中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

考虑患者重返就诊的最优就诊速率控制策略研究

报告人：王明宇

中国科学技术大学，统计与金融系

2022 年 6 月 7 日

大纲

1 研究背景

2 理论模型

3 研究方法

4 结果和敏感性分析

5 未来工作

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

- 新冠疫情的爆发让全球的医疗行业受到巨大冲击，如何利用运筹学的方法来提高医院运转效率很有研究价值

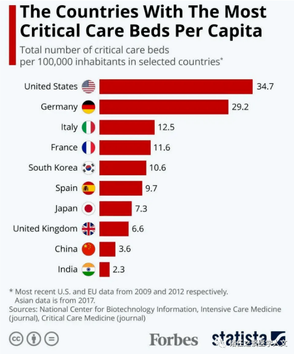


图: 全球人均重症床位

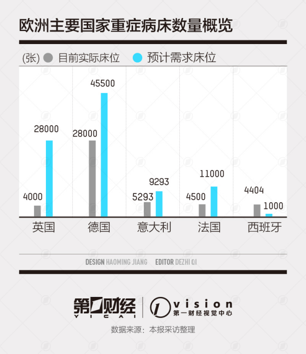
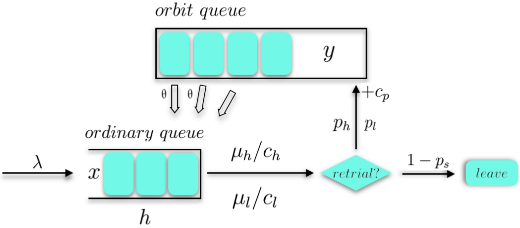


图: 床位紧缺

- 本文研究了一个医院就诊台的二维排队模型



- 目标：长程平均准则下得到该模型的最优策略
- 长程平均费用定义如下

$$\phi_\pi(i) = \lim_{n\to\infty} \frac{E_\pi\left\{\sum_{j=0}^{n} R(X_j, a_j) | X_0 = i\right\}}{n+1}$$

- 问题难点：二维排队系统；系统状态无限；连续时间

- 这是一个二维连续时间马氏过程，转移强度如下
  - $(x,y)\mapsto(x+1,y)$ 速率为 λ
  - $(x,y)\mapsto(x+1,y-1)$ 速率为 θy（要求 $y\geq 1$）
  - $(x,y)\mapsto(x-1,y+1)$ 速率为 $p_s\mu_s$（要求 $x\geq 1$）
  - $(x,y)\mapsto(x-1,y)$ 速率为 $(1-p_s)\mu_s$（要求 $x\geq 1$）
- 利用无穷小分析法，可以写出最优方程

$$
\begin{aligned}
v(x,y)=\min_{s\in\{l,h\}}\Bigg\{&\frac{xh+c_s-\gamma}{\lambda+\theta y+\mu_s\cdot 1(x\geq 1)}+\frac{\lambda\cdot v(x+1,y)}{\lambda+\theta y+\mu_s\cdot 1(x\geq 1)}\\
&+\frac{\theta y}{\lambda+\theta y+\mu_s\cdot 1(x\geq 1)}v(x+1,y-1)\\
&+\frac{p_s\mu_s}{\lambda+\theta y+\mu_s}(v(x-1,y+1)+c_p)\cdot 1(x\geq 1)\\
&+\frac{(1-p_s)\mu_s}{\lambda+\theta y+\mu_s}v(x-1,y)\cdot 1(x\geq 1)\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

- 第一步：初始化首先设立模型参数，选择初始策略 π_0 为在所有状态下都选择高服务速度。通过计算如下线性方程可以得到 π_0 对应的相对值函数 $\{v_0(x,y)\}$ 和长期平均费用 γ_0

$$
\begin{aligned}
v_0(x,y) = & \frac{xh + c_h - \gamma_0}{\lambda + \theta y + \mu_h \cdot 1(x \geq 1)} + \frac{\lambda}{\lambda + \theta y + \mu_h \cdot 1(x \geq 1)} v_0(x+1, y) \\
& + \frac{\theta y}{\lambda + \theta y + \mu_h \cdot 1(x \geq 1)} v_0(x+1, y-1) \\
& + \frac{p_h \mu_h}{\lambda + \theta y + \mu_h} (v_0(x-1, y+1) + c_p) \cdot 1(x \geq 1) \\
& + \frac{(1-p_h)\mu_h}{\lambda + \theta y + \mu_h} v_0(x-1, y) \cdot 1(x \geq 1)
\end{aligned}
$$

和

$$
v_0(0,0) = 0,\ 0 \leq x, y \leq M
$$

- 第二步：策略提升假设第 k 个策略为 π_k，$k \geq 0$，对应相对值函数 $\{v_k(x,y)\}$ 和长期平均回报 γ_k。在任意状态 (x,y)，通过对比下式的大小得到提升策略 π_{k+1}

$$
\begin{aligned}
\min_{s\in\{l,h\}} \Bigg\{ & \frac{xh + c_s - \gamma_k}{\lambda + \theta y + \mu_s \cdot 1(x \geq 1)} + \frac{\lambda}{\lambda + \theta y + \mu_s \cdot 1(x \geq 1)} v_k(x+1, y) \\
& + \frac{\theta y}{\lambda + \theta y + \mu_s \cdot 1(x \geq 1)} v_k(x+1, y-1) \\
& + \frac{p_s \mu_s}{\lambda + \theta y + \mu_s} (v_k(x-1, y+1) + c_p) \cdot 1(x \geq 1) \\
& + \frac{(1-p_s)\mu_s}{\lambda + \theta y + \mu_s} v_k(x-1, y) \cdot 1(x \geq 1) \Bigg\}
\end{aligned}
$$

若 $\pi_{k+1} = \pi_k$，则停止迭代，π_{k+1} 就是最优策略。否则利用 step1 计算 π_{k+1} 的相对值函数 $\{v_{k+1}(x,y)\}$ 和长期平均回报 γ_{k+1}，然后重复 step2。

- 利用简单模型给出队长极限概率分布上界

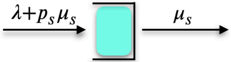


图: $M/M/1$

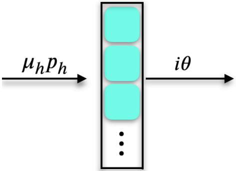
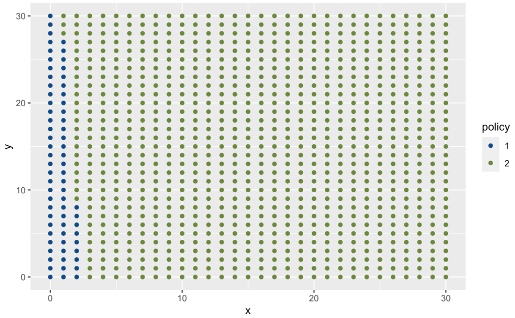


图: $M/M/\infty$

经过计算，我们可以发现在基准参数设置下，(x, y) 超过 $\frac{M}{2}$ 的概率分别不会超过 0.06 和 0.0003，所以我们设置的截断是合适的。

- 按照下表设置基准参数，得到最优策略 π^*。与初始策略 π_0 相比，π^* 将单位时间费用 γ 从 5.73 降低到 4.61，降低了 20%，并且有明显的阈值结构，主要受 x 影响。

参数	λ	μ_h	μ_l	p_h	p_l	θ	h	c_h	c_l	c_p
数值	1.5	4	2	0.3	0.15	0.1	1	2	1	4



- 先改变不同费用间的比例关系，然后再改变到达速率和服务速率之间的比例关系。

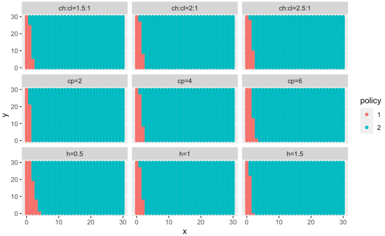


图: 改变费用参数

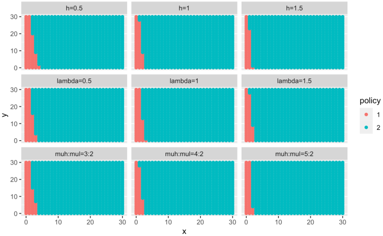


图: 改变运行速率参数

可以发现最优策略的分布情况基本保持稳定，并且具有一定的单调性。

- $v(x, y)$ 关于变量 x, y 有线性或二次增长的关系，借此关系来改进替代方法可能能够改善最优策略在边界处的表现。
- 与只依赖主队列长 x 来进行决策的最优策略进行比较。
- 研究系统在超负荷运行下的最优策略。

谢谢聆听!