Ley de los grandes números

Fabiola Vázquez

1 de diciembre de 2020

1. Introducción

En el presente trabajo se aborda la ley de los grandes números. Primero, se presentan algunos resultados teóricos preliminares, seguido de la demostración [2] de la ley de los grandes números. Así mismo, se enuncia la ley fuerte de los grandes números. Finalmente, se habla del método de Monte-Carlo como una aplicación de los resultados teóricos previos.

2. Ley de los grandes números

Teorema 1. *Si X es una variable aleatoria no negativa, entonces para $\varepsilon > 0$ se tiene que*

$$P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}. \tag{1}$$

Teorema 2. *Si X es una variable aleatoria no negativa, entonces, para todo $\varepsilon > 0$ y para todo entero positivo n, se tiene*

$$P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X^n]}{\varepsilon^n}. \tag{2}$$

Demostración. Se considera la desigualdad

$$X \geqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Elevando ambos lados de la desigualdad a la potencia n, se tiene que

$$X^n \geqslant \varepsilon^n. \tag{4}$$

Entonces, es claro que

$$P(X \geqslant \varepsilon) = P(X^n \geqslant \varepsilon^n), \tag{5}$$

donde X^n es una variable aleatoria no negativa, ya que X es no negativa. Por el teorema anterior, se tiene que

$$P(X^n \geqslant \varepsilon^n) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X^n]}{\varepsilon^n}. \tag{6}$$

Por lo tanto,

$$P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}[X^n]}{\varepsilon^n}. \tag{7}$$

□

Teorema 3 (Desigualdad de Chebyshev)**.** *Sea X una variable aleatoria discreta con valor esperado $\mathbb{E}[X] = \mu$, y sea $\varepsilon > 0$ cualquier número real positivo. Entonces,*

$$P(|X - \mu| \leqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\operatorname{Var}[X]}{\varepsilon^2} \tag{8}$$

Demostración. Se considera la variable aleatoria $|X - \mathbb{E}[X]|$ y la ecuación 7 con $n = 2$, se tiene

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}[| X - \mathbb{E}[X] |^2]}{\varepsilon^2}. \tag{9}$$

Como $\operatorname{Var}[X] = (X - \mathbb{E}[X])^2$, se tiene que

$$P(|X - \mathbb{E}[X]| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\operatorname{Var}[X]}{\varepsilon^2}. \tag{10}$$

□

Teorema 4 (Ley de los grandes números [2])**.** *Sea $X_1, X_2, \ldots$ un proceso independiente de ensayos con valor esperado finito $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ y varianza finita $\sigma^2 = \operatorname{Var}[X_j]$. Sea $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$,*

$$P\left(\frac{S_n}{n} - \mu \geqslant \varepsilon\right) \longrightarrow 0 \tag{11}$$

cuando $n \longrightarrow \infty$. Equivalentemente,

$$P\left(\frac{S_n}{n} - \mu < \varepsilon\right) \longrightarrow 1 \tag{12}$$

cuando $n \longrightarrow \infty$.

Demostración. Dado que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes con las mismas distribuciones, se tiene que

$$\operatorname{Var}[S_n] = n\sigma^2, \tag{13}$$

y

$$\operatorname{Var}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{14}$$

Como $\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \mu$ y por la desigualdad de Chebyshev, se tiene que par cualquier $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}. \tag{15}$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0 \tag{16}$$

y $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right) \geqslant 0$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0. \tag{17}$$

Equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right) = 1. \tag{18}$$

□

Teorema 5 (Ley fuerte de los grandes números [1]). *Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tales que $\mathbb{E}[X_i] < \infty$. Para $N \geqslant 1$, se denota la media empírica de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ por*

$$\hat{S}_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i. \tag{19}$$

Entonces,

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} \hat{S}_N = \mathbb{E}[X_i]. \tag{20}$$

3. Método de Monte-Carlo

Una de las aplicaciones de la ley de los grandes números es la aproximación de integrales definidas [1]. Suponga que se tiene una función $f(x)$ y se busca el valor φ donde

$$\varphi = \int_0^1 f(x)dx. \tag{21}$$

Por la definición de valor esperado se sabe que

$$\varphi = \mathbb{E}[f(U)] \tag{22}$$

si $U \sim \text{Unif}(0,1)$. Si $U_1, \ldots, U_k$ son variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente en $(0,1)$, se sigue que $f(U_1), \ldots, f(U_k)$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con media φ. Entonces, por la ley fuerte de los grandes números, se sigue que, con probabilidad 1,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(U_i)}{n} \longrightarrow \mathbb{E}[f(U)] = \varphi \tag{23}$$

cuando $n \longrightarrow \infty$. Por lo tanto, se puede aproximar φ generando una cantidad grande de números pseudo aleatorios u_i y tomando como aproximación la media de los valores de $f(u_i)$. Este método para aproximar integrales es llamado el método de Monte-Carlo.

Para aproximar cualquier integral sobre el intervalo $[a,b]$ se puede modificar la integral que se tenía en el intervalo $[0,1]$ con el cambio de variable $x = a + (b-a)u$, es decir

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)u)du \approx \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(a+(b-a)u_i), \tag{24}$$

donde u_i son variables aleatorias uniformemente distribuidas en $[0,1]$.

Como ejemplo, se quiere estimar el valor de la integral,

$$\int_0^1 \frac{x}{e^x + e^{-x}}\, dx. \tag{25}$$

Para ello se genera una cantidad de números pseudo aleatorios, cada uno se evalúa en la función $f(x) = \frac{x}{e^x+e^{-x}}$, se suman los resultados y se divide entre la cantidad de números. Esto se realiza con el código 1 en el software R [3].

La figura 1 muestra como el valor obtenido con el método de Monte-Carlo se aproxima al valor real (línea roja) cuando la cantidad de números pseudo aleatorios aumenta.

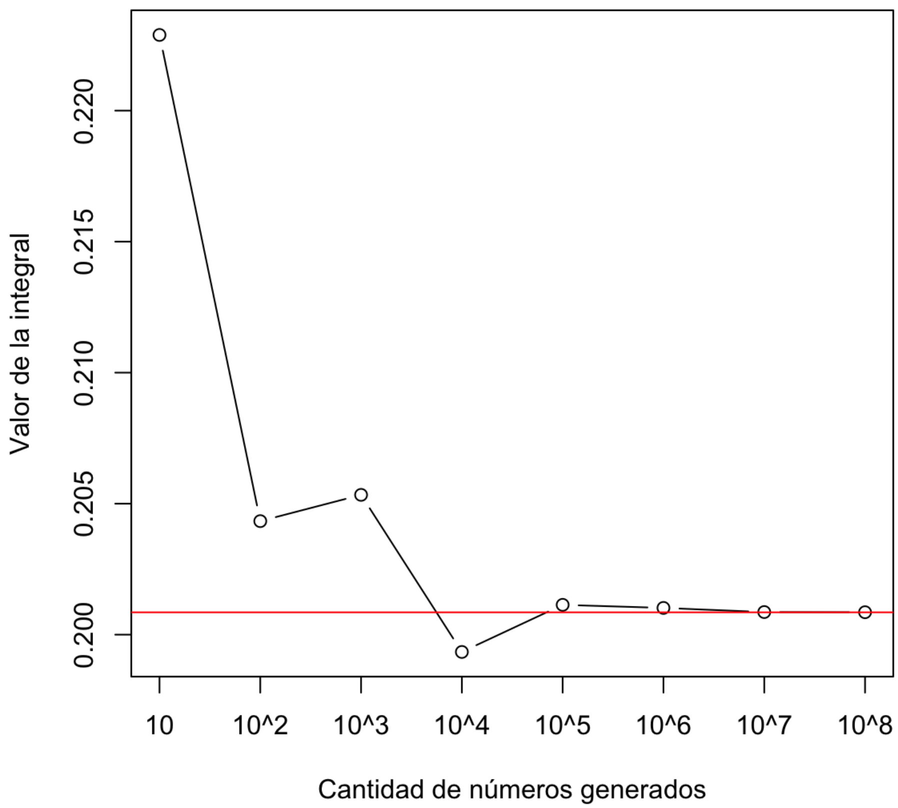

Figura 1: Aproximación de la integral 25 mediante el método de Monte-Carlo.

```
f <- function(x) { return(x/(exp(x)+exp(-x)) }

mc.integral <- function(f, cuantos){
    A <- runif(cuantos)
    return(sum(f(A))/cuantos)
}
```

Código 1: Función para aproximar una integral con el método de Monte-Carlo.

Referencias

[1] Carl Graham and Denis Talay. *Stochastic Simulation and Monte Carlo Methods*. Springer.

[2] Charles M. Grinstead and J. Laurie Snell. *Introduction to Probability*. 2006.

[3] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2020.