Ayudantía k: Algoritmos de grafos I

Problema 1.

Proponga un algoritmo que se ejecute en tiempo lineal que tome como input un grafo acíclico $G = (V, E)$ y dos vértices s y t, y que retorne el número de caminos simples de s a t en G. El algoritmo solo debe contar los caminos, no enlistarlos.

Problema 2.

Suponga que el siguiente algoritmo se ejecuta con un grafo dirigido acíclico G:

1. Ejecute DFS sobre G, almacenando los tiempos de finalización.
2. Ejecute DFS-visit(G, u), donde u es el nodo de G que tiene el mayor tiempo de finalización.
3. Si todos los nodos están marcados como finalizados, retorne True. En caso contrario, retorne False.

¿Qué propiedad tiene G cuando el algoritmo retorna True?

Problema 3.

(a) ¿Cómo cambia el número de componentes fuertemente conectadas para un grafo si le agrega una nueva arista?

(b) Sea $G = (V, E)$ un grado dirigido acíclico. ¿Cuántas componentes fuertemente conexas encuentra el algoritmo de Kosaraju al ser ejecutado en G?

Problema 4.

(a) Dado un grado G y un árbol de cobertura de costo mínimo (MST) T para G, suponga que se decrece el costo de una de las aristas de T. Muestre que T sigue siendo un MST para G. Más formalmente, sea T el MST de G para la función de costo w. Dada una arista $(u, v) \in T$ y un número positivo k, se define la nueva función de costo w' como

$$w'(x, y) = \begin{cases} w(x, y) & \text{si } (x, y) \neq (u, v) \\ w(x, y) - k & \text{si } (x, y) = (u, v) \end{cases}$$

Muestre que T es un MST para G con costos w'.

(b) Dado un grafo G y un MST T, suponga que se decrementa el peso de una de las aristas que no están incluídas en T. Entregue un algoritmo para encontrar un MST del grafo modificado.