第2章

Introductory Combinatorics, 5E

排列与组合

本书的大部分读者都会有一些处理简单计数问题的经历，因此很可能熟悉“排列”和“组合”的概念。但是，有经验的计数者们知道，即使看似颇为简单的一些问题，也可能在它们的求解过程中出现诸多困难。众所周知，要学好数学必须去做数学，在这里尤其如此，所以认真的学生应该尝试着去解决大量的问题。

本章探讨四个一般的原理及它们所蕴涵的某些计数公式。而每一个原理又给出也要讨论的“补”原理。最后我们陈述这些原理在有限概率方面的应用。

2.1 四个基本的计数原理

第一个原理[⊖]是非常基础性的原理，它是全体等于其各部分之和这一原理的公式表示。

设 S 是集合。集合 S 的一个*划分*（partition）是满足下面条件的 S 的子集 S_1，S_2，…，S_m 的集合，即使得 S 的每一个元素恰好只属于这些子集中的一个子集：

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$$

$$S_i \cap S_j = \varnothing \quad (i \neq j)$$

因此，集合 S_1，S_2，…，S_m 是两两不相交的集合，它们的并集是 S。子集 S_1，S_2，…，S_m 称为
27 该划分的*部分*（part）。我们注意到，根据这个定义，划分的部分可以是空的，不过，考虑带有一个或多个空部分的划分通常没有意义。*集合 S 的对象数目记作* $|S|$，有时称之为 S 的*大小*（size）。

加法原理 *设集合 S 被划分成两两不相交的部分 S_1，S_2，…，S_m。则 S 的对象数目可以通过确定它的每一个部分的对象数目并如此相加而得到：*

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_m|$$

如果允许集合 S_1，S_2，…，S_m 相交，那么就可以使用第 6 章中的一个更深刻的原理，即容斥原理来计数 S 的对象数目。

在运用加法原理时，我们通常描述式地定义部分。换句话说，把问题分割成若干穷尽所有可能的互相排斥的情况。运用加法原理的技巧就是把集合 S 划分成可计数的“易处理部分”，即划分成我们已经能够计数的部分。但是这句陈述还需要具体说明。如果把 S 划分成太多的部分，那么我们就是在给自己找麻烦。例如，如果把 S 划分成一些部分，使得每部分只含有一个对象，那么应用加法原理就等同于计数各个部分的对象数目，而这基本上也等同于列出 S 的所有对象。因此，更适当的描述应该是，*运用加法原理的技巧是把集合 S 划分成少量的易处理部分*。

例子 假设想求出威斯康星大学麦迪逊分校所开设的不同课程的数目。我们按照列出这些课程的系来划分它们。*假设没有交叉列出*（当一门课程出现在两个以上的系的课程表中时，就出现了交叉列出的情况），则该大学开设的课程数目等于每个系开设的课程数目的和。 □

⊖ 根据 *The Random House College Dictionary*, *Revised Edition*（1997），原理是：（1）一个已被接受的或者专业的操作或者行为法则，（2）一个基本定律、公理或学说。这一节中我们所说的原理就是求解计数问题中的基本数学定律和重要操作法则。

用选择的术语给出加法原理的另一种描述如下：*如果有 p 种方法能够从一堆中选出一个物体，又有 q 种方法从另外一堆中选出一个物体，那么从这两堆中选出一个物体有 $p+q$ 种方法。*这种形式的加法原理显然可以推广到多于两堆的情况。

例子 一名学生想选修一门数学课程或一门生物课程，但两者不能同时都选。如果现有 4 门数学课程和 3 门生物课程供该学生选择，那么该学生有 $4+3=7$ 种方法选择一门课程。 □

第二个计数原理要稍微复杂一些。我们以两个集合为例陈述这个原理，但是同样它也可以推广到任意有限多个集合的情形。

乘法原理 *令 S 是对象的有序对 (a, b) 的集合，其中第一个对象 a 来自大小为 p 的一个集合，而对于对象 a 的每个选择，对象 b 有 q 种选择。于是，S 的大小为 $p\times q$：* 28

$$|S| = p\times q$$

实际上，乘法原理是加法原理的一个推论。设 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 是对象 a 的 p 个不同选择。我们把 S 划分成部分 $S_1, S_2, \cdots, S_p$，其中 S_i 是 S 中第一个对象为 $a_i(i=1, 2, \cdots, p)$ 的有序对的集合。每个 S_i 的大小为 q，根据加法原理有

$$|S| = |S_1|+|S_2|+\cdots+|S_p| = q+q+\cdots+q(p \text{个} q) = p\times q$$

上述推导过程中用到了整数的乘法就是重复的加法这样的基本事实。

乘法原理的第二种实用形式是：*如果第一项任务有 p 个结果，而不论第一项任务的结果如何，第二项任务都有 q 个结果，那么，这两项任务连续执行就有 $p\times q$ 个结果。*

例子 一名学生要修两门课程。第一门课可以安排在上午 3 个小时中的任一小时，第二门课则可以安排在下午 4 个小时的任一小时。该学生可能的课程安排数量是 $3\times4=12$。 □

上面已经提到，乘法原理可推广到 3，4 及任意有限多个集合的情形。下面给出 $n=3$ 和 $n=4$ 的例子，我们不针对 n 个集合的情形给出一般的公式。

例子 粉笔的长度有 3 种，颜色有 8 种，直径有 4 种。那么有多少种不同类型的粉笔？

为了确定某种类型的粉笔，我们要执行 3 项不同的任务（这 3 项任务的选取顺序不影响最后的结果）：选择一种长度，选择一种颜色，选择一种直径。根据乘法原理可知，共有 $3\times8\times4=96$ 种不同的粉笔。 □

例子 从 5 名男士、6 名女士、2 名男孩和 4 名女孩中选择一男一女一男孩和一女孩的方法共有 $5\times6\times2\times4=240$ 种。

原因是我们要执行 4 项不同的任务：选择一名男士（有 5 种方法），选择一名女士（有 6 种方法），选择一名男孩（有 2 种方法），选择一名女孩（有 4 种方法）。另外，如果要想求出选取一个人的方法数，那么答案则是 $5+6+2+4=17$ 种。这一结果来自于 4 堆的加法原理。 □

例子 确定下面这个数

$$3^4\times5^2\times11^7\times13^8$$

的正整数因子的个数。 29

3，5，11 和 13 都是素数。根据算术基本定理，每个因子都有

$$3^i\times5^j\times11^k\times13^l$$

的形式，其中 $0\leqslant i\leqslant4$，$0\leqslant j\leqslant2$，$0\leqslant k\leqslant7$，$0\leqslant l\leqslant8$。i 有 5 种选择，j 有 3 种选择，k 有 8 种选择，而 l 有 9 种选择。根据乘法原理，因子总数为

$$5\times3\times8\times9 = 1080$$ □

在乘法原理中，对象 b 的 q 种选择可以随着 a 的选择而变化。唯一的要求是，选择的个数应是*相同的* q 个，而不必是相同的选择。

例子 有多少各位数字互不相同且各位数字非零的两位数？

我们可以把一个两位数 ab 看成是一个有序对 (a, b)，其中 a 是十位数字而 b 是个位数字。

此问题要求的是这两个数字都不能是0，而且它们不相等。对于 a 来说有9种选择，即1，2，…，9。一旦选定 a，则 b 就有8种选择。如果 $a=1$，那么 b 的8种选择是2，3，…，9；如果 $a=2$，那么 b 的8种选择是1，3，…，9；等等。应用乘法原理的重要性在于，b 的选择总是8种。根据乘法原理，本题的答案为 $9\times8=72$。

我们还可以用另外的方法得到答案72。两位数字数共有90个：10，11，12，…，99。其中，有9个两位数含有0（即10，20，…，90），有9个两位数各位相等（即11，22，…，99）。因此，各位互不相同且非零的两位数字的个数等于 $90-9-9=72$。 □

上面的例子说明了两个想法。其一是，一个计数问题可能有多种方法求得答案。其二是，为了求出集合 A 的对象数目（本题是各位互不相同且各位非零的两位数集合），像下面这样做也许更容易些：先求包含 A 的一个更大集合 U（在上面的例子中，这个集合就是所有两位数的集合）的对象数目，然后再减去 U 中不属于 A 的对象数目（包含0或两个位上的数字相同的两位数）。我们把这个想法陈述为下面的第三个原理。

减法原理 令 A 是一个集合，而 U 是包含 A 的更大集合。设

$$\overline{A}=U\setminus A=\{x\in U:x\notin A\}$$

是 A 在 U 中的补（complement）。那么 A 中的对象数目 $|A|$ 由下列法则给出：

$$|A|=|U|-|\overline{A}|$$

在应用减法原理时，集合 U 通常是包含讨论中所有对象的某个自然集合（即所谓的泛集
30 （universal set））。只有在与计数 A 中对象数目相比更容易计数 U 和 A 的对象数目时，使用减法原理才会有效。

例子 计算机密码是由取自于数字0，1，2，…，9的数字和取自于小写字母 a，b，c，…，z 的字母组成的长度为6的字符串。有多少个有重复字符的计算机密码？

我们想要计算有重复字符的计算机密码的集合 A 中的对象数目。令 U 是所有计算机密码的集合。取 A 在 U 中的补，我们得到没有重复字符的计算机密码的集合 $\overline{A}$。应用两次乘法原理，可以得到

$$|U|=36^6=2\,176\,782\,336$$

和

$$|\overline{A}|=36\cdot35\cdot34\cdot33\cdot32\cdot31=1\,402\,410\,240$$

因此，有

$$|A|=|U|-|\overline{A}|=2\,176\,782\,336-1\,402\,410\,240=774\,372\,096$$ □

现在我们陈述本节最后一个原理。

除法原理 令 S 是一个有限集合，把它划分成 k 个部分使得每一部分包含的对象数目相同。于是，此划分中的部分的数目由下述公式给出：

$$k=\frac{|S|}{\text{在一个部分中的对象数目}}$$

因此，如果我们知道 S 中的对象数目以及各部分所含对象数目的共同值，就可以确定部分的数目。

例子 在一排鸽巢中有740只鸽子。如果每个鸽巢含有5只鸽子，那么鸽巢的数目为

$$\frac{740}{5}=148$$ □

除法原理更深奥的应用将在本书稍后给出。现在考虑下一个例子。

例子 你想送给Mollie大婶一篮水果。在你的冰箱里有6个橘子和9个苹果。唯一的要求是
31 篮子内必须至少有一个水果（即不容许水果篮是空的）。有多少种不同的水果篮？

一种计数水果篮数目的方法如下。首先，忽略篮子不能是空的要求。后面再把这个要求补进去。一篮水果与另一篮水果的区别是篮子内的橘子数和苹果数。对于橘子的数目有 7 种选择（0，1，…，6），而对于苹果的数目有 10 种选择（0，1，…，9）。根据乘法原理，有 $7\times10=70$ 种可能的不同水果篮。扣除空篮子这种可能，答案是 69。注意，如果不暂时忽略篮子非空的要求，那么苹果数目是 9 种还是 10 种选择要依赖于橘子数是不是 0，因此我们也就不能直接应用乘法原理来计算了。但是，还有下面的另一种解法。把这些非空水果篮划分成两个部分 S_1 和 S_2，其中 S_1 是没有橘子的那些水果篮，S_2 是至少装有一个橘子的那些水果篮。S_1 的大小是 9（1，2，…，9 个苹果），S_2 的大小根据上面的推理为 $6\times10=60$。由加法原理可知，可能的水果篮的数目是 $9+60=69$。 □

在前面的例子中我们做了一个含蓄的假设，现在应该把它公开。在求解过程中，我们假设橘子与橘子之间没有区别，苹果与苹果之间也没有区别。于是，装一篮水果的关键不是哪些苹果和哪些橘子装进了篮子，而仅仅是每种水果的*数量*。如果我们在各个橘子之间和各个苹果之间加以区别（一个橘子是圆的，另一个有磕伤，第三个汁多等），那么篮子的数目就会增大。我们将在 3.5 节再回到这个例子中来。

在考察更多例子之前，我们先讨论一些一般的想法。

很多计数问题都可归类为下面的类型之一：

(1) 计数对象的有序排列的个数或对象的有序选择的个数

  a) 任何对象都不重复；

  b) 允许对象重复（但可能是有限制的）。

(2) 计数对象的无序排列数目或者对象的无序选择数目

  a) 任何对象都不重复；

  b) 允许对象重复（但可能是有限制的）。

有时候不区分是否允许对象重复，而区分是从集合还是从多重集合中进行选择也许会更方便。*多重集合*（multiset）除其成员不必不同外与集合一样[㊀]。例如，我们可以构建由三个 a，一个 b，两个 c 和四个 d 组成的多重集合 M。即，M 有 4 种不同类型的 10 个元素：类型 a 有 3 个，类型 b 有 1 个，类型 c 有 2 个，类型 d 有 4 个。通常我们这样给出多重集合：指出其中不同类型的元素出现的次数。因此，M 可以表示为 $\{3\cdot a, 1\cdot b, 2\cdot c, 4\cdot d\}$[㊁]。数 3，1，2 和 4 是多重集合 M 的*重复数*。集合是重复数皆等于 1 的多重集合。为了包含上面所列的情况 b)，即不限制各类型对象出现的次数（除受排列的大小的限制以外），我们允许有无限大的重复数[㊂]。于是，当一个多重集合的成员 a 和 c 有无穷大重复数，而 b 和 d 的重复数分别是 2 和 4 时，这个多重集合表示为 $\{\infty\cdot a, 2\cdot b, \infty\cdot c, 4\cdot d\}$。(1) 中考虑到顺序的放置或选择通常称为*排列*（permutation），而 (2) 中与顺序无关的放置或选择称为组合（combination）。下面两节中我们将开发若干集合及多重集合的排列数和组合数的通用公式。但是，并非所有的排列和组合问题都能够用这些公式解决。我们常常需要利用基本的加法原理、减法原理、乘法原理和除法原理来解决这些问题。 32

例子 在 1000 和 9999 之间有多少各位不相同的奇数？

在 1000 和 9999 之间的一个数就是 4 个数字的一个*有序*放置。因此，要求计数特定排列的集合。我们要做 4 种选择：个位数字、十位数字、百位数字以及千位数字。因为要计数的数是奇

㊀ 因此多重集合破坏了集合的一个重要的法则，即在集合中元素是不可重复的——它们或者在这个集合中或者不在这个集合中。集合 $\{a, a, b\}$ 与集合 $\{a, b\}$ 是同一个集合，但是作为多重集合它们却是不同的。

㊁ 如果我们想要遵守标准集合论的记法，就需要用有序对来指明多重集合 M，如 $\{(a, 3), (b, 1), (c, 2), (d, 4)\}$。

㊂ 不存在令我们担心的不同大小的无穷大的情况。

数，所以个位数字可以是 1，3，5，7，9 中的任一个。十位数字和百位数字可以是 0，1，…，9 中的任何一个，而千位数字可以是 1，2，…，9 中的任意一个。因此，个位数字有 5 种选择。因为各位数字要互不相同，所以不论个位数字选择的是什么，千位数字都有 8 种选择。于是，不论之前两位数字选择的是什么，百位数字都有 8 种选择，不论之前 3 位数字选择的是什么，十位数字都有 7 种选择。于是，根据乘法原理，本题的答案是 $5\times8\times8\times7=2240$。 □

假设在前面的例子中我们以相反的顺序进行选择：首先选千位数字，然后再选百位数字、十位数字和个位数字。千位数字有 9 种选择，然后百位数字有 9 种选择（因为可以使用数字 0），十位数字有 8 种选择，但是现在个位数字（必须是奇数）的选择必须依赖于前面的各个选择了。如果还没有选到奇数数字，那么个位数字的选择个数就是 5；如果选择了一个奇数，那么个位数字的选择个数就是 4；等等。这样一来，如果以相反的顺序进行选择，就不能应用乘法原理了。

33 从这个例子中我们学到两点。第一点是只要对一个任务的选择个数的答案用到“依赖于”（或类似的词语），那么就不能用乘法原理。第二点是如果一个任务的执行没有一个固定的顺序，那么通过改变任务的执行顺序，一个问题就可能变得更容易用乘法原理而得到解决。要牢记一个经验法则：优先选择约束性最强的选择。

例子 在 0 和 10 000 之间有多少个整数恰好有一位数字是 5?

令 S 为在 0 和 10 000 之间恰好有一位数字是 5 的整数的集合。

解法一：我们对 S 做如下划分：S_1 是 S 中的一位数的集合，S_2 是 S 中的两位数的集合，S_3 是 S 中的三位数的集合，S_4 是 S 中的四位数的集合。S 中没有五位数。显然，我们有

$$|S_1|=1$$

S_2 的数很自然地分成两种类型：(1) 个位数字是 5，(2) 十位数字是 5。第一种类型的数的数目是 8（十位数字既不能是 0 也不能是 5）。第二种类型的数的数目为 9（个位数字不能是 5）。因此，

$$|S_2|=8+9=17$$

用类似的推理我们得到

$$|S_3|=8\times9+8\times9+9\times9=225$$

以及

$$|S_4|=8\times9\times9+8\times9\times9+8\times9\times9+9\times9\times9=2673$$

因此

$$|S|=1+17+225+2673=2916$$

解法二：通过添加前导零（如 6 看作 0006，25 看作 0025，352 看作 0352），可以把 S 中的每一个数都当作 4 位数。现在我们根据数字 5 是位于第 1 位、第 2 位、第 3 位还是第 4 位而把 S 划分成 S_1'，S_2'，S_3' 和 S_4'。这 4 个集合中的每一个都含有 $9\times9\times9=729$ 个整数，从而 S 所含整数的数目等于

$$4\times729=2916$$ □

例子 由数字 1，1，1，3，8 可以构造出多少个不同的 5 位数?

这里要求我们计数一个多重集合的排列数，这个多重集合是第一种类型的对象有 3 个，第二种类型的对象有 1 个，第三种类型的对象有 1 个。实际上我们只有两种选择：数字 3 要放置在哪

34 个数位上（有 5 种选择），然后是数字 8 要放置在哪个数位上（有 4 种选择）。其余 3 个数位由 3 个 1 占据。根据乘法原理，答案是 $5\times4=20$。

如果所给定的 5 个数是 1，1，1，3，3，则答案就是 10，是上例的一半。 □

这些例子清楚地表明，精通加法原理和乘法原理对于成为专业计数专家是必不可少的。

2.2 集合的排列

令 r 是正整数。说到一个 n 元素集合 S 的 r 排列，我们理解为 n 个元素中的 r 个元素的有序放置。如果 $S=\{a, b, c\}$，那么 S 的 3 个 1 排列是

$$a \quad b \quad c$$

S 的 6 个 2 排列是

$$ab \quad ac \quad ba \quad bc \quad ca \quad cb$$

S 的 6 个 3 排列是

$$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cab \quad cba$$

集合 S 没有 4 排列，因为 S 的元素个数少于 4。

我们用 $P(n, r)$ 表示 n 元素集合的 r 排列的数目。如果 $r>n$，则 $P(n, r)=0$。显然，对每个正整数 n，$P(n, 1)=n$。n 元素集合 S 的 n 排列将更简单地称为 S 的排列或 n 个元素的排列。因此，集合 S 的一个排列就是以某种顺序出现的 S 的所有元素的一个列表。上面我们已经看到 $P(3, 1)=3$，$P(3, 2)=6$ 和 $P(3, 3)=6$。

定理 2.2.1 对于正整数 n 和 r，$r\leqslant n$，有

$$P(n,r) = n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)$$

证明 在构建 n 元素集合的 r 排列时，我们可以用 n 种方法选择第一项，不论第一项如何选出，都可以用 $n-1$ 种方法选择第二项，…，不论前 $r-1$ 项如何选出，都可以用 $n-(r-1)$ 种方法选择第 r 项。根据乘法原理，这 r 项可以用 $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)$ 种方法选出。 □

对于非负整数 n，我们定义 $n!$（读作 n 的阶乘）如下：

$$n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$$ 35

并约定 $0! =1$。于是可以写成

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

对于上面的 $n\geqslant 0$，我们定义 $P(n, 0)$ 等于 1，而这正与 $r=0$ 时的公式一致。n 个元素的排列数为

$$P(n,n) = \frac{n!}{0!} = n!$$

例子 使用字母 a，b，c，d，e 构造四字母“词”，其中每个字母最多使用一次，这样的“词”的数目等于 $P(5, 4)=\frac{5!}{(5-4)!}=120$。由这些字母构成的 5 字母词的数目是 $P(5, 5)=120$。 □

例子 “15 迷阵”由 15 个滑动方块组成，各方块分别标有数字 1 到 15，并把它们摆放在如图 2-1 所示的 4×4 方框内。该迷阵的挑战是从给定的初始位置把诸方块移动到任意指定的位置（这一挑战不是本问题要解决的课题）。这里的位置指的是在方框内这 15 个标有数字的方块的一种摆放方法，其中有一个方块是空的。本迷阵中位置的总数是多少（不考虑是否有可能从初始位置移动到此位置）？

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

图 2-1

这个问题等价于确定把数字 1，2，…，15 分配到 4×4 的 16 个方格中，并留出一个方格的方法数目。因为我们可以把数 16 分配到空白格中，因此该问题又等价于确定将 1，2，…，16 分配到 16 个方格的方法数目，而这正是 $P(16, 16)=16!$。

那么把数字 1，2，…，15 分配到 6×6 方格中，并留出 21 个空格的方法数目又是多少呢？这些分配方案对应于 36 个方格的 15 排列：对于将 1，2，…，15 分配到 36 个方格中的 15 个方

格的分配方案，我们把它与 36 个方格的 15 排列联系起来，首先放置标有数字 1 的方格，第二个放置的是标有 2 的方格，以此类推。因此分配方案的总数是 $P(36,15)=\frac{36!}{21!}$。 □

例子 将字母表中的 26 个字母排序，使得元音字母 a，e，i，o，u 中任意两个都不能连续

36 出现，这种排序方法的总数是多少？

该问题的解（像许多计数问题一样）一旦看出如何去做则可立刻得出。我们考虑要完成两个主要任务。第一个任务是决定如何排序辅音字母。总共有 21 个辅音字母，所以辅音字母的排列数是 21!。因为在我们最终的排列中，不能出现任意两个连续的元音字母，所以这些元音字母必须放在这些辅音字母前面、后面和它们中间的 22 个空位上。第二个任务是把这些元音字母放入这些位置上。对于 a 有 22 个位置，对于 e 有 21 个位置，i 有 20 个位置，o 有 19 个位置，u 有 18 个位置。就是说，完成第二个任务的方法数是

$$P(22,5)=\frac{22!}{17!}$$

根据乘法原理，有序摆放 26 个字母使得元音字母 a，e，i，o，u 中任意两个都不连续出现的方法数为

$$21!\times\frac{22!}{17!}$$ □

例子 取自 {1，2，…，9} 的所有 7 位数中有多少各位互不相同，且数字 5 和 6 不连续出现的 7 位数？

我们要计数集合 {1，2，…，9} 的某些 7 排列，并把这些 7 排列划分成 4 种类型：(1) 在 7 位数字中 5 和 6 均不出现；(2) 5 可以出现在某位置上，但 6 不出现；(3) 6 可以出现在某位置上，但 5 不出现；(4) 5 和 6 都出现在 7 位数字中。类型 (1) 是 {1，2，3，4，7，8，9} 的 7 排列，它们的总数是 $P(7,7)=7!=5040$。类型 (2) 的排列计数如下：数字 5 可以出现在 7 位数字中的任何数位上，其余 6 位数字是 {1，2，3，4，7，8，9} 的一个 6 排列。因此类型 (2) 的 7 位数有 $7P(7,6)=7(7!)=35\,280$ 个。类似地，我们看到类型 (3) 的 7 位数有 35 280 个。为了计数类型 (4) 的排列数目，我们把类型 (4) 划分成三部分：

第一位数字等于 5，所以第二位就不能等于 6：

$$\underline{\ 5\ }\quad\underline{\neq 6}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}$$

于是，放置数字 6 有 5 个位置。其他 5 个数字构成 7 位数字 {1，2，3，4，7，8，9} 的 5 排列。因此，该部分有

$$5\times P(7,5)=5\times\frac{7!}{2!}=12\,600$$

37 个 7 位数。

最后一位数字是 5，所以其前面的数位不能等于 6：

$$\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\neq 6}\quad\underline{\ 5\ }$$

通过类似于前面的论述，我们得到该部分也有 12 600 个 7 位数。

数字 5 出现在首尾之外的其他位置上：

$$\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\neq 6}\quad\underline{\ 5\ }\quad\underline{\neq 6}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}$$

被 5 占据的位置是中间 5 个位置中的任意一个位置。于是，6 的位置可用 4 种方法选择。其余 5 个数字构成 7 位数字 {1，2，3，4，7，8，9} 的一个 5 排列。因此此分类中的 7 位数有 $5\times4\times P(7,5)=50\,400$ 个。从而，类型 (4) 中有

$$2(12\,600)+50\,400=75\,600$$

个 7 位数。根据加法原理，本题答案为

$$5040+2(35\,280)+75\,600=151\,200$$

我们刚才给出的求解过程是这样实现的：把要计数的对象集合划分成易处理的部分，即我们能够计算其对象数目的部分，然后再应用加法原理而得到解。还有另外一种相对简单得多的做法，就是运用减法原理。考虑取自 {1，2，…，9} 的互不相同的整数而形成的 7 位数的全体的集合 T。则 T 的大小是

$$P(9,7)=\frac{9!}{2!}=181\,440$$

设 S 是 T 中 5 和 6 不能连续出现的 7 位数的全体；则补 $\overline{S}$ 就是 T 中 5 和 6 一定连续出现的 7 位数。我们希望确定 S 的大小。如果能够求出 $\overline{S}$ 的大小，那么根据减法原理，我们的问题就解决了。那么 $\overline{S}$ 中又有多少数呢？在 $\overline{S}$ 中，数字 5 和 6 连续出现。因此有 6 种方法放置数字 5 后面跟着数字 6，以及 6 种方法放置数字 6 后面跟着数字 5。剩余数字构造 {1，2，3，4，7，8，9} 的 5 排列。所以 $\overline{S}$ 的大小是

$$2\times 6\times P(7,5)=30\,240$$

于是，S 中有 181 440－30 240＝151 200 个 7 位数。□

我们刚刚考虑过的排列更恰当些应该叫做*线性排列* (linear permutation)。考虑把对象排成一条线。如果不把它们排成一条线，而是排成一个圆，那么排列的数目就要相应减少。思考这样一个问题：设 6 个孩子沿圆圈行进。他们能够以多少种不同的方式形成一个圆？因为孩子们在行 38
进中，因此重要的是他们彼此间的相对位置而不是他们自身的位置。因此，很自然就把两个循环排列看成是相同的，只要其中一个可以通过旋转与另一个重合，即通过一个圆周位移而得到另一个。每一个循环排列对应于 6 个线性排列。例如，下面的循环排列

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & & 6 \\ 3 & & 5 \\ & 4 & \end{array}$$

来自于下面的线性排列中的每一个：

$$\begin{array}{ccc} 123456 & 234561 & 345612 \\ 456123 & 561234 & 612345 \end{array}$$

把上面每一个排列的最后一位移到第一位之前就形成前面的循环排列。于是，6 个孩子的线性排列与 6 个孩子的循环排列之间的对应是 6 对 1。因此，为了求循环排列数目，我们把线性排列个数除以 6。因此 6 个孩子的循环排列数目是 $6!/6=5!$。

定理 2.2.2　*n 元素集合的循环 r 排列的数目是*

$$\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r\cdot(n-r)!}$$

特别地，n 个元素的循环排列的数目是 $(n-1)!$。

证明　上述段落基本上包含了本定理的证明，我们使用除法原理完成证明。能够把线性 r 排列的集合划分成若干部分，使得两个线性 r 排列对应于同一个循环 r 排列当且仅当这两个线性 r 排列在同一部分中。因此，循环 r 排列的数目就等于划分的部分的数目。由于每一个部分都含有 r 个线性 r 排列，因此，部分数目是

$$\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r\cdot(n-r)!}$$ □

注意，前面的论证之所以可行，是因为每一个部分都含有相同数目的 r 排列，这使得我们可以运用除法原理来确定部分的数目。例如，如果把一个含有 10 个对象的集合划分成大小分别为 39

2，4，4 的三个部分，那么就不能用 10 除以 2 或者 4 而得到部分的数目。

我们看一下另一个计数循环排列的方法：假设想要计算 A，B，C，D，E，F 的循环排列的数目（围绕一个桌子安排座位 A，B，C，D，E，F 的方法的数目）。因为可以自由地使人们围着桌子轮转，所以任何一个循环排列都可以转到使 A 处在一个固定的位置——我们把它看作是"桌头"：

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ D & & C \\ F & & B \\ & E & \end{array}$$

此时 A 是固定的，A，B，C，D，E，F 的循环排列就可以等同于 B，C，D，E，F 的线性排列（上图中的循环排列等同于线性排列 $DFEBC$）。而 B，C，D，E，F 的线性排列有 5！个，因此，A，B，C，D，E，F 的循环排列有 5！个。

当我们不能直接运用循环排列公式时，这样考虑循环排列还是有用的。

例子 10 个人要围坐一圆桌，其中有两人不愿彼此挨着就座，共有多少圆形座位设置方法？

我们用减法原理解决这个问题。设这 10 个人是 P_1，P_2，P_3，…，P_{10}，其中 P_1 和 P_2 是彼此不愿意坐在一起的两个人。考虑 9 个人 X，P_3，…，P_{10} 围坐圆桌的座位设置。共有 8！种这样的设置方法。如果在每一个座位设置方案中，我们都用 P_1，P_2 或 P_2，P_1 代替 X，那么都将得到 10 人的座位设置方案，而 P_1，P_2 彼此挨着就座。因此，P_1，P_2 不坐在一起的座位设置方法总数为 $9!-2\times 8!=7\times 8!$。

这个问题的另一种分析方法如下：第一个座位 P_1 在"桌头"的位置。那么 P_2 就不能在 P_1 两边的位置上。P_1 左边的人选有 8 个，P_1 右边的人选有 7 个，而其余的座位有 7！种方法坐上人。因此，P_1 和 P_2 不坐在一起的座位设置方法数目是

$$8\times 7\times 7! = 7\times 8! \qquad \square$$

如讨论循环排列之前那样，我们继续把"排列"当作"线性排列"。

40 **例子** 将 12 个不同的记号记在旋转的圆鼓上的方法的个数是 $P(12,12)/12=11!$。 □

例子 用 20 个不同颜色的念珠串成一条项链，能够做成多少不同的项链？

20 个念珠共有 20！种不同的排列。因为每条项链都可以旋转而不必改变念珠的排列，所以项链的数目最多为 $20!/20=19!$。又因为项链还可以翻转过来而念珠的排放未改动，因此项链的总数是 $19!/2$。 □

我们将在第 14 章中以更一般的方式计数循环排列和项链。

2.3 集合的组合（子集）

设 S 是 n 元素集合。集合 S 的一个组合通常表示集合 S 的元素的一个无序选择。这样一个选择的结果是 S 的元素构成的一个子集（subset）$A\subseteq S$。因此，S 的一个组合就是 S 的子集的一个选择。因此，术语组合和子集本质上是可以互换的，通常我们使用更熟悉的子集而不使用略显笨拙的组合，除非要强调选择的过程。

现在设 r 是非负整数。提到 n 元素集合 S 的一个 r 组合，我们把它理解为在 S 的 n 个对象中选取 r 个对象的一个无序选择。一个 r 组合的结果是 S 的一个 r 子集，即是由 S 的 n 个对象中的 r 个对象组成的子集。同样，我们通常使用"r 子集"而不是"r 组合"。

如果 $S=\{a,b,c,d\}$，那么

$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}$$

是 S 的 4 个 3 子集。我们用 $\binom{n}{r}$ 表示 n 元素集合的 r 子集的数目[⊖]。显然

$$\binom{n}{r}=0 \quad \text{如果 } r>n$$

还有

$$\binom{0}{r}=0 \quad \text{如果 } r>0$$

容易看出，对于每一个非负整数 n，下述事实成立：

$$\binom{n}{0}=1, \quad \binom{n}{1}=n, \quad \binom{n}{n}=1$$

特别地，$\binom{0}{0}=1$。下面的定理给出 r 子集数目的基本公式。 41

定理 2.3.1 对于 $0\leqslant r\leqslant n$，有

$$P(n,r)=r!\binom{n}{r}$$

因此

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

证明 令 S 是一个 n 元素集合。S 的每个 r 排列都恰由下面两个任务的执行结果而产生：

(1) 从 S 中选出 r 个元素。

(2) 以某种顺序摆放选出的 r 个元素。

根据定义，执行第一个任务的方法数目是数 $\binom{n}{r}$。执行第二个任务的方法数则是 $P(r, r)=r!$。根据乘法原理，我们有 $P(n, r)=r!\binom{n}{r}$。现在，使用公式 $P(n, r)=\frac{n!}{(n-r)!}$ 得到

$$\binom{n}{r}=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

□

例子 在平面上给出 25 个点使得没有 3 个点共线。这些点确定多少条直线？确定多少个三角形？

因为没有三个点在同一条直线上，而且每一对点确定唯一一条直线，所以确定的直线数目等于 25 元素集合的 2 子集数目，因此这个数是

$$\binom{25}{2}=\frac{25!}{2!23!}=300$$

类似地，每 3 个点确定唯一一个三角形，因此，所确定的三角形的个数是

$$\binom{25}{3}=\frac{25!}{3!22!}$$

□

例子 有 15 人选修了一门数学课程，但在给定的一天恰有 12 名学生听课。选出 12 名学生的不同方法数是

$$\binom{15}{12}=\frac{15!}{12!3!}$$

42

⊖ 除此之外，对这些数还有其他一些记法，如 $C(n, r)$，${}_nC_r$。

如果教室内有25个座位，那么这12名学生可能的就座的方法数目是$P(25, 12)=25!/13!$。因此，一位教师看到教室里12名学生的就座状态数是

$$\binom{15}{12}P(25,12)=\frac{15!25!}{12!3!13!}\qquad\square$$

例子 如果每个词包含3，4或5个元音，那么用字母表中的26个字母可以构造多少个8字母词？这一问题可以这样理解，在一个词中字母的使用次数没有限制。

我们根据词中所含元音个数并运用加法原理来计数词的数量。

首先，考虑含有3个元音的词。选择元音所占据的3个位置有$\binom{8}{3}$种方法；其余5个位置由辅音占据。元音的位置可由5^3种方式填充，辅音位置可由21^5种方式填充。因此，含有3个元音的词的数量是

$$\binom{8}{3}5^3 21^5=\frac{8!}{3!5!}5^3 21^5$$

使用类似的方法，我们可以看到含有4个元音的词的数量是

$$\binom{8}{4}5^4 21^4=\frac{8!}{4!4!}5^4 21^4$$

含有5个元音的词的数量是

$$\binom{8}{5}5^5 21^3=\frac{8!}{5!3!}5^5 21^3$$

因此，词的总数为

$$\frac{8!}{3!5!}5^3 21^5+\frac{8!}{4!4!}5^4 21^4+\frac{8!}{5!3!}5^5 21^3\qquad\square$$

下面的重要性质可以由定理2.3.1直接得出。

推论 2.3.2 对于$0\leqslant r\leqslant n$，有

43

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}\qquad\square$$

$\binom{n}{r}$有许多重要且便利的性质，我们将在第5章讨论其部分性质。现在只讨论两个基本性质。

定理 2.3.3（帕斯卡公式） 对于所有满足$1\leqslant k\leqslant n-1$的整数$n$和$k$，有

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

证明 证明这个等式的一个方法是把这些数的值都代入到定理2.3.1中，然后再看等式两边是否相等。我们把这一直接验证留给读者。

组合推理证明（combinatorial proof）如下所示：设S是n元素集合。我们指定S中的一个元素并把它记作x。设$S\setminus\{x\}$是从S中除去这个x后得到的集合。把S的k子集的集合X划分成两个部分A和B。在A中放入不包含x的所有k子集。在B中放入包含x的所有k子集。X的大小是$|X|=\binom{n}{k}$；因此，根据加法原理，有

$$\binom{n}{k}=|A|+|B|$$

A中的k子集正好是集合$S\setminus\{x\}$的$n-1$个元素的k子集；因此，A的大小是

$$|A|=\binom{n-1}{k}$$

而 B 中的 k 子集可以通过把元素 x 加到 $S\setminus\{x\}$ 的（$k-1$）子集中而得到。因此，B 的大小应该是

$$|B|=\binom{n-1}{k-1}$$

把上面两个公式结合起来，我们得到

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$ □

为了具体说明这个证明，设 $n=5$，$k=3$，$S=\{x, a, b, c, d\}$。于是 A 中的 S 的 3 子集是

$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}$$

上面这些集合是集合 $\{a, b, c, d\}$ 的 3 子集。B 中 S 的 3 子集是

$$\{x,a,b\},\{x,a,c\},\{x,a,d\},\{x,b,c\},\{x,b,d\},\{x,c,d\}$$

扣除上面这些集合中的元素 x 后，我们得到

$$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}$$ 44

它们是集合 $\{a, b, c, d\}$ 的 2 子集。因此

$$\binom{5}{3}=10=4+6=\binom{4}{3}+\binom{4}{2}$$

定理 2.3.4 对于 $n\geqslant0$，有

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

且这个共同值等于 n 元素集合的子集数量。

证明 下面我们通过用不同方法证明上面的等式两边计数了 n 元集合 S 的子集数量来证明这个定理。首先，我们发现 S 的每一个子集是相对于某个 $r=0, 1, 2, \cdots, n$ 的 r 子集。因为 $\binom{n}{r}$ 等于 S 的 r 子集数量，所以根据加法原理得

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$$

等于 S 的子集数量。

我们还可以这样计数 S 的子集数量：把一个子集的选择分解成 n 项任务：设 S 的元素是 x_1，x_2，…，x_n。在选择 S 的一个子集的过程中，对于 S 中 n 个元素中的每一个元素要作两种选择：x_1 或者进入当前这个子集，或者它不进入这个子集，x_2 或者进入这个子集，或者它不进入这个子集，…，x_n 或者进入这个子集或者不进入这个子集。因此，根据乘法原理，我们有 2^n 种方法得到 S 的一个子集。至此，我们证明了这两个计数相等，从而完成了证明。 □

定理 2.3.4 的证明具体说明了我们可以通过用两种不同方法计数一个集合的对象（上面的证明中，就是 n 元素集合的子集）并令它们相等，从而得到所需的等式。在组合数学中，这种“双计数”技术是非常强大的技术，我们将会看到它的其他应用的例子。

例子 前 n 个正整数的集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 的 2 子集数量是 $\binom{n}{2}$。根据这些 2 子集中所包含的最大整数对它们进行划分。对于每一个 $i=1, 2, \cdots, n$，以 i 为最大数的 2 子集的数量是 $i-1$（另一个整数可以是 1，2，…，$i-1$）。令这两个计数相等，我们得到下面等式

45
$$0+1+2+\cdots+(n-1)=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$ □

2.4 多重集合的排列

如果 S 是一个多重集合，那么 S 的一个 r 排列是 S 中 r 个对象的一个有序放置。如果 S 的对象总数是 n（重复对象计数在内），那么 S 的 n 排列也称为 S 的排列。例如，如果 $S=\{2\cdot a,\ 1\cdot b,\ 3\cdot c\}$，那么

$$acbc \qquad cbcc$$

都是 S 的 4 排列，而

$$abccca$$

是 S 的一个排列。多重集合 S 没有 7 排列，因为 $7>2+1+3=6$，即 7 大于集合 S 的对象个数。我们首先计算多重集合 S 的 r 排列的个数，其每一个重复数都是无限的。

定理 2.4.1 *设 S 是有 k 种不同类型对象的多重集合，每一个元素都有无限重复数。那么，S 的 r 排列的数目是 k^r。*

证明 在构造 S 的 r 排列的过程中，我们可以把第一项选择为 k 个类型中任意类型的一个对象。类似地，第二项可以是 k 个类型中任意类型的一个对象，等等。因为 S 的所有重复数都是无限的，所以任意一项的不同选择数量也总是 k，它不依赖于前面项的选择。根据乘法原理，r 项可以有 k^r 种选择方法。 □

这个定理的另一种描述是：k 个不同对象（每一个对象的供给是无穷的）的 r 排列数量等于 k^r。我们还注意到，如果 S 的 k 种不同类型的对象的重复数都至少是 r，那么定理也是成立的。重复数无限的假设是保证我们在构造 r 排列时不能用尽任何类型的对象的一种简单保证。

例子 最多有 4 位的三元数[⊖]的个数是多少？

这个问题的答案是多重集合 $\{\infty\cdot 0,\ \infty\cdot 1,\ \infty\cdot 2\}$ 或多重集合 $\{4\cdot 0,\ 4\cdot 1,\ 4\cdot 2\}$ 的 4 排列的个数。根据定理 2.4.1，这个数等于 $3^4=81$。 □

现在我们计数有 k 种不同类型的对象且有有限重复数的多重集合的排列。

定理 2.4.2 *设 S 是多重集合，它有 k 种不同类型的对象，且每一种类型的有限重复数分别是 $n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k$。设 S 的大小为 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$。则 S 的排列数目等于*

46
$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

证明 给定多重集合 S，它有 k 种类型对象，比如说 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$，且重复数分别是 $n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k$，对象总数 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$。我们想要这 n 个对象的排列数量。可以这样考虑这个问题。一共有 n 个位置，而我们想要在每一个位置放置 S 中的一个对象。首先，我们确定放置 a_1 的位置。因为在 S 中 a_1 的数量是 n_1，因此必须从 n 个位置的集合中取出 n_1 个位置的子集。这样做的方法数是 $\binom{n}{n_1}$。下一步，要确定放置 a_2 的位置。此时还剩下 $n-n_1$ 个位置，我们必须从中选取 n_2 个位置来。这样做的方法数量是 $\binom{n-n_1}{n_2}$。再接下来我们有 $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ 种方法为 a_3 选择位置。继续这样做下去，利用乘法原理，我们发现 S 的排列个数等于

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

⊖ 一个三元数（ternary numeral）或者三进制数是用 3 的幂表示一个数而得到的数。例如，$46=1\times 3^3+2\times 3^2+0\times 3^1+1\times 3^0$。所以 46 的三元数是 1201。

使用定理 2.3.1，我们看到上面这个数等于

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\cdots-n_k)!}$$

消去分子分母上的相同因子，上面的数化简成为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!0!}=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}$$ □

例子 词 MISSISSIPPI 中的字母的排列数是

$$\frac{11!}{1!4!4!2!}$$

因为这个数字等于多重集合 $\{1\cdot M, 4\cdot I, 4\cdot S, 2\cdot P\}$ 的排列数。 □

如果多重集合 S 只有两种类型的对象 a_1，a_2，且它们的重复数分别是 n_1 和 n_2，其中 $n=n_1+n_2$，那么按照定理 2.4.2，S 的排列数是

$$\frac{n!}{n_1!n_2!}=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}=\binom{n}{n_1}$$

因此，我们可以把 $\binom{n}{n_1}$ 看成是 n 对象集合的 n_1 子集的数量，还可以看成是一个有两种类型的对象且它们的重复数分别是 n_1 和 $n-n_1$ 的多重集合的排列个数。 47

在定理 2.4.2 中出现的数 $\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!}$ 还有另外一种解释。它涉及这样一个问题：把一个对象集合划分成指定大小的各个部分，其中这些部分都有指定给它们的标签。为了理解上面这段话的意思，我们给出下面的例子。

例子 考虑有 4 个对象的集合 $\{a, b, c, d\}$，把它划分成两个子集，每一个大小为 2。如果这两部分没有做标签，那么有 3 种不同的划分：

$$\{a,b\},\{c,d\};\quad \{a,c\},\{b,d\};\quad \{a,d\},\{b,c\}$$

现在假设给这些部分做上不同的标签（例如，红色和蓝色）。那么划分数量增大；实际上，有 6 个划分，因为我们要用两种方法给划分的每一部分标上红色和蓝色。例如，对于上面的划分 $\{a, b\}$，$\{c, d\}$，有

$$\text{红盒}\{a,b\},\quad \text{蓝盒}\{c,d\}$$

和

$$\text{蓝盒}\{a,b\},\quad \text{红盒}\{c,d\}$$ □

在一般情形下，我们可以用 B_1，B_2，…，B_k（看成是颜色 1，颜色 2，…，颜色 k）标记这些部分，并把这些部分想象成一些盒子。这时，下面定理成立。

定理 2.4.3 设 n 是正整数，并设 n_1，n_2，…，n_k 是正整数且 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$。把 n 对象集合划分成 k 个标有标签的盒子，且第 1 个盒子含有 n_1 个对象，第 2 个盒子含有 n_2 个对象，…，第 k 个盒子含有 n_k 个对象，这样的划分方法数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

如果这些盒子没有标签，且 $n_1=n_2=\cdots=n_k$，那么划分数等于

$$\frac{n!}{k!n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

证明 这一证明是乘法原理的直接应用。我们必须在满足大小限制的情况下选取哪些对象放进哪些盒子。首先，我们选取 n_1 个对象放入第 1 个盒子，然后从剩下的 $n-n_1$ 个对象中选取 n_2 个对象放入第 2 个盒子，然后从剩余的 $n-n_1-n_2$ 个对象中选取 n_3 个对象放入第 3 个盒子，…，最后

将 $n-n_1-\cdots-n_{k-1}=n_k$ 个对象放入第 k 个盒子。由乘法原理，进行这些选择的方法数为

48 $$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$$

同定理 2.4.2 的证明一样，上面这个数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

如果这些盒子没有标签，且 $n_1=n_2=\cdots=n_k$，那么这个结果就必须除以 $k!$。这是因为，同前面的例子一样，对于把这些对象分配到 k 个没有标签的盒子里的每一种方法，都有 $k!$ 种方法给这些盒子标上标签 1，2，…，k。因此，使用除法原理，我们发现没有标签盒子的划分的个数是

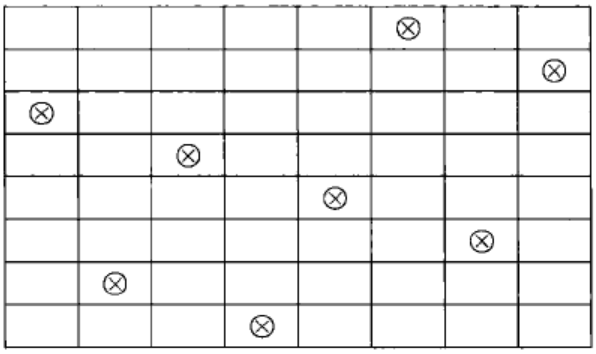
$$\frac{n!}{k!n_1!n_2!\cdots n_k!}$$ □

更加困难的划分计数问题就是划分的部分没有指定的大小，我们将在 8.2 节中研究这一类计数问题。

我们用一类例子结束本节，在本书其余部分将多次提到这些例子[⊖]。这类例子考虑的是国际象棋棋盘上的非攻击型车。为免除读者担心本书要求事先具有国际象棋的知识，我们在这里给出唯一需要知道的国际象棋知识：*两个车能够互相攻击当且仅当它们位于棋盘的同一行或同一列上*。除此之外，无需知道国际象棋的其他知识（且这些知识也于事无补）。因此，棋盘上非攻击型车的集合指的就是叫做“车”的那些棋子的集合，它们占据着棋盘上的一些方格，并且没有两个车位于同一行或同一列上。

例子 有多少种方法在 8×8 棋盘上放置 8 个非攻击型车？

在 8×8 棋盘上放置 8 个非攻击型车的例子如下：



我们给棋盘上每一个方格赋予一个坐标对 $(i,\ j)$。整数 i 指明这个方格所处的行，而整数 j
49 指明这个方格所处的列。因此 i，j 都是 1 和 8 之间的整数。因为这个棋盘是 8×8 的并且有 8 个不能相互攻击的车放在棋盘上，所以每一列一定只存在一个车。因此，这些车占据 8 个方格，其坐标是

$$(1,j_1),(2,j_2),\cdots,(8,j_8)$$

但是，每一列上也必须存在一个车，这使得 j_1，j_2，…，j_8 中没有两个是相等的。更准确地说，

$$j_1,j_2,\cdots,j_8$$

必须是 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 8\}$ 的一个排列。反过来，如果 j_1，j_2，…，j_8 是 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 8\}$ 的一个排列，那么把车放在坐标是 $(1,\ j_1)$，$(2,\ j_2)$，…，$(8,\ j_8)$ 的各个方格上，就得到棋盘上的 8 个非攻击型车。因此，8×8 棋盘上 8 个非攻击型车的集合与 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 8\}$ 的排列之间存在一一

⊖ 作者偏爱使用这种例子来解释诸多思想。

对应，因为 {1，2，…，8} 有 8! 个排列，所以，把 8 个车放到 8×8 棋盘上使得它们具有非攻击性的方法也有 8! 个。

在上面讨论中，我们实际上已经间接假设这些车彼此没有区别，即它们构成只有一种类型的 8 个对象的一个多重集合。因此，唯一重要的是车要占据哪些方格。如果我们有 8 个不同的车，比如，用 8 种不同的颜色分别给 8 个车着色，那么还要考虑在 8 个被占据的每一个方格里放的是哪个车。假设有 8 个不同颜色的车。在决定哪 8 个方格要被这些车占据后（8! 种可能），我们现在还要决定在每个所占据的方格上的车是什么颜色的？观察从第一行到第 8 行的这些车时我们看到 8 种颜色的一个排列。因此，决定了哪 8 个方格要被这些车占据之后（8! 种可能），就必须确定 8 种颜色的哪个排列（8! 种排列）。于是，在 8×8 棋盘上具有 8 种不同颜色的 8 个非攻击型车的放置方法数等于

$$8!8! = (8!)^2$$

现在假设不是有 8 个不颜色的车，而是有 1 个红（R）车、3 个蓝（B）车和 4 个黄（Y）车，而且还假设同颜色的车彼此没有区别[⊖]。现在，当我们从第 1 行到第 8 行观察这些车时，看到多重集合

$$\{1 \cdot \mathrm{R}, 3 \cdot \mathrm{B}, 4 \cdot \mathrm{Y}\}$$

的一个颜色排列。根据定理 2.4.2，这个多重集合的排列个数等于

$$\frac{8!}{1!3!4!}$$ 50

因此，在 8×8 棋盘上放置 1 个红车、3 个蓝车和 4 个黄车并使它们彼此不能互相攻击的方法数等于

$$8!\frac{8!}{1!3!4!} = \frac{(8!)^2}{1!3!4!}$$ □

前面例子中的推理具有相当的普遍性，直接导致下面的定理。

定理 2.4.4 *有 k 种颜色共 n 个车，第一种颜色有 n_1 个，第二种颜色有 n_2 个，…，第 k 种颜色有 n_k 个。把这些车放置在一个 $n \times n$ 的棋盘上使得车之间不能相互攻击的方法数等于*

$$n!\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} = \frac{(n!)^2}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

注意，如果这些车都有不同的颜色（即 $k=n$，$n_i=1$），那么上面的公式给出的答案就是 $(n!)^2$。如果这些车的颜色都相同（即 $k=1$，$n_1=n$），那么上面的公式给出的答案就是 $n!$。

设 S 是 n 元素多重集合，其重复数分别是 n_1，n_2，…，n_k，且 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$。定理 2.4.2 给出了求 S 的 n 排列数的简单公式。如果 $r<n$，一般来说，没有求 S 的 r 排列数的简单公式。尽管如此，可以利用生成函数技术进行求解，我们将在第 7 章对此加以讨论。在某些情况下，还是可以像下面的例子那样进行论证。

例子 考虑 3 种类型 9 个对象的多重集合 $S=\{3 \cdot a, 2 \cdot b, 4 \cdot c\}$。求 S 的 8 排列的个数。

S 的 8 排列可以被划分成 3 个部分：

（i）$\{2 \cdot a, 2 \cdot b, 4 \cdot c\}$ 的 8 排列数，有

$$\frac{8!}{2!2!4!} = 420$$

（ii）$\{3 \cdot a, 1 \cdot b, 4 \cdot c\}$ 的 8 排列数，有

$$\frac{8!}{3!1!4!} = 280$$

⊖ 换句话说，我们区分车的唯一方法就是根据它们的颜色。

（ⅲ）$\{3\cdot a,\ 2\cdot b,\ 3\cdot c\}$ 的 8 排列数，有

51 $$\frac{8!}{3!2!3!}=560$$

因此，S 的 8 排列的个数是

$$420+280+560=1260$$ □

2.5 多重集合的组合

如果 S 是多重集合，那么 S 的 r 组合是 S 中的 r 个对象的无序选择。因此，S 的一个 r 组合（更严格说来，是选择的结果）本身也是一个多重集合，它是一个大小为 r 的 S 的多重子集，或者简单说来，是一个多重 r 子集。如果 S 有 n 个对象，那么 S 只有一个 n 组合，即 S 自己。如果 S 含有 k 种不同类型的对象，那么 S 就有 k 个 1 组合。与集合的组合不同，通常我们使用组合（combination）而不是多重子集（submultiset）。

例子 设 $S=\{2\cdot a,\ 1\cdot b,\ 3\cdot c\}$，那么 S 的 3 组合是

$\{2\cdot a,1\cdot b\}$，$\{2\cdot a,1\cdot c\}$，$\{1\cdot a,1\cdot b,1\cdot c\}$，$\{1\cdot a,2\cdot c\}$，$\{1\cdot b,2\cdot c\}$，$\{3\cdot c\}$ □

我们首先计数多重集合的 r 组合数，设该多重集合中所有元素的重复数都是无限的（或者至少是 r）。

定理 2.5.1 *设 S 是有 k 种类型对象的多重集合，每种元素均具有无限的重复数。那么 S 的 r 组合的个数等于*

$$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$$

证明 设 S 的 k 种类型的对象是 a_1，a_2，…，a_k，使得

$$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$$

S 的任意 r 组合均呈 $\{x_1\cdot a_1,\ x_2\cdot a_2,\ \cdots,\ x_k\cdot a_k\}$ 的形式，其中 x_1，x_2，…，x_k 皆为非负整数，且 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$。反过来，每个满足 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$ 的非负整数序列 x_1，x_2，…，x_k 对应于 S 的一个 r 组合。因此，S 的 r 组合的个数等于方程

52 $$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$$

的解的个数，其中 x_1，x_2，…，x_k 是非负整数。我们证明，这些解的个数等于有两种不同类型对象且有 $r+k-1$ 个对象的多重集合

$$T=\{r\cdot 1,(k-1)\cdot *\}$$

的排列的个数[㊀]。给定 T 的一个排列，$k-1$ 个 $*$ 把 r 个 1 分成 k 组。设第一个 $*$ 的左边有 x_1 个 1，在第一个 $*$ 和第二个 $*$ 之间有 x_2 个 1，…，在最后一个 $*$ 号的右边有 x_k 个 1。于是，x_1，x_2，…，x_k 是满足 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$ 的非负整数。反之，给定非负整数 x_1，x_2，…，x_k，满足 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$，我们可以把上述步骤倒推并构造 T 的一个排列[㊁]。于是，多重集合 S 的 r 组合的个数等于多重集合 T 的排列的个数，由定理 2.4.2 可知它等于

$$\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!}=\binom{r+k-1}{r}$$ □

定理 2.5.1 的另一种表述方式是：在每个对象的供给是无限的情况下，k 个不同对象的 r 组合个数等于

㊀ 相当于长度为 $r+k-1$ 的 0 和 1 的序列个数，在这些序列中有 r 个 1 和 $k-1$ 个 0。

㊁ 例如，如果 $k=4$，$r=5$，则 $T=\{5\cdot 1,\ 3\cdot *\}$ 所给定的排列是 $*111**11$，这个排列对应的 $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ 的解为 $x_1=0$，$x_2=3$，$x_3=0$，$x_4=2$。

$$\binom{r+k-1}{r}$$

注意，S 的 k 个不同对象的重复数都至少是 r 时定理 2.5.1 仍然成立。

例子　一家面包店有 8 种炸面包圈。如果一盒内装有一打炸面包圈，那么能够装配多少不同类型的炸面包圈盒？

假设这家面包店现有每种面包圈数量充足（每种至少 12 个）。因为假设盒中的面包圈顺序与购买者的要求无关，因此这是一个组合问题。不同面包圈盒的数量等于有 8 种类型对象的多重集合的 12 组合数，其中每种类型对象供给充足。根据定理 2.5.1，这个数等于

$$\binom{12+8-1}{12}=\binom{19}{12}$$

□

例子　项取自 1，2，…，k 的长度为 r 的非递减序列的个数是多少？ 53

我们可以这样得到要计数的非递减序列：首先选取下面这个多重集合的一个 r 组合，

$$S=\{\infty\cdot 1,\infty\cdot 2,\cdots,\infty\cdot k\}$$

然后再以递增顺序排列这些元素。因此，这样的序列个数就等于 S 的 r 组合个数，因此根据定理 2.5.1，这个数等于

$$\binom{r+k-1}{r}$$

□

在定理 2.5.1 的证明中，我们定义了有 k 种不同类型对象的多重集合 S 的 r 组合与下面方程的非负整数解集合之间的一一对应关系：

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$$

在这一对应中，x_i 代表 r 组合中第 i 种类型对象的个数。可以通过对 x_i 的限制来实现对每种类型的对象在 r 组合中出现次数的限制。在下面的例子中，我们首先对此给出具体说明。

例子　设 S 是有 4 种类型对象 a，b，c，d 的多重集 $\{10\cdot a,\ 10\cdot b,\ 10\cdot c,\ 10\cdot d\}$。每一种类型的对象至少出现一次的 S 的 10 组合的个数是多少？

本题答案是下面方程的正整数解的个数：

$$x_1+x_2+x_3+x_4=10$$

其中，x_1 代表在 10 组合中 a 的个数，x_2 代表在 10 组合中 b 的个数，x_3 代表在 10 组合中 c 的个数，x_4 代表在 10 组合中 d 的个数。因为重复数都等于 10，而且 10 又是要计数的组合的长度，因此我们可以忽略 S 的重复数。进行变量代换：

$$y_1=x_1-1,\quad y_2=x_2-1,\quad y_3=x_3-1,\quad y_4=x_4-1$$

则方程变为

$$y_1+y_2+y_3+y_4=6$$

其中 y_i 是非负整数。根据定理 2.5.1，新方程的非负整数解的个数等于

$$\binom{6+4-1}{6}=\binom{9}{6}=84$$

□ 54

例子　继续考虑定理 2.5.1 后面的面包圈例子，我们看到 8 种类型面包圈每一种至少有一个的面包圈盒的个数等于

$$\binom{4+8-1}{4}=\binom{11}{4}=330$$

□

组合中每种类型对象出现次数的下界也可以通过变量替换来处理。对此，我们利用下面的例子给出说明。

例子　下面的方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

的整数解的个数是多少？其中

$$x_1 \geqslant 3, \quad x_2 \geqslant 1, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 5$$

我们引入新变量：

$$y_1 = x_1 - 3, y_2 = x_2 - 1, y_3 = x_3, y_4 = x_4 - 5$$

此时方程变为

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$$

诸 x_i 的下界能够得到满足当且仅当这些 y_i 非负。新方程的非负整数解的个数从而也是原来方程非负整数解的个数，等于

$$\binom{11+4-1}{11} = \binom{14}{11} = 364$$

□

多重集合的下述 r 组合计数问题更加困难：下面的多重集合 S

$$S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \cdots, n_k \cdot a_k\}$$

有 k 种类型的对象，且重复数分别是 n_1，n_2，…，n_k。S 的 r 组合的数量与下面方程的整数解的个数相同：

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$$

其中

$$0 \leqslant x_1 \leqslant n_1, 0 \leqslant x_2 \leqslant n_2, \cdots, 0 \leqslant x_k \leqslant n_k$$

现在我们有诸 x_i 的上界，但它们的处理方法与下界的处理方法并不相同。我们将在第 6 章
55 指出如何利用容斥原理对此情形给出满意的方法。

2.6 有限概率

这一节我们对有限概率[⊖]作一个一般性的简略介绍。我们将看到，有限概率最终将还原成计数问题，所以本章所讨论的计数技术能够用来计算概率。

有限概率的背景是这样的：有一个实验$\mathcal{E}$，在进行这个实验时，它产生的结果是某有限结果集合中的一个。假设每一个结果都是*等可能的*（equally likely）（即没有哪一个结果比其他结果更有可能出现）；这时我们说这个实验是*随机的*（randomly）。所有可能结果的集合被称为这个实验的*样本空间*（sample space），并把它记作 S。因此，S 是一个有限集合，比如说有下面 n 个元素的集合：

$$S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$$

当我们进行实验$\mathcal{E}$时，每一个 s_i 都有 n 分之一的出现机会，所以说结果 s_i 的概率是 $1/n$，写作

$$\text{Prob}(s_i) = 1/n \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

一个*事件*（event）就是样本空间 S 的一个子集 E，但是我们通常是用描述式语言给出这个子集 E，而不是实际列出 E 中的所有结果。

例子 考虑投掷 3 枚硬币的实验$\mathcal{E}$，其中每一枚落在地上或者显示正面（H）或者显示背面（T）。因为每一枚硬币都能出现正面 H 或者背面 T，所以这个实验的样本空间是由 8 个有序对组成的集合 S：

$$(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T)$$
$$(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)$$

例如，其中的（H，T，H）表示的是第一枚硬币出现的是 H，第二枚硬币出现的是 T，第三枚

⊖ 相对于以微积分为基础的连续概率。

硬币出现的是 H。设 E 是至少有两枚硬币出现 H 的事件集合。那么

$$E=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)\}$$

因为 E 是由 8 个可能出现的结果中的 4 个结果组成的，所以，很自然就可以定义 E 的概率是 $4/8=1/2$。下面的定义更精确。 □

在样本空间为 S 的实验中，事件 E 的概率（probability）定义为 S 中属于 E 的结果的比率，因此，

$$\text{Prob}(E)=\frac{|E|}{|S|}$$ 56

根据定义，事件 E 的概率满足下面的条件

$$0\leqslant \text{Prob}(E)\leqslant 1$$

其中 $\text{Prob}(E)=0$ 当且仅当 E 是一个空事件 $\varnothing$（即不可能的事件），而 $\text{Prob}(E)=1$ 当且仅当 E 是整个样本空间 S（肯定出现的事件）。因此，为了计算一个事件 E 的概率，我们必须做两个计算：计算样本空间 S 中的结果个数，计算在事件 E 中的结果个数。

例子 考虑有 52 张牌的普通纸牌，每一张牌都是 13 个等级 1，2，…，10，11，12，13 中的一个，而且有 4 种花色——梅花（C），方块（D），红桃（H）和黑桃（S）中的一种。通常，11 记作 J，12 记作 Q，13 记作 K。另外，1 充当两个角色：或者就是 1（级别低，在 2 之下），或者充当 A（级别高，在 K 之上）[⊖]。考虑随机抽出一张牌的实验 $\mathcal{E}$。因此，样本空间 S 就是 52 张牌的集合，其中每一张牌的概率是 1/52。设 E 是抽出的牌是 5 的事件。因此，

$$E=\{(C,5),(D,5),(H,5),(S,5)\}$$

因为 $|E|=4$，$|S|=52$，所以 $\text{Prob}(E)=4/52=1/13$。 □

例子 设 n 是正整数。假设我们在 1 和 n 之间随机选出一个整数序列 i_1，i_2，…，i_n。(1) 这个选出的序列是 1，2，…，n 的排列的概率是多少？(2) 这个序列正好含有 $n-1$ 个不同整数的概率是多少？

样本空间 S 是长度为 n 的所有可能序列的集合，其中序列的每一项是整数 1，2，…，n 中的一个整数。因此 $|S|=n^n$，这是因为 n 项中的每一个都有 n 种可能的选择。

(1) 序列是排列的事件 E 的大小满足 $|E|=n!$。因此，

$$\text{Prob}(E)=\frac{n!}{n^n}$$

(2) 设 F 是正好有 $n-1$ 个不同整数的序列的事件。F 中的序列只有一个整数是重复的而且整数 1，2，…，n 中正好有一个整数没有出现在这个序列之中（所以这个序列中有 $n-2$ 个其他的整数）。这个重复的整数有 n 个选择，没有出现的整数则有 $n-1$ 个选择。这个重复的整数的位 57
置有 $\binom{n}{2}$ 种；其余 $n-2$ 个整数可以用 $(n-2)!$ 种方法放置在剩余的 $n-2$ 个位置上。因此有

$$|F|=n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!=\frac{(n!)^2}{2!(n-2)!}$$

所以

$$\text{Prob}(F)=\frac{(n!)^2}{2!(n-2)!n^n}$$ □

例子 5 个彼此相同的车被随机放置在 8×8 棋盘的非攻击位置上。这些车既在行 1，2，3，

⊖ 对于那些不熟悉纸牌游戏或者不喜欢这种游戏的人，下面是一种更抽象的描述：任意一副有 52 张牌的普通纸牌抽象说来就是 52 个形如 (x, y) 这样的有序对的集合，其中 x 是四种“花色” C，D，H，S 中的一种，而 y 则是 13 个等级 1，2，…，13 中的一个等级，而最小的等级 1 有时也被用作最大的等级（所以可以认为它是跟在 13 后面的一个带圈的 1）。

4，5又在列4，5，6，7，8上的概率是多少？

我们的样本空间 S 是由棋盘上5个非攻击车的所有放置的全体构成的，所以有

$$|S|=\binom{8}{5}^2\cdot 5!=\frac{8!^2}{(3!)^2 5!}$$

设 E 是这些车既在指定的行又在指定的列上的事件。于是 E 的大小是 $5!$，这是因为有 $5!$ 种方法把这5个车放置在 5×5 棋盘上。因此我们有

$$\text{Prob}(E)=\frac{(5!)^2 3!^2}{(8!)^2}=\frac{1}{3136}$$

□

例子 这是用一副普通的52张纸牌玩的一系列 Poker 游戏的例子。游戏中一手牌由5张组成。我们的实验$\mathcal{E}$是随机选出一手牌。因此，样本空间 S 是由 $\binom{52}{5}=2\,598\,960$ 种可能的手牌组成的，而且每手牌被选中的概率相同，等于 $1/2\,598\,960$。

(1) 设 E 是满堂红手牌的事件；即有3张某个级别的牌和两张另一个级别的牌（花色不重要）。为了计算 E 的概率，需要计算 $|E|$。那么又如何确定满堂红的数量呢？我们利用乘法原理，考虑下面四项任务：

(a) 选择有3张牌的那个级别。

(b) 选择这个级别的3张牌，即它们的3种花色。

(c) 选择有两张牌的那个级别。

(d) 选择这个级别的2张牌，即它们的两种花色。

执行这些任务的方法数如下：

58 (a) 13

(b) $\binom{4}{3}=4$

(c) 12（选择 (a) 之后，还剩12个级别）

(d) $\binom{4}{2}=6$

因此，$|E|=13\cdot 4\cdot 12\cdot 6=3744$，所以有

$$\Pr(E)=\frac{3744}{2\,598\,960}\approx 0.0014$$

(2) 设 E 是顺子手牌的事件；即一手牌中的5张牌有连续的级别（花色不重要），请记住：此时1同时也是 A。为了计算 $|E|$，我们考虑下面两项任务：

(a) 选择这五个连续的级别。

(b) 选择这五个连续级别中每个级别的花色。

执行这两项任务的方法数如下：

(a) 10（五张顺牌可以从1，2，…，10中的任意一个开始）

(b) 4^5（每一张牌有4种可能的花色）

因此，E 的大小是 $|E|=10\cdot 4^5=10\,240$，从而概率是

$$\Pr(E)=\frac{10\,240}{2\,598\,960}\approx 0.0039$$

(3) 设 E 同花顺的事件；即相同花色的连续5张牌。利用 (b) 中的推理，我们看到 E 的大小是 $|E|=10\cdot 4=40$，从而概率是

$$\Pr(E)=\frac{40}{2\,598\,960}\approx 0.000\,015\,4$$

(4) 设 E 是刚好有两对牌的事件；即一手牌的 5 张牌中，有一对某个级别的牌和另一对另一个级别的牌，以及一张与前面 4 张级别都不同的牌。到此，我们要稍加小心，因为这里提到的前两个级别出现的方式相同（这与满堂红不同，满堂红是一个级别 3 张牌，另一个级别 2 张牌）。为了计算此时的 E 的大小，我们考虑下面三项任务（如果模仿 (1)，这里就是六项任务）：

(a) 选择出现在两个对子中的两个级别。

(b) 对两个级别分别选出两个花色。

(c) 选择剩余的纸牌。 59

我们执行这三项任务的方法数如下：

(a) $\binom{13}{2}=78$

(b) $\binom{4}{2}\binom{4}{2}=6\cdot 6=36$

(c) 44

因此，E 的大小是 $|E|=78\cdot 36\cdot 44=123\,552$，从而它的概率是

$$\Pr(E)=\frac{123\,552}{2\,598\,960}\approx 0.048$$

这个概率大约是 1/20。

(5) 设 E 是一手 5 张牌中至少有一张是 A。这里，我们运用减法原理。设 $\overline{E}=S\backslash E$ 是一手牌中没有 A 的补事件。于是 $|\overline{E}|=\binom{48}{5}=1\,712\,304$。因此 E 的大小是 $|E|=|S|-|\overline{E}|=2\,598\,960-1\,712\,304=886\,656$，从而它的概率是

$$\Pr(E)=\frac{2\,598\,960-1\,712\,304}{2\,598\,960}=1-\frac{1\,712\,304}{2\,598\,960}=\frac{886\,656}{2\,598\,960}\approx 0.34 \qquad \square$$

如我们在 (5) 的计算中看到的那样，用概率语言描述时减法原理变为

$$\Pr(E)=1-\Pr(\overline{E}),\text{等价地},\Pr(\overline{E})=1-\Pr(E)$$

在练习题中我们将给出更多的概率计算。

2.7 练习题

1. 对于性质 (a) 和 (b) 的四个子集的每一种，计数各数位取自数字 1，2，3，4，5 的四位数的个数：

   (a) 各数位互不相同。

   (b) 该数是偶数。 60

   注意，这里有四个问题：$\varnothing$（没有进一步的限制）；$\{a\}$（性质 (a) 成立）；$\{b\}$（性质 (b) 成立）；$\{a,b\}$（性质 (a) 和 (b) 同时成立）。

2. 如果所有同花色牌都放在一起，那么对于 52 张一副的牌有多少种排序方法？

3. 有多少方法发一手 5 张牌？共有多少种不同的手牌？

4. 下列各数各有多少互不相同的正因子？

   (a) $3^4\times 5^2\times 7^6\times 11$

   (b) 620

   (c) 10^{10}

5. 确定作为下列各数的因子的 10 的最大幂（等价于用通常的 10 进制表示时尾部 0 的个数）：

   (a) 50!

   (b) 1000!

6. 有多少个使下列性质同时成立且大于 5400 的整数？
   (a) 各位数字互不相同。
   (b) 数字 2 和 7 不出现。
7. 4 名男士和 8 名女士围着一张圆桌就座，如果每两名男士之间是两名女士，一共有多少种就座方法？
8. 6 名男士和 6 名女士围着一张圆桌就座，如果男士和女士交替就座，一共有多少种就座方法？
9. 15 个人围着一张圆桌就座，如果 B 拒绝坐在 A 的旁边，一共有多少种就座方法？如果 B 只拒绝坐在 A 的右边，一共有多少种就座方法？
10. 从有 10 名男会员和 12 名女会员的一个俱乐部选出一个 5 人委员会。如果这个委员会至少要包含 2 位女士，有多少种方法形成这个委员会？此外，如果俱乐部里某位男士和某位女士拒绝进入该委员会一起工作，形成委员会的方式又有多少？

61 11. 1 到 20 之间没有两个连续整数的 3 整数集合有多少个？
12. 从 15 个球员的集合中选出 11 个球员组成足球队，这 15 个人当中有 5 人只能踢后卫，有 8 人只能踢边卫，有 2 人既能踢后卫又能踢边卫。假设足球队有 7 个人踢边卫 4 个人踢后卫，确定足球队可能的组队方法数。
13. 一所学校有 100 名学生和 3 个宿舍 A，B 和 C，它们分别容纳 25、35 和 40 人。
   (a) 使得 3 个宿舍都住满学生有多少种方法？
   (b) 假设 100 个学生中有 50 名男生和 50 名女生，而宿舍 A 是全男生宿舍，宿舍 B 是全女生宿舍，宿舍 C 男女兼收。有多少种方法可为学生安排宿舍？
14. 教室有两排座位且每排有 8 个座位。现有学生 14 人，其中 5 人总坐在前排，4 人总坐在后排。有多少种方法将学生分派到座位上？
15. 在一个聚会上有 15 位男士和 20 位女士。
   (a) 有多少种方式形成 15 对男女？
   (b) 有多少种方式形成 10 对男女？
16. 用组合式推理方法证明下面的等式

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

不要用定理 2.3.1 给出的这些值来证明。
17. 6 个没有区别的车放在 6×6 棋盘上，使得没有两个车能够互相攻击的放置方法有多少？如果是 2 个红车 4 个蓝车，那么放置方法又是多少？
18. 2 个红车 4 个蓝车放在 8×8 棋盘上，使得没有两个车可以互相攻击的放置方法有多少？
19. 给定 8 个车，其中 5 个红车，3 个蓝车。
   (a) 将 8 个车放在 8×8 棋盘上，使得没有两个车可以互相攻击的放置方法有多少？

62 (b) 将 8 个车放在 12×12 棋盘上，使得没有两个车可以互相攻击的放置方法有多少？
20. 确定 $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ 的循环排列的个数，其中 0 和 9 不在对面（提示：计算 0 和 9 在对面的循环排列的个数）。
21. 单词 ADDRESSES 的字母有多少排列？这 9 个字母有多少 8 排列？
22. 在 4 个运动员之间进行竞走比赛。如果允许名次并列（甚至是 4 个人同时到达终点），那么比赛有多少种结束的方式？
23. 桥牌是 4 个人之间的一种游戏，使用的是普通的 52 张一副的纸牌。开始时每人手里 13 张牌，桥牌开局时有多少种不同的状态（不计桥牌实际上是在两组对家之间进行的事实）？
24. 过山车有 5 个车厢，每个车厢有 4 个座位，两个在前，两个在后。今有 20 人准备乘车，有多少种乘车方式？若有 2 人想坐在不同的车厢，有多少种乘车方式？
25. 大缆车有 5 个车厢，每个车厢有一排 4 个座位，今有 20 人准备乘车，有多少种乘车方式？若有 2 人想坐在不同的车厢，有多少种乘车方式？

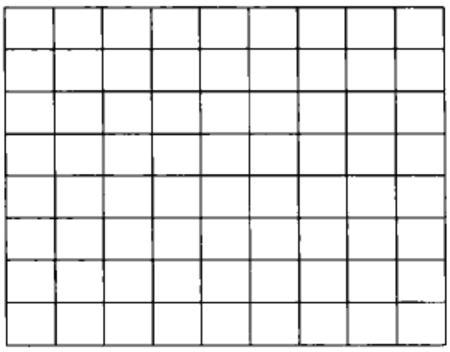
26. 一群 mn 个人要被编入 m 个队，每队 n 个队员。

(a) 如果每队都有一个不同的名字，确定编队的方法数。

(b) 如果各队都没有名字，确定编队的方法数。

27. 5 个没有区别的车放在 8×8 棋盘上，使得没有车能够攻击别的车并且第一行和第一列都不空的放置方法有多少？

28. 一名秘书在距离他家以东 9 个街区、以北 8 个街区的一座大楼里工作。每天他都要步行 17 个街区去上班（参见下图）。



(a) 对他来说，有多少条可能的路线？

(b) 如果在他家以东 4 个街区、以北 3 个街区开始向东方向的街区在水下（而他又不会游泳），则有多少条不同的路线（提示：计数使用水下街区的路线的数目）？ 63

29. 设 S 是重复数为 n_1，n_2，…，n_k 的多重集合，其中 $n_1=1$。令 $n=n_2+\cdots+n_k$。证明 S 的循环排列数等于

$$\frac{n!}{n_2!\cdots n_k!}$$

30. 我们要围着一张桌子一圈给 5 个男孩、5 个女孩和一名家长安排座位。如果男孩不坐在男孩旁边，女孩不坐在女孩旁边，那么有多少种座位安排方式？如果有两名家长，又有多少种座位安排方式？

31. 在一次有 15 个球队参加的足球锦标赛中，最前面的 3 支球队将获得金杯、银杯和铜杯，最后的 3 支球队将被降到低一级的联赛比赛。如果分别获得金银铜杯的那些球队是相同的，而遭到降级的那些球队也都是相同的，那么我们认为锦标赛的两个结果是相同的。试问锦标赛有多少种可能的不同结果？

32. 确定下面的多重集合的 11 排列的数目：

$$S=\{3\cdot a,4\cdot b,5\cdot c\}$$

33. 确定下面的多重集合的 10 排列的数目：

$$S=\{3\cdot a,4\cdot b,5\cdot c\}$$

34. 确定下面的多重集合的 11 排列的数目：

$$S=\{3\cdot a,3\cdot b,3\cdot c,3\cdot d\}$$

35. 列出下面的多重集合的 3 组合和 4 组合：

$$\{2\cdot a,1\cdot b,3\cdot c\}$$ 64

36. 确定下面的多重集合的组合数量（大小任意）：有 k 种不同类型对象，且它们的有限重复数分别为 n_1，n_2，…，n_k。

37. 一家面包店销售 6 种不同类型的酥皮糕点。如果该店每种糕点至少有 1 打，那么可能配置成多少打不同类型的酥皮糕点？如果在一盒中每种酥皮糕点至少有一块，又能有多少打？

38. 方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=30$$

有多少满足 $x_1\geqslant 2$，$x_2\geqslant 0$，$x_3\geqslant -5$，$x_4\geqslant 8$ 的整数解？

39. 有 20 根完全相同的棍列成一行，占据 20 个不同位置：

||||||||||||||||||||

要从中选出 6 根。

(a) 有多少种选择?

(b) 如果所选出的棍中没有两根是相邻的，那么又有多少种选择?

(c) 如果在每一对所选的棍之间必须至少有两根棍，有多少种选择?

40. 有 n 根棍列成一行并将从中选出 k 根。

(a) 有多少种选择?

(b) 如果所选出的棍中没有两根是相邻的，那么又有多少种选择?

(c) 如果在每一对所选的棍之间必须至少有 l 根棍，有多少种选择?

41. 在 3 个孩子之间分发 12 个完全相同的苹果和 1 个橘子，使每个孩子至少得到一个水果，有多少种分发方法?

42. 将 10 罐橘子汁、1 罐柠檬汁和 1 罐酸橙汁分发给 4 名口渴的学生，要求每名学生至少得到一罐饮料，并且柠檬汁和酸橙汁要分给不同的学生，确定分发的方法数。

43. 确定下面的多重集合的 r 组合数目:

65

$$\{1\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_k\}$$

44. 证明：在 k 个孩子当中分发 n 件不同物体的分发方法数等于 k^n。

45. 要将 20 本不同的书放到 5 个书架上，每个书架至少能够存放 20 本书。

(a) 如果只关心书架上书的数量（而不关心哪本书在什么地方)，那么有多少种不同的摆放方法?

(b) 如果关心哪本书存放在什么地方，但不关心书在书架上的顺序，那么有多少种不同的摆放方法?

(c) 如果需要考虑书架上书的顺序，那么又有多少种不同的摆放方法?

46. (a) 在一次聚会上有 $2n$ 个人，他们成对交谈，每一个人都和另一个人交谈（因此是 n 对)。$2n$ 个人像这样交谈能有多少种不同的方式?

(b) 假设在这次聚会上有 $2n+1$ 个人，除去一人外，每一个人都和另一个人交谈。有多少种分对交谈的方法?

47. 有 $2n+1$ 本相同的书要放人带有 3 层搁板的书柜中，如果每一对搁板放置的书总是多于另一层搁板上放置的书，那么有多少种方法可把书放入书柜中?

48. 证明 m 个 A 和至多 n 个 B 的排列的数目等于

$$\binom{m+n+1}{m+1}$$

49. 证明最多 m 个 A 和最多 n 个 B 的排列数等于

$$\binom{m+n+2}{m+1}-1$$

50. 将 5 个相同的车放入 8×8 棋盘的方格中，使得其中的 4 个车占据一个矩形的四个角，且这个矩形的边与棋盘的边平行，有多少种放置方法?

51. 考虑大小为 $2n$ 的多重集合 $\{n\cdot a, 1, 2, 3, \cdots, n\}$，确定它的 n 组合数。

66 52. 考虑大小为 $3n+1$ 的多重集合 $\{n\cdot a, n\cdot b, 1, 2, 3, \cdots, n+1\}$，确定它的 n 组合数。

53. 在集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的排列和塔状集 $A_0\subset A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n$ 间建立一一对应，其中 $|A_k|=k$，$k=0, 1, 2, \cdots, n$。

54. 确定形如 $\varnothing\subseteq A\subseteq B\subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ 的塔数。

55. 下面单词中的字母有多少个排列?

(a) TRISKAIDEKAPHOBIA（这个词的意思是“十三恐惧症”)

(b) FLOCCINAUCINIHILIPILIFICATION（这个词的意思是“认为某事无意义”)

(c) PNEUMONOULTRAMICROSCOPICSILICOVOLCANOCONIOSIS（矽肺病）（这个词可能是英语中最长的单词)

(d) DERMATOGLYPHICS（肌纹学）（这个单词是现在英语中不含重复字母的最长英语单词，还有一

个相同长度的单词是 UNCOPYRIGHTABLE⊖）。

56. 一手牌是同花顺（即 5 张牌是相同花色的）的概率是多少？
57. 一手牌正好有一对的概率（即这一手牌中正好有四个不同的级别）是多少？
58. 一手牌含有五个不同级别但不含同花顺或者顺子（5 张牌的点数是连续的）的概率是多少？
59. 考虑下面这样一副纸牌：从普通的 52 张牌中去掉 J，Q 和 K 后剩余的 40 张牌，此时 1（A）可以跟在一个 10 的后面。计算 2.6 节中的例子给出的各种手牌的概率。
60. 一家百吉饼店有 6 种不同的百吉饼。假设可以随机选取 15 张百吉饼。每种百吉饼至少有一张时选择的概率是多少？如果百吉饼中有一种是芝麻口味的，那么至少有三张芝麻口味的百吉饼时选择的概率是多少？
61. 考虑 9×9 棋盘和 9 个车，其中有 5 个红车和 4 个蓝车。假设随机把这些车放置在棋盘上非攻击的位置。那么红车在 1，3，5，7，9 行的概率是多少？红车既在 1，2，3，4，5 行上又在 1，2，3，4，5 列上的概率是多少？ 67
62. 假设一手牌有 7 张牌而不是 5 张。计算下列各种手牌的概率：
    (a) 7 顺子
    (b) 一个级别 4 张牌，另一个级别 3 张牌
    (c) 一个级别 3 张牌，另外两个不同级别各两张牌
    (d) 三个不同级别各两张牌，第四个级别 1 张牌
    (e) 一个级别 3 张牌，四个不同级别各 1 张牌
    (f) 不同级别的七张牌
63. 投掷 4 枚标准骰子（一个立方体，在它的六个面上分别有 1，2，3，4，5，6 个点），每个骰子颜色不同，每个骰子着地时都有一个面朝上，因此就呈现出一个点子数。确定下列事件的概率：
    (a) 呈现出的点子总数是 6 的概率
    (b) 至多有两个骰子正好呈现出一个点的概率
    (c) 每个骰子至少呈现出两个点的概率
    (d) 呈现出的四个点数互不相同的概率
    (e) 呈现出的点数正好有两个不相同的概率
64. 设 n 是正整数。假设我们在 1 到 n 之间随机选出一个整数序列 i_1，i_2，…，i_n。
    (a) 这个序列正好含有 $n-2$ 个不同整数的概率是多少？
    (b) 这个序列正好含有 $n-3$ 个不同整数的概率是多少？ 68

⊖ Anu Garg：*The Dord, the Diglot, and An Avocado or Two*，Plume，Penguin Group，New York (2007)。