

# DOA 估计算法

付宇辉 无 05 2020010768

April 2023

Words: 1052

Pages: 6

信号的来波方向是信号空域信息中非常重要的参数，可以反映信号的空间位置，因此，估计 DOA (Direction Of Arrival) 信息一直是信号处理中的一个研究重点，被广泛应用于雷达、声学信号处理、无线通信、声源定位等领域。

通过这次大作业，我对一些典型的 DOA 估计算法进行了解。

## 1 算法调研

### 1.1 MUSIC 算法

多重信号分类法，子空间算法，利用导向矢量与噪声子空间的正交性。

#### 1.1.1 原理

记  $X$  为接收阵列信号， $S$  为远场发射信号， $\mathbf{A}$  为发射信号的方向矩阵， $N$  为噪声信号。

计算接收信号的相关矩阵：

$$\mathbf{R}_X = \mathbf{E}[X X^H] = \mathbf{E}[(\mathbf{A}S + N)(\mathbf{A}S + N)^H] = \mathbf{A}\mathbf{E}[S S^H]\mathbf{A}^H + \mathbf{E}[N N^H] = \mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_N \quad (1)$$

如果  $N$  噪声彼此独立，则有

$$\mathbf{R}_N = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (2)$$

这里  $\sigma^2$  是噪声的方差。

同时有  $\mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^H$  几乎肯定是正定的。那么如果对  $\mathbf{R}_X$  自相关矩阵进行特征值分解，最小的特征值为  $\sigma^2$ ，且有  $M - D$  个这样的特征值，其中  $M$  是接收信号的个数， $D$  为发射信号方向的个数。

对  $\mathbf{R}_X$  进行特征值分解：

$$\mathbf{R}_X = \begin{bmatrix} V_S \\ V_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_S^H & V_N^H \end{bmatrix} = V_S \Lambda_S V_S^H + V_N \Lambda_N V_N^H \quad (3)$$

$\mathbf{R}_X$  左乘  $V_N$  带入公式1

$$\mathbf{R}_X V_N = \mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^H V_N + \sigma^2 V_N \quad (4)$$

对比公式3

$$\mathbf{R}_x \mathbf{V}_N = \mathbf{V}_S \Lambda_S \mathbf{V}_S^H \mathbf{V}_N + \mathbf{V}_N \Lambda_N \mathbf{V}_N^H \mathbf{V}_N = \sigma^2 \mathbf{V}_N \quad (5)$$

得到：

$$\mathbf{A} \mathbf{R}_s \mathbf{A}^H \mathbf{V}_N = 0 \quad (6)$$

从而得到：

$$\mathbf{A}^H \mathbf{V}_N = 0 \quad (7)$$

即与发送信号方向有关的矩阵空间  $\mathbf{A}$  和噪声自相关矩阵特征空间正交，得到了一种方式，找到方向向量的方式。

### 1.1.2 算法流程

1. 根据  $N$  个接收信号矢量得到下面协方差矩阵的估计值：

$$\mathbf{R}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N X(i) X^H(i) R_x = \frac{1}{N} \quad (8)$$

2. 对协方差矩阵进行特征值分解，并按特征值的大小排序。将后  $M - D$  个特征值和特征向量作为噪声空间，得到噪声矩阵。

$$\mathbf{E}_N = \begin{bmatrix} v_{D+1} & v_{D+2} & \dots & v_M \end{bmatrix} \quad (9)$$

3. 使  $\theta$  变化，按照式

$$P(\theta) = \frac{1}{a^H(\theta) \mathbf{E}_N \mathbf{E}_N^H a(\theta)} \quad (10)$$

来计算谱函数，通过寻求峰值来得到波达方向的估计值。

## 1.2 ESPRIT 算法

### 1.2.1 原理

旋转不变子空间法，子空间算法，利用子阵间信号子空间的旋转不变性。

### 1.2.2 算法流程

1. 用式  $\mathbf{R} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^H$  来估计出相关矩阵  $\mathbf{R}$ ，再对其进行特征分解： $\mathbf{R} = \mathbf{E} \Lambda \mathbf{E}^H$ ，得到矩阵  $\mathbf{E}$
2. 从矩阵  $\mathbf{E}$  中获得矩阵  $\mathbf{E}_s$ （对应于矩阵  $\mathbf{E}$  的  $M$  个最大的特征值），代表信号子空间；
3. 分别取矩阵  $\mathbf{E}_s$  的前  $N - 1$  行和后  $N - 1$  行，分别形成矩阵  $\mathbf{E}_0$ 、 $\mathbf{E}_1$ ；
4. 使用最小二乘法（或完全最小二乘法）拟合出变换矩阵  $\Psi$ ；
5. 求出矩阵  $\Psi$  的特征值，这些特征值就是待估计的值；
6. 使用公式获得 DOA

### 1.3 与 Capon 算法的主要不同

Capon 算法通过对与信号协方差矩阵以及阵列方向矢量相关的空间谱函数进行二维谱峰搜索, 得到信号方向角的估计结果。而其余两个算法都是子空间算法。找到信号方向空间的特征去估计结果。

## 2 生成接收信号

生成接收信号代码如下:

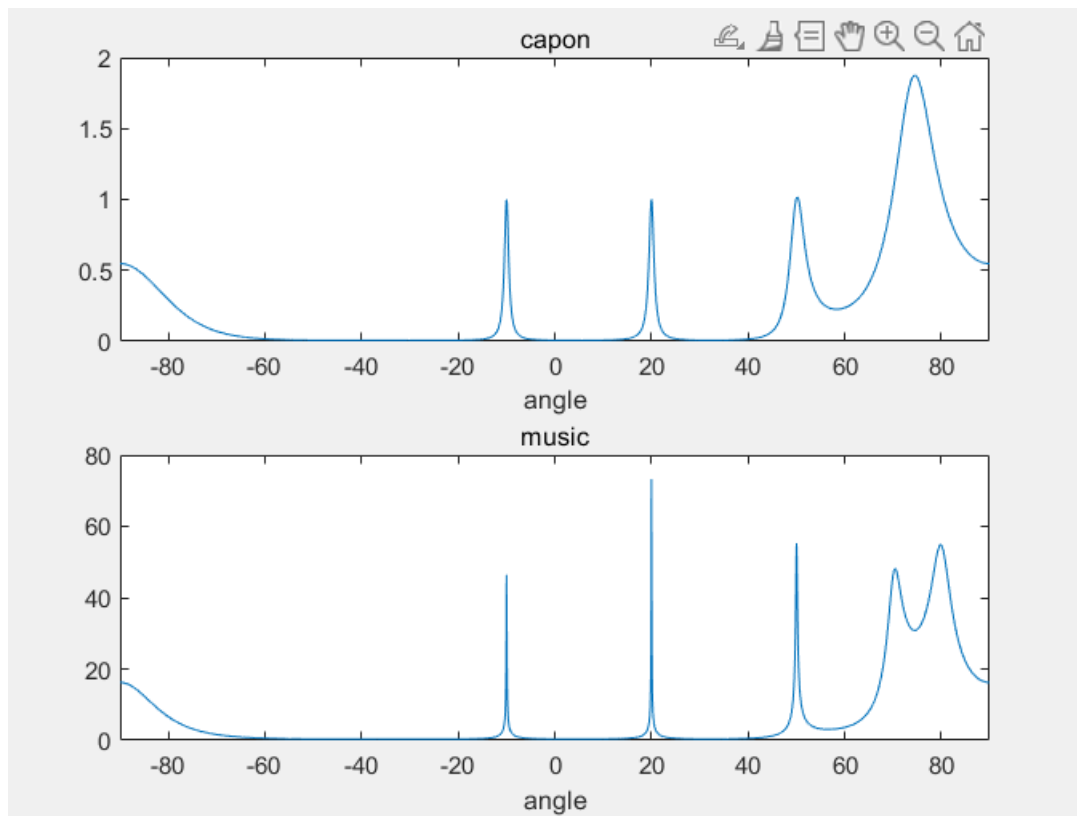
```
1 clear; close all
2 array_num = 10;           % 阵元个数
3 dist = 0.3;               % 阵元间距
4 src_num = 5;              % 信源数
5 theta = [-10, 20, 50, 70, 80]; % 波束来向
6 lambda = 0.6;             % 载波波长
7 f = 10^6*[100, 300, 500, 600, 700]; % 信号频率
8
9 d = 0:dist:(array_num - 1) * dist;
10 A = exp((-1i*2*pi*d.*sin(theta*pi/180))/lambda);
11
12 sample_num = 1024;       % 采样数
13 t = linspace(0, 1.024*10^-6, sample_num);
14 s = exp(1i*2*pi*f'*t);   % 信源信号
15 snr = 12;                 % 信噪比
16 x = awgn(A*s, snr);
```

通过这代码生成了接收信号, 由于是复信号,  $x$  是一个  $10 \times 1024$  的复数矩阵。

## 3 算法应用

用三个函数实现三种算法, 详见代码文件。

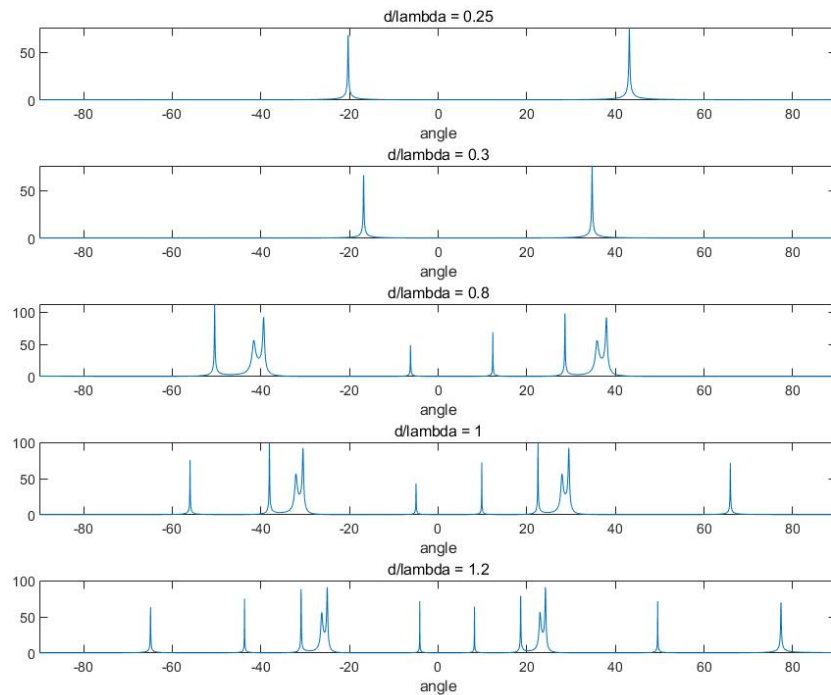
算法	角度 1	角度 2	角度 3	角度 4	角度 5
Capon	-26.5	-10.0	20.0	50.2	74.5
MUSIC	-10.0	20.0	50.0	70.1	80.1
ESPRIT	-10.0	20.0	49.9	69.9	79.9



可以看到 Capon 算法的精确度不够，其余两个算法的精度更高。

### 3.1 修改参数

#### 3.1.1 修改 $d/\lambda$



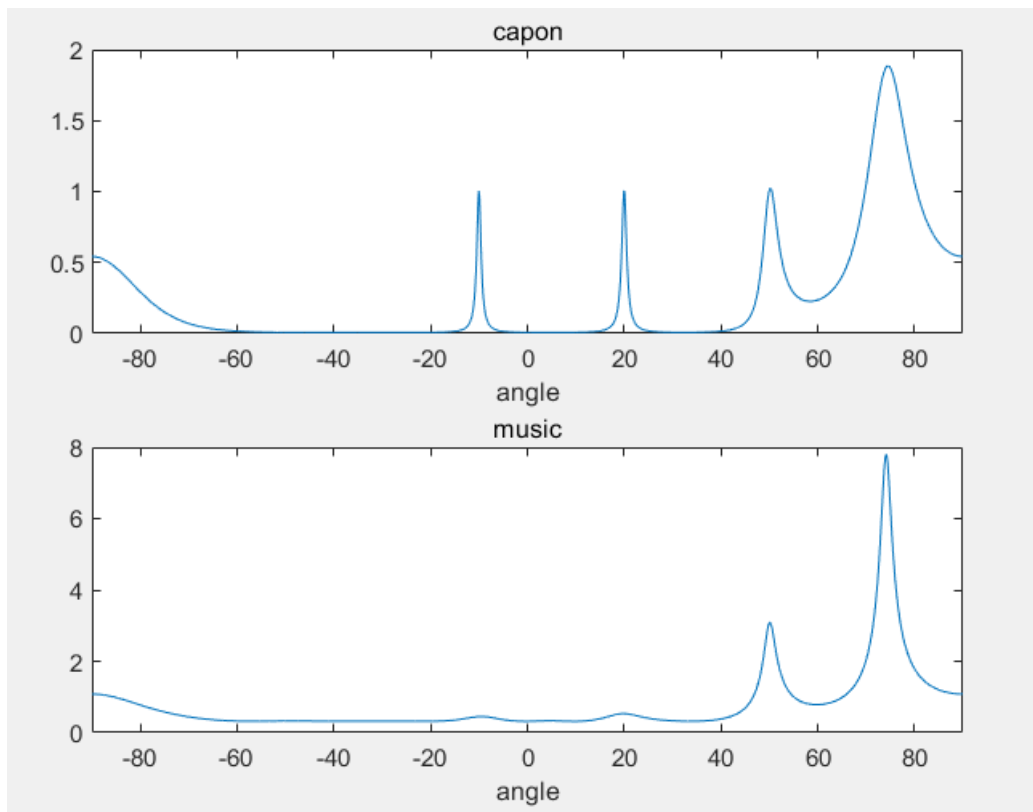
$d/\lambda$  分别为 0.25, 0.3, 0.8, 1, 1.2 时的结果如图。可以看到随着  $d/\lambda$  的增大, MUSIC 算法检测出来的峰值越来越多。 $d/\lambda$  过大过小效果都不是很好。

#### 3.1.2 修改信源数目

修改信源数目为 3, 得到的结果如下。

算法	角度 1	角度 2	角度 3
Capon	74.5	50.2	20.0
MUSIC	74.1	50.1	19.9
ESPRIT	7.3	73.9	49.8

可以看到 MUSIC 和 ESPRIT 算法对信源个数的影响比较敏感, 在运用之前需要知道信源个数, 才能有更好的效果。



## 4 总结

在这次大作业中，我初步了解了几个 DOA 算法的原理，并用 MATLAB 实现了相关算法，探索了各个参量对算法的影响，有很大的收获。

同时，感谢老师和助教的耐心指导。助教通过微信及时答疑解惑，对我帮助很大。