第 13 次习题课

定义 1 (自由群)**.** 设 X 是一个集合，以 X 为生成元集的**自由群**构造如下：

1. $\forall x \in X$，引入形式符号 x^{-1}，称为 x 的逆元（形式逆）。
2. 令 $\widetilde{F}(X)$ 是所有由符号 x, x^{-1} $(x \in X)$ 构成的有限字串的集合,e.g. $x_1x_1^{-1}x_1x_0^{-1}x_0^{-1}x_2$。字串的拼接构成 $\widetilde{F}(X)$ 上的一个二元运算。
3. 在 $\widetilde{F}(X)$ 定义一个关系 $R^\circ \subseteq \widetilde{F}(X) \times \widetilde{F}(X)$：如果一个字串 a 能通过把 xx^{-1} 或 $x^{-1}x$ $(x \in X)$ 替换为空串得到另一个字串 b，则 $(a,b) \in R^\circ$。
4. 让关系 R° 生成一个 $\widetilde{F}(X)$ 上的等价关系 $\sim$，记 $F(X) := \widetilde{F}(X)/\sim$。
5. 可验证：若 $a \sim b$，$a' \sim b'$，则拼接后 $aa' \sim bb'$。因此，字串的拼接诱导了商集 $F(X)$ 上的一个二元运算。
6. 集合 $F(X)$ 配上字串的拼接构成一个群，称为由集合 X 生成的**自由群**。其单位元为空字串，字串 $x_1x_0^{-1}$ 的逆为 $x_0x_1^{-1}$。

注. $F(X)$ 中的元素本质上为字符串的等价类，但为方便起见，我们常用字符串去表示 $F(X)$ 中的元素。

定理 1 (自由群的泛性质)**.** 设 $F(X)$ 是集合 X 生成的自由群，有映射 $\iota : X \to F(X)$，$x \mapsto x$。则对任意群 G 及映射 $f : X \to G$，存在唯一的群同态 $\varphi : F(X) \to G$，使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & F(X) \arrow[d, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

即 $f = \varphi \circ \iota$，也即映射 f 唯一分解经过映射 ι。

证明. 设 $a = x_1^{z_1}x_2^{z_2}\dots x_s^{z_s} \in F(X)$，其中 $x_i \in X$，$z_i \in \mathbb{Z}$。定义映射 $\varphi : F(X) \to G$：

$$\varphi(a) = f(x_1)^{z_1}f(x_2)^{z_2}\dots f(x_s)^{z_s} \in G.$$

可验证 φ 是良定义的群同态，且满足 $f = \varphi \circ \iota$。若另有群同态 $\varphi' : F(X) \to G$ 也满足 $f = \varphi' \circ \iota$，则 $\forall x \in X$，有 $\varphi(x) = f(x) = \varphi(x')$。由于 φ, φ' 在生成元集 X 上的作用相同，并且它们都是群同态，因此 $\varphi = \varphi'$。 □

定理 2. 任何群 G 都是某个自由群的商群。

证明. 取 X 为群 G 的一个生成集 (e.g., $X = G$)，$\iota : X \to F(X)$ 为字符的嵌入，$f : X \to G$ 是自然的嵌入。利用泛性质，可有如下的交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & F(X) \arrow[d, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

由于 X 是 G 的生成集，G 中的任何元素 g 在 G 中有如下的形式：$g = x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_s^{z_s}$。将 $a = x_1^{z_1} x_2^{z_2} \dots x_s^{z_s}$ 视为 $F(X)$ 中的字符串，易验证 $\varphi(a) = g$。从而 φ 是满同态。 □

用生成元，生成关系去描述群：以辫子群、Coxeter 群为例

定义 2. 设 X 为群 G 的一个生成集, 则有满同态 $\varphi : F(X) \to G$。令 $N = \ker\varphi \lhd F(X)$。设 R 是正规子群 $N = \ker\varphi$ 的一个生成集。由于 $G \cong \dfrac{F(X)}{N} = \dfrac{F(X)}{\langle R\rangle}$，群 G 在同构的意义下被集合 X 和集合 $R \subseteq F(X)$ 所唯一决定。称 (X, R) 为群 G 的一个**表现**，X 为**生成元集**，R 为**生成关系集**。

定义 3. 取生成元集 $X = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$，生成关系集 $R \subseteq F(X)$:

$$R = \{\sigma_i\sigma_j\sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1} : |i-j| \geq 2\} \cup \{\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1} : 1 \leq i \leq n-1\}$$

则 $B_n := \dfrac{F(X)}{\langle R\rangle}$ 称为**辫子群（Braid group）**。

可知在 B_n 中有如下关系：

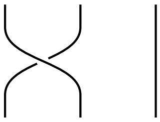
$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, & |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

上面的关系可由图 $1 —— 2 —— \cdots —— n$ 中顶点间的邻接关系来记录。

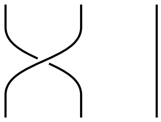
定义 4. $\mathbb{R}^3$ 中，$(n+1)$ 条绳的一个**辫子**是由 $2(n+1)$ 个点（$n+1$ 个在上，$n+1$ 个在下）和 $n+1$ 条绳组成的一个对象，满足：

1. 每条绳起于上方的某个点，终于下方的某个点；
2. 绳子间彼此不相交；
3. 任何绳与任何水平线至多相交一次（即绳子只能自上而下走，不能严格横着走）。

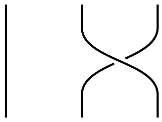
以下是 3 条绳的一些辫子的图例：
我们将辫子视为 $\mathbb{R}^3$ 中的对象。绳数相同的两个辫子是**等价的**（$\equiv$），如果其中一个辫子中的绳子在不绕过彼此的情况下可以在空间中连续变形为另一个辫子，例如，上图中，$\sigma_1 \equiv \sigma_1\sigma_2\sigma_2^{-1}$, $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \equiv \sigma_2\sigma_1\sigma_2$。
记 B_n 为 $n+1$ 条绳的所有辫子（模去等价关系）的集合。将两个辫子进行上下拼接可得到一个新的辫子，对应 B_n 中的乘法。易知，



(a) 辫子 σ_1

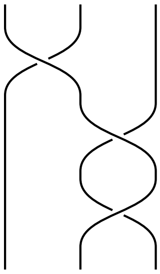


(b) 辫子 σ_1^{-1}

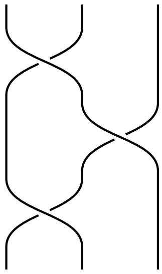


(c) 辫子 σ_2

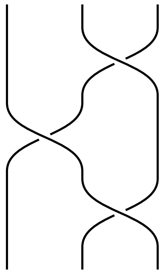
(d) 辫子 $e = id$



(a) 辫子 $\sigma_1\sigma_2\sigma_2^{-1}$



(b) 辫子 $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$



(c) 辫子 $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$

- B_0：这个群由所有 1 条绳的辫子组成。它是平凡群。
- B_1：这个群中的元素是两条绳间的来回扭转。可知 $B_1 = \langle\sigma_1\rangle \cong \mathbb{Z}$, $\sigma_1^n \mapsto n$。
- B_2：这个群是无限非交换群。

设 S 是一个集合, 一个矩阵 $M : S\times S \to \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ $(s,t) \mapsto m(s,t)$ 被称为一个 **Coxeter 矩阵**，如果它满足：

1. $m(s,t) = m(t,s)$ (即 M 是对称矩阵);
2. $m(s,t) = 1$ 当且仅当 $s = t$。

例如，$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & \infty \\ 2 & 2 & \infty & 1 \end{bmatrix}$。

定义 5. 设 $M : S \times S \to \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ 是一个 Coxeter 矩阵。取生成元集 $X = S$，生成关系集 $R \subseteq F(X)$ 为

$$R = \left\{(st)^{m(s,t)} \mid s,t \in S \text{ 且 } m(s,t) \neq \infty\right\}$$

称群 $W := \dfrac{F(X)}{\langle R\rangle} = \dfrac{F(S)}{\langle R\rangle}$ 为一个 **Coxeter 群**。

注. 在 Coxeter 群 W 中有关系：

1. $\forall s \in S$，由于 $m(s,s) = 1$，故有 $(ss)^{m(s,s)} = e$，即 $s^2 = e$。从而 $s^{-1} = s$。
2. 若 $m(s,t) = 2$，则 $(st)^2 = e \iff st = ts$ (交换关系)。
3. 若 $m(s,t) = 3$，则 $(st)^3 = e \iff sts = tst$ (辫子关系)。

4. 若 $m(s,t)=4$，则 $(st)^4=e \iff stst=tsts$ (长辫子关系)。

5. …