第 10 次习题课

定义 1 (半直积)**.** 设 N 和 H 是两个群，$\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$, $h \mapsto \varphi_h$ 是一个群同态，其中 $\mathrm{Aut}(N)$ 是 N 的自同构群。定义集合 $N \times H$ 上的乘法运算为:

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1\varphi_{h_1}(n_2), h_1h_2)$$

则这个运算使得 $N \times H$ 构成一个群, 称为 N 和 H 关于同态 φ 的**半直积**, 记作 $N \rtimes_\varphi H$。

注. 当 φ 是平凡同态（即 $\varphi_h = \mathrm{id}_N$ 对所有 $h \in H$ 成立）时，半直积就是直积 $N \times H$。

题 1. 证明: (1) $N \rtimes_\varphi H$ 构成一个群。 (2) $H' := \{(e_N, h) \in N \rtimes_\varphi H \mid h \in H\}$ 是 $N \rtimes_\varphi H$ 的一个子群。 (3) $N' := \{(n, e_H) \in N \rtimes_\varphi H \mid n \in N\}$ 是 $N \rtimes_\varphi H$ 的正规子群。(4) $N \rtimes_\varphi H = N'H'$ 并且 $N' \cap H' = \{(e_N, e_H)\}$。

题 2 (半直积的等价刻画)**.** 设 G 是一个群，N 和 H 是 G 的子群，满足以下条件: (1) $N \trianglelefteq G$; (2) $NH = G$; (3) $N \cap H = \{e\}$。证明: 存在同态 $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$，使得 $G \cong N \rtimes_\varphi H$。(若 H 也为 G 的正规子群，可证明 $G \cong N \times H$ 为直积。)

证明. 定义 $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ 为 $\varphi_h(n) = hnh^{-1}$。由条件 (1) 知这是良定义的，并且容易验证 φ 是一个群同态。考虑映射:

$$f : N \rtimes_\varphi H \to G, \quad (n, h) \mapsto nh$$

验证这是一个群同构。 □

定义 2 (二面体群)**.** 对于 $n \geq 3$，**二面体群** D_n 是正 n 边形的对称群，即保持正 n 边形不变的所有刚体变换 (保长度变换) 构成的群。易验证 $D_n = \{r_1, \ldots, r_n; s_1, \ldots, s_n\}$，其中，$r_k$ 代表绕中心旋转 $k \cdot (2\pi/n)$ 个弧度，$s_1, \ldots, s_n$ 代表正 n 边形的 n 个反射对称性。知 D_n 中的单位元由 r_n (零度旋转) 给出，即 $e = r_n$。

令 N 是 D_n 中 r_1 生成的循环子群, H 是 D_n 中 s_1 生成的循环子群。知 $N = \{r_1, \ldots, r_{n-1}, e\}$, $H = \{s_1, e\}$。

题 3. 保持上面的设定，验证: (1) $s_1r_1s_1 = r_1^{-1}$; (2) N 是 D_N 的正规子群; (3) $N \cap H = \{e\}$; (4) $D_n = NH$; (5) 存在群同构 $D_n \cong N \rtimes_\varphi H$, 其中 $\varphi : H \to Aut(N)$ 的作用由 $\varphi_{s_1}(r_1) = r_1^{-1}$ 确定。

定义 3 (正合序列)**.** 群同态序列

$$\cdots \to G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \to \cdots$$

称为在 G_i 处**正合**的，如果 $\mathrm{Im}(f_{i-1}) = \mathrm{Ker}(f_i)$。如果序列在每处都正合，则称为**正合序列**。

定义 4 (短正合列)**.** 形如

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$$

的正合序列称为**短正合列**，其中：(a) 1 表示平凡群; (b) $i : N \to G$ 是单同态; (c) $\pi : G \to H$ 是满同态; (d) $\mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(\pi)$。

例 1 (短正合列的例子)**.** (1) 直积：$1 \to N \xrightarrow{i} N \times H \xrightarrow{\pi} H \to 1$;

(2) 半直积：$1 \to N \to N \rtimes_\varphi H \to H \to 1$

(3) 循环群：$1 \to \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_n \to 1$。

定义 5 (群的扩张)**.** 给定群 N 和 H，群 G 称为 N 被 H 的**扩张**，如果存在短正合列：

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$$

此时称 N 为扩张的**核**，H 为**商群**。

定义 6 (等价的扩张)**.** 两个扩张 $1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} H \to 1$ 和 $1 \to N \xrightarrow{i'} G' \xrightarrow{\pi'} H \to 1$ 称为**等价的**，如果存在群同构 $\phi : G \to G'$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi"] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i'"] & G' \arrow[r, "\pi'"] & H \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

下面我们来关心一类特殊的扩张，称为**可裂扩张**。

定义 7 (可裂扩张)**.** 扩张 $1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} H \to 1$ 称为**可裂的**，如果存在群同态 $s : H \to G$ 使得 $\pi \circ s = \mathrm{id}_H$。此时 s 称为 π 的**截面**。

定理 1. 设 $1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1$ 是群的短正合列，则以下条件等价：

(1) 上面的扩张可裂，即存在群同态 $s : H \to G$ 使得 $\pi \circ s = \mathrm{id}_H$;

(2) 存在子群 $H' \leq G$ 使得 $G = NH'$ 且 $N \cap H' = \{1\}$;

(3) $G \cong N \rtimes H$ 是半直积。

证明. “(1)⇒ (2)”：假设存在截面 $s : H \to G$ 使得 $\pi \circ s = \mathrm{id}_H$，知 s 是单同态。令 $H' = s(H)$，知 H' 是 G 的子群。
来证 $G = NH'$。任取 $g \in G$，令 $h = \pi(g) \in H$，$h' = s(h) \in G$。由于 $\pi(g \cdot (h')^{-1}) = \pi(g)(\pi s(h))^{-1} = h\dot{h}^{-1} = 1$，从而 $g \cdot (h')^{-1} \in \ker(\pi) = \mathrm{im}(i) = N$。从而 $g \in NH'$。从而 $G = NH'$。
现证 $N \cap H' = \{1\}$。任取 $x \in N \cap H'$. 知存在 $h \in H$ 使得 $x = s(h)$。从而, $\pi(x) = \pi s(h) = h$。另一方面，由 $x \in N$，知道 $\pi(x) = \pi(i(x)) = 1 \in H$。从而 $h = 1$。进而 $x = s(h) = 1$。
(2) 推 (3) 习题中已证。(3) 推 (1) 是显然的。 □

定义 8 (导出群)**.** 群 G 的**导出群**（或换位子群）$[G,G]$ 定义为由所有换位子 $[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$（其中 $x,y\in G$）生成的子群。(注意，换位子群是 G 的一个正规子群。)

题 4. 设 $f:G\to H$ 是群的满同态，证明 $f([G,G])=[H,H]$。

定义 9 (导出列)**.** 群 G 的**导出列**定义为：

$$G=G^{(0)}\trianglerighteq G^{(1)}\trianglerighteq G^{(2)}\trianglerighteq\cdots$$

其中 $G^{(0)}=G$，$G^{(i+1)}=[G^{(i)},G^{(i)}]$。即不断地求导出群得到的一个群序列。

注. 由于 $G^{(i+1)}=[G^{(i)},G^{(i)}]$，所以 $G^{(i)}/G^{(i+1)}=G^{(i)}/[G^{(i)},G^{(i)}]$ 是交换群。并且有群的短正合列 $1\to G^{(i+1)}\to G^{(i)}\to G^{(i)}/G^{(i+1)}\to 1$。

定义 10 (可解群)**.** 群 G 称为**可解群**，如果存在正整数 n 使得 $G^{(n)}=\{1\}$，即导出列在有限步内到达平凡群。

若 G 是交换群，则 $G^{(1)}=\{1\}$。从而交换群总是可解群。因此，可解群可视为交换群的推广，可通过交换群有限步构建出来。

定理 2. 设 $1\longrightarrow N\xrightarrow{i}G\xrightarrow{\pi}H\longrightarrow 1$ 是群的短正合列。则 G 是可解群当且仅当 N 和 H 都是可解群。

证明. “$\Rightarrow$”：假设 G 是可解群。由于 $N\leq G$，可验证 $N^{(k)}\leq G^{(k)}$ 对所有 k 成立。因此，若 G 为可解群，则 N 为可解群。由于 $\pi:G\to H$ 是满同态，可验证 $\pi(G^{(k)})=H^{(k)}$ 对所有 k 成立。因此，若 G 为可解群，则 H 也为可解群。

“$\Leftarrow$”：假设 N 和 H 都是可解群，来证 G 是可解群。设 N 和 H 的导出列长度分别为 n 和 m，即：

$$N^{(n)}=\{1\},\quad H^{(m)}=\{1\}.$$

由 $\pi:G\to H$ 是满同态知，$\pi(G^{(m)})=H^{(m)}=\{1\}$，从而 $G^{(m)}\leq\mathrm{Ker}(\pi)=N$。由于 N 的导出列的长度为 n 且 $G^{(m)}\leq N$，从而有

$$G^{(m+n)}=(G^{(m)})^{(n)}\leq N^{(n)}=\{1\}$$

所以 $G^{(m+n)}=\{1\}$。从而 G 是可解群。 □

推论 1. 可解群类在群扩张下封闭。即如果 $N\trianglelefteq G$ 且 N 和 G/N 都是可解群，则 G 是可解群。特别地，两个可解群的直积，半直积是可解群。

例 2. 对于二面体群 D_n，有短正合列 $1\to\mathbb{Z}_n\to D_n\to\mathbb{Z}_2\to 1$。由于循环群都是可解群，因此 D_n 是可解群。