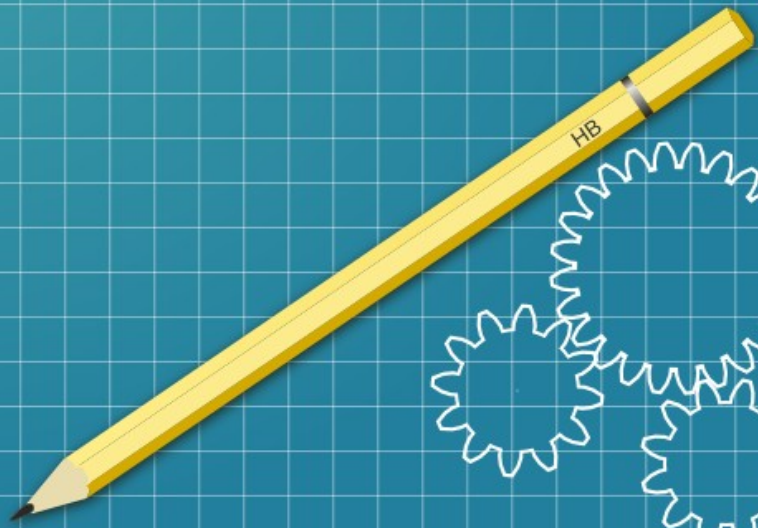
Tridiagionallöser

Ferdinand Vanmaele

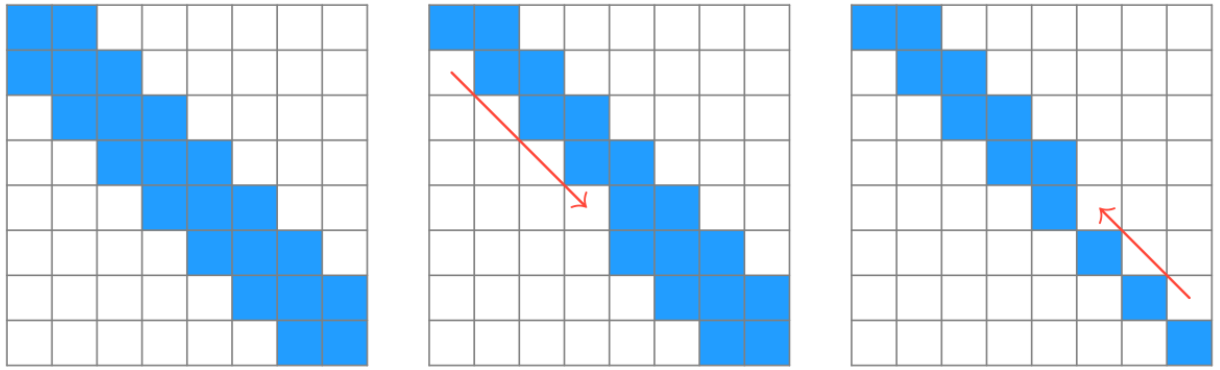


Einführung

- Paralleles Lösen von Tridiagionalsystemen
  - Naiv: Thomas-Algorithmus, O(n) Operationen

Einführung

- Paralleles Lösen von Tridiagonalsystemen $Ax = b$
  - Naiv: Thomas-Algorithmus, O(n) Operationen
    - Eliminiere untere Diagonale, dann Rückwärtseinsetzen
  - Sequentiell!



(a) Initial tridiagonal system

(b) Downwards oriented elimination phase

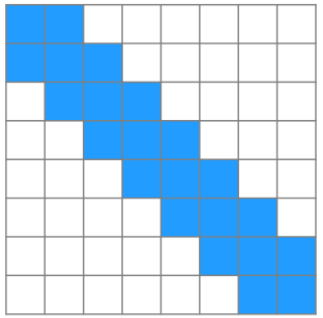
(c) Upwards oriented substitution phase

Einführung

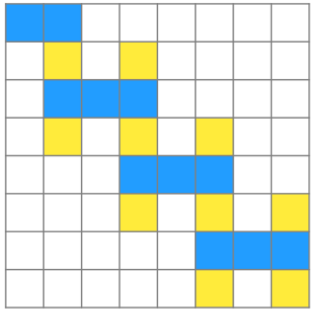
- Paralleles Lösen von Tridiagonalsystemen $Ax = b$
  - Parallele Algorithmen?
    - Redundante Operationen

Einführung

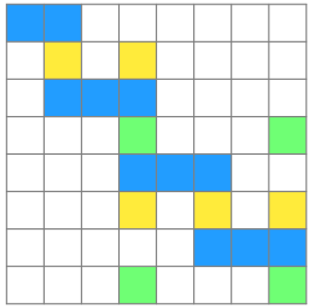
- Paralleles Lösen von Tridiagonalsystemen $Ax = b$
  - Parallele Algorithmen?
    - Redundante Operationen
  - Cyclic Reduction



(a) Initial tridiagonal system



(b) First reduction step. The yellow entries form a smaller tridiagonal system.



(c) Second reduction step. The green entries form a system of two unknowns, which can be solved directly.

Einführung

- Paralleles Lösen von Tridiagonalsystemen $Ax = b$
  - Parallele Algorithmen?
    - Redundante Operationen
  - Cyclic Reduction
  - Divide and Conquer
    - Rekursive Aufteilung

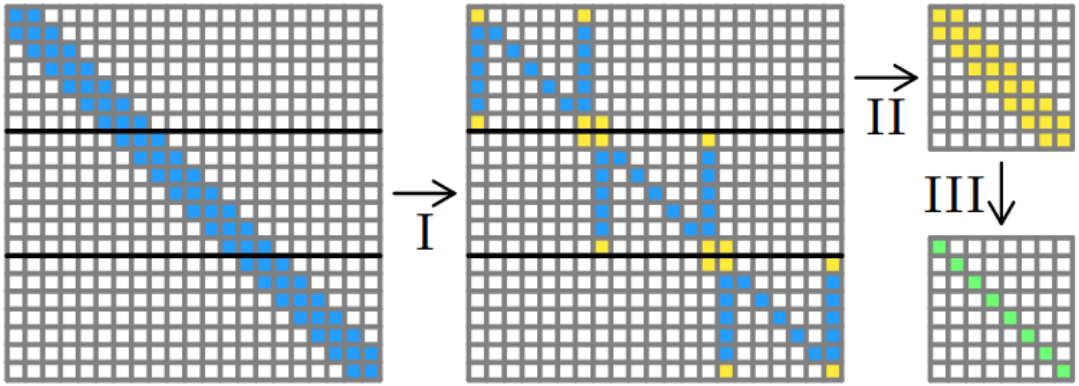
RPTS

- **R**ecursive **P**artitioned **T**ridiagonal **S**chur Complement [1]
  - Divide and Conquer
  - Bilden von “Spikes”

[1] C. Klein, R. Strzodka. Tridiagonal GPU Solver with Scaled Partial Pivoting at Maximum Bandwidth, ICPP 2021

RPTS

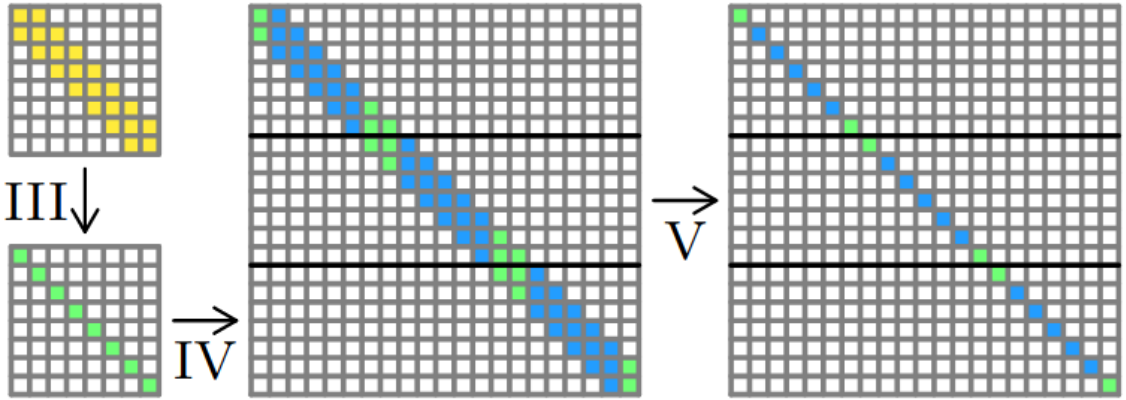
- **R**ecursive **P**artitioned **T**ridiagonal **S**chur Complement [1]
  - Reduction step



[1] C. Klein, R. Strzodka. Tridiagonal GPU Solver with Scaled Partial Pivoting at Maximum Bandwidth, ICPP 2021

RPTS

- **R**ecursive **P**artitioned **T**ridiagonal **S**chur Complement [1]
  - Substitution step



[1] C. Klein, R. Strzodka. Tridiagonal GPU Solver with Scaled Partial Pivoting at Maximum Bandwidth, ICPP 2021

RPTS

- **R**ecursive **P**artitioned **T**ridiagonal **S**chur Complement [1]
  - Setze rekursiv fort, bis System klein genug
  - Pivotisierung für bessere Stabilität
  - Koeffizientmatrix A: Partitionsgrenzen?

[1] C. Klein, R. Strzodka. Tridiagonal GPU Solver with Scaled Partial Pivoting at Maximum Bandwidth, ICPP 2021

RPTS – Partitionierung

- Feste Partitionierung
  - Billig, aber ggf. ungünstig gewählt

RPTS – Partitionierung

- Feste Partitionierung
  - Billig, aber ggf. ungünstig gewählt
- **Dynamisch erzeugt**
  - Verringern der *Kondition* des groben Systems
    - Kondition groß => kleiner Fehler in *b* erzeugt großer Fehler in Lsg. *X*
    - **Ziel:** Kond(GS) nicht größer als Kond(A)
  - Ggf. teuer
    - Verwende Grenzen mehrfach (Ax = b1, b2, ...)

RPTS – Partitionierung

- Ansätze für dynamische Grenzen
  - Durchprobieren von festen Partitionen
  - Randomisiert erzeugte Grenzen
    - Wähle Grenzen, welche Kond(GS) minimieren
  - Thresholding
    - Spikes werden (partielle Pivot.) i.A. nicht klein genug :-(
  - Zeilenpaaren GS
    - Jeder Block erzeugt 2 Zeilen im groben System
    - Maximiere Determinante für 2x2 Systeme
    - Auswirkung auf das globale System?

Performance

- Auswertung der verschiedenen Ansätze
  - Ax = b mit x ~ N(3, 1)
    - Relativer Vorwärtsfehler ||y – x|| / ||x||
    - n = 512, 1 Rekursionsschritt
  - 2500 Samples
  - Beispielsklassen
    - *randsvd*: Matrix mit randomisierten Singulärwerte
    - *unif*: Nebendiagonalen gleichverteilt, Diagonale “klein”
    - Kondition graduell hochgeschraubt

Schlussfolgerungen

- Fest gewählte Partitionen funktionieren recht gut
  - Ausprobieren verschiedener Größen
  - Im Mittel selbe Größenordnung als andere Ansätze
  - Billig
- Kondition des groben Systems als Nebenrechnung
  - Erkennen, wann das System nicht mehr zu retten ist
- Statistische Analysen für Erfolgsquoten

Danke für die Aufmerksamkeit!