第 18 次习题课 (交换环的局部化)

在交换代数中，局部化是一种重要的构造，其过程类似于从整数环构造有理数域，但更具一般化。

定义 1 (可乘子集)**.** 设 R 是一个交换环。子集 $S \subseteq R$ 称为**可乘子集**，如果 $0 \notin S$, $1 \in S$ 且 $\forall s_1, s_2 \in S$，有 $s_1 s_2 \in S$。

例 1. 常见的可乘子集包括

(1) 若 P 是 R 的素理想，可验证 $S := R \setminus P$ 是可乘子集。

(2) 若 R 是整环，可验证 $S := R \setminus \{0\}$ 是可乘的，因为此时 $P = \{0\}$ 为 R 的素理想。

(3) 若 $a \in R$ 不是幂零的，可验证 $S = \{a^n \mid n \geq 0\}$ 是可乘的。

定义 2 (局部化)**.** 设 R 是交换环，$S \subseteq R$ 是可乘子集。设 $\mathrm{Inv}(S)$ 是如下二元对 (A, φ) 的集合，其中，A 是一个交换环，$\varphi : R \to A$ 是一个环同态使得 $\forall s \in S$，$\varphi(s)$ 在 A 中可逆。二元组 $(S^{-1}R,\ \iota) \in \mathrm{Inv}(S)$ 称为 R 关于可乘子集 S 的一个**局部化**，如果它是下面泛性质问题的一个解：$\forall (A, \varphi) \in \mathrm{Inv}(S)$，存在唯一的环同态 $\tilde{\varphi} : S^{-1}R \to A$ 使得 $\varphi = \tilde{\varphi}\iota$，即下图交换

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & S^{-1}R \arrow[d, dashed, "\exists! \tilde{\varphi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

也即，环同态 φ 唯一分解经过环同态 ι。

注. 上面的定义不能保证局部化的存在性，因为暂时不清楚上面的泛性质问题是否有解。利用泛性质可证明，若局部化存在，则在环同构的意义下，它是唯一的。

接下来，通过具体构造的办法，证明局部化的存在性。

等价关系：在集合 $R \times S$ 上定义关系：

$$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \iff \exists s \in S \text{ 使得 } (r_1 s_2 - r_2 s_1)s = 0. \qquad (\star)$$

题 1. 验证上面定义的关系是一个等价关系。

证明. 易验证自反性和对称性成立，下面来证明传递性。

设 $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$ 且 $(r_2, s_2) \sim (r_3, s_3)$，则存在 $t, u \in S$ 使得

$$(r_1 s_2 - r_2 s_1)t = 0, \quad (r_2 s_3 - r_3 s_2)u = 0.$$

从而有 $r_1 s_2 t = r_2 s_1 t$, $r_2 s_3 u = r_3 s_2 u$。

我们需要找到某个 $v \in S$ 使得

$$(r_1 s_3 - r_3 s_1)v = 0.$$

取 $v = s_2 t u$，显然 $v \in S$，并且有

$$\begin{aligned}
(r_1 s_3 - r_3 s_1)\cdot(s_2 t u) &= r_1 s_3 s_2 t u - r_3 s_1 s_2 t u \\
&= (r_1 s_2 t) s_3 u - (r_3 s_2 u) s_1 t \quad (\text{因为} r_1 s_2 t = r_2 s_1 t) \\
&= (r_2 s_1 t) s_3 u - (r_3 s_2 u) s_1 t \\
&= (r_2 s_3 u) s_1 t - (r_3 s_2 u) s_1 t \\
&= (r_2 s_3 u - r_3 s_2 u) s_1 t \\
&= 0 \cdot s_1 t \quad (\text{因为} r_2 s_3 u = r_3 s_2 u) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

所以有 $(r_1, s_1) \sim (r_3, s_3)$。 $\square$

注. 若 R 是整环，此时 R 中无平凡的零因子，易知关系定义中的 $(\star)$ 式等价于 $r_1 s_2 - r_2 s_1 = 0$。$(\star)$ 式的调整是为了使局部化理论也适用于存在非平凡零因子的环。

记 $\frac{r}{s}$ 为 (r, s) 所在的等价类。定义集合：

$$S^{-1}R := \frac{R \times S}{\sim} = \left\{ \frac{r}{s} \;\middle|\; r \in R, s \in S \right\}$$

在集合 $S^{-1}R$ 上定义两个二元运算：

$$\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2}$$
$$\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}$$

可验证上面的运算定义良好，且 $(S^{-1}R +, \cdot)$ 构成一个环。

题 2. 定义映射 $\iota : R \to S^{-1}R$，$r \mapsto \frac{r}{1}$。证明：ι 是一个环同态，并且 $S^{-1}R = (S^{-1}R, \iota)$ 是 R 关于 S 的局部化，即它满足泛性质。

证明. 要点：验证 ι 是环同态且 $\iota(s) = \frac{s}{1}$ 在 $S^{-1}R$ 中可逆，其逆为 $\frac{1}{s}$; 验证泛性质成立：给定 $\varphi : R \to A$，定义 $\tilde{\varphi}\left(\frac{r}{s}\right) = \varphi(r)\varphi(s)^{-1}$ （需验证 $\tilde{\varphi}$ 的定义良好性）。 $\square$

题 3 (局部化的基本性质)**.** 设 R 是交换环，$S \subseteq R$ 是可乘子集。$\iota : R \to S^{-1}R$, $a \to a/1$ 是典范同态。

(1) $\mathrm{Ker}(\iota) = \{r \in R \mid \exists s \in S,\ rs = 0\}$。

(2) ι 是单同态 $\iff$ S 中不含零因子。特别地，若 R 是整环，则 ι 是单同态。

(3) 如果 R 是整环，则 $S^{-1}R$ 也是整环。

证明. (1) 设 $\iota(r)=0$，即 $\frac{r}{1}=0$。等价于，存在 $s\in S$ 使得 $(r\cdot 1-0\cdot 1)s=rs=0$。
(3) 设 R 是整环，来证 $S^{-1}R$ 是整环。设 $\frac{r_1}{s_1}\cdot\frac{r_2}{s_2}=0$，则 $\frac{r_1r_2}{s_1s_2}=0$，存在 $s\in S$ 使得 $r_1r_2s=0$。由于 R 是整环且 $s\neq 0$，有 $r_1=0$ 或 $r_2=0$，从而 $\frac{r_1}{s_1}=0$ 或 $\frac{r_2}{s_2}=0$。从而 $S^{-1}R$ 是整环。 □

题 4. 设 R 是交换环，$S\subseteq R$ 是可乘子集。$\iota: R\to S^{-1}R,\ a\to a/1$ 是典范同态。证明:

(1) 若 I 是 R 的理想，则 $S^{-1}I:=\left\{\frac{a}{s}\;\middle|\; a\in I, s\in S\right\}$ 是 $S^{-1}R$ 的理想。

(2) 设 I 是 R 的一个理想，则 $S^{-1}I=S^{-1}R \iff I\cap S\neq\emptyset$。

(3) 若 J 是 $S^{-1}R$ 的理想，则 $I:=\iota^{-1}(J)=\left\{a\in R\mid \frac{a}{1}\in J\right\}$ 是 R 的理想，并且有 $J=S^{-1}I$。特别地，若 J 是 $S^{-1}R$ 的真理想，则 $I=\iota^{-1}(J)$ 为 R 的真理想。

(4) 若 I 是 R 的素理想且 $I\cap S=\emptyset$，则 $S^{-1}I$ 是 $S^{-1}R$ 的素理想。

(5) 存在双射:

$$\begin{aligned} f:\ \{I\lhd R\mid I\ \text{是素理想且} I\cap S=\emptyset\} &\to \{J\lhd S^{-1}R\mid J\ \text{是素理想}\}\\ I &\mapsto S^{-1}I:=\left\{\frac{a}{s}\;\middle|\; a\in I, s\in S\right\}. \end{aligned}$$

证明. (1) 易验证 $S^{-1}I=\left\{\frac{a}{s}\;\middle|\; a\in I, s\in S\right\}$ 是 $S^{-1}R$ 的理想。
(2) 右推左：设 $s\in I\cap S$，则 $\frac{s}{1}\in S^{-1}I$ 在 $S^{-1}R$ 中可逆，从而 $S^{-1}I=S^{-1}R$。
左推右：设 $S^{-1}I=S^{-1}R$，则存在 $a\in I, s\in S$ 使得 $\frac{a}{s}=\frac{1}{1}$。由等价关系定义，存在 $t\in S$ 使得 $(a-s)t=0$，即 $st=at\in I$。从而 $st\in I\cap S$。
(3) 易验证 $I:=\iota^{-1}(J)$ 的 R 的理想。还需证 $J=S^{-1}I$。
先证 $J\subseteq S^{-1}I$。任取 $\frac{a}{s}\in J$，由于 J 是 $S^{-1}R$ 的理想知 $\frac{a}{1}=\frac{a}{s}\cdot\frac{s}{1}\in J$。从而 $a\in I=\iota^{-1}(J)$。因此，$J\subseteq S^{-1}I$。
再证 $S^{-1}I\subseteq J$。任取 $\frac{a}{s}\in S^{-1}I$，其中 $a\in I$，$s\in S$。由 $a\in I$ 知 $\iota(a)=\frac{a}{1}\in J$。从而 $\frac{a}{s}=\frac{a}{1}\cdot\frac{1}{s}\in J$。因此，$S^{-1}I\subseteq J$。综合可有，$J=S^{-1}I$。
(4) 设 $\frac{a}{s},\frac{b}{t}\in S^{-1}R$ 满足 $\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}=\frac{ab}{st}\in S^{-1}I$。则存在 $c\in I$ 和 $u\in S$ 使得 $\frac{ab}{st}=\frac{c}{u}$。由等价关系定义，存在 $v\in S$ 使得 $(abu-cst)v=0$，即

$$abuv=cstv\in I.$$

又 I 是素理想且 $I\cap S=\emptyset$，从而有 $a\in I$ 或 $b\in I$。因此，$\frac{a}{s}\in S^{-1}I$ 或 $\frac{b}{t}\in S^{-1}I$。从而 $S^{-1}I$ 是 $S^{-1}R$ 的素理想。
(5) 由 (4) 知 f 定义良好。下证 f 是双射。
f 的单性：设 I 和 I' 是 R 的两个素理想满足 $I\cap S=\emptyset=I'\cap S$。若 $f(I)=f(I')$，即 $S^{-1}I=S^{-1}I'$，我们来证 $I=I'$。任取 $a\in I$，由于 $\frac{a}{1}\in S^{-1}I=S^{-1}I'$，从而存

在 $a' \in I', s \in S$ 使得 $\frac{a}{1} = \frac{a'}{s}$，由等价关系定义，存在 $t \in S$ 使得 $(as - a')t = 0$，即 $ast = a't \in I'$。由于 I' 是素理想且 $I' \cap S = \emptyset$，从而有 $a \in I'$。从而 $I \subseteq I'$。同理可证 $I' \subseteq I$。因此有 $I = I'$，也即 f 是单射。
f 的满性：任取 $S^{-1}R$ 的素理想 J，令 $I := \iota^{-1}(J)$。我们来证 I 是 R 的素理想且 $I \cap S = \emptyset$，并且有 $J = f(I)$。
由 (3) 知，$J = S^{-1}I$。由于 J 是 $S^{-1}R$ 的真理想，从而 I 是 R 的真理想，且 $S^{-1}I \neq S^{-1}R$。由 (2) 知，$I \cap S = \emptyset$。由于 $\iota : R \to S^{-1}R$ 是环同态及 J 是 $S^{-1}R$ 的素理想，易验证 $I = \iota^{-1}(J) \subsetneq R$ 是 R 是素理想。因此，f 在 I 上有定义，并且此时有 $f(I) = S^{-1}I = J$。从而 f 是满射。 $\square$

例 2 (常见的例子). (1) 设 $\mathfrak{p} \subseteq R$ 是素理想，取 $S = R \setminus \mathfrak{p}$。称 $R_{\mathfrak{p}} := S^{-1}R$ 是环 R 在**素理想 $\mathfrak{p}$ 处的局部化**。

(2) 如果 R 是整环，取 $S = R \setminus \{0\}$，则 $S^{-1}R$ 是域，称为 R 的**分式域**，记作 $\mathrm{Frac}(R)$。

(3) 设 $a \in R$ 不是幂零元，取 $S = \{1, a, a^2, \dots\}$。称 $R_a := S^{-1}R = R[1/a]$ 是环 R 在**元素 a 处的局部化**。

题 5. 取 $R = \mathbb{Z}, p$ 是一个素数，$\mathfrak{p} = (p) = p\mathbb{Z}$，验证 $R_{\mathfrak{p}} = \{\frac{r}{s} \mid r, s \in \mathbb{Z},\ p \nmid s\} \subseteq \mathbb{Q}$。

题 6. 设 $\mathfrak{p} \subseteq R$ 是 R 的一个素理想。则 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} := \{\frac{p}{s} \mid p \in \mathfrak{p},\ s \notin \mathfrak{p}\}$ 是环 $R_{\mathfrak{p}}$ 的唯一极大理想。特别地，$R_{\mathfrak{p}}$ 是一个局部环。

证明. 由题 3 易知，$\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 是 $R_{\mathfrak{p}}$ 的一个理想且为真理想。任取 $x = \frac{r}{s} \in R_{\mathfrak{p}}$，其中 $r \in R,\ s \notin \mathfrak{p}$。若 $r \in \mathfrak{p}$，则 $x = \frac{r}{s} \in \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$。由于 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 为 $R_{\mathfrak{p}}$ 的真理想，从而 $x = \frac{r}{s} \in \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 在 $R_{\mathfrak{p}}$ 中不可逆。若 $r \notin \mathfrak{p}$，则 $x = \frac{r}{s}$ 为 $R_{\mathfrak{p}}$ 中的可逆元。因此，理想 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 中的元素恰为环 $R_{\mathfrak{p}}$ 中的全部非可逆元素。利用这一点，可验证 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 是 $R_{\mathfrak{p}}$ 中的唯一极大理想。 $\square$

题 7. 设 R 是一个整环，$\mathbb{P} = \{\mathfrak{p} \lhd R \mid \mathfrak{p}$ 是素理想$\}$，$\mathbb{M} = \{\mathfrak{m} \lhd R \mid \mathfrak{m}$ 是极大理想$\}$。证明: $R = \cap_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}} R_{\mathfrak{p}} = \cap_{\mathfrak{m}\in\mathbb{M}} R_{\mathfrak{m}}$.

证明. 由于 R 是整环，$\mathfrak{p}_0 = \{0\}$ 是 R 的一个素理想。显然有

$$R \subseteq \cap_{\mathfrak{p}\in\mathbb{P}} R_{\mathfrak{p}} \subseteq \cap_{\mathfrak{m}\in\mathbb{M}} R_{\mathfrak{m}} \subseteq R_{\mathfrak{p}_0} = \{\frac{r}{s} \mid r, s \in R,\ s \neq 0\} = \mathrm{Frac}(R).$$

只需再证 $\cap_{\mathfrak{m}\in\mathbb{M}} R_{\mathfrak{m}} \subseteq R$。为此，任取 $a \in \cap_{\mathfrak{m}\in\mathbb{M}} R_{\mathfrak{m}}$，来证 $a \in R$。
易知 $I = \{r \in R \mid ra \in R\}$ 是 R 的一个理想。若 $a \notin R$，则 $1 \notin I$，从而 I 是 R 的一个真理想。令 $\mathfrak{m}_0 \in \mathbb{M}$ 且 $I \subseteq \mathfrak{m}_0$ (总是存在的)。由 $a \in \cap_{\mathfrak{m}\in\mathbb{M}} R_{\mathfrak{m}} \subseteq R_{\mathfrak{m}_0}$ 知，存在 $r \in R,\ s \in R \setminus \mathfrak{m}_0$ 使 $a = \frac{r}{s}$。从而 $sa = r \in R$。由 I 的定义知 $s \in I \subseteq \mathfrak{m}_0$，这与 $s \in R \setminus \mathfrak{m}_0$ 矛盾。因此，必有 $a \in R$。 $\square$