Návrh robustního regulátoru $\mathcal{H}_\infty$ metodami 1

MRAL - Robustní řízení

Lukáš Pohl

30. března 2020

$\mathcal{H}_\infty$ Loopshaping

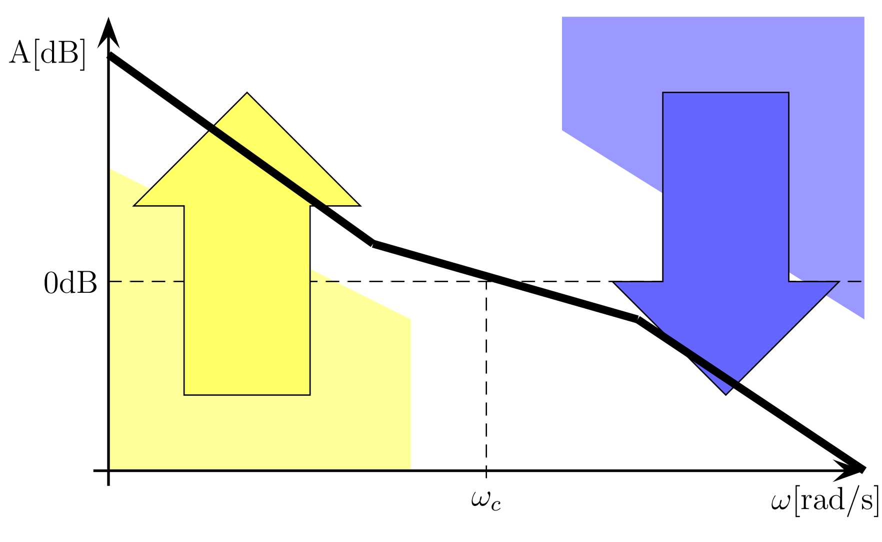
V tomto cvičení se budeme zabývat jednou z metod robustního řízení – $\mathcal{H}_\infty$ loopshaping. Tato metoda je založena na klasickém tvarování frekvenční charakteristiky v otevřené smyčce rozšířené o robustní stabilizaci výsledného přenosu [1]

Klasická metoda tvarování frekvenční charakteristiky

Jmenovatel přenosu (operátorového) $\frac{GK}{1+GK}$ vypovídající o stabilitě uzavřené smyčky se skládá pouze z přenosu otevřené smyčky rozšířeného o jedničku (jednotkovou matici u MIMO): $1 + L = 1 + GK$. Cíle tvarování frekvenční charakteristiky jsou obecně známé z předmětu BRR a zde budou zmíněny pouze klíčové body návrhu otevřené smyčky:

- Velké zesílení otevřené smyčky nízkých kmitočtech (potlačení poruchy na vstupu)
- Kmitočet řezu na co nejvyšší frekvenci protínající osu 0dB se sklonem -20dB/dek (stabilita, rychlost přechodného děje), amplitudová charakteristika musí protínat osu 0dB dříve než fázová charakteristika protne úhel 180°
- Malé zesílení otevřené smyčky na vysokých kmitočtech (potlačení VF šumu měření)

Takto navržený regulátor zaručuje více popsané vlastnosti pouze pro nominální hodnoty soustavy, v případě změn v soustavě může dojít k nestabilitě.



Obrázek 1: Tvar frekvenční charakteristiky otevřené smyčky

$\mathcal{H}_\infty$ Loopshaping

Oproti běžné metodě tvarování frekvenční charakteristiky tato metoda navíc řeší problém robustní stabilizace soustavy s normalizovanou nesoudělnou podílovou neurčitostí.

Nesoudělná podílová neurčitost

Matice M, N vyjadřující přenosy (nebo stavové funkce), které nemají nestabilní póly lze označit za nesoudělnou (levou) faktorizaci soustavy G pokud [3]:

(I) M je čtvercová matice s nenulovým determinantem

(II) Soustava je dána $G = M^{-1}N$

(III) Existují libovolné matice V a U tak, aby $MV + NU = I$

Minimální stavová realizace je dána:

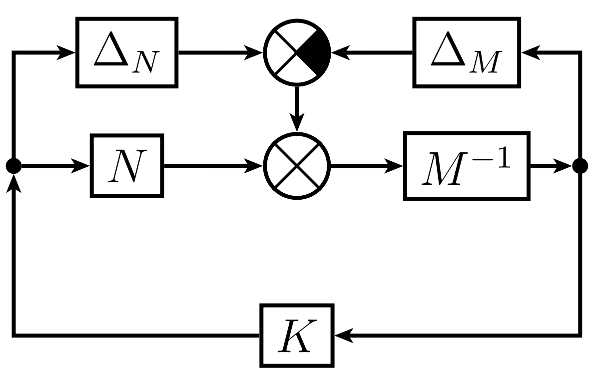
$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B =: \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{1}$$

Soustavu popsanou nesoudělnou faktorizací lze při použití stavového popisu získat řešením buď zobecněné Riccatiho rovnice pro řízení nebo pro filtr. Zobecněná algebraická Riccatiho rovnice pro filtr:

$$[MN] = \begin{bmatrix} A + HC & B + HD & H \\ R^{-1/2}C & R^{-1/2}D & R^{-1/2} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Kde $R = I + DD^T$ a $H = -(ZC^T + BD^T)R^{-1}$ existuje právě jedno nenulové řešení $Z \geq 0$.

Pokud dokážeme nominální soustavu rozložit na dva nesoudělné stabilní přenosy $G_0 = M^{-1}N$ je možné každý z těchto přenosů rozšířit o neurčitost kombinující aditivní a inverzní aditivní neurčitosti v soustavě. Získáme tak následující regulační strukturu:



Obrázek 2: Regulační smyčka s nesoudělnou podílovou neurčitostí

$$G_\Delta = (M + \Delta_M)^{-1}(N + \Delta_N) \tag{3}$$

Pro tuto strukturu je dáno, že pokud je G, K vnitřně stabilní lze zásobu stability v modulu vypočítat jako:

$$\left\| \begin{bmatrix} K(I-GK)^{-1}M^{-1} \\ (I-GK)M^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty \le \epsilon^{-1} \tag{4}$$

Tento problém lze vyjádřit pomocí LMI (lineárních maticových nerovností) což je konvexní problém u kterého lze spočítat globální minimum. Řešením tohoto problému zjistíme maximální dosažitelnou hodnotu zásoby stability ϵ (minimální hodnotu $\gamma = 1/\epsilon$).

$$\gamma_0 = (1 - \left\| \begin{bmatrix} N & M \end{bmatrix} \right\|_H^2)^{-1/2} \tag{5}$$

H označuje tzv. Hankelovu normu [3].

Pro výpočet regulátoru zajišťujícího maximální hodnotu zásoby stability v modulu ($\gamma = \gamma_0$) se použije řešení problému Hankelovy aproximace uvedené v [4]:

$$K = \begin{bmatrix} -L^T s + L^T(A+BF) + \gamma^2 ZC^T(C+DF) & \gamma^2 ZC^T \\ B^T X & -D^T \end{bmatrix} \tag{6}$$

Kde $L = (1-\gamma^2)I + XZ$ a $F = S^{-1}(D^T C + B^T X)$. Výhodou tohoto řešení je, že se nejedná o iterativní výpočet.

Zadání cvičení

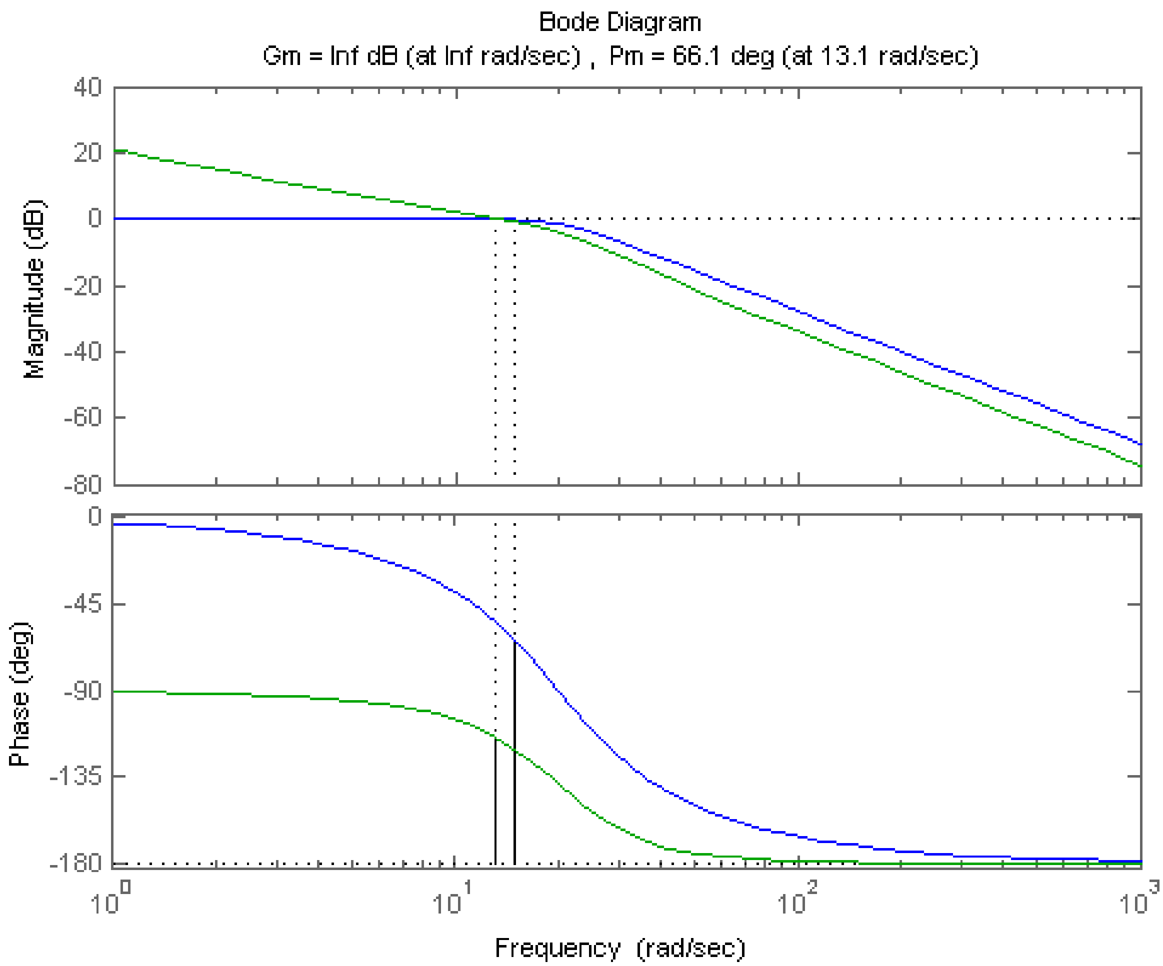
Úkol 1

Pomocí programu Matlab vytvořte robustní regulátor metodou $\mathcal{H}_\infty$ Loopshaping. Nominální hodnota soustavy je:

$$G = \frac{1}{0.0025p^2 + 0.06p + 1} \tag{7}$$

Jedná se o kmitavou soustavu druhého řádu s koeficientem tlumení $\xi = 0.6$ a časovou konstantou T = 0.05s.

Krok 1 - Výběr pre a post kompenzátorů Příkazem $sisotool(G)$ otevřete nástroj pro návrh regulátorů (kompenzátorů). V našem případě navrhujeme pouze kompenzátor W_1, W_2 volíme jako $W_2 = 1$. Tvar regulátoru je libovolný je doporučeno aby obsahoval integrátor jelikož soustava samotná integrátor neobsahuje (nulová ustálená odchylka). Jeden z odzkoušených tvarů kompenzátorů je $W_1 = \frac{K(1+T_k p)}{p}$.

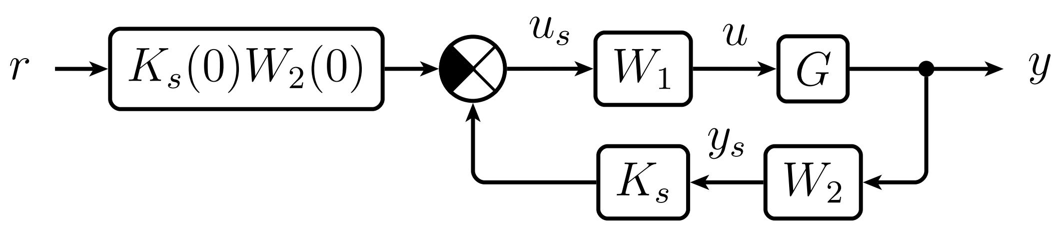


Obrázek 3: Frekvenční charakteristika soustavy (modrá) a otevřené smyčky (zelená)

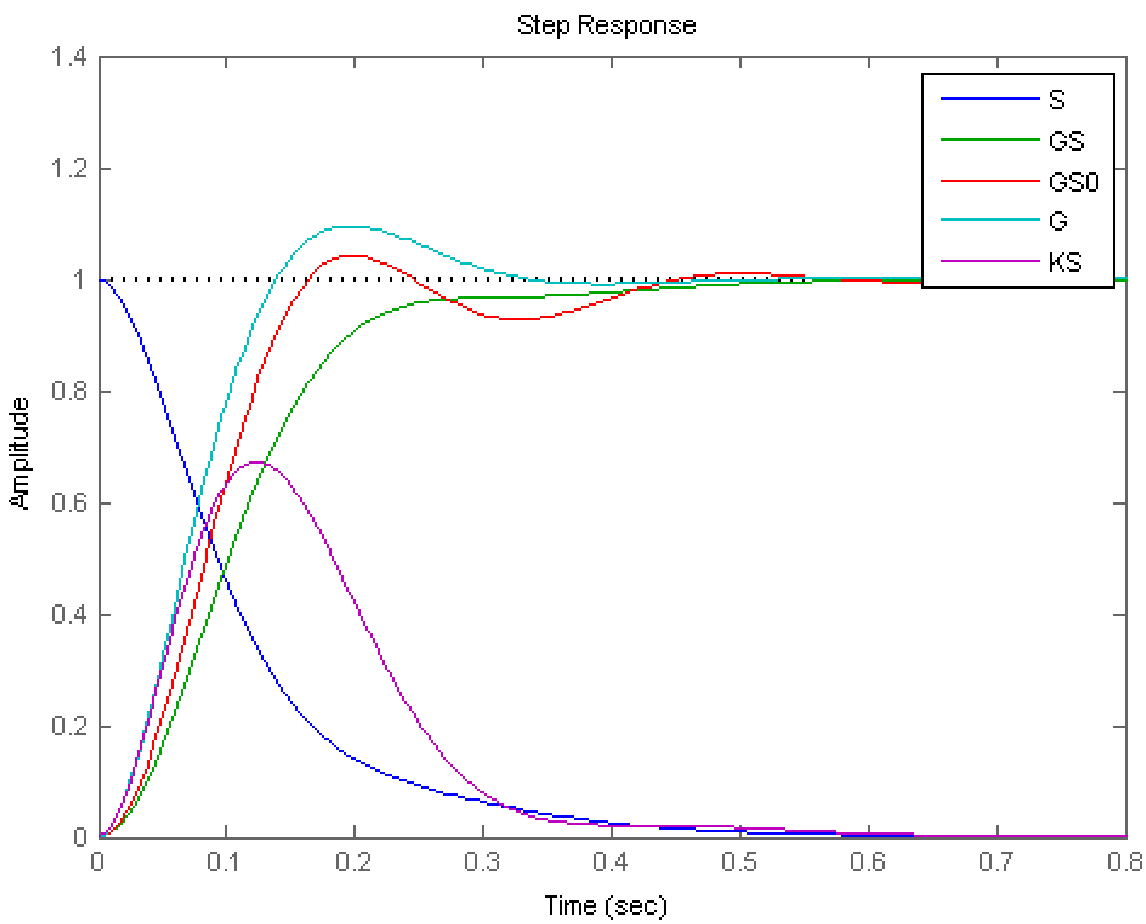
Krok 2 - Robustní stabilizace soustavy $G_s = W_1 G W_2$ Příkazem ncfsyn s parametry G a W1 zavoláte funkci pro syntézu regulátoru pro soustavu v nesoudělném normalizovaném podílovém tvaru. Tato funkce robustně stabilizuje soustavu v nesoudělném normalizovaném podílovém tvaru se zásobou stability v modulu $\epsilon = 1/\gamma$. Funkce vrací dosaženou hodnotu γ a stavové popisy regulátoru $K = W_1 K_s W_2$ a uzavřené smyčky CL.

Krok 3 - Implementace regulátoru Konečný tvar regulační smyčky je zobrazen na obrázku 4. Toto zapojení je kombinací $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru s kompenzátory W_1 a W_2 tak, že $K_{final} = W_1 K_s W_2$. Tento způsob zapojení je zvolen z důvodu filtrace žádané hodnoty přes kompenzátor W_1, omezí se tak rázy akčního zásahu vstupující do soustavy. Nevýhodou tohoto zapojení je nutnost "předzesílení" žádané hodnoty statickým zesílením - teprve pak dosáhneme nenulové ustálené odchylky. [3]

$$K_s(0) W_2(0) = \lim_{s \to 0} K_s(s) W_2(s) \tag{8}$$



Obrázek 4: Zapojení regulátoru



Obrázek 5: Výsledné odezvy

Za použití poskytnuté šablony vykreslete všechny průběhy zobrazené na obrázku 5, v případě neúspěchu opakujte postup od bodu návrhu kompenzátorů.

Úkol 2

Aplikujte stejný postup na soustavu z minulého cvičení (kmitavá soustava s neurčitostí). Opět je k dispozici pomůcka.

Reference

[1] McFarlane, D.; Glover, K.; , "A loop-shaping design procedure using $\mathcal{H}_\infty$ synthesis ,"Automatic Control, IEEE Transactions on , vol.37, no.6, pp.759-769, Jun 1992

[2] BOTURA, C. P., NETO, M. F. S., FILHO, S. A. A.: Robust Speed Control of an Induction Motor: An $\mathcal{H}_\infty$ Control Theory Approach with Field Orientation and μ-Analysis, IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 15, No. 5, September 2000.

[3] Gu, Da-Wei, Petkov, Petko Hr., Konstantinov, Mihail M., Robust Control Design with MATLAB. 2005.

[4] K. Glover. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their $\mathcal{L}_\infty$ error bounds. International Journal of Control, 39:1115– 1193, 1984.