1 随机变量及其分布

1.1 随机变量及其分布函数

1.1.1 随机变量

1. 定义: 设 Ω 为一个样本空间，若对任意的 $\omega \subset \Omega$, 都有一个实数 $X(\omega)$ 于之对应，那么称 $X(\omega)$ 是一个随机变量

1.1.2 随机变量的分布函数

1. 定义:

$$F(x) = P(X \leq x), x \in R$$

$F(x)$ 是随机变量的分布函数

2. 随机变量与高等函数中所学函数的不同: 随机变量无法定义极限，也就无法定义连续性和求导

3. 分布于函数的特点: 每个随机变量都由唯一的分布函数，并且一维随机变量的概率特性完全由它的分布函数来决定

4. 分布函数的性质

$$\begin{cases} (1)\ \text{右连续} \\ (2)\ \text{单调不减} \\ (3) F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1 \end{cases}$$

当一个函数 $g(x)$ 满足上述三个性质，则必然存在一个随机变量，使 g 为其分布函数

5. 推导公式

$$P(a \leq X \leq b) = P(b) - P(a-0)$$
$$P(a < X < b) = P(b-0) - P(a)$$
$$P(a \leq X < b) = P(b-0) - P(a-0)$$

1.2 离散型随机变量

1.2.1 分布列及其性质

1. 定义: 随机变量 X 的取值为一些离散的值 (可列多个)，那么 X 就是一个离散型随机变量

$$P(X = x_i) = p_i$$

为 X 的分布列

2. 特点: 离散型随机变量的分布函数和分布列等价，而且离散型随机变量的分布函数一定是阶梯函数，反过来也成立，一个随机变量的分布函数是阶梯函数，那么它一定是离散型随机变量

3. 性质: 1) 非负性:$p_i \geq 0$

2) 归一性:$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

1.2.2 常见的离散型随机变量

1. 二项分布: 将样本空间 Ω 以 $A,\overline{A}$ 做划分，$P(A)=p,1-P(A)=q$ 设离散型随机变量 X 为在 n 次独立重复的试验中事件 A 发生的次数，则:

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$$

称 X 服从参数为 n 的二项分布，记为 $X\ B(n,p)$

note:1)0-1 分布:$X\ B(1,p)$，只进行一次随机试验

2. 泊松分布: 对于稀有事件，其发生的概率 p 很小，但是试验的次数 n 很大时，设离散型随机变量 X 为在 n 次独立重复的试验中事件发生的次数，则:

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,\cdots,n$$

称 X 服从参数为 n 的泊松分布，记为 $X\ P(\lambda)$

note:1) 泊松逼近定理: 设 X B(n,p)$\lim_{n\to\infty} np_n=\lambda$

$$lim_{n\to\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,\cdots,$$

说明泊松分布就是特殊情况下的二项分布

3. 几何分布: 将样本空间 Ω 以 $A,\overline{A}$ 做划分，$P(A)=p,1-P(A)=q$ 设离散型随机变量 X 为在 n 次独立重复的试验中事件 A 首次发生时的试验次数，则:

$$P(X=k)=pq^{k-1},\quad k=1,2,\cdots,$$

称 X 服从参数为 n 的几何分布，记为 $X\ G(p)$

note: 无记忆性: 若 $X\ G(p)$，则

$$P(X>n+t|X>n)=P(X>t)$$

4. 超几何分布: 取出问题，无放回，无次序

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{N-k}}{C_N^n}$$

当 N 趋于无穷大时，类似于二项分布

1.3 连续型随机变量

在非离散的随机变量中，仅讨论分布函数可以写为 $F(x)=\int_x^{-\infty} f(t)\,dt$ 的连续型随机变量

1.3.1 连续性随机变量的定义与密度函数

以几何概型为例，在区间上随机放点，放在某一个区域的概率 $P(c\quad d)=\frac{c-d}{b-a}$ 那么对于在该区间上的一个点 e，$P(e\quad e)=0$, 无法运算，所以我们使用概率密度来描述

概率密度为单位长度的概率，在求某一个区间的概率时，只需要对长度积分即可

1. 定义: 对于一个分布函数 F(x) 满足

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

则 X 是连续性随变量，f(t) 是它的概率密度函数

2. 性质:1) 非负性。2) 归一性

note:1) 连续型随机变量的分布函数连续，但是分布函数连续不能保证随机变量是连续型

2) 在密度函数 f(x) 的连续点 x_0 处，有 $F'(x_0) = f(x_0)$

3)

$$P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

1.3.2 常见的连续型随机变量

1. 均匀分布

在一个区间内，等可能任取一点记为 X，X 的密度函数:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if } a < x < b \\ 0 & \text{if 其他} \end{cases}$$

称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布，记为 X U(a,b) 做积分的均匀分布的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{if } a \leq x < b \\ 1 & \text{if } b \leq x \end{cases}$$

2. 指数分布

电子产品的工作寿命 X，则 X 的密度函数:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

其中参数为 λ, 称 X 服从参数为 λ 的指数分布，记作 $X\ E(\lambda)$

分布函数:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

类似于几何分布，指数分布也有无记忆性:

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$$

3. 正态分布

对于一种统计数据 X，将其当作随机变量，则概率密度:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in R$$

其中 $\mu \in R, \sigma > 0$, 称 X 服从正态分布，记作 $X\ N(\mu, \sigma^2)$

μ 位置参数，f(x) 关于 $x = \mu$f 对称，σ 形状参数，σ 越小 f(x) 图像越窄越高

正态分布的分布函数:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

标准正态分布: 取 $\mu = 0\ \sigma = 1$ 密度函数:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in R$$

分布函数:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

note: 正态分布化标准正态分布: 若 $X\ N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\frac{X-\mu}{\sigma}\ N(0, 1)$

1.4 随机变量函数的分布

已知随机变量 X 和其密度函数分布函数，而 $Y = g(x)$，一般情况，Y 是和 X 同类型的随机变量，如何求出 Y 的密度函数

1.4.1 离散型

已知 $P(X = x_i) = p_i$, 则 $P(Y = g(x_i)) = p_i$

当函数 Y=g(X) 不单调时，得到的相同的 Y 概率要求和

1.4.2 连续型

步骤: 1. 由 X 的取值范围求出 Y 的取值范围

2. 求出 Y 的分布函数 $F_Y(y)$

3. 对 Y 的分布函数计算积分后求导 (均匀分布) 或者直接求导得到密度函数

note: 当 y = g(x) 是严格单调函数，并且具有一阶连续导数时，x = h(y) 是 y = g(x) 的反函数，则 Y = g(X) 的密度函数:

$$f_Y(y) = f_X(h(y))|h'(y)|$$