UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Investigación de Operaciones ILN250
Tarea Computacional 1
Primer Semestre 2020

Profesores:	Pablo Escalona - Rafael Favereau
Ayudantes:	Pablo Abello - Mijail Littin - Eduardo Villanueva
Fecha:	Viernes 15 de Mayo de 2020.
Fecha de entrega:	Lunes 15 de junio, hasta las 08:00 a.m.

Instrucciones

La tarea debe ser desarrollada en parejas, permitiéndose combinaciones entre los tres distintos paralelos de metodología piloto (Paralelos 4, 5 y 7). El informe de entrega deberá incluir introducción, desarrollo, conclusiones y anexos. Los supuestos utilizados para el desarrollo deben ser especificados. Se deberá entregar un archivo .rar con el nombre "*Tarea1GIO_Apellido1_Apellido2.rar*", que contenga tanto el informe en PDF como los archivos de los programas utilizados.
No se aceptarán tareas fuera de plazo, y aquellos informes que vengan un formato distinto a PDF serán penalizadas con 5 puntos.

1. Enunciado

Considere el siguiente problema de optimización convexo irrestricto:

$$\begin{aligned}\min_{R,Q} C(R,Q) = {} & h\left(R + \frac{Q}{2} - \mu L\right) \\ & + (h+b_1)\frac{\sigma^2 L}{Q}\left[H\left(\frac{R-\mu L}{\sqrt{\sigma^2 L}}\right) - H\left(\frac{R+Q-\mu L}{\sqrt{\sigma^2 L}}\right)\right] + \frac{A\mu}{Q},\end{aligned} \tag{1}$$

donde la función $H(x)$ está definida por:

$$H(x) = \frac{1}{2}\left[(x^2+1)(1-\Phi(x)) - x\varphi(x)\right],$$

con $\Phi(x)$ y $\varphi(x)$ equivalentes a la función de distribución normal estándar y la función de densidad de la normal estándar respectivamente. El objetivo es minimizar la función de costo en función de las variables R (punto de re-orden) y Q (tamaño de lote).

Al tratarse de un problema de optimización convexo irrestricto, las CPOs ($\partial C/\partial R = \partial C/\partial Q = 0$) son condiciones necesarias y suficientes para garantizar una solución óptima. Luego:

$$\frac{\partial C(R,Q)}{\partial R} = h + (h+b_1)\frac{\sqrt{\sigma^2 L}}{Q}\left[G\left(\frac{R+Q-\mu L}{\sqrt{\sigma^2 L}}\right) - G\left(\frac{R-\mu L}{\sqrt{\sigma^2 L}}\right)\right] \tag{2}$$

$$\frac{\partial C(R,Q)}{\partial Q} = \frac{h}{2} - \frac{A\mu}{Q^2}$$
$$- (h+b_1)\frac{\sigma^2 L}{Q^2}\left[H\left(\frac{R-\mu L}{\sqrt{\sigma^2 L}}\right) - H\left(\frac{R+Q-\mu L}{\sqrt{\sigma^2 L}}\right) - \frac{Q}{\sqrt{\sigma^2 L}}G\left(\frac{R+Q-\mu L}{\sqrt{\sigma^2 L}}\right)\right], \quad (3)$$

donde la función $G(x) = \varphi(x) - x(1-\Phi(x))$.

Un algoritmo de descenso especialmente formulado para resolver este problema es el siguiente ([1]):

1. Considere como punto de partida la solución simplificada de "Lote Económico", dada por

$$Q^{(0)} = \sqrt{\frac{2\mu A}{h}}$$

Obtener $R^{(0)}$ a partir de la ecuación (2)

2 Obtener Q^{k+1} de la ecuación (3) despejar Q^{k+1} de la siguiente forma:

$$Q^{(k+1)} = \left[\frac{2A\mu}{h} + \frac{2(h+b_1)}{h}\sigma^2 L\left(H\left(\frac{R^{(k)}-\mu L}{\sqrt{\sigma^2 L}}\right) - H\left(\frac{R^{(k)}+Q^{(k)}-\mu L}{\sqrt{\sigma^2 L}}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{Q^{(k)}}{\sqrt{\sigma^2 L}}G\left(\frac{R^{(k)}+Q^{(k)}-\mu L}{\sqrt{\sigma^2 L}}\right)\right)\right]^{1/2}.$$

Obtener y $R^{(k+1)}$ de de la ecuación (2).

3 Condición de parada: $\left|C(R^{(k+1)}, Q^{(k+1)}) - C(R^{(k)}, Q^{(k)})\right| < \epsilon$, con $\epsilon = 10^{-3}$.

Algunos valores comunes para los parámetros del problema son los siguientes.

Parámetros	**Rango**
μ	U[50 , 250]
CV	U[0.1 ,0.6]
A	U[100 , 1000]
h	U[0.1 , 1.5]
b_1	20
L	4

Donde $CV = \sigma/\mu$. Note que algunos parámetros son uniformemente distribuidos entre cotas. Usted puede elegir un valor aleatorios (uniformemente distribuido) entre las cotas.

En esta tarea usted deberá programar el problema (1) en AMPL, programar el algoritmo propuesto en algún lenguaje de programación (C, Matlab, Python, etc), y desarrollar los algoritmos de descenso *gradiente* y *Newton*. Los detalles de los que se pide en la tarea es el siguiente. El objetivo es comparar los diferentes métodos de resolución en términos de iteraciones (cuando corresponda) y tiempos computacionales (CPU time).

1. Utilizando los rangos de datos entregados para los parámetros, programe y resuelva el problema utilizando el lenguaje de programación matemática AMPL mediante el solver MINOS. Rescate tanto la solución óptima R^* y Q^*, como el valor óptimo $C(R^*, Q^*)$ y el tiempo de resolución.

2. A través de un lenguaje de programación (C, Python, Matlab, etc) implemente el método iterativo explicado en el enunciado del problema para resolver el problema de minimización. Además, implemente los métodos de la gradiente y Newton. En ambos métodos utilice búsqueda de línea por backtracking para el tamaño de paso. Para los tres algoritmos, obtenga las variables óptimas, el valor óptimo de la función de costos (solución óptima), el número de iteraciones y el tiempo computacional (CPU time) de resolución.

3. Compare los resultados entre todos los métodos implementados.

Hint.

$$\frac{\partial H(x)}{\partial x} = -G(x)$$
$$\frac{\partial G(x)}{\partial x} = \Phi(x) - 1$$

Referencias

[1] Sven Axsäter. *Inventory control*, volume 225. Springer, 2015.