第 2 次习题课

题 1. （Cantor 定理）

(1) 证明：存在从 E 到 $\mathcal{P}(E)$ 的一个单射。（提示：取 $f : E \to \mathcal{P}(E), a \longmapsto \{a\}$）

(2) 证明不存在从 E 到 $\mathcal{P}(E)$ 的双射 f。（可考虑 $A = \{a \in E \mid a \notin f(a)\}$）

题 2. 设 $\sim$ 是 E 上的一个等价关系，$\pi : E \to E/\!\sim, x \mapsto \pi(x) := \bar{x} = \{y \in E \mid y \sim x\}$ 为对应的商映射。证明：$\pi(x_1) = \pi(x_2) \Leftrightarrow x_1 \sim x_2$。

题 3. 设有映射 $f : E \to F$。定义 E 上的一个关系：$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$。证明：

(1) $\sim$ 是 E 上的一个等价关系。

(2) 存在唯一的映射 $i : E/\!\sim \to F$ 使 $f = i \circ \pi$, 即下图交换：

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \\ & E/\!\sim \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

(3) 若 f 为满射，则 $i : E/\!\sim \to F$ 为双射。

定义 1. 集合 E 上的一个**拆分**是指 $\mathcal{P}(E)$ 的一个子集 $\mathcal{U}$，满足：

(1) $\forall A \in \mathcal{U}$, $A \neq \emptyset$.

(2) $\forall A, B \in \mathcal{U}$, 若 $A \neq B$, 则 $A \cap B = \emptyset$.

(3) $\bigcup_{A \in \mathcal{U}} A = E$.

即 E 被拆分成两两不交的非空子集的并。

题 4. 设 R（或者 $\sim$）是 E 上的一个等价关系。证明：E 上关于等价关系的等价类构成 E 的一个拆分。

题 5. 设 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(E)$ 为 E 的一个拆分，定义 E 上的关系 R：$x \sim_R y \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{U}$ 使 $x, y \in A$。证明：$\sim_R$ 是一个等价关系。

注. 满射，等价关系，拆分为同一事物的三个不同的观点。

题 6. 等价关系的泛性质（万有性质，universal property） 设 $\sim$ 为 E 上的一个等价关系，$\pi : E \to E/\!\sim$ 为商映射, $x \mapsto \pi(x) = \{y \in E \mid y \sim x\}$。证明：对任何集合 F 及任何映射 $f : E \to F$，若 "$x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$" 成立，则存在唯一的映射 i $E/\!\sim \to F$ 使 $f = i \circ \pi$, 即下图交换：

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & F \\ & E/\!\sim \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

题 7. 定义 $\mathbb{R}$ 上的一个等价关系：$a \sim b \iff \exists n \in \mathbb{Z}, a = b + n$。证明：$\mathbb{R}/\mathbb{Z} := \mathbb{R}/\sim$ 与 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 存在双射。

题 8. 定义 $\mathbb{R}^2$ 上的等价关系：$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) \iff \exists n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, 使 $\begin{cases} a_1 = b_1 + n_1, \\ a_2 = b_2 + n_2. \end{cases}$

证明：$\mathbb{R}^2/\sim$ 与 $S^1 \times S^1$ 存在双射。

题 9. 在集合 $E := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上定义等价关系：

$$(x_0, \cdots, x_n) \sim (y_0, \cdots, y_n) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall i \in \{0, \cdots, n\}, \quad x_i = \lambda y_i.$$

商集 $E/\sim$ 称为 n 维实射影空间，记为 $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$。$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ 中的点 $(x_0, \cdots, x_n)$ 记为 $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$，称为该点的齐次坐标。证明：

(1) $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ 与 S^1 间存在双射。

(2) 令 $L_0 = \{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_0 \neq 0\}$，则 L_0 与 $\mathbb{R}^n$ 间存在双射。

(3) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus L_0$ 与 $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ 间存在双射。

题 10. 设 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。在 $\mathbb{Z}$ 上定义关系：$m_1 \sim m_2 \iff n \mid (m_1 - m_2)$。证明：

(1) "$\sim$" 是 $\mathbb{Z}$ 上的一个等价关系。

(2) 商集 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} := \mathbb{Z}/\sim$ 有 n 个元素。

(3) 映射 $f : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \overline{a + b}$ 是定义良好的。

(4) 映射 $g : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $(\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \overline{a \cdot b}$ 是定义良好的。

(5) 如上述的加法，乘法满足结合律，交换律，分配律。

回顾：E 上的一个**关系**R 是指 $E \times E$ 的一个子集。

题 11. 设 $\{R_i\}_{i \in I}$ 为 E 上的一族等价关系。证明：

(1) $\bigcap_{i \in I} R_i$ 为 E 上的一个等价关系。

(2) 设 R 为 E 上的一个关系，则存在唯一的 E 上的等价关系 $\overline{R}$ 满足 $R \subset \overline{R}$，且对任意 E 上的等价关系 T，若 $T \supseteq R$ 则 $T \supseteq \overline{R}$。称 $\overline{R}$ 为 E 上由关系 R 生成的等价关系。

(3) 若 R 本身为等价关系，则 $\overline{R} = R$.

题 12. 在 $E = [0, 1]$ 上定义关系 $R = \{(0, 1), (1, 0)\} \subseteq E \times E$。记 $\overline{R}$ 为 R 生成的等价关系。

(1) 证明：$E/\overline{R}$ 与 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 存在双射。

(2) 作为 E^2 的子集，描述 $\overline{R}$。