第 3 次习题课

题 1. 用归纳法证明：$\forall n \in \mathbb{Z},\ n \geq 4$，$n! \geq n^2$。

题 2. 设 $u_0 = 2, u_1 = 1$，$u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0$。用归纳法证明：

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-2)^n + 3^n.$$

题 3. 通过 $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ 来给出 $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 的一个证明。类似地，利用以下等式

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

来证明：

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,\quad \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

题 4. 归纳法证明：$\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$，$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$。试着给个直接证明。

题 5. 归纳法证明：$\forall n \in \mathbb{N},\ 5 \mid (6^n - 1)$。

题 6. 归纳法证明：第 n 个素数 $p_n < 2^{2^n}$。

题 7. 归纳法证明：$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 8}, n$ 可表示为若干个 3 和 5 的和。

题 8. 归纳法证明费马小定理：$\forall n \in \mathbb{N},\ p \mid (n^p - n)$，其中 p 是给定的素数。

题 9. 定义

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix}.$$

归纳法证明：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix},\quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

题 10. Abel 求和（分部求和法）：设有复数数列 $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^+}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}^+}$，令 $B_k = \sum_{i=1}^k b_i$. 证明：

$$\sum_{k=1}^n a_kb_k = a_nB_n - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)B_k.$$

题 11. 应用 Abel 求和来计算 $\sum_{k=1}^n k^2$，$\sum_{k=1}^n k \cdot 3^k$。

题 12. 计算 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$，$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$。

题 13. 证明：$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$。

题 14. 设 p 是素数，$0<k<p$。证明：$p\mid\binom{p}{k}$。

题 15. 设 $0\le p\le n$。证明：$\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}+\binom{p+2}{p}+\cdots+\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p+1}$。

题 16. 证明：存在无限个形如 $4k+3$ 的素数。

题 17. 用两种顺序求和 $\sum_{1\le j\le i\le n}2^i$, 并由此计算 $\sum_{i=1}^{n}i\cdot 2^i$。

题 18. 求和 $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}1/j$。

题 19. 设 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k$，$x\in\mathbb{R}$。证明：$\sum_{k=1}^{n}k\cdot 3^k=3\cdot f'(3)$, 并由此求解 $\sum_{k=1}^{n}k\cdot 3^k$。

题 20. 求和 $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$，$\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$。