

第 8 次习题课

题 1. 设 $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ 在 G 上定义 $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$ 。求证 G 是一个群。

题 2. 证 S_n 是 $\{1, \dots, n\}$ 上双射的集合。(1) 验证 S_n 是一个群。(2) 验证 S_2 是一个交换群。(3) 说明 S_3 不是交换群。

题 3. 证明群 $(\mathbb{Q}, +)$ 与群 (\mathbb{Q}^*, \times) 不同构。

定义 1. $H \subseteq G$ 是群 (G, \cdot) 的一个子群, 如果 $H \neq \emptyset$ 且 (H, \cdot) 构成一个群。子群 H 称为 G 的正规子群, 如果 $\forall g \in G$, 有 $gHg^{-1} = H$ 。

题 4. 求证: $H \subseteq G$ 是群 G 的子群 $\iff \forall a, b \in H$, 有 $ab^{-1} \in H$ 。

题 5. 设 H 是 G 的一个子群。在 G 上定义关系: $a \sim b \iff a^{-1}b \in H$ 。验证 \sim 是 G 上的一个等价关系, 并找出 $a \in G$ 所在的等价类。

题 6. 设 $f: G \rightarrow G'$ 是群同态, 证明: (1) $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$; (2) $\ker f$ 是 G 的子群; (3) $\ker f$ 是 G 的正规子群。

题 7. 设 $f: G \rightarrow G'$ 是群同态, 证明: f 是单射 $\iff \ker f = \{e\}$ 。

定义 2. 群 G 是一个循环群, 若存在 $a \in G$ 使 $G = \{a^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ 。此时称 a 是 G 的一个生成元, 记 $G = \langle a \rangle$ 。

注. (1) 若 a 的幂两两不同, 则 G 中的元素有无限个。(2) 若存在 $m < n$ 使 $a^m = a^n$, 则 $a^{n-m} = e$ 。从而存在最小的正整数 d 使 $a^d = e$, 称 d 为 a 的阶, 记为 $|a| = d$ 或 $\text{ord}(a) = d$ 。例如, 若 $|G| = d$, 则 $G = \{e, a, \dots, a^{d-1}\}$ 。

题 8. 设 $G = \langle a \rangle$ 是一个循环群, 则 (1) 若 $|G| = \infty$, 验证 $f: G \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$, $a^m \mapsto m$ 是群同构。(2) 若 $|G| = d$, 验证 $f: G \rightarrow (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, +)$, $a^m \mapsto \bar{m}$ 是群同构。

题 9. 求证循环群 $G = \langle a \rangle$ 的子群还是循环群。

题 10. 设 $f: G \rightarrow G'$ 是群同态, H' 是 G' 的子群。求证: (1) $H := f^{-1}(H')$ 是 G 的子群。(2) 若 H' 是 G' 的正规子群, 则 H 是 G 的正规子群。

题 11. 设 a, b 是群 G 中的两个元素, 定义 $[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab$ 为 a 与 b 的换位子。记 $[G, G] \subseteq G$ 是由 G 中的所有换位子生成的群, 称为换位子群。求证: (1) $[G, G]$ 是 G 的正规子群; (2) $G/[G, G]$ 为交换群; (3) 若 H 是 G 的正规子群, 且 G/H 为交换群, 则 $[G, G] \subseteq H$ 。

题 12. 设 $f: G \rightarrow G'$ 是满同态, 群同态 $\varphi: G \rightarrow H$ 满足 $\ker f \subseteq \ker \varphi$ 。证明: 存在唯一的同态 $\alpha: G' \rightarrow H$ 使 $\varphi = \alpha \circ f$ 。

题 13. 设 H 和 K 是群 G 的有限子群。记 $HK = \{hk \in G \mid h \in H, k \in K\}$ 。证明：
 $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$ 。

题 14. 设 H 是群 G 的一个子集。记 $N_G(H) = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\}$, $C_G(H) = \{g \in G \mid g^{-1}hg = h, \forall h \in H\}$ 。证明：(1) $N_G(H)$ 是 G 的一个子群，称为 H 的**正规化子群**。
 (2) $C_G(H)$ 是 G 的一个子群，称为 H 的**中心化子群**。

定义 3. 设 G 是一个群，它的**中心**被定义为 $Z(G) = \{g \in G \mid ga = ag, \forall a \in G\}$ 。可验证这是 G 的一个子群。

题 15. 在群同构的意义下，分类阶为 4 的群。

题 16. 考虑四元数群 $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ ，满足 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ 。

(1) 给出 Q_8 的所有子群，并指出哪些是正规子群。

(2) 给出 Q_8 的中心。

题 17. 求 S_n 的中心 $Z(S_n)$ 。