Mecánica computacional - Trabajo Práctico 2

FILARDI, Esteban; VICTORIO, Franco

1) En los dos casos se usa:

$$\psi = x + 1$$

$$N_m(x) = \sin(m\pi x)$$

El error utilizado es:

$$\text{error} = \frac{||x_{aprox} - x_{exacta}||_2}{||x_{exacta}||_2}$$

evaluando en 1000 puntos equiespaciados en $[0, 1]$.

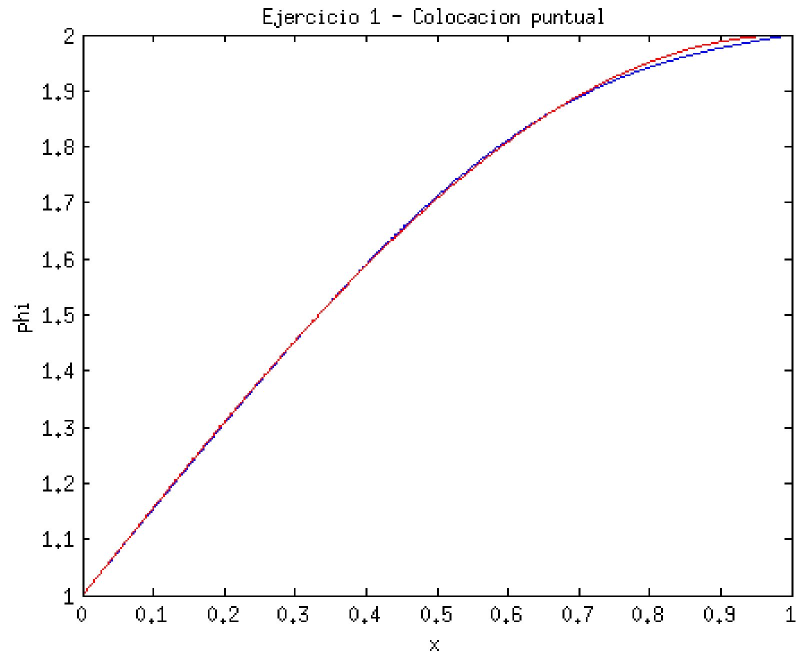
Colocación puntual: usando M puntos equiespaciados y en el interior del dominio (para $M = 2$ los puntos $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, por ejemplo), se obtienen los siguientes resultados:

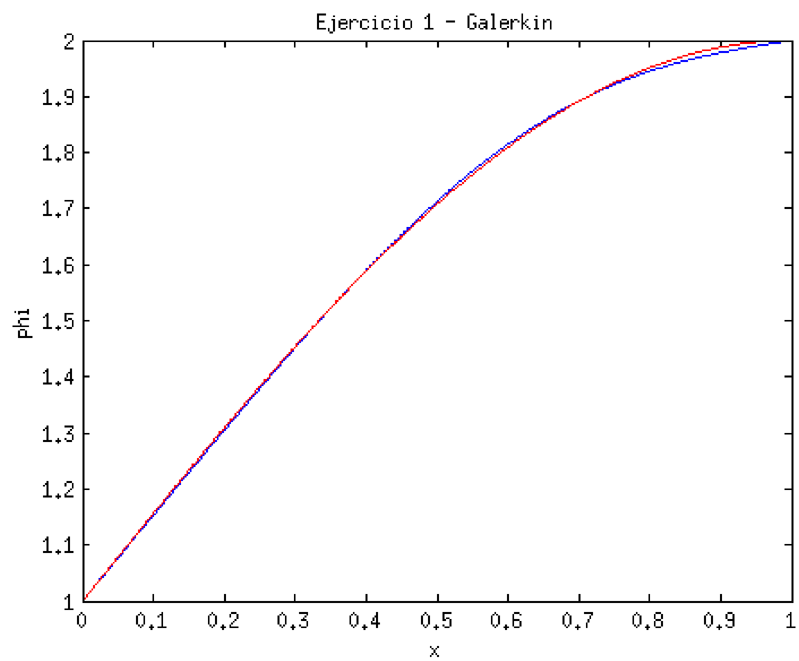
M	Error	Proporción mejora
1	5.1067e-01	
2	1.6125e-01	3.1670
4	4.1164e-02	3.9173
8	9.1047e-03	4.5212
16	1.8320e-03	4.9697
32	3.4760e-04	5.2706

Galerkin: con el método de Galerkin se obtienen los siguientes resultados:

M	Error	Proporción mejora
1	9.4531e-03	
2	2.8715e-03	3.2921
4	6.8859e-04	4.1701
8	1.4254e-04	4.8309
16	2.7272e-05	5.2267
32	5.0146e-06	5.4384

A continuación se muestran las gráficas para ambos métodos en el caso $M = 2$:





2) La solución exacta al problema dado es:

$$\phi(x) = \frac{1+\sin(1)-\cos(1)}{\cos(1)+\sin(1)}\sin(x)+\cos(x)-1$$

Usando el método de los resiudos ponderados puede obtenerse una solución aproximada de la forma $\psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m$. Dado que hay una condición Dirichlet y una Neumann, la primera se satisface haciendo $\psi = 0$ y $N_m|_{x=0} = 0$. La condición Neumann se incluye en el residuo:

$$R_\Omega = \frac{\mathrm{d}^2\hat{\phi}}{\mathrm{d}x^2} + \hat{\phi} + 1$$

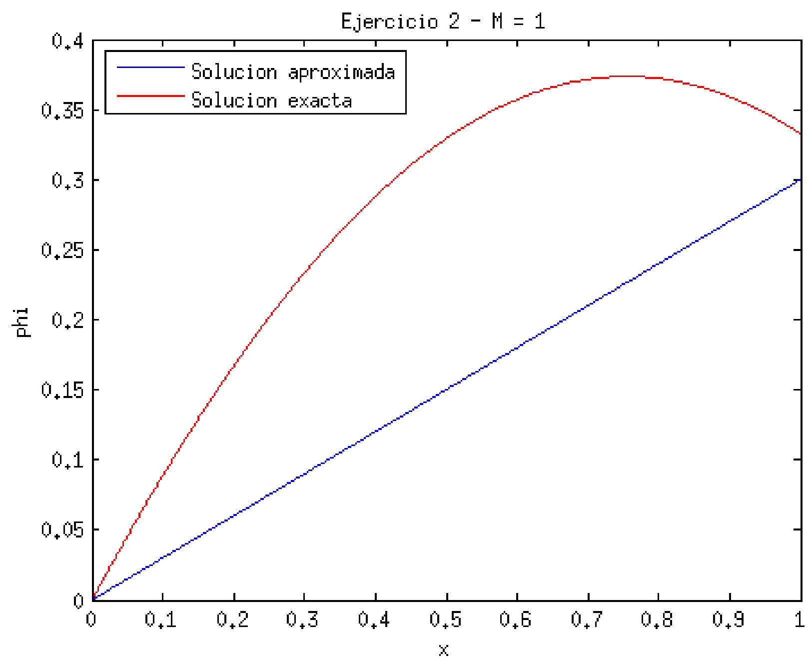
$$R_\Gamma = \hat{\phi} + \frac{\mathrm{d}^2\hat{\phi}}{\mathrm{d}x^2}$$

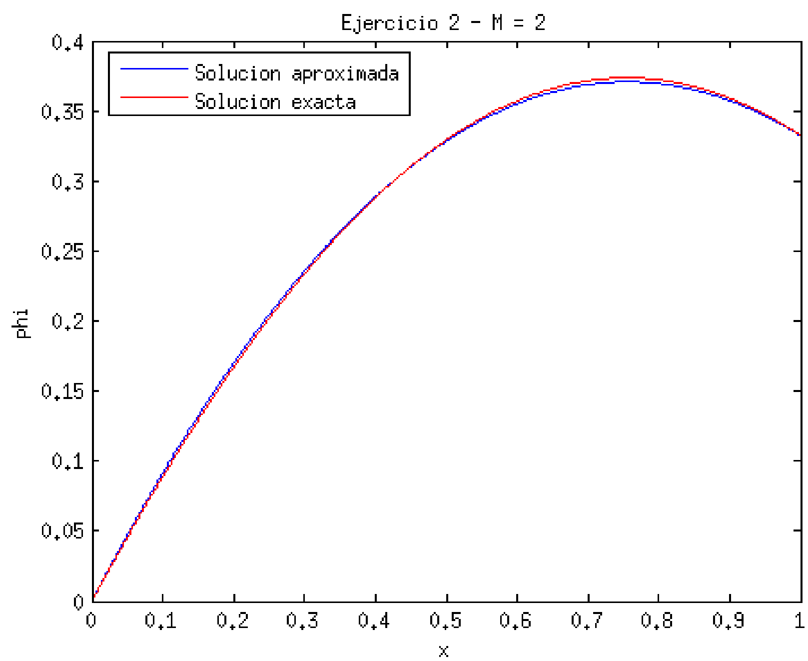
Usando Galerkin, se llega a:

$$K_{lm} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}N_l}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}N_m}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \int_0^1 N_l N_m \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}x - [N_l N_m]_{x=1}$$

$$f_l = -\int_0^1 N_l \mathrm{d}x$$

Utilizando $N_m = x^m$ para $m = 1, 2, \ldots$ como funciones de forma se obtienen las siguientes gráficas:





3) La ecuación diferencial a resolver es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

con las condiciones de contorno

$$T(x,-1) = T(x,1) = 1 - x^2$$

$$T(-1,y) = T(1,y) = 1 - y^2$$

Aproximamos la solución con una función de la forma $\hat{T} = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m(x,y)$. Para satisfacer las condiciones de contorno usamos

$$\psi = (1 - x^2) + (1 - y^2)$$

y elegimos las funciones de forma de manera que se anulen en el contorno:

$$N_m = \sin\left(\frac{m\pi(x+1)}{2}\right)\sin\left(\frac{m\pi(y+1)}{2}\right)$$

El residuo va a ser entonces

$$R_\Omega = \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial y^2}$$

Usando Galerkin, la fórmula de residuos ponderados resultante es:

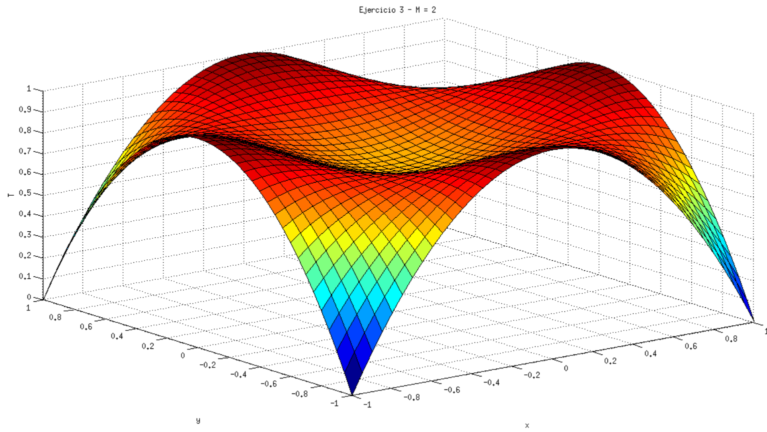
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_l \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \sum_{m=1}^{M} a_m \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \sum_{m=1}^{M} a_m \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2}\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 0 \\
\sum_{m=1}^{M} a_m \left\{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_l \left[\frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2}\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\} - 4\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_l \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 0 \\
\sum_{m=1}^{M} a_m \left\{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_l \left[\frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2}\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\} &= 4\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_l \mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

De donde se ve claramente que:

$$K_{lm} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_l \left[\frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2}\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$f_l = 4\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_l \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Usando dos de las funciones de forma antes mencionadas se obtiene el siguiente resultado:



4) El problema está dado por la ecuación de equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - b_x = 0$$

Hay condiciones de borde Dirichlet (en los bordes superior e inferior) y Neumann (en los bordes izquierdo y derecho). Las Dirichlet son simplemente

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \qquad \text{en } y = \pm 1$$

O sea, las aristas en $y = \pm 1$ están fijas. Las condiciones Neumann son

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y - \bar{t}_x = 0$$

donde $\bar{t}_x = \frac{E(1-y^2)}{1+\nu}$

En este caso la solución que se busca (los desplazamientos) tiene dos componentes. Se aproxima de la forma

$$\boldsymbol{\psi} \approx \hat{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix}$$

donde

$$\hat{u} = \psi_1 + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m$$

$$\hat{v} = \psi_2 + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m$$

Por comodidad, trabajamos sólo con el componente u. Además, como las funciones de peso para u y para v pueden ser distintas, hay un grupo de funciones $w_{l,1}$ y otro $w_{l,2}$, además de los equivalentes usados en el contorno, pero se usará w_l en su lugar.

Las condiciones Dirichlet se satisfacen simplemente haciendo $\psi_1 = \psi_2 = 0$. Las condiciones Neumann se incluyen en el residuo. El método toma la forma

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}}{\partial x} - b_x \right) W_l \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma \left(\hat{\sigma}_x n_x + \hat{\tau}_{xy} n_y - \bar{t}_x \right) \bar{W}_l \mathrm{d}\Gamma = 0$$

Como las tensiones involucran una derivada de primer orden de los desplazamientos (a través de las deformaciones), nuestra ecuación involucra derivadas de segundo orden de la incógnita. Para evitar esto, debilitamos aplicando la ley de Green y obtenemos

$$\begin{aligned} - & \int_\Omega \left[\hat{\sigma}_x \frac{\partial W_l}{\partial x} + \hat{\tau}_{xy} \frac{\partial W_l}{\partial y} - W_l b_x \right] \mathrm{d}\Omega + \\ + & \int_{\Gamma_u + \Gamma_t} \left[\hat{\sigma}_x n_x + \hat{\tau}_{xy} n_y \right] W_l \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_t} \left[\hat{\sigma}_x n_x + \hat{\tau}_{xy} n_y - \bar{t}_x \right] \bar{W}_l \mathrm{d}\Gamma = 0 \end{aligned}$$

Donde Γ_t es la frontera con condiciones Neumann y Γ_u es la frontera con condiciones Dirichlet. Haciendo $\bar{W}_l = -W_l$ y garantizando que W_l se anule en Γ_u la ecuación se reduce a

$$- \int_\Omega \left[\hat{\sigma}_x \frac{\partial W_l}{\partial x} + \hat{\tau}_{xy} W_l - W_l b_x \right] \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_x W_l \mathrm{d}\Gamma = 0$$

Para v se obtiene una expresión similar (donde W_l en este contexto quiere decir $W_{l,2}$)

$$- \int_\Omega \left[\hat{\tau}_{xy} W_l + \hat{\sigma}_y \frac{\partial W_l}{\partial y} - W_l b_y \right] \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{t}_y W_l \mathrm{d}\Gamma = 0$$

Ambos resultados pueden combinarse en uno solo en forma matricial:

$$\int_\Omega \left(\boldsymbol{\mathcal{L} W_l} \right)^T \boldsymbol{D \mathcal{L} \hat{\phi}} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{W_l t} \mathrm{d}\Gamma = \mathbf{0}$$

Donde

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{W_l} = \begin{bmatrix} W_{l,1} & 0 \\ 0 & W_{l,2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Donde $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\psi} + \sum_{m=1}^{M} a_m \boldsymbol{N_m}$. Si desarrollamos este término y agrupamos, obtenemos las componentes del SEAL resultante:

$$K_{lm} = \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\mathcal{L}} \boldsymbol{W_l}\right)^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{\mathcal{L}} \boldsymbol{N_m} \mathrm{d}\Omega$$

$$f_l = \int_{\Omega} \boldsymbol{W_l} \boldsymbol{b} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{W_l} \boldsymbol{t} \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\mathcal{L}} \boldsymbol{W_l}\right)^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{\mathcal{L}} \boldsymbol{\psi} \mathrm{d}\Omega$$