Programação

Modelagem:

JULIA E JuMP: NOVAS FERRAMENTAS PARA PROGRAMAÇÃO

MATEMÁTICA

Atividade Computacional

O Problema do Caixeiro viajante

- Formulação de Dantzig –Fulkerson-Johnson
- O objetivo do modelo é determinar o ciclo hamiltoniano de custo (distância) mínimo. A formulação foi feita sobre um grafo G=(N,A) da seguinte forma:
- Definindo:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se a aresta (i,j) for visitada} \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\text{Minimizar} \quad z = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1 \quad \forall,\ j \in N$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1 \quad \forall, i \in N$$

Modela o Problema?

O Problema do Caixeiro viajante

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se a aresta (i,j) for visitada} \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\text{Minimizar} \quad z = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1 \quad \forall, \ j \in N$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1 \quad \forall, i \in N$$

$$\sum_{i,\, j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subset N$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \ \forall i, \ j \in N$$

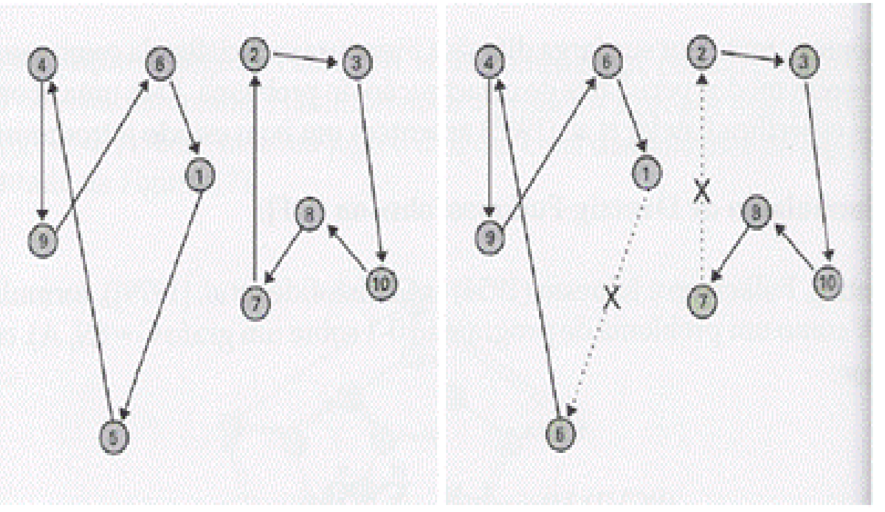


Figura 3: (a) Solução ilegal ($\sum_{i,j \in S_1} x_{i,j} = 5 \quad \sum_{i,j \in S_2} x_{i,j} = 5$); (b) Restrições associadas ($\sum_{i,j} x_{i,j} \leq |\, 5 \,| - 1 \leq 4$), respectivamente

S é um sub-grafo de G e |S| é o número de vértices desse sub-grafo.
Assumimos que não temos a variável xii

PCV

O Presidente, Antônio Castor, da Companhia Ramos de Carvalho quer fazer uma visita às reservas florestais situadas nos estados do Amazonas e Pará, aos depósitos situados nos estados de São Paulo, Bahia, Goiás e Rio de Janeiro. É possível determinar um roteiro de viagem tal que cada reserva e cada depósito sejam visitados apenas uma vez, saindo e retornando à sede da empresa no Rio de Janeiro, e que minimize a distância total percorrida?

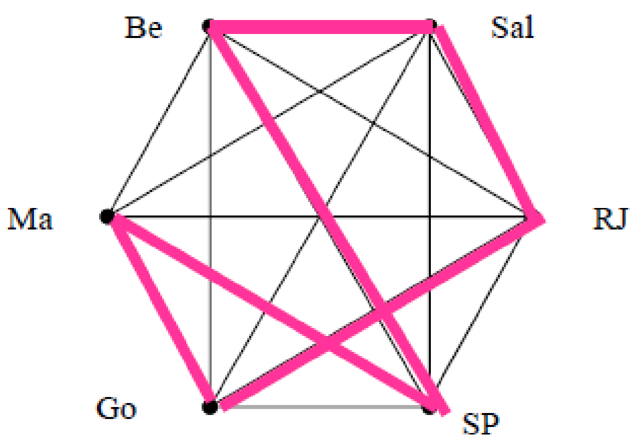


Figura 1 – Reservas e Depósitos a serem visitados

PCV

Construção do Modelo:

Elementos conhecidos (dados):

Índices: $i,j = 1,2,3, \ldots 6$ os locais onde as reservas (duas) e os depósitos (quatro) estão situados (RJ,SP,Go,Ma,Be e Sal) respectivamente.

c_{ij} distância entre os locais i e j.

Elementos desconhecidos (variáveis):

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se o local } i \text{ é visitado imediatamente antes de } j \\ 0 \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

PCV

Função Objetivo

O objetivo é encontrar o circuito hamiltonino de menor custo.

$$\min z = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} c_{ij} x_{ij}$$

PCV

Restrições:
Cada local deve ser visitado apenas uma vez.

- Saídas da cidade i:

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} + x_{i5} + x_{i6} = 1, \quad i = 1, \ldots, 6 \qquad (i \neq j)$$

- Chegadas à cidade j

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} + x_{5j} + x_{6j} = 1, \quad j = 1, \ldots, 6 \quad (i \neq j)$$

PCV

Restrições:

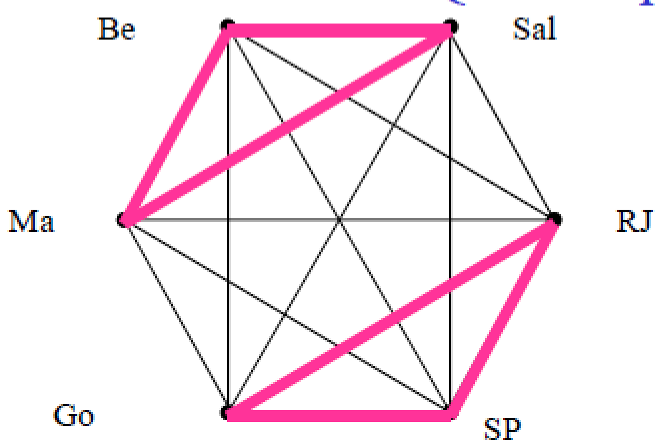
$$\sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1 \dots n$$

$$\sum_{i=1 (i \neq j)}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1 \dots n$$

PCV

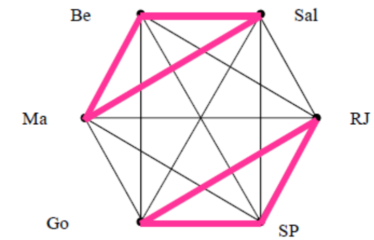
As restrições do problema da designação permitem a seguinte solução:

Qual é o problema desta solução?



Subrotas!!!!
Com este roteiro não conseguimos passar por todas as cidades apenas uma vez!

PCV



Formulação I - Eliminação de subrotas: Dantzig, Fulkerson e Johnson

Vamos considerar o conjunto de cidades incluídas em uma das subrotas obtidas na solução do Modelo I:

$$S=\{Ma, Be, Sal\}$$

Se limitarmos o número de variáveis associadas a essas cidades que podem receber valor diferente de zero a 2, temos a seguinte restrição:

$$x_{Ma,Be} + x_{Ma,Sal} + x_{Be,Ma} + x_{Be,Sal} + x_{Sal,Ma} + x_{Sal,Be} <= 2$$

Se incluirmos esta restrição ao Modelo I, eliminamos a sub-rota que inclui as cidades acima, pois a solução anterior não é viável para o novo modelo.

PCV

Formulação I - Eliminação de subrotas: Dantzig, Fulkerson e Johnson

Como fazer no caso geral?

Dado um subconjunto de cidades $S \subset n$.

Podemos limitar o número de variáveis associadas a essas cidades que podem receber valor diferente de zero a:

$$|S| - 1$$

se incluirmos a seguinte restrição ao Modelo I:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1.$$

Impedimos assim soluções associadas a sub-rotas.

PCV

Formulação II - Eliminação de subrotas: Miller,Tucker e Zemlin

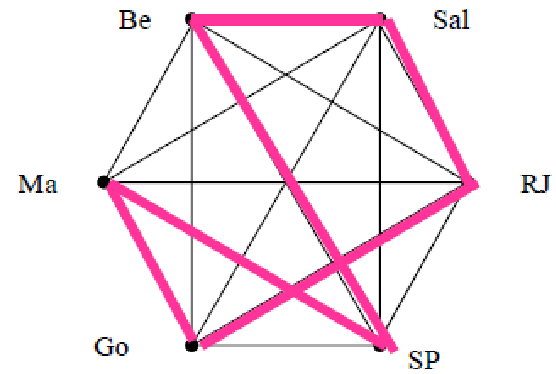
Para eliminar as subrotas, vamos acrescentar as seguintes variáveis:

u_i = ordem em que o local i será visitado $\quad i = 2,\ldots n$

e as seguintes restrições:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1 \qquad i, j = 2,\ldots, 6;\ i \neq j.$$

PCV – Não inclui restrições durante o processo



Formulação II : MTZ (Otimização Inteira Mista)

$$\min z = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} c_{ij} x_{ij}$$

sujeito a

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} + x_{i5} + x_{i6} = 1, \quad i = 1,\ldots,6$$

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} + x_{5j} + x_{6j} = 1, \quad j = 1,\ldots,6$$

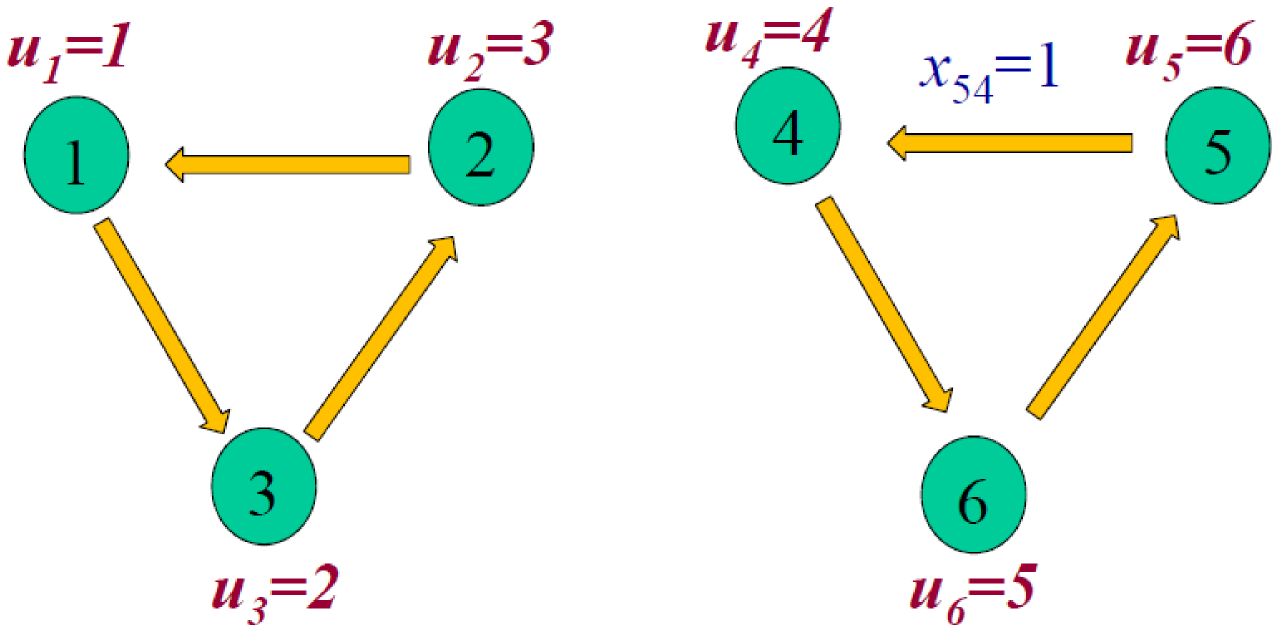
$$u_i - u_j + 6x_{ij} \le 5, \quad i \ne j; i = 2,\ldots,6; \quad j = 2,\ldots,.6;$$

$$x_{ij} = 0/1, \forall i, j$$

$$1 \le u_i \le 6 \quad i = 2,\ldots,6$$

PCV

Formulação II - Eliminação de subrotas: MTZ



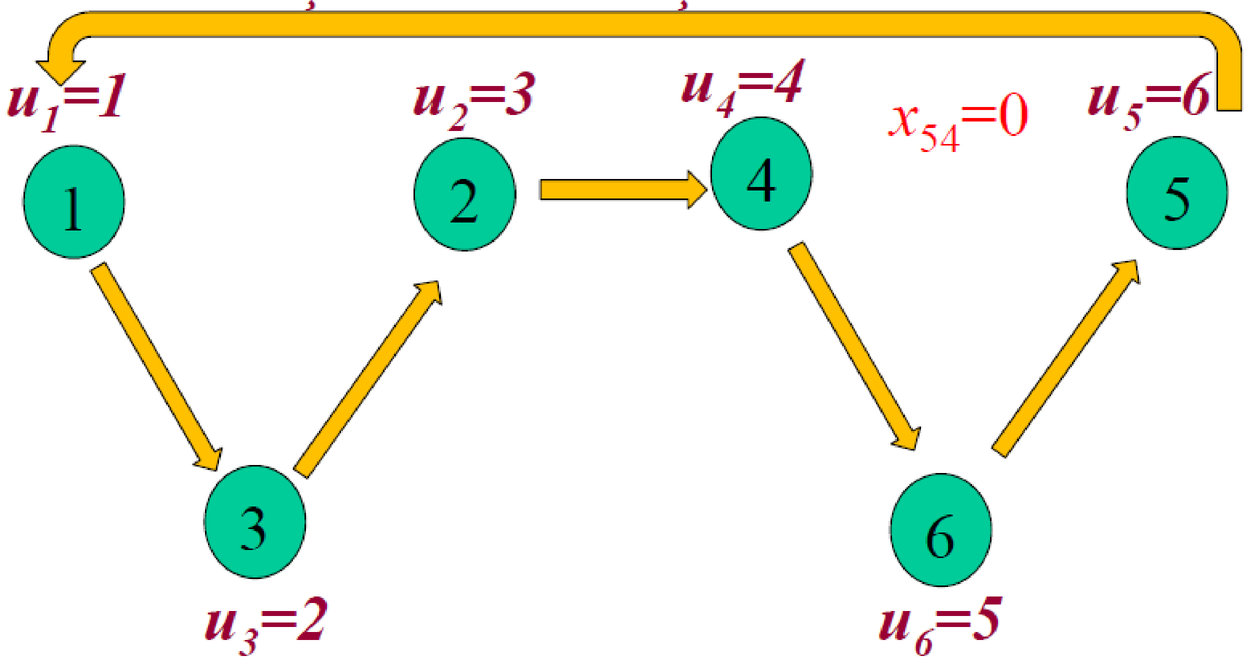
$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1 \qquad i, j = 2,\ldots,6;\, i \neq j.$$

$i=5$ $j=4$ $u_5 - u_4 + 6x_{54} \leq 6 - 1 \Rightarrow 6-4+6(1) \leq 5 \Rightarrow 8 \leq 5$ **(absurdo!!)**

Prof. Socorro Rangel - CNMAC

PCV

Formulação II - Eliminação de subrotas: MTZ



$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \qquad i, j = 2, \ldots, 6;\ i \neq j.$$

$i=5$ $j=4$ $u_5 - u_4 + 6x_{54} \leq 6 - 1 \Rightarrow 6-4+6(0) \leq 5 \Rightarrow 2 \leq 5$ **(OK!!)**

Prof. Socorro Rangel - CNMAC

Projeto Computacional

- O trabalho deve ser realizado em grupo composto por dois ou três alunos.
- Implementar o modelo do caixeiro viajante com as restrições de eliminação de sub-rotas do tipo MTZ (No material auxiliar também tem exemplo do modelo e problema).
- Escrever um relatório explicando o problema e descrever o modelo utilizado (pode utilizar o material da sala).
- Criar um exemplo ilustrativo (pode ser o do slide) com poucas cidades e apresentar a solução (tente desenhar a solução. No tutorial da PODES tem exemplo de como desenhar a solução).

Projeto Computacional

- Resolver a relaxação linear do modelo para as instâncias burma14.tsp.gz e mais três instâncias do site com número crescente de cidades. Utilizem as instâncias que possuem a mesma estrutura dos dados. Para gerar as distâncias, usar a distância euclidiana pois eles dão as coordenadas dos pontos.
- Estas instancias são para o caixeiro viajante simétrico e estão disponíveis em https://wwwproxy.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/tsp/
- Para estas instâncias, neste site, tem as melhores soluções conhecidas. Compare com os valores das soluções do problema linear (com a consideração que todas as variáveis binárias devem estar no intervalo $0 \leq x_{ij} \leq 1$)

Projeto Computacional

- Resolva agora esses exemplos considerando que as variáveis xij binárias, ou seja, o problema inteiro. É possível resolver todas as instâncias com o solver Cbc com o tempo limite de 30 minutos? 60 minutos? A solução é ótima? Calcule a qualidade da solução obtida, ou seja, calcule o gap que é dado por gap=100*(valor_funcaoObjetivoSolucao – Valor_limitante inferior_solver)/ valor_funcaoObjetivoSolucao .
- O Cbc solver é um software livre. Em uma situação real, fora da USP, a utilização deste solver é uma boa alternativa.
- O relatório deve ser entregue em pdf com os participantes, ilustrações das soluções, informações sobre os exemplos e as referências utilizadas.
- Além do modelo nesta aula, tem um material auxiliar (em pdf) que discute sobre o modelo a ser utilizado.

Projeto – dicas para pegar valores (verifiquem a sintaxe)

- No solver, podemos pegar o valor do limitante dual getobjbound(Modelo::Model), o valor da função objetivo getobjectivevalue(Modelo::Model) que devem ser utilizados para o calculo do gap

o tempo de computacional pode ser pego utilizando getsolvetime(Modelo::Model))

Critério de avaliação - lembrando

- 3 provas teóricas (MP)
  - 10/09 – Prova 1 – matéria Modelagem.
  - 09/10 – Prova 2 – Otimização linear com variáveis contínuas – teoria e métodos de resolução
  - **20/11** – Prova 3 – Otimização linear com variáveis inteiras – teoria e métodos de resolução
  - **26/11** – Sub (perdeu o conteúdo)
- Média de atividades (MA)
- Um trabalho (Modelagem e implementação, análise de resultados) NT (data limite para entrega – 20 de novembro de 2019)
- Média final (MF)

  - MF = 0,95*MP +0,05*NTrabalho + 0,05 MA