Tópicos em Otimização II

Otimização aplicada ao Roteamento de Veículos

Semestre 02/2018

Profa. Dra. Franklina Toledo (fran@icmc.usp.br)
Profa. Dra. Maristela Santos (mari@icmc.usp.br)
Prof. Dr. Pedro Munari (munari@dep.ufscar.br)
Prof. Dr. Victor Camargo (victor.camargo@dep.ufscar.br)

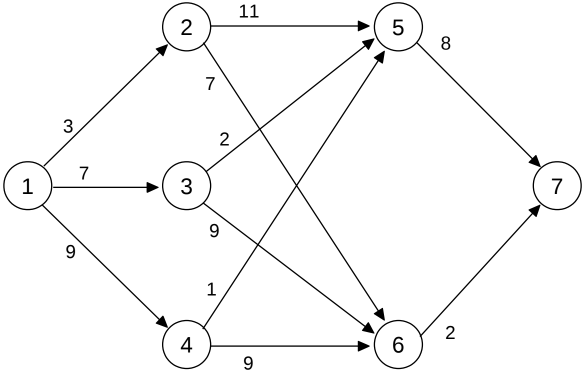
Aula 1: Introdução à disciplina; Problema do caminho mínimo; Problema do caixeiro viajante

Objetivos da aula de hoje

- Introduzir os tópicos, cronograma proposto e critérios de avaliação da disciplina;
- Estudar o problema do caminho mínimo e suas aplicações;
- Estudar o problema do caixeiro viajante e suas aplicações.

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Lista 1, Exercício 1: Qual o caminho mínimo de 1 a 7?



Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Definição

Dentre várias cidades disponíveis, há uma de origem e uma de destino. Deve-se determinar qual o caminho de menor custo para ir da origem ao destino, podendo passar pelas outras cidades.

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Definição

Dentre várias cidades disponíveis, há uma de origem e uma de destino. Deve-se determinar qual o caminho de menor custo para ir da origem ao destino, podendo passar pelas outras cidades.

- $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$: cidades;

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Definição

Dentre várias cidades disponíveis, há uma de origem e uma de destino. Deve-se determinar qual o caminho de menor custo para ir da origem ao destino, podendo passar pelas outras cidades.

- $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$: cidades;
- 1 é origem, n é destino;

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Definição

Dentre várias cidades disponíveis, há uma de origem e uma de destino. Deve-se determinar qual o caminho de menor custo para ir da origem ao destino, podendo passar pelas outras cidades.

- $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$: cidades;
- 1 é origem, n é destino;
- Existe um custo de viagem c_{ij} entre cada par (i, j), com $i, j \in \mathcal{I}$ tal que $i \prec j$ (i precede j);

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Definição

Dentre várias cidades disponíveis, há uma de origem e uma de destino. Deve-se determinar qual o caminho de menor custo para ir da origem ao destino, podendo passar pelas outras cidades.

- $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$: cidades;
- 1 é origem, n é destino;
- Existe um custo de viagem c_{ij} entre cada par (i, j), com $i, j \in \mathcal{I}$ tal que $i \prec j$ (i precede j);
- Não há obrigação de visitar as demais cidades;

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Definição

Dentre várias cidades disponíveis, há uma de origem e uma de destino. Deve-se determinar qual o caminho de menor custo para ir da origem ao destino, podendo passar pelas outras cidades.

- $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$: cidades;
- 1 é origem, n é destino;
- Existe um custo de viagem c_{ij} entre cada par (i, j), com $i, j \in \mathcal{I}$ tal que $i \prec j$ (i precede j);
- Não há obrigação de visitar as demais cidades;
- Diversas formas de resolver: programação dinâmica; algoritmo de Dijkstra; otimização linear inteira; heurísticas.

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{caminho vai da cidade } i \text{ para a } j \text{ imediatamente}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{caminho vai da cidade } i \text{ para a } j \text{ imediatamente}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Função objetivo:

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{caminho vai da cidade } i \text{ para a } j \text{ imediatamente,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Função objetivo:

- Minimizar o custo do caminho:

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Modelagem

Variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{caminho vai da cidade } i \text{ para a } j \text{ imediatamente,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Função objetivo:

- Minimizar o custo do caminho: $\min \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{I} \\ i \prec j}} c_{ij} x_{ij}$;

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Restrições

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Restrições

- O caminho deve iniciar na cidade de origem:

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Restrições

- O caminho deve iniciar na cidade de origem:

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{I}: \\ 1 \prec j}} x_{1j} = 1$$

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Restrições

- O caminho deve iniciar na cidade de origem:

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{I}: \\ 1 \prec j}} x_{1j} = 1$$

- O caminho deve terminar na cidade de destino:

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Restrições

- O caminho deve iniciar na cidade de origem:

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{I}: \\ 1 \prec j}} x_{1j} = 1$$

- O caminho deve terminar na cidade de destino:

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{I}: \\ i \prec n}} x_{in} = 1$$

- Restrição de **fluxo** (garante entrada e saída da cidade):

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Restrições

- O caminho deve iniciar na cidade de origem:

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{I}: \\ 1 \prec j}} x_{1j} = 1$$

- O caminho deve terminar na cidade de destino:

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{I}: \\ i \prec n}} x_{in} = 1$$

- Restrição de **fluxo** (garante entrada e saída da cidade):

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{I}: \\ i \prec h}} x_{ih} = \sum_{\substack{j \in \mathcal{I}: \\ h \prec j}} x_{hj}, \ \forall h \in \mathcal{I} \setminus \{1, n\}$$

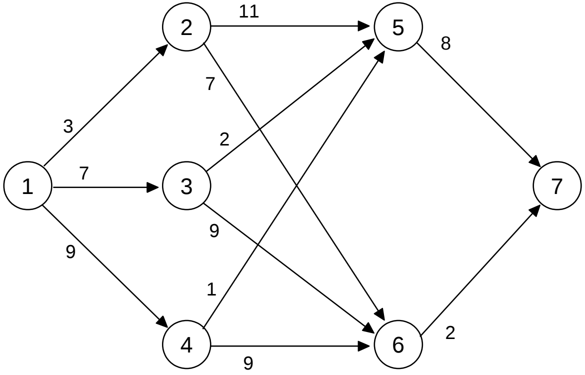
Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Modelo algébrico

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{I} \\ i \prec j}} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.a} \quad & \sum_{\substack{j \in \mathcal{I}: \\ 1 \prec j}} x_{1j} = 1, \\
& \sum_{\substack{i \in \mathcal{I}: \\ i \prec n}} x_{in} = 1, \\
& \sum_{\substack{i \in \mathcal{I}: \\ i \prec h}} x_{ih} = \sum_{\substack{j \in \mathcal{I}: \\ h \prec j}} x_{hj}, \quad \forall h \in \mathcal{I} \setminus \{1, n\}, \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad i, j \in \mathcal{I}.
\end{aligned}
$$

Problema do caminho mínimo (PCM)

▷ Lista 1, Exercício 1: Qual o caminho mínimo de 1 a 7?



Problema do caixeiro viajante (PCV)

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Observações:

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Observações:

- Nome original: *Traveling salesman problem* (TSP);

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Observações:

- Nome original: *Traveling salesman problem* (TSP);
- "Caixeiro-viajante é uma profissão antiga, de uma pessoa que vende produtos fora de onde eles são produzidos.

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Observações:

- Nome original: *Traveling salesman problem* (TSP);
- "Caixeiro-viajante é uma profissão antiga, de uma pessoa que vende produtos fora de onde eles são produzidos. Antigamente, quando não havia a facilidade do transporte entre cidades, os caixeiros-viajantes eram a única forma de transportar produtos entre diferentes regiões fora das grandes cidades."

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

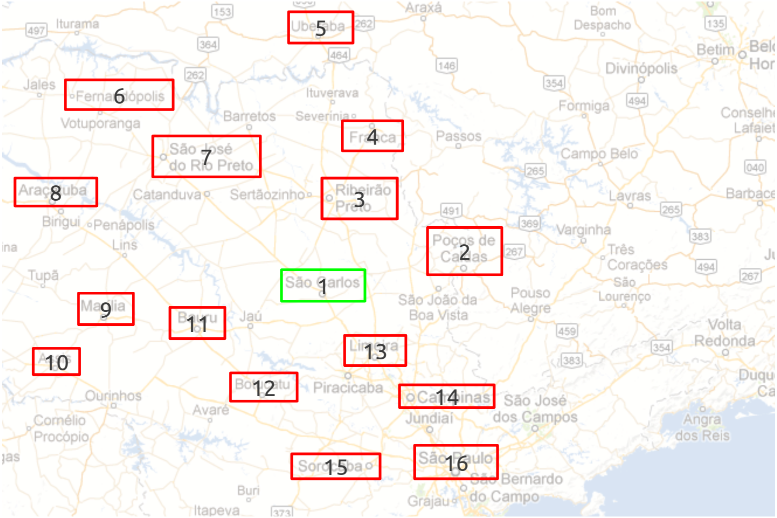
Observações:

- Nome original: *Traveling salesman problem* (TSP);
- "Caixeiro-viajante é uma profissão antiga, de uma pessoa que vende produtos fora de onde eles são produzidos. Antigamente, quando não havia a facilidade do transporte entre cidades, os caixeiros-viajantes eram a única forma de transportar produtos entre diferentes regiões fora das grandes cidades."
- Atualmente, este problema modela diversas situações reais.

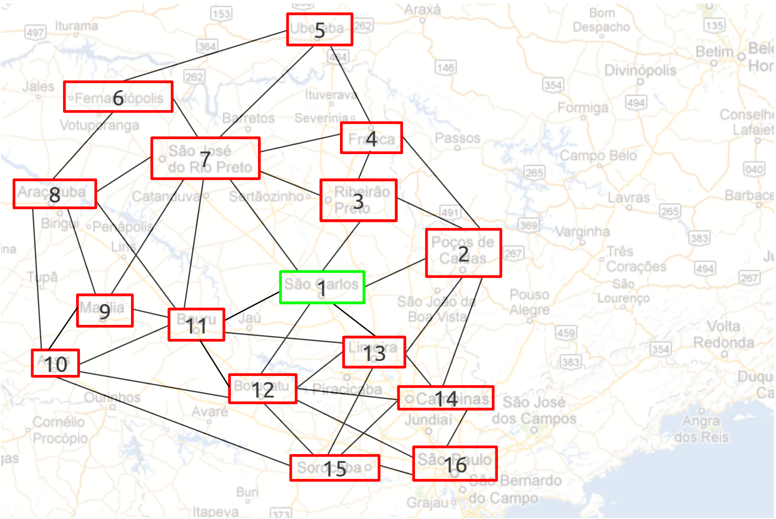
Problema do caixeiro viajante (PCV)

Problema do caixeiro viajante (PCV)

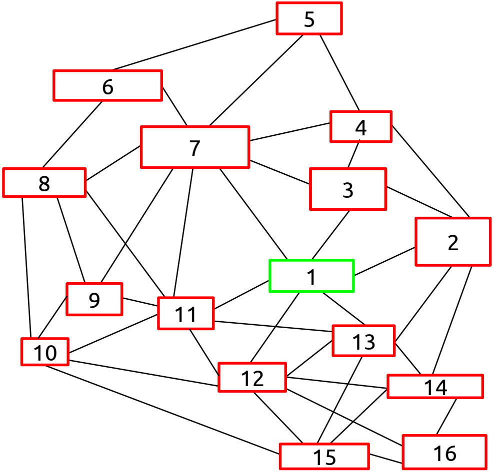
Problema do caixeiro viajante (PCV)



Problema do caixeiro viajante (PCV)



Problema do caixeiro viajante (PCV)



Grafo G = (V, A)

V: vértices ou nós
A: arestas

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Parâmetros:

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Parâmetros:

- $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$: cidades;

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Parâmetros:

- $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$: cidades;
- D_{ij}: distância entre as cidades i e j, para todo $i, j \in \mathcal{I}$.

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Parâmetros:

- $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$: cidades;
- D_{ij}: distância entre as cidades i e j, para todo $i, j \in \mathcal{I}$.

Objetivo:

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Parâmetros:

- $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$: cidades;
- D_{ij}: distância entre as cidades i e j, para todo $i, j \in \mathcal{I}$.

Objetivo:

- Determinar uma rota que passe por todas as cidades e volte para a cidade inicial, de modo a minimizar a distância percorrida.

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Variáveis de decisão:

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{vendedor vai da cidade } i \in \mathcal{I} \text{ para a } j \in \mathcal{I} \text{ imediatamente}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{vendedor vai da cidade } i \in \mathcal{I} \text{ para a } j \in \mathcal{I} \text{ imediatamente,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Função objetivo:

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{vendedor vai da cidade } i \in \mathcal{I} \text{ para a } j \in \mathcal{I} \text{ imediatamente,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Função objetivo:

- Minimizar a distância:

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Variáveis de decisão:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{vendedor vai da cidade } i \in \mathcal{I} \text{ para a } j \in \mathcal{I} \text{ imediatamente,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Função objetivo:

- Minimizar a distância: $\min \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{I}: \\ j \neq i}} D_{ij} x_{ij}$;

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Restrições:

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Restrições:

- Cada cidade deve ser visitada uma única vez:

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Restrições:

- Cada cidade deve ser visitada uma única vez:

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{I}: \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad i \in \mathcal{I}$$

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Restrições:

- Cada cidade deve ser visitada uma única vez:

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{I}: \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad i \in \mathcal{I}$$

- Isso garante que cada cidade tem uma única sucessora imediata.

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Restrições:

- Cada cidade deve ser visitada uma única vez:

$$\sum_{\substack{j \in \mathcal{I}: \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, \quad i \in \mathcal{I}$$

- Isso garante que cada cidade tem uma única sucessora imediata. Também garante única antecessora?

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Restrições:

- Cada cidade tem uma única antecessora imediata:

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

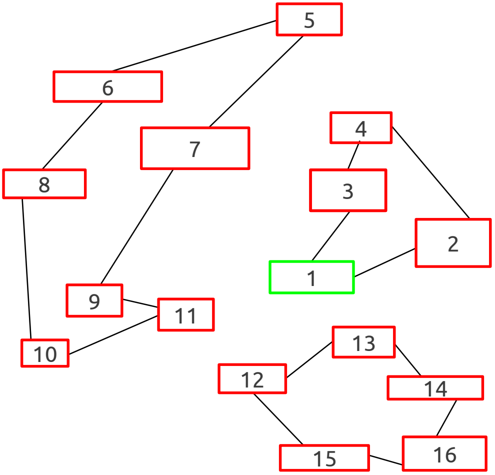
- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Restrições:

- Cada cidade tem uma única antecessora imediata:

$$\sum_{\substack{i \in \mathcal{I}: \\ i \neq j}} x_{ij} = 1, \quad j \in \mathcal{I}$$

Problema do caixeiro viajante (PCV)



Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Restrições:

- Evita sub-rota:

Problema do caixeiro viajante (PCV)

Um vendedor precisa visitar seus clientes em n cidades.

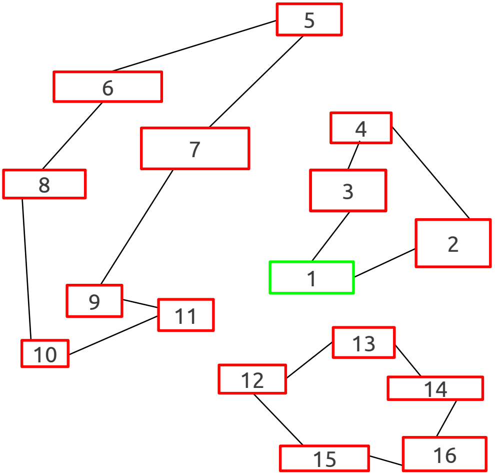
- Ele parte de uma cidade e deve retornar a essa cidade após visitar todas as outras.
- Cada cidade deve ser visitada uma única vez.

Restrições:

- Evita sub-rota:

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij} \leq |S| - 1, \ \forall S \subset \mathcal{I}, \ 1 < |S| < n$$

Problema do caixeiro viajante (PCV)



Problema do caixeiro viajante (PCV)

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{\substack{j \in \mathcal{I}: \\ j \neq i}} D_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.a} \quad & \sum_{\substack{j \in \mathcal{I}: \\ j \neq i}} x_{ij} = 1, & i \in \mathcal{I}, \\
& \sum_{\substack{i \in \mathcal{I}: \\ i \neq j}} x_{ij} = 1, & j \in \mathcal{I}, \\
& \sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij} \leq |S| - 1, & \forall S \subset \mathcal{I},\ 1 < |S| < n, \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, & i, j \in \mathcal{I}.
\end{aligned}
$$

Problema do caixeiro viajante (PCV)

- Formulação de Dantzig, Fulkerson e Johnson (DFJ);

Problema do caixeiro viajante (PCV)

- Formulação de Dantzig, Fulkerson e Johnson (DFJ);
- Possui como desvantagem o número de restrições: da ordem de 2^n;

Problema do caixeiro viajante (PCV)

- Formulação de Dantzig, Fulkerson e Johnson (DFJ);
- Possui como desvantagem o número de restrições: da ordem de 2^n;
- Para 16 cidades: mais de 65536 restrições; Para 100 cidades: mais de 10^{30} restrições;

Problema do caixeiro viajante (PCV)

- Formulação de Dantzig, Fulkerson e Johnson (DFJ);
- Possui como desvantagem o número de restrições: da ordem de 2^n;
- Para 16 cidades: mais de 65536 restrições; Para 100 cidades: mais de 10^{30} restrições;
- Pode se restringir os conjuntos a:

$$2 \leq |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

mas ainda assim é exponencial :(

Problema do caixeiro viajante (PCV)

- Formulação de Dantzig, Fulkerson e Johnson (DFJ);
- Possui como desvantagem o número de restrições: da ordem de 2^n;
- Para 16 cidades: mais de 65536 restrições; Para 100 cidades: mais de 10^{30} restrições;
- Pode se restringir os conjuntos a:

$$2 \leq |S| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

  mas ainda assim é exponencial :(
- Em geral, apenas um número relativamente pequeno delas é necessário :)

Problema do caixeiro viajante (PCV)

- Para resolver este modelo, inicialmente descartamos as restrições exponenciais (relaxação combinatória);

Problema do caixeiro viajante (PCV)

- Para resolver este modelo, inicialmente descartamos as restrições exponenciais (relaxação combinatória);
- Caso a solução ótima desta relaxação tenha subrotas, inserimos restrições do tipo

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij} \leq |S| - 1$$

  somente para as subrotas desta solução;

Problema do caixeiro viajante (PCV)

- Para resolver este modelo, inicialmente descartamos as restrições exponenciais (relaxação combinatória);
- Caso a solução ótima desta relaxação tenha subrotas, inserimos restrições do tipo
$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_{ij} \leq |S| - 1$$
somente para as subrotas desta solução;
- Resolvemos a relaxação novamente e caso tenha novas subrotas, repetimos o processo.

Problema do caixeiro viajante (PCV)

▷ Lista 1, Exercício 2

Um vendedor de bebidas reside em São Carlos. Ele precisa visitar as seguintes cidades nos próximos dias, para apresentar a seus clientes uma nova linha de refrigerantes de baixa caloria: Franca, Ribeirão Preto, São José do Rio Preto, Poços de Caldas e Limeira. As distâncias entre as cidades são as seguintes:

	Distâncias (km)					
De/Para	SC	FR	RP	SJRP	PC	LI
SC	—	186	105	208	177	94
FR	187	—	89.8	223	255	254
RP	99.9	89	—	203	204	172
SJRP	206	220	203	—	377	295
PC	168	251	201	376	—	156
LI	86.8	255	173	293	159	—

Deseja-se determinar uma rota que visite todas as cidades e volte à cidade atual de modo que a distância total percorrida pelo vendedor seja a menor possível.

Problema do caixeiro viajante

Problema do caixeiro viajante

▷ Resolução do Exemplo 1

Resolvendo sem as restrições de sub-rota:

	SC	FR	RP	SJRP	PC	LI
SC				1.000		
FR			1.000			
RP		1.000				
SJRP	1.000					
PC						1.000
LI					1.000	

Valor ótimo = 907.800

Problema do caixeiro viajante

▷ Resolução do Exemplo 1

Para eliminar a sub-rota SC-SJRP-SC, adicionamos:

$$x(SC, SJRP) + x(SJRP, SC) \leq 1$$

Solução obtida:

	SC	FR	RP	SJRP	PC	LI
SC					1.000	
FR			1.000			
RP				1.000		
SJRP		1.000				
PC						1.000
LI	1.000					

Valor ótimo = 932.600

Problema do caixeiro viajante

▷ Resolução do Exemplo 1

Para eliminar a sub-rota SC-PC-LI-SC, adicionamos:

$$x(SC, PC) + x(SC, LI) + x(LI, PC) + x(LI, SC) + x(PC, SC) + x(PC, LI) \leq 2$$

Solução obtida:

	SC	FR	RP	SJRP	PC	LI
SC				1.000		
FR			1.000			
RP	1.000					
SJRP		1.000				
PC						1.000
LI					1.000	

Valor ótimo = 932.700

Problema do caixeiro viajante

▷ Resolução do Exemplo 1

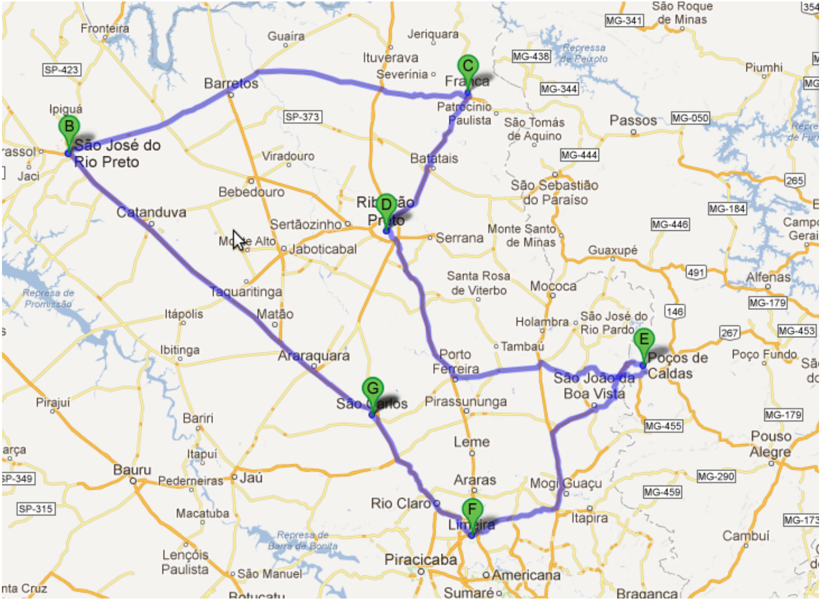
Para eliminar a sub-rota PC-LI-PC, adicionamos:

$$x(PC, LI) + x(LI, PC) \leq 1$$

Solução obtida:

	SC	FR	RP	SJRP	PC	LI
SC				1.000		
FR			1.000			
RP					1.000	
SJRP		1.000				
PC						1.000
LI	1.000					

Valor ótimo = 964.600

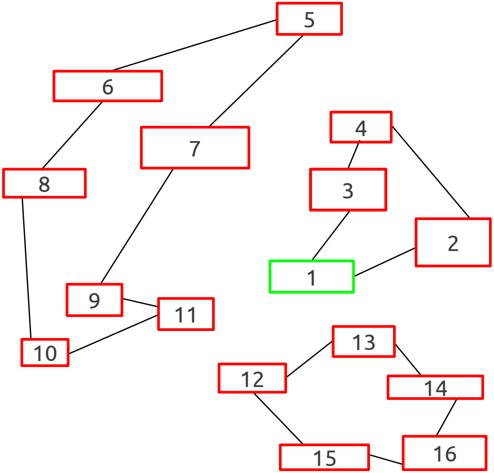

A
B
C
D
E
F
G
São José do Rio Preto
Franca
Ribeirão Preto
Poços de Caldas
Limeira
São Carlos
Fronteira
Guaíra
Jeriquara
Ituverava
Severínia
Barretos
Ipiguá
Jaci
SP-423
SP-373
SP-349
SP-315
MG-341
MG-438
MG-344
MG-050
MG-444
MG-184
MG-446
MG-179
MG-453
MG-455
MG-290
MG-459
265
491
146
267
São Roque de Minas
Represa de Peixoto
Piumhi
Patrocínio Paulista
São Tomás de Aquino
Passos
Batatais
Viradouro
Bebedouro
São Sebastião do Paraíso
Catanduva
Sertãozinho
Serrana
Monte Santo de Minas
Guaxupé
Jaboticabal
Alfenas
Santa Rosa de Viterbo
Mococa
Represa de Promissão
Taquaritinga
Itápolis
Matão
Holambra
São José do Rio Pardo
Ibitinga
Araraquara
Tambaú
Porto Ferreira
São João da Boa Vista
Poço Fundo
Pirassununga
Pirajuí
Bariri
Leme
Pouso Alegre
Itapuí
Bauru
Pederneiras
Jaú
Araras
Mogi Guaçu
Rio Claro
Macatuba
Itapira
Cambuí
Represa de Barra Bonita
Lençóis Paulista
Piracicaba
São Manuel
Americana
Sumaré
Botucatu
Bragança

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: número polinomial de restrições (n^2)

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: número polinomial de restrições (n^2)



Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)

Restrições:

- Para evitar sub-rotas, vamos usar uma nova variável de decisão:

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)

Restrições:

- Para evitar sub-rotas, vamos usar uma nova variável de decisão:

u_i : número de visitas realizadas até o nó $i \in \mathcal{I}$.

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)

Restrições:

- Para evitar sub-rotas, vamos usar uma nova variável de decisão:

$$u_i : \text{número de visitas realizadas até o nó } i \in \mathcal{I}.$$

- Assim, dados dois nós i e j, o que devemos garantir?

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)

Restrições:

- Para evitar sub-rotas, vamos usar uma nova variável de decisão:

  u_i : número de visitas realizadas até o nó $i \in \mathcal{I}$.

- Assim, dados dois nós i e j, o que devemos garantir?
  - Se i precede j imediatamente:

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)

Restrições:

- Para evitar sub-rotas, vamos usar uma nova variável de decisão:

  u_i : número de visitas realizadas até o nó $i \in \mathcal{I}$.

- Assim, dados dois nós i e j, o que devemos garantir?
  - Se i precede j imediatamente: $u_j \geq u_i + 1$;

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)

Restrições:

- Para evitar sub-rotas, vamos usar uma nova variável de decisão:

$$u_i : \text{número de visitas realizadas até o nó } i \in \mathcal{I}.$$

- Assim, dados dois nós i e j, o que devemos garantir?
  - Se i precede j imediatamente: $u_j \geq u_i + 1$;
  - Caso contrário, esta restrição deve ser desligada!

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)

Restrições:

- Para evitar sub-rotas, vamos usar uma nova variável de decisão:

  u_i : número de visitas realizadas até o nó $i \in \mathcal{I}$.

- Assim, dados dois nós i e j, o que devemos garantir?
  - Se i precede j imediatamente: $u_j \geq u_i + 1$;
  - Caso contrário, esta restrição deve ser desligada!
- Assim, obtemos:

  $$u_j \geq u_i + 1$$

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)

Restrições:

- Para evitar sub-rotas, vamos usar uma nova variável de decisão:

  u_i : número de visitas realizadas até o nó $i \in \mathcal{I}$.

- Assim, dados dois nós i e j, o que devemos garantir?
  - Se i precede j imediatamente: $u_j \geq u_i + 1$;
  - Caso contrário, esta restrição deve ser desligada!
- Assim, obtemos:

  $u_j \geq u_i + 1x_{ij}$

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)

Restrições:

- Para evitar sub-rotas, vamos usar uma nova variável de decisão:

  u_i : número de visitas realizadas até o nó $i \in \mathcal{I}$.

- Assim, dados dois nós i e j, o que devemos garantir?
  - Se i precede j imediatamente: $u_j \geq u_i + 1$;
  - Caso contrário, esta restrição deve ser desligada!
- Assim, obtemos:

  $$u_j \geq u_i + 1x_{ij} - n(1 - x_{ij}),$$

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)

Restrições:

- Para evitar sub-rotas, vamos usar uma nova variável de decisão:

$$u_i : \text{número de visitas realizadas até o nó } i \in \mathcal{I}.$$

- Assim, dados dois nós i e j, o que devemos garantir?
  - Se i precede j imediatamente: $u_j \geq u_i + 1$;
  - Caso contrário, esta restrição deve ser desligada!
- Assim, obtemos:

$$u_j \geq u_i + 1x_{ij} - n(1 - x_{ij}),\ i = 1, \ldots, n,$$

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)

Restrições:

- Para evitar sub-rotas, vamos usar uma nova variável de decisão:

$$u_i : \text{número de visitas realizadas até o nó } i \in \mathcal{I}.$$

- Assim, dados dois nós i e j, o que devemos garantir?
  - Se i precede j imediatamente: $u_j \geq u_i + 1$;
  - Caso contrário, esta restrição deve ser desligada!
- Assim, obtemos:

$$u_j \geq u_i + 1x_{ij} - n(1 - x_{ij}), \; i = 1, \ldots, n, \; j = 2, \ldots, n,$$

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)

Restrições:

- Para evitar sub-rotas, vamos usar uma nova variável de decisão:

$$u_i : \text{número de visitas realizadas até o nó } i \in \mathcal{I}.$$

- Assim, dados dois nós i e j, o que devemos garantir?
  - Se i precede j imediatamente: $u_j \geq u_i + 1$;
  - Caso contrário, esta restrição deve ser desligada!
- Assim, obtemos:

$$u_j \geq u_i + 1x_{ij} - n(1 - x_{ij}),\ i = 1, \ldots, n,\ j = 2, \ldots, n,\ i \neq j,$$

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa: Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)

Restrições:

- Para evitar sub-rotas, vamos usar uma nova variável de decisão:

$$u_i : \text{número de visitas realizadas até o nó } i \in \mathcal{I}.$$

- Assim, dados dois nós i e j, o que devemos garantir?
  - Se i precede j imediatamente: $u_j \geq u_i + 1$;
  - Caso contrário, esta restrição deve ser desligada!
- Assim, obtemos:

$$u_j \geq u_i + 1x_{ij} - n(1 - x_{ij}),\ i = 1, \ldots, n,\ j = 2, \ldots, n,\ i \neq j,$$

$$u_1 = 0.$$

Problema do caixeiro viajante

▷ Formulação alternativa

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{\substack{j\in\mathcal{I}:\\ j\neq i}} D_{ij}x_{ij} & \\
\text{s.a} \quad & \sum_{\substack{j\in\mathcal{I}:\\ j\neq i}} x_{ij} = 1, & i \in \mathcal{I}, \\
& \sum_{\substack{i\in\mathcal{I}:\\ i\neq j}} x_{ij} = 1, & j \in \mathcal{I}, \\
& u_j \geq u_i + x_{ij} - n(1 - x_{ij}), & i \in \mathcal{I},\ j \in \mathcal{I}\setminus\{1\},\ i \neq j \\
& u_1 = 0, & \\
& x_{ij} \in \{0,1\}, & i,j \in \mathcal{I}, \\
& u_i \geq 0, & i \in \mathcal{I}.
\end{aligned}
$$

Problema do caixeiro viajante

▷ Lista 1, Exercício 2

Um vendedor de bebidas reside em São Carlos. Ele precisa visitar as seguintes cidades nos próximos dias, para apresentar a seus clientes uma nova linha de refrigerantes de baixa caloria: Franca, Ribeirão Preto, São José do Rio Preto, Poços de Caldas e Limeira. As distâncias entre as cidades são as seguintes:

	Distâncias (km)					
De/Para	SC	FR	RP	SJRP	PC	LI
SC	—	186	105	208	177	94
FR	187	—	89.8	223	255	254
RP	99.9	89	—	203	204	172
SJRP	206	220	203	—	377	295
PC	168	251	201	376	—	156
LI	86.8	255	173	293	159	—

Deseja-se determinar uma rota que visite todas as cidades e volte à cidade atual de modo que a distância total percorrida pelo vendedor seja a menor possível.

Problema do caixeiro viajante

▷ Lista 1, Exercício 2

	SC	FR	RP	SJRP	PC	LI
SC				1.000		
FR			1.000			
RP					1.000	
SJRP		1.000				
PC						1.000
LI	1.000					

Valor ótimo = 964.600

Problema do caixeiro viajante (PCV)

▷ Links interessantes

Problema do caixeiro viajante (PCV)

▷ Links interessantes

- PCV no Google Maps:

  `http://www.tsp.gatech.edu/maps/index.html`

- História, aplicações e curiosidades do PCV:

  `http://www.tsp.gatech.edu/`

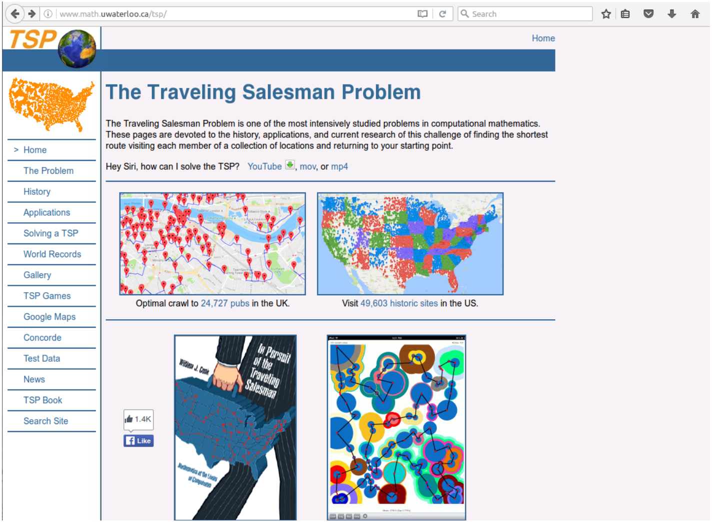
  `http://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem`

- Ilustração de heurística com animação gráfica:

  `http://www-e.uni-magdeburg.de/mertens/TSP/`

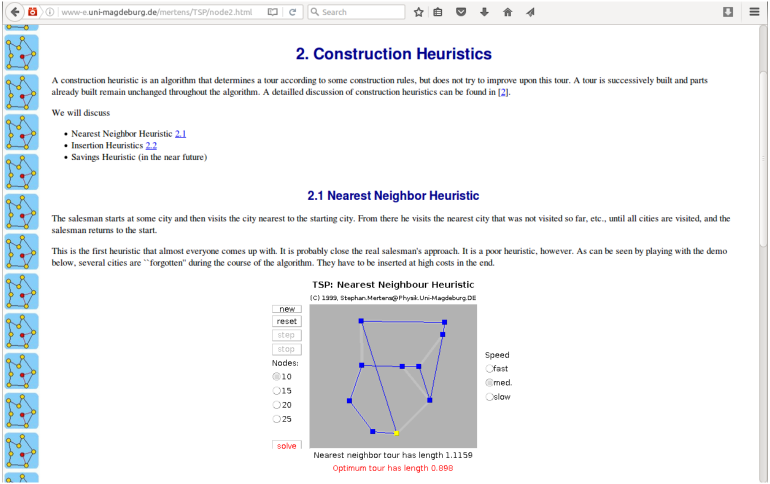
Links interessantes

▷ http://www.tsp.gatech.edu



Links interessantes

▷ http://www-e.uni-magdeburg.de/mertens/TSP/



Outras formulações

▷ Oncan et al. 2009

ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect

Computers & Operations Research 36 (2009) 637–654

computers & operations research

www.elsevier.com/locate/cor

Invited review

A comparative analysis of several asymmetric traveling salesman problem formulations

Temel Öncan[a], İ. Kuban Altınel[b], Gilbert Laporte[c,*]

[a]Department of Industrial Engineering, Galatasaray University, Ortaköy, İstanbul 34357, Turkey
[b]Department of Industrial Engineering, Boğaziçi University, Bebek, İstanbul 34342, Turkey
[c]Canada Research Chair in Distribution Management, HEC Montréal, 3000, chemin de la Côte-Sainte-Catherine, Montréal, Canada, H3T 2A7

Available online 3 December 2007

Abstract

In this survey, a classification of 24 asymmetric traveling salesman problem (ATSP) formulations is presented. The strength of their LP relaxations is discussed and known relationships from the literature are reviewed. Some new relationships are also introduced, and computational results are reported.

Keywords: Integer linear programming; Asymmetric traveling salesman problem; Formulations; Projections

- Obrigado pela atenção!
- Dúvidas?

- Próxima aula:
  - Problema do caixeiro viajante (outras formulações);
  - Problema de roteamento de veículos;