

## 第 1 次习题课

**题 1.** 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . 表述以下语句, 并给出否定式。

(1)  $f$  是一个零函数。 (2)  $f(x) = 0$  有解。 (3)  $f(x) = 0$  只有一个解。 (4)  $f$  在  $\mathbb{R}$  上为常值函数。 (5)  $f$  的图像与直线  $y = x$  相交。 (6)  $f$  在  $\mathbb{R}$  上单调。

**题 2.** 设  $(u_n)$  为实数序列。表述以下语句, 并给出否定式。

(1)  $(u_n)$  有界。 (2)  $(u_n)$  递增。 (3)  $(u_n)$  单调。

**题 3.** 设  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . 表述以下语句, 并给出否定式。

(1)  $f = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ . (2)  $f$  至少有一个不动点。

**题 4.** 设  $A, B, C$  为平面上三角形  $T$  的三个顶点。

(1) 写出一个关于  $|AB|, |BC|, |CA|$  的命题  $P$  来表达  $T$  是等边三角形, 并给出  $\neg P$ 。

(2) 写出一个断言  $Q$  来表达  $T$  是等腰三角形, 并给出  $\neg Q$ 。

**题 5.** 给出以下语句的否定式。(1)  $P: 0 < x \leq 2$ . (2)  $P \Rightarrow Q$ . (3)  $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$ 。

**题 6.** 判定以下语句是否等价, 并简要给出理由。

(1)  $P: “\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \text{ 且 } g(x) = 0”$  与  $Q: “(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ 且 } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)”$ 。

(2)  $P: “\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \text{ 或 } g(x) = 0”$  与  $Q: “(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ 或 } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)”$ 。

**题 7.** 判断。(1)  $\exists x \in \mathbb{R}, \sin x = x$ . (2)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$ . (3)  $\forall x \in \mathbb{C}, x^2 + 1 \neq 0$ . (4)  $\exists x \in \mathbb{R}, “x - 1 = 0” \Rightarrow “x^2 + x + 1 = 0”$ . (5)  $\forall x \in \mathbb{R}, “x - 1 = 0” \Rightarrow “x^2 + x - 2 = 0”$ 。

**题 8.** 用量词给出以下命题, 并判断其真假。

(1) 所有的自然数是偶数或奇数。

(2) 所有自然数是偶数或所有自然数是奇数。

(3) 存在一个大于所有整数的整数。

**题 9.** 用量词给出以下命题。(1)  $f$  是  $\mathbb{R}$  上的函数。 (2)  $f$  在  $\mathbb{R}$  上不是常数。 (3)  $f$  在  $\mathbb{R}$  上是常数。

**题 10.** (1) 证明:  $f(x) = \sin x$  不是零函数。 (2) 证明:  $P: “\exists x \in \mathbb{R}, \cos x = 0”$  且  $Q: “\exists x \in \mathbb{R}, \sin x = 0”$  为真。 (3) 证明:  $P: “\exists x \in \mathbb{R}, \cos x = 0, \sin x = 0”$  为假。 (4) 证明  $\sqrt{2}$  是无理数。