽$\{s_{(x)}\}_{x\in U}$满足$\forall x, \exists U_x \in \mathfrak{U}(x), s \in \mathcal{F}(U_x)$使得$s_q = s_{(q)} (\forall q \in U_p)$则$\{s_{(x)}\}_{x\in U}$来自同一个$U$上的截影

(3)记预层$\mathbf{PS}_X = \mathbf{PSh}(\mathbf{Op}_X, \mathcal{C})$和层$\mathbf{S}_X = \mathbf{Sh}(\mathbf{Op}_X, \mathcal{C})$，则存在一个存在一个可表达函子$\mathbf{PS}_X \to \mathbf{S}_X, \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{F}^\sharp$。

上面的(3)是预层构造层的过程(即预层的层化，Sheafification of a Presheaf)，一般的代数几何书籍都有介绍，我就不详细写了。层的态射没什么好说的，我们来讨论一下诱导问题，就是一系列定义的过程。

定义 3.7: 设拓扑空间X, Y和连续映射$f : X \to Y$

(1)对X上的一个取值为$\mathcal{C}$的层$\mathcal{F}$，可以定义

$$f_*(\mathcal{F}) : \mathbf{Op}_Y \to \mathcal{C}, V \rightsquigarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

显然它是Y上的一个层。我们把$f_*(\mathcal{F})$称为$\mathcal{F}$的**正像**(direct image)

(2)设$\mathcal{F}$是Y上的一个取值为$\mathcal{C}$的层。先定义一个预层

$$f'(\mathcal{F}) : \mathbf{Op}_X \to \mathcal{C}, U \rightsquigarrow \varinjlim_{V\in\mathfrak{U}(f(U))} \mathcal{F}(V)$$

此时我们把层$f^*(\mathcal{F}) := f'(\mathcal{F})^\sharp$称为$\mathcal{F}$的**逆像**(inverse image)。

其实对于大多数的教材而言层只是一个引入概形的跳板，所以基本的内容并不多，而且更没必要用范畴来进行定义。而我们之所以这样做，主要还是为了读者能够理解层的本质到底是一个怎样的东西，如何才能不被层的繁琐定义给搞糊涂，简洁的记号就是最好的工具，而范畴正是提供了这样的工具。

3.3 层的上同调

我们在[1]中介绍过如何在范畴层面上构造同调理论，由于其过于繁琐而且实用性不高，所以这次我们将直接在抽象代数领域来研究同调理论，而这也是一般同调代数所讨论的内容。对于一个环R，接下来我们主要讨论左R-模范畴$\mathbf{Mod}_R$，想从范畴论的角度讨论的话可以把它替换为阿贝尔范畴。

定义 3.8: (1)如果$\mathbf{Mod}_R$中的一个态射链

$$\{C_i, d_i\} := \quad \cdots \to C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \to \cdots$$

满足$d_n d_{n-1} = 0$，则称$\{C_i, d_i\}$是一个**复形**(complex)

(2)对于复形$C = \{C_i, d_i\}$，定义**闭链**(cycle)为$Z_n(C) = \mathrm{ker} d_n$，定义**边缘**(boundary)为$B_n(C) = \mathrm{im} d_{n+1}$，定义**第n个同调**(n-th homology)为

$$H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$$

(3)对偶地，考虑复形(只是换了指标，本质上就是复形)

$$C := \quad \cdots \to C^{n-1} \overset{d^{n-1}}{\to} C^n \overset{d^n}{\to} C^{n+1} \to \cdots$$

同样地，有**上闭链**(cocycle)为$Z^n(C) = \mathrm{ker} d^n$，定义**上边缘**(coboundary)为$B^n(C) = \mathrm{im} d^{n-1}$，并定义**第n个上同调**(n-th cohomology)为

$$H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$$

此处其实只是把同调构造的手续给复现了一遍，并没有什么实质性的东西，我们把$\mathbf{Mod}_R$中所有复形构成的范畴记为$\mathbf{Comp}_R$，它的态射$f = \{f_n\}_n$其实挺好定义的，简单来说就是下面的图是交换的。

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \to & C_{n+1} & \overset{d_{n+1}}{\to} & C_n & \overset{d_n}{\to} & C_{n-1} & \to \cdots \\
 & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & \\
\cdots \to & C'_{n+1} & \overset{d'_{n+1}}{\to} & C'_n & \overset{d'_n}{\to} & C'_{n-1} & \to \cdots
\end{array}$$

我们可以把同调看成一个函子，于是就可以得到一些比较简单的性质。

定理 3.3: (1)对任意的$n \in \mathbb{Z}$，函子$H_n : \mathbf{Comp}_R \to \mathbf{Mod}_R$是加性函子

(2)设R和A是环，$T : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_A$是正合加性函子，则有$H_n(C' = \{T(C_i), T(d_i)\}) = TH_n(C = \{C_i, d_i\})$。

接下来我们来构造经常用到了两个函子Ext和Tor。

定义 3.9: (1)设R是一个环

(a)对一个左R-模P，如果对任意态射$\sigma \in hom(P, A)$和满态射$\tau \in hom(B, A)$存在态射$f \in hom(P, B)$使得$\tau f = \sigma$，则称P是**射影模**

(b)对一个左R-模A，如果正合列

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \twoheadrightarrow A$$

满足每个P_n都是射影模，则称它是A的一个**射影分解**。此时我们可以得到一个复形

$$\mathbf{P}_A := \quad \cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0$$

(2)对加性协变函子$T:\mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_S$，我们可以定义它的**左导出函子**(left derived functor)为

$$L_nT:\mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_S, A \rightsquigarrow H_n(T(\mathbf{P}_A))$$

对于态射$f:A\to A'$，首先它可以诱导出复形态射$\hat{f}=\{f_n:P_n\to P_n'\}$，于是可以得到态射的对应为$L_nT(f)=(T\hat{f})_n$。左导出函子是加性协变函子，并且对于负数$n$均有$L_nT(A)=\{0\}$，都是一些比较简单的性质

(3)设R是交换环，此时我们注意到模的张量积$T=\otimes_R B:\mathbf{Mod}_R\to\mathbf{Mod}_R, A\rightsquigarrow A\otimes_R B$可以视为一个加性协变函子，于是我们定义**Tor函子**为

$$\mathrm{Tor}_n^R(\quad, B) = L_nT$$

特别地，对于R-模A的射影分解所诱导的复形有

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,B) = H_n(\mathbf{P}_A \otimes_R B) = \frac{\ker(d_n\otimes 1_B)}{\mathrm{im}(d_{n+1}\otimes 1_B)}$$

注:实际上如果取消R的交换性，关于左右模可以分别得到$\mathrm{Tor}_n^R(\quad,B)$和$\mathrm{tor}_n^R(A,\quad)$，并且可以证明$\mathrm{Tor}_n^R(A,B)\cong \mathrm{tor}_n^R(A,B)$，从实用性角度来考虑的话，直接假设交换性就没有那么多麻烦了。

至于Tor函子的性质，笔者觉得没啥重要的，重要的是诱导思想，而需要证明的就只是唯一性了。

定理 3.4: $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$不依赖于A,B投影分解的选取。

接下来其实就是一组对偶的定义。

定义 3.10: (1)设R是一个环

(a)对一个左R-模Q，如果对任意态射$\sigma\in hom(A,Q)$和单态射$\tau\in hom(A,B)$存在态射$f\in hom(B,Q)$使得$f\tau=\sigma$，则称P是**内射模**

(b)对一个左R-模A，如果正合列

$$A \hookrightarrow Q^0 \to Q^1 \to \cdots \to Q^n \to Q^{n+1} \to \cdots$$

满足每个Q_n都是内射模，则称它是A的一个**内射分解**。此时我们可以得到一个复形

$$\mathbf{Q}_A := \quad 0 \to Q^0 \to Q^1 \to \cdots \to Q^n \to Q^{n+1} \to \cdots$$

(2)对加性协变函子$T:\mathbf{Mod}_R\to\mathbf{Mod}_S$，我们可以定义它的**右导出函子**(right derived functor)为

$$R^nT:\mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_S, A \rightsquigarrow H^n(T(\mathbf{Q}_A))$$

对于态射$f:A\to A'$，首先它可以诱导出复形态射$\hat{f}=\{f^n:Q^n\to Q^{n\prime}\}$，于是可以得到态射的对应为$R^nT(f)=(T\hat{f})^n$。右导出函子是加性协变函子，并且对于负数$n$均有$R^nT(A)=\{0\}$，都是一些比较简单的性质

(3)设R是交换环，此时我们注意到模的态射$T = Hom_R(B, \quad) : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_R, A \rightsquigarrow Hom_R(B,A)$可以视为一个加性协变函子，于是我们定义**Ext函子**为

$$\mathrm{Ext}_R^n(B, \quad) = R^n T$$

特别地，对于R-模A的内射分解所诱导的复形有

$$\mathrm{Ext}_R^n(B,A) = H^n(Hom_R(B,\mathbf{Q}_A)) = \frac{\ker d_n}{\mathrm{im} d_{n-1}}$$

注:此时有类似的现象$\mathrm{Ext}_R^n(A,B) \cong \mathrm{ext}_R^n(A,B)$，通常我们在代数几何上研究交换代数，所以确实用交换环就行了。

与Tor一样，Ext也有相应的无关性质。

定理 3.5: $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)$不依赖于A,B内射分解的选取。

同调代数研究的基本就是上面这些玩意的性质，如果稍微放松一下条件把R退化为群，可以探究群的上同调，不过在我们当前讨论的主题上基本遇不到，讨论的话也只是浪费时间和经历。实际上同调代数主要目的还是给出一个研究框架，真正讨论一些重要的性质，或者计算具体的同调群，还是看一些实际的例子比较好。所以接下来我们来探究一下层的上同调，事实证明上同调研究起来是比较方便的。

定义 3.11: 设$\mathcal{F}$是拓扑空间X上的一个层

(1)令$\mathcal{U} = \{X_i\}_{i\in I}$是$X$的一个开覆盖，接着简记$U_{i_0\ldots i_p} = U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_p}$。我们定义上链群为

$$C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{(i_0,\ldots,i_q)\in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0\ldots i_p})$$

接着定义相应的上边缘算子为

$$d : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}), \alpha \mapsto (d\alpha)_{i_0\ldots i_p} = \sum_k (-1)^k \alpha_{i_0\ldots i_{k-1} i_{k+1}\ldots i_p}$$

可以证明$\{C^p, d\}$构成一个复形，因此可以得到$H^p(\mathcal{U}, X)$

(2)在(1)内容的基础上，可以进一步定义

$$H^p(X,\mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^p(\mathcal{U}, X)$$

并把它称为$\mathcal{F}$的**第p个上同调群**(pth (Cech) cohomology group)。其中$\mathcal{U}$取遍X的所有开覆盖使用集合自带的序结构。

对于Cech上同调，最多也只能拿来理论研究，真的去算基本就是不可能的事情。所以我们有必要试着把它和奇异同调群给联系起来，显然层是自带一个拓扑空间X的，所以我们主要应该试着把交换环看成一个层。由之前的性质可知，通过茎$\mathcal{F}_x, x\in X$我们可以粘合出一个层来，对一个幺环R，我们令$\forall x \in X, \mathcal{F}_x = A$，于是就可以得到一个层，我们记为$\mathcal{F}_A$，并称其为$X$的取值为$A$的**常数层**(constant sheaf)，此时我们有联系定理。

定理 3.6: 如果拓扑空间X同伦于CW复形，则对任意幺环R有$H^n(X,R) \cong H^n(X,\mathcal{F}_A)$。

值得注意的是，Cech上同调和奇异上同调在某些情况下是不等价的，当然这些情况也是十分离奇的情况，涉世未深的我们就不要去探究了，要知道CW复形基本涵盖了我们想要研究的各种情况。

3.4 概形的基本理论

我们很容易感受到，层就只是一种抽象框架，就算在上面研究再深入也缺乏实感，所以我们还是像大多数代数几何教程那样，马上进入一些比较实际的研究对象。我们记交换幺环构成的范畴为**ARing**，接下来我们所讨论的都是拓扑空间X上的**环层**(ring sheaf)$\mathcal{O}_X \in \mathbf{Sh}(\mathbf{Op}_X, \mathbf{ARing})$，这样我们所学习过的交换代数知识至少不会白费掉。

定义 3.12: 对于一个环层$(X, \mathcal{O}_X)$，如果满足对任意$x \in X$茎$\mathcal{O}_{X,x}$是局部环，则称X是一个**环拓扑空间**(ringed topological space)。对于两个环拓扑空间$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$，它们的**态射**$f$由连续映射$f : X \to Y$和环层态射$f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$构成，并且满足$f^\sharp_x : \mathcal{O}_{y,f(x)} \to f_*\mathcal{O}_{X,x}$是**局部同态**，即满足环的极大理想的像包含于极大理想的同态。

代数几何所研究的核心对象就是某些环拓扑空间，对，我们加了个“某些”，一般性的研究还是没啥意义，所以我们先来构造一种特殊的环拓扑空间，而它将贯穿我们整个代数几何的研究。对一个交换幺环A，我们记Spec(A)为A的所有素理想构成的集合，对任意理想$I \subset A$，我们记$V(I) = \{p \in \mathrm{Spec}(A) : I \subset p\}$，把它定义为闭集，并记开集为$D(I) = \mathrm{Spec}(A) - V(I)$，则Spec$(A)$构成一个拓扑空间。接下来我们来讨论局部化的方法，对于子集$S \subset R$如果继承了加法幺半群的结构，我们可以定义$S \times R$的一个等价关系为$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \exists k \in S, (at - bs)k = 0$，并记商集$S^{-1}R = R/\sim$，里面$(a, s)$的等价元素记为$\frac{a}{s}$，于是我们可以在其上定义加法和乘法为

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}, \frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

由此$S^{-1}R$构成一个环。实际上，如果A是整环，令$S = \{a \in A : b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0\}$，可以得到它的局部环就是分式环$Frac(A) = S^{-1}R$。对于素理想$p \subset A$，我们取$S = A - p$，则记$A_p = S^{-1}A$，并把它称为环$A$关于素理想$p$的**局部化**(localization)，比较重要的性质是，它形成了一个局部环。对任意开集$U \subset \mathrm{Spec}(A)$，我们定义$\mathcal{O}(U) = \sqcup_{p \in U} A_p$，于是可以得到一个环拓扑空间$(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$，我们把它称为$A$的**素谱**(prime spectrum)。

定理 3.7: 对于交换幺环R和$X = \mathrm{Spec}(R)$有

(1)$\mathcal{O}_X(X) \cong R, \mathcal{O}_{X,p} \cong A_p$

(2)$(X, \mathcal{O}_X)$是一个环拓扑空间。

接下来可以引入我们的核心概念了。

定义 3.13: (1)我们把同构于$(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$的环拓扑空间称为**仿射概形**(affine scheme)，或者我们可以直接把素谱视为仿射概形

(2)如果环拓扑空间满足$(X, \mathcal{O}_X)$满足，存在X的一个开覆盖$\{U_i\}_i$使得$(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$均是仿射概形，则称它是一个**概形**(scheme)

(3)如果X是一个概形，则对任意开集$U \subset X$有$(U, \mathcal{O}_X|_U)$是一个概形，我们把它称为X的**开子概形**(open subscheme)。

值得注意的是，概形只是增加了性质的环拓扑空间，因此概形的态射就是环拓扑空间的态射。我们知道拓扑空间定义嵌入(embedding)，即$X \cong f(X)$，它的性质稍微有点强我们可以弱化成代数几何里经常用到的**浸入**(immersion)，即每点有一个领域使得f在上面的限制为嵌入，接着我们迁移到环拓扑空间上只要加上$\forall x \in X, f_x^\sharp$也是一个同构即可。实际上，概形除了开子概形还能定义闭子概形，而且它与射影概形有密切的关系，所以我们再来定义一个特殊环层空间。对于域k上的射影空间$\mathbb{P}k^n$，大家应该挺熟悉的，于是对于交换幺环R我们用自由模R^{n+1}来替换当时定义的线性空间k^{n+1}，就可以类似地得到$\mathbb{P}A^n$，我们简记为$\mathbb{P}_A^n$，我们的目的是在上面构造出概形的结构来。我们先构造n+1个仿射概形

$$U_i = \mathrm{Spec}(A[X_{i,0},...,X_{i,n}]/(X_{i,i}-1)), i = 0,...,n$$

我们令$X_{i,j}$在商环中对应的等价类为$x_{i,j}$，则有$U_i = \mathrm{Spec}(A[x_{i,0},...,x_{i,i-1},x_{i,i+1},...,x_{i,n}])$。接着对一个指标$j = 0,...,n$可以得到一系列$U_i$的开子概形

$$U_{i,j} = \mathrm{Spec}(A[X_{i,0},...,X_{i,n}]/(X_{i,i}-1))_{(X_{i,j})} = \mathrm{Spec}(A[x_{i,0},...,x_{i,i-1},x_{i,i+1},...,x_{i,n},x_{ij}^{-1}])$$

对于上述子概形，需要稍微解说一下，首先$(X_{i,j})$表示由$X_{i,j}$生成的素理想，因此这里表示局部化后的环形成的素谱。后半部分则表明了它的展开形式，其中x_{ij}是局部化以后产生的一个新的等价类，它的作用是充当分母的作用，从而形成特殊的“有理多项式”。对于这种有理多项式环，接下来我们来定义它们的等价关系，即

$$\phi_{i,j} : A[x_{j,0},...,x_{j,j-1},x_{j,j+1},...,x_{j,n},x_{ji}^{-1}] \to A[x_{i,0},...,x_{i,i-1},x_{i,i+1},...,x_{i,n},x_{ij}^{-1}], x_{j,v} \mapsto x_{i,v}x_{i,j}^{-1}$$

上述变换的描述是变量替换，我们还需要知道$x_{i,i} = 1$，而并不代表它不存在。对于x_{ij}，虽然从生成上是一个新的变量，但从具体多项式来看可以它可以直接由$x_{i,j}$来生成。根据诱导关系，$\phi_{i,j}$可以作用到$U_{i,j}$，进而可以作用到U_i上去，于是在$\sqcup_i U_i$上我们定义等价关系为

$$u_i \sim u_j \Leftrightarrow u_i \in U_j, u_j \in U_{j,i}, \phi_{i,j}(u_i) = u_j$$

需要注意到，这个等价关系是整体U_j关于局部$U_{j,i}$的，但却是定义在整个$\sqcup_i U_i$上的，此时可以得到

$$\mathbb{P}_A^n = (\sqcup_i U_i)/\sim$$

这时我们可以轻松地令每个局部的环层为

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}$$

这样我们就得到了一个概形，它一定不是仿射概形。实际上如果我们直接定义

$$\mathbb{A}_A^n = \mathrm{Spec}(A[x_1,...,x_n])$$

就可以得到一个仿射概形了，得到层的方式可以直接由素谱导出。

定义 3.14: (1)设X是一个概形，Z是闭子集，$j: Z \to X, z \mapsto z$是连续映射。如果有概形$(Z, \mathcal{O}_Z)$和闭浸入$(j, j^\sharp): (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$，则称$Z$是$X$的**闭子概形**(closed subscheme)

(2)我们把同构于$\mathbb{P}_A^n$的闭子概形的概形称为**射影概形**(affine scheme)，或者我们可以直接把$\mathbb{P}_A^n$的闭子概形视为仿射概形

(3)考虑概形具有的万有性，我们有如下定义。如果S是一个概形，我们把概形X和态射$\pi: X \to S$构成的整体(X, π)称为一个**S-概形**(S-scheme)，其中S称为**基概形**(base scheme)，π称为**结构态射**(structural morphism)。特别地，当$S = \mathrm{Spec}(A)$时，也可以称为**A-概形**，此时我们也把X称为**A上的概形**(scheme over A)

(4)对于一个S-概形$\pi: X \to S$。如果态射$\sigma: S \to X$满足$\pi\sigma = 1_S$，就把σ称为X的一个**截影**(section)。我们把X在S上的所有截影的集合记为$X(S)$。特别地，对$S = \mathrm{Spec}(A)$也可以记为$X(A)$

(5)如果X是域k上的概形，我们把$X(k)$的元素称为X的**k-有理点**(k-rational points)。

其中(1)(2)还是处于概形领域的东西，而(3)(4)(5)主要是为了备战我们后面要研究的代数簇，里面的概念在算术代数几何中也十分常用。

定理 3.8: (1)$\mathbb{A}_A^n$是A-概形(或A上的概形)，$\mathbb{P}_A^n$及其闭子概形都是A-概形(或A上的概形)

(2)设一概形S和一簇S-概形$\{X_i\}_i$。选取X_i的开子概形X_{ij}和S-概形的同构$f_{ij}: X_{ij} \xrightarrow{\sim} X_{ji}$如果满足，$f_{ii} = 1_{X_i}$、$f_{ij}(X_{ij} \cap X_{ik}) = X_{ji} \cap X_{jk}$、在$X_{ij} \cap X_{ik}$上$f_{ik} = f_{jk}f_{ij}$。那么存在同构意义下的唯一S-概形$X$，并且有开浸入$g_i: X_i \to X$满足$g_i = g_j f_{ij}$在$X_{ij}$上成立且$X = \cup_i X_i$

(3)我们记A上的一个分次代数$B = A[x_0, ..., x_n]/I = \oplus_{i \geq 0} B_i$，其中的$I$是齐次理想。记$B$的所有齐次素理想构成的集合为$\mathrm{Proj}(B) \subset \mathrm{Spec}(B)$，则它同构于$\mathbb{P}_A^n$的一个闭子概形，即它是一个仿射概形。

值得注意的是(1)并不平凡，我们来看比较简单的$\mathbb{A}_A^n$，记$B = A[x_1, ..., x_n]$，则$\mathbb{A}_A^n$是一个B-概形。实际上，我们有一个定理说如果B是一个A-代数那么Spec(B)就是一个A-概形，它可以交换代数的一个结论得到，即如果存在环同态$f: A \to B$那么存在态射$f_*: \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$，而且它可以扩展为概形间的态射，其中的(2)是我们构造$\mathbb{P}_A^n$概形的支撑理论，而(3)的情况则是传统上构造射影簇的方法。接下来我们稍微讲一下，概形的基变换，它的深入还是得放到具体的簇中。

定义 3.15: (1)设S是概形，X, Y是S-概形，则X和Y的**纤维积**(fibered product)，由一个S-概形$X \times_S Y$和两个态射$p: X \times_S Y \to X, q: X \times_S Y \to Y$构成，并且满足对任意的S-概形态射$f: Z \to X, g: Z \to Y$存在唯一的S-概形态射$(f, g): Z \to X \times_S Y$使得$f = p(f, g), g = q(f, g)$成立。可以证明纤维积存在且唯一并且有结合律之类的性质

(2)设S是概形，X是S-概形。对于S-概形S'，我们把纤维积$X \times_S S'$和投影映射$q: X \times_S S' \to S'$称为由$S' \to S$得到的**基变换**(base change)

(3)设概形的态射$f: X \to Y$，对一点$y \in Y$，我们记$k(y)$为$\mathcal{O}_{Y,y}$的剩余域。此时把$X_y = X \times_Y \mathrm{Spec}(k(y))$称为$f$在$y$处**纤维**(fiber)。

很多概念其实都是传统代数几何的东西。有关概形，“光滑性”应该是很重要的，但是它只能定义在代数簇上，所以在这里我们也就不去深究了。

3.5 概形的除子

接下来，我们来考虑性质足够好的概形，我们首先需要往概形上附上一系列的性质，定义别怕，就是性质的堆砌罢了。

定义 3.16: (1)对于拓扑空间X我们把它不可约闭子集严格降链的长度上确界称为X的**(Krull)维数**(Krull dimension)，并把概形中拓扑空间成分的Krull维数称为概形的**维数**。对于不可约闭子集$Y \subset X$，我们把包含Y的不可约闭子集严格升链的长度上确界称为Y在X中的**余维数**(codimension)。概形的闭子概形的余维数就是其作为不可约闭子集的余维数

(2)如果概形X的仿射覆盖的每个元素X_i满足$\mathcal{O}_X(X_i)$是诺特环，则称X是**诺特的**(Noetherian)

(3)如果概形X在每点$x \in X$上$\mathcal{O}_{X,x}$是既约环(即没有非零的幂零元)，则称X是**既约的**(reduced)。我们把既约且不可约的概形称为是**整的**(integral)

(4)在每点环$\mathcal{O}_{X,x}$的特性可以合理地迁移到概形上。例如在每点有$\mathcal{O}_{X,x}$是正则环，则称概形X是**正则的**(normal)。

注意到不可约(irreducible)和既约(reduced)不是一个概念，前者是拓扑空间上的，而后者是交换代数上的。一般地，"Noetherian+integral"的性质是十分优良的，我们给出一些简单的性质。

定理 3.9: (1)诺特概形的开、闭子概形都是诺特的

(2)概形X是整的当且仅当，对任意开子集$U \subset X$有$\mathcal{O}_X(U)$是整环。

概形上有多种除子(divisor)，比如Cartier除子和Weil除子，它们本质都属于研究中所产生的工具，但是在这里我们只介绍除子的一些基本内容，而由除子引出的一些重要定理，比如Grothendieck-Riemann-Roch定理，要放到后面的具体情况才能讨论。

定义 3.17: 设X是整的诺特概形

(1)我们把X的余维数为1的整的子概形称为**素除子**(prime divisor)。并把X所有素除子生成的自由Abel群记为$\mathrm{Div}(X)$，把里面的元素称为**(Weil)除子**(Weil divisor)。每个除子具有形式$D = \sum n_x x$，其中x是素除子，n_x是整数，且只有有限个n_x不为零

(2)对于拓扑空间X，如果$\forall y \neq x, x \notin \overline{\{y\}}$则称$x$是$X$的**基因点**(generic point)。对于基因点x通过$\overline{\{x\}}$可以直接得到概形的一个不可约成分，因此对于整概形X和一个基因点x，我们记$K(X) := \mathcal{O}_{X,x}$，并把它称为$X$的**函数域**(function field)，并把里面的元素称为**有理函数**(rational function)

(3)此时我们假设维数为1的$\mathcal{O}_{X,x}$是正则的，[14]则$K(X)$在每个素除子P上具有相应的离散赋值结构$v_P : K(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$。于是对一个非零有理函数$f \in K(X)$，可以定义$(f) = \sum_P v_P(f) P$，它是一个Weil除子，我们把它称为**主除子**(principal divisor)。我们把$\mathrm{Div}(X)$关于主除子群的商群记为$\mathrm{Cl}(X)$

接下来我们只假设X是概形，那么就有更广泛意义上的除子

(1)对于每个开集$U \subset X$，我们把环$\mathcal{F}(U)$的非零因子集记为S则可以进行局部化$K(U) = S^{-1}\mathcal{F}(U)$，此时我们有一个新的预层$\mathcal{K}_X(U) = K(U)$。实际上，当$X$是整的时有$\mathcal{K}_X = K(X)$，我们使用$\mathcal{K}_X^*$来表示可逆元构成的集合

[14]交换代数的基本内容，不想赘述了

(2)我们记$\mathrm{Div}(X)=H^0(X,\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$，并把里面的元素称为**Cartier除子**(Cartier divisor)。并把$f\in H^0(X,\mathcal{K}_X^*)$在$\mathrm{Div}(X)$里的像记为$\mathrm{div}(f)$，称为**主Cartier除子**(principal Cartier divisor)。通过差为主Cartier除子可以定义Cartier除子的等价关系，相应得到的商集记为$\mathrm{CaCl}(X)$。

实际上，概形属于一种泛化的抽象对象，以笔者的观点来看，它与层是同流合污的，而我们所渴望往往是更加实际的东西，比如代数簇。我们可以发现这样一个事实，代数簇可以升级为概形，但为什么这样的事不会发现在微分流形上，笔者认为理由是简单的，即“流形的抽象性质堆砌过于繁琐”，实际上概形的抽象堆砌也挺繁琐，但至少有人愿意去做，并且还做得十分庞大，就是著名的代数几何圣经“EGA、SGA、FGA”了。对于入门的人来说，实际上需要的只是稍微了解一下这些抽象的概念就行了，这样可以扫清一些术语的阻碍，更多的学习还是得投入到实际的例子中去比较好。

4 代数:代数簇理论

4.1 代数簇

在传统的代数几何中，我们通常要求一个代数闭域k，但如果从概形的角度来考虑的话，我们可以去除掉闭域的条件，从而研究稍微广泛一些的对象。有人可能会说对于域k，我们能否直接考虑$\mathbb{A}_k^n$或$\mathbb{P}_k^n$的子概形，其实后者确实如此，不过我们还是详细地定义一下吧。

定义 4.1: 设k是域

(1)我们把域k上有限生成代数的素谱，称为**k上的仿射簇**(affine variety over k)

(2)我们把$\mathbb{P}_k^n$的闭子概形，称为**k上的射影簇**(projective variety over k)

(3)一个k-概形X，如果存在一个有限仿射概形开覆盖且每个元素是k上的仿射簇，则称它是**k上的代数簇**(algebraic variety over k)。

显然这里的射影簇就是我们传统定义的那样，而k上的有限生成代数实际就是商环$k[x_1,...,x_n]/I$，所以它也是回归了经典情况，至于代数簇，概形什么的去掉也无所谓，直接看成仿射簇拼接而成的就行了，就像之前通过仿射概形定义概形一样。至于代数簇作为概形的性质其实不说也罢，比如它是诺特的，因为很多时候我们都是从簇的相关性质推移到概形上的。接下来，我们来讨论一些代数簇的基本性状。

定义 4.2: 设k是域，$\overline{k}$是它的代数闭包

(1)对于k上的代数簇X可以得到$\overline{k}$上的代数簇$X_{\overline{k}}$，具体方法是通过基变换，而经典做法我也在上一部文章讲过来。此时我们将代数簇的各种要求闭域情况的性质，转化到这个诱导代数簇上。比如X的光滑性(smooth)，即$X_{\overline{k}}$的正规性(regular)

(2)由于代数簇是局部诺特的，因此对于单点的光滑性或正规性，我只需要看局部环$\mathcal{O}_{X,x}$的性质。在代数上，光滑性基本等价于没有重根，它的描述方式是使用极大理想，我们设局部环$A=\mathcal{O}_{X,x}$，它的极大理想为$\mathfrak{m}$，只要满足$\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=\dim A$，我们就称此处光滑

(3)最后，我们来说明一个等价性的光滑描述，也叫雅可比判别(Jacobian criterion)。令$X=V(I)$是$\mathbb{A}_k^n$的闭子概形，理想$I\subset k[x_1,...,x_n]$的生成元是$f_1,...,f_r$，对任意一个k-有理点$x\in X(k)$，

我们定义矩阵$J_x = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x))_{i,j}$则，$X$在$x$处光滑当且仅当，$\mathrm{rank} J_x = n - \dim \mathcal{O}_{X,x}$。

到目前为止，我们都只是在通过一些比较经典的内容来将大家从前面抽象的牢笼中带出来。其实，笔者一直都很难受，主要是同样的概念可以好多种叫法，比如“光滑点”、“正规点”、“非奇异点”都是一个意思，只是因为它来自的领域不同，结果搞得叫法千奇百怪的。这里只是一个转折点，到目前，我们必需假设读者充分理解了，代数簇和光滑性的概念，这两点是我们研究其它各种东西的基础，对于其它的东西我们基本没有什么通用性的理论，只能一点点的研究探索。

4.2 曲线理论

对于代数簇的研究，一个很好的顺序就是以维数为基础然后来不断提高。首先零维代数簇，就是一个平凡的点$\{x\}$，它不具备任何的研究价值，所以我们的起点至少是一维代数簇。另外我们注意到之前所使用过的变换手术“X扩充为$X_{\overline{k}}$”，那么我们只需要回到代数闭域$\overline{k}$上研究代数簇X，并研究k-有理点$X(k)$即可，这样我们可以更多优秀的性质。对于有“非光滑点”(或称为“奇异点”)的曲线，有专门的奇点理论来进行研究，所以对于一般性的理论我们只考虑光滑代数簇。实际上，代数簇从概形那里继承的态射和同构，放到传统意义上就是有理映射和双有理等价，我们可以给出这样一些事实。(1)任意n-1维代数簇双有理等价于$\mathbb{P}_k^n$的一个超曲面，即$k[x_0, ..., x_n]$中齐次多项式确定的零点集。(2)“光滑性”不是双有理不变量，但对于一维代数簇而言每个双有理等价类中均存在唯一一个光滑代数簇。结合上面的两点，我们只需要研究$\mathbb{P}_k^2$中的一维代数簇即可，我们把它称为**曲线**(curve)。曲线有一个重要的双有理不变量“亏格”，不过我们稍微需要一点点铺垫。对于$\mathbb{P}_k^n$中的r维代数簇，其**算术亏格**的定义是$p_a = (-1)^r(P(0) - 1)$，其中$P(x)$是代数簇的Hilbert多项式，由于它是存在性的不好给出定义，但我们考虑需要的情况，即$\mathbb{P}_k^n$中d次超曲面，那么就有公式$p_a = C_{d-1}^n$，对于曲线可以特殊化为$p_a = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$。另外一个是**几何亏格**，它的标准定义是$p_g = \dim \omega_X(X)$，其中$\omega_X$是$X$上的典型层，它并不是$X$做为代数簇所带的层，虽然我们不知道它是什么，但是这个亏格带有“几何”这个词，实际上，它就是拓扑空间上的亏格，我们只要知道它是一个双有理不变量即可，并且对于高维代数簇，算术亏格和几何亏格不一定相等，不过我们的曲面就与众不同了。

定理 4.1: 设X是曲线，则有$p_a(X) = p_g(X) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$，此时我们把这个值记为$g$，并称其为曲线的**亏格**(genus)。

请读者注意这样一个事实，代数几何中的曲线，一般使用的都是代数闭域$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$，因此从我们常规的欧式空间来看，其实应该是一个“曲面”，因此此处曲线的亏格其实和代数拓扑中曲面的亏格概念实际上是一样的，可以看成“洞”的个数。而著名的Riemann-Roch定理实际上就具有多重身份，在一维复流形上、在一维代数簇上、在二维实流形上等等。对于曲线X和其上的除子D，我们记$l(D) = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$，于是就有下面定理。

定理 4.2 (Riemann-Roch**定理**): 设X是亏格为g的曲线，D是X的一个除子，K是X的一个主除子，则有

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g$$

我们需要知道，在传统意义上K是具有实际意义的，即曲面上的微分形式的除子，因此也叫做典型除子(canonical divisor)，不过我们无所谓就是了。上述定理是曲线自身所带有的性质。研究态射$f: X \to Y$时就会产生另外一个定理了，我们记一个除子$R_f = \sum_{p \in X}(e_p - 1)p$，它由态射的分歧构成，就可以得到下面定理。

定理 4.3 (Hurwitz**公式**): *设$f: X \to Y$是代数簇间的有限可分态射，记$n = \deg f$，则有*

$$2g(X) - 2 = n(2g(Y) - 2) + \deg R_f$$

读者可能会觉得为什么我们好像突然变成混子了，其实不是这样的，有个Riemann-Roch定理和Hurwitz公式，我在上一部的内容中，在复流形层面上已经介绍过了，这里只是简单的推广，所以实在不想反复地去写了，实际上我们有“(Riemann)一维紧复流形是曲线(一维射影簇)”。实际上，有关曲线还有一些著名的结论，像Faltings定理、Mordell-Weil定理之类的，但我们不打算陈述它，特别是Faltings定理，主要是它们不像上面两个公式那么本原，“Riemann-Roch+Hurwitz”在大多数的代数几何教程上都会提及，并且很多结论的证明都依赖于它们，所以是值得一提的，比如我们接下来要讨论的内容，虽然我不会写证明，但从各类书籍上都可以发现这两个结论无处不用。

定理 4.4 (**嵌入定理**): *任意曲线可以嵌入到$\mathbb{P}_k^3$中。*

请注意，这和之前的双有理等价于$\mathbb{P}_k^2$中的超曲面不是一个概念，嵌入定理表示我们可以直接从$\mathbb{P}_k^3$的子概形中找到所有的曲线，而之前的双有理等价只是表明我们可以使用一个三元齐次方程来确定曲线。在双有理等价之上，我们可以定义一个更细的“双有理同构”，简单来说就是可逆的唯一性，双有理等价中“A到B”和“B到A”可以没啥关系，但“双有理同构”中要求“A到B”导致唯一一个逆过来的“B到A”，我们可以近似的把它们理解为拓扑空间中的“同伦”和“同胚”间的差异。研究曲线，我们一般先通过双有理等价变到$\mathbb{P}_k^2$的情况，然后再通过双有理同构对这些曲线进行细分。等一下我们会举一个著名的例子，椭圆曲线，不过我们先把曲线给研究完。我们把曲线的二重奇点(即有二重重根的点)称为曲线的**结点**(node)，那么我们可以得到下面的定理。

定理 4.5: *任意曲线双有理同构于$\mathbb{P}_k^2$中至多以结点为奇点的曲线。*

我们可以证明算术亏格是双有理同构的不变量，但不一定是双有理等价的不变量，所以对于带有r个结点的曲线，它的亏格计算公式应该是$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - r$，此处加了个奇点修正项，之前的公式只能计算光滑的情况。接下来我们来讨论著名的**椭圆曲线**，它指的是亏格为1的曲线。

定理 4.6: *设X是域k上的椭圆曲线，且k的特征非2，给定一点$P_0 \in X$，则存在$\lambda \in k$使得闭浸入$X \to \mathbb{P}_k^2$的像为*

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda), P_0 \mapsto (0,1,0)$$

此处的$\lambda = 1$是可以存在的，也就是说我们的椭圆曲线还存在奇点，而通常所讨论的椭圆曲线会加上一个判别式的条件来保证它的光滑性。在双有理同构的意义下，椭圆曲线最多所产生的方程是下面的形式

$$E: y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6, a_i\in k$$

即Weierstrass方程，有关椭圆曲线我在上一部作品中做过很多介绍了，比如$j(E)$不变量在双有理同构的意义下是相等的，我们以后把“双有理同构简称为同构”。此时，椭圆曲线的同构具有确定的转化式，即允许变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 & 0 & r \\ u^2s & u^3 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, u\in k^*, r,s,t\in k$$

我们注意到，椭圆曲线的点并不是仿射方程上的点，而是要在其基础上加上无穷远点$\infty=(0,1,0)$，如果你觉得这个点碍事的话，也可以考虑$\mathbb{P}_k^2$中的超曲面

$$x_2^2x_0=x_1(x_1-x_0)(x_1-\lambda x_0), x=\frac{x_1}{x_0}, y=\frac{x_2}{x_0}$$

更多的东西就不讲了，包括群结构之类的，我们在这里更多的是想说明椭圆曲线和代数簇之间的关系。椭圆曲线的推广是阿贝尔簇，它定义在概形上，即域k上的带有群结构的几何整的(geometrically integral)完备(proper)概形。里面有两个条件十分陌生，但那只是单纯限制的迁移，可以证明Abel簇一定是射影概形且群结构是交换的。在这种情况下，我们可以直接把$\mathbb{P}_k^n$中带有交换群结构的闭子概形，即带有交换群结构的射影簇，视为Abel簇。只能说这只是概念严谨所导致的繁琐推导，以笔者的观点来看，所谓的**Abel簇**(Abelian variety)就是“带有交换群结构的射影簇”。虽然Abel簇的群结构没什么好讲的，但代数闭域$\overline{k}$上的Abel簇A的k-有理点$A(k)$是一个与数论相关的有趣内容，一个简单的事实是，在群结构上“$A(k)$是A的子群”，从概形的角度可以严格证明下面的定理。

定理 4.7 (Mordell-Weil**定理**): *对于任意整体域k上的Abel簇A，它的k-有理点$A(k)$是$A_{\overline{k}}$的子群且是有限生成Abel群。*

我们需要注意的一点时，很多时候我们都是在研究代数闭域上的代数簇，所以对于一般域k上的代数簇X，考虑的都是$X_{\overline{k}}$，这一点我们一直都是作为大前提的，所以阿贝簇上的平凡的群结构指的是$A_{\overline{k}}$上的群结构。如果从方程的角度来考虑就是，k上的超曲面一定是$\overline{k}$上的超曲面，取点的时候我们也是在后者上进行取点。上述定理的特殊情况是取$k=\mathbb{Q}$且A是椭圆曲线，由此得到的是Mordell定理，它所讨论的是亏格为1的曲线，所以进一步要考虑的就是亏格大于1的情况了，它就是下面的定理。

定理 4.8 (Faltings**定理**): *任意$\mathbb{Q}$上的满足$g>1$的曲线C，它的有理点$C(\mathbb{Q})$是有限集。*

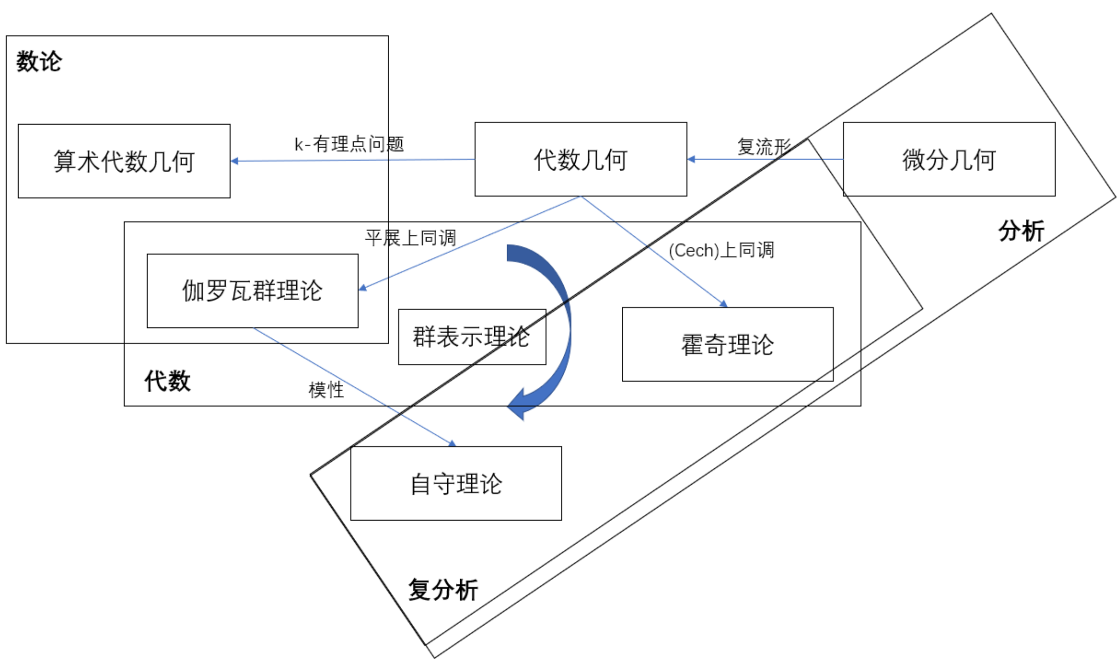
这里的前提比较严格，首先由于群结构不一定存在所以结论只能变成有限集，其次对于有限域的情况是显然的无需讨论的，最后对于扩域情况还在讨论之中。有关曲线就介绍到这里了，实在没有什么可说的了。其实对于曲线的分类，就亏格较低时有比较好的结果，所以我们不打算讨论**曲面**(surface)，即二维代数簇。虽然有关曲面有不少的研究，不过嘛，大多都不像曲线那么细致，基本都是从代数簇的理论中得到的一些宽泛性质。个人认为并不是那么的有趣，而且其进一步对应到欧式空间已经是4维的情况了，连3维流形都还没研究透彻就更别说4维了。曲面上的几何通常就是研究它的除子和除子的相交理论，通过余维数的概念，曲面

上的除子实际上就是其上曲线，这部分基本都来自概形通用的除子理论，没啥好说的。至于更高的维数笔者只能说，如果你喜欢抽象的牢笼就在概形中慢慢去讨论吧，它的性质一般是杂而不美的，我可喜欢不起来。

4.3 杂记

在笔者看来，代数几何一直都是一门比较杂乱的理论，除了概形理论，任何稍微有序一点的理论基本说几页纸就没有了，更多的时候只有落到具体的代数簇上才能产生丰富的理论。我们能轻易地窥见“代数几何”实际上是“解析几何”的推广理论，基本的思想都是去研究多项式零点集产生的代数簇。另一方面，我们“代数几何”与我们下面要讲的“微分几何”间的联系，只能说有公共部分，但没有完全的包含关系。而在公共部分之中，性质最好的莫过于“紧黎曼面”，即一维紧复流形了，它具有多重的身份，在微分流形上是二维实流形，在代数几何上是一维光滑射影簇，同时抱上了“复分析”这个大腿，最后还能嵌入$\mathbb{R}^3$空间。至于这个“紧性”，读者其实没必要过于在意，因为对于非紧的情况基本都可以通过紧化的手段去进行转化，而加上了“紧性”，对于理论研究来说就相当于多了个优秀的条件，何乐不为呢？

其实笔者讲代数几何，只是想读者理清它与微分几何的关系。我写这篇文章的主要目的，其实是说明“几何化定理”做铺垫用的，几何化定理针对的是三维微分流形的分类，它与代数簇其实没啥关系，但是既然要讨论3维流形的分类，自然要讨论1维、2维的情况了，而其中的2维微分流形与代数簇就有比较大的关系了，所以就莫名其妙地冒出来两大章“层理论”和“代数簇理论”，并且在代数簇中我们只讨论需要的曲线情况。读者千万不要把我所讲的内容就认为是代数几何的全部了，代数几何都众多的猜想和理论，比如BSD猜想是关于Abel簇的、Hodge猜想是关于射影簇的，而考虑k-有理点$X(k)$问题能引申出与数论相关的“算术代数几何”，而且代数几何在朗兰兹纲领之中也占有一席之地。



在很多时候，我们认为代数几何是数学研究的前沿，并不是说它真的十分深入，而是因为它是一个“多面手”，通过各种性质与数学的各个领域都产生了或多或少的各种联系，而联系的中心，正是我们的“代数几何”。算了，下面我们该开始进入正题了，即微分流形。

5 分析:微分流形理论

5.1 微分流形

理论上来说，流形就是建立拓扑空间和一个具有分析性质对象联系的过程。由之前的讨论可以知道，巴拿赫空间就是一个很好的分析对象，它具有一个完备度量并且可以诱导出相应的拓扑结构。显然局部同胚于一个巴拿赫空间可以作为一个最强流形的定义，但这样附加的对象过多，于是第一个弱化是局部同胚于同一个巴拿赫空间的开子集。接着，“内积”十分的重要，像垂直、切性等基本都需要它，巴拿赫空间需进一步弱化为希尔伯特空间。然后我们要注意到，希尔伯特空间的同构不能单纯的视为线性空间的同构，因为其上定义了一个运算，因此希尔伯特空间不能单纯的分类成$\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n,\mathbb{Q}_p^n$。由于希尔伯特空间的分类过于复杂，且我们发现大多非平常的希尔伯特空间都是函数的空间，从便利性的角度，我们可以直接把希尔伯特空间弱化成$\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n,\mathbb{Q}_p^n$这三种情况，对于复数有相应的同构关系$\mathbb{R}^{2n}\cong\mathbb{C}^n$，即我们将复流形看成特殊的实流形，限制当然不只是在流形本身上，还包括相应的局部坐标结构上，所以有时我们会看到实流形和复流形是分开定义的。至于p-进域$K=\mathbb{Q}_p$时，确实有这玩意即**K-解析流形**(K-analytic manifold)，著名的例子是p-进Lie群，但是K-解析流形是一个局部紧的完全不连通(totally disconnected)拓扑空间，也就是每个连通分支都是一个点，所以没啥意思。这样我们最后选定的就是$\mathbb{R}^n$了，可谓是和情又合理。最后，为什么要给拓扑空间加上T_2的条件，首先局部欧式化不能推出T_2是毫无疑问的，那么加上无非就是使得性质更加优秀那么简单了，不然稍微想想的话，我们还不如K-解析流形也一起包括进来算了。在笔者的观点里，不论是$\mathbb{R}^n$的条件还是T_2的条件，都是为了“连续看起来更连续”，如果真的不理解也无所谓，它多给你一个性质难道不是一件皆大欢喜的事吗？条件太少才是可怕的事。

定义 5.1: 设M是一个T_2拓扑空间

(1)如果M上任意一点都存在一个领域同胚于$\mathbb{R}^n$的一个开子集，就称M是一个n维**流形**(manifold)。我们把第二可数的流形称为**拓扑流形**(topological manifold)

(2)如果M上任意一点都存在一个领域同胚于$\mathbb{R}_+^n$的一个开子集，并且存在一点p_0使得它有一个领域同胚于$\mathbb{R}_+^n$，就称M是一个n维**带边流形**(manifold with boundary)。我们把第二可数的带边流形称为**拓扑带边流形**(topological manifold with boundary)

(3)设M是一个n维流形(或带边流形)。我们把定义中所有同胚构成的集合记为$\mathscr{A}=\{(U_i,\varphi_i)\}$，其中$U_i$是开集，$\varphi_i:U_i\to\varphi_i(U_i)\subset\mathbb{R}^n$是对应的同胚，我们通常称$(U_i,\varphi_i)$是一个**局部坐标**。如果两个局部坐标系$(U_i,\varphi_i),(U_j,\varphi_j)$满足，$U_i\cap U_j=\varnothing$或者$\varphi_i\varphi_j^{-1},\varphi_j\varphi_i^{-1}$是$C^r$函数(即r阶连续可微)，则称这两个局部坐标系是$C^r$**相容**的

(4)设M是一个n维流形(或带边流形)。如果有一个子集$\mathcal{A}=\{(U_i,\varphi_i)\}\subset\mathscr{A}$满足

(a)$\{U_i\}$是M的一个开覆盖

(b)$\mathcal{A}$中的任意两个局部坐标是C^r相容的

(c)$\mathcal{A}$是极大的。即如果局部坐标$(V,\phi)\in\mathscr{A}$与$\mathcal{A}$的每个元素都C^r相容则属于$\mathcal{A}$

此时我们称$(M,\mathcal{A})$是一个n维C^r**流形**(或带边流形)，$\mathcal{A}$称为M的一个C^r**微分构造**

(5)我们把C^∞流形称为**微分流形**(differentiable manifold)或者**光滑流形**，其相应的微分构造称为**光滑构造**。我们把C^ω流形称为**解析流形**(analytic manifold)，其相应的微分构造称为**解析构造**。

先看(1)(2)的流形定义，它有两个问题。一个是"第二可数"的条件，笔者认为不加是比较恰当的，因为它是某些定理证明所用到的要求，而没有落在流形自身上，且对于流形的通论来说没什么用，反而我们只需在相应的定理上作为一个前提会更好，这也是大多数微分流形书籍的观点。二是"带边问题"，实际上可以直接通过局部同胚于$\mathbb{R}^n_+$的开子集定义所有的流形，并且通过是否有一个领域同胚于$\mathbb{R}^n_+$来区分是否带边，它到底用处在哪呢？主要还是看在哪个领域，比如拓扑上一般要考虑边界的问题，就把"紧+不带边"的流形称为**闭的**(closed)，而在微分上不带边往往更好研究，此时"闭的"和"紧的"就是一个意思，由于我们只研究微分流形所以不特别指出"带边"两个字，默认就是不带边的，边界的符号∂M我们直接从拓扑空间继承过来，而内部我们一般记为$\mathrm{Int}M = M-\partial M$，这样不带边流形相当多了一个条件$M=\mathrm{Int}M$。对于(4)(5)我们只考虑微分流形(很多性质都要求无限可微)，它是在流形的基础上加了一个光滑构造，那么两者的"同构"就不是一个概念了，对于流形而言，它只是拓扑空间加上了性质，因此它的"同构"就是拓扑空间的"同胚"，而对于微分流形它增加了一个光滑构造，因此必需在"同胚"基础上加上"构造的同构"才能形成微分流形的"同构"，另外我们在微分流形上说局部坐标指的是其光滑构造上的局部坐标，我们有下面的"同构"概念。

定义 5.2: 设M,N分别是n维和m维的C^r流形，$f:M\to N$是连续映射

(1)对一点$p\in M$，如果存在p的一个局部坐标(U,ϕ)和$f(p)$的一个局部坐标(V,ψ)使得函数$\psi f\phi^{-1}$在$\phi(p)\in\mathbb{R}^n$处是C^r的，则称f在p处是C^r**的**。如果f在每点都是C^r的，则称f是一个C^r**映射**，我们把这些C^r映射构成的全体记为$C^r(M,N)$

(2)如果$m=n$，f是同胚，f,f^{-1}都是C^r映射，则称M和N是C^r**同胚**的

(3)我们把C^∞映射称为**光滑映射**(smooth map)，把C^∞同胚称为**微分同胚**(diffeomorphism)。

一个流形上是可以存在互不微分同胚的光滑构造的，所以流形的同胚和微分同胚显然是不同的概念，甚至有些流形还能不存在微分构造，所以区分流形和微分流形是有必要的，以后我们专门来研究就有分析性质的微分流形。微分流形的实例到处都是，比如欧氏空间$\mathbb{R}^n$、球面S^n、射影空间$P\mathbb{R}^n,P\mathbb{C}^n$、环面$T^r$等等，笔者认为我们最需要知道的是流形的复合方式，比如微分流形的开子集是微分流形、微分流形的笛卡尔积是微分流形，比如环面$T^r=\underbrace{S^1\times...\times S^1}_{r}$就是如此得到的，如果把带边流形考虑进去，微分流形的闭子集是微分流形，所有的流形都可以看成$\mathbb{R}^n$的子流形，不过它需要一些切空间的东西，我们稍微介绍一下，我们记C^∞_x表示所有在$x\in M$一个领域内U的光滑映射$f:U\to\mathbb{R}$构成的全体。

定义 5.3: 设M是一个n维微分流形，$x\in M$

(1)如果一个映射$v:C^\infty_x\to R$满足，$\forall f,g\in C^\infty_x, v(f+g)=v(f)+v(g)$、$\forall f\in C^\infty_x,k\in R, v(kf)=kv(f)$、$\forall f,g\in C^\infty_x, v(fg)=fv(g)+v(f)g$，则称$v$是$x$处的一个**切向量**。我们把所

有在x处的切向量构成的集合记为$T_x(M)$，可以证明它是$\mathbb{R}$上的一个n维线性空间，我们把它称为x处的**切空间**

(2)我们把切空间的对偶空间称为**余切空间**，并记为$T_x^*(M)$，并把内部的元素称为**余切向量**

(3)对于光滑映射$f: M \to N$和一点$x_0 \in M$，我们可以得到一个诱导映射$f_{*x_0}: T_{x_0}(M) \to T_{f(x_0)}(N), v \mapsto (g \mapsto v(gf))$，可以证明它是线性变换，我们把它称为$f$在$x$处的**切映射**

(4)在(3)的前提下，还可以诱导映射$f_{x_0}^*: T_{x_0}^*(M) \to T_{f(x_0)}^*(N)$，并把它称为$f$在$x$处的**余切映射**。

我们这里切空间的定义有点抽象，但这主要是为了消除与局部坐标选取无关的特点，并把切向量具有的求导性质给包含了进去。切空间的另一种看法是，像传统微分几何那样通过光滑曲线来实现，即下面这种情况

$$T_x(M) = \{\frac{\mathrm{d}\varphi_i\gamma}{\mathrm{d}t}(0) : \gamma \in C^\infty([0,1], M), \gamma(0) = x \in M\}, (U_i, \varphi_i)$$

但此处我们还必须证明包含x的所有局部坐标得到的空间是同构的，而且它所具有的求导性质也需要证明，好处是我们充分利用了实分析的性质，使得切空间可以计算出来，从理论的角度还是使用我们所给的定义比较好。在这种情况下，我们很容易发现如果选定局部坐标后，切空间的基就是求偏导运算$\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_i$，而对于余切空间，它的元素相当于在此处的一个全微分，即有

$$\mathrm{d}f|_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}|_x \mathrm{d}x_i$$

因此余切空间的基就是微元$\{\mathrm{d}x_i\}$，根据之前的理论只要有线性空间和对偶空间，就能形成任意的(r,s)型张量，我们可以记为$T_s^r(x)$，这就是流形上自带的张量结构，并且是唯一确定的。显然切空间和切映射的作用是将一点处的研究转移到线性代数中去，这样光滑映射f在一点处就可以拥有秩$\mathrm{rank} f_{x_0}$的概念了，它等于切映射的像$f_{*x_0}(T_{x_0}(M))$的维数，如果我们在两个流形上分别选定两组坐标$\{x_i\}_i$和$\{y_j\}_j$的话，秩就可以变为雅可比矩阵的秩了

$$\mathrm{rank} f_{x_0} = \mathrm{rank}(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}|_{x_0})$$

借助局部坐标和切空间，我们可以给出流形的定向概念和嵌入概念，注意流形的嵌入和拓扑空间的嵌入是不一样的。

定义 5.4: (1)设$(M, \mathcal{A})$是n维微分流形。如果存在一个子集$\mathcal{A}_0 = \{U_i, \varphi_i\} \subset \mathcal{A}$满足，$\{U_i\}_i$是$M$的开覆盖，并且当$U_i \cup U_j \neq \varnothing$时坐标变换$\varphi_j\varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cup U_j) \to \varphi_j(U_i \cup U_j)$的雅可比行列式恒正，即$\det(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}) > 0$，则称$M$是**可定向的**，并把最大的$\mathcal{A}_0$称为$M$的**一个定向**

(2)设C^r映射$f: M \to N$。如果满足在每点p处切映射$f_{*p}: T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$都是非退化的，即$\mathrm{rank} f_p = \dim M$，则称$f$是一个$C^r$**浸入**，并把$M$称为$N$的**浸入子流形**。如果$f$是单射，我们就把它称为是**单一的**

(3)设单一C^r浸入$f: M \to N$。如果$f: M \to f(M) \subset N$是C^r同胚，则称f是一个C^r**嵌入**，并把M称为N的**嵌入子流形**。

我们可以看到，此处的浸入和嵌入就是拓扑空间在流形上的推广，而其中的嵌入才是我们最需要的，我们有下面的重要定理。

定理 5.1 (Whitney**定理**): 设M是一个n维C^r流形

(1)当$n \geq 2$时，M可以C^r浸入到$\mathbb{R}^{2n-1}$中；当$n \geq 1$时，M可以C^r嵌入到$\mathbb{R}^{2n}$中

(2)任意n维紧微分流形可以，光滑浸入到$\mathbb{R}^{2n}$中以及光滑嵌入到$\mathbb{R}^{2n+1}$中。

我们需要注意(2)并不是说微分流形有多么特殊，它和(1)实际上是一样的，只是因为一些低维(n=0,1)情况会让指标产生异常才这么写的，在(1)中给的情况是最好的了，因为可以找到某些流形n维流形不能嵌入到$\mathbb{R}^{2n-1}$的情况。这样我们终于完成了前面的断言，即只需要考虑$\mathbb{R}^n$的子流形即可。

5.2 纤维丛

有人可能觉得我们是不是跳得有些快了，竟然直接就开始搞纤维丛了。不不不，我们的目的是希望读者能充分理解“切向量场和切丛的关系”，并进一步考虑“向量丛”，和更进一步的“纤维丛”。在微分几何中，我们就稍微说明过，向量丛实际上就是直线包络的推广，而纤维丛则是曲线包络的推广，而各种场则是包络的一个截面。我们还是先来看一个实际的例子吧，即切丛和切向量场。由于我们以后经常会用到实分析的内容，所以对于局部坐标(U, φ)通常可以写为(U, x_i)，即我们直接把对应过程φ给跳过了，相当于直接在流形上建立坐标系一样的感觉，主要是用起来比较方便。

定义 5.5: 设M是一个n维微分流形

(1)可以证明$T(M) = \cup_{x \in M} T_x(M)$是一个2n维微分流形。我们把它称为$M$的**切向量丛**或者简称为**切丛**

(2)如果映射$v : M \to T(M)$满足$v(x) \in T_x(M)$，就把v称为M上的**一个切向量场**

(3)对于一个切向量场v。如果在一点$x_0 \in M$处存在一个局部坐标(U, x_i)使得v在基$\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_i$下的分解$v|_U = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$所得函数$v_i$是$C^r$的，则称$v$在$x_0$处是$C^r$**的**。如果$v$在整个$M$上是$C^r$的，则称$v$是$M$的一个$C^r$**切向量场**

(4)我们把C^∞切向量场称为**光滑切向量场**，并把它们的全体记为$C^\infty(M, TM)$。

光滑的定义稍微有点复杂，还是得转移到实分析中，实际上我们可以从流形的角度考虑光滑，而这也为以后我们定义向量丛提供了理论基础。

定理 5.2: 设M是微分流形

(1)v是M上的光滑切向量场当且仅当，$v : M \to T(M)$是光滑映射且$\pi v = 1_M$为恒等映射。其中的$\pi : T(M) \to M, T_x(M) \mapsto x$是自然的投影映射

(2)$C^\infty(M, TM)$，不仅是$\mathbb{R}$上的线性空间，还是一个$C^\infty(M, \mathbb{R})$-模。

借助这些简单的思想，和之前我们对切空间之间转化的研究，就可以轻松地引入向量丛的概念了。

定义 5.6: 设E是n+k维微分流形，M是n维微分流形，$V = \mathbb{R}^k$是k维线性空间。如果存在光滑满映射$\pi : E \to M$使得

(1)有一组M的开覆盖$\{U_i\}$，和对应的微分同胚$\phi_i : U_i \times V \to \pi^{-1}(U_i)$满足，$\forall p \in U_i, y \in V, \pi\phi_i(p, y) = p$

(2)固定一点$p \in U_i$时记$\phi_{i,p}(y) = \phi_i(p, y)$，则$\phi_{i,p} : V \to \pi^{-1}(p)$是同胚。并且当$U_i \cap U_j \neq \varnothing$时$\forall p \in U_i \cap U_j, \phi_{j,p}^{-1}\phi_{i,p} \in GL(V)$

(3)我们记$g_{ji}(p) = \phi_{j,p}^{-1}\phi_{i,p}$。如果$U_i \cap U_j \neq \varnothing$则$g_{ji} : U_i \cap U_j \to GL(V)$是光滑映射

则称E是M的一个秩为k的**向量丛**。其中M称为**底空间**，π称为**投影**，V称为**纤维型**，$\pi^{-1}(p)$称为点p处的**纤维**，g_{ji}称为**转移函数**。

显然一个向量丛的构造是比较复杂的，但是我们拆解来看就比较简单了。n维微分流形M上的切丛$T(M)$就是秩为n的向量丛，它的纤维型是$\mathbb{R}^n$，而它的转移函数实际就是局部坐标变换$\varphi_j\varphi_i^{-1}$的雅可比矩阵$J_{ji} \in GL(\mathbb{R}^n)$。如果我们将纤维型从线性空间替换为一般的流形就可以得到纤维丛了，只不过这个流形必需要带上一个“类似的自同构变换”即作用在流形上的Lie群。

定义 5.7: (1)设M是n维微分流形，G是r维Lie群，如果光滑映射$G \times M \to M, (g, x) \mapsto gx$满足，$\forall x \in M, ex = x$、$\forall x \in M, g, h \in G, g(hx) = (gh)x$，则称$G$是**作用在$M$上的Lie群**

(2)设E是n+k维微分流形，M是n维微分流形，F是k维微分流形且带有一个作用在其上的Lie群G。如果存在光滑满映射$\pi : E \to M$使得

(a)有一组M的开覆盖$\{U_i\}$，和对应的微分同胚$\phi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$满足，$\forall p \in U_i, y \in F, \pi\phi_i(p, y) = p$

(b)固定一点$p \in U_i$时记$\phi_{i,p}(y) = \phi_i(p, y)$，则$\phi_{i,p} : F \to \pi^{-1}(p)$是光滑同胚。并且当$U_i \cap U_j \neq \varnothing$时$\forall p \in U_i \cap U_j, \phi_{j,p}^{-1}\phi_{i,p} \in G$

(c)我们记$g_{ji}(p) = \phi_{j,p}^{-1}\phi_{i,p}$。如果$U_i \cap U_j \neq \varnothing$则$g_{ji} : U_i \cap U_j \to G$是光滑映射

则称E是M的一个秩为k的**纤维丛**。其中M称为**底空间**，π称为**投影**，F称为**纤维型**，G称为**结构群**，$\pi^{-1}(p)$称为点p处的**纤维**，g_{ji}称为**转移函数**，ϕ_i称为**局部平凡化映射**。

显然向量丛是特殊的纤维丛，它的纤维型是$V = \mathbb{R}^k$，而结构群是$GL(V)$，其它就都一样了，对于纤维丛每一部分都是需要的，所以一般记成一个整体(E, M, F, π, G)，最后推广光滑切向量场就是一个简单的事了。

定义 5.8: 对于纤维丛(E, M, F, π, G)，如果光滑映射$v : M \to E$满足$\pi v = 1_M$，就把v称为E的**一个截面**。

从上面的定义不难发现，光滑切向量场就是切丛的一个截面。显然在纤维丛的定义中，F还得配一个G实在太碍眼了，我们把$F = G$的纤维丛称为**G-主丛**，并记为(E, M, π, G)。虽然纤维丛的重心在E上，但我们讨论的重点一般落在底空间M上，我们想要知道一般的纤维丛是否可以通过某种变换得到主丛，我们有下面的核心定理。

定理 5.3: 对两个纤维丛$(E, M, F, \pi, G), (\overline{E}, M, \overline{F}, \pi, G)$，如果它们有对应的局部平凡化映射和相同的转移函数，就称它们是**相配的**。于是有，任意一个纤维丛(E, M, F, π, G)都于一个G-主丛相配。

纤维丛理论是一个比较复杂的理论，其实从它定义的繁琐程度就可以知道，所以我们还是回到之前所研究的切丛吧，它还有一些有趣的东西等着我们，在这里我们引入纤维丛，只是

相帮读者理清一下切丛所在的地位。我们简记$TF(M) = C^\infty(M,TM), C^\infty(M) = C^\infty(M,\mathbb{R})$，则$TF(M)$是一个$C^\infty(M)$-模，因此我们可以将$v \in TF(M)$视为一个映射$v : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$，则它可以从切向量那里继承相应的性质。

定理 5.4: 对任意的$v \in TF(M)$有，$\forall f, g \in C^\infty(M), v(f+g) = v(f)+v(g)$、$\forall f \in C^\infty(M), k \in R, v(kf) = kv(f)$、$\forall f, g \in C^\infty(M), v(fg) = fv(g) + v(f)g$。

对这些东西我们可以简单地来理解，切向量相当于“一点求导”、而切向量场相当于“求导”，前者得到的是一个值，而后者得到的是一个函数，当然这些都必需在具体坐标和具体函数下才能看到。在这些内容的基础上，我们还可以发现$TF(M)$具有Lie代数的结构，即下面的定理。

定理 5.5: 对任意$X, Y \in TF(M)$，定义**Poisson括号**为$[X,Y] = XY - YX : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$则有

分配律:$[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z], [Z, aX + bY] = a[Z,X] + b[Z,Y]$

反交换律:$[X,Y] = -[Y,X]$

雅可比恒等式:$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

其中$X, Y, Z \in TF(M), a, b \in \mathbb{R}$。

最后可能需要讨论的应该是Hopf定理了，不过很多东西我们在微分几何中已经讲过了，这里只是把它推广到一般的微分流形上罢了，切向量场v的**奇点**指的是$v(p) = 0$的p。而在一点处的指标$\mathrm{ind}_p v$，非奇点可以记$\mathrm{ind}_p v = 0$，而奇点处就是我们之前所讨论的绕圈积分$\mathrm{ind}_p v = I(v,p)$，欧拉示性数$\chi$直接使用拓扑空间的定义即可，于是就有下面的定理。

定理 5.6 (Hopf定理): 设M是n维紧微分流形，v是M上的仅有孤立奇点的连续切向量场，则有$\sum\limits_{p\in M} \mathrm{ind}_p v = \chi(M)$。

除了切向量场，流形上的光滑张量场也是很重要的，由于之前我们定义过纤维丛，因此我们可以轻松地通过它来定义张量场。对一个微分流形M，我们记$T^p_q(M) = \cup_{x\in M} T^p_q(x)$，并把它称为$M$的**张量丛**，可以验证它就是一个纤维丛，此时我们把$T^p_q(M)$的任意一个截面称为一个光滑**(p,q)型张量场**。有关张量代数我们在之前已经讲过了，此处我们带上一个“场”就相当于为流形上的每一点配上一个张量，而“光滑”意味着张量在曲面上是光滑变换的。如果选定一个局部坐标(U, x_i)，那么任意一个光滑(p,q)型张量场τ有分解式

$$\tau|_U = \tau^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \otimes \mathrm{d}x_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x_{j_q}, \tau^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \in C^\infty(U)$$

显然切向量场，就是一个(1,0)型张量场，沿用之前的内容，我们把光滑(0,1)型张量场称为**一次微分式**，并把所有一次微分形式构成的全体记为$A^1(M)$。我们把所有光滑(p,q)型张量场的全体记为$TF^p_q(M)$，此时$\oplus_{p,q\geq 0} TF^p_q(M)$构成一个$C^\infty(M)$-模，因此我们有下面的等式

$$TF^0_0(M) = C^\infty(M), TF^1_0(M) = TF(M), TF^0_1(M) = A^1(M)$$

显然一个流形上的张量场是很多的，如果有一个光滑张量场是“对称、正定”的，那么这个张量场可以为微分流形引入度量性质，这就是黎曼几何所研究的基础内容，也是回到我们传

统所研究的微分几何的开始。

定义 5.9: 我们把微分流形M上的一个对称、正定的光滑(0,2)型(也叫2阶协变)张量场称为M上的一个**黎曼构造**。在M上选定一个黎曼构造g后，我们把(M,g)称为一个**黎曼流形**，并把g称为M的**度量张量**。

显然对于黎曼流形有两个基本问题，一是流形上是否一定有黎曼构造，而是同一流形上的黎曼构造是否有某种等价。对于问题一，只要加一个前提即可。

定理 5.7: 满足第二可数公理的微分流形上一定存在一个黎曼构造。

对于第二个问题，张量场的等价不怎么好定义，但是我们可以回想以前微分几何所学的内容，我们可以在$\mathbb{R}^2$上通过选定不同的度量，从而形成三种平面几何，放到流形上来说就是，在流形$\mathbb{R}^2$上，至少有三种不同的黎曼构造，并且生成了不同的几何学。由于黎曼几何所研究的黎曼流形贴近我们的微分几何，所以后面我们会在讨论一番，至于纤维丛就先到此为止了。

5.3 积分

由之前我们的讨论可知切向量场(1阶逆变张量)，相当于研究流形上的“微分理论”，那么对偶地，就应该有流形上的“积分理论”，而它的起点正是一次微分式(1阶协变张量)。通过张量理论，我们可以把流形上的“微积分理论”放到一个框架下来研究，可谓是妙不可言啊。

定义 5.10: 设M是n维微分流形。我们把M上的一个光滑反对称r阶逆变张量场称为**一个r次外微分形式**，并把它们的全体记为$A^r(M)$。注意到1次外微分形式就是一次微分式，此时可以规定$A^0(M)=C^\infty(M)$。

为了表示外微分形式所具有的特殊地位，我们一般把张量积$\otimes$记为外积$\wedge$，此时一个r次外微分形式$\tau\in A^r(M)$在一组基(U,x_i)下的表达变为

$$\tau|_U=\frac{1}{r!}\tau_{i_1\ldots i_r}\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_r}$$

注意到前面多了一个系数，实际上就是由于反对称性合并后的结果，读者可以自己去验证。而**外代数**$A(M)=\otimes_{r=0}^n A^r(M)$，**外积**$\wedge:A^r(M)\times A^s(M)\to A^{r+s}(M),(f,g)\mapsto f\wedge g$之类的都是线性代数讲过的东西，就没啥好讲的了。外微分形式具有一定的判断作用，比如下面的定理。

定理 5.8: 如果M是一个满足第二可数公理的n维微分流形，则M是可定向的当且仅当，M上存在一个处处不为零的n次外微分形式。

有了上面的基础内容以后，我们需要给出的当然是**外微分**映射$\mathrm{d}:A^r(M)\to A^{r+1}(M)$了。通常它可以在一个局部坐标$(U,x_i)$下计算出来，在微分几何中我们实际操作过一次，就是下面这样。

$$\mathrm{d}f=\sum_i\frac{1}{r!}\frac{\partial f_{i_1\ldots i_r}}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{i_r},f\in A^r(M)$$

上面并没有把外积的性质运用后来进行化简，只是进行了添项的操作，显然还需考虑“局部坐标选取无关、唯一性”之类的东西，所以我们还是把它变成一个存在性的定理比较好。

定理 5.9: 设M是n维微分流形，则存在唯一的映射$\mathrm{d}: A(M) \to A(M)$满足

(1)$\mathrm{d}(A^r(M)) \subset A^{r+1}(M)$

(2)$\mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$

(3)$\forall f \in A^r(M), \mathrm{d}(f \wedge g) = \mathrm{d}f \wedge g + (-1)^r f \wedge \mathrm{d}g$

(4)$\forall f \in A^0(M), \mathrm{d}f$是$f$的全微分

(5)$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$。

通过上述的性质，我们似乎发现了一个$C^\infty(M)$-模上的一个向上的复形，即$\{A^r(M), \mathrm{d}\}$，根据同调代数的基本理论，我们可以得到下列一系列的东西

$$Z^r(M) = \ker \mathrm{d} = \{f \in A^r(M) : \mathrm{d}f = 0\}$$

$$B^r(M) = \mathrm{d}(A^{r-1}(M)) = \{f \in A^r(M) : \exists g \in A^{r-1}(M), \mathrm{d}g = f\}$$

$$H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M)$$

为了习惯流形中的叫法，我们把$Z^r(M)$中的元素叫做**r次闭微分形式**，把$B^r(M)$中的元素叫做**r次恰当微分形式**，并把$H^r(M)$叫做**第r个deRham上同调群**。我们知道流形作为一个拓扑空间，它上面是自带奇异上同调群$H^r(M,R)$的，而两种同调群地联系就是下面的著名定理了。

定理 5.10 (deRham**定理**): 如果M是紧微分流形，则有$H^r(M) \cong H^r(M, \mathbb{R})$。同构的左边是deRham上同调群，而右边是实系数的奇异上同调群。

显然，deRham上同调群的一个重要意义在于，它给出了紧微分流形上奇异上同调群的计算方法，即通过微分形式和外代数来实现。到此，我们对微分形式有了一个较为深刻的理解，于是终于可以来探究积分理论了，它其实就是微分形式的积分。只不过微分形式必需得加上一个限制，即具备紧支撑集来保证积分确实可行，其实就是奇点要满足的限制。

定义 5.11: 设M是满足第二可数公理的可定向n维微分流形

(1)对任意$\omega \in A^r(M)$，我们把$\mathrm{Supp}\omega = \overline{\{p \in M : \omega(p) \neq 0\}}$称为$\omega$的**支撑集**。我们把所有局部紧支撑集的微分形式记为$A_0^r(M)$

(2)对于一个光滑映射$f: M \to N$，我们可以在局部坐标(U, x_i)上定义相应的诱导映射为

$$f^*: A^r(N) \to A^r(M), \varphi|_U \mapsto (\varphi(v_1, ..., v_r) \mapsto \varphi(f_* v_1, ..., f_* v_r))$$

其中f_*是f诱导的切映射，此处我们讲微分形式看成一个切空间上的多重线性函数。对于自然嵌入$i: \partial M \to M$，可以得到自然的i^*，我们通常直接把$i^*\omega$视为相应的ω

(3)对于一个局部坐标(U, φ_i, x_i)和其上的微分形式(化简后的)$\omega = a\mathrm{d}x_1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x_m \in A_0^m(M), a \in C^\infty(U)$，我们规定它的**积分**是通常的m重实积分

$$\int_U \omega = \int_{\varphi(U)} (a\varphi^{-1}) \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_m$$

接着可以找M的一个开覆盖$(U_i,\varphi_i,x_i^j)_{i,j}$和一个微分形式$\omega\in A_0^m(M)$。由第二可数公理的条件，可以得到单位分解的性质通过$\omega=\sum_i h_i\omega,\sum_i h_i=1$实现转化，于是我们可以把$M$的积分视为每个部分的和

$$\int_M\omega=\sum_i\int_{\varphi_i(U_i)}((h_ia_i)\varphi^{-1})\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_m$$

对于其它的区间，只要变成子流形的情况就可以了。

实际上，我们只要一个开集上的积分就足够了，后面一些麻烦的东西都无所谓了，只为为了说明大区域的积分和流形粘合之间的关系，“与坐标无关”也需要证明，以后我们懒得指出这一点了，请读者自行去体会吧，对于流形上的一个开集$D\subset M$和一个微分形式$\omega=a\mathrm{d}x_1\wedge...\wedge\mathrm{d}x_m\in A_0^m(M)$，我们只需要找一个局部坐标$(U,\varphi,x_i)$满足$D\subset U$，如果没有的话，我们可以借助积分的线性性质，拆成几个符合条件的开集即可，这样积分的计算就是实积分的计算了

$$\int_D\omega=\int_{\varphi(D)}(a\varphi^{-1})\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_m$$

这其实就是定义的前半部分，总之我们只要知道计算的方法就行了，而形式化的各种东西看看就好，积分最重要的当然是下面的定理了。

定理 5.11 (Stokes**定理**): *设M是满足第二可数公理的可定向n维带边微分流形且$\omega\in A_0^{m-1}(M)$则有*

$$\int_M\mathrm{d}\omega=\int_{\partial M}\omega$$

虽然它是在整个流形上的但实际上，借助之前子流形的情况，我们只需要搞出一个带边区域就是一样的结果了。Stokes定理其实告诉我们，积分不断“下降”的性质，即高次的积分可以化为底次的积分来计算，到最底层就变成了Newton-Leibniz公式，从而变成线性代数中的加减乘除。我们还可以发现，这里定义的积分实际上是，传统多元微积分中的，曲线积分、曲面积分等等，而其中的多重积分只是一种计算手段，不被包括其中。这也说明了$\mathbb{R}^n$上的分析学算是流形研究的基础了。之前的张量场可以给出黎曼构造，实际上微分形式可以给出辛构造。

定义 5.12: *我们把微分流形M上的一个非退化的2次闭微分形式称为M上的一个**辛结构**。在M上选定一个辛结构ω后，我们把(M,ω)称为一个**辛流形**。*

所谓的辛几何就是研究辛流形的几何，不过这玩意我们视而不见就行了，它与我们的主线基本每啥关系。至此，我们算是把流形和流形上的微积分给介绍得差不多了。有关基础性理论，我们最后再讲一个与实际联系紧密的黎曼几何，实际上流形相关的课题很多，像研究奇点和指标的Morse理论，研究上同调群的Hodge理论，研究纤维丛的示性类理论，但笔者认为它们不属于框架内的东西，不应该放到简介中去，简介的目的是为了让读者对整个理论体系有个大概的把握，使得读者对一些基础性的术语不会过于陌生，这样我们才能更加深入的去认识各种具体的理论。

5.4 黎曼几何

在微分流形的通论中，除了黎曼流形，应该还有一个值得探究的东西，Lie群，即带有群结构并且群运算光滑的微分流形。但是典型的Lie群，都是像$GL_n(\mathbb{R})$之类的东西，读者想要看到

“几何”的感觉还是很困难的，再者我在上一部文章中稍微探究了一下，Lie群和Lie代数，所以再讲也没啥意思了，因此我们最后就只讲讲黎曼流形。我们稍微回忆一下，黎曼流形(M,g)的基本内容，接下来我们整节中都假设局部坐标是(U,φ,x^i)，并且只要不说明各种定义和性质均与“局部坐标选取无关”，在这里我们使用上指标只是为了能方便地进行爱因斯坦求和，并没有什么其它的意思，此时流形的切空间和余切空间的基分别是$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_i$和$\{\mathrm{d}x^i\}_i$，由于$g$是2阶协变张量，因此有分解$g|_U = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$。另外读者要注意，黎曼流形使用的是对称张量场，因此我们把张量积$\otimes$直接省略掉，这样与乘法的交换律就有类似的感受了，即$\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^i$。在另一个角度上，我们可以将$g$看成切空间上的双重线性函数，即$g: T(M)\times T(M)\to\mathbb{R}$，此时度量张量相当于一个基的变换，即有

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})$$

另外我们把指标上升的情况，简单定义成$g^{ij} = (g_{ji})^{-1}$，然后就是著名的Christoffel符号了

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}), \Gamma_{kij} = g_{kl}\Gamma^l_{ij}$$

这玩意在微分几何的时候就已经见过了，这里只是迁移到流形上，也没啥难的，借助我们就可以给出切向量场“导数”的概念了。

定义 5.13: 设(M,g)是n维黎曼流形

(1)对任一光滑切向量场$v\in TF(M)$，设它的局部分解是$v|_U = v_i\frac{\partial}{\partial x^i}, v_i\in C^\infty(U)$，我们定义

$$Dv|_U = (\frac{\partial v_i}{\partial x^k}+v_j\Gamma^i_{jk})\mathrm{d}x^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}$$

则Dv是一个光滑(1,1)型张量场，我们把它称为v的**协变微分**

(2)对任一切向量$X\in T_p(M)$，设它的局部分解是$X = X_i\frac{\partial}{\partial x^i}, X_i\in\mathbb{R}$，承接(1)的内容，我们定义

$$D_X v = X_i(\frac{\partial v_i}{\partial x^k}+v_j\Gamma^i_{jk})\frac{\partial}{\partial x^i}$$

则$D_X v$是一个光滑切向量场，我们把它称为v在p处沿X的**协变导数**。

请读者在阅读相关张量符号时，要时刻谨记爱因斯坦求和，比如在协变微分的定义中，前半部分要先对k求和，后半部分还要对i求和，其实如果引入简化符号就会变得更清晰，即

$$Dv_i = \mathrm{d}v_i + v_j\Gamma^i_{jk}\mathrm{d}x^k, Dv|_U = Dv_i\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}$$

其中的$\mathrm{d}v_i = \sum_k\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k$是全微分，我们的定义是合并以后的结果。而协变导数可以看成通常方向导数的具象化，它有大量简单的性质。

定理 5.12: 设(M,g)是n维黎曼流形，则$\forall X,Y,Z\in TF(M), f\in C^\infty(M), k\in\mathbb{R}$有

(1)$D_X(Y+Z) = D_XY + D_XZ, D_X(kY) = kD_XY$

(2)$D_X(fY) = X(f)Y + fD_XY$

(3)$D_{X+Y}Z = D_XZ + D_YZ$

(4)$D_{fX}Y = fD_XY$

(5)$X(g(Y,Z)) = g(D_XY,Z)+g(Y,D_XZ)$

(6)$D_XY-D_YX=[X,Y]$。

可以看到协变导数基本将流形上的各种运算给联系了起来，简单来说协变导数的上下两个指标似乎具有类似的地位，即我们可以看到$D:TF(M)\times TF(M)\to TF(M),(Y,X)\mapsto D_XY$，如果将这种性质泛化的话就是流形上“联络”的概念了。

定义 5.14: 设M是一个微分流形，如果存在一个映射$D:TF(M)\times TF(M)\to TF(M),(Y,X)\mapsto D_XY$满足

(1)$D_X(Y+Z)=D_XY+D_XZ,D_X(kY)=kD_XY$

(2)$D_X(fY)=X(f)Y+fD_XY$

(3)$D_{X+Y}Z=D_XZ+D_YZ$

(4)$D_{fX}Y=fD_XY$

就把D称为M上的一个**联络**。

显然黎曼流形的度量可以自然地得到一个联络，也就是说一个联络比一个黎曼构造弱一些，有些东西可以在联络上定义，我们就选择在联络上定义，这样黎曼流形就可以自然地得到这些定义了。

定义 5.15: 设D是微分流形M的一个联络

(1)对任意的$X,Y\in TF(M)$定义符号$T(X,Y)=D_XY-D_YX-[X,Y]$，则它给出映射$T:TF(M)\times TF(M)\to TF(M)$，即它是一个光滑(1,2)型张量场，我们把它称为$(M,D)$的**挠率张量场**

(2)如果D的挠率张量场恒为零，我们就称D是**无挠的**

(3)我们来定义联络对张量的作用，$D:TF_s^r(M)\times TF(M)\to TF_s^r(M),(\tau,X)\mapsto D_X\tau$，具体做法是先将$\tau\in TF_s^r(M)$视为一个(r+s)重线性映射$\tau:\underbrace{A^1(M)\times ...\times A^1(M)}_{r}\times\underbrace{TF(M)\times ...\times TF(M)}_{s}\to C^\infty(M)$，然后按照下面的方式计算

$$T:\tau(f_1,...,f_r,Y_1,...,Y_s)\mapsto X(\tau)-\sum_{i=1}^{r}\tau(...,D_Xf_i,...)-\sum_{i=1}^{s}\tau(...,D_XY_i,...)$$

(4)如果(M,g)是黎曼流形且满足$Dg=0$，则称D与g是**相容的**。

黎曼流形上虽然可能存在多种联络，但是如果我们将“相容”视为联络的等价的话，并且发现g诱导的联络是无挠的，那么黎曼流形上的联络就会变得确定起来，即有下面的核心定理。

定理 5.13: 黎曼流形(M,g)上，存在唯一一个与g相容的无挠联络D。此时我们把D称为M的**黎曼联络**或者**Levi-Civita联络**。

这个唯一的联络就是之前所给的协变微分算子，这样我们的黎曼流形就可以看成一个整体(M,g,D)了。有了上面的符号铺垫，我们差不多可以来定义流形上的一些特征量了，比如曲率之类的。

定义 5.16: 设(M,g,D)是黎曼流形

(1)对任意的$X,Y,Z\in TF(M)$定义符号$R(X,Y,Z)=D_XD_YZ-D_YD_XZ-D_{[X,Y]}Z$，则它给出映射$T:TF(M)\times TF(M)\times TF(M)\to TF(M)$，即它是一个光滑(1,3)型张量场，我们把它称为$M$的**曲率张量场**

(2)对任意的$X,Y,Z,W\in TF(M)$定义符号$R(X,Y,Z,W)=g(R(Z,W,X),Y)$，则它给出映射$T:TF(M)\times TF(M)\times TF(M)\times TF(M)\to C^\infty(M)$，即它是一个光滑(0,4)型张量场，我们把它称为$M$的**黎曼曲率张量场**。

很显然上面两个张量场是有一定关系的，一般在局部坐标下很容易发现这些性质，设曲率张量的分解为

$$R=R^l_{kij}\mathrm{d}x^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^l}\otimes\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j,R^l_{kij}=\frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j}+\Gamma^h_{kj}\Gamma^l_{hi}-\Gamma^h_{ki}\Gamma^l_{hj}$$

至于黎曼曲率张量的分量值可知直接计算得到

$$R_{klij}=R(\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l},\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})$$

随便地算算就可以发现度量张量给出了指标升降性质

$$R_{klij}=g_{lh}R^h_{kij},R^l_{kij}=g^{lh}R_{khij}$$

这些性质和微分几何中的基本都是一样的，只不过在流形上，我们把它变成了与坐标无关的场的性质。

定理 5.14: (1)$R(X,Y,Z,W)=-R(Y,X,Z,W)=-R(X,Y,W,Z)$

(2)$R(X,Y,Z,W)=R(Z,W,X,Y)$

(3)$R(X,Y,Z,W)+R(X,Z,W,Y)+R(X,W,Y,Z)=0$。

有了上面的一些基本内容和符号，我们来试着把活动标架给定义出来，在这里我们叫做**标架场**，它指的是一个切向量场集合$\{e_i\}\subset TF(M)$，并且满足下面性质

$$D_{e_j}e_i=\Gamma^k_{ij}e_k$$

这时，我们假设$\{e_i\}$在对偶空间的对应元素集为$\{\omega^i\}\subset TF^*(M)$，并记$\omega^k_i=\Gamma^k_{ij}\omega^j$，此时我们可以得到

$$De_i=\omega^k_ie_k$$

于是我们可以把ω^k_i称为一个**联络形式**。有关联络形式我们可以轻松地将其与挠率和曲率联系起来。

定理 5.15: 设D是微分流形M的一个联络，$\{e_i\}$是一个标架场。沿用上面符号

(1)记$\Omega^i=\mathrm{d}w^i-\omega^j\wedge\omega^i_j$，$T^i_{jk}$是挠率张量场$T$在$\{e_i\}$下的分量，则有

$$\Omega^i=\frac{1}{2}T^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k$$

此时我们把Ω^i称为$\{e_i\}$下的**挠率形式**，显然有$T|_U=e_i\otimes\Omega^i$

(2)D是无挠的当且仅当，$\mathrm{d}w^i = \omega^j \wedge \omega^i_j$

(3)设M是黎曼流形。记$\Omega^i_j = \mathrm{d}w^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k$，$R^i_{jkl}$是黎曼曲率张量场$R$在$\{e_i\}$下的分量，则有

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} \omega^k \wedge \omega^l$$

此时我们把Ω^i_j称为$\{e_i\}$下的**曲率形式**，显然有$R|_U = \omega^i \otimes e_i \otimes \Omega^i_j$。

到目前其实我们已经差不多把黎曼流形的基本内容给摸透了，黎曼流形是进行曲面上微积分的优秀舞台，像定义微分算子、解微分方程、研究相对论等等都是在黎曼流形上进行，由于满足第二可数公理的流形一定有一个黎曼构造，所以在很多书籍中对流形前提进行假设的时候都是“T_2可分+第二可数”。有关算子是一个比较有趣的课题，我们来稍微介绍一下从而作为本章的终结。我们来回忆一下张量的**缩并运算**为

$$C^r_s : V^p_q \to V^{p-1}_{q-1}, f \mapsto ((f^1, ..., f^{p-1}, x_1, ..., x_{q-1}) \mapsto \sum_i f(..., f^{r-1}, \delta^i, ..., x_{s-1}, \delta_i, ...))$$

简单来说就是消去相应位置的基后再进行求和，这时对任意的光滑切向量场$X \in TF(M)$，我们把

$$\mathrm{div} : TF(X) \to C^\infty(M), X \mapsto C^1_1(DX)$$

称为黎曼流形上的**散度算子**。对偶地，我们把

$$\triangledown : C^\infty(M) \to TF(X), f \mapsto g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

称为黎曼流形上的**梯度算子**。这时我们可以来一个拉回操作，即

$$\widetilde{\Delta} : C^\infty(M) \to C^\infty(M), f \mapsto \mathrm{div}(\triangledown f)$$

并把它称为黎曼流形上的**Beltrami-Laplace算子**。无聊的时候随便导两下就有

$$H : C^\infty(M) \to TF^0_2(M), f \mapsto D(\mathrm{d}f)$$

并把它称为黎曼流形上的**Hessian算子**。算子之类的东西，显然就是张量丛之间的各种有用的转化，大多时候它们都是拿来证明各种定理，或者解微分方程的，它的基础性理论应该是实变函数中的算子理论，我们在这里列举一下是希望读者能熟悉它们，因为在我们的主线证明中各种算子都是很常见的。最后我们再介绍一个微分形式中常用的霍奇星算子，首先我们要引入**广义Kronecker记号**

$$\delta^{i_1 \ldots i_q}_{j_1 \ldots j_q} = \begin{cases} 1 & i_1, ..., i_q\text{互不相同,且}j_1, ..., j_q\text{是}i_1, ..., i_q\text{的偶置换} \\ -1 & i_1, ..., i_q\text{互不相同,且}j_1, ..., j_q\text{是}i_1, ..., i_q\text{的奇置换} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

对一个微分形式$\omega = \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \ldots i_r} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \in A^r(M)$我们定义升指标运算为

$$\omega^{j_1...j_r}=\omega_{i_1...i_r}g^{i_1j_1}...g^{i_rj_r}$$

接着我们再记$G=\det(g_{ij})$，于是可以定义

$$*:A^r(M)\to A^{n-r}(M),\omega\mapsto\frac{\sqrt{G}}{(n-r)!r!}\delta^{1...n}_{i_1...i_n}\omega^{i_1...i_r}\mathrm{d}x^{i_{r+1}}\wedge...\wedge\mathrm{d}x^{i_n}$$

并把它称为n维黎曼流形上的**Hodge星算子**。通过这个算子我们可以得到更多的算子，我们把

$$\delta:A^r(M)\to A^{r-1}(M),=(-1)^{nr+n+1}*\mathrm{d}*$$

称为n维黎曼流形上的**余微分算子**。我们继续把

$$\Delta:A^r(M)\to A^r(M),=\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d}$$

称为n维黎曼流形上的**Hodge-Laplace算子**。这个算子才是我们在常规微积分里面的Laplace算子，于是我们可以自然地把满足$\Delta\omega=0$的微分形式ω称为**调和形式**。此时，我们可以得到一个著名的定理，它与霍奇猜想和霍奇理论有着密切的关系。

定理 5.16 (Hodge**定理**): *设M是n维可定向的紧黎曼流形，则deRham上同调群$H^r(M)$是有限维线性空间，且存在唯一的一个r次调和形式作为商群的代表元。*

实际上如果将算子一般化为椭圆算子，并在其上定义“指标”的概念，就可以得到著名的“Atiyah-Singer指标定理”，即“可定向的紧黎曼流形上的线性椭圆微分算子，其解析指标等于拓扑指标”。当然了，不带上“黎曼”两个字，直接说微分流形也可以，因为大多数的微分流形都默认了第二可数公理。好了，也没啥更多可以说的东西了，我们的“代数分析几何简介”就到此为止吧。

参考文献

[1] 逯晓零, 朗兰兹纲领简介, `https://lixing48.gitee.io/download/LanglandsProgram.pdf`, 2023.