1 大数定理与中心极限定理

1.1 大数定理

1.1.1 切比雪夫不定式

1. 定理: 随机变量 X，$EX = \mu, DX = \sigma^2$ 对任意正数 ε 有

$$P\{|X-\mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

也可写为

$$P\{|X-\mu| < \varepsilon\} \geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

1.1.2 大数定律

1. 定义: 对于一个随机变量序列，对于任意正数 ε 有

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|X_n - a| \geq \varepsilon\} = 0$$

或

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1$$

称为随机变量序列依概率收敛于 a

note: 这里的极限是在概率意义下的，表示当 n 充分大时序列发生的概率越来越接近于 a

2. 切比雪夫大数定律

设随机变量序列相互独立，每一个随机变量存在有限的方差，且一致有界，则对于任意正数 ε 有

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)| \geq \varepsilon\} = 0$$

表示 n 很大时，随机变量的算数平均值概率意义上接近其数学期望

3. 伯努利大数定律

设 n_A 是在 n 重伯努利试验中事件 A 发生的概率，则对任意正数 ε 有

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|\frac{n_A}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0$$

表示当 n 充分大时事件 A 发生的频率概率意义上接近事件 A 的概率

4. 辛钦大数定律

设随机变量序列独立同分布，则对于任意正数 ε 有

$$\lim_{n\to+\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu| > \varepsilon\} = 0$$

表示 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 概率收敛于 μ

1.2 中心极限定理

1. 独立同分布的中心极限定理

设随机变量序列相互独立同分布，则

$$\lim_{n\to+\infty} P\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\} = \Phi(x)$$

表示独立同分布的随机变量序列的和的标准化是正态分布

2. 拉普拉斯中心极限定理

设随机变量 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，则

$$\lim_{n\to+\infty} P\{\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \Phi(x)$$

表示正态分布是二项分布的极限分布，n 足够大时，二项分布 x 的标准化服从标准正态