**数学问题**

**①加法原理②乘法原理③容斥原理④抽屉原理⑤排列组合⑥数字进制与转换**

**一、加法原理：做一件事，完成它可以有n类办法，在第一类办法中有m1种不同的方法，在第二类办法中有m2种不同的方法，……，在第n类办法中有mn种不同的方法，那么完成这件事共有N=m1+m2+m3+…+mn种不同方法。**

**二、乘法原理：做一件事，完成它需要分成n个步骤，做第一 步有m1种不同的方法，做第二步有m2种不同的方法，……，做第n步有mn种不同的方法。那么完成这件事共有 N=m1×m2×m3×…×mn 种不同的方法。**

**（2019CSP-J）**7. 把8个同样的球放在5个同样的袋子里，允许有的袋子空着不放，问共有多少种不同的分法？（）提示:如果8个球都放在一个袋子里，无论是哪个袋子，都只算同一种分法

A .22 B .24 C .18 D .20

**（2019CSP-J）**13. —些数字可以颠倒过来看，例如0、1、8颠倒过来还是本身，6颠倒过来是9, 9颠倒过来看还6,其他数字颠倒过来都不构成数字。类似的，一些多位数也可以颠倒过来看，比如106颠倒过来是901。假设某个城市的车牌只由5位数字组成，每一位都可以取0到9。请问这个城市最多有多少个车牌倒过来怡好还是原来的车牌？（）

A .60 B .125 C .75 D .100

**（2019CSP-S）**9. 一些数字可以颠倒过来看，例如0、1、8颠倒过来看还是本身，6颠倒过来是9，9颠倒过来看还是6，其他数字颠倒过来都不构成数字。类似的，一些多位数也可以颠倒过来看，比如106颠倒过来是901。假设某个城市的车牌只有5位数字，每一位都可以取0到9。请问这个城市有多少个车牌倒过来恰好还是原来的车牌，并且车牌上的5位数能被3整除？（ ）

A.40 B.25 C.30 D.20

**三、容斥原理指把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来，然后再把计数时重复计算的数目排斥出去，使得计算的结果既无遗漏又无重复，这种计数的方法称为容斥原理。**

**容斥原理1、如果被计数的事物有A、B两类，那么，A类B类元素个数总和= 属于A类元素个数+ 属于B类元素个数—既是A类又是B类的元素个数。（A∪B = A+B - A∩B)**

例：五（一）班的学生每人都至少喜欢吃西瓜或樱桃中的一种，喜欢吃西瓜的有25人，喜

欢吃樱桃的有20人，西瓜和樱桃都喜欢的有10人。那么五（一）班共有多少人？

25+20-10=35

**容斥原理2、如果被计数的事物有A、B、C三类，那么，A类和B类和C类元素个数总和= A类元素个数+ B类元素个数+C类元素个数—既是A类又是B类的元素个数—既是A类又是C类的元素个数—既是B类又是C类的元素个数+既是A类又是B类而且是C类的元素个数。（A∪B∪C = A+B+C - A∩B - B∩C - C∩A + A∩B∩C）**

例：某校六⑴班有学生45人，每人在暑假里都参加体育训练队，其中参加足球队的有25人，参加排球队的有22人，参加游泳队的有24人，足球、排球都参加的有12人，足球、游泳都参加的有9人，排球、游泳都参加的有8人，问：三项都参加的有多少人？

分析：参加足球队的人数25人为A类元素，参加排球队人数22人为B类元素，参加游泳队的人数24人为C类元素，既是A类又是B类的为足球排球都参加的12人，既是B类又C类的为足球游泳都参加的9人，既是C类又是A类的为排球游泳都参加的8人，三项都参加的是A类B类C类的总和设为X。注意：这个题说的每人都参加了体育训练队，所以这个班的总人数即为A类B类和C类的总和。

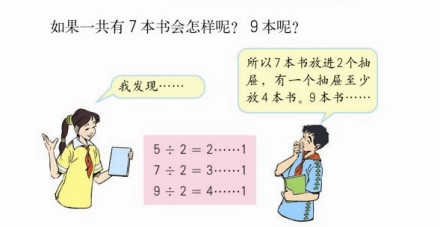
答案：25+22+24-12-9-8+X=45

解得X=3

**（2019CSP-S）**10. 一次期末考试，某班有15人数学得满分，有12人语文得满分，并且有4人语、数都是满分，那么这个班至少有一门得满分的同学有多少人？（ ）

A.23 B.21 C.20 D.22

**四、抽屉原理**



**第一抽屉原理**

**原理1： 把多于n个的物体放到n个抽屉里，则至少有一个抽屉里的东西不少于两件。**

**原理2：把多于mn(m乘n)+1（n不为0）个的物体放到n个抽屉里，则至少有一个抽屉里有不少于（m+1）的物体。**

**原理3：把无数还多件物体放入n个抽屉，则至少有一个抽屉里有无数个物体。**

**第二抽屉原理**

**把（mn－1）个物体放入n个抽屉中，其中必有一个抽屉中至多有（m—1）个物体**

**构造抽屉的方法**

**运用抽屉原理的核心是分析清楚问题中，哪个是物件，哪个是抽屉。例如，属相是有12个，那么任意37个人中，至少有一个属相是不少于4个人。这时将属相看成12个抽屉，则一个抽屉中有 37/12，即3余1，余数不考虑，而向上考虑取整数，所以这里是3+1=4个人，但这里需要注意的是，前面的余数1和这里加上的1是不一样的 。**

**因此，在问题中，较多的一方就是物件，较少的一方就是抽屉，比如上述问题中的属相12个，就是对应抽屉，37个人就是对应物件，因为37相对12多。**

**最差原则**

**最差原则，即考虑所有可能情况中，最不利于某件事情发生的情况。**

**例如，有300人到招聘会求职，其中软件设计有100人，市场营销有80人，财务管理有70人，人力资源管理有50人。那么至少有多少人找到工作才能保证一定有70人找的工作专业相同呢？**

**此时我们考虑的最差情况为：软件设计、市场营销和财务管理各录取69人，人力资源管理的50人全部录取，则此时再录取1人就能保证有70人找到的工作专业相同。因此至少需要69\*3+50+1=258人。**

**根据第一抽屉原理之原理2推导：mn+1个人的时候必有m+1个人找到的工作专业相同，所以是要求出mn+1的人数，已知n=3，m+1=70。考虑到人力资源专业只有50人，得出mn+1=(69\*3+50)+1=258人。**

**抽屉原理的一种更一般的表述为：**

**“把多于kn+1个东西任意分放进n个空抽屉（k是正整数），那么一定有一个抽屉中放进了至少k+1个东西。”**

**利用上述原理容易证明：“任意7个整数中，至少有3个数的两两之差是3的倍数。”因为任一整数除以3时余数只有0、1、2三种可能，所以7个整数中至少有3个数除以3所得余数相同，即它们两两之差是3的倍数。**

**用高斯函数来叙述一般形式的抽屉原理的是：将m个元素放入n个抽屉，则在其中一个抽屉里至少会有[(m-1)/n]+1个元素。**

**（2019CSP-J）**12. 一副纸牌除掉大小王有52张牌，四种花色，每种花色13张。假设从这52张牌中随机抽取13张纸牌，则至少( )张牌的花色一致。

A .4 B .2 C .3 D .5

**五、排列和组合**

**排列是指从给定个数的元素中取出指定个数的元素进行排序。**

**组合则是指从给定个数的元素中仅仅取出指定个数的元素，不考虑排序。‌**

**‌定义问题‌：从n个不同元素中取出m个元素进行排列。**

**‌分步乘法计数原理‌：将问题分解为若干个步骤，每个步骤都有确定的选择方式。**

**‌逐步推导‌：**

**第一步：从n个元素中选择第1个元素，有n种选择。**

**第二步：从剩下的n-1个元素中选择第2个元素，有n-1种选择。**

**第三步：从剩下的n-2个元素中选择第3个元素，有n-2种选择。**

**…以此类推，**

**第m步：从剩下的n-m+1个元素中选择第m个元素，有n-m+1种选择。**

**公式‌：排列数公式为A上标m下标n = n(n-1)(n-2)...\*(n-m+1) = n! / (n-m)!，其中n!表示n的阶乘，即n × (n-1) × (n-2) × ... × 1。**

**排列的公式表示为**

**其中n表示元素的总数，m表示取出的元素个数。**

**组合公式与排列公式的关系在于，组合是无序的，而排列是有序的。因此，排列数需要除以m个元素的全排列数m!。**

**组合的公式表示为**

**其中n表示元素的总数，m表示取出的元素个数。**‌

**（2019CSP-S）**6.由数字1，1，2，4，8，8所组成的不同的4位数的个数是（ ）

A.104 B.102 C.98 D.100

**（2021CSP-J）**12.由 1，1，2，2，3 这五个数字组成不同的三位数有（ ）种。

A. 18 B. 15 C. 12 D. 24

（2023CSP-S）2. 0,1,2,3,4 中选取4个数字，能组成个不同四位数。(注: 最小的四位数是 1000最大的四位数是9999)

A.96 B.18 C.120 D.84

**（2020CSP-J）**10.5个小朋友并排站成一列，其中有两个小朋友是双胞胎，如果要求这两个双胞胎必须相邻，则有 ( ) 种不同排列方法?

A. 48 B. 36 C. 24 D. 72

**（2020CSP-J）**14. 10 个三好学生名额分配到 7 个班级，每个班级至少有一个名额，一共有 ( ) 种不同的分配方案；

A. 84 B. 72 C. 56 D. 504

**（2020CSP-J）**15.有五副不同颜色的手套 (共10只手套，每副手套左右手各1只 ) ，一次性从中取6只手套，请问恰好能配成两副手套的不同取法有 ( ) 种；

A. 120 B. 180 C. 150 D. 30

**（2020CSP-S）13.** 从一个4×4的棋盘中选取不在同一行也不在同一列上的两个方格，共有( )

种方法。

A.60 B.72 C.86 D.64

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | **4** |
| 5 | 6 | 7 | **8** |
| 9 | 10 | 11 | **12** |
| 13 | 14 | 15 | **16** |

**（2021CSP-J）**10.6个人，两个人组一队，总共组成三队，不区分队伍的编号。不同的组队情况有（ ）种。

A.10 B. 15 C. 30 D. 20

**（2021CSP-S）**13、有 8 个苹果从左到右排成一排，你要从中挑选至少一个苹果，并且不能同时挑选相邻的两个苹果，一共有（ ）种方案。

A. 36 B. 48 C. 54 D. 64

**（2022CSP-S）**10 . 共有8人选修了程序设计课程，期末大作业要求由2人组成的团队完成 。假设不区分每个团队内2人的角色和作用，请问共有多少种可能的组队方案()。

A.28 B.32 C.56 D.64

**（2022CSP-S）**11.小明希望选到形如“省A·◇◇DDD ”的车牌号。车牌号在“· ”之前的内容固定不 变；后 面的 5 位 号 码中， 前 2 位 必 须 是 大 写 英 文 字 母 ， 后 3 位 必 须 是 阿 拉伯数字(◇◇代表A至Z,DD表示0至9 ,两个◇和 三个DD之间可能相同也可 能 不 同) 。 请 问总共有 多少个可供选择的车牌号 ()。

A.20280 B.52000 C.676000 D.1757600

**（2023CSP-J）**6.小明在某一天中依次有七个空闲时间段，他想要选出至少一个空闲时间段来练习唱歌，但他希望任意两个练习的时间段之间都有至少两个空闲的时间段让他休息。则小明一共有（）种选择时间段的方案。

A.31 B.18 C.21 D.33

**（2023CSP-J）**14.一个班级有10个男生和12个女生。如果要选出一个3人的小组，并且小组中必须至少包含1个女生，那么有多少种可能的组合?()

 A. 1420  B. 1770  C. 1540  D. 2200

1. **数字进制与转换**

**数字进制**

‌‌数字进制‌是一种进位计数制，是人为定义的带进位的计数方法。对于任何一种进制X进制，表示每一位上的数运算时都是逢X进一位。常见的进制包括‌十进制、‌二进制、‌八进制和‌十六进制。

**进制的定义和特点**

**‌十进制‌：**以0-9这九个数字组成，逢十进一。

**‌二进制‌：**由0和1两个数字组成，逢二进一。

**‌八进制‌：**由0-7数字组成，不存在8和9，逢八进一。

**‌十六进制‌：**由0-9和A-F组成，A-F对应的是10-15，逢十六进一。

**进制转换方法**

1、‌十进制转二进制‌：通过除2取余法，直到商为0为止，然后将余数逆序排列。

2、‌十进制转八进制‌：通过除8取余法，直到商为0为止，然后将余数逆序排列，不足三位时在前面补0。

3、‌十进制转十六进制‌：通过除16取余法，直到商为0为止，然后将余数逆序排列，不足四位时在前面补0。

**（2021CSP-J）**3.目前主流的计算机储存数据最终都是转换成（ ）数据进行储存。

A. 二进制 B. 十进制 C. 八进制 D. 十六进制

**（2019CSP-J）**3.二进制数11 1011 1001 0111 和 01 0110 1110 1011 进行逻辑或运算的结果是（ ）

A.11 1111 1101 1111 B.11 1111 1111 1101

C.10 1111 1111 1111 D.11 1111 1111 1111

**（2019CSP-S）**3.二进制数11 1011 1001 0111 和 01 0110 1110 1011 进行逻辑或运算的结果是（ ）

A.11 1111 1101 1111 B.11 1111 1111 1101

C.10 1111 1111 1111 D.11 1111 1111 1111

**（2020CSP-J）**9.二进制数 1011 转换成十进制数是 ( ) ；

A. 11 B. 10 C. 13 D. 12

**（2020CSP-S）1.**请选出以下最大的数 ( )

A. (550)10 B. (777)8 C. 210 D. (22F)16

**（2021CSP-J）**7.二进制数 101.11 对应的十进制数是（ ）。

A. 6.5 B. 5.5 C. 5.75 D. 5.25

**（2021CSP-S）**2、二进制数001010102和000101102的和为（ ）。

A. 001111002 B. 010000002 C. 001111002 D. 010000102

**（2022CSP-J）**13.八进制数 32.1 对应的十进制数是（ ）。

A. 24.125 B. 24.250 C. 26.125 D. 26.250

**（2023CSP-J）**2.八进制数(12345670)8和(07654321)8 的和为？

A.222222218 B.211111118 C.221111118 D.222222118

**（2023CSP-J）**9.数1010102和1668的和为？

A.(10110000)2 B.(236)8 C.(158)10 D.(A0)16

**（2019CSP-J）**9. 100以内最大的素数是（）

A .89 B . 97 C .91 D .93

**（2019CSP-J）**10. 319 和 377的最大公约数是（）

A .27 B .33 C .29 D .31

**（2019CSP-J）**11. 新学期开学了，小胖想减肥，健身教练给小胖制定了两个训练方案。方案一每次连续跑3公里可以消耗300千卡(耗时半小时);方案二每次连续跑5公里可以消耗600干卡(耗时1小时)。小胖每周周一到周四能抽出半小时跑步，周五到周日能抽出一小时跑步。另外，教练建议小胖每周最多跑21公里，否则会损伤膝盖。请问如果小胖想严格执行教练的训练方案，并且不想损伤膝盖，每周最多通过跑步消耗多少千卡？（）

A .3000 B .2500 C .2400 D .2520

**（2020CSP-J）**3.设 x=true, y=true, z=false，以下逻辑运算表达式值为真的是 ( ) ；

A. (y∨z)∧x∧z B. x∧(z∨y) ∧z C. (x∧y) ∧z D. (x∧y)∨(z∨x)

**（2020CSP-J）**13.干支纪年法是中国传统的纪年方法，由10个天干和12个地支组合成60个天干地支；由公历年份可以根据以下公式和表格换算出对应的天干地支；

天干 = (公历年份 ) 除以10所得余数

地支 = (公历年份 ) 除以12所得余数



例如，今年是 2020 年，2020 除以 10 余数为 0，查表为"庚”；2020 除以 12，余数为 4，查表为“子” 所以今年是庚子年；

请问 1949 年的天干地支是 ( )

A. 己酉 B. 己亥 C. 己丑 D. 己卯

**（2020CSP-S）**10.一个班学生分组做游戏，如果每组三人就多两人，每组五人就多三人，每组七人就多四

人，问这个班的学生人数n 在以下哪个区间?已知n<60。( )。

A.30<n<40 B.40<n<50 C.50<n<60 D.20<n<30

**（2020CSP-S）11.**小 明想通过走楼梯来锻炼身体 ，假设从第 1层走到第**2**层消耗 **10**卡热量 ，接着从第2层走到 第 3 层消 耗 2 0卡 热 量 ，再从第**3** 层走到第层消耗**30**卡热量，依此类推，从第k层走到第k+1层消耗10k卡热 量(k>1)。如果小明想从 1层开始 ，通过连续 向上爬楼梯消耗1000卡热量 ，**至少**要爬到第几层 楼 ? ( )。

A. 4 B.16 C.15 D.13

**（2021CSP-J）**15.有四个人要从 A 点坐一条船过河到 B 点，船一开始在 A 点。该船一次最多可坐两个人。已知这四个人中每个人独自坐船的过河时间分别为 1, 2, 4, 8, 且两个人坐船的过河时间为两人独自过河时间的较大者。则最短（ ）时间可以让四个人都过河到 B 点（包括从 B 点把船开回 A 点的时间）。

A. 14 B. 15 C. 16 D. 17

**（2021CSP-S）**14、设一个三位数n=abc，a,b,c 均为1～9之间的整数，若以a,b,c作为三角形的三条边可以构成等腰三角形（包括等边），则这样的n有（ ）个。

A. 81 B. 120 C. 165 D. 216

**（2023CSP-S）**4.假设有n 根柱子，需要按照以下规则依次放置编号为 1,2,3..的圆柱:每根柱子的底部固定，顶部可以放入圆环:每次从柱子顶部放入圆环时，需要保证任何两个相邻圆环的编号之和是一个完全平方数。请计算当有 4个根子时，最多可以放置个圆环。

A.7 B.9 C.11 D.5

**（2023CSP-S）**8.一位玩家正在玩一个特殊的掷骰子的游戏，游戏要求连续掷两次骰子，收益规则如下: 玩家第一次掷出x点，得到2x元第二次掷出y点，当y=x 时玩家会失去之前的得到2x元。而当y≠x 时玩家能保住第一次获得的2x元。上述x,y∈{1，2，3，4，5，6}。例如: 玩家第一次掷出3点得到6元后，但第二次再次掷出3点,会失去之前得到的6元，玩家最终受益为0元:如果玩家第一次掷出3 点，第二次掷出4点，则最终受益是6元。假设骰子挑出任意一点的概率为 1/6，玩家连续掷两次骰子后，所有可能情形下收益的平均值是多少?

A.7元 B35/6元C.16/3元 D.19/3元

29. 10000以内，与10000互质的正整数有( )个。

A. 2000 B. 4000 C. 6000 D. 8000

【2019CSP-S】14.有一个等比数列，共有奇数项，其中第一项和最后一项分别是2和118098，中间一项是486，请问一下哪个数是可能的公比？（ ）

A.5 B.3 C.4 D.2

【2019CSP-S】15.有正实数构成的数字三角形排列形式如图所示。第一行的数为a2,1，a2,2，第n行的数为an,1，an,2，…，an,n。从a1,1开始，每一行的数ai,j只有两条边可以分别通向下一行的两个数ai+1,j和ai+1,j+1。用动态规划算法找出一条从a1,1向下通道an,1，an,2，…，an,n中某个数的路径，使得该路径上的数之和最大。

令C[i][j]是从a1,1到ai,j的路径上的数的最大和，并且C[i][0]=C[0][j]=0，则C[i][j]=（ ）

A.max{C[i-1][j-1],C[i-1][j]}+ai,j

B.C[i-1][j-1]+C[i-1][j]

C.max{C[i-1][j-1],c[i-1][j]}+1

D.max{C[i][j-1],C[i-1][j]}+ai,j

