第 23 次习题课

题 1. 验证 $f(x) = x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24$ 以 2 为根，并求它的重数。

题 2. 设 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 且 $f(x) \mid f(x^m)$，$m \geq 2$。证明：$f(x)$ 的根只能为 0 或单位根。

题 3. 设 $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 不可约。证明 $p(x)$ 在 $\mathbb{C}[x]$ 中没有重根。

题 4. 设 $f(x) \in K[x]$ 是一个 n 次多项式，$n \geq 1$。证明 $f'(x) \mid f(x) \iff$ 存在 $a \in K,\ c \in K^\times$ 使 $f(x) = c(x-a)^n$。

定义 1. 一个非零的整系数多项式 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ 是**本原的**，如果它各项系数的最大公因数只有 ± 1。

注. 可证明：（1）本原多项式的乘积还是本原的；（2）每个本原多项式可唯一地分解成不可约的本原多项式的乘积；(3) 若次数大于零的整系数多项式 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中可约，则存在 $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 满足 $\deg f_1, \deg f_2 < \deg f$ 且 $f(x) = f_1(x) f_2(x)$。

题 5. 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$，$a_n \neq 0$。若 $\frac{p}{q}$ 是 $f(x)$ 的一个有理根，其中 $(p, q) = 1$，那么 $p \mid a_0$，$q \mid a_n$。

题 6. 判断 $f(x) = x^3 + x + 1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中是否可约。

题 7. 设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 且 f 的首项系数为 1。证明：若 $f(0)$ 与 $f(1)$ 均为奇数，则 f 没有有理根。

题 8. 设 $f(x) \in \mathbb{R}[x]$，$c \in \mathbb{C}$。若 $f(c) = 0$，则 $f(\overline{c}) = 0$。

题 9. 证明：$\mathbb{R}[x]$ 中的不可约多项式都是一次多项式或判别式小于 0 的二次多项式。

推论 1. 每个次数大于零的实系数多项式都可唯一地分解为一次因式与判别式小于 0 的二次因式的乘积。

定理 1 (Eisenstein 判别法)**.** 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$。若存在素数 p 使得

$$(1)\ p \mid a_i\ (i = 0, \ldots, n-1), \quad (2)\ p \nmid a_n, \quad (3)\ p^2 \nmid a_0,$$

则 f 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约。

题 10. 证明：$\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$，$f(x) = x^n + 2$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约。

注. (1) $\mathbb{C}[x]$ 中的不可约多项式都是 1 次的。 (2) $\mathbb{R}[x]$ 中的不可约多项式或为 1 次的或为 2 次的。 (3) $\mathbb{Q}[x]$ 中存在任意次数的不可约多项式，例如 $x^n + 2$。

题 11. 将 $x^4 + 4$ 在 $\mathbb{C}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{Q}$ 上分解为不可约因式的乘积。

题 12. 求多项式 $x^n - 1$ 在实数域上的标准分解。

题 13. 设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$，$b \in \mathbb{Z}$。令 $g(x) := f(x+b) \in \mathbb{Z}[x]$。求证：$f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约当且仅当 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

题 14. 设 p 是素数，多项式

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$$

称为分圆多项式。求证：$f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约。

题 15. 判断 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是否可约。

题 16. 设 $f(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n) - 1$，其中 $a_1, \ldots, a_n$ 互不相同。证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约。

题 17. 设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 且 $f(1)$ 是奇数。证明 -1 不是 $f(x)$ 的根。

题 18. 设 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 且 f 的首项系数为 1。证明：若 $f(0)$ 与 $f(1)$ 均为奇数，则 f 没有有理根。

题 19. 设 $p_1, \ldots, p_n$ 是互不相同的素数，$n \geq 2$。证明 $\sqrt[n]{p_1 \cdots p_n}$ 为无理数。