

第 1 次习题课

题 1. 设 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 。表述以下语句，并给出否定式。

- (1) f 是一个零函数。 (2) $f(x) = 0$ 有解。 (3) $f(x) = 0$ 只有一个解。 (4) f 在 \mathbb{R} 上为常值函数。 (5) f 的图像与直线 $y = x$ 相交。 (6) f 在 \mathbb{R} 上单调。

题 2. 设 (u_n) 为实数序列。表述以下语句，并给出否定式。

- (1) (u_n) 有界。 (2) (u_n) 递增。 (3) (u_n) 单调。

题 3. 设 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 。表述以下语句，并给出否定式。

- (1) $f = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ 。 (2) f 至少有一个不动点。

题 4. 设 A, B, C 为平面上三角形 T 的三个顶点。

- (1) 写出一个关于 $|AB|, |BC|, |CA|$ 的命题 P 来表达 T 是等边三角形，并给出 $\neg P$ 。

- (2) 写出一个断言 Q 来表达 T 是等腰三角形，并给出 $\neg Q$ 。

题 5. 给出以下语句的否定式。(1) $P : 0 < x \leq 2$ 。 (2) $P \Rightarrow Q$ 。 (3) $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$ 。

题 6. 判定以下语句是否等价，并简要给出理由。

- (1) $P : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ 且 $g(x) = 0$ 与 $Q : (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ 且 $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ 。

- (2) $P : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ 或 $g(x) = 0$ 与 $Q : (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ 或 $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ 。

题 7. 判断。(1) $\exists x \in \mathbb{R}, \sin x = x$ 。 (2) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$ 。 (3) $\forall x \in \mathbb{C}, x^2 + 1 \neq 0$ 。 (4) $\exists x \in \mathbb{R}, "x - 1 = 0" \Rightarrow "x^2 + x + 1 = 0"$ 。 (5) $\forall x \in \mathbb{R}, "x - 1 = 0" \Rightarrow "x^2 + x - 2 = 0"$ 。

题 8. 用量词给出以下命题，并判断其真假。

- (1) 所有的自然数是偶数或奇数。
(2) 所有自然数是偶数或所有自然数是奇数。
(3) 存在一个大于所有整数的整数。

题 9. 用量词给出以下命题。(1) f 是 \mathbb{R} 上的函数。 (2) f 在 \mathbb{R} 上不是常数。 (3) f 在 \mathbb{R} 上是常数。

题 10. (1) 证明: $f(x) = \sin x$ 不是零函数。 (2) 证明: $P : \exists x \in \mathbb{R}, \cos x = 0$ 且 $Q : \exists x \in \mathbb{R}, \sin x = 0$ 为真。 (3) 证明: $P : \exists x \in \mathbb{R}, \cos x = 0, \sin x = 0$ 为假。 (4) 证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。