

## 1 二维随机变量及其分布

### 1.1 二维随机变量的联合分布和边际分布

#### 1.1.1 二维随机变量的联合分布函数与性质

1. 联合分布函数:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

2. 性质: 1)  $F(x, y)$  分别关于  $x, y$  单调不减:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$$

$$y_1 < y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$$

2)  $F(x, y)$  满足非负有界性:

$$0 \leq F(x, y) \leq 1; F(+\infty, +\infty) = 1$$

对任意  $x, y: F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0$

显然  $F(x, +\infty) = F_X(x)$

3)  $F(x, y)$  分别关于  $x, y$  右连续:  $F(x+0, y) = F(x, y), F(x, y+0) = F(x, y)$

4) 若  $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ , 则

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

#### 1.1.2 边际分布函数

$F(x, y)$  是  $(X, Y)$  的联合分布函数, 在二维变量里  $X$  的分布函数为:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y \leq +\infty); x \in R$$

称为边际分布函数,  $F_Y(y)$  同理

### 1.2 二维离散随机变量

当  $X, Y$  都是离散型随机变量时 1. 联合分布列:  $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$

2. 联合分布列的性质: 1) 非负性; 2) 归一性

note: 由联合分布列可以求出联合分布函数:  $F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$

#### 1.2.1 离散型随机变量的边际分布

1.  $X$  的边际分布:  $P(X = x_i) = P(X = x_i, Y < +\infty) p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}, Y$  同理

### 1.2.2 条件分布函数

## 1.3 二维连续型随机变量及其分布

### 1.3.1 联合分布密度

1. 定义:  $F(x, y)$  分布函数, 存在非负函数  $f(x, y)$  使得所有的实数  $x, y$  有:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du$$

2.  $f(x, y)$  性质: 1)  $f(x, y) \geq 0$

2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

3)

4)

5)