Funciones generadoras
Ejercicios

Fabiola Vázquez

24 de noviembre de 2020

Ejercicio 1 (Ej. 1, pág. 392)**.** *$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ describen un proceso en el que cada padre tiene descendencia con probabilidad p_j. Encuentra la probabilidad d de que el proceso termine si*

(a) $p_0 = \frac{1}{2}, p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$.

(b) $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{3}$.

(c) $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = 0, p_2 = \frac{2}{3}$.

(d) $p_j = \frac{1}{2^{j+1}}$*, para* $j = 0, 1, 2, \ldots$.

(e) $p_j = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^j$*, para* $j = 0, 1, 2, \ldots$.

(f) $p_j = e^{-2}\left(\frac{2^j}{j!}\right)$*, para* $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Solución. **(a)** Se calcula la media de la descendencia,

$$m = \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}. \tag{1}$$

Como $m < 1$ por el teorema 10.2 [2], el proceso termina con probabilidad $d = 1$.

(b) Se calcula la media de la descendencia,

$$m = \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1. \tag{2}$$

Como $m = 1$ por el teorema 10.2 [2], el proceso termina con probabilidad $d = 1$.

(c) Se calcula la media de la descendencia,

$$m = 0 + 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}. \tag{3}$$

Como $m > 1$, se considera la ecuación $h(z) = z$ y se encuentran las raíces,

$$h(z) = z \tag{4}$$
$$p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots = z \tag{5}$$
$$\frac{1}{3} + 0 \cdot z + \frac{2}{3} \cdot z^2 = z \tag{6}$$
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot z^2 - z = 0 \tag{7}$$
$$1 + 2z^2 - 3z = 0 \tag{8}$$
$$(2z - 1)(z - 1) = 0 \tag{9}$$

Entonces, las raíces de la ecuación son $z = \frac{1}{2}$ y $z = 1$, donde d es la menor de las raíces de $h(z) = z$, por lo tanto $d = \frac{1}{2}$.

(d) Se calcula la media de la descendencia,

$$m = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{2^{j+1}} \tag{10}$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j-1)}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \tag{11}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \tag{12}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1. \tag{13}$$

Dado que $m = 1$, se concluye que $d = 1$.

(e) Se calcula el valor de m,

$$m = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^j \tag{14}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2. \tag{15}$$

Como $m > 1$, se considera la ecuación $h(z) = z$ y se buscan sus raíces,

$$h(z) = z \tag{16}$$
$$p_0 + p_1 \cdot z + p_2 \cdot z^2 + \ldots = z \tag{17}$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^j \cdot z^j = z. \tag{18}$$

Como $|z| < 1$, entonces $|\frac{2}{3}z| < 1$ y

$$\left(\frac{1}{3}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{j}\cdot z^{j} = z \tag{19}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}z} = z \tag{20}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{3-2z}{3}} = z \tag{21}$$

$$\frac{1}{3-2z} = z \tag{22}$$

$$2z^2 - 3z + 1 = 0 \tag{23}$$

$$(2z-1)(z-1) = 0, \tag{24}$$

por lo que las raíces de la ecuación $h(z) = z$ son $z_1 = 0$ y $z_2 = \frac{1}{2}$, por lo tanto $d = \frac{1}{2}$.

(f) Se calcula el valor de m,

$$m = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{-2}2^{j}}{j!}\cdot j \tag{25}$$

$$= e^{-2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{j}}{j!}\cdot j. \tag{26}$$

Dado que el primer término de la suma es igual a cero,

$$m = e^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{j}}{j!}\cdot j \tag{27}$$

$$= e^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{j}}{(j-1)!} = e^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2\cdot 2^{j-1}}{(j-1)!} \tag{28}$$

$$= 2e^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{j-1}}{(j-1)!} \tag{29}$$

$$= 2e^{-2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{j}}{j!} \tag{30}$$

$$= 2e^{-2}e^{2} = 2. \tag{31}$$

Como $m > 1$, se considera $h(z) = z$ y se buscan sus raíces,

$$h(z) = z \tag{32}$$

$$p_0 + p_1\cdot z + p_2\cdot z^2 + \ldots = z \tag{33}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{-2}2^{j}}{j!}\cdot z^{j} = z \tag{34}$$

$$e^{-2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2z)^{j}}{j!} = z \tag{35}$$

$$e^{-2}\cdot e^{2z} = z \tag{36}$$

$$e^{2z-2} = z. \tag{37}$$

Calculando las raíces de la ecuación por medio de Wolfram Alpha [3], tenemos que $z_1 = 1$ y $z_2 \approx 0.2$, por lo tanto $d \approx 0.2$. $\square$

Ejercicio 2 (Ej. 3, pág. 392)**.** *En el problema de la carta en cadena, encuentra la ganancia esperada si*

(a) $p_0 = \frac{1}{2}, p_1 = 0$ *y* $p_2 = \frac{1}{2}$.

(b) $p_0 = \frac{1}{6}, p_1 = \frac{1}{2}$ *y* $p_2 = \frac{1}{3}$.

Demuestra que si $p_0 > \frac{1}{2}$*, no puedes esperar ganancias.*

Solución. En el ejemplo 10.14, se menciona que la ganancia esperada viene dada por,

$$50m + 50m^{12} - 100, \tag{38}$$

donde $m = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2$. Para que la ganancia sea favorable, se debe tener que

$$m + m^{12} > 2. \tag{39}$$

Lo cual es cierto si y solo si $m > 1$, es decir, si

$$p_1 + 2p_2 > 1. \tag{40}$$

Recordando que $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, entonces $p_1 = 1 - p_0 - p_2$, sustituyendo resulta,

$$1 - p_0 - p_2 + 2p_2 > 1 \tag{41}$$
$$p_2 - p_0 > 0 \tag{42}$$
$$p_2 > p_0. \tag{43}$$

Si $p_0 = \frac{1}{2}$, el valor más grande que puede tomar p_2 es $\frac{1}{2}$ (si se hace $p_1 = 0$), pero no cumpliría que $p_2 > p_0$, por lo que no sería un valor favorable. Por lo tanto si $p_0 = \frac{1}{2}$, no se puede esperar una ganancia.

(a) Se calcula el valor de m como

$$m = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \tag{44}$$

por la ecuación 38, se tiene que la ganancia esperada es $50(1) + 50(1^{12}) - 100 = 0$.

(b) De forma similar que en el inciso anterior, se tiene el valor de m,

$$m = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{6}, \tag{45}$$

por lo tanto la ganancia esperada es $50\left(\frac{7}{6}\right) + 50\left(\left(\frac{7}{6}\right)^{12}\right) - 100 \approx 276.26$. $\square$

Ejercicio 3 (Ej. 1, pág. 401)**.** *Sea* X *una variable aleatoria continua con valores en* $[0, 2]$ *y densidad* f_X*. Encuentra la función generadora de momentos* $g(t)$ *de* X *si*

(a) $f_X = \frac{1}{2}$.

(b) $f_X = \frac{1}{2}x$.

(c) $f_X = 1 - \frac{1}{2}x$.

(d) $f_X = |1-x|$.

(e) $f_X = \frac{3}{8}x^2$.

Solución. La función generadora de momentos $g(t)$ de X se define [2] como

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx. \tag{46}$$

(a) Calculamos $g(t)$,

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^2 e^{tx} \cdot \frac{1}{2}dx \qquad (47)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 e^{tx}dx \qquad (48)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{tx}}{t}\Big|_0^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2t}}{t} - \frac{e^{0t}}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2t}}{t} - \frac{1}{t}\right) \qquad (49)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2t}-1}{t} = \frac{e^{2t}-1}{2t}. \qquad (50)
\end{aligned}$$

Por lo tanto si $f_X = \frac{1}{2}$, su función generadora de momentos es $g(t) = \frac{e^{2t}-1}{2t}$.

(b) Se calcula $g(t)$,

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx}\cdot\frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2}\int_0^2 xe^{tx}dx, \tag{51}$$

se hace una integración por partes, haciendo $u = x$ y $dv = e^{tx}dx$, entonces,

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{xe^{tx}}{t}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{tx}}{t}dx\right) \qquad (52)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{xe^{tx}}{t} - \frac{e^{tx}}{t^2}\right)\Big|_0^2\right) \qquad (53)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2e^{2t}}{t} - \frac{e^{2t}}{t^2} - \frac{0e^{0t}}{t} + \frac{e^{0t}}{t^2}\right) \qquad (54)\\
&= \frac{e^{2t}}{t} + \frac{1}{2t^2} - \frac{e^{2t}}{2t^2}. \qquad (55)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $f_X = \frac{1}{2}x$, su función generadora de momentos es $g(t) = \frac{e^{2t}}{t} + \frac{1}{2t^2} - \frac{e^{2t}}{2t^2}$.

(c) Se calcula la función $g(t)$,

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx}\left(1 - \frac{1}{2}x\right)dx = \underbrace{\int_0^2 e^{tx}dx}_{(1)} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^2 xe^{tx}dx}_{(2)}. \tag{56}$$

En el inciso **(a)** se calculó el valor de la integral (1) y en el inciso **(b)** se calculó la integral (2), por tanto

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{e^{tx}}{t}\Big|_0^2 - \left(\frac{e^{2t}}{t} + \frac{1}{2t^2} - \frac{e^{2t}}{2t^2}\right) \qquad (57)\\
&= \frac{e^{2t}}{t} - \frac{1}{t} - \frac{e^{2t}}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{e^{2t}}{2t^2} \qquad (58)\\
&= \frac{e^{2t}}{t^2} - \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t}. \qquad (59)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $f_X = 1 - \frac{1}{2}x$, entonces su función generadora de momentos es $g(t) = \frac{e^{2t}}{t^2} - \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t}$.

(d) Se calcula la función generadora de momentos $g(t)$,

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx}|1-x|dx, \tag{60}$$

donde la función $|1-x|$, se define como

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad 1 \geqslant x, \\ \\ x-1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases} \tag{61}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^1 e^{tx}(1-x)dx + \int_1^2 e^{tx}(x-1)dx & (62)\\ &= \int_0^1 e^{tx}dx - \int_0^1 xe^{tx}dx + \int_1^2 xe^{tx}dx - \int_1^2 e^{tx}dx & (63)\\ &= \frac{e^{tx}}{t}\bigg|_0^1 - \left(\frac{xe^{tx}}{t} - \frac{e^{tx}}{t^2}\bigg|_0^1\right) + \left(\frac{xe^{tx}}{t} - \frac{e^{tx}}{t^2}\bigg|_1^2\right) - \frac{e^{tx}}{t}\bigg|_0^2 & (64)\\ &= \frac{2e^t}{t^2} + \frac{e^{2t}}{t} - \frac{e^{2t}}{t^2} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}. & (65) \end{aligned}$$

(e) Se calcula la función generadora de momentos $g(t)$,

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^2 e^{tx}\frac{3}{8}x^2\,dx & (66)\\ &= \frac{3}{8}\underbrace{\int_0^2 x^2e^{tx}\,dx}_{(3)}. & (67) \end{aligned}$$

La integral (3) se resuelve por partes, haciendo $u = x^2$ y $dv = e^{tx}dx$, queda

$$g(t) = \frac{x^2e^{tx}}{t}\bigg|_0^2 - \underbrace{\frac{2}{t}\int_0^2 xe^{tx}\,dx}_{(4)}. \tag{68}$$

Nuevamente, la integral (4) se resuelve por partes, haciendo $u = x$ y $dv = e^{tx}dx$, resulta

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{x^2e^{tx}}{t}\bigg|_0^2 - \frac{2}{t}\left(\frac{xe^{tx}}{t}\bigg|_0^2 - \frac{1}{t}\int_0^2 e^{tx}\,dx\right) & (69)\\ &= \frac{x^2e^{tx}}{t}\bigg|_0^2 - \frac{2}{t}\left(\frac{xe^{tx}}{t}\bigg|_0^2 - \frac{e^{tx}}{t^2}\bigg|_0^2\right) & (70)\\ &= \frac{3e^{2t}}{2t} - \frac{3e^{2t}}{2t^2} + \frac{3e^{2t}}{4t^3} - \frac{3}{4t^3}. & (71) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 4 (Ej. 6, pág. 402)**.** *Sea X una variable aleatoria continua con función característica $k_X(\tau) = e^{-|\tau|}, -\infty < \tau < \infty$. Demuestra que la función de densidad de X es $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1-x^2)}$.*

Solución. Dada la función $k_X(\tau)$ se puede obtener la función de densidad de X [2] con

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau x} k_X(\tau)\, d\tau. \tag{72}$$

Entonces, sustituyendo la función $k_X(\tau)$, se tiene

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau x} \cdot e^{-|\tau|}\, d\tau. \tag{73}$$

Se sabe que $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, entonces $e^{i(-\tau x)} = \cos(-\tau x) + i \operatorname{sen}(-\tau x)$ y como la función $\cos(x)$ es una función par, entonces $\cos(-x) = \cos(x)$. La función $\operatorname{sen}(x)$ es una función impar, entonces $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$. Entonces $e^{i(-\tau x)} = \cos(\tau x) - i \operatorname{sen}(\tau x)$, sustituyendo en la ecuación 73 se tiene que

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\cos(\tau x) - i \operatorname{sen}(\tau x)) e^{-|\tau|}\, d\tau \qquad (74)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau x) e^{-|\tau|}\, d\tau - i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(\tau x) e^{-|\tau|}\, d\tau\right]. \qquad (75) \end{aligned}$$

La función $e^{-|\tau|}$, se define como

$$e^{-|\tau|} = \begin{cases} e^{\tau} & \text{si} \quad \tau \geqslant 0, \\ \\ e^{-\tau} & \text{si} \quad \tau < 0. \end{cases} \tag{76}$$

Entonces,

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-\tau} \cos(\tau x)\, d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{\tau} \cos(\tau x)\, d\tau - i \int_{-\infty}^{0} e^{-\tau} \operatorname{sen}(\tau x)\, d\tau - i \int_{0}^{\infty} e^{\tau} \operatorname{sen}(\tau x)\, d\tau\right]. \tag{77}$$

Como la función coseno es una función par, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} e^{-\tau} \cos(\tau x)\, d\tau &= \int_{0}^{\infty} e^{-(-\tau)} \cos(-\tau x)\, d\tau \qquad (78)\\ &= \int_{0}^{\infty} e^{\tau} \cos(\tau x)\, d\tau. \qquad (79) \end{aligned}$$

Ya que la función seno es una función impar, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} e^{-\tau} \operatorname{sen}(\tau x)\, d\tau &= \int_{0}^{\infty} e^{-(-\tau)} \operatorname{sen}(-\tau x)\, d\tau \qquad (80)\\ &= -\int_{0}^{\infty} e^{\tau} \operatorname{sen}(\tau x)\, d\tau. \qquad (81) \end{aligned}$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi}\left(2\int_{0}^{\infty} e^{\tau} \cos(\tau x)\, d\tau\right) \qquad (82)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{\tau} \cos(\tau x)\, d\tau. \qquad (83) \end{aligned}$$

La integral se resuelve por partes haciendo $u = \cos\tau x$ y $dv = e^\tau d\tau$, entonces $du = -x\sin\tau x$ y $v = e^\tau$, por lo que

$$\int e^\tau \cos(\tau x)\, d\tau = e^\tau \cos\tau x + x \int e^\tau \operatorname{sen}\tau x \; d\tau. \tag{84}$$

Nuevamente, se realiza el proceso de integración por partes haciendo $u = \operatorname{sen}\tau x$ y $dv = e^\tau d\tau$, entonces

$$\begin{aligned} \int e^\tau \cos(\tau x)\, d\tau &= e^\tau \cos\tau x + x\left(\operatorname{sen}\tau x \cdot e^\tau - x\int e^\tau \cos\tau x d\tau\right) && (85)\\ &= e^\tau \cos\tau x + x\operatorname{sen}\tau x \cdot e^\tau - x^2 \int e^\tau \cos\tau x d\tau && (86)\\ \int e^\tau \cos(\tau x)\, d\tau + x^2 \int e^\tau \cos(\tau x)\, d\tau &= e^\tau \cos\tau x + x\operatorname{sen}\tau x \cdot e^\tau && (87)\\ (1+x^2)\int e^\tau \cos(\tau x)\, d\tau &= e^\tau \cos\tau x + x\operatorname{sen}\tau x \cdot e^\tau && (88)\\ \int e^\tau \cos(\tau x)\, d\tau &= \frac{e^\tau \cos\tau x + x\operatorname{sen}\tau x \cdot e^\tau}{1+x^2} && (89)\\ & && (90) \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación 83, se tiene

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^\tau \cos\tau x + x\operatorname{sen}\tau x \cdot e^\tau}{1+x^2}\ \Big|_0^\infty\right) && (91)\\ &= \frac{1}{\pi}\left(0 - \frac{1}{1+x^2}\right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} && (92) \end{aligned}$$

□

Ejercicio 5 (Ej. 10, pág. 402)**.** *Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un proceso de ensayos independientes con densidad*

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{93}$$

(a) *Encuentra la media y la varianza de $f(x)$.*

(b) *Encuentra la función generadora de momentos para X_1, S_n, A_n y S_n^*.*

(c) *¿Qué puedes decir acerca de la función generadora de momentos de S_n^* cuando $n \to \infty$?*

(d) *¿Qué puedes decir acerca de la función generadora de momentos de A_n cuando $n \to \infty$?*

Solución. **(a)** Para encontrar la media y la varianza de $f(x)$, primero se calcula la función generadora de momentos de la variable aleatoria X_1. Por el teorema 10.4 [2], se tiene la relación

$$k_X(\tau) = g_X(i\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x} f_X(x) dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x} e^{-|x|}\, dx. \tag{94}$$

En el ejercicio 4, se resolvió una integral similar, cuyo valor encontrado es

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau x} \cdot e^{-|\tau|}\, d\tau = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \tag{95}$$

Se le da la forma para obtener la integral deseada. Primero, se multiplica ambos lados por 2π,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau x} \cdot e^{-|\tau|}\, d\tau = \frac{2}{(1+x^2)}, \tag{96}$$

después se cambia x por xi, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau (xi)} \cdot e^{-|\tau|}\, d\tau = \frac{2}{(1+(xi)^2)} \tag{97}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau x} \cdot e^{-|\tau|}\, d\tau = \frac{2}{1-x^2}. \tag{98}$$

Cambiando x por t y τ por x, se tiene que

$$\begin{aligned} g_X(t) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-|x|}\, dx && (99)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1-t^2} && (100)\\ &= \frac{1}{1-t^2}. && (101)\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función generadora de momentos de X_1 es la función $g(t) = \frac{1}{1-t^2}$.

La media se obtiene derivando la función generadora de momentos y evaluándola en $t = 0$,

$$g_X'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \tag{102}$$

$$g_X'(0) = \frac{2\cdot 0}{(1-0^2)^2} = 0, \tag{103}$$

para la varianza se hace lo mismo, pero en la segunda derivada,

$$g_X''(t) = \frac{2}{(1-t^2)^2} + \frac{8t^2}{(1-t^2)^3} \tag{104}$$

$$g_X''(0) = \frac{2}{(1-0^2)^2} + \frac{8\cdot 0^2}{(1-0^2)^3} = 2. \tag{105}$$

Por lo tanto, la media es igual a 0 y la varianza es igual a 2.

(b) La función generadora de momentos de X_1 se obtuvo en el inciso anterior, y es $g_X(t) = \frac{1}{1-t^2}$. Entonces, se calcula la función generadora de momentos para S_n,

$$\begin{aligned} g_{S_n}(t) = \mathbb{E}[e^{S_n t}] &= \mathbb{E}[e^{(X_1+\cdots+X_n)t}] && (106)\\ &= \mathbb{E}[e^{X_1 t + X_2 t + \cdots X_n t}] && (107)\\ &= \mathbb{E}[e^{X_1 t} e^{X_2 t}\cdots e^{X_n t}] && (108)\\ &= \mathbb{E}[e^{X_1 t}]\cdots \mathbb{E}[e^{X_n t}] && (109)\\ &= g_{X_1}(t)\cdots g_{X_n}(t) && (110)\\ &= \left(\frac{1}{1-t^2}\right)^n. && (111)\end{aligned}$$

De forma similar, se obtiene la función generadora de momentos para $A_n = \frac{S_n}{n}$,

$$\begin{aligned}
g_{A_n}(t) &= g_{\frac{S_n}{n}}(t) && (112)\\
&= \mathbb{E}[e^{\frac{S_n}{n}t}] && (113)\\
&= \mathbb{E}[e^{S_n\frac{t}{n}}] && (114)\\
&= g_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) && (115)\\
&= \left(\frac{1}{1-\left(\frac{t}{n}\right)^2}\right)^n. && (116)
\end{aligned}$$

Para encontrar la función generadora de momentos de $S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ se realiza un proceso similar que el anterior. Primero se sustituye la media y la varianza encontrada en el inciso **(a)**, por lo que se tiene

$$S_n^* = \frac{S_n}{\sqrt{2n}}. \tag{117}$$

Entonces,

$$g_{S_n^*}(t) = g_{\frac{S_n}{\sqrt{2n}}}(t) = g_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right) = \left(\frac{1}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^2}\right)^n. \tag{118}$$

(c) Se calcula el límite de $g_{S_n^*}$ cuando $n \longrightarrow \infty$,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} g_{S_n^*} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^2}\right)^n = \frac{\lim_{n\longrightarrow\infty} 1^n}{\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1-\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^2\right)^n}. \tag{119}$$

Se sabe que si una sucesión (a_n) converge a a, entonces $(1+\frac{a_n}{n})^n$ converge a e^a [1]. Entonces,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1-\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^2\right)^n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\left(\frac{\frac{-t^2}{2}}{n}\right)\right)^n = e^{\frac{-t^2}{2}}. \tag{120}$$

Sustituyendo, el límite resulta

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} g_{S_n^*} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^2}\right)^n = \frac{\lim_{n\longrightarrow\infty} 1^n}{\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1-\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^2\right)^n} = \frac{1}{e^{\frac{-t^2}{2}}} = e^{\frac{t^2}{2}}. \tag{121}$$

(d) De forma similiar, se calcula

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} g_{A_n} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{t}{n}\right)^2}\right)^n = \frac{\lim_{n\longrightarrow\infty} 1^n}{\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1-\left(\frac{t}{n}\right)^2\right)^n}, \tag{122}$$

donde,

$$1-\left(\frac{t}{n}\right)^2 = 1+\left(\frac{-t^2}{n^2}\right) = 1+\frac{\frac{-t^2}{n}}{n}. \tag{123}$$

La sucesión $a_n = \frac{-t^2}{n}$ converge a 0, así que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{t}{n}\right)^2\right)^n = e^0 = 1, \tag{124}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{t}{n}\right)^2}\right)^n = 1. \tag{125}$$

□

Referencias

[1] George Casella and Roger L. Berger. *Statistical inference*. Thomson Learning, 2nd edition, 2002.

[2] Charles M. Grinstead and J. Laurie Snell. *Introduction to Probability*. 2006.

[3] Wolfram Research Inc. Wolfram Alpha. Champaign, IL, 2019.