第 9 次习题课

题 1. 设 G 是一个群, $a, b \in G$ 满足 $ab = ba$。若 a 的阶为 m, b 的阶为 n 且 $\gcd(m, n) = 1$,证明: ab 的阶为 mn。

题 2. 设 H 是 G 的子群并且 $[G : H] = 2$(陪集的个数)。证明: $H \triangleleft G$。

题 3. 设 $N \triangleleft G$。证明: G/N 上有一个自然的群结构。

题 4. 设 $H \triangleleft G$ 与 $K \leq G$。证明: (1) $HK = KH$; (2) HK 是 G 的子群; (3) $H \cap K \triangleleft K$ 且 $H \triangleleft HK$; (4) $K/(H \cap K) \cong HK/H$; (5) 若进一步假设 $K \triangleleft G$, 则 $HK \triangleleft G$。

定义 1. 设 H, K 是两个群, 易验证 $H \times K$ 关于乘法 $(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1h_2, k_1k_2)$ 构成一个群, 称为群 H 与 K 的**直积**。

题 5. 设 H, K 是群 G 的正规子群且满足 $H \cap K = \{e\}, HK = G$。证明: $G \cong H \times K$。

题 6. 设 G 是一个群, $Z(G)$ 是它的中心。如果商群 $G/Z(G)$ 是循环群, 则 G 是交换群。

题 7. 设 G 是有限群, H 是 G 的真子群, $N_G(H) = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\}$ 为 H 的正规化子群。证明:

(1) $g_1Hg_1^{-1} = g_2Hg_2^{-1} \iff g_1^{-1}g_2 \in N_G(H)$。

(2) 记 $X = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ 是 H 共轭群的集合, 则 $|X| = |G/N_G(H)|$。

(3) H 共轭子群的并是 G 的真子集。

题 8. 设 $G = \langle a \rangle$ 是 d 阶循环群, $m \in \mathbb{Z}$。证明: a^m 是 G 的一个生成元, 当且仅当 $(m, d) = 1$。

题 9 (交换群的柯西定理)**.** 设 G 是一个有限交换群, p 是一个素数且 p 整除 G 的阶。则 G 中存在一个阶为 p 的元素。