

# LLM 面试核心公式汇总

AI 助手

May 13, 2025

## Contents

<b>1</b>	<b>激活函数 (Activation Functions)</b>	<b>3</b>
1.1	Sigmoid . . . . .	3
1.2	Tanh (双曲正切) . . . . .	3
1.3	ReLU (Rectified Linear Unit) . . . . .	3
1.4	GeLU (Gaussian Error Linear Unit) . . . . .	3
1.5	Swish . . . . .	3
1.6	Softmax . . . . .	4
<b>2</b>	<b>损失函数 (Loss Functions)</b>	<b>4</b>
2.1	均方误差 (Mean Squared Error, MSE) . . . . .	4
2.2	交叉熵损失 (Cross-Entropy Loss) . . . . .	4
2.3	DPO (Direct Preference Optimization) Loss . . . . .	4
2.4	PPO (Proximal Policy Optimization) Loss . . . . .	5
2.5	GRPO (Generalized Rejection Policy Optimization) Loss (推测性) . . . .	5
<b>3</b>	<b>正则化 (Regularization)</b>	<b>6</b>
3.1	L1 正则化 (Lasso Regression) . . . . .	6
3.2	L2 正则化 (Ridge Regression / Weight Decay) . . . . .	6
3.3	Dropout . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Transformer 核心组件</b>	<b>6</b>
4.1	Scaled Dot-Product Attention . . . . .	6
4.2	Multi-Head Attention . . . . .	7
4.3	Positional Encoding (Sinusoidal) . . . . .	7
4.4	Layer Normalization . . . . .	7
4.4.1	RMS Norm (Root Mean Square Layer Normalization) . . . . .	7
4.5	Feed-Forward Network (FFN) / Position-wise FFN . . . . .	7
<b>5</b>	<b>门控线性单元及其变体 (Gated Linear Units and Variants)</b>	<b>8</b>
5.1	门控线性单元 (GLU - Gated Linear Unit) 基础 . . . . .	8
5.2	Transformer FFN 中的 GLU 变体 . . . . .	8
5.2.1	GeGLU (Gaussian Error Linear Unit Gated Linear Unit) . . . . .	8
5.2.2	SwiGLU (Swish Gated Linear Unit) . . . . .	8
5.2.3	ReGLU (ReLU Gated Linear Unit) . . . . .	8

<b>6</b>	<b>评估指标 (Evaluation Metrics)</b>	<b>8</b>
6.1	Perplexity (PPL) . . . . .	8
<b>7</b>	<b>优化器相关 (Optimizer Related)</b>	<b>9</b>
7.1	SGD with Momentum . . . . .	9
7.2	Adam (Adaptive Moment Estimation) - 核心思想 . . . . .	9

# 1 激活函数 (Activation Functions)

激活函数为神经网络引入非线性，使其能够学习更复杂的模式。

## 1.1 Sigmoid

主要用于二分类问题的输出层，或作为门控机制。

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

输出范围:  $(0, 1)$

## 1.2 Tanh (双曲正切)

与 Sigmoid 类似，但输出范围是  $(-1, 1)$ ，通常在隐藏层中表现比 Sigmoid 好。

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 2\sigma(2x) - 1$$

输出范围:  $(-1, 1)$

## 1.3 ReLU (Rectified Linear Unit)

现代神经网络中最常用的激活函数之一。

$$\text{ReLU}(x) = \max(0, x)$$

输出范围:  $[0, \infty)$

## 1.4 GeLU (Gaussian Error Linear Unit)

在 Transformer 模型中广泛使用。

$$\text{GeLU}(x) = x \cdot \Phi(x)$$

其中  $\Phi(x)$  是标准正态分布的累积分布函数 (CDF)。近似计算公式:

$$\text{GeLU}(x) \approx 0.5x \left( 1 + \tanh \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} (x + 0.044715x^3) \right] \right)$$

## 1.5 Swish

一个自门控激活函数。函数定义为  $x$  乘以其自身经过 Sigmoid 函数（并可能由一个可学习的参数 或固定值调节）的结果。与 ReLU 不同，Swish 处处可导，这在优化过程中可能更有利。

- 基本形式 ( $\beta = 1$ ):

$$\text{Swish}(x) = x \cdot \sigma(x) = \frac{x}{1 + e^{-x}}$$

- 带参数  $\beta$ :

$$\text{Swish}_\beta(x) = x \cdot \sigma(\beta x) = \frac{x}{1 + e^{-\beta x}}$$

## 1.6 Softmax

通常用于多分类问题的输出层，将原始分数（logits）转换为概率分布。对于一个向量  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_K)$ ：

$$\text{Softmax}(z_i) = \frac{e^{z_i}}{\sum_{j=1}^K e^{z_j}} \quad \text{for } i = 1, \dots, K$$

输出  $\sum_{i=1}^K \text{Softmax}(z_i) = 1$ ，且每个元素  $\in (0, 1)$ 。

## 2 损失函数 (Loss Functions)

损失函数衡量模型预测值与真实值之间的差异。

### 2.1 均方误差 (Mean Squared Error, MSE)

常用于回归问题。

$$L_{\text{MSE}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

其中  $N$  是样本数量， $y_i$  是真实值， $\hat{y}_i$  是预测值。

### 2.2 交叉熵损失 (Cross-Entropy Loss)

常用于分类问题。

- 二分类交叉熵 (Binary Cross-Entropy, BCE)：

$$L_{\text{BCE}} = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y_i \log(\hat{y}_i) + (1 - y_i) \log(1 - \hat{y}_i)]$$

其中  $y_i \in \{0, 1\}$  是真实标签， $\hat{y}_i$  是模型预测样本为类别 1 的概率。

- 分类交叉熵 (Categorical Cross-Entropy)：对于单个样本，真实标签 one-hot 编码  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_K)$ ，模型预测概率  $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_K)$ ：

$$L_{\text{CE}} = -\sum_{k=1}^K y_k \log(\hat{y}_k)$$

### 2.3 DPO (Direct Preference Optimization) Loss

用于从人类偏好数据中微调 LLM，作为 RLHF 的一种替代方案。给定偏好数据  $(x, y_w, y_l)$  (提示, 偏好回答, 非偏好回答)：

$$L_{\text{DPO}}(\pi_\theta; \pi_{\text{ref}}) = -\mathbb{E}_{(x, y_w, y_l) \sim \mathcal{D}} \left[ \log \sigma \left( \beta \log \frac{\pi_\theta(y_w|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_w|x)} - \beta \log \frac{\pi_\theta(y_l|x)}{\pi_{\text{ref}}(y_l|x)} \right) \right]$$

或者等价地写成隐式奖励形式：

$$\hat{r}_\theta(x, y) = \beta \log \frac{\pi_\theta(y|x)}{\pi_{\text{ref}}(y|x)}$$

$$L_{\text{DPO}} = -\mathbb{E}_{(x, y_w, y_l) \sim \mathcal{D}} [\log \sigma(\hat{r}_\theta(x, y_w) - \hat{r}_\theta(x, y_l))]$$

其中  $\pi_\theta$  是当前模型策略， $\pi_{\text{ref}}$  是参考模型策略， $\beta$  是超参数， $\sigma$  是 Sigmoid 函数。

## 2.4 PPO (Proximal Policy Optimization) Loss

PPO 是一种常用的强化学习算法，通过限制策略更新的幅度来稳定训练过程，常用于 LLM 的对齐微调 (RLHF)。其核心目标是最大化一个替代目标函数，该函数会惩罚新策略与旧策略之间过大的差异。

给定状态  $s_t$ ，动作  $a_t$ ，旧策略  $\pi_{\theta_{\text{old}}}(a_t|s_t)$ ，当前策略  $\pi_{\theta}(a_t|s_t)$ ，以及优势函数估计  $\hat{A}_t$ ：定义概率比率 (probability ratio)：

$$r_t(\theta) = \frac{\pi_{\theta}(a_t|s_t)}{\pi_{\theta_{\text{old}}}(a_t|s_t)}$$

PPO 的裁剪替代目标函数 (Clipped Surrogate Objective)  $L^{\text{CLIP}}(\theta)$  通常是最大化的目标，因此其对应的损失函数是该目标的负值：

$$L_{\text{PPO}}^{\text{CLIP}}(\theta) = -\mathbb{E}_t \left[ \min \left( r_t(\theta) \hat{A}_t, \text{clip}(r_t(\theta), 1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \hat{A}_t \right) \right]$$

其中：

- $\mathbb{E}_t[\dots]$  表示对所有时间步（或 mini-batch 中的样本）取期望。
- $\hat{A}_t$  是在时间步  $t$  的优势函数估计值，表示采取动作  $a_t$  相对于平均动作的好坏程度。
- $r_t(\theta)$  是当前策略  $\pi_{\theta}$  和旧策略  $\pi_{\theta_{\text{old}}}$  对动作  $a_t$  的概率比。
- $\epsilon$  是一个小的超参数（例如 0.1 或 0.2），用于定义裁剪范围  $\text{clip}(r_t(\theta), 1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ ，它将  $r_t(\theta)$  限制在  $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$  区间内。

在实际应用中，完整的 PPO 损失函数通常还包括一个价值函数损失项（用于更新价值网络，以更好地估计  $\hat{A}_t$ ）和一个熵奖励项（以鼓励探索）。

## 3 正则化 (Regularization)

正则化用于防止模型过拟合。

### 3.1 L1 正则化 (Lasso Regression)

向损失函数添加权重的绝对值之和。

$$L_{\text{total}} = L_{\text{original}} + \lambda \sum_{j=1}^M |w_j|$$

其中  $M$  是权重数量， $\lambda$  是正则化强度。

### 3.2 L2 正则化 (Ridge Regression / Weight Decay)

向损失函数添加权重的平方和。

$$L_{\text{total}} = L_{\text{original}} + \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^M w_j^2$$

### 3.3 Dropout

训练时，以概率  $p$  随机将一些神经元的输出置为 0。推断时，通常关闭 Dropout 并将权重乘以  $(1 - p)$ （如果使用 Inverted Dropout 则推断时无需操作）。

## 4 Transformer 核心组件

Transformer 是现代 LLM 的基础架构。

### 4.1 Scaled Dot-Product Attention

$$\text{Attention}(Q, K, V) = \text{softmax}\left(\frac{QK^T}{\sqrt{d_k}}\right)V$$

其中  $Q$ : Queries,  $K$ : Keys,  $V$ : Values,  $d_k$ : Key/Query 的维度。

### 4.2 Multi-Head Attention

$$\text{MultiHead}(Q, K, V) = \text{Concat}(\text{head}_1, \dots, \text{head}_h)W^O$$

其中每个头  $\text{head}_i$  是：

$$\text{head}_i = \text{Attention}(QW_i^Q, KW_i^K, VW_i^V)$$

$W_i^Q, W_i^K, W_i^V$  是特定于头的投影矩阵， $W^O$  是输出投影矩阵。

### 4.3 Positional Encoding (Sinusoidal)

提供序列中 Token 的位置信息。

$$\begin{aligned} PE_{(pos, 2i)} &= \sin(pos/10000^{2i/d_{\text{model}}}) \\ PE_{(pos, 2i+1)} &= \cos(pos/10000^{2i/d_{\text{model}}}) \end{aligned}$$

其中  $pos$ : 位置,  $i$ : 维度索引,  $d_{\text{model}}$ : 模型隐藏层维度。

### 4.4 Layer Normalization

对每个样本的特征进行归一化。对于隐藏层向量  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_D)$ :

$$\begin{aligned} \mu_j &= \frac{1}{D} \sum_{i=1}^D x_i \\ \sigma_j^2 &= \frac{1}{D} \sum_{i=1}^D (x_i - \mu_j)^2 \\ \text{LayerNorm}(\mathbf{x})_i &= \gamma_i \frac{x_i - \mu_j}{\sqrt{\sigma_j^2 + \epsilon}} + \beta_i \end{aligned}$$

$\gamma, \beta$  是可学习参数， $\epsilon$  是小常数。

#### 4.4.1 RMS Norm (Root Mean Square Layer Normalization)

Layer Normalization 的简化版本，移除了均值中心化。对于输入向量  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ :

$$\text{RMS}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d x_i^2}$$
$$\text{RMSNorm}(\mathbf{x})_i = \frac{x_i}{\text{RMS}(\mathbf{x}) + \epsilon} \cdot g_i$$

其中  $g_i$  是可学习的增益参数。

#### 4.5 Feed-Forward Network (FFN) / Position-wise FFN

Transformer 块中的子层，包含两个线性变换加一个激活，是 Transformer 参数量最大的模块。

$$\text{FFN}(x) = \text{Activate}(xW_1 + b_1)W_2 + b_2$$

‘Activate’ 通常是 ReLU 或 GeLU。

### 5 门控线性单元及其变体 (Gated Linear Units and Variants)

GLU 通过门控机制动态控制信息流，常用于 Transformer 的 FFN 层。其核心思想是将输入通过两个线性变换，其中一个变换的结果经过 Sigmoid 函数作为门，与另一个线性变换的结果进行逐元素相乘。

#### 5.1 门控线性单元 (GLU - Gated Linear Unit) 基础

原始 GLU 定义:

$$\text{GLU}(X, W, V, b, c) = (XW + b) \odot \sigma(XV + c)$$

其中  $\sigma$  是 Sigmoid 函数,  $\odot$  是逐元素乘法。

#### 5.2 Transformer FFN 中的 GLU 变体

通用形式 (通常省略偏置  $b_1, b_2$  以简化表示, 并在  $W_3$  后添加):

$$\text{FFN}_{\text{GLU}}(x) = (\phi(xW_1) \odot (xW_2))W_3$$

其中  $x \in \mathbb{R}^{d_{\text{model}}}$ ,  $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^{d_{\text{model}} \times d_{\text{ff}}}$ ,  $W_3 \in \mathbb{R}^{d_{\text{ff}} \times d_{\text{model}}}$ 。  $\phi$  是一个激活函数。

##### 5.2.1 GeGLU (Gaussian Error Linear Unit Gated Linear Unit)

$\phi = \text{GeLU}$

$$\text{FFN}_{\text{GeGLU}}(x) = (\text{GeLU}(xW_1) \odot (xW_2))W_3$$

##### 5.2.2 SwiGLU (Swish Gated Linear Unit)

$\phi = \text{Swish}(x) = x \cdot \sigma(x)$

$$\text{FFN}_{\text{SwiGLU}}(x) = (\text{Swish}(xW_1) \odot (xW_2))W_3$$

### 5.2.3 ReGLU (ReLU Gated Linear Unit)

$\phi = \text{ReLU}$

$$\text{FFN}_{\text{ReGLU}}(x) = (\text{ReLU}(xW_1) \odot (xW_2))W_3$$

## 6 评估指标 (Evaluation Metrics)

### 6.1 Perplexity (PPL)

衡量语言模型好坏，越低越好。对于序列  $W = w_1, \dots, w_N$ :

$$\text{PPL}(W) = P(w_1, \dots, w_N)^{-\frac{1}{N}}$$

或基于交叉熵:

$$\text{PPL}(W) = \exp(\text{CrossEntropyLoss}) = \exp\left(-\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log P(w_i | w_1, \dots, w_{i-1})\right)$$

## 7 优化器相关 (Optimizer Related)

### 7.1 SGD with Momentum

$v_t$  是动量项,  $\gamma$  是动量系数,  $\eta$  是学习率。

$$\begin{aligned} v_t &= \gamma v_{t-1} + \eta \nabla_{\theta} L(\theta_{t-1}) \\ \theta_t &= \theta_{t-1} - v_t \end{aligned}$$

### 7.2 Adam (Adaptive Moment Estimation) - 核心思想

$g_t = \nabla_{\theta} L(\theta_t)$  是梯度。

- 一阶矩 (动量):  $m_t = \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) g_t$
- 二阶矩 (平方梯度):  $v_t = \beta_2 v_{t-1} + (1 - \beta_2) g_t^2$
- 偏差修正:  $\hat{m}_t = \frac{m_t}{1 - \beta_1^t}, \quad \hat{v}_t = \frac{v_t}{1 - \beta_2^t}$
- 参数更新:  $\theta_{t+1} = \theta_t - \frac{\eta}{\sqrt{\hat{v}_t + \epsilon}} \hat{m}_t$