第 22 次习题课

我们总假设 K 是一个域。

题 1. 求证：$f(x)=\sin x$ 不是 $\mathbb{R}$ 上的多项式函数。

证明. 由于 $f(x)=\sin x$ 在 $\mathbb{R}$ 上有无穷个根，所以 $f(x)$ 不可能是 $\mathbb{R}$ 上的多项式函数。 □

题 2. 设非零实数 a,b,c 两两互异。令 $Q=1+\frac{1}{abc}(x-a)(x-b)(x-c)$,

$$P=\frac{x(x-b)(x-c)}{a(a-b)(a-c)}+\frac{x(x-c)(x-a)}{b(b-c)(b-a)}+\frac{x(x-a)(x-b)}{c(c-a)(c-b)}.\quad \text{证明：} P=Q.$$

证明. 可验证三次多项式 P 和 Q 在四个互异的点 $0,a,b,c$ 处的取值相同，从而 $P=Q$。 □

题 3. 用带余除法求 $f(x)=x^4+6x^3-6x^2+6x-7$ 与 $g(x)=x^3+x^2-7x+5$ 的最大公因式 $d(x)$，并求多项式 $u(x),v(x)$ 使得 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$。

解. 由 $f(x)=(x+5)g(x)+(-4x^2+36x-32)$ 知

$$(f(x),g(x))=(g(x),x^2-9x+8).$$

由 $g(x)=(x+10)(x^2-9x+8)+(7x-7)$ 知

$$(g(x),x^2-9x+8)=(x^2-9x+8,x-1)=x-1.$$

所以 $d(x)=(f(x),g(x))=x-1$。
知 $7(x-1)=g(x)-(x+10)(x^2-9x+8)$, $-4(x^2-9x+8)=f(x)-(x+5)g(x)$。由此，可找到多项式 $u(x),v(x)$ 使得 $x-1=d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$。

由辗转相除法的过程容易知道：

定理 1. 设 $K\subseteq F$ 是域 F 的子域，$f(x),g(x)\in K[x]$。设 $d(x)\in K[x]$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $K[x]$ 中的最大公因式。则

(1) 存在 $u(x),v(x)\in K[x]$ 使得 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$。

(2) $d(x)$ 也是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $F[x]$ 中的最大公因式。特别地，互素性不会随着数域的扩大而改变。

(3) $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素 $\iff$ 存在 $u(x),v(x)\in K[x]$ 使得 $1=u(x)f(x)+v(x)g(x)$。

题 4. 证明：在 $K[x]$ 中，如果 $f(x)\mid g(x)h(x)$ 且 $(f(x),g(x))=1$，则 $f(x)\mid h(x)$。

证明. 由 $(f(x), g(x)) = 1$ 知，存在 $u(x), v(x) \in K[x]$ 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$。从而 $u(x)f(x)h(x) + v(x)g(x)h(x) = h(x)$。由题设条件知，$f(x)$ 整除等式左端，从而也整除等式右端。即有，$f(x) \mid h(x)$。 □

题 5. 证明: 在 $K[x]$ 中，如果 $f(x) \mid h(x)$，$g(x) \mid h(x)$ 且 $(f(x), g(x)) = 1$，则 $f(x)g(x) \mid h(x)$。

证明. 由题设条件，存在 $u(x), v(x) \in K[x]$ 使，$h(x) = u(x)f(x) = v(x)g(x)$。由于 $g(x) \mid u(x)f(x)$ 且 $(f(x), g(x)) = 1$，从而 $g(x) \mid u(x)$。从而存在 $p(x) \in K[x]$ 使 $u(x) = p(x)g(x)$。从而 $h(x) = u(x)f(x) = p(x)g(x)f(x)$。因此，$f(x)g(x) \mid h(x)$。 □

题 6. 若 $(f(x), h(x)) = 1 = (g(x), h(x)) = 1$，则 $(f(x)g(x), h(x)) = 1$。

证明. 由题设，存在 $u_1(x), v_1(x), u_2(x), v_2(x)$ 使

$$u_1(x)f(x) + v_1(x)h(x) = 1, \quad u_2(x)f(x) + v_2(x)h(x) = 1.$$

将两式相乘，可找得 $u(x), v(x)$ 使 $u(x)f(x)g(x) + v(x)h(x) = 1$。从而 $(f(x)g(x), h(x)) = 1$。 □

定义 1. 非零非可逆的多项式 $p(x) \in K[x]$ 称为**不可约的**,如果对任意的多项式 $u(x), v(x) \in K[x]$，若 $p(x) = u(x)v(x)$，则 $u(x)$ 或 $v(x)$ 为常值多项式。即 $p(x)$ 的因子只有常值多项式和与 $p(x)$ 相伴的多项式。

题 7. 设 $p(x) \in K[x]$ 是一个不可约多项式。证明：$\forall f(x) \in K[x]$，或者 $(p(x), f(x)) = 1$ 或者 $p(x) \mid f(x)$。

题 8. 设 K 是一个域。证明: (1) $K[x]$ 中每个次数大于 0 的多项式都可以分解成有限个不可约因式的乘积。 (2) $K[x]$ 中的不可约元是素元。

注. 由上面两个结果可得 $K[x]$ 是一个唯一分解整环。

定义 2. 不可约多项式 $p(x) \in K[x]$ 称为多项式 $f(x) \in K[x]$ 的k **重因式**，如果 $p^k(x) \mid f(x)$，而 $p^{k+1}(x) \nmid f(x)$。当 $k = 1$ 时，称 $p(x)$ 是**单因式**；当 $k > 1$ 时，称 $p(x)$ 是**重因式**。

题 9. 设不可约因式 $p(x) \in K[x]$ 是 $f(x) \in K[x]$ 的 k 重因式 $(k \geq 1)$，则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k - 1$ 重因式。

证明. 设 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式，$k \geq 2$。则存在 $g(x) \in K[x]$ 使得

$$f(x) = p^k(x)g(x), \quad p(x) \nmid g(x). \quad \text{对 } f(x) \text{ 求导得:}$$

$$f'(x) = kp^{k-1}(x)p'(x)g(x) + p^k(x)g'(x) = p^{k-1}(x)[kp'(x)g(x) + p(x)g'(x)].$$

易知，$p^{k-1}(x) \mid f'(x)$ 且 $p(x) \nmid [kp'(x)g(x) + p(x)g'(x)]$，从而 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k - 1$ 重因式。 □

题 10. $f(x)$ 在 $K[x]$ 中无重因式当且仅当 $(f(x), f'(x)) = 1$。

题 11. 设 $f(x) \in K[x]$，$\deg f(x) \geq 1$，令

$$g(x) = \frac{f(x)}{(f(x), f'(x))}.$$

则 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的不可约因子，但 g 无重因式。

证明. 设 $f(x)$ 的不可约分解为

$$f(x) = c \cdot p_1(x)^{k_1} p_2(x)^{k_2} \cdots p_r(x)^{k_r},$$

其中 $c \in K^{\times}$，$p_i(x)$ 是互异的首一不可约多项式，$k_i \geq 1$。易知，

$$(f(x), f'(x)) = p_1(x)^{k_1 - 1} p_2(x)^{k_2 - 1} \cdots p_r(x)^{k_r - 1}.$$

因此

$$g(x) = \frac{f(x)}{\gcd(f(x), f'(x))} = c \cdot p_1(x) p_2(x) \cdots p_r(x),$$

知 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的不可约因子，但 g 无重因式。 $\square$

题 12. 设 $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1$。求一个多项式 $g(x)$ 使 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的不可约因式，但 $g(x)$ 不含重根。

题 13. 设 $f(x) = x^3 + 2ax + b \in \mathbb{R}[x]$。证明：$f(x)$ 有重因式当且仅当 $32a^3 + 27b^2 = 0$。

题 14. 判断下面多项式在 $\mathbb{Q}[x]$ 中是否有重因式：
(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ (2) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12.$

解. (1) 有重因式 $x - 2$。 (2) 无重因式。

题 15. 设 $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + a \in \mathbb{Q}[x]$。求 a 的值使 $f(x)$ 有重因式。

解. 利用 $f(x)$ 有重因式当且仅当 $(f, f') \neq 1$。