第 4 次习题课

定义 1. 设有映射 $f: X \to S$ 和 $g: Y \to S$，X 与 Y 在 S 上的**纤维积** (或拉回) 定义为:

$$X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\} \subseteq X \times Y.$$

通常表达为

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

其中 π_X, π_Y 为自然投影映射。

可验证 $X \times_S Y$（在相差一个双射的意义下）可写为如下的无交并:

$$X \times_S Y \cong \sqcup_{s \in S}(f^{-1}(s) \times g^{-1}(s)).$$

(1) 设 $A \subset E$，$B \subset E$。证明: $A \times_E B \cong A \cap B$。

(2) 设有 $f: X \to S$ 和 $g: Y \to S$，其中 $S = \{s_0\}$ 为单点集。证明: $X \times_S Y \cong X \times Y$。

(3) 设有 $f: X \to S$ 和 $g: Y \to S$，其中 $Y = \{y_0\}$ 为单点集且 $g(y_0) = s_0 \in S$。证明: $X \times_S Y \cong f^{-1}(s_0)$。

(4) 设有 $f: X \to S$。证明: $X \times_S S \cong X$。

(5) 设有纤维积图表:

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

则对任意的集合 E 和映射 $p_X: E \to X$，$p_Y: E \to Y$，如果 $f \circ p_X = g \circ p_Y$，则存在唯一的映射 $h: E \to X \times_S Y$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p_X} & X \\ h \searrow & & \nearrow \pi_X \\ & X \times_S Y & \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p_Y} & Y \\ h \searrow & & \nearrow \pi_Y \\ & X \times_S Y & \end{array}$$

(6) 设有纤维积图表:

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

证明: 若 f 为单射，则 π_Y 为单射。(分别用元素法和泛性质的方法)

定义 2. 给定 $A \subseteq E$，其**特征函数** $I_A : E \to \{0,1\}$ 定义为：

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in A, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(7) 设 A_1, A_2, A_3 为有限集合 E 的子集，$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$。$I_A$ 为 $A \subseteq E$ 的特征函数，$|A|$ 为 A 中元素的个数。证明：

(a) $|A| = \sum_{x \in E} I_A(x)$。

(b) $I_{A_1 \cap A_2}(x) = I_{A_1}(x) \cdot I_{A_2}(x)$。

(c) $I_{A_1 \cup A_2}(x) = I_{A_1}(x) + I_{A_2}(x) - I_{A_1}(x) I_{A_2}(x)$。

(d) $I_E - I_A = \prod_{i=1}^{3} (I_E - I_{A_i})$。

(e) $|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_3 \cap A_1|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$。