第 5,6 次习题课

从范畴论的角度来看集合论中的一些概念。

定义 1. 一个**范畴**（category）$\mathcal{C}$ 由以下要素构成：

(1) 对象 (object) 构成一个类：$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$。$X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 通常简记 $X \in \mathcal{C}$。

(2) 态射集：$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$，其中 $X, Y \in \mathcal{C}$。

(3) 合成法则 (人为给定的映射)：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

$$(g, f) \longmapsto g \circ f$$

使得结合性成立，即有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$，其中

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W.$$

(4) $\forall X \in \mathcal{C}$，存在一个“单位”态射 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ 使得

(a) 对 $\forall Y \in \mathcal{C}$ 及 $\forall f : X \to Y$，有 $f \circ \mathrm{id}_X = f$（右单位性）。

(b) 对 $\forall Z \in \mathcal{C}$ 及 $\forall g : Z \to X$，有 $\mathrm{id}_X \circ g = g$（左单位性）。

例 1 (集合范畴). (1) 取对象类 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 是以集合为对象构成的类。即 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 意味着 X 是一个集合。

(2) 给定两个集合 X, Y，取态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 为 X 到 Y 映射的集合。

(3) 取合成法则为映射间的复合。知结合性成立。

(4) 任意集合 X，取“单位”态射 $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ 为 X 上的恒等映射。知单位性成立。

因此，可得到一个集合的范畴。常记为 $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$。

注. 通常来说：范畴 = 对象类 + 态射集。态射集通常取为对象间的“结构保持映射”。

注. 两个集合间的态射集也可人为地取成单映射的集合，由于单射与单射的合成还是单射，所以 **Set** 中的合成法则可继承下来。这样，可得到一个新的范畴，其对象类还是集合构成的类，但态射集为单映射的集合。

例 2. 单个的集合 E 可视为一个“离散”范畴：$\mathrm{Ob}(E)=E$。
给定两个对象 $a,b\in E$，规定

$$\mathrm{Hom}(a,b)=\begin{cases}\{\mathrm{id}_a\} & 若 a=b\\ \emptyset & 其他\end{cases}$$

其中 id_a 为形式符号，视为“单位”态射。知离散范畴除了单位态射，无其它态射。

例 3. 取对象类为偏序集构成的类，态射集为偏序集间的保序映射：即 $f:(X,\le_X)\to(Y,\le_Y)$ 使得若 $x\le_X x'$，则 $f(x)\le_Y f(x')$。可验证范畴中公理化条件成立。因此，偏序集构成的类配上偏序集间的保序映射构成一个范畴。

例 4. 单个的偏序集也可视为一个范畴。例如 $(\mathbb{Z},\le)$ 构成一个范畴：$\mathrm{Ob}(\mathbb{Z})=\{m\mid m\in\mathbb{Z}\}$。对 $m,n\in\mathbb{Z}$，取

$$\mathrm{Hom}(m,n)=\begin{cases}\{f_{m,n}\} & 若 m\le n\\ \emptyset & 其他\end{cases}$$

其中 $f_{m,n}$ 视为一个形式符号。其中，$f_{m,m}$ 对应单位态射。若 $m\le n\le p$，规定 $f_{n,p}\circ f_{m,n}=f_{m,p}\in\mathrm{Hom}(m,p)$。可验证范畴中的公理化条件成立。

例 5. 群范畴 $\mathcal{G}$（群 + 群同态），向量空间范畴 $\mathcal{V}$（向量空间 + 线性映射）。

例 6. 设 $\mathcal{C}$ 是只有一个对象的范畴，$\mathrm{Ob}(C)=\{X\}$。易知，$\mathcal{C}$ 中只有一个态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$，并且 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ 是一个含单位元的半群。由于此时，对象 X 的作用仅仅是一个符号，$\mathcal{C}$ 中的本质信息由半群 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ 所唯一决定。所以，只有一个对象的范畴本质上是一个半群 $M:=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$。这样，在粗略意义下，一般的范畴 (含多个对象)，可理解为含多个“半群”：每个对象 Y, 对应一个半群 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Y)$。

从现在起，总假设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴。

定义 2. $\mathcal{C}$ 中的一个态射 $f:X\to Y$ 称为**可逆的**，如果存在态射 $g:Y\to X$ 使 $g\circ f=\mathrm{id}_X$ 且 $f\circ g=\mathrm{id}_Y$ 成立。此时，称 X 和 Y 是**同构**的，记为 $X\cong Y$。

注. 范畴中同构的对象往往具有相同的性质，我们常把同构的对象视为同一对象。

定义 3. 一个态射 $f:X\to Y$ 称为**单态射**，如果左消去律成立，即对任意对象 M 及态射 $g,h:M\to X$，若 $f\circ g=f\circ h$，则 $g=h$。

$$M \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$$

定义 4. 一个态射 $f:X\to Y$ 称为**满态射**，如果右消去律成立，即对任意对象 N 及态射 $\alpha,\beta:Y\to N$，若 $\alpha\circ f=\beta\circ f$，则 $\alpha=\beta$。

$$X \xrightarrow{f} Y \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} N$$

注. 由于范畴的对象未必是集合，态射未必是集合间的映射，集合范畴中的“元素法”定义单射，满射的办法在抽象范畴中一般不适用。

命题 1. 在集合范畴中，单态射 f 为单射，满态射 f 为满射。

命题 2. 若 $f: X \to Y$ 在范畴 $\mathcal{C}$ 中可逆，则 f 既是单态射，又是满态射。

注. 一般来说，上面命题的逆命题不成立。例如，考虑 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ 的所有保持加法和乘法的映射中，映射 $i: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ n \mapsto n$ 既是单态射，又是满态射，但 i 不可逆。

定义 5. 在范畴 $\mathcal{C}$ 中，两个对象 X, Y 的**积**（product）是一个三元组 (M, π_X, π_Y)，其中 M 为对象，$\pi_X: M \to X$，$\pi_Y: M \to Y$ 为两个态射，满足如下的泛性质：对任意的三元组 (N, p_X, p_Y), 其中 N 为对象 $p_X: N \to X$，$p_Y: N \to Y$ 为两个态射，存在唯一态射 $\varphi: N \to M$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[d, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "p_Y"] & \\ X & M \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[r, "\pi_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

即 $p_X = \pi_X \varphi$, $p_Y = \pi_Y \varphi$。换言之，p_X, p_Y 唯一分解经过 π_X, π_Y。通常记 $M = X \Pi Y$。

注. 在上述定义中，积的存在性是不清楚的，可能存在，也可能不存在。如果存在，利用泛性质可证明它在同构的意义下是唯一的。

命题 3. 设 X, Y 为某范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个对象，(M, π_X, π_Y) 和 (N, p_X, p_Y) 都是 X 与 Y 的积。证明：M 和 N 在 $\mathcal{C}$ 中同构。

命题 4. 设 X 和 Y 是集合范畴中的两个对象，则 $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ 配上自然投影 $\pi_X: X \times Y \to X$ 及 $\pi_Y: X \times Y \to Y$ 是 X 与 Y 在集合范畴中的一个积。

定义 6. 在范畴 $\mathcal{C}$ 中，两个对象 X, Y 的**余积**（coproduct）是一个三元组 (M, i_X, i_Y)，其中 M 为对象，$i_X: X \to M$，$i_Y: Y \to M$ 为两个态射，满足如下的泛性质：对任意的三元组 (N, q_X, q_Y)，其中 N 为对象，$q_X: X \to N$，$q_Y: Y \to N$ 为两个态射，存在唯一的态射 $\varphi: M \to N$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "q_X"'] & M \arrow[d, dashed, "\varphi"] & Y \arrow[l, "i_Y"'] \arrow[dl, "q_Y"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

即 $q_X = \varphi i_X$, $q_Y = \varphi i_Y$。换言之，q_X, q_Y 唯一分解经过 π_X, π_Y。通常记 $M = X \amalg Y$。

定义 7. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，它的**反范畴** $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 定义如下：

(1) 范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 与 $\mathcal{C}$ 有相同的对象。

(2) 对任意的 $X, Y \in \mathcal{C}$, 定义 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中的态射集为 $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Y, X) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$。初学时，为避免混淆，可用 $f^{\text{op}} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(Y, X)$ 来表示对应 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 的态射。

(3) $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中的合成法则由 $\mathcal{C}$ 中的合成法则翻转得到。即，若在 $\mathcal{C}$ 有交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

则翻转所有态射的方向，可得到 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd} X & & Z \arrow[ll, "h^{\text{op}}"'] \arrow[dl, "g^{\text{op}}"] \\ & Y \arrow[ul, "f^{\text{op}}"] & \end{tikzcd}$$

命题 5. 设 X, Y 为某范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个对象。证明：三元组 (M, π_X, π_Y) 是 X 与 Y 在范畴 $\mathcal{C}$ 中的积 $\Longleftrightarrow$ (M, π_X, π_Y) 是 X 与 Y 在反范畴 $\mathcal{C}^{\text{op}}$ 中的余积。

命题 6. 设 X 和 Y 为集合范畴中的两个对象。记 $X \sqcup Y := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$ 是集合 X 与 Y 的无交并。证明：$X \sqcup Y$ 配上自然嵌入 $i_X : X \to X \sqcup Y$，$i_Y : Y \to X \sqcup Y$ 是 X 与 Y 在集合范畴中的一个余积。

定义 8. 在范畴 $\mathcal{C}$ 中，设有图表

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

它的一个**拉回** (或纤维积) 是如下的一个三元组 (M, π_X, π_Y)，其中 M 为对象，$\pi_X : M \to X$，$\pi_Y : M \to Y$ 为两个态射，满足 $f \circ \pi_X = g \circ \pi_Y$，并且满足如下的泛性质：对任何三元组 (N, p_X, p_Y)，其中 N 为对象，$p_X : N \to X$，$p_Y : N \to Y$ 为两个态射使得 $f \circ p_X = g \circ p_Y$，存在唯一态射 $\varphi : N \to M$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "p_Y"] \arrow[ddr, bend right, "p_X"'] & & \\ & M \arrow[r, "\pi_Y"] \arrow[d, "\pi_X"] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

即 $p_X = \pi_X \varphi$, $p_Y = \pi_Y \varphi$。换言之，p_X, p_Y 唯一分解经过 π_X, π_Y。通常记 $M = X \prod_S Y$。

命题 7. 在集合范畴中，可取 $X \prod_S Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$.

定义 9. 在范畴 $\mathcal{C}$ 中，设有图表

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \\ X & \end{tikzcd}$$

它的一个**推出** (或纤维余积) 是如下的三元组 (M, i_X, i_Y), 其中 M 为对象, $i_X : X \to M$, $i_Y : Y \to M$ 为两个态射, 满足 $i_X \circ f = i_Y \circ g$, 并且满足如下的泛性质: 对任意的三元组 (N, q_X, q_Y), 其中 N 为对象, $q_X : X \to N$, $q_Y : Y \to N$ 为两个态射使得 $q_X \circ f = q_Y \circ g$, 存在唯一态射 $\varphi : M \to N$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "i_Y"] \arrow[ddr, "q_Y"] & \\ X \arrow[r, "i_X"'] \arrow[drr, "q_X"'] & M \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\ & & N \end{tikzcd}$$

即 $q_X = \varphi i_X$, $q_Y = \varphi i_Y$。换言之，q_X, q_Y 唯一分解经过 π_X, π_Y。通常记 $M = X \amalg_S Y$。

注. 可验证范畴 $\mathcal{C}$ 中的推出对应反范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 中的拉回。

命题 8. 在集合范畴中, 可取 $X \amalg_S Y = (X \sqcup Y)/\sim$, 其中 $\sim$ 是由 $\{f(u) \sim g(u) \mid u \in S\}$ 生成的 $X \sqcup Y$ 上的等价关系。

注. 若 $S = X \cap Y$，则可取 $X \amalg_S Y = X \cup Y$（通常的并）。

定义 10 (共变函子)**.** 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是两个范畴。一个从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的**共变函子** F 包括:

1. 一个对象间的映射 $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$;
2. 对任意 $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,一个态射集间的映射 $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$

满足以下条件:

- (**保持单位**) 对任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，有 $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$
- (**保持复合**) 对任意 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 和 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, 有 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

定义 11 (反变函子)**.** 一个从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的**反变函子** F 包括类似的映射，但满足:

- $F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$
- $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

例 7. 定义**幂集函子** $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$:

- 对集合 X，定义集合 $\mathcal{P}(X)$ 为 X 的幂集;

- 对映射 $f: X \to Y$，定义映射 $\mathcal{P}(f): \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$，$A \mapsto f(A), \quad \forall A \in \mathcal{P}(X)$。

练习： 验证幂集函子一个共变函子。

例 8 (对偶函子)**.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是 $\mathcal{C}$ 的反范畴。定义**对偶函子**$D := \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ：

- 对 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，定义 $D(X) := X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$。
- 对 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$，定义 $D(f) := f^{\mathrm{op}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(Y,X)$。

练习：验证对偶函子是一个反变函子。

例 9. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，$A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 。

(1) 可定义共变函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-): \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$:

   (a) 对任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，定义集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-)(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X) \in \mathbf{Set}$;

   (b) 对任意态射 $f: X \to Y$，定义映射

$$f_* := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,f): \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,Y), \quad g \mapsto fg.$$

(2) 可定义反变函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,A): \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$:

   (a) 对任意 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，定义集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,A)(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A) \in \mathbf{Set}$;

   (b) 对任意态射 $f: X \to Y$，定义映射

$$f^* := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,A): \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A), \quad g \mapsto gf.$$

练习：验证 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-)$ 是共变函子，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,A)$ 是反变函子。

定义 12 (自然变换)**.** 设 $F, G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是两个共变函子。一个从 F 到 G 的**自然变换** η 是一族 $\mathcal{D}$ 中的态射

$$\eta = \{\eta_Z : F(Z) \to G(Z) \mid \forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$$

使得对 $\mathcal{C}$ 中任意态射 $f: X \to Y$，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & G(Y) \end{array}$$

即 $\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X$。若每个 η_Z 都是一个同构，则称自然变换 $\eta: F \to G$ 是一个**自然等价**。

例 10 (幂集函子的单位自然变换)**.** 考虑恒等函子 $\mathrm{id}_{\mathbf{Set}}$ 和幂集函子 $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$。定义自然变换 $\eta : \mathrm{id}_{\mathbf{Set}} \to \mathcal{P}$ 为:

$$\eta = \{\eta_X : X \to \mathcal{P}(X), \quad x \mapsto \{x\} \ \mid \ \forall X \in \mathbf{Set}\}.$$

对任意函数 $f : X \to Y$，下图交换:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{P}(X) \arrow[d, "\mathcal{P}(f)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & \mathcal{P}(Y) \end{tikzcd}$$

因为对任意 $x \in X$，有 $\mathcal{P}(f)(\eta_X(x)) = \mathcal{P}(f)(\{x\}) = \{f(x)\} = \eta_Y(f(x))$.