第 16 次习题课

定义 1. 设 R 是一个交换环，子集 $S \subseteq R$ 称为**可乘子集**，如果 $0 \notin S$，$1 \in S$ 且

$$\forall s_1, s_2 \in S \quad \text{有} \quad s_1 s_2 \in S.$$

题 1. 设 R 是一个交换环，S 是 R 的一个可乘子集，I 是 S 外的一个（真）理想，即

$$S \cap I = \emptyset.$$

则：

(1) 理想集 $\Omega = \{J \lhd R \mid J \supseteq I,\ J \cap S = \emptyset\}$ 中存在一个极大元 P。

(2) P 是 R 的一个素理想。

证明. (1) 由于 $I \in \Omega$，所以 Ω 为非空集。理想的包含关系诱导了 Ω 上的一个偏序结构。任取 Ω 中的一个理想升链 $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，令

$$J = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda,$$

易验证 $J \in \Omega$。从而 J 是该升链在 Ω 中的一个上界。由 Zorn 引理知，Ω 中存在一个极大元 P。
(2) $\forall a, b \in R$，若 $ab \in P$，需证明 $a \in P$ 或 $b \in P$。现反设 $a \notin P$ 且 $b \notin P$。则有

$$\langle P, a \rangle := P + Ra \supsetneq P,$$

$$\langle P, b \rangle := P + Rb \supsetneq P.$$

由于 P 是 Ω 中的极大元，所以 $\langle P, a \rangle \notin \Omega$，$\langle P, b \rangle \notin \Omega$。从而 $\exists s_1, s_2 \in S$ 使 $s_1 \in \langle P, a \rangle = P + Ra$，$s_2 \in \langle P, b \rangle = P + Rb$。所以 $s_1 s_2 \in (P + Ra)(P + Rb) \subseteq P + Rab$。由于 $ab \in P$，所以 $Rab \subseteq P$。从而 $s_1 s_2 \in P + Rab \subseteq P$。于是 $s_1 s_2 \in S \cap P$，这与 $P \in \Omega$ 矛盾，因为 $P \in \Omega$ 蕴含 $S \cap P = \emptyset$。所以若 $ab \in P$，则有 $a \in P$ 或 $b \in P$。即 P 是 R 的一个素理想。 □

注. 乘法子集外存在很多性质好的东西。

题 2. 设 I 是交换环 R 的理想，令 $\sqrt{I} = \{r \in R \mid \exists n \geq 1, r^n \in I\}$。

(1) 证明：$\sqrt{I}$ 是 R 的一个理想。

(2) 令 $\mathbb{P}_I = \{P \subset R \mid P \text{ 是} R \text{ 中的素理想且} P \supseteq I\}$。若 $I \neq R$，则

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \mathbb{P}_I} P.$$

(3) 若取 I 为零理想，请解释 $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \mathbb{P}_I} P$ 中元素的特点。

(4) 证明商环 $R/\sqrt{0}$ 是一个**约化环**，即它没有非零的幂零元。

证明. (2) 记 $J = \bigcap_{P \in \mathbb{P}_I} P$，要证 $\sqrt{I} = J$。
先证 $\sqrt{I} \subseteq J$。任取 $a \in \sqrt{I}$，则存在 $n \geq 1$ 使 $a^n \in I$。对任意 $P \in \mathbb{P}_I$，由于 $I \subseteq P$，从而 $a^n \in P$。由 P 是素理想，可得 $a \in P$。因此 $a \in \bigcap_{P \in \mathbb{P}_I} P = J$。
再证 $J \subseteq \sqrt{I}$。只需证明 $\forall a \in R$，若 $a \notin \sqrt{I}$，则 $a \notin J$。设 $a \in R$ 且 $a \notin \sqrt{I}$，则对所有 $n \geq 1$，$a^n \notin I$。考虑集合 $S = \{1, a, a^2, \ldots\}$，它是一个可乘子集且与 $S \cap I = \emptyset$（因为 $a^n \notin I$, $n \geq 1$）。由题 1 知，存在一个素理想 P_0 使得 $P_0 \supseteq I$ 且 $P_0 \cap S = \emptyset$。从而有 $P_0 \in \mathbb{P}_I$ 但 $a \notin P_0$。所以 $a \notin \bigcap_{P \in \mathbb{P}_I} P = J$。综合可知，$\sqrt{I} = J$。
(3) 这是幂零元的集合。 □

题 3. 设 R 是一个交换环，I 是 R 的一个真理想。则:

(1) 理想集 $\Omega = \{J \lhd R \mid J \supseteq I,\ J \neq R\}$ 中存在一个极大元 M。

(2) M 是 R 的一个极大理想。

证明. (1) 由于 $I \in \Omega$，所以 Ω 非空。理想间的包含关系诱导了 Ω 上的一个偏序结构。取 Ω 中的一个理想升链 $\{J_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，令 $J = \bigcup J_\lambda$，可验证 $J \in \Omega$。由 Zorn 引理，Ω 中存在一个极大元 M。
(2) 设理想 J_0 满足 $M \subsetneq J_0 \subseteq R$。由于 M 是 Ω 中的一个极大元，所以 $J_0 \notin \Omega$。从而有 $J_0 = R$。因此，M 是极大理想。 □

定义 2. 一个可乘子集 $S \subseteq R \setminus \{0\}$ 被称为**饱和的**（或者对因子封闭的），如果对任意 $a, b \in R$，若 $a \in S$ 且 $b \mid a$，则 $b \in S$。

注. 若 S 是饱和的可乘子集，由 $1 \in S$ 知，R 中的可逆元素均在 S 中。

题 4. 设 R 是一个交换环，$S \subseteq R \setminus \{0\}$。证明：$S$ 是 R 的一个饱和的可乘子集当且仅当 $R \setminus S$ 可表示成一些素理想的并。

证明： ($\Rightarrow$) 设 S 是饱和可乘子集。任取 $a \in R \setminus S$，由 S 是饱和的，知 a 在 R 中不可逆，从而 Ra 是 R 的一个真理想。由 $a \notin S$ 及 S 是饱和的知 $Ra \cap S = \emptyset$，否则，存在 $r \in R$ 使 $ra \in S$，由 S 的饱和性得 $a \in S$，矛盾。由题 1 知，存在一个素理想 P 使得 $P \supseteq Ra$ 且 $P \cap S = \emptyset$，从而 $a \in Ra \subseteq P \subseteq R \setminus S$。由 $a \in R \setminus S$ 的任意性，知 $R \setminus S$ 可表示成一些素理想的并。
($\Leftarrow$) 设 $R \setminus S = \cup_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$，其中每个 P_λ 是素理想。首先，由 $1 \notin P_\lambda$（素理想是真理想）知 $1 \in S$；由 $0 \in P_\lambda$ 知 $0 \notin S$。
接下来验证 S 对乘法封闭：只需证明，$\forall a, b \in R$，若 $ab \notin S$，则 $a \notin S$ 或 $b \notin S$。由 $ab \in R \setminus S$ 知，存在一个素理想 $P_\lambda \subseteq R \setminus S$ 使 $ab \in P_\lambda$。由于 P_λ 是素理想，所以 $a \in P_\lambda \subseteq R \setminus S$ 或 $b \in P_\lambda \subseteq R \setminus S$，故 $a \notin S$ 或 $b \notin S$。因此 S 是 R 的一个可乘子集。

最后验证 S 的饱和性：设 $a \in S$，$b \in R$ 满足 $b \mid a$，需证 $b \in S$。若 $b \notin S$，则存在素理想 $P_\lambda \subseteq R \setminus S$ 使 $b \in P_\lambda$。由 $b \mid a$ 知存在 $r \in R$ 使 $a = rb$，从而 $a = rb \in P_\lambda$，故 $a \notin S$，矛盾。因此 $b \in S$，即 S 是饱和的。

定义 3. (1) 设 R 是一个整环，$p \in R$ 是一个非零非可逆的元素，称 p 是 R 中的一个**素元**，如果对任意 $a, b \in R$，若 $p \mid ab$，则有 $p \mid a$ 或 $p \mid b$。
(2) 称整环 R 是**唯一分解整环**（UFD），若 R 中的任意非零非可逆的元素都可分解为有限个素元的乘积。

注. (1) 设 $p \in R$ 是整环中的一个素元，则 p 是**不可约的**，即若存在 $a, b \in R$ 使 $p = ab$，则 a 或 b 为可逆元。注意，不可约元未必是素元。
(2) 思考唯一分解整环中“唯一”的含义，并证明分解的“唯一性”（提示：唯一是指在相伴的意义下唯一）。e.g. 在 $\mathbb{Z}$ 中有“唯一分解”：$6 = 2 \times 3 = (-2) \times (-3)$。

题 5. 设 R 是一个整环，p 是 R 中的一个非零非可逆的元素。证明: p 是 R 的一个素元当且仅当理想 $(p) = Rp$ 是素理想。

证明. $(\Rightarrow)$ 假设 p 是素元，由于 p 非零非可逆，知 (p) 是真理想。设 $ab \in (p)$，则 $p \mid ab$。由于 p 是素元，从而 $p \mid a$ 或者 $p \mid b$，即有 $a \in (p)$ 或者 $b \in (p)$。因此 (p) 是素理想。
$(\Leftarrow)$ 假设 (p) 是素理想，来证 p 是素元。设 $p \mid ab$，则有 $ab \in (p)$。因为 (p) 是素理想，所以 $a \in (p)$ 或 $b \in (p)$。即 $p \mid a$ 或 $p \mid b$。因此 p 是素元。 □

注. 由上题可知，素理想可视为单个素元素所生成的理想的推广。

题 6. 证明：整环 R 是唯一分解整环（UFD）当且仅当每个非零的素理想都含有一个素元。

证明. $(\Rightarrow)$ 设 R 是一个 UFD，任取 R 的一个非零素理想 P，需证 P 中含有一个素元。任取非零元素 $r \in P$，由于 R 是 UFD，r 可分解为有限个素元的乘积 $r = p_1 p_2 \cdots p_s$。由 P 是素理想且 $r \in P$，知存在某个 i 使得 $p_i \in P$，即 P 中含有素元 p_i。
$(\Leftarrow)$ 设 R 的每个非零的素理想都含有一个素元。考虑集合

$$S = \{r \in R \mid r \text{ 可逆或} r \text{ 可表示为有限个素元的积}\}.$$

要证 R 是 UFD，只需证明 $R \setminus S = \{0\}$。
任取 $x \in R \setminus S$，反设 $x \neq 0$，则 Rx 是 R 的非零理想。由 S 的定义易知 S 是 R 的一个饱和可乘子集，且 $Rx \cap S = \emptyset$（否则存在 $r \in R$ 使 $rx \in S$，由 S 的饱和性得 $x \in S$，矛盾）。由题 1 知，存在一个素理想 $P \supseteq Rx \supsetneq \{0\}$ 使得 $P \cap S = \emptyset$。但由题设，P 中存在一个素元 a，从而 $a \in P \cap S$，这与 $P \cap S = \emptyset$ 矛盾。因此 $R \setminus S = \{0\}$，即 R 中任意非零非可逆的元素都可表示为有限个素元的乘积，故 R 是 UFD。 □