Comenzado el	sábado, 11 de julio de 2020, 09:13
Estado	Finalizado
Finalizado en	sábado, 11 de julio de 2020, 16:07
Tiempo empleado	6 horas 54 minutos
Calificación	**50,20** de 150,00 (**33**%)

Pregunta 1

Correcta

Puntúa 3,00 sobre 3,00

¿Qué se puede entender como ejecutar actos dolosos destinados a alterar la legitimidad de cualquier evaluación académica?

Seleccione una:

- a. Intercambiar mensajes de texto durante una evaluación que no lo permite.
- b. Compartir código propio desarrollado de forma independiente.
- c. Utilizar código que recibí de forma milagrosa con la respuesta de una evaluación.
- d. Comprar una respuesta de una evaluación.
- e. Vender una respuesta de una evaluación
- f. Organizarse anticipadamente para rendir una evaluación personal con un grupo de amigos
- g. Solo leer mensajes de una evaluación dentro de un grupo de mensajería instantánea
- h. Todas las anteriores ✓

Respuesta correcta

La respuesta correcta es: Todas las anteriores

Pregunta 2

Parcialmente correcta

Puntúa 0,60 sobre 3,00

Indique la respuesta **más incorrecta**

Seleccione una:

a. El fenómenos de Runge ocurre cuando el polinomio interpolador se construye con la matriz de Vandermonde

b. El fenómeno de Runge se reduce cuando la cantidad de puntos interpolados es par.

c. El fenómeno de Runge se observa al realizar interpolación con puntos equiespaciados.

d. El fenómeno de Runge solo se observa cuando se grafican los $L_i(x)$ de Lagrange. ✓

e. El fenómeno de Runge desaparece cuando se utiliza aritmética exacta.

Respuesta parcialmente correcta.

La respuesta correcta es: El fenómeno de Runge desaparece cuando se utiliza aritmética exacta.

Pregunta 3

Correcta

Puntúa 3,00 sobre 3,00

Indique la respuesta **más incorrecta**

Seleccione una:

a. La interpolación de Lagrange tiene la ventaja sobre los otros métodos de interpolación en el caso cuando ya se tiene el polinomio interpolador construido y se quiere agregar un nuevo dato, (x_{n+1}, y_{n+1}) ya que solo requiere construir $y_{n+1}\, L_{n+1}(x)$ y sumarselo al interpolator. ✓

b. La interpolación de Lagrange requiere que los datos x_i sean distintos y en orden creciente para poder acelerar su computo.

c. La interpolación de Lagrange no funciona si hay valores x_i repetidos.

d. La interpolación de Lagrange logra reducir el fenómeno de Runge para datos equiespaciados dado que sus polinomios $L_i(x)$ consecutivos oscilan con signo contrario entre puntos de interpolación

e. La interpolación de Lagrange genera una matriz de Vandermonde modificado que no es mal condicionada

Respuesta correcta

Las respuestas correctas son: La interpolación de Lagrange logra reducir el fenómeno de Runge para datos equiespaciados dado que sus polinomios $L_i(x)$ consecutivos oscilan con signo contrario entre puntos de interpolación
, La interpolación de Lagrange tiene la ventaja sobre los otros métodos de interpolación en el caso cuando ya se tiene el polinomio interpolador construido y se quiere agregar un nuevo dato, (x_{n+1}, y_{n+1}) ya que solo requiere construir $y_{n+1}\, L_{n+1}(x)$ y sumarselo al interpolator.

Pregunta 4

Parcialmente correcta

Puntúa 0,60 sobre 3,00

Indique la respuesta **más incorrecta**

Seleccione una:

- a. La matriz de Vandermonde asegura no singularidad cuando los datos y_i (variable independiente) son todos positivos y mayores a 1.
- b. En la construcción de la matriz de Vandermonde a partir de los datos x_i es requerido que los valores estén en orden creciente, de otra forma es posibles que la matriz sea singular.
- c. El polinomio interpolado obtenido con la matriz de Vandermonde es del mismo grado que el que uno puede obtener por otro método de interpolación, por ejemplo el método de Lagrange o las diferencias divididas de Newton.
- d. La matriz de de Vandermonde se construye con una columna más que la cantidad de filas para el que grado del polinomio interpolado sea igual a la cantidad de datos entregados.
- e. Se sugiere utilizar el método del gradiente conjugado sobre el método del gradiente descendente para resolver el sistema de ecuaciones lineales asociado a la matriz de Vandermonde dado que los coeficientes de la matriz son siempre positivos.

Respuesta parcialmente correcta.

La respuesta correcta es: La matriz de Vandermonde asegura no singularidad cuando los datos y_i (variable independiente) son todos positivos y mayores a 1.

Pregunta 5

Incorrecta

Puntúa 0,00 sobre 3,00

Indique la respuesta **más incorrecta**

Seleccione una:

- a. El método de Newton en $\mathbb{R}^n$ es recomendable obtener la inversa de la matriz Jacobiana $J(\mathbf{x}_i)$ numérica debido a que se usará en cada iteración.
- b. El método de Newton en $\mathbb{R}^n$ se puede aplicar a sistema de ecuaciones lineales y converge en 1 iteración. ✗
- c. El método de Newton en $\mathbb{R}^n$ encuentra todas las soluciones de un sistema de ecuaciones no lineales a medida que yo utilice distintos algoritmos para resolver el sistema de ecuaciones lineales en cada iteración.
- d. El método de Newton en $\mathbb{R}^n$ asegura que la matriz Jacobiana en la iteración i, es decir $J(\mathbf{x}_i)$ es no singular siempre y cuando $\mathbf{x}_i$ no sea la solución del sistema de ecuaciones no lineales.
- e. El método de Newton en $\mathbb{R}^n$ converge linealmente cuando se aplica a sistema de ecuaciones lineales con matrices no-singulares y no definidas positivas.

Respuesta incorrecta.

La respuesta correcta es: El método de Newton en $\mathbb{R}^n$ asegura que la matriz Jacobiana en la iteración i, es decir $J(\mathbf{x}_i)$ es no singular siempre y cuando $\mathbf{x}_i$ no sea la solución del sistema de ecuaciones no lineales.

Pregunta 6

Parcialmente correcta

Puntúa 0,60 sobre 3,00

Indique la respuesta **más incorrecta**

Seleccione una:

- a. Las Splines cúbicas solo pueden satisfacer al mismo tiempo una de las 5 condiciones de borde discutidas: Natural, curvatura ajustada, “clamped cubic spline”, terminada parabólicamente y “Not-a-knot cubic splines”
- b. Las Splines cúbicas solo pueden aproximar funciones cúbicas ✓
- c. Las Splines cúbicas reducen el error de interpolación más lento que interpolación polinomial con puntos de Chebyshev al aproximar una función analítica
- d. Las Splines cúbicas no pueden tener condiciones de bordes periódicas
- e. Las Splines cúbicas aproximan exactamente cualquier polinomio de grado hasta 3 y menor.

Respuesta parcialmente correcta.

La respuesta correcta es: Las Splines cúbicas solo pueden satisfacer al mismo tiempo una de las 5 condiciones de borde discutidas: Natural, curvatura ajustada, “clamped cubic spline”, terminada parabólicamente y “Not-a-knot cubic splines”

Pregunta 7

Parcialmente correcta

Puntúa 0,60 sobre 3,00

Indique la respuesta **más incorrecta**

Seleccione una:

- a. Los puntos de Chebyshev se pueden utilizar en cualquier intervalo finito $[a, b]$.
- b. Los puntos de Chebyshev fueron obtenidos por Sir Issac Newton
- c. Los puntos de Chebyshev reducen el efecto de $f^{(n)}(c)$ en la formula del error de interpolación: $f(x) - p(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(c)$.
- d. Los puntos de Chebyshev se obtiene de la identidad $T_{n+1}(x) = 2\,x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$
- e. Los puntos de Chebyshev minimizan el grado del polinomio a interpolar

Respuesta parcialmente correcta.

La respuesta correcta es: Los puntos de Chebyshev reducen el efecto de $f^{(n)}(c)$ en la formula del error de interpolación: $f(x) - p(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{n!} f^{(n)}(c)$.

Pregunta 8

Parcialmente correcta

Puntúa 0,60 sobre 3,00

Indique la respuesta **más incorrecta**

Seleccione una:

- a. Es recomendado utilizar el algoritmo de las diferencias divididas de Newton para construir los coeficientes $L_i(x)$ de la interpolación de Lagrange.
- b. El algoritmo de las diferencias divididas de Newton construye una matriz de Vandermonde modificada y luego hace Backward-substitution para encontrar los coeficientes necesarios.
- c. El algoritmo de las diferencias divididas de Newton funciona mejor cuando los datos recibidos se organizan en orden creciente para la variable dependiente y_i
- d. El algoritmo de las diferencias divididas de Newton no funciona cuando la data (x_i, y_i) viene de una función o fenómeno periódico.
- e. El algoritmo de las diferencias divididas de Newton construye un polinomio interpolador de grado n o menor para $n+1$ puntos de interpolación

Respuesta parcialmente correcta.

La respuesta correcta es: El algoritmo de las diferencias divididas de Newton construye una matriz de Vandermonde modificada y luego hace Backward-substitution para encontrar los coeficientes necesarios.

Pregunta 9

Parcialmente correcta

Puntúa 0,60 sobre 3,00

Indique la respuesta **más incorrecta**

Seleccione una:

- a. La A-ortogonalidad de los vectores $\mathbf{d}_i$ en el gradiente conjugado se debe a que la matriz utilizada tiene valores propios reales y positivos, y además que la diferencia entre ellos es de por lo menos una unidad, es decir $|\lambda_i - \lambda_j| \geq 1$ para todo $i \neq j$.
- b. El método del gradiente conjugado converge en n iteraciones para un sistema de ecuaciones lineales con una matriz $A \in \mathbb{R}^n$ cuando la matriz es simétrica y definida positiva, considerando aritmética exacta.
- c. El método del gradiente conjugado solo puede aplicarse cuando uno ejecuta la computación con aritmética exacta, particularmente con coeficientes racionales. ✓
- d. El método del gradiente conjugado tiene la ventaja que puede corregir los valores propios de la matriz cuando son mejor que un umbral por medio de la A-ortogonalidad, es decir, debido a la iteración $\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} - \beta_k \, \mathbf{d}_k$ se asegura que los valores propios menores que β_k serán ajustados de forma correcta.
- e. La A-ortogonalidad de los vectores $\mathbf{d}_i$ se puede observar en los vectores columna de la matriz A.

Respuesta parcialmente correcta.

La respuesta correcta es: El método del gradiente conjugado tiene la ventaja que puede corregir los valores propios de la matriz cuando son mejor que un umbral por medio de la A-ortogonalidad, es decir, debido a la iteración $\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} - \beta_k \, \mathbf{d}_k$ se asegura que los valores propios menores que β_k serán ajustados de forma correcta.

Pregunta 10

Parcialmente correcta

Puntúa 0,60 sobre 3,00

Indique la respuesta **más incorrecta**

Seleccione una:

- a. El método del gradiente descendente realiza operaciones elementales sobre los elementos de la matriz, de forma similar a lo que hace la descomposición LU.
- b. No es recomendado iniciar el método del gradiente descendente con el vector nulo como “dato inicial”.
- c. El método del gradiente descendente asegura convergencia para resolver sistemas de ecuaciones lineales con valores propios reales y distintos de 0.
- d. El coeficiente α_k del método del gradiente descendente pueden ser positivo o negativo, pero no permanecer con un signo fijo
- e. El método del gradiente descendente converge para sistemas de ecuaciones lineales cuadrados, no singulares, con la matriz simétrica y definida positiva.

Respuesta parcialmente correcta.

La respuesta correcta es: El método del gradiente descendente asegura convergencia para resolver sistemas de ecuaciones lineales con valores propios reales y distintos de 0.

Pregunta 11

Correcta

Puntúa 40,00 sobre 40,00

Sean los pares de puntos (x_i, y_i):{(0, 0), (1, 0.70807341827357), (2, 0.82682181043181), (3, 0.019914856674817), (4, 0.57275001690431), (5, 0.91953576453823)}, para i de 1 a 6. Construya la siguiente Spline Cubica:

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & \text{si } x \in [0,1] \\ S_2(x), & \text{si } x \in [1,2] \\ S_3(x), & \text{si } x \in [2,3] \\ S_4(x), & \text{si } x \in [3,4] \\ S_5(x), & \text{si } x \in [4,5] \end{cases}$$

donde $S_i(x) = y_i + a_i(x - x_i) + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i)^3$ utilizando condiciones de borde del tipo Robin en $x_1 = 0$ y del tipo Natural en $x_6 = 5$. Considerar que la condición de tipo Robin se define como:

$$4\,S(x_1) - 6\,S'(x_1) = 2.$$

Indique cuales son los 4 números después de la coma (sin redondear) del coeficiente b_4.

(Ejemplo: Si el coeficiente $b_4 = 8.12345$ el resultado es 1234 o si el coeficiente es $b_4 = 0.12345$ el resultado también es 1234).

3575

Una posible respuesta correcta sería: 3575

Respuesta correcta

Pregunta 12

Incorrecta

Puntúa 0,00 sobre 40,00

La función zeta de Riemann se define de la siguiente forma: $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$, pero por simplicidad trabajaremos con la siguiente versión truncada $\zeta_m(s) = \sum_{k=1}^{m} k^{-s}$, para $m \gg 1$.

Aún en su versión truncada, el costo de evaluarla es significativo. Considerando que se necesita obtener un error $\max_{s \in [2,10]} |\zeta_m(s) - p(s)| < 10^{-14}$ para $m = 300$, **determine el grado mínimo del polinomio de interpolación utilizando puntos de Chebyshev para que se cumpla la tolerancia del error requerida**.

Para calcular el error considere una grilla fina para s de 500 puntos equiespaciados y considere como número máximo de puntos de interpolación $N = 70$. Si no se cumple la tolerancia solicitada con el máximo número de puntos indicados, su respuesta debe ser -1.

Utilice la implementación `BarycentricInterpolator` del paquete `scipy.interpolate` para realizar las interpolaciones.

-1 ✗

Una posible respuesta correcta sería: 35

Respuesta incorrecta.

Pregunta **13**

Incorrecta

Puntúa 0,00 sobre 40,00

Warning: Por favor leer toda la pregunta primero antes de empezar a pensar en la solución.

Necesitamos ajustar un conjunto de datos $D = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$, con una Spline cúbica de **un** intervalo, es decir, $S(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Para esto requerimos minimizar la función $F(a,b,c,d) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - S(x_i))^4 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i - cx_i^2 - dx_i^3)^4$. Esto significa que debemos obtener $\nabla F = \mathbf{0}$, es decir:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} -4(y_i - a - bx_i - cx_i^2 - dx_i^3)^3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} -4x_i(y_i - a - bx_i - cx_i^2 - dx_i^3)^3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n} -4x_i^2(y_i - a - bx_i - cx_i^2 - dx_i^3)^3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial d} = \sum_{i=1}^{n} -4x_i^3(y_i - a - bx_i - cx_i^2 - dx_i^3)^3 = 0$$

Notar que simplificando la expresión anterior y definiendo $\mathbf{z} = (a, b, c, d)$ podemos llevar el resultado anterior al problema $\mathbf{G}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{G}(\mathbf{z})$ se define como:

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i - cx_i^2 - dx_i^3)^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - a - bx_i - cx_i^2 - dx_i^3)^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2(y_i - a - bx_i - cx_i^2 - dx_i^3)^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^3(y_i - a - bx_i - cx_i^2 - dx_i^3)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para obtener el $\mathbf{z} = (a, b, c, d)$ que minimiza F utilizaremos una variante del **método de Newton** en $\mathbb{R}^n$ que permite usar el algoritmo del **Gradiente Conjugado** para resolver el sistema de ecuaciones lineales que aparece en cada iteración. Si bien no sabemos de antemano si $J(\mathbf{z})$ es simétrica y definida positiva, $J(\mathbf{z})^T J(\mathbf{z})$ si lo es, por lo que el nuevo sistema que se resuelve en cada iteración del método de Newton será:

$$J(\mathbf{z}_i)^T J(\mathbf{z}_i) \Delta \mathbf{z}_i = -J(\mathbf{z}_i)^T \mathbf{G}(\mathbf{z}_i).$$

¿Cuál es el valor del parámetro a luego de 4 iteraciones del método de Newton? ***Debe entregar su resultado con 3 decimales sin redondear. Por ejemplo si su resultado es 2.1345871237 debe completar con 2.134.***

Considere como *initial guess* el vector nulo tanto para el **Método de Newton** como para el algoritmo del ***Gradiente Conjugado***. Además utilice como tolerancia del vector residual (sin normalizar) $\|\mathbf{r}_k\| < 10^{-10}$ para el método del ***Gradiente Conjugado***.

El archivo con los datos a interpolar se encuentra en https://github.com/sct-utfsm/INF-285/tree/master/cop-3 con el nombre "3.csv" (además estará disponible con las extensiones .npy y .txt). Utilice el archivo indicado, de lo contrario no obtendrá la respuesta correcta.

18.798 ✗

Una posible respuesta correcta sería: 0.988

Respuesta incorrecta.