最优化大作业一

15091082 傅锡豪

2017 年 10 月 7 日

目录

1 问题重述

流量工程问题是讨论在一个网络中如何通过调节流量分发，使得网络“性能”达到最优的问题。
在处理这种问题时，通常将问题转化为多商品流问题。多商品流问题考虑一个有向图 $\mathscr{G}=(\mathscr{N},\mathscr{E})$，其中 $\mathscr{N}$ 是节点集合，$\mathscr{E}$ 是弧的集合，并记 N 和 E 分别为节点数目和弧的数目。每条弧用一个有序节点对 $l=(i,j)$ 来表示，且有容量 c_l，代表每条弧负载的上界。同时，有若干个源 - 目的对（(s_m,t_m)）及其需求的流量（d_m），表示 d_m 单位的流量从 s_m 节点流入网络，然后在 t_m 节点流出网络。
通过以上的模型就可以得到图的容量约束（即满足通过每条弧的流量不超过负载）和流平衡约束（即实现流量从源流向目的）。
最优流量工程即是在路由方式按照多商品流的约束下，使得成本函数（目标函数）取得极小值的解来路由流量。
换句话说，该问题要求得到可行的流量分配机制（即在满足通过每条弧的流量不超过负载且不为负数的同时，实现流量从源流向目的），然后在可行解中，以某种成本为目标函数，并将问题转化为最小化目标函数的问题。

2 问题表述转化

以下将上述问题化为一个规划问题。

2.1 约束条件

对于每一个源 - 目的对，可以看作一个商品流；记沿着弧 l 的商品流 m 为 f_{ml}，沿着弧 l 的所有商品流的总和（负载）为 f_l，即可得到以下的约束条件((1),(2) 分别称为**容量约束**和**流平衡约束**)：

$$(1)\ f_l=\Sigma^M\le c_l,\forall l\in\mathscr{E}$$
$$(2)\ \Sigma_{(i,j)\in\mathscr{E}}f_{ml}-\Sigma_{(j,i)\in\mathscr{E}}f_{ml}=b_{mi},m=1,...,M,\forall i\in\mathscr{N}$$
$$(3)\ f_{ml}\ge 0,m=1,...,M,\forall l\in\mathscr{E}$$

引入点弧关联矩阵 A，

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -1 & 0 & \cdots & -1\end{bmatrix}$$

其中矩阵的每一列表示该网络的每一条弧；每一列中数字 1 代表该行序号对应的节点为起始节点，- 1 代表该行序号对应的节点为终点。

通过使用该矩阵，将上述流平衡约束化为以下形式：

$$\boldsymbol{Af_m = b_m}, m = 1, ..., M \quad \boldsymbol{f_m} = (f_{m1}, ..., f_{mE})^T$$

对于这样的问题，一般就弧上的负载来评价不同的方案，即该问题的目标函数通常是某个弧的费用函数（记为 $\phi(f)$）。故多商品流问题可以写为如下形式：

$$\begin{aligned} &minimize && \phi(\boldsymbol{f, c}) \\ &subject\ to && \boldsymbol{f = \Sigma_{m=1}^{M} f_m} \\ & && f_l = \Sigma_{m=1}^{M} f_{ml} \leq c_l, \forall l \in \mathscr{E} \\ & && \boldsymbol{Af_m = b_m}, \boldsymbol{f_m} \geq \boldsymbol{0}, m = 1, ..., M \end{aligned}$$

2.2 目标函数

在实际应用中，有两种常用的目标函数，分别是最大弧利用率（MAU）和 M/M/1 延迟公式（FT 成本函数）的逐断线性近似。
上述的两种目标函数都是分片光滑，整体上不是光滑的，但可以使用一些技巧将问题转化为线性规划问题。

2.2.1 极小化 MAU

MAU 的形式如下：

$$\phi(f) = \max_{l \in \mathscr{E}} f_l / c_l$$

MAU 刻画了弧的利用率。通过最小化 MAU 可以让弧的利用率达到最大。
该函数是非光滑的函数，可以通过以下途径将问题转化为线性规划问题：
令 $z = \max\limits_{l \in \mathscr{E}} f_l / c_l$，故问题可化为以下线性规划问题：

$$\begin{aligned} &minimize && z \\ &subject\ to && \Sigma_{m=1}^{M} \tfrac{1}{c_l} f_{ml} - z \leq 0, \forall l \in \mathscr{E} \\ & && f_l = \Sigma_{m=1}^{M} f_{ml} \leq c_l, \forall l \in \mathscr{E} \\ & && \boldsymbol{Af_m = b_m}, \boldsymbol{f_m} \geq \boldsymbol{0}, m = 1, ..., M \end{aligned}$$

2.2.2 极小化 FT

FT 成本函数的形式如下：$\Phi(f) = \Sigma_{l\in\mathscr{E}}\phi(f_l)$，其中

$$\phi(f_l) = \begin{cases} f_l, & \frac{f_l}{c_l} \leq \frac{1}{3} \\ 3f_l - \frac{2}{3}c_l, & \frac{1}{3} < \frac{f_l}{c_l} \leq \frac{2}{3} \\ 10f_l - \frac{16}{3}c_l, & \frac{2}{3} < \frac{f_l}{c_l} \leq \frac{9}{10} \\ 70f_l - \frac{178}{3}c_l, & \frac{9}{10} < \frac{f_l}{c_l} \leq 1 \\ 500f_l - \frac{1468}{3}c_l, & 1 < \frac{f_l}{c_l} \leq \frac{11}{10} \\ 5000f_l - \frac{16318}{3}c_l, & \frac{11}{10} < \frac{f_l}{c_l} < \infty \end{cases}$$

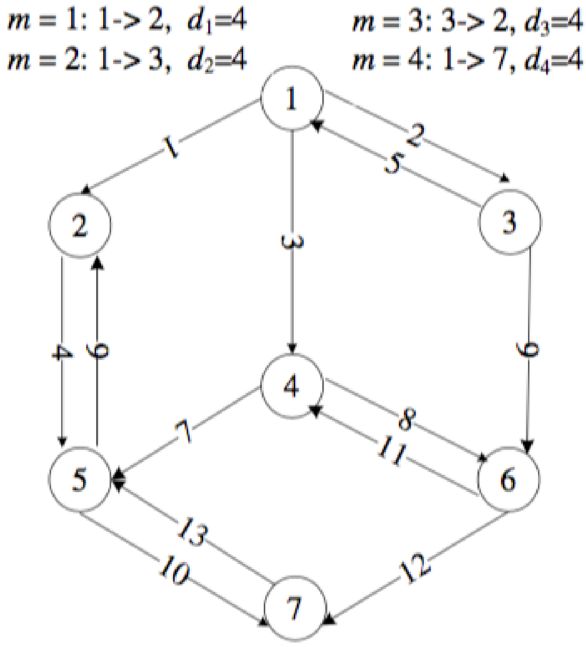
该函数是非光滑的函数，可以通过以下途径将问题转化为线性规划问题：
令 $z_l = \phi(f_l)$，故原问题可以化为如下线性规划问题：

$$\begin{aligned} &minimize && \Sigma_{l\in\mathscr{E}} z_l \\ &subject\ to && f_l = \Sigma_{m=1}^{M} f_{ml} \\ &&& f_l = \Sigma_{m=1}^{M} f_{ml} \leq c_l, \forall l \in \mathscr{E} \\ &&& f_l - z_l \leq 0, \forall l \in \mathscr{E} \\ &&& 3f_l - z_l \leq \tfrac{2}{3}c_l, \forall l \in \mathscr{E} \\ &&& 10f_l - z_l \leq \tfrac{16}{3}c_l, \forall l \in \mathscr{E} \\ &&& 70f_l - z_l \leq \tfrac{178}{3}c_l, \forall l \in \mathscr{E} \\ &&& 500f_l - z_l \leq \tfrac{1468}{3}c_l, \forall l \in \mathscr{E} \\ &&& 5000f_l - z_l \leq \tfrac{16318}{3}c_l, \forall l \in \mathscr{E} \\ &&& \boldsymbol{Af_m = b_m}, \boldsymbol{f_m} \geq \mathbf{0}, m = 1, ..., M \end{aligned}$$

3 实例

3.1 问题描述

以下以一个有 7 个节点，13 条弧的多商品流问题为例子来展示上述的方法。



该例子如图示:
其中每个节点之间的弧上的数字表示弧的编号; 顶端的如: “$m=1:1->2,d_1=4$” 表示的是有这样的源 − 目的对 (1,2)，即需要从节点 1 流出 4 个单位，然后节点 2 流入 4 个单位。在该例子中，每条弧的容量都为 5 个单位。

3.2 约束条件

对于该例子的点弧关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{b_m}$ 可表示如下:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & & -1 & & & & & & & & \\
-1 & & & 1 & & & & & -1 & & & & \\
 & -1 & & & 1 & 1 & & & & & & & \\
 & & -1 & & & & 1 & 1 & & & -1 & & \\
 & & & -1 & & & -1 & & 1 & 1 & & & -1 \\
 & & & & & -1 & & -1 & & & 1 & 1 & \\
 & & & & & & & & & -1 & & -1 & 1
\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b_1}=\begin{bmatrix}4\\-4\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{b_2}=\begin{bmatrix}4\\0\\-4\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{b_3}=\begin{bmatrix}0\\-4\\4\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{b_4}=\begin{bmatrix}4\\0\\0\\0\\0\\0\\-4\end{bmatrix}$$

弧的容量记为 $\boldsymbol{c}=((5,5,...,5)_{1\times 13})^T$
商品流记为 $\boldsymbol{f=(f_1,...,f_{13})}$，表示对应每条弧上各种商品的流量之和，其中 $f_l=\Sigma_{m=1}^4 f_{ml},\forall l\in\mathscr{E}$，$f_{ml}$ 表示商品 m 在弧 l 上的流量

故该例子的约束条件为：

$$\begin{aligned}&f_l=\Sigma_{m=1}^4 f_{ml}\le c_l,\forall l\in\mathscr{E}\\&\boldsymbol{Af_m=b_m},m=1,...,4,\\&\boldsymbol{f_m}\ge\boldsymbol{0},m=1,...,4\end{aligned}$$

3.3 目标函数选取

一、MAU

使用 2.2.1 中的方法，将该问题化为线性规划问题，故对应的线性规划问题的表述如下：

$$\begin{aligned}&minimize && z\\&subject\ to && \tfrac{1}{c_l}\Sigma_{m=1}^4 f_{ml}-z\le 0,\forall l\in\mathscr{E}\\&&&\Sigma_{m=1}^4 f_{ml}\le c_l,\forall l\in\mathscr{E}\\&&&\boldsymbol{Af_m=b_m,f_m}\ge\boldsymbol{0},m=1,...,4\end{aligned}$$

二、FT

使用 2.2.2 中的方法，将该问题化为线性规划问题，故对应的线性规划问题的表述如下：

$$\begin{aligned}&minimize && \Sigma_{l\in\mathscr{E}} z_l\\&subject\ to && f_l=\Sigma_{m=1}^4 f_{ml}\\&&&f_l-z_l\le 0,\forall l\in\mathscr{E}\\&&&3f_l-z_l\le \tfrac{2}{3}c_l,\forall l\in\mathscr{E}\\&&&10f_l-z_l\le \tfrac{16}{3}c_l,\forall l\in\mathscr{E}\\&&&70f_l-z_l\le \tfrac{178}{3}c_l,\forall l\in\mathscr{E}\\&&&500f_l-z_l\le \tfrac{1468}{3}c_l,\forall l\in\mathscr{E}\\&&&5000f_l-z_l\le \tfrac{16318}{3}c_l,\forall l\in\mathscr{E}\\&&&\Sigma_{m=1}^4 f_{ml}\le c_l,\forall l\in\mathscr{E}\\&&&\boldsymbol{Af_m=b_m,f_m}\ge\boldsymbol{0},m=1,...,M\end{aligned}$$

4 软件求解与结果解释

本文中使用 Matlab 分别求解使用不同的目标函数的上述例子：

一、MAU

该问题需要优化的变量有 53 个（$f_{ml}, m=1,2,3,4, l=1,...,13,\ z$），排列方式为 $(f_{1,1}, f_{1,2}, , ..., f_{1,13}, f_{2,1}, ..., f_{4,13}, z)^T$

等式约束的矩阵为：

$$A' = \begin{bmatrix} A & & & & 0 \\ & A & & & 0 \\ & & A & & 0 \\ & & & A & 0 \end{bmatrix}$$

右端向量为:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

不等式约束的矩阵为:

$$C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & \cdots & 0.2 & \cdots & 0.2 & \cdots & 0.2 & \cdots & -1 \\ 0 & 0.2 & \cdots & 0 & 0.2 & \cdots & 0.2 & \cdots & 0.2 & -1 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots \end{bmatrix}$$

右端向量为:

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 5 \\ \vdots \\ 5 \end{bmatrix}$$

同时变量满足非负。使用 matlab 的 linprog 求解得到的目标函数最小值为 0.8，对应的最优解为:

$$[4.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.4723, 0.0000,$$
$$0.4648, 0.4723, 0.0000, 0.4648, 0.0000, 4.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000,$$
$$0.0000, 0.0000, 0.4680, 0.0000, 0.4735, 0.4680, 0.0000, 0.4735, 0.0000,$$
$$0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 4.0000, 1.9487, 0.2738, 4.0000, 0.2534,$$
$$2.2225, 2.0513, 2.3047, 0.0000, 0.0000, 4.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000,$$
$$2.0513, 2.1994, 0.0000, 2.2587, 0.2507, 1.9487, 0.2074, 0.8000]$$

其中排列顺序为 $(f_{1,1}, f_{1,2}, , ..., f_{1,13}, f_{2,1}, ..., f_{4,13}, z)$，$f_{i,j}$ 代表第 i 种商品在弧 j 上的流量。

二、FT

该问题需要优化的变量有 65 个（$f_{ml}, m = 1, 2, 3, 4, l = 1, ..., 13,\ z_l, l = 1, ..., 13$），排列顺序为 $(f_{1,1}, f_{1,2}, , ..., f_{1,13}, f_{2,1}, ..., f_{4,13}, z_1, ..., z_{13})^T$

等式约束的矩阵为:

$$A' = \begin{bmatrix} A & & & & \mathbf{0}_{7\times13} \\ & A & & & \mathbf{0}_{7\times13} \\ & & A & & \mathbf{0}_{7\times13} \\ & & & A & \mathbf{0}_{7\times13} \end{bmatrix}$$

右端向量为:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

不等式约束的矩阵为:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots & & \\ 3 & 0 & \cdots & 3 & \cdots & 3 & \cdots & 3 & \cdots & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 & 3 & \cdots & 3 & \cdots & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots & & \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \vdots & & \end{bmatrix}$$

右端向量为:

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 10/3 \\ \vdots \\ 10/3 \\ 80/3 \\ \vdots \\ 80/3 \\ 890/3 \\ \vdots \\ 890/3 \\ 7340/3 \\ \vdots \\ 7340/3 \\ 81590/3 \\ \vdots \\ 81590/3 \\ 5 \\ \vdots \\ 5 \end{bmatrix}$$

同时变量满足非负。使用 matlab 的 linprog 求解得到的目标函数最小值为 92.6667，对应的最优解为:

[3.8752 0.0000 0.1248 0.0000 0.0000 0.0000 0.1248 0.0000 0.1248 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 4.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.6248 0.0000 0.0419 0.0000 0.6667 3.3333 1.7086 0.0000 3.3752 0.0000 1.6667 1.6667 1.6667 0.0000 0.0000 4.0000 0.0000 0.0000 0.0000 1.9755 2.0245 0.0000 1.9755 0.0000 2.0245 0.0000 18.3333 13.3333 15.0000 0.0000 0.6667 6.6667 11.4218 2.7401 8.3333 2.5932 1.6667 10.2449 1.6667]

其中前 52 位代表的意思与上一个方法相同，后 13 个变量取值代表 $z_l, l = 1, ..., 13$ 的取值。

5 讨论

在以上实验中，去除容量限制 $\Sigma_{m=1}^{4} f_{ml} \le c_l, \forall l \in \mathscr{E}$ 这一约束条件对于结果无影响。以下讨论该条件在取这两种目标函数的一般问题下的必要性。

MAU **成本函数**

对于 MAU，设没有该条件的系统为 a，有该条件的系统是 b。设 z_1 z_2 分别是这两个系统的最优解。显然 $z_1 \le z_2$。

若不等号是严格小于，则对于使得目标函数值为 z_1 的变量，存在 l'，使得 $f_{l'} > c_{l'}$。

但由于 $z_2 \le 1$，故 $z_1 \le 1$

故由系统 a 的条件有 $f_{l'} \le z_1 c_{l'} \le c_{l'}$，与 $f_{l'} > c_{l'}$ 矛盾。

故 $z_1 = z_2$

TF **成本函数**

对于此目标函数，未能通过演绎法证明该条件的不必要性。但 [1] 中说明了弧利用率 >100% 的可能性是存在的。该方法的有效性是利用该成本函数在利用率大于 1 时斜率会大大增加，使得问题求解时当出现弧过载的情况成本会大大增加，故出现超载的可能性会很小。

参考文献

[1] Bernard Fortz and Mikkel Thorup. The LaTeX Companion. Optimizing OSPF/IS-IS Weights in a Changing World. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol.20, no.4, pp.756-767, 2002.

6 附录：实验代码

```
%MAU
A = [1  1  1  0  -1  0  0  0  0  0  0  0  0;
     -1  0  0  1  0  0  0  0  -1  0  0  0  0;
     0  -1  0  0  1  1  0  0  0  0  0  0  0;
     0  0  -1  0  0  0  1  1  0  0  -1  0  0;
     0  0  0  -1  0  0  -1  0  1  1  0  0  -1;
     0  0  0  0  0  -1  0  -1  0  0  1  1  0;
     0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1  0  -1  1];
OO = zeros([7,13])
jj = [0 0 0 0 0 0 0]';
```

```
kk = [A OO OO OO jj; OO A OO OO jj;OO OO A OO jj; OO OO
    OO A jj];

b_1 = [4 -4 0 0 0 0 0];
b_2 = [4 0 -4 0 0 0 0];
b_3 = [0 -4 4 0 0 0 0];
b_4 = [4 0 0 0 0 0 -4];
bb = [b_1 b_2 b_3 b_4]';

CC = zeros([13,53]);
for i=1:1:13
     CC(i,53)=-1;

     CC(i,i)=0.2;
     CC(i,i+13)=0.2;
     CC(i,i+26)=0.2;
     CC(i,i+39)=0.2;

end
D = zeros([13,53]);
for i=1:1:13
     D(i,i)=1;
     D(i,i+13)=1;
     D(i,i+26)=1;
     D(i,i+39)=1;
end
c_1 = zeros([1,13]);
c_2 = zeros([1,13]);
for i=1:1:13
     c_2(i) = 5;
end
c = [c_1 c_2]'
CC = [CC;D]
lb = zeros([53,1]);
ub = [];
z = zeros([53,1]);
z(53) = 1
```

```
[f, fval] = linprog(z,CC,c,kk,bb,lb,ub);
%TF
A = [1 1 1 0 -1 0 0 0 0 0 0 0 0;
     -1 0 0 1 0 0 0 0 -1 0 0 0 0;
     0 -1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 -1 0 0 0 1 1 0 0 -1 0 0;
     0 0 0 -1 0 0 -1 0 1 1 0 0 -1;
     0 0 0 0 0 -1 0 -1 0 0 1 1 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0 -1 1];
OO = zeros([7,13]);
kk = [A OO OO OO OO; OO A OO OO OO;OO OO A OO OO; OO OO
   OO A OO];

b_1 = [4 -4 0 0 0 0 0];
b_2 = [4 0 -4 0 0 0 0];
b_3 = [0 -4 4 0 0 0 0];
b_4 = [4 0 0 0 0 0 -4];
bb = [b_1 b_2 b_3 b_4]';

CC = zeros([78,65]);
for i=1:1:13
     CC(i,52+i)=-1;

     CC(i,i)=1;
     CC(i,i+13)=1;
     CC(i,i+26)=1;
     CC(i,i+39)=1;
end
for i=14:1:26
     CC(i,52+i-13)=-1;

     CC(i,i-13)=3;
     CC(i,i)=3;
     CC(i,i+13)=3;
     CC(i,i+26)=3;
end
for i=27:1:39
```

```
        CC(i,52+i-26)=-1;
        CC(i,i-26)=10;
        CC(i,i-13)=10;
        CC(i,i)=10;
        CC(i,i+13)=10;
end
for i=40:1:52
        CC(i,52+i-39)=-1;
        CC(i,i-39)=70;
        CC(i,i-26)=70;
        CC(i,i-13)=70;
        CC(i,i)=70;
end
for i=53:1:65
        CC(i,i)=-1;
        CC(i,i-52)=500;
        CC(i,i-39)=500;
        CC(i,i-26)=500;
        CC(i,i-13)=500;
end
for i=66:1:78
        CC(i,i-13)=-1;
        CC(i,i-65)=5000;
        CC(i,i-52)=5000;
        CC(i,i-39)=5000;
        CC(i,i-26)=5000;
end

D = zeros([13,65]);
for i=1:1:13
        D(i,i)=1;
        D(i,i+13)=1;
        D(i,i+26)=1;
        D(i,i+39)=1;
end

CC = [CC;D]
```

```
c_1 = zeros([1,13]);
c_2 = zeros([1,13]);
c_3 = zeros([1,13]);
c_4 = zeros([1,13]);
c_5 = zeros([1,13]);
c_6 = zeros([1,13]);
for i=1:1:13
    c_2(i) = 10/3;
    c_3(i) = 80/3;
    c_4(i) = 890/3;
    c_5(i) = 7340/3;
    c_6(i) = 81590/3;
end
c = [c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6];

cc = zeros([1,13]);
for i=1:1:13
    cc(i) = 5;
end
c = [c cc]';

lb = zeros([65,1]);
ub = [];
z = zeros([65,1]);
for i=1:1:13
    z(52+i) = 1;
end
[f,fval] = linprog(z,CC,c,kk,bb,lb,ub)
```