1 概率论的基本概念

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机实验和随机事件

1. 随机实验条件:

 1) 可重复性

 2) 结果有多个且已知

 3) 结果不可预知

2. 样本空间:$\Omega = \{\omega\}$ 所有可能结果的集合
 样本点:Ω 中的一个元素
 随机事件: 集合 Ω 的子集，其中 Ω 本身为必然事件，$\emptyset$ 为不可能事件
 当事件 A 中的样本点出现称为事件 A 发生

1.1.2 事件间的关系和运算

1. 事件的包含与相等: 同集合的包含与相等
2. 和事件（并集）: $A \cup B \iff$ A 和 B 至少有一件发生
3. 积事件（交集）: $A \cap B = AB \iff$ A 和 B 同时发生
4. 差事件（差集）: $A - B \iff$ A 发生但 B 不发生
5. 补事件（补集）: $\overline{A} = \Omega - A$, $A - B = A - AB = A\overline{B}$
6. 互不相容（互斥）

1.2 概率的定义及其基本性质

1.2.1 频率和概率

1. 频率:$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$, 实验重复 n 次，其中事件 A 发生的次数为 n_A
 性质: 1) 非负性:$f_n(A) \geq 0$
 2) 归一性:$f_n(\Omega) = 1$
 3) 可列可加性: 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为两两不相容事件, 则:

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

2. 概率: 当随机实验重复的次数足够多时，事件 A 发生的频率将趋近于一个常数，这个常数就是事件 A 发生的概率，记作 P(A)

概率公理化定义: 随机实验中，对于事件 A，有一个常数 P(A) 满足:
 1) 非负性:$P(A) \geq 0$
 2) 归一性:$P(\Omega) = 1$
 3) 可列可加性: 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为两两不相容事件, 则有:

$$P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

则称 P(A) 为事件 A 的概率

概率的性质: 1)$P(\Phi)=0$

2) 有限可加: 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为两两不相容事件, 则有:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3) 若 $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$

4)$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

5)$P(A-B) = P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$

6)$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 更多项相加时记忆口诀: 单加双减

1.3 等可能概型

1.3.1 古典概型

1. 定义: 1) 样本空间中的样本的总数有限

2) 每个样本点出现的可能性相等

2. 计数方法 (课本 p12 页例题): 1) 取球问题

2) 分房 (分组) 问题

3) 抽签问题

4) 生日问题

1.3.2 几何概型

1. 定义: 1) 样本空间中的样本的总数无限

2) 每个样本点出现的可能性相等

常利用长度面积体积的比来求概率

2. 计数方法: 1) 会面问题

1.4 条件概率

1.4.1 条件概率的定义

1. 定义: 在已知事件 B 发生的情况下事件 A 发生的概率记为 $P(A|B)$

2. 性质: 1) 非负性:$P(A|B) \geq 0$

2) 归一性:$P(\Omega|B) = 1$

3) 可列可加性: 若 $A_1, A_2, \cdots$ 为两两不相容事件, 则有:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$$

1.4.2 乘法公式

乘法公式:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

1.4.3 全概率公式和贝叶斯公式

1. 全概率公式: 设 $A_1\ A_2, \cdot, A_n$ 是 Ω 的一个划分，则是对任意的事件 B 有:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

在此处 n 可以取 ∞

使用全概率公式的情况:1) 一个随机试验包括两个阶段，其中第二个阶段的结果收第一个阶段的影响. 2) 第一个阶段的所有可能结果已知.3) 求第二个阶段的概率。将第一个阶段的各种情况看作是划分

2. 贝叶斯公式: 设 $A_1\ A_2, \cdot, A_n$ 是 Ω 的一个划分, 如果 $P(A_k)>0$, 则对认识的事件 B，只要 $P(B)>0$, 就有

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_kB)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

1.5 独立性和伯努利试验

1.5.1 独立性

1. 定义: 对于事件 A 和事件 B，当 $P(AB)=P(A)P(B)$ 时，A 和 B 相互独立。该式子是证明独立性的唯一条件。

note: 1)$P(AB)=P(A)P(B) \nLeftrightarrow P(B|A)=P(B)$, 后者要求 $P(A)>0$, 用前者作为定义显然适用性更广

2) 独立性表明 A 对 B 的概率没有影响，而不是说 A 对 B 没有影响

3) 区别两两独立和相互独立，两两独立仅是所有两者组合独立，而相互独立包括三者及以上的独立性，所以相对独立条件包括两两独立，为更强条件

2. 性质: 1) 独立事件必然相容，且在每一部分的概率成比例

2) 事件 A 与自身独立，则 $P(A)=1 \quad or \quad P(A)=0$

3) 在 $(A,B),(\overline{A},B),(A,\overline{B}),(\overline{A},\overline{B})$ 之中，有一对相互独立，则其他几组也都相互独立

1.5.2 n 重伯努利试验

1. 定义: 一个试验 E 仅有两种结果 $A,\overline{A}$, 并且 $P(A)=p,P(\overline{A})=1-p=q(0<p<1)$ 而对这个试验重复 n 次，这 n 次试验相互独立，则将这 n 次试验看作一次试验，称为 n 重伯努利试验。

求事件 A 出现 m 次的概率:

$$P(A_m)=C_n^mP(A)^mP(\overline{A})^{n-m}=C_n^mp^mq^{n-m}$$