Berechnung der Schallausbreitungsdauer für beliebige Bewegungsbahnkurven mittels numerischer Lösungsverfahren

Frank Wefers

HEAD acoustics GmbH, 52134 Herzogenrath, E-Mail: Frank.Wefers@head-acoustics.de

Einleitung

Für die Simulation und Auralisierung von Schallfeldern mit schnellen bewegten Schallquellen und Hörern (wie z.B. Verkehrssimulationen) ist die Schallausbreitungsdauer $\tau(t)$ von fundamentaler Bedeutung: Die Kenntnis ihrer ermöglicht eine physikalisch korrekte Berücksichtigung aller Einflussfaktoren zu deren tatsächlichen Wirkzeitpunkten (z.B. die Richtcharakteristik zur Abstrahlzeit, das Medium entlang der Ausbreitungspfade und die Richtung des Schalleinfalls zum Empfangszeit). $\tau(t)$ stellt sich als implizite Lösung einer nichtlinearen vektorwertigen Gleichung dar. Für einfache theoretische Fälle, wie z.B. geradlinige Bewegungen mit konstanten Geschwindigkeiten, existieren geschlossene Lösungen. Praktische Anwendungen erfordern allerdings die Ausbreitungsdauer für beliebige Bewegungsbahnkurven zu bestimmen, deren zukünftiger Verlauf in Echtzeitanwendungen unbekannt ist. Versuche hierfür analytische Lösungen ausgehend von stückweise definierten Trajektorien waren nicht erfolgreich.

Dieser Beitrag untersucht einen alternativen Ansatz und erörtert, wie die Bestimmung der Schallausbreitungsdauer auf ein Nullstellenproblem reduziert und mittels numerischer Verfahren gelöst werden kann. Diese Methode ist kompatibel mit beliebigen Bewegungsmodellen (z.B. Spline-Trajektorien) und sowohl offline als auch unter Echtzeitbedingungen anwendbar. Der Genauigkeit und der notwendige Rechenaufwand wird am Beispiel der Kurvenfahrt eines Fahrzeugs untersucht.

Schallausbreitung

Betrachtet werde eine Schallquelle S und ein Empfänger (Hörer) R, welche sich auf Bahnkurven $\vec{r}_{\mathrm{S}}(t), \vec{r}_{\mathrm{R}}(t)$ bewegen. Diese Trajektorien können einen beliebigen Verlauf haben. Es wird lediglich gefordert das sie folgenden zwei Bedingungen genügen: Erstens verweilen Quelle und Hörer zu einer beliebigen Zeit t niemals am gleichen Ort, d.h. $\forall t\colon \|\vec{r}_{\mathrm{R}}(t) - \vec{r}_{\mathrm{S}}(t)\| > 0$. Und zweitens werden nur Bewegungen welche langsamer als die Schallgeschwindigkeit c sind betrachtet, d.h. solche, welche sich mit den Mitteln der linearen Akustik beschreiben und simulieren lassen. Daher muss für die Geschwindigkeiten der Objekte entlang ihrer Pfade gelten $\forall t\colon \partial/\partial t\|\vec{r}_{\mathrm{S}}(t)\|$, $\partial/\partial t\|\vec{r}_{\mathrm{R}}(t)\| < c$.

In einem homogenen, ruhenden Medium ergibt sich für die Schallausbreitungsdauer $\tau(t)$ für die Wellenfront, welche zur Zeit t observiert wird folgende Bedingung [1]

$$\|\vec{r}_{\mathrm{R}}(t) - \vec{r}_{\mathrm{S}}(t-\tau(t))\| = c\tau(t) \tag{1}$$

Der Term $t-\tau(t)$ entspricht hierbei dem Zeitpunkt der Abstrahlung der zur Zeit t beim Empfänger eintreffenden Wellenfront und wird auch als *retardierte Zeit* bezeichnet. Die Quelle regt die betrachtete Wellenfront also an der Position $\vec{r}_{\mathrm{S}}(t-\tau(t))$ an. Gleichung (1) sagt also aus, dass der örtliche Abstand zwischen Anregungs- und Empfangspunkt genau der Ausbreitungsdauer multipliziert mit der Schallgeschwindigkeit c entsprechen muss. Dies gilt nur in homogenen, adiabatischen Medien in Ruhelage.

Eine Echtzeitauralisierung berechnet üblicherweise für jeden generierten Block von B Ausgabesamples die Ausbreitungsdauer $\tau(t)$ zur Simulationszeit t und stellt diese an einem variablen Laufzeitglied ein [2, 3]. Die Berechnung von $\tau(t)$ wird unter anderem dadurch erschwert, dass $\tau(t)$ sowohl auf der rechten Seite der Gleichung (1), als auch innerhalb der Norm auftritt auf der linken Seite auftritt. Unabhängig von den Funktionen $\vec{r}_{\mathrm{S}}(t), \vec{r}_{\mathrm{R}}(t)$ muss also mindestens eine quadratische Gleichung gelöst werden um $\tau(t)$ zu bestimmen. Analytische Lösungen existieren für einfache Fälle, wie z.B. geradlinige Bewegungen mit konstanten Geschwindigkeiten [2, 3]. Jedoch sind diese in der Regel zu einfache Modelle und schränken mögliche Simulation stark ein. Es ist gegenwärtig nicht bekannt, ob und wie sich $\tau(t)$ für stückweise definierte Trajektorien mittels Gleichung (1) analytisch bestimmen lässt. Ziel dieses Beitrages ist daher die Bestimmung der Ausbreitungsdauer für beliebige Trajektorien mit variablen Parametern (Richtung, Geschwindigkeit, Beschleunigung, usw.). Um solche zu beschreiben haben sich in der Virtuellen Realität zeitdiskrete Positionsdaten etabliert. Durch Interpolation werden hieraus zeitkontinuierliche Funktionen $\vec{r}_{\mathrm{S}}(t), \vec{r}_{\mathrm{R}}(t)$ gewonnen, welche für die Berechnung von $\tau(t)$ zwingend erforderlich sind. Catmull-Rom-Splines [4] aus der Computeranimation sind für die Simulation der Akustik sehr gut geeignet [5].

Nullstellenproblem

Zunächst formen wir Gl. (1) in ein Nullstellenproblem um. Hierzu wird $c\tau$ auf beiden Seiten subtrahiert und die resultierende linke Seite als Funktion $f(\tau)$über τ interpretiert

$$f(\tau) := \|\vec{r}_{\mathrm{R}}(t) - \vec{r}_{\mathrm{S}}(t-\tau)\| - c\tau \stackrel{!}{=} 0 \tag{2}$$

Eine solche Funktion $f(\tau)$ wird jeweils für eine fest vorgegebene Zeit t betrachtet, d.h. $\vec{r}_{\mathrm{R}}(t)$ in Gl. (2) ist konstant. Als korrekte Ausbreitungsdauer ergibt sich dann jenes τ, welches die Funktion zu Null setzt $f(\tau) = 0$. Mit numerischen Verfahren lässt sich diese Nullstelle bestimmen. Für die Wahl einer geeigneten Methode sind die Eigenschaften der Funktion $f(\tau)$ maßgeblich, welche folgend diskutiert werden.

Aus den eingangs geforderten Eigenschaften folgt das $f(0) := \|\vec{r}_\mathrm{R}(t) - \vec{r}_\mathrm{S}(t))\| > 0$ positiv ist. Innerhalb der Dauer $\tau(t)$ der Schallausbreitung bewegt sich die Quelle höchstens mit einer Maximalgeschwindigkeit von $v_\mathrm{max} < c$ kleiner der Schallgeschwindigkeit. Damit folgt nach der Dreiecksungleichung das $f(\tau)$streng monoton fallend ist, da

$$\begin{aligned} & \|\vec{r}_\mathrm{R}(t) - \vec{r}_\mathrm{S}(t-\tau)\| && \leq && \|\vec{r}_\mathrm{R}(t) - \vec{r}_\mathrm{S}(t)\| + \\ & && && \|\vec{r}_\mathrm{S}(t-\tau) - \vec{r}_\mathrm{S}(t)\| \\ \Rightarrow \quad & \mathrm{f}(\tau) + c\tau && \leq && \mathrm{f}(0) + \mathrm{v}_\mathrm{max}\tau \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{f}(\tau) && \leq && \underbrace{f(0)}_{>0 \text{ per def.}} - \underbrace{(c - v_\mathrm{max})}_{>0 \text{ per def.}}\tau \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass $f(\tau)$ immer genau eine einzelne Nullstelle hat. Für überschallschnelle Bewegungen in inhomogene Medien gilt dies nicht notwendigerweise.

Nullstellenverfahren

Da die gesuchte Nullstelle nicht mehrfach auftritt, entfallen zusätzliche Fallunterscheidungen und die Auswahl eines geeigneten numerischen Verfahrens kann hauptsächlich anhand des Rechenaufwandes erfolgen. Für eine Echtzeit-Auralisierung sollte dieser möglichst gering sein. Ein Überblick über gängige Nullstellensuchverfahren findet sich in [6]. Besonders interessant sind das klassische *Newton-Verfahren* sowie das *Sekantenverfahren*. Ersteres hat eine hohe Konvergenzordnung von 2, erfordert aber die Bestimmung der Ableitung $\mathrm{d}\tau(t)/\mathrm{d}t$ in den Iterationspunkten, was den Rechenaufwand erhöht. Hingegen konvergiert das Sekantenverfahren etwas langsamer (Ordnung ≈1.6). Es erfordert jedoch keine Berechnung der Ableitung, wodurch sein Rechenaufwand pro Iteration geringer ist als der des Newton-Verfahrens. Die numerischen Effizienz [6] ist damit beim Sekantenverfahren größer und es ist daher dem Newton-Verfahren zu bevorzugen.

Genauigkeit

Ein Nullstellenverfahren bestimmt nur eine Annäherung $\widetilde{\tau}(t) = \tau(t) + e(t)$ der tatsächlichen Ausbreitungsdauer $\tau(t)$. Mit steigender Anzahl an Iterationsschritten nimmt der numerische Restfehler $e(t)$ ab und die Nullstelle wird immer genauer ermittelt. Im Sinne des geringsten Rechenaufwandes sollen nur hinreichend viele Schritte gewählt werden, nicht aber mehr als benötigt. Numerische Fehler $e(t)$ führen zu zwei maßgeblichen Konsequenzen in der Auralisierung:

1. Die Schalllaufzeiten verschiedener Schallquellen zum Empfänger unterliegen einem relativen, fehlerinduzierten Phasenversatz $\Delta\phi$, welcher den summierten Gesamtschalldruckpegel L an der Empfängerposition beeinflusst.
2. Der Fehler $e(t)$ geht ebenfalls in die Ableitung $\mathrm{d}\tau(t)/\mathrm{d}t$ ein und beeinflusst dadurch das Frequenzverhältnis des Dopplereffektes, was sich im schlimmsten Fall durch hörbare Artefakte äußert.

Im folgenden wird daher die benötigte Genauigkeit anhand scharfer Kriterien quantitativ bestimmt. Fordert man, dass der maximale Pegelfehler ΔL zweier harmonischer Punktschallquellen gleicher Frequenz höchstens 0.5 dB betragen darf, so ist ein maximaler Phasenversatz von

$$\Delta\phi = \cos^{-1}\left(10^{\frac{-0.5}{20}}\right) \approx 0.861\,\mathrm{rad} \quad (\widehat{=} 30.6°) \tag{3}$$

erlaubt. Pro Ausbreitungspfad also die Hälfte dieses. Setzt man nun eine obere Grenzfrequenz von $f = 16\,\mathrm{kHz}$ an, ergibt sich ein maximaler Laufzeitfehler pro Quelle von

$$|e(t)| < \frac{\Delta\phi}{2 \cdot 2\pi f} \approx 2.66 \times 10^{-6}\,\mathrm{s} \tag{4}$$

Bei einer Abtastrate von f_s=44.1 kHz entspricht dies etwa 1/10 Sample.

Das Verhältnis zwischen abgestrahlter und beobachteter Frequenz (Dopplereffekt) ergibt sich aus $\tau(t)$ nach [1]

$$\frac{f_\mathrm{R}}{f_\mathrm{S}} = 1 - \frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

Im Falle des numerisch bestimmten $\tilde{\tau}(t)$ überlagert sich dieses Verhältnis mit der Zeitableitung des Fehlers $\mathrm{d}e(t)/\mathrm{d}t$

$$\frac{\widetilde{f}_\mathrm{R}}{f_\mathrm{S}} = 1 - \frac{\mathrm{d}\widetilde{\tau}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{f_\mathrm{R}}{f_\mathrm{S}} - \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

Aus den klassischen Formeln für Dopplereffekte [7] kann man folgende Extremwerte dieses Verhältnisses ermitteln: Bewegt sich die Quelle geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit $v = c/2$ auf den ruhenden Empfänger zu, ergibt sich ein Frequenzverhältnis von f_R/f_s=2. Reziprok ergibt sich das Verhältnis f_R/f_s=½, falls die Quelle ruht und sich der Empfänger mit $v = c/2$ von ihr auf gerader Linie entfernt. Fordert man eine maximale relative Frequenzabweichung von ±1 Ct (Faktor 1.000577), so dürfen die absoluten Abweichungen dieser Frequenzverhältnisse nicht größer als 0,000289 bzw. 0,001156 sein. Da der letztere Wert geringer ist, wird er im folgenden als Fehlerkriterium genutzt. Angenommen werde eine Echtzeit-Auralisierung mit geringer Latenz und einer Blocklänge von B=32 Samples bei einer Abtastrate von f_s=44.1 kHz. Die Auralisierung bestimmt $\widetilde{\tau}(t)$einmalig pro Block, also in Intervallen von dt = B/f_s = 0,725 ms. Die Ableitung des nun *zeitdiskreten* Fehlersignals $e(t)$ kann das abgeschätzt werden

$$\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \leq \frac{2\max|e(t)|}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

Hieraus folgt der betragsmäßig maximale erlaubte Fehler zu

$$\max|e(t)| \leq 0,001156 \cdot \frac{0,725\,\mathrm{ms}}{2} \approx 1.0475 \times 10^{-7}\,\mathrm{s} \tag{8}$$

Es zeigt sich also, dass die Ausbreitungsdauer $\tau(t)$ (ausgedrückt in Sekunden) mit einer Genauigkeit von acht Nachkommastellen bestimmt werden sollte, um Störeinflüsse zu vermeiden.

Evaluierung

Die numerische Komplexität des Verfahrens wurde anhand einer bewegten Quelle und eines ortsfesten Zuhörers untersucht. Voruntersuchungen zeigten, dass einfache analytischen Bewegungen (wie z.B. geradlinige Bewegungen mit konstanter Beschleunigung und Kurvenfahrten mit konstantem Lenkwinkel) keine besonderen Schwierigkeiten für die Nullstellensuche darstellen und diese sehr rasch konvergiert (ein bis zwei Iterationen). Daher wurde eine reale Fahrzeugtrajektorie verwendet, deren Parameter (Richtung, Geschwindigkeit, Beschleunigung, usw.) stark variieren. Ihr Verlauf ist in Abb. 1 gezeigt. Aus den zeitdiskreten GPS-Positionsdaten einer Testfahrt (Abtastrate 5 Hz) wurde mittels Catmull-Rom-Interpolation [4, 5] eine zeitkontinuierliche Trajektorie gewonnen. Betrachtet wurde eine Echtzeit-Auralisierung mit geringer Latenz, einer Abtastrate von 44100 Hz und einer Blocklänge von 128 Samples. Für eine Dauer von 50 s wurde die Ausbreitungsdauer $\tau(t)$ einzeln für jeden Block berechnet, insgesamt 50·44100/128 = 17227 mal. Für das Newton- und das Sekantenverfahren wurde die benötigte Anzahl Iterationen für acht Dezimalstellen Genauigkeit bestimmt. Als Startwert τ_0 für das Newtonverfahren diente die letztmalig ermittelte Ausbreitungsdauer. Als Initialwerte τ_0, τ_1 für das Sekantenverfahren wurde 0, sowie die letztmalig ermittelte Ausbreitungsdauer verwendet. Die im Newton-Verfahren benötigte Ableitung $\mathrm{d}\tau(t)/\mathrm{d}t$ wurde mittels finiter Zentraldifferenzen [6] in einer Umgebung $t \pm \epsilon$ mit $\epsilon = 10^{-8}\mathrm{s}$ bestimmt.

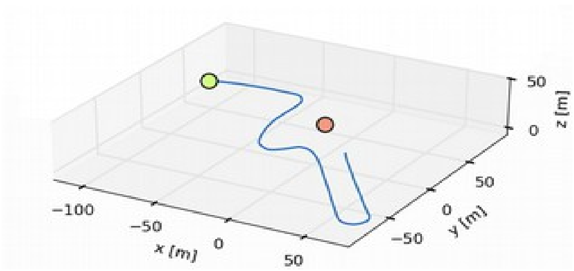
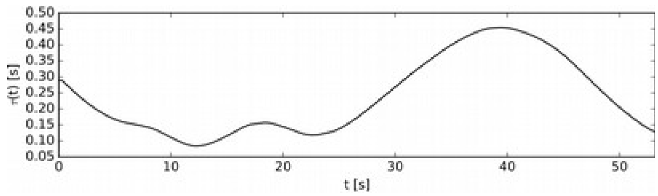
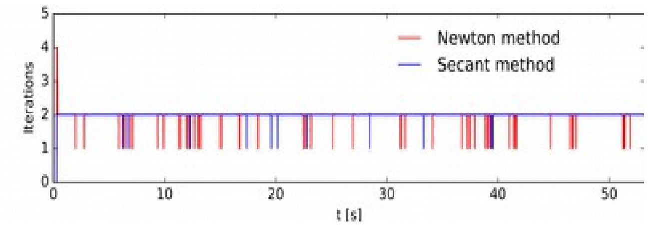


Abbildung 1: Testszene mit Vorbeifahrt.
Fahrzeugtrajektorie (blau), Quelle (grün), Hörer (rot)

Abb. 2(a) zeigt die Ausbreitungsdauer $\tau(t)$ über die Simulationszeit t und 2(b) die Anzahl benötigter Iterationen beider Verfahren. Für die Fahrzeugtrajektorie benötigte das Newtonverfahren im Mittel 1,984 und maximal 4 Iterationen zum Erreichen der geforderten Genauigkeit. Das Sekantenverfahren erforderte durchschnittlich 1,988 und maximal 2 Iterationen. Vergleicht man die Mittelwerte der Verfahren schneiden beide nahezu gleich gut ab. Das Sekantenverfahren hat aber einen geringeren Rechenaufwand (siehe Abschnitt Nullstellenverfahren). Bei einfachen analytischen Trajektorien zeigten sich Ergebnisse nahe denen der theoretischen Konvergenzordnungen. Hier benötigte das Newtonverfahren signifikant weniger Operationen, was bei der realen Trajektorie nicht galt. Die



(a) Ausbreitungsdauer $\tau(t)$



(b) Benötigte Anzahl Iterationsschritte

Abbildung 2: Ergebnisse für die Fahrzeugtrajektorie

Eigenschaften der Bewegung haben Einfluss auf den Rechenaufwand. Insgesamt kann aber festgehalten werden, das beide Verfahren sehr schnell konvergieren und die Bestimmung der Ausbreitungsdauer $\tau(t)$ im Vergleich zu anderen Operationen einer Auralisierung, wie z.B. variable Laufzeitglieder, IIR-Filter und Faltungen, einen sehr geringen Aufwand erfordert.

Zusammenfassung

Durch Formulierung als Nullstellenproblem können Gleichungen der Schallausbreitungsdauer für unterschallschnell bewegte Quellen und Hörer in homogenen, ruhenden Medien effizient gelöst werden. Die notwendige Genauigkeit liegt im Bereich von acht Dezimalstellen. Es zeigt sich dass auch für nicht-triviale dynamische Trajektorien, wie in betrachteten Fall der Vorbeifahrt, nur wenige Iterationsschritte (im Bereich von 2 bis 4) notwendig sind. Dadurch erlaubt der Ansatz die Schallausbreitungsdauer $\tau(t)$ für beliebige Bewegungen in Echtzeit zu bestimmen.

Quelltexte und Daten dieses Beitrags sind verfügbar unter `https://github.com/fwefers/publications-daga2017.git`

Literatur

[1] H. Strauss, „*Implementing Doppler Shifts for Virtual Auditory Environments*“ Audio Engineering Society Convention 104, 1998.

[2] F. Wefers, M. Vorländer „*Strategies for the realtime auralization of fast moving sound sources*“ Internoise 2015, San Francisco, 2015.

[3] A. K. Sahai, F. Wefers, S. Pick, E. Stumpf, M. Vorländer, T. Kuhlen, „*Interactive Simulation of Aircraft Noise in Aural and Visual Virtual Environments*“ Applied Acoustics, Vol. 101, pp. 24–38(14), 2015.

[4] E. Catmull and R. Rom, „*A class of local interpolating splines*“ Computer aided geometric design, 74:317–326, 1974.

[5] F. Wefers, M. Vorländer „*Bewegungsprädiktion in der Echtzeit-Auralisierung dynamischer Schallfelder*“, 41. Deutsche Jahrestagung für Akustik (DAGA 2015), pp. 1135–1138(4), Nürnberg, 2015.

[6] G. Engeln-Müllges, K. Niederdrenk, R. Wodicka, „*Numerik-Algorithmen*“, 10. Auflage, Springer, 2011.

[7] M. Vorländer, „*Auralization: Fundamentals of Acoustics, Modelling, Simulation, Algorithms and Acoustic Virtual Reality*“ Springer, 2011.