第 17 次习题课

题 1. 设 R 是一个交换环，$\{P_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 R 中素理想的一个升链。证明: $\widetilde{P} := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} P_k$ 和 $P := \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} P_k$ 均为 R 的素理想。

题 2. 设 I 是交换环 R 的一个真理想。证明:

(1) 理想集 $\Omega = \{J \lhd R \mid J \text{ 是素理想且} J \supseteq I\}$ 中存在一个极小元。

(2) 环 R 中存在一个极小素理想。

题 3 (15 次习题课)**.** 设 R 是交换环，I 和 J 是 R 的理想。证明：(1) $IJ := \{\sum a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J\}$ 是 R 的理想； (2) 若 P 是 R 的素理想且 $IJ \subseteq P$，则 $I \subseteq P$ 或 $J \subseteq P$。

定义 1. 设 R 是一个交换环，由一个元素 $a \in R$ 生成的理想 Ra 称为 R 的一个**主理想**。一个整环 R 称为一个**主理想整环** (简称 PID)，如果它的每个理想都是主理想。

题 4 (15 次习题中出现，但没来得及讲)**.** 考虑环 $\mathbb{Z}[x]$ 和 $\mathbb{Q}[x]$，证明：(1) $\mathbb{Z}[x]$ 的理想 $(2, x)$ 不是 $\mathbb{Z}[x]$ 的主理想。 (2) $\mathbb{Q}[x]$ 的理想 $(2, x)$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 的主理想。

题 5. 设 R 是一个主理想整环，$I = (p)$ 是 R 的一个非零理想，其中 $0 \neq p \in R$。证明: I 是极大理想 $\iff$ I 是素理想。

注. 上题中把零理想排除在外了。可考虑主理想整环 $\mathbb{Z}$，知零理想是 $\mathbb{Z}$ 的一个素理想，但零理想不是 $\mathbb{Z}$ 的极大理想。

定义 2. 设 R 是一个环，$J(R)$ 是 R 中所有极大理想的交集。称 $J(R)$ 为环 R 的 **Jacobson 根 (radical)**.

注. 记 $\mathrm{Nil}(R)$ 是 R 中所有素理想的交集，称为交换环 R 的**幂零根**。显然有 $J(R) \subseteq \mathrm{Nil}(R)$。习题 16 中证明了 $\mathrm{Nil}(R) = \sqrt{0}$(零理想的根理想)，从而幂零根中的元素恰为 R 中幂零元的集合。

题 6. 设 R 是一个交换环，$x \in R$。证明: $x \in J(R) \iff \forall y \in R$ 有 $1-xy$ 在 R 中可逆。

定义 3 (局部环)**.** 设 R 是交换环。如果 R 有且仅有一个极大理想 $\mathfrak{m}$，则称 R 为**局部环**。此时，商环 $R/\mathfrak{m}$ 是一个域，称为 R 的**剩余域**。

通常用 $(R, \mathfrak{m})$ 表示局部环，此时，Jacobson radical $J(R) = \mathfrak{m}$。

题 7. 设 R 是交换环，则 R 是局部环 $\iff$ R 的所有非可逆元构成一个理想。

定义 4 (赋值环)**.** 设 $\mathbb{F}$ 是一个域，$R \subseteq \mathbb{F}$ 是 $\mathbb{F}$ 的一个子环。如果 R 满足:

$$\forall x \in \mathbb{F}^{\times},\ x \in R \text{ 或 } x^{-1} \in R$$

则称 R 是 $\mathbb{F}$ 的一个**赋值环**。

题 8 (赋值环是局部环)**.** 每个赋值环 $R \subseteq \mathbb{F}$ 都是局部环，即它有唯一的极大理想。