

# FUNCIONES GENERADORAS

## EJERCICIOS

FABIOLA VÁZQUEZ

24 de noviembre de 2020

---

**Ejercicio 1** (Ej. 1, pág. 392).  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  describen un proceso en el que cada padre tiene descendencia con probabilidad  $p_j$ . Encuentra la probabilidad  $d$  de que el proceso termine si

(a)  $p_0 = \frac{1}{2}, p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$ .

(b)  $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{3}$ .

(c)  $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = 0, p_2 = \frac{2}{3}$ .

(d)  $p_j = \frac{1}{2^{j+1}}$ , para  $j = 0, 1, 2, \dots$

(e)  $p_j = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^j$ , para  $j = 0, 1, 2, \dots$

(f)  $p_j = e^{-2} \left(\frac{2^j}{j!}\right)$ , para  $j = 0, 1, 2, \dots$

*Solución.* (a) Se calcula la media de la descendencia,

$$m = \frac{1}{4} + 2 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}. \quad (1)$$

Como  $m < 1$  por el teorema 10.2 [2], el proceso termina con probabilidad  $d = 1$ .

(b) Se calcula la media de la descendencia,

$$m = \frac{1}{3} + 2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1. \quad (2)$$

Como  $m = 1$  por el teorema 10.2 [2], el proceso termina con probabilidad  $d = 1$ .

(c) Se calcula la media de la descendencia,

$$m = 0 + 2 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}. \quad (3)$$

Como  $m > 1$ , se considera la ecuación  $h(z) = z$  y se encuentran las raíces,

$$h(z) = z \quad (4)$$

$$p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots = z \quad (5)$$

$$\frac{1}{3} + 0 \cdot z + \frac{2}{3} \cdot z^2 = z \quad (6)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot z^2 - z = 0 \quad (7)$$

$$1 + 2z^2 - 3z = 0 \quad (8)$$

$$(2z - 1)(z - 1) = 0 \quad (9)$$

Entonces, las raíces de la ecuación son  $z = \frac{1}{2}$  y  $z = 1$ , donde  $d$  es la menor de las raíces de  $h(z) = z$ , por lo tanto  $d = \frac{1}{2}$ .

(d) Se calcula la media de la descendencia,

$$m = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{2^{j+1}} \quad (10)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j-1)}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \quad (11)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \quad (12)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1. \quad (13)$$

Dado que  $m = 1$ , se concluye que  $d = 1$ .

(e) Se calcula el valor de  $m$ ,

$$m = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^j \quad (14)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2. \quad (15)$$

Como  $m > 1$ , se considera la ecuación  $h(z) = z$  y se buscan sus raíces,

$$h(z) = z \quad (16)$$

$$p_0 + p_1 \cdot z + p_2 \cdot z^2 + \dots = z \quad (17)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^j \cdot z^j = z. \quad (18)$$

Como  $|z| < 1$ , entonces  $|\frac{2}{3}z| < 1$  y

$$\left(\frac{1}{3}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j \cdot z^j = z \quad (19)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}z} = z \quad (20)$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{3-2z}{3}} = z \quad (21)$$

$$\frac{1}{3-2z} = z \quad (22)$$

$$2z^2 - 3z + 1 = 0 \quad (23)$$

$$(2z - 1)(z - 1) = 0, \quad (24)$$

por lo que las raíces de la ecuación  $h(z) = z$  son  $z_1 = 0$  y  $z_2 = \frac{1}{2}$ , por lo tanto  $d = \frac{1}{2}$ .

(f) Se calcula el valor de  $m$ ,

$$m = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-2} 2^j}{j!} \cdot j \quad (25)$$

$$= e^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \cdot j. \quad (26)$$

Dado que el primer término de la suma es igual a cero,

$$m = e^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \cdot j \quad (27)$$

$$= e^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j}{(j-1)!} = e^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 2^{j-1}}{(j-1)!} \quad (28)$$

$$= 2e^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{j-1}}{(j-1)!} \quad (29)$$

$$= 2e^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{j!} \quad (30)$$

$$= 2e^{-2} e^2 = 2. \quad (31)$$

Como  $m > 1$ , se considera  $h(z) = z$  y se buscan sus raíces,

$$h(z) = z \quad (32)$$

$$p_0 + p_1 \cdot z + p_2 \cdot z^2 + \dots = z \quad (33)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-2} 2^j}{j!} \cdot z^j = z \quad (34)$$

$$e^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2z)^j}{j!} = z \quad (35)$$

$$e^{-2} \cdot e^{2z} = z \quad (36)$$

$$e^{2z-2} = z. \quad (37)$$

Calculando las raíces de la ecuación por medio de Wolfram Alpha [3], tenemos que  $z_1 = 1$  y  $z_2 \approx 0.2$ , por lo tanto  $d \approx 0.2$ .  $\square$

**Ejercicio 2** (Ej. 3, pág. 392). *En el problema de la carta en cadena, encuentra la ganancia esperada si*

$$(a) \ p_0 = \frac{1}{2}, p_1 = 0 \text{ y } p_2 = \frac{1}{2}.$$

$$(b) \ p_0 = \frac{1}{6}, p_1 = \frac{1}{2} \text{ y } p_2 = \frac{1}{3}.$$

*Demuestra que si  $p_0 > \frac{1}{2}$ , no puedes esperar ganancias.*

*Solución.* En el ejemplo 10.14, se menciona que la ganancia esperada viene dada por,

$$50m + 50m^{12} - 100, \quad (38)$$

donde  $m = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2$ . Para que la ganancia sea favorable, se debe tener que

$$m + m^{12} > 2. \quad (39)$$

Lo cual es cierto si y solo si  $m > 1$ , es decir, si

$$p_1 + 2p_2 > 1. \quad (40)$$

Recordando que  $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ , entonces  $p_1 = 1 - p_0 - p_2$ , sustituyendo resulta,

$$1 - p_0 - p_2 + 2p_2 > 1 \quad (41)$$

$$p_2 - p_0 > 0 \quad (42)$$

$$p_2 > p_0. \quad (43)$$

Si  $p_0 = \frac{1}{2}$ , el valor más grande que puede tomar  $p_2$  es  $\frac{1}{2}$  (si se hace  $p_1 = 0$ ), pero no cumpliría que  $p_2 > p_0$ , por lo que no sería un valor favorable. Por lo tanto si  $p_0 = \frac{1}{2}$ , no se puede esperar una ganancia.

(a) Se calcula el valor de  $m$  como

$$m = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad (44)$$

por la ecuación 38, se tiene que la ganancia esperada es  $50(1) + 50(1^{12}) - 100 = 0$ .

(b) De forma similar que en el inciso anterior, se tiene el valor de  $m$ ,

$$m = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{6}, \quad (45)$$

por lo tanto la ganancia esperada es  $50 \left(\frac{7}{6}\right) + 50 \left(\left(\frac{7}{6}\right)^{12}\right) - 100 \approx 276.26$ .  $\square$

**Ejercicio 3** (Ej. 1, pág. 401). *Sea  $X$  una variable aleatoria continua con valores en  $[0, 2]$  y densidad  $f_X$ . Encuentra la función generadora de momentos  $g(t)$  de  $X$  si*

$$(a) \ f_X = \frac{1}{2}.$$

$$(b) \ f_X = \frac{1}{2}x.$$

$$(c) \ f_X = 1 - \frac{1}{2}x.$$

$$(d) f_X = |1 - x|.$$

$$(e) f_X = \frac{3}{8}x^2.$$

*Solución.* La función generadora de momentos  $g(t)$  de  $X$  se define [2] como

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx. \quad (46)$$

(a) Calculamos  $g(t)$ ,

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx} \cdot \frac{1}{2} dx \quad (47)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 e^{tx} dx \quad (48)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{tx}}{t} \Big|_0^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{2t}}{t} - \frac{e^{0t}}{t} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{2t}}{t} - \frac{1}{t} \right) \quad (49)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2t} - 1}{t} = \frac{e^{2t} - 1}{2t}. \quad (50)$$

Por lo tanto si  $f_X = \frac{1}{2}$ , su función generadora de momentos es  $g(t) = \frac{e^{2t}-1}{2t}$ .

(b) Se calcula  $g(t)$ ,

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx} \cdot \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x e^{tx} dx, \quad (51)$$

se hace una integración por partes, haciendo  $u = x$  y  $dv = e^{tx} dx$ , entonces,

$$g(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{x e^{tx}}{t} \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{tx}}{t} dx \right) \quad (52)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{x e^{tx}}{t} - \frac{e^{tx}}{t^2} \right) \Big|_0^2 \right) \quad (53)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{2e^{2t}}{t} - \frac{e^{2t}}{t^2} - \frac{0e^{0t}}{t} + \frac{e^{0t}}{t^2} \right) \quad (54)$$

$$= \frac{e^{2t}}{t} + \frac{1}{2t^2} - \frac{e^{2t}}{2t^2}. \quad (55)$$

Por lo tanto, si  $f_X = \frac{1}{2}x$ , su función generadora de momentos es  $g(t) = \frac{e^{2t}}{t} + \frac{1}{2t^2} - \frac{e^{2t}}{2t^2}$ .

(c) Se calcula la función  $g(t)$ ,

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx} \left( 1 - \frac{1}{2}x \right) dx = \underbrace{\int_0^2 e^{tx} dx}_{(1)} - \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^2 x e^{tx} dx}_{(2)}. \quad (56)$$

En el inciso (a) se calculó el valor de la integral (1) y en el inciso (b) se calculó la integral (2), por tanto

$$g(t) = \frac{e^{tx}}{t} \Big|_0^2 - \left( \frac{e^{2t}}{t} + \frac{1}{2t^2} - \frac{e^{2t}}{2t^2} \right) \quad (57)$$

$$= \frac{e^{2t}}{t} - \frac{1}{t} - \frac{e^{2t}}{t} - \frac{1}{2t^2} + \frac{e^{2t}}{2t^2} \quad (58)$$

$$= \frac{e^{2t}}{t^2} - \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t}. \quad (59)$$

Por lo tanto, si  $f_X = 1 - \frac{1}{2}x$ , entonces su función generadora de momentos es  $g(t) = \frac{e^{2t}}{t^2} - \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t}$ .

(d) Se calcula la función generadora de momentos  $g(t)$ ,

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx} |1 - x| dx, \quad (60)$$

donde la función  $|1 - x|$ , se define como

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 1 \geq x, \\ x - 1 & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad (61)$$

Entonces,

$$g(t) = \int_0^1 e^{tx} (1 - x) dx + \int_1^2 e^{tx} (x - 1) dx \quad (62)$$

$$= \int_0^1 e^{tx} dx - \int_0^1 x e^{tx} dx + \int_1^2 x e^{tx} dx - \int_1^2 e^{tx} dx \quad (63)$$

$$= \left. \frac{e^{tx}}{t} \right|_0^1 - \left( \left. \frac{x e^{tx}}{t} - \frac{e^{tx}}{t^2} \right|_0^1 \right) + \left( \left. \frac{x e^{tx}}{t} - \frac{e^{tx}}{t^2} \right|_1^2 \right) - \left. \frac{e^{tx}}{t} \right|_1^2 \quad (64)$$

$$= \frac{2e^t}{t^2} + \frac{e^{2t}}{t} - \frac{e^{2t}}{t^2} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}. \quad (65)$$

(e) Se calcula la función generadora de momentos  $g(t)$ ,

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx} \frac{3}{8} x^2 dx \quad (66)$$

$$= \frac{3}{8} \underbrace{\int_0^2 x^2 e^{tx} dx}_{(3)}. \quad (67)$$

La integral (3) se resuelve por partes, haciendo  $u = x^2$  y  $dv = e^{tx} dx$ , queda

$$g(t) = \left. \frac{x^2 e^{tx}}{t} \right|_0^2 - \underbrace{\frac{2}{t} \int_0^2 x e^{tx} dx}_{(4)}. \quad (68)$$

Nuevamente, la integral (4) se resuelve por partes, haciendo  $u = x$  y  $dv = e^{tx} dx$ , resulta

$$g(t) = \left. \frac{x^2 e^{tx}}{t} \right|_0^2 - \frac{2}{t} \left( \left. \frac{x e^{tx}}{t} \right|_0^2 - \frac{1}{t} \int_0^2 e^{tx} dx \right) \quad (69)$$

$$= \left. \frac{x^2 e^{tx}}{t} \right|_0^2 - \frac{2}{t} \left( \left. \frac{x e^{tx}}{t} \right|_0^2 - \left. \frac{e^{tx}}{t^2} \right|_0^2 \right) \quad (70)$$

$$= \frac{3e^{2t}}{2t} - \frac{3e^{2t}}{2t^2} + \frac{3e^{2t}}{4t^3} - \frac{3}{4t^3}. \quad (71)$$

□

**Ejercicio 4** (Ej. 6, pág. 402). Sea  $X$  una variable aleatoria continua con función característica  $k_X(\tau) = e^{-|\tau|}$ ,  $-\infty < \tau < \infty$ . Demuestra que la función de densidad de  $X$  es  $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1-x^2)}$ .

*Solución.* Dada la función  $k_X(\tau)$  se puede obtener la función de densidad de  $X$  [2] con

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau x} k_X(\tau) d\tau. \quad (72)$$

Entonces, sustituyendo la función  $k_X(\tau)$ , se tiene

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau x} \cdot e^{-|\tau|} d\tau. \quad (73)$$

Se sabe que  $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ , entonces  $e^{i(-\tau x)} = \cos(-\tau x) + i \operatorname{sen}(-\tau x)$  y como la función  $\cos(x)$  es una función par, entonces  $\cos(-x) = \cos(x)$ . La función  $\operatorname{sen}(x)$  es una función impar, entonces  $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ . Entonces  $e^{i(-\tau x)} = \cos(\tau x) - i \operatorname{sen}(\tau x)$ , sustituyendo en la ecuación 73 se tiene que

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(\tau x) - i \operatorname{sen}(\tau x)) e^{-|\tau|} d\tau \quad (74)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau x) e^{-|\tau|} d\tau - i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(\tau x) e^{-|\tau|} d\tau \right]. \quad (75)$$

La función  $e^{-|\tau|}$ , se define como

$$e^{-|\tau|} = \begin{cases} e^{\tau} & \text{si } \tau \geq 0, \\ e^{-\tau} & \text{si } \tau < 0. \end{cases} \quad (76)$$

Entonces,

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{-\tau} \cos(\tau x) d\tau + \int_0^{\infty} e^{\tau} \cos(\tau x) d\tau - i \int_{-\infty}^0 e^{-\tau} \operatorname{sen}(\tau x) d\tau - i \int_0^{\infty} e^{\tau} \operatorname{sen}(\tau x) d\tau \right]. \quad (77)$$

Como la función coseno es una función par, se tiene

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\tau} \cos(\tau x) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-(\tau)} \cos(-\tau x) d\tau \quad (78)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{\tau} \cos(\tau x) d\tau. \quad (79)$$

Ya que la función seno es una función impar, se tiene

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\tau} \operatorname{sen}(\tau x) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-(\tau)} \operatorname{sen}(-\tau x) d\tau \quad (80)$$

$$= - \int_0^{\infty} e^{\tau} \operatorname{sen}(\tau x) d\tau. \quad (81)$$

Sustituyendo,

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \left( 2 \int_0^{\infty} e^{\tau} \cos(\tau x) d\tau \right) \quad (82)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{\tau} \cos(\tau x) d\tau. \quad (83)$$

La integral se resuelve por partes haciendo  $u = \cos \tau x$  y  $dv = e^\tau d\tau$ , entonces  $du = -x \sin \tau x$  y  $v = e^\tau$ , por lo que

$$\int e^\tau \cos(\tau x) d\tau = e^\tau \cos \tau x + x \int e^\tau \sin \tau x d\tau. \quad (84)$$

Nuevamente, se realiza el proceso de integración por partes haciendo  $u = \sin \tau x$  y  $dv = e^\tau d\tau$ , entonces

$$\int e^\tau \cos(\tau x) d\tau = e^\tau \cos \tau x + x \left( \sin \tau x \cdot e^\tau - x \int e^\tau \cos \tau x d\tau \right) \quad (85)$$

$$= e^\tau \cos \tau x + x \sin \tau x \cdot e^\tau - x^2 \int e^\tau \cos \tau x d\tau \quad (86)$$

$$\int e^\tau \cos(\tau x) d\tau + x^2 \int e^\tau \cos(\tau x) d\tau = e^\tau \cos \tau x + x \sin \tau x \cdot e^\tau \quad (87)$$

$$(1 + x^2) \int e^\tau \cos(\tau x) d\tau = e^\tau \cos \tau x + x \sin \tau x \cdot e^\tau \quad (88)$$

$$\int e^\tau \cos(\tau x) d\tau = \frac{e^\tau \cos \tau x + x \sin \tau x \cdot e^\tau}{1 + x^2} \quad (89)$$

$$(90)$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación 83, se tiene

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{e^\tau \cos \tau x + x \sin \tau x \cdot e^\tau}{1 + x^2} \Big|_0^\infty \right) \quad (91)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( 0 - \frac{1}{1 + x^2} \right) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \quad (92)$$

□

**Ejercicio 5** (Ej. 10, pág. 402). Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un proceso de ensayos independientes con densidad

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (93)$$

- (a) Encuentra la media y la varianza de  $f(x)$ .
- (b) Encuentra la función generadora de momentos para  $X_1, S_n, A_n$  y  $S_n^*$ .
- (c) ¿Qué puedes decir acerca de la función generadora de momentos de  $S_n^*$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ?
- (d) ¿Qué puedes decir acerca de la función generadora de momentos de  $A_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ?

**Solución.** (a) Para encontrar la media y la varianza de  $f(x)$ , primero se calcula la función generadora de momentos de la variable aleatoria  $X_1$ . Por el teorema 10.4 [2], se tiene la relación

$$k_X(\tau) = g_X(i\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x} f_X(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x} e^{-|x|} dx. \quad (94)$$

En el ejercicio 4, se resolvió una integral similar, cuyo valor encontrado es

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau x} \cdot e^{-|\tau|} d\tau = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \quad (95)$$



Se le da la forma para obtener la integral deseada. Primero, se multiplica ambos lados por  $2\pi$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau x} \cdot e^{-|\tau|} d\tau = \frac{2}{(1+x^2)}, \quad (96)$$

después se cambia  $x$  por  $xi$ , entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau(xi)} \cdot e^{-|\tau|} d\tau = \frac{2}{(1+(xi)^2)} \quad (97)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau x} \cdot e^{-|\tau|} d\tau = \frac{2}{1-x^2}. \quad (98)$$

Cambiando  $x$  por  $t$  y  $\tau$  por  $x$ , se tiene que

$$g_X(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-|x|} dx \quad (99)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1-t^2} \quad (100)$$

$$= \frac{1}{1-t^2}. \quad (101)$$

Por lo tanto, la función generadora de momentos de  $X_1$  es la función  $g(t) = \frac{1}{1-t^2}$ .

La media se obtiene derivando la función generadora de momentos y evaluándola en  $t = 0$ ,

$$g'_X(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \quad (102)$$

$$g'_X(0) = \frac{2 \cdot 0}{(1-0^2)^2} = 0, \quad (103)$$

para la varianza se hace lo mismo, pero en la segunda derivada,

$$g''_X(t) = \frac{2}{(1-t^2)^2} + \frac{8t^2}{(1-t^2)^3} \quad (104)$$

$$g''_X(0) = \frac{2}{(1-0^2)^2} + \frac{8 \cdot 0^2}{(1-0^2)^3} = 2. \quad (105)$$

Por lo tanto, la media es igual a 0 y la varianza es igual a 2.

**(b)** La función generadora de momentos de  $X_1$  se obtuvo en el inciso anterior, y es  $g_X(t) = \frac{1}{1-t^2}$ . Entonces, se calcula la función generadora de momentos para  $S_n$ ,

$$g_{S_n}(t) = \mathbb{E}[e^{S_n t}] = \mathbb{E}[e^{(X_1 + \dots + X_n)t}] \quad (106)$$

$$= \mathbb{E}[e^{X_1 t + X_2 t + \dots + X_n t}] \quad (107)$$

$$= \mathbb{E}[e^{X_1 t} e^{X_2 t} \dots e^{X_n t}] \quad (108)$$

$$= \mathbb{E}[e^{X_1 t}] \dots \mathbb{E}[e^{X_n t}] \quad (109)$$

$$= g_{X_1}(t) \dots g_{X_n}(t) \quad (110)$$

$$= \left( \frac{1}{1-t^2} \right)^n. \quad (111)$$

De forma similar, se obtiene la función generadora de momentos para  $A_n = \frac{S_n}{n}$ ,

$$g_{A_n}(t) = g_{\frac{S_n}{n}}(t) \quad (112)$$

$$= \mathbb{E}[e^{\frac{S_n}{n}t}] \quad (113)$$

$$= \mathbb{E}[e^{S_n \frac{t}{n}}] \quad (114)$$

$$= g_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) \quad (115)$$

$$= \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{t}{n}\right)^2}\right)^n. \quad (116)$$

Para encontrar la función generadora de momentos de  $S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$  se realiza un proceso similar que el anterior. Primero se sustituye la media y la varianza encontrada en el inciso **(a)**, por lo que se tiene

$$S_n^* = \frac{S_n}{\sqrt{2n}}. \quad (117)$$

Entonces,

$$g_{S_n^*}(t) = g_{\frac{S_n}{\sqrt{2n}}}(t) = g_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right) = \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^2}\right)^n. \quad (118)$$

**(c)** Se calcula el límite de  $g_{S_n^*}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{S_n^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^2}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^2\right)^n}. \quad (119)$$

Se sabe que si una sucesión  $(a_n)$  converge a  $a$ , entonces  $(1 + \frac{a_n}{n})^n$  converge a  $e^a$  [1]. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^2\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{\frac{-t^2}{2}}{n}\right)\right)^n = e^{\frac{-t^2}{2}}. \quad (120)$$

Sustituyendo, el límite resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{S_n^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^2}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^2\right)^n} = \frac{1}{e^{\frac{-t^2}{2}}} = e^{\frac{t^2}{2}}. \quad (121)$$

**(d)** De forma similar, se calcula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{t}{n}\right)^2}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \left(\frac{t}{n}\right)^2\right)^n}, \quad (122)$$

donde,

$$1 - \left(\frac{t}{n}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\frac{-t^2}{n^2}}{n}\right) = 1 + \frac{\frac{-t^2}{n^2}}{n}. \quad (123)$$

La sucesión  $a_n = \frac{-t^2}{n}$  converge a 0, así que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \left( \frac{t}{n} \right)^2 \right)^n = e^0 = 1, \quad (124)$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 - \left( \frac{t}{n} \right)^2} \right)^n = 1. \quad (125)$$

□

## Referencias

- [1] George Casella and Roger L. Berger. *Statistical inference*. Thomson Learning, 2nd ed edition, 2002.
- [2] Charles M. Grinstead and J. Laurie Snell. *Introduction to Probability*. 2006.
- [3] Wolfram Research Inc. Wolfram Alpha. Champaign, IL, 2019.