2025 年秋季学期代数 I 口试题

由于第 1 次口试是根据同学们的兴趣方向现场即兴提出了不同问题, 因此不做收录.

第 2 次口试

1. 说出你的生日: x 年 y 月 z 日, 并计算 $(z+10)^x \mod (y+10)$.

解: 每人生日不尽相同, 略.

2. 在域 $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上求解线性方程组:

$$\begin{cases} 3x - 7y + 11z = 4, \\ 5x + 9y - 8z = -2, \\ 2x + 16y - 19z = 22. \end{cases}$$

解: 第一个加第三个减第二个式子, 得 $p \mid 28$. 由 $\mathbb{F}_p$ 是域知 p 是素数, 因此 $p = 2$ 或 7.

当 $p = 2$ 时, 第二个和第三个式子分别得 $x + y = 0$ 和 $z = 0$, 因此 $x = y$ 且 $z = 0$.

当 $p = 7$ 时, 第一个和第三个式子分别得 $3x + 4z = 4$ 和 $2x + 2y + 2z = 1$. 由 $3x + 4z = 4$ 知 $-x + z = 1$, 因此 $z = 1 + x$, 进而 $2y = -1 - 4x = 6 + 10x$, $y = 3 + 5x$.

综上, $p = 2$ 时的通解为 $\{(t, t, 0) \mid t \in \mathbb{F}_2\}$, $p = 7$ 时的通解为 $\{(t, 3 + 5t, 1 + t) \mid t \in \mathbb{F}_7\}$, $p \neq 2, 7$ 时方程无解.

3. 设 G 是群, $a, b \in G$, 满足 $aba = ba^2b$, $a^3 = 1$, 存在 $n \in \mathbb{N}^*$, 使 $b^{2n-1} = 1$. 证明: $b = 1$.

解: 在 $aba = ba^2b$ 两侧同时右乘 a^2b, 得 $ab^2 = ba^2(ba^2b) = b^2a$, 归纳可得 a 与 b^{2n} 交换, 进而 a 与 b 交换, 于是 $aba = ba^2b$ 得 $b = 1$.

4. 设 G 是半群, 其含有左幺元 e, 即对任意 $a \in G$, 有 $ea = a$; 且 G 的每个元 a 有左逆 a^{-1}, 满足 $a^{-1}a = e$. 证明: G 是群.

解: $aa^{-1} = (a^{-1})^{-1}a^{-1}aa^{-1} = (a^{-1})^{-1}ea^{-1} = (a^{-1})^{-1}a^{-1} = e$, 且 $ae = a(a^{-1}a) = ea = a$, 因此 e 是 G 的幺元, 且 a^{-1} 是 a 的逆元, 故 G 是群.

5. 设 G 是群, $A \leqslant G$, $B \leqslant G$. 证明: $AB \leqslant G$ 当且仅当 $AB = BA$.

解: $(\Rightarrow)$ 对任意 $a \in A$, $b \in B$, $ba = (1 \cdot b)(a \cdot 1) \in (AB)(AB) \subset AB$, 因此 $BA \subset AB$; $(ab) = ((ab)^{-1})^{-1} \in (AB)^{-1} \subset B^{-1}A^{-1} = BA$, 因此 $AB \subset BA$. 综上, $AB = BA$.

$(\Leftarrow)$ 如果 $AB = BA$, 则对任意 $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$, $a_1b_1(a_2b_2)^{-1} = a_1b_1b_2^{-1}a_2^{-1} \in ABA \subset AB$, 因此 $AB \leqslant G$.

6. 设 G 是群, 记所有换位子 $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$ 生成的 G 的子群为 $G^{(1)} := [G, G]$. 记 $G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 证明: $G^{(n)} \lhd G$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) 设 $N \triangleleft G, N \cap G^{(1)} = \{1\}$. 证明: $N \leqslant Z(G)$.

解: (1) 假设 $G^{(n)} \triangleleft G, n \in \mathbb{N}$, 则对任意 $g_i, h_i \in G^{(n)}, i = 1, \cdots, m$, 以及 $g \in G$, 有

$$g\Big(\prod_{i=1}^{m}[g_i, h_i]\Big)g^{-1} = \Big(\prod_{i=1}^{m}[gg_ig^{-1}, gh_ig^{-1}]\Big) \in G^{(n+1)},$$

因此 $G^{(n+1)} \triangleleft G$. $n = 0$ 时, $G^{(0)} = G \triangleleft G$ 显然, 由归纳法, (1) 得证.

(2) 设 $x \in N, g \in G$, 则 $[g, x] \in G^{(1)}$ 且 $[g, x] = gxg^{-1}x^{-1} \in NN \subset N$, 因此 $[g, x] = 1$, 即 $gx = xg$. 由 g 的任意性, $x \in Z(G)$, 因此 $N \leqslant Z(G)$.