Teorema del límite central

Fabiola Vázquez

8 de diciembre de 2020

---

1. Introducción

En el presente trabajo se busca mostrar algunas aplicaciones del teorema del límite central. Comenzamos por enunciar el teorema, sin su demostración, como aparece en el trabajo de Tsitsiklis y Bertsekas [1]:

Teorema 1. *Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media en común μ y varianza σ^2. Defina*

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}. \tag{1}$$

Entonces, para todo z,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(Z_n \leq z\right) = \Phi(z), \tag{2}$$

donde

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx. \tag{3}$$

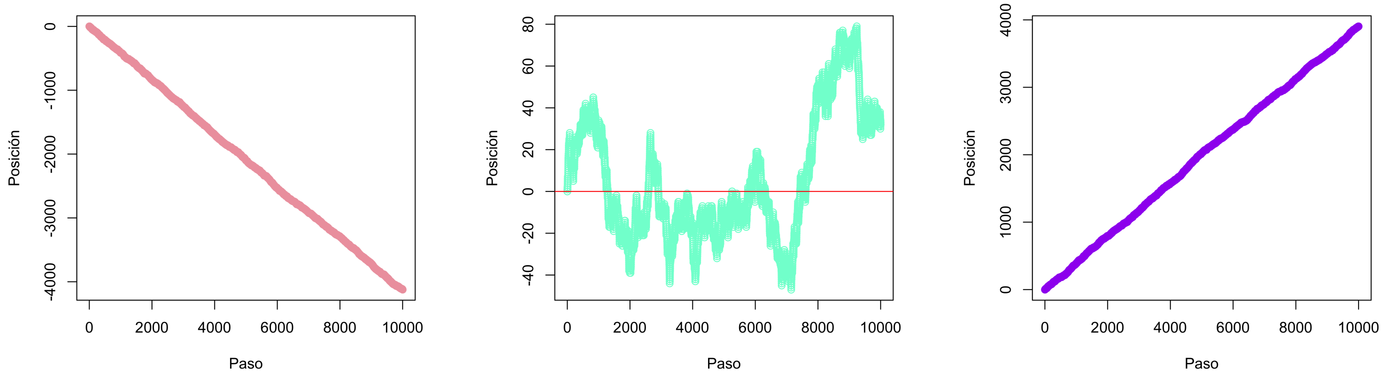
2. Fórmula de Stirling

La fórmula de Stirling es una útil manera de aproximar el valor de $n!$, y se puede obtener usando el teorema del límite central, como hace Ross [5]. La fórmula y su demostración se muestran a continuación:

Teorema 2 (Fórmula de Stirling)**.** $n! \approx n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\sqrt{2\pi}$.

Demostración. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables de Poisson independientes, cada una con media 1. Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, y observe que la media y varianza de S_n son ambas iguales a n. Entonces,

$$\begin{aligned}
P\left(S_n = n\right) &= P\left(n-1 < S_n \leq n\right) && (4)\\
&= P\left(-1/\sqrt{n} < (S_n - n)/\sqrt{n} \leq 0\right) && (5)\\
&\approx \int_{-1/\sqrt{n}}^{0} (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}\, dx \quad \text{(cuando n es grande, por el teorema del límite central)} && (6)\\
&\approx (2\pi)^{-1/2}(1/\sqrt{n}) && (7)\\
&= (2\pi n)^{-1/2}. && (8)
\end{aligned}$$



(a) Caminata aleatoria con $p = 0.3$. (b) Caminata aleatoria con $p = 0.5$. (c) Caminata aleatoria con $p = 0.7$.

Figura 1: Caminatas aleatorias con distintas probabilidades de transición p.

Pero dado que S_n es Poisson con media n, $P(S_n = n) = \frac{e^{-n}n^n}{n!}$, así que para n suficientemente grande se tendrá

$$\frac{e^{-n}n^n}{n!} \approx (2\pi n)^{-1/2}, \tag{9}$$

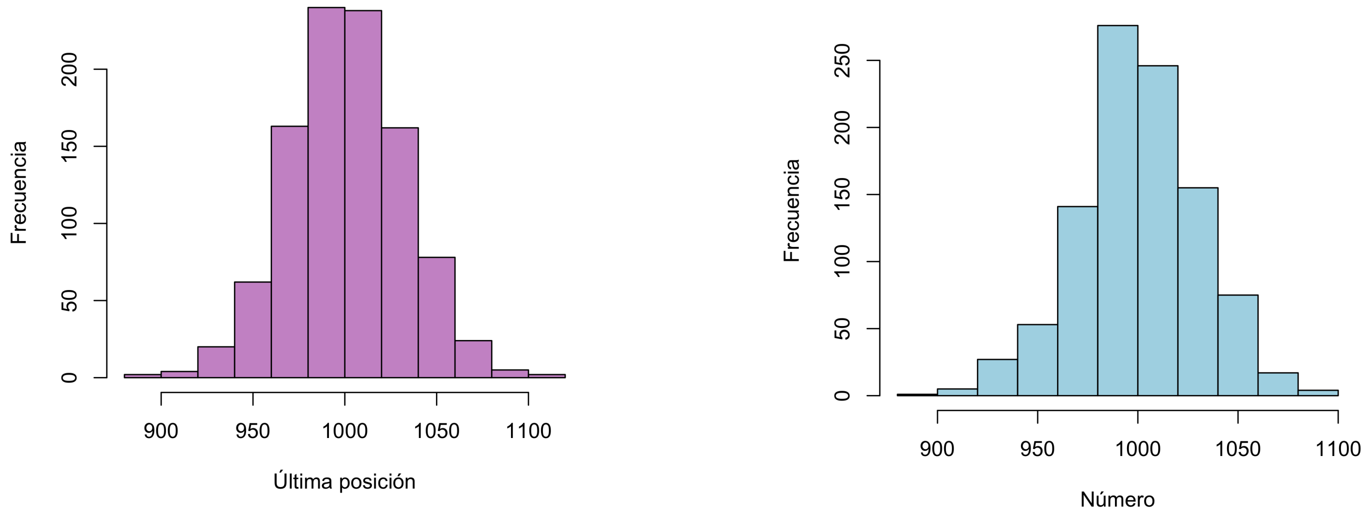
lo cuál es equivalente a la fórmula de Stirling. $\square$

3. Caminatas aleatorias

Una caminata aleatoria es un proceso estocástico que describe el movimiento aleatorio de un objeto o partícula. Considere una caminata aleatoria en los enteros. Esto es, empezando en algún entero (cero, por conveniencia), cambiamos de posición hacia la derecha o izquierda con probabilidades p y $1-p$ respectivamente. Al valor p se le suele llamar probabilidad de transición. Cuando $p = 1/2$, esta caminata se dice simétrica. Usando la fórmula de Stirling, Ross [5] demuestra que la caminata aleatoria en los enteros regresará un número infinito de veces a su estado inicial si y solo si es simétrica. Un resultado similar se obtiene para una caminata aleatoria simétrica en dos dimensiones, es decir, en la retícula $\mathbb{Z}^2$ con $p = 1/4$ para cualquier dirección. En la figura 1 se muestra la simulación de algunas caminatas aleatorias en los enteros para distintos valores p. El experimento se realizó en el software R [3] en un cuaderno de Jupyter [2].

3.1. Teorema del límite central para caminatas aleatorias

Se considera un caso más general, donde el movimiento no está restringido a los enteros, si no a la recta real. En cada paso k, la partícula se desplaza x_k unidades, donde $\{x_k\}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. El teorema de límite central para caminatas aleatorias [4] nos dice que, si $\mathbb{E}[x_k] < \infty$ y $\mathbb{E}[x_k^2] < \infty$, la posición x después de N pasos tendrá una distribución normal con media $N\mu$ y varianza $N\sigma^2$, donde cada desplazamiento x_k tiene media μ y varianza σ^2. Se realiza una simulación para ejemplificar este teorema. Se simulan mil pasos de una caminata aleatoria cuyos desplazamientos siguen una distribución exponencial con tasa $\lambda = 1$, misma que tiene media y varianza 1. Se repite el experimento mil veces, y se analiza la distribución de la última posición en cada caminata, cuyos resultados se muestran en la figura 2. En la figura 2a se muestra el histograma de la última posición de la caminata, mientras que la figura 2b se muestra el histograma de números



(a) Histograma de la posición de una caminata aleatoria después de mil pasos, con desplazamientos $x \sim \mathrm{Exp}(1)$.

(b) Histograma de mil números con distribución $\mathrm{N}(1000, \sqrt{1000})$.

Figura 2: Comparación de histogramas de números normales y última posición de una caminata aleatoria.

con distribución normal $\mathrm{N}(1000, \sqrt{1000})$. Además de la similitud observada gráficamente, se hizo una prueba de normalidad Shapiro-Wilk, donde los valores de la última posición obtuvieron un valor p de 0.8997.

Referencias

[1] Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis. *Introduction to probability*. Optimization and computation series. Athena Scientific, 2nd edition, 2008.

[2] Thomas Kluyver, Benjamin Ragan-Kelley, Fernando Pérez, Brian Granger, Matthias Bussonnier, Jonathan Frederic, Kyle Kelley, Jessica Hamrick, Jason Grout, Sylvain Corlay, et al. Jupyter notebooks—a publishing format for reproducible computational workflows. In *Positioning and Power in Academic Publishing: Players, Agents and Agendas: Proceedings of the 20th International Conference on Electronic Publishing*, page 87. IOS Press, 2016.

[3] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2020.

[4] Sid Redner. Random walks tutorial: Central limit theorem 1.

[5] Sheldon M. Ross. *Introduction to probability models*. Harcourt/Academic Press, 7th ed edition, 2000.