Francis Vargas Ferrer 201573026-1 Fecha:

Pregunta 1

a) Por la forma que presenta la matriz A, nos sugiere aplicar una permutación "P" tal que A nos quede de la siguiente forma:

$$PA = \begin{bmatrix} a & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b & a & c & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b & a & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & b & a & c & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b & a & c \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & b & a \end{bmatrix}$$

De donde podemos ver que "P" es una matriz de $n \times n$ con 1's en su diagonal secundaria.

Aplicando P al sistema:

$$Ax = 0 \quad / P$$
$$PAx = P0$$

Para resolver el sistema podemos aplicar una versión de $PA = LU$ más sencilla, ya que solo necesitamos hacer 0's en la diagonal que se encuentra bajo la principal

$$PA = \begin{bmatrix} a & c & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \boxed{b} & a & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{b} & a & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{b} & a & c & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \boxed{b} & a & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \boxed{b} & a \end{bmatrix}$$

Luego el sistema queda

$$PAx = PB$$

$$L\underbrace{Ux}_{C} = PB \quad ; \quad Ux = C \quad (1)$$

$$LC = PB \quad (2)$$

Resolremos (2) con forward substitution y después (1) con backward substitution.

Es importante notar que P no se necesita calcular, ya que siempre es de la misma forma, y PB es B con sus elementos en orden inverso.

$$PB = \begin{pmatrix} 1/n \\ 1/(n-1) \\ 1/(n-2) \\ \vdots \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Francis Vargas Ferrer 201573026-1 Fecha:

Pregunta 2

a) Propondremos el siguiente algoritmo:

I) Comprobamos que $A^{(i)} = A^{(i)T}$, si esto cumple podemos proceder a comprobar si es definida positiva, caso contrario sabemos que no puede ser definida positiva y saltamos a (III)

II) Para comprobar si es definida positiva, utilizamos el criterio de Sylvester, como sabemos que $A^{(i)}$ es simétrica, entonces nos basta con probar que los menores principales de $A^{(i)}$ son mayores a 0. Si todos cumplen, entonces $A^{(i)}$ es definida positiva.

III) Para poder identificar si $A^{(i)}$ es diagonal dominante usaremos su definición, la cual nos dice lo siguiente:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i; j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Si cumple entonces es diagonal dominante.

b) Se propone un algoritmo similar al de a.

I) Comprobamos que $A^{(i)} = A^{(i)T}$, si cumple, entonces $A^{(i)}$ es simétrica, por lo que puede ser definida positiva, ca contrario finalizamos el algoritmo, porque $A^{(i)}$ sería no simétrica y no definida positiva.

II) Como $A^{(i)}$ es simétrica, comprobamos que sus menores principales sean mayores a 0. Si se cumple para todos los menores principales, $A^{(i)}$ es definida positiva, en otro caso $A^{(i)}$ solo es simétrica.

Francis Vargas Ferrer 201573026-1 Fecha:

Pregunta 3

a) Por las condiciones del problema, sabemos que A puede tener 0's en su diagonal, esto nos imposibilita utilizar la descomposición $A=LU$, por lo que para resolver el sistema $Ax=b$ utilizaremos $PA=LU$. Como A es no singular, podemos asegurar que este método nos entregara una solución única.

c) La expresión $a_{i,i} > -\sum_{i \neq j}^{n} a_{i,j}$ nos dice que la matriz A es estrictamente dominante, ya que todos sus elementos, exceptuando la diagonal son negativos, por lo que la sumatoria siempre entrega un valor negativo y el (-) cumple el rol de valor absoluto, como a_{ii} siempre es positivo por definición, es fácil ver que la matriz es estrictamente definida positiva, como buscamos un método iterativo, esto nos entrega información importante, ya que sabemos que que al aplicar Jacobi o Gauss-Seidel, estos convergiran a una solución única de $Ax=b$.

Aplicaremos el método de Gauss-Seidel, pero añadiremos como criterio de detención $\frac{\|r_k\|}{b} < tol$.

Para hacer Gauss-Seidel obtenemos la descomposición $A=L+D+U$ y hacemos la siguiente iteración de punto fijo vectorial.

$$x_0 = \text{"initial guess"}$$
$$x_{n+1} = x_n + (L+D)^{-1}(b - A x_n)$$

Se ejecutara hasta que se realizen las 5000 iteraciones o cuando $\frac{\|b - Ax_k\|}{b} < Tol$, lo que ocurra primero.

f) Se logra observar que el algoritmo 2 no logra tener mejores tiempos que el algoritmo 1, esto debido a que no es conveniente aplicar el metodo iterativo de la forma en que se esta haciendo, ya que el numero de iteraciones , es mucho más grande que las dimensiones de la matriz, esto provoca que resolver utilizando $PA = LU$ sea mucho más rápido.

Juro que la totalidad del trabajo que he entregado en esta evaluación corresponde a mi trabajo individual, y es el fruto de mi estudio y esfuerzo. Además declaro que no he recibido ayuda externa ni he compartido de forma alguna mi trabajo o desarrollos.

Nombre : Francis Alejandro Jesús Vargas Ferrer
Rol : 201573026-1
Firma : [illegible]
Fecha : 06-06-2020