1 参数的点估计以及优越性

1.1 点估计

点估计: 通过样本值求出总体参数的一个具体估计量或估计值

1.1.1 矩估计法

1. 思路: 用样本矩替换同阶总体矩

2. 过程: 1) 令 $EX = \overline{X}$

2) 代入参数得到 $h(\theta) = \overline{X}$

3) 将样本求出的 $\overline{X}$ 代入上式，解出未知量 θ

在存在多个未知数的情况时，由大数定律

$$E(X^i) = A_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^i$$

列出方程组求解即可

1.1.2 最大似然估计法

1. 思路: 设一个随机试验由若干种可能 $A_1, A_2, \cdots$，在一次试验中出现了结果 A_k，认为试验 A_k 出现概率大，将事件 A_k 的概率写为 $P_{A_k} = h(\theta)$，令 P_{A_k} 最大，求出对应的 θ

2. 似然函数: 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 时简单随机样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本观测值，称

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta)$$

为参数 θ 的似然函数，指样本恰好取观测值的概率

3. 设 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \theta)$ 为参数 θ 的似然函数, 若存在一个只与样本观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 相关的实数 $\widehat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 使得

$$L(\widehat{\theta}) = maxL(\theta)$$

则称 $\widehat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为参数 θ 的最大似然估计值，称 $\widehat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为参数 θ 的最大似然估计量

note:1）似然函数不一定由极大值点，但必然有最大值点，有时候求驻点会失效；2）在多个乘积时，求对数似然函数 $\ln L(\theta)$ 会较好求最大值点，$\ln L(\theta), L(\theta)$ 有相同的最大值点

1.2 点估计优良性的评判

不同方法求出的估计量不同时判断哪个估计量更好

1.2.1 无偏性

1. 若参数 θ 的估计量 $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 满足

$$E(\widehat{\theta}) = \theta$$

则称 $\widehat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量

2. 解释了为什么方差定义为 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

3. 若求出有偏估计量可以变换为无偏估计量

1.2.2 有效性

1. 设 $\widehat{\theta}_1$,$\widehat{\theta}_2$, 都是参数 θ 的无偏估计量，如果

$$D(\widehat{\theta}_1) < D(\widehat{\theta}_2)$$

则 $\widehat{\theta}_1$ 比 $\widehat{\theta}_2$ 更有效

1.2.3 一致性 (相合性)

1. 设 $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 θ 的一个估计量，对于任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\widehat{\theta}_n - \widehat{\theta}| < \varepsilon\} = 1$$

则称 $\widehat{\theta}_n$ 是 θ 的一致估计量

note: 这个条件很强，一般很难取到