第 15 次习题课

题 1. 设 A 是 Abel 群，$\mathrm{End}(A)$ 是 A 的自同态构成的集合。对于 $f, g \in \mathrm{End}(A)$，定义

$$(f+g)(a) := f(a) + g(a), \quad (f \cdot g)(a) := f(g(a)), \quad \forall a \in A.$$

验证：$(\mathrm{End}(A), +, \cdot)$ 是一个环。

题 2. 验证：$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个子环。

题 3. 设 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$。求证：

(1) 环 $\mathbb{Z}_m$ 中元 a 可逆 $\Leftrightarrow (a, m) = 1$。

(2) $\mathbb{Z}_m$ 是一个域 $\Leftrightarrow m$ 是一个素数。

题 4. 若环 R 中的每个元 $a \in R$ 都满足 $a^2 = a$，则称 R 为布尔（Boole）环。求证：

(1) 在布尔环 R 中，$2a = 0, \forall a \in R$。

(2) 布尔环 R 是交换环。

题 5. 环 R 中的元素 a 称为**幂零元**，如果存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $a^n = 0$。求证：

(1) 若 a 在 R 中幂零，则 $1 - a$ 在 R 中可逆。

(2) 若 R 为交换环，则全体幂零元素的集合 I 是 R 的一个理想。

定义 1. 理想 $I \subseteq R$ 称为**素理想**，若 $I \neq R$ 且 $\forall x, y \in R, xy \in I \Rightarrow x \in I$ 或 $y \in I$。

题 6. 求证：(1) 有限整环是域； (2) 有限交换环的素理想都是极大理想。

题 7. 设 $f: R \to S$ 是环的满同态，$Q \subseteq S$ 是 S 的一个理想，求证：

(1) $f^{-1}(Q)$ 是环 R 的理想。

(2) 若 Q 为 S 的素理想，则 $f^{-1}(Q)$ 为 R 的素理想。

(3) 令 $I = \ker(f)$，知 $S \cong R/I$，将两者进行等同。证明: 存在双射

$$\sigma: \{J \lhd R \mid I \subseteq J\} \to \{Q \mid Q \lhd S = R/I\}.$$

题 8. 设 R_1, R_2 是交换环, 考虑环 $R = R_1 \times R_2$。证明 R 的每个理想 I 都形如 $I = I_1 \times I_2$，其中 I_i 是 R_i 的理想。

题 9. 设 R 是交换环，I 和 J 是 R 的理想。证明：(1) $IJ := \{\sum a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J\}$ 是 R 的理想; (2) 若 P 是 R 的素理想且 $IJ \subseteq P$，则 $I \subseteq P$ 或 $J \subseteq P$。

题 10. 考虑多项式环 $\mathbb{R}[x]$ 和理想 $I = (x^2 + 1)$。证明：$\mathbb{R}[x]/I \cong \mathbb{C}$。

题 11. 考虑环 $\mathbb{Z}[x]$ 和 $\mathbb{Q}[x]$，证明：(1) $\mathbb{Z}[x]$ 的理想 $(2, x)$ 不能由 $\mathbb{Z}[x]$ 中的某个单个元素生成，即 $(2, x)$ 不是 $\mathbb{Z}[x]$ 的主理想。 (2) $\mathbb{Q}[x]$ 理想 $(2, x)$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 的主理想。