1) a) En una dimensión, y con las constantes dadas, el problema puede reescribirse como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - T = -1$$

La solución analítica de esta ecuación diferencial es:

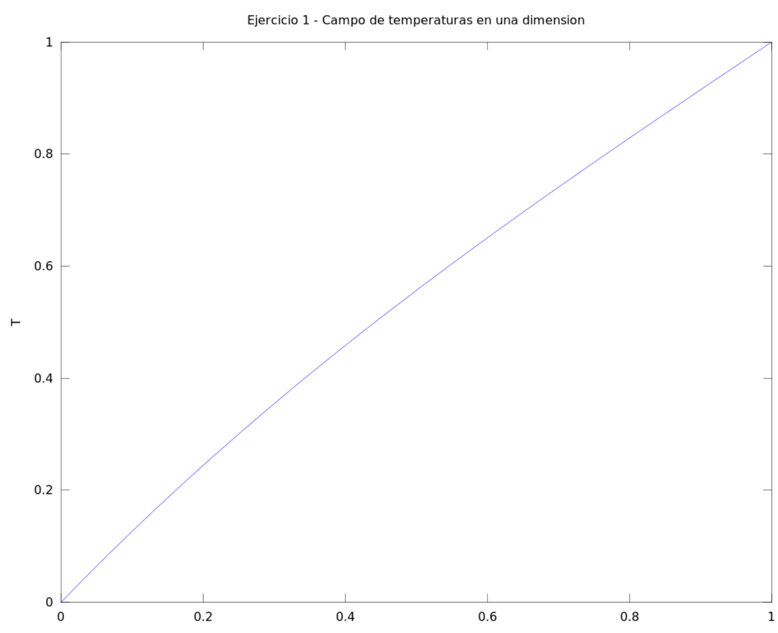
$$T(x) = Ae^x + Be^{-x} + 1$$

Para obtener los valores de A y de B utilizamos las condiciones de contorno:

$$T(0) = A + B + 1 = 0 \Rightarrow B = -1 - A$$

$$\begin{aligned} T(L) = Ae^L + Be^{-L} + 1 &= 1 \\ \Rightarrow Ae^L - e^{-L} - Ae^{-L} + 1 &= 1 \\ \Rightarrow A\left(e^L - e^{-L}\right) &= e^{-L} \\ \Rightarrow A &= \frac{e^{-L}}{e^L - e^{-L}} \\ \Rightarrow B &= \frac{e^L}{e^{-L} - e^L} \end{aligned}$$

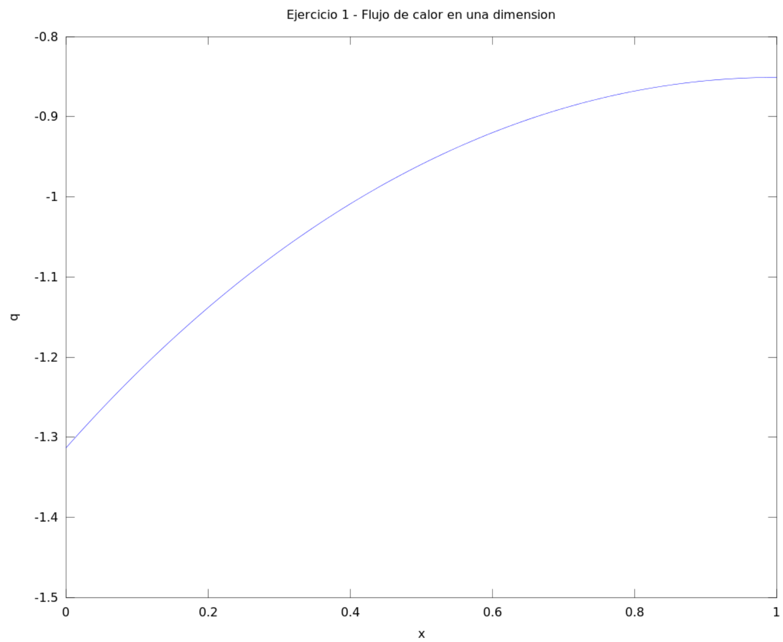
b) Usando $L = 1$:



c) Usamos la fórmula $q = -k\nabla T$ y obtenemos:

$$q(x) = -Ae^{x} + Be^{-x}$$

La gráfica para los valores dados es:



2) a) El campo de temperaturas tiene la misma forma que el del ejercicio anterior:

$$T(x) = Ae^{x} + Be^{-x} + 1$$

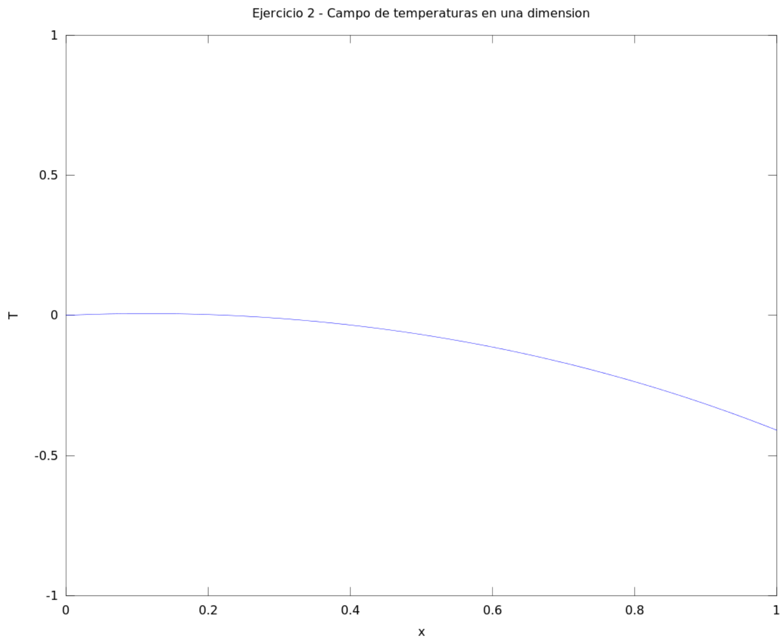
Y el flujo de calor es:

$$q(x) = Be^{-x} - Ae^{x}$$

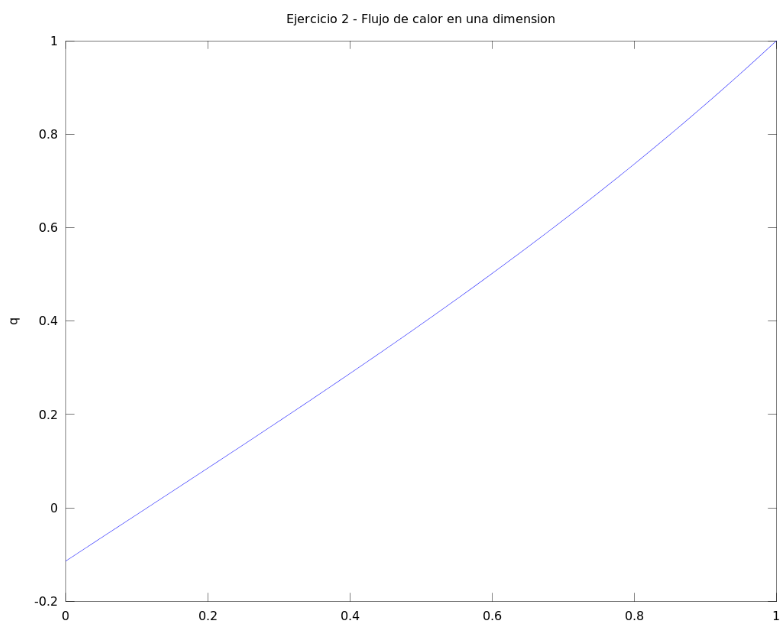
Lo que cambia son las constantes:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1+e^{-L}}{e^{L}+e^{-L}} \\ B &= -\frac{1-e^{L}}{e^{L}+e^{-L}} \end{aligned}$$

b) Nuevamente usando $L = 1$:


Ejercicio 2 - Campo de temperaturas en una dimension
T
x
1
0.5
0
-0.5
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

c)


Ejercicio 2 - Flujo de calor en una dimension
q
x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1