# 1 随机变量的数字特征

## 1.1 随机变量的数学期望

### 1.1.1 离散型

定义: 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则

$$EX = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

note: 重点注意此处无限时的情况，对于有限个离散型随机变量，显然必然存在其期望，但是当有无限个随机变量时就要注意存在性

### 1.1.2 连续型

定义: 若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx$ 收敛，则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

### 1.1.3 函数

设 Y 是随机变量 X 的函数 $Y = g(X)$g（x）是连续函数 1)X 是离散型随机变量

$$EY = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$$

2)X 是连续型随机变量

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx$$

### 1.1.4 二维变量

设 Z 是随机变量 X，Y 的函数，Z = g(X,Y),g 是连续函数 1)(X,Y) 是二维离散型随机变量

$$EZ = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$$

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i p_{ij}$$

$$EY = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} y_j p_{ij}$$

2)(X,Y) 是二维连续型随机变量

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y)\, dxdy$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y)\, dxdy$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y)\, dxdy$$

### 1.1.5 期望的性质

1.$E(c) = c$ 常数的期望是本身，自身没有变化，期望就展示自己

2.$E(cX) = cE(X)$ 期望内的系数可以提出来，线性

3.$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$ 两个期望相加减依然满足线性

4. 若 $X_1, X_2$ 互相独立，则 $E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$

note:1) 综合使用 123，$E(aX_1 + b + cX_2 + d) = aE(X_1) + b + cE(X_2) + d$, 记忆期望满足线性相加

2) 由两个互相独立的随机变量的函数也互相独立得到:$E(g(X_1)f(X_2)) = E(f(X_2))E(g(X_1))$

## 1.2 方差

### 1.2.1 随机变量的方差

1. 定义: 对于随机变量 X，方差 $DX = E\{[X - E(X)]^2\}$, 标准差 $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$

2. 计算时，方差一般用 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ 计算时

### 1.2.2 方差的性质

1.$D(c) = 0$ 常数不偏离其期望

2.$D(aX + b) = a^2D(X)$, 定义的平方造成了方差的非线性

3. 若 X，Y 相互独立，$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

### 1.2.3 常见分布的期望与方差

1.0-1 分布，X~B(1,p)，$EX = p, DX = p(1 - p)$

2. 二项分布，X~B（n，p）$EX = np, DX = np(1 - p)$

3. 泊松分布，X~P($\lambda$) ,$EX = \lambda, dx = \lambda$

4. 几何分布，X~G（p），$EX = \frac{1}{p}, DX = \frac{q}{p^2}$

5. 均匀分布，X~U(a,b),$EX = \frac{a+b}{2}, DX = \frac{(b-a)^2}{12}$

6. 指数分布，X~E($\lambda$),$E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

7. 正态分布，X~N($\mu, \sigma^2$),$E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$

## 1.3 协方差和相关系数

### 1.3.1 协方差

1. 定义: 二维随机变量（X，Y），$Cov(X,Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E(XY) - E(X)E(Y)$

2. 性质: 1)$Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

2)$Cov(X,X)=D(X)$

3)$Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$

4) 若 X，Y 相互独立，则 $Cov(X,Y)=0$

5)$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

6)$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)+2abCov(X,Y)$

### 1.3.2 相关系数

1. 定义:$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

2. 性质:1)$|\rho_{XY}|\leq 1$;2)$|\rho_{XY}|=1$ 时，存在 $Y=aX+b$

note: 相关系数仅描述了线性的相关程度，是一种弱于独立的条件，独立则必然不相关，但是不相关不一定独立

3. 二维正态随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$,XY 的相关系数是 $\rho$