1 随机变量的数字特征

1.1 随机变量的数学期望

1.1.1 离散型

定义: 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则

$$EX = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

note: 重点注意此处无限时的情况，对于有限个离散型随机变量，显然必然存在其期望，但是当有无限个随机变量时就要注意存在性

1.1.2 连续型

定义: 若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx$ 收敛，则

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$$

1.1.3 函数

设 Y 是随机变量 X 的函数 $Y = g(X)$g（x）是连续函数 1)X 是离散型随机变量

$$EY = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$$

2)X 是连续型随机变量

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx$$

1.1.4 二维变量

设 Z 是随机变量 X，Y 的函数，Z = g(X,Y),g 是连续函数 1)(X,Y) 是二维离散型随机变量

$$EZ = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$$

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i p_{ij}$$

$$EY = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} y_j p_{ij}$$

2)(X,Y) 是二维连续型随机变量

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y)\, dxdy$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y)\, dxdy$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y)\, dxdy$$

1.1.5 期望的性质

1.$E(c)=c$ 常数的期望是本身，自身没有变化，期望就展示自己

2.$E(cX)=cE(X)$ 期望内的系数可以提出来，线性

3.$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$ 两个期望相加减依然满足线性

4. 若 X_1,X_2 互相独立，则 $E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)$

note:1) 综合使用 123，$E(aX_1+b+cX_2+d)=aE(X_1)+b+cE(X_2)+d$, 记忆期望满足线性相加

2) 由两个互相独立的随机变量的函数也互相独立得到:$E(g(X_1)f(X_2))=E(f(X_2))E(g(X_1))$

1.2 方差

1.2.1 随机变量的方差

1. 定义: 对于随机变量 X，方差 $DX=E\{[X-E(X)]^2\}$, 标准差 $\sigma_x=\sqrt{D(X)}$

2. 计算时，方差一般用 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ 计算时

1.2.2 方差的性质

1.$D(c)=0$ 常数不偏离其期望

2.$D(aX+b)=a^2D(X)$, 定义的平方造成了方差的非线性

3. 若 X，Y 相互独立，$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

1.2.3 常见分布的期望与方差

1.0-1 分布，X~B(1,p)，$EX=p,DX=p(1-p)$

2. 二项分布，X~B（n，p）$EX=np,DX=np(1-p)$

3. 泊松分布，X~P(λ) ,$EX=\lambda,dx=\lambda$

4. 几何分布，X~G（p），$EX=\frac{1}{p},DX=\frac{q}{p^2}$

5. 均匀分布，X~U(a,b),$EX=\frac{a+b}{2},DX=\frac{(b-a)^2}{12}$

6. 指数分布，X~E(λ),$E(X)=\frac{1}{\lambda},D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

7. 正态分布，X~N(μ,σ^2),$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$

1.3 协方差和相关系数

1.3.1 协方差

1. 定义: 二维随机变量（X，Y），$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)$

2. 性质: 1)$Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

2)$Cov(X,X)=D(X)$

3)$Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$

4) 若 X，Y 相互独立，则 $Cov(X,Y)=0$

5)$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

6)$D(aX+bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)+2abCov(X,Y)$

1.3.2 相关系数

1. 定义:$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

2. 性质:1)$|\rho_{XY}|\leq 1$;2)$|\rho_{XY}|=1$ 时，存在 $Y=aX+b$

note: 相关系数仅描述了线性的相关程度，是一种弱于独立的条件，独立则必然不相关，但是不相关不一定独立

3. 二维正态随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)$,XY 的相关系数是 ρ

4. 若（X，Y）服从二维正态，则 X，Y 互相独立等价于 X,Y 互不相关

5. 二维正态分布（X，Y），令 $Z=aX+bY,W=cX+dY$ 则（Z，W）也服从二维正态分布

1.3.3 随机变量的标准化

1. 定义: 随机变量 X 的期望与方差都存在则

$$X'=\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}$$

为 X 的标准化随机变量

2. 性质:1)$EX'=0,DX'=1$;2)$\rho_{X,Y}=\rho_{X',Y'}=EX'Y'$

1.4 其他数字特征

1.4.1 矩

1. 定义:X 为随机变量，如果 $E|X|^k<+\infty$，则称 EX^k 为随机变量的 k 阶原点矩，$E(X-EX)^k$ 为 X 的 k 阶中心矩

1.4.2 协方差矩阵

1. 定义: 设有 n 个随机变量，令 $\sigma_{ij}=Cov(X_i,X_j)$, 则矩阵 $\sum=(\sigma_{ij})_{n*n}$ 为这 n 个随机变量的协方差矩阵

2. 性质:1）协方差矩阵是对称矩阵；2）协方差矩阵是半正定矩阵