Chapter 8 Answers

***Exercises 8B***

**I.**

**[1]** 3. *Q* 1, 2, MP

**[2]** 3. *P* ⊃ *R* 1, 2, HS

**[3]** 3. ~ *R* 1, 2, MT

**[4]** 3. *R* ⊃ *S* 1, 2, DS

**[5]** 3. ~ *Q* 1, 2, MT

**[6]** 3. ( *P* ⊃ *Q* ) 1, 2, MP

**[7]** 3. ( *P* **·** *Q* ) ⊃ ~ *P* 1, 2, HS

**[8]** 3. ~ ( *P* ⊃ *Q* ) 1, 2, MT

**[9]** 3. *P* ⊃ *Q* 1, 2, DS

**[10]** 3. ~ ~ *P* 1, 2, MT

**[11]** 3. ~ *P* ⊃ ~ *R* 1, 2, HS

**[12]** 3. ~ *S* 1, 2, MP

**[13]** 3. *R* ⊃ *P* 1, 2, HS

**[14]** 3. ~ *R* 1, 2, MT

**[15]** 3. *P* ⊃ *Q* 1, 2, DS

**II.**

**[1]** 3. *P* 1, 2, DS

**[2]** 3. ( *Q* v *S* ) 1, 2, MP

**[3]** 3. ( *K* v *L* ) ⊃ ( *K* v *S* ) 1, 2, HS

**[4]** 3. ~ ( *T* v *R* ) 1, 2, MT

**[5]** 3. *Q* · *S* 1, 2, DS

**[6]** 3. ~ ( *R* v *S* ) 1, 2, MT

**[7]** 3. *S* 1, 2, MP

**[8]** 3. *P* ⊃ ~ *S* 1, 2, HS

**[9]** 3. ~ ( *T* ⊃ *R* ) 1, 2, MT

**[10]** 3. ~ ( ~ *R* v ~ *T* ) 1, 2, MP

**[11]** 3. ~ *S* 1, 2, MT

**[12]** 3. ~ *Q*  **·** ~ *P* 1, 2, DS

**[13]** 3. ~ ( *P* **·**  ~ *R* ) 1, 2, MT

**[14]** 3. ~ *R* 1, 2, MP

**[15]** 3. ~ *Q*  v ~ *P* 1, 2 DS

**III.**

**[1]** 4. ~ *Q* 1, 3, MP

5. ~ *R* 2, 4, MT

**[2]** 4. *S* v *R* 2, 3, MP

5. *R* 1, 4, DS

**[3]** 4. *P* ⊃ ( *S* **·** *M* ) 2, 3, HS

5. *P* ⊃ *Q* 1, 4, HS

**[4]** 4. ~ *Q* 1, 3, DS

5. *P* v *R* 2, 4, DS

6. *R* 1, 5, DS

**[5]** 5. *P* ⊃ *S* 1, 4, HS

6. *P* ⊃ *Q* 3, 5, HS

7. *Q* 2, 6, MP

**[6]** 5. *S* ⊃ ( *R* v *P* ) 1, 4, HS

6. *R* v *P* 3, 5, MP

7. *P* 2, 6, DS

**[7]** 4. ~ *P* 1, 2, MT

5. ~ *Q* ⊃ *R* 3, 4, DS

6. *R* 1, 5, MP

**[8]** 5. *P* ⊃ ~ *Q* 1, 4, HS

6. *R* ⊃ ~ *L* 2, 5, MP

7. *R* ⊃ *S* 3, 6, HS

**[9]** 5. *P* ⊃ *Q* 3, 4, HS

6. ~ *R* 2, 5, MP

7. ~ *S* 1, 6, DS

**[10]** 5. ~ *S* 1, 3, DS

6. ~ ( *P* **·**  ~ *Q* ) 4, 5, MT

7. ~ *R* 2, 6, DS

**IV.**

**[1]** 4. *P* ⊃ *R* 1, 2, HS

5. ~ *P* 3, 4, MT

**[2]** 4. ~ *Q* 1, 3, MT

5. ~ *P*  2, 4, MT

**[3]** 4. ~ *R*  1, 3, MP

5. *~* ( *P* v *Q* ) 2, 4, MT

**[4]** 4. *Q*  2, 3, DS

5. *R* 1, 4, MP

**[5]** 5. ~ *S* 1, 3, DS

6. *P* ⊃ *Q* 2, 5, MP

7. *R* 4, 6, MP

**[6]** 5. *P* 3, 4, DS

6. ~ *R* 1, 5, MP

7. *S* 2, 6, DS

**[7]** 5. ~ *M* 2, 4, DS

6. *~* ( *R* ⊃ *S* ) 3, 5, MP

7. *L* **·** *~ Q* 1, 6, DS

**[8]** 5. *R* 1, 3, DS

6. ~ *L* ⊃ ~ *S* 4, 5, MP

7. ~ *S* 3, 6, MP

8. ~ ( *P* v *Q* ) 2, 7, MT

**[9]** 5. ~ *P* 2, 3, MT

6. ~ *S* 4, 5, MT

7. *P* v *Q* 1, 6, DS

8. *Q*  5, 7, DS

**[10]** 6. ~ *L* ⊃ ( *Q* ⊃ *R* ) 3, 5, HS

7. *Q* ⊃ *R* 2, 6, MP

8. ~ *R* 1, 4, DS

9. ~ *Q* 7, 8, MT

***Exercises 8C***

**I.**

**[1]** 1. ~ ( *P* · *Q* )

2. ~ ( *R* · *S* ) ⊃ ( *L* · ~ *Q* )

3. ( *R* · *S* ) ⊃ ( *P* · *Q* ) */*  *L* · ~ *Q*

4. ~ ( *R* · *S* ) 1, 3, MT

5. *L* · ~ *Q*  2, 4, MP

**[2]** 1*. P* ⊃ *Q*

2*. R* ⊃ *P*

3*. ~ Q /*  *~ R*

4*. ~ P* 1, 3, MT

5*. ~ R* 2, 4, MT

**[3]** 1. *P*

2. *R* ⊃ *Q*

3. *P* ⊃ ~ *Q*  */ ~ R*

4. ~ *Q* 1, 3, MP

5. ~ *R*  2, 4, MT

**[4]** 1. *S* ⊃ ( *P* · *Q* )

2. ( *P* · *Q* ) ⊃ *R*

3. ~ *R / ~ S*

4. ~ ( *P* · *Q* ) 2, 3, MT

5. ~ *S*  1, 4, MT

**[5]** 1. ~ *P* ⊃ ( *Q* v *R* )

2. ( ~ *P* ⊃ ~ *S* ) ⊃ ~ *L*

3. ( *Q* v *R* ) ⊃ ~ *S / ~ L*

4. ~ *P* ⊃ ~ *S*  1, 3, HS

5. ~ *L*  2, 4, MP

**[6]** 1. *Q*

2. *L* ⊃ ( *S* ⊃ *P* )

3. *Q* ⊃ ( *R* ⊃ *S* )

4. *L / R* ⊃ *P*

5. *R* ⊃ *S* 1, 3, MP

6. *S* ⊃ *P*  2, 4, MP

7. *R* ⊃ *P* 5, 6, HS

**[7]** 1. *P* ⊃ *Q*

2. ( *P* ⊃ *R* )⊃ ~ *S*

3. *Q* ⊃ *R*

4.(~ *Q* ⊃ ~ *P* )⊃ *S /* ~ ( ~ *Q* ⊃~ *P* )

5. *P* ⊃ *R* 1, 3, HS

6. ~ *S*  2, 5, MP

7. ~ ( ~ *Q* ⊃~ *P* ) 4, 6, MT

**[8]** 1. *S* ⊃ *~ Q*

2. *P* ⊃ *Q*

3. *R* ⊃  *S*

4. *R /* ~ *P*

5. *S* 3, 4, MP

6. ~ *Q* 1, 5, MP

7. ~ *P*  2, 6, MT

**[9]** 1. *R* v *S*

2. ~ ( *P* v *Q* )

3. *R* ⊃ ( *P* v *Q* )

4. *S* ⊃ ( *Q* v *R* )  */ Q*  v  *R*

5. ~ *R*  2, 3, MT

6. *S*  1, 5, DS

7. *Q*  v  *R*  4, 6, MP

**[10]** 1. *P* v *Q*

2. *Q* ⊃ ~ *R*

3. ~ *P*

4. ~ *R* ⊃ ~ *S / ~ S*

5. *Q* 1, 3, DS

6. ~ *R*  2, 5, MP

7. ~ *S* 4, 6, MP

**[11]** 1. *P* ⊃ *R*

2. ~ *S*

3. *P* v *Q*

4. *R* ⊃ *S*  */ Q*

5. *P* ⊃ *S*  1, 4, HS

6. ~ *P*  2, 5, MT

7. *Q* 3, 6, DS

**[12]** 1. ~ ( *P* · *S* )

2. ~ *R*

3. ~ *P* ⊃ [ *P* v ( *Q* ⊃ *R* ) ]

4. *P* ⊃ ( *P* · *S* ) */ ~ Q*

5. ~ *P* 1, 4, MT

6. *P* v ( *Q* ⊃ *R* ) 3, 5, MP

7. *Q* ⊃ *R* 5, 6, DS

8. *~ Q*  2, 7, MT

**[13]** 1. *P*  v( *S* ⊃ *Q* )

2*. ~ Q*

3. *P* ⊃ *Q*

4. *~ S* ⊃ *R / R*

5. *~ P* 2, 3, MT

6. *S* ⊃ *Q*  1, 5, DS

7. *~ S* 2, 6, MT

8. *R* 4, 7, MP

**[14]** 1. ~ *R* v ( *P* ⊃ *Q* )

2. ( *P* ⊃ *Q* ) ⊃ ( *Q* ⊃ ~ *R* )

3. ~ ~ *R / ~ P*

4. *P* ⊃ *Q*  1, 3, DS

5. *Q* ⊃ ~ *R*  2, 4, MP

6. ~ *Q*  3, 5, MT

7. *~ P* 4, 6, MT

**[15]** 1. *P*

2. ( *Q* ⊃ *R* ) ⊃ ( *P* ⊃ *Q* )

3. *P* ⊃ ( *Q* ⊃ *R* ) */ R*

4. *Q* ⊃ *R*  1, 3, MP

5. *P* ⊃ *Q*  2, 4, MP

6. *P* ⊃ *R*  4, 5, HS

7. *R* 1, 6, MP

**[16]** 1. *L* v *P*

2. ~ *S*

3. *P* ⊃ ( *Q* · *R* )

4. *S* v ( *L* ⊃ *S* )  */ Q* · *R*

5. *L* ⊃ *S* 2, 4, DS

6. ~ *L*  2, 5, MT

7. *P* 1, 6, DS

8. *Q* · *R*  3, 7, MP

**[17]** 1. *Q* ⊃ *P*

2. *S*

3. ( *Q* v ~ *R* ) ⊃ ~ *P*

4. *S* ⊃ ( *Q* v ~ *R* )  */ ~ R*

5. *Q* v ~ *R* 2, 4, MP

6. ~ *P*  3, 5, MP

7. ~ *Q*  1, 6, MT

8. *~ R*  5, 7, DS

**[18]** 1. ( *Q* v *R* ) ⊃ ~ *P*

2. ~ *P* ⊃ [ *P* v ( *Q* ⊃ *P* ) ]

3. *Q* v *R* */ R*

4. ~ *P* 1, 3, MP

5. *P* v ( *Q* ⊃ *P* ) 2, 4, MP

6. *Q* ⊃ *P*  4, 5, DS

7. ~ *Q*  4, 6, MT

8. *R*  3, 7, DS

**[19]** 1. *R* ⊃ *S*

2. ( *Q* ⊃ *S* )⊃~ *P*

3. ~ *P* ⊃ [ ( *Q* ⊃ *R* ) ⊃ ( *L* v ~ *S* ) ]

4. *Q* ⊃ *R*

5. ~ *L* */ ~ R*

6. *Q* ⊃ *S*  1, 4, HS

7. ~ *P*  2, 6, MP

8. ( *Q* ⊃ *R* ) ⊃ ( *L* v ~ *S* ) 3, 7, MP

9. *L* v ~ *S* 4, 8, MP

10. ~ *S* 5, 9, DS

11.  *~ R* 1, 10, MT

**[20]** 1. ( *P* ⊃ *S* ) ⊃ ~ *Q*

2. *P* ⊃ *R*

3. ( *P* ⊃ *R* ) ⊃ ( *R* ⊃ *Q* )

4. ( *P* ⊃ *Q* ) ⊃ ( *R* ⊃ *S* ) */ ~ P*

5. *R* ⊃ *Q*  2, 3, MP

6. *P* ⊃ *Q* 2, 5, HS

7. *R* ⊃ *S*  4, 6, MP

8. *P* ⊃ *S* 2, 7, HS

9. ~ *Q* 1, 8, MP

10.  *~ P*  6, 9, MT

***Exercises 8D***

**I.**

**[1]** 3. *Q* v *S* 1, 2, CD

**[2]** 2. *P* ⊃ *R* 1, Simp

**[3]** 3. ( *T* v *U* ) **·**  ~ *P* 1, 2, Conj

**[4]** 2. *R* v ( *P* **·**  ~ *Q* ) 1, Add

**[5]** 3. ~ *P* **·**  ( *T* ⊃ *U* ) 1, 2, Conj

**[6]** 2. ~ ( *P* v *Q* ) 1, Simp

**[7]** 3. *Q* v *S* 1, 2, CD

**[8]** 2. *P* v ~ *Q* 1, Add

**[9]** 3. *P* **·**  *Q* 1, 2, Conj

**[10]** 2. *S* v *P* 1, Simp

**[11]** 3. ~ *S* v ~ *T* 1, 2, CD

**[12]** 2. ( *P* ⊃ *Q* )v ~ ( *R* v *S* ) 1, Add

**[13]** 3. *P* **·**  [ ( *R* ⊃ *S* ) v *Q* ] 1, 2, Conj

**[14]** 2. ~ *P* ⊃ *Q* 1, Simp

**[15]** 3. *P* v ( ~ *Q* **·** *L* ) 1, 2, CD

**II.**

**[1]** 3. *T* v *Q* 1, 2, CD

**[2]** 2. ( *M* ⊃ *P* ) 1, Simp

**[3]** 3. ( *P* v *Q* ) **·**  ( *S* v *T* ) 1, 2, Conj

**[4]** 3. ~ ( *S* v *T* ) v [You can add any statement here] 1, Add

**[5]** 2. *P* 1, Simp

**[6]** 3. [ ( *R* v *S* ) **·**  ( *P* ⊃ *Q* ) ] **·** ( *S* v *Q* ) 1, 2, Conj

**[7]** 3. ( *R* v *L* ) v ( *Q* v *M* ) 1, 2, CD

**[8]** 2. ~ *S* v [You can add any statement here] 1, Add

**[9]** 3. ( *P* ⊃ *Q* ) **·**  ( *R* v *S* ) 1, 2, Conj

**[10]** 2. *P* v ( ~ *R* v ~ *S* ) 1, Simp

**[11]** 3. ~ *S* v ~ *Q* 1, 2, CD

**[12]** 3. ( *S* ⊃ ~ *Q* ) ***·*** ~ ( ~ *P* ***·*** ~ *Q* ) 1, 2, Conj

**[13]** 2. ~ *P* v ~ *S* 1, Simp

**[14]** 2. [ *P* ⊃ ~ ( ~ *S* v ~ *L* ) ] v [You can add any statement here] 1, Add

**[15]** 3. { [ ~ *L* ⊃ ( ~ *Q* v ~ *R* ) ] ⊃ ~ *S* } ***·*** ( *P* ⊃ ~ *Q* ) 1, 2, Conj

**III.**

**[1]** 1. *Q* ⊃ ( *P* v *R* )

2. *Q* · *S* / *P* v *R*

3. *Q*  2, Simp

4. *P* v *R* 1, 3, MP

**[2]** 1. *R* ⊃ ( *P* v *Q* )

2. *S* v ~ ( *P* v *Q* )

3. ~ *S* / ~ *R*

4. ~ ( *P* v *Q* ) 2, 3, DS

5. ~ *R* 1, 4, MT

**[3]** 1. ( *M* ⊃ *P* ) **·** ( *S* v *Q* )

2. *R* ⊃ *M* / *R* ⊃ *P*

3. *M* ⊃ *P* 1, Simp

4. *R* ⊃ *P* 2, 3, HS

**[4]** 1. [ ( *M* **·** *R* ) v *S* ] ⊃ ( *P* v *Q* )

2. *M*

3. *R*  / *P* v *Q*

4. *M* **·** *R* 2, 3, Conj

5. (*M* **·** *R*) v *S* 4, Add

6. *P* v *Q* 1, 5, MP

**[5]** 1. *P*

2. ( *P* v *Q* ) ⊃ *R*

3. *R* ⊃ *S* / *S*

4. *P* v *Q* 1, Add

5. *R* 2, 4, MP

6. *S* 3, 5, MP

**[6]** 1. *P* v ( *M* v *R* )

2. *M* ⊃ *S*

3. *R* ⊃ *Q*

4. ~ *P* / *S* v *Q*

5. (*M* ⊃ *S*) **·**  (*R* ⊃ *Q*) 2, 3, Conj

6. *M* v *R* 1, 4, DS

7. *S* v *Q* 5, 6, CD

**[7]** 1. ( *M* v ∼ *P* ) ⊃ ( *Q* v ∼ *S* )

2. *M* **·** ∼ *R* / *Q* v ∼ *S*

3. *M* 2, Simp

4. *M* v ~ *P* 3, Add

5. *Q* v ∼ *S* 1, 4, MP

**[8]** 1. *P* · *R*

2. ( *P* ⊃ *Q* ) · ( *R* ⊃ *S* ) / *Q* v *S*

3. *P* 1, Simp

4. *P* v *R* 3, Add

5. *Q* v *S* 2, 4, CD

**[9]** 1. *P*  **·** ( *S*  v *Q* )

2. ( *P* v *R* ) ⊃ *M*  / *M*

3. *P*  1, Simp

4. *P* v *R* 3, Add

5. *M* 2, 4, MP

**[10]** 1. ~ ( *Q* · *R* )

2. *P* v *S*

3. [ *P* ⊃ ( *Q* · *R* ) ] · ( *S* ⊃ *L* )

4. *S*  / *L*

5. ( *Q* · *R* ) v *L*  2, 3, CD

6. *L* 1, 5, DS

**[11]** 1. ( *M* v *Q* ) ⊃ ~ *P*

2. *M*

3. *P* v *S* / *S* **·** ( *M* v *Q* )

4. *M* v *Q* 2, Add

5. ~ *P* 1, 4, MP

6. *S*  3, 5, DS

7. *S* **·** ( *M* v *Q* ) 4, 6, Conj

**[12]** 1. ~ *P* · *D*

2. *P* v ( *Q* · *R* )

3. *P* v ( *S* · *L* ) / *Q* · *S*

4. ~ *P* 1, Simp

5. *Q* · *R* 2, 4, DS

6. *Q* 5, Simp

7. *S* · *L* 3, 4, DS

8. *S* 7, Simp

9. *Q* · *S* 6, 8, Conj

**[13]** 1. ( *P* ⊃ *Q* ) · ( *R* ⊃ *S* )

2. *P* v *L*

3. ( *L* ⊃ *M* ) · ( *N* ⊃ *K* ) / *Q* v *M*

4. *P* ⊃ *Q* 1, Simp

5. *L* ⊃ *M* 3, Simp

6. ( *P* ⊃ *Q* ) ·( *L* ⊃ *M* ) 4, 5, Conj

7. *Q* v *M* 2, 6, CD

**[14]** 1. ( *P* v *R* )⊃  *S*

2. *P* · *Q* / *P* · *S*

3. *P* 2, Simp

4. *P* v *R* 3, Add

5. *S*  1, 4, MP

6. *P* · *S*  3, 5, Conj

**[15]** 1. *R* v ( *P* v *S* )

2. ~ *R*

3. *P* ⊃ *Q*

4. ~ *R* ⊃ ( *S* ⊃ *L* ) / *Q* v *L*

5. *S* ⊃ *L* 2, 4, MP

6. ( *P* ⊃ *Q* ) ·( *S* ⊃ *L* ) 3, 5, Conj

7. *P* v *S*  1, 2, DS

8. *Q* v *L*  6, 7, CD

**[16]** 1. *Q* ⊃ *S*

2. ~ *R* ·  *P*

3. *P* ⊃ *Q*

4. *P*  / *S* · ~ *R*

5. *P* ⊃ *S* 1, 3, HS

6. *S*  4, 5, MP

7. ~ *R*  2, Simp

8. *S* · ~ *R*  6, 7, Conj

**[17]** 1. *S* v *P*

2. ( *R* v *S* ) ⊃ *L*

3. ( *P* v *Q* ) ⊃ *R*

4. ~ *S*  / *L*

5. *P* 1, 4, DS

6. *P* v *Q*  5, Add

7. *R*  3, 6, MP

8. *R* v *S*  7, Add

9. *L*  2, 8, MP

**[18]** 1. ( *P* · *Q* ) ⊃ *R*

2. *Q* · ~ *S*

3. *Q* ⊃ ( *P* · *S* ) / *R*

4. *Q*  2, Simp

5. *P* · *S* 3, 4, MP

6. *P*  5, Simp

7. *P* · *Q*  4, 6, Conj

8. *R* 1, 7, MP

**[19]** 1. ( *R* v *S* ) v ( ~ *L* · *M* )

2. ( *P* · *Q* ) ⊃ ~ ( *R* v *S* )

3. ~ *L*

4. ( ~ *L* v *M* ) ⊃ ( *P* · *Q* ) / ( ~ *L* · *M* ) · ~ *L*

5. ( ~ *L* v *M* ) ⊃ ~ ( *R* v *S* ) 2, 4, HS

6. ~ *L* v *M*  3, Add

7. ~ ( *R* v *S* )  5, 6, MP

8. ~ *L* · *M* 1, 7, DS

9. ( ~ *L* · *M* ) · ~ *L*  3, 8, Conj

**[20]** 1. *N* ⊃ ~ *L*

2. ~ *P* · *K*

3. ( ~ *P*  v *Q* ) ⊃ ( ~ *R* ⊃ *S* )

4. ~ *L* ⊃ *M*

5. *N* v ~ *R* / ~ *R* ⊃ *S*

6. ~ *P*   2, Simp

7. ~ *P*  v *Q* 6, Add

8. ~ *R* ⊃ *S* 3, 7, MP

**[21]** 1. *R* ⊃ *P*

2. ( *Q*  · ~ *R* ) ⊃ ( *S*  · ~ *R* )

3. ~ *P*

4. *P* v *Q* / *S*

5. *Q* 3, 4, DS

6. ~ *R*   1, 3, MT

7. *Q*  · ~ *R*   5, 6, Conj

8. *S*  · ~ *R* 2, 7, MP

9. *S*  8, Simp

**[22]** 1. *R* ⊃ *S*

2. *P*  ⊃ ~ *Q*

3. ~ *Q*  ⊃ *R*

4. *P* · *Q* / *R* · *S*

5. *P*  ⊃ *R* 2, 3, HS

6. *P*  ⊃ *S*  1, 5, HS

7. *P*  4, Simp

8. *R* 5, 7, MP

9. *S*  6, 7, MP

10. *R* · *S* 8, 9, Conj

**[23]** 1. ( *R* v *Q* ) ⊃ [ *P*  ⊃ ( *S* ≡ *L* ) ]

2. ( *P* v *Q* ) ⊃ *R*

3. *P* · *S* / *S* ≡ *L*

4. *P*  3, Simp

5. *P* v *Q*  4, Add

6. *R*  2, 5, MP

7. *R*  v *Q* 6, Add

8. *P*  ⊃ ( *S* ≡ *L* )  1, 7, MP

9. *S* ≡ *L* 4, 8, MP

**[24]** 1. *P*  v ( *Q* ⊃ *R* )

2. ( *S*  v *L* ) ⊃ ( *Q* · *M* )

3. *Q* ⊃ ~ *P*

4. *S* · *N / R*

5. *S* 4, Simp

6. *S* v *L* 5, Add

7. *Q* · *M* 2, 6, MP

8. *Q* 7, Simp

9. ~ *P* 3, 8, MP

10. *Q* ⊃ *R* 1, 9, DS

11. *R* 8, 10, MP

**[25]** 1. ( *M*  v *N* ) ⊃ ( *P* · *K* )

2. ( *P*  v ~ *Q* ) ⊃ [ ( *R* ⊃ *L* ) *·* *S* ]

3. *M* / *P* *·* ( *R*  ⊃ *L* )

4. *M*  v *N* 3, Add

5. *P* · *K* 1, 4, MP

6. *P*  5, Simp

7. *P*  v ~ *Q* 6, Add

8. ( *R* ⊃ *L* ) *·* *S* 2, 7, MP

9. *R* ⊃ *L* 8, Simp

10. *P* *·* ( *R*  ⊃ *L* ) 6, 9, Conj

**[26]** 1. *R* ⊃ ~ *S*

2. ( ~ *Q ·* ~ *S* ) ⊃ *L*

3. *P*

4. *P* ⊃ ~ *Q*

5. ( *R ·* *L* ) ⊃ *M*

6. *R*  / *M*

7. ~ *Q* 3, 4, MP

8. ~ *S* 1, 6, MP

9. ~ *Q ·* ~ *S* 7, 8, Conj

10. *L* 2, 9, MP

11. *R ·* *L*  6, 10, Conj

12. *M* 5, 11, MP

**[27]** 1. ~ *P* *·* ( *N*  ⊃ *L* )

2. ~ *Q ·* ( ~ *K*  ≡ *J* )

3. ( ~ *P ·* ~ *Q* ) ⊃ [ ( ~ *P* v *R* ) ⊃ ( *S ·* *M*  ) ] / *S ·*  ~ *Q*

4. ~ *P* 1, Simp

5. ~ *Q* 2, Simp

6. ~ *P ·* ~ *Q*  4, 5, Conj

7. ( ~ *P* v *R* ) ⊃ ( *S ·* *M*  ) 3, 6, MP

8. ~ *P* v *R* 4, Add

9. *S ·* *M*  7, 8, MP

10. *S* 9, Simp

11. *S ·*  ~ *Q*  5, 10, Conj

**[28]** 1. ( *Q* *·* *R* ) v ~ *P*

2. *R* ⊃ *S*

3. [ ~ *P ·* ~ ( *Q · R* ) ] ⊃ ( *L* ⊃ ~ *Q* )

4. ~ ( *Q · R* ) ⊃ ( ~ *Q* ⊃ *R* )

5. ~ ( *Q · R* ) *·* ~ *M*  / *L* ⊃ *S*

6. ~ ( *Q · R* ) 5, Simp

7. ~ *P* 1, 6, DS

8. ~ *P ·* ~ ( *Q · R* ) 6, 7, Conj

9. *L* ⊃ ~ *Q* 3, 8, MP

10. ~ *Q* ⊃ *R* 4, 6, MP

11. *L* ⊃ *R*  9, 10, HS

12. *L* ⊃ *S* 2, 11, HS

**[29]** 1. *P* · ~ *Q*

2. ( *P* v~ *R* ) ⊃ ( ~ *S* · *M* )

3. ( ~ *S ·* *P* ) ⊃ ( *P* ⊃ *N* ) / *N*

4. *P* 1, Simp

5. *P* v ~ *R*  4, Add

6. ~ *S* · *M*  2, 5, MP

7. ~ *S* 6, Simp

8. ~ *S ·* *P*  4, 7, Conj

9. *P* ⊃ *N* 3, 8, MP

10. *N* 4, 9, MP

**[30]** 1. ~ *P* ⊃ *Q*

2. *R ·* ( *S* ⊃ *L* )

3. ( *Q ·* ~ *M* ) ⊃ ( *R* ⊃ ~ *L* )

4. *~ P* *·* ~ *K*

5. *~ P* ⊃~ *M* / ~ *L*

6. ~ P 4, Simp

7. *Q*  1, 6, MP

8. ~ *M* 5, 6, MP

9. *Q ·* ~ *M* 7, 8, Conj

10. *R* ⊃ ~ *L* 3, 9, MP

11. *R* 2, Simp

12. ~ *L* 10, 11, MP

***Exercises 8E***

**I.**

**[1]** 2. ~ *S* v ~ *R* 1, DM

**[2]** 2. *P* v *S* 1, Com

**[3]** 2. ( *R* v  *S* ) v *P* 1, Assoc

**[4]** 2. ( *P* **·**  *S* ) v ( *P* **·** *Q* ) 1, Dist

**[5]** 2. ~ ~ *S* 1, DN

**[6]** 2. ~ ( *P* **·** *Q* ) 1, DM

**[7]** 2. ( *Q* **·** *R* ) v *P* 1, Com

**[8]** 2. *P* v ( *Q* v *R* ) 1, Assoc

**[9]** 2. *P* **·** ( *Q* v *R* ) 1, Dist

**[10]** 2. *Q* 1, DN

**[11]** 2. ~ ~ *Q*  **·** ~ *R* 1, DM

**[12]** 2. *P* v ( *Q*  **·** *R* ) 1, Dist

**[13]** 2. *S* **·** ( *Q* **·** *R* ) 1, Assoc

**[14]** 2. ~ ( *P* **·** *Q* ) **·** ~ ( *R* **·**  *S* ) 1, DM

**[15]** 2. [ ( *L* **·** *M* ) v ( *N* **·** *K* ) ] **·** [ ( *P* **·** *Q* ) v ( *R* **·** *S* ) ] 1, Com

**II.**

**[1]** 2. *R*  **·** *S* 1, Com

**[2]** 2. *S* v ( *P* **·** *Q* ) 1, Dist

**[3]** 2. *Q* 1, DN

**[4]** 2. *R*  **·**  ( *S* **·** *P* ) 1, Assoc

**[5]** 2. ~ ( *P* v *Q* ) 1, DM

**[6]** 2. *P* **·**  *R* 1, DN

**[7]** 2. *Q* **·** *P* 1, Com

**[8]** 2. ( *P* v *Q* ) **·** ( *P* v *R* ) 1, Dist

**[9]** 2. *R* v [ *S* v ( *P* ⊃  *Q* ) ] 1, Assoc

**[10]** 2. ~ ~ *P* **·** ~ ~ *Q* 1, DM

**[11]** 2. [*P* **·**  ( *S*  ⊃ *R* )] v [*P* **·**  ( *Q*  ⊃ *L* )] 1, Dist

**[12]** 2. ~ ( ~ *P*  **·** ~ *Q* ) **· ~** ( ~ *R* **·** ~ *S* ) 1, DM

**[13]** 2. { [ *R* ⊃ ( *P* **·** *Q* ) ] v *L* } v *M* 1, Assoc

**[14]** 2. ~ [ ( ~ *P* v *L*) ⊃ *K* ] v [ ( *S* v *R* ) ⊃ *Q* ] 1, Com

**[15]** 2. ( *S* v *P* ) **·** [ S v ( *Q* ⊃ *M*)] 1, Dist

**III.**

**[1]** 1. ~ ( *S* ∙ *L* )

2. ( *Q* ∙ *R* ) ⊃ ( *M* ≡ *N* )

3. *P* ⊃ ( *Q* ∙ *R* )

4. ( *M* ≡ *N* ) ⊃ ( *S* ∙ *L* ) / ~ *P*

5. ~ ( *M* ≡ *N* ) 1, 4, MT

6. ~ ( *Q* ∙ *R* ) 2, 5, MT

7. ~ *P* 3, 6, MT

**[2]** 1. ~ *S*

2. *R* ⊃ ( *S* v *Q* )

3. *R*  ∙ *L* / *Q*

4. *R* 3, Simp

5. *S* v *Q* 2, 4, MP

6. *Q* 1 5, DS

**[3]** 1. ~ ( ~ *P* v ~ *Q* )

2. ( *P* ∙ *Q* ) ⊃ ( *R* v *S* ) / *R* v *S*

3. ~ ~ *P* ∙ ~ ~ *Q* 1, DM

4. *P* ∙ ~ ~ *Q* 3, DN

5. *P* ∙ *Q* 4, DN

6. *R* v *S* 2, 5, MP

**[4]** 1. *S* ⊃ ( *L* v *M* )

2. ( *P* ∙ *Q* ) ⊃ ~ *R*

3. ( *S* v *P* ) ∙ ( *S* v *Q* ) / ( *L* v *M* ) v ~ *R*

4. *S* v ( *P* ∙ *Q* ) 3, Dist

5. [ *S* ⊃ ( *L*  v *M* ) ] ∙ [ ( *P* ∙ *Q* ) ⊃ ~ *R* ] 1, 2, Conj

6. ( *L* v *M* ) v ~ *R* 4, 5, CD

**[5]** 1. *P* ⊃ ( *Q* ∙ *R* )

2. ~ *Q*  ∙ *S* / ~ *P*

3. ~ *Q* 2, Simp

4. ~ *Q* v ~ *R* 3, Add

5. ~ ( *Q* ∙ *R* ) 4, DM

6. ~ *P* 1, 5, MT

**[6]** 1. ( *P* v *Q* ) ⊃ ~ ( *R* ≡ *S* )

2. *R* ≡ *S* / ~ *P*

3. ~ ~ ( *R* ≡ *S* ) 2, DN

4. ~ ( *P* v *Q* ) 1, 3, MT

5. ~ *P* ∙ ~ *Q* 4, DM

6. ~ *P* 5, Simp

**[7]** 1. [ *S* ⊃ ( *L* ∙ *M* ) ] ∙ [ *P* ⊃ ( *M* ∙ *Q* ) ]

2. *S* v *P* / *M*

3. ( *L*  ∙ *M* ) v ( *M* ∙ *Q* ) 1, 2, CD

4. ( *M* ∙ *L* ) v ( *M* ∙ *Q* ) 3, Com

5. *M* ∙ ( *L* v *Q* ) 4, Dist

6. *M* 5, Simp

**[8]** 1. *P* ⊃ ( *Q* ∙ *R* )

2. *P* ∙ ( *S* v *R* )

3. *L* ⊃ ( *M* ≡ *P* ) / ( *Q*  ∙ *R* ) v ( *M* ≡ *P* )

4. *P* 2, Simp

5. *P* v *L* 4, Add

6. [ *P* ⊃ ( *Q* ∙ *R* ) ] ∙ [ *L* ⊃ ( *M*  ≡ *P* ) ] 1, 3, Conj

7. ( *Q* ∙ *R* ) v ( *M* ≡ *P* ) 5, 6, CD

**[9]** 1. ~ ( *P* ∙ *Q* )

2. ( ~ *P* v ~ *Q* ) ⊃ ( *R*  ∙ *S* )

3. ( *R*  v *~ Q* ) ⊃ ~ *T* / ~ *T*

4. ~ *P* v ~ *Q*  1, DM

5. *R* ∙ *S* 2, 4, MP

6. *R* 5, Simp

7. *R*  v *~ Q* 6, Add

8. ~ *T* 3, 7, MP

**[10]** 1. *P* ∙ *Q*

2. ( *P* v *R* ) ⊃ ( *S* ∙ *L* )

3. ( *S* ∙ *L* ) ⊃ ( *R* v *S* ) / *R* v *S*

4. *P* 1, Simp

5. *P* v *R* 4, Add

6. *S* ∙ *L* 2, 5, MP

7. *R* v *S* 3, 6, MP

**[11]** 1. ( *P* v *Q* ) v ~ *R*

2. [ ( *P*  v *Q* ) ⊃ *Q* ] ∙ ( ~ *R*  ⊃ *S* )

3. ~ *P* / *Q* v ( *S* ∙ ~ *R* )

4. *P* v ( *Q* v ~ *R* ) 1, Assoc

5. *Q* v ~ *R* 3, 4, DS

6. *Q* v *S* 1, 2, CD

7. ( *Q* v *S* ) ∙ ( *Q* v ~ *R* ) 5, 6, Conj

8. *Q* v ( *S* ∙ ~ *R* ) 7, Dist

**[12]** 1. *P* ∙ ~ *Q*

2. *R* ⊃ *Q* / ~ *R* ∙ *P*

3. ~ *Q* 1, Simp

4. ~ *R* 2, 3, MT

5. *P* 1, Simp

6. ~ *R* ∙ *P* 4, 5, Conj

**[13]** 1. ~ *P*

2. *Q* v ( *R* ∙ *P* ) / *Q*

3. ( *Q* v *R* ) ∙ ( *Q* v *P* ) 2, Dist

4. *Q* v *P* 3, Simp

5. *Q* 1, 4, DS

**[14]** 1. *S* ⊃ ( *Q* ∙ *M* )

2. *S* v ( *P* ∙ *L* )

3. *P* ⊃ ( *Q* ∙ *R* ) / *Q* ∙ ( *M* v *R* )

4. ( *S* v *P* ) ∙ ( *S* v *L* ) 2, Dist

5. *S* v *P* 4, Simp

6. [ *S* ⊃ ( *Q* ∙ *M* ) ] ∙ [ *P* ⊃ ( *Q* ∙ *R* ) ] 1, 3, Conj

7. ( *Q* ∙ *M* ) v ( *Q* ∙ *R* ) 5, 6, CD

8. *Q* ∙ ( *M* v *R* ) 7, Dist

**[15]** 1. *P*

2. ( *R* v *Q* ) ∙ *S*

3. *P* ⊃ ( *L* ≡ *M* )

4. ( *L*  ≡ *M* ) ⊃ ~ ( *S* ∙ *R* ) / *S* ∙ *Q*

5. *S* ∙ ( *R* v *Q* ) 2, Com

6. ( *S* ∙ *R* ) v ( *S* ∙ *Q* ) 5, Dist

7. *P* ⊃ ~ ( *S* ∙ *R* ) 3, 4, HS

8. ~ ( *S* ∙ *R* ) 1, 7, MP

9. *S* ∙ *Q* 6, 8, DS

**[16]** 1. *P* ⊃ ~ *Q*

2. ( *P* ∙ *R* ) v ( *P* ∙ *S* )

3. *L* v *Q* / *L*

4. *P* ∙ ( *R* v *S* ) 2, Dist

5. *P* 4, Simp

6. ~ *Q* 1, 5, MP

7. *L* 3, 6, DS

**[17]** 1. *P*  v *Q*

2. ( *R* ∙ *S* ) ∙ *L* / [ ( *L* ∙ *R* ) ∙ *P* ] v [ ( *L* ∙ *R* ) ∙ *Q* ]

3. *L* ∙ ( *R* ∙ *S* ) 2, Com

4. ( *L* ∙ *R* ) ∙ *S* 3, Assoc

5. *L*  ∙ *R*  4, Simp

6. ( *L* ∙ *R* ) ∙ ( *P*  v *Q* ) 1, 5, Conj

7. [ ( *L* ∙ *R* ) ∙ *P* ] v [ ( *L* ∙ *R* ) ∙ *Q* ] 6, Dist

**[18]** 1. ( *P* v *Q* ) ⊃ ~ *R*

2. *S* ∙ *R* / ~ *P*

3. *R* 2, Simp

4. ~ ~ *R* 3, DN

5. ~ ( *P* v *Q* ) 1, 4, MT

6. ~ *P* ∙ ~ *Q* 5, DM

7. ~ *P* 6, Simp

**[19]** 1. *P*

2. *Q* v ( *R* v *S* )

3. *R* ⊃ ~ *P* / *Q* v *S*

4. ~ ~ *P* 1, DN

5. ~ *R* 3, 4, MT

6. *Q* v ( *S* v *R* ) 2, Com

7. ( *Q* v *S* ) v *R* 6, Assoc

8. *Q* v *S* 5, 7, DS

**[20]** 1. ~ *R*

2. ( *Q* ⊃ *R* ) ∙ ( *S* ⊃ *L* )

3. *Q* / ~ *M* v *L*

4. *Q* v *S* 3, Add

5. *R* v *L* 2, 4, CD

6. *L* 1, 5, DS

7. *L* v ~ *M* 6, Add

8. ~ *M* v *L* 7, Com

**[21]** 1. *P* ⊃ ~ ~ *R*

2. *P* ∙ ~ ( *S* ∙ *R* ) / ~ *S*

3. *P* 2, Simp

4. ~ ~ *R* 1, 3, MP

5. ~ ( *S* ∙ *R* ) 2, Simp

6. ~ *S* v ~ *R* 5, DM

7. ~ *S* 4, 6, DS

**[22]** 1. ~ *P*  ∙ *Q*

2. ~ ( ~ *P* ∙ ~ *R* )

3. ( *R* v *S* ) ⊃ ~ ( *L* v *M* ) / ~ ( *M* v *L* )

4. ~ ~ *P* v ~ ~ *R* 2, DM

5. *P* v ~ ~ *R* 4, DN

6. *P* v *R* 5, DN

7. ~ *P* 1, Simp

8. *R* 6, 7, DS

9. *R*  v *S* 8, Add

10. ~ ( *L* v *M* ) 3, 9, MP

11. ~ ( *M* v *L* ) 10, Com

**[23]** 1. ~ *P*

2. ( *Q*  v ~ *R* ) ⊃ ( *P* ∙ *S* ) / *R*

3. ~ *P* v ~ *S* 1, Add

4. ~ ( *P* ∙ *S* ) 3, DM

5. ~ ( *Q* v ~ *R* ) 2, 4, MT

6. ~ *Q* ∙ ~ ~ *R* 5, DM

7. ~ ~ *R* 6, Simp

8. *R* 7, DN

**[24]** 1. ~ *P*

2. ( *P* ∙ *Q* ) v ( *R* ∙ *S* ) / ~ ( *P* v ~ *R* )

3. ~ *P* v ~ *Q* 1, Add

4. ~ ( *P* ∙ *Q* ) 3, DM

5. *R* ∙ *S* 2, 4, DS

6. *R* 5, Simp

7. ~ ~ *R*  6, DN

8. ~ *P* ∙ ~ ~ *R* 1, 7, Conj

9. ~ ( *P* v ~ *R* ) 8, DM

**[25]** 1. ~ ( *P* ∙ *Q* )

2. *R*

3. [ *S* ⊃ ( *P* ∙ *Q* ) ] ∙ ( *R* ⊃ *L* )

4. *S* v *R* / ~ *P* v ( ~ *Q* ∙ *L* )

5. ( *P* ∙ *Q* ) v *L* 3, 4, CD

6. *L* 1, 5, DS

7. ~ *P* v ~ *Q*  1, DM

8. *L* v ~ *P* 6, Add

9. ( ~ *P* v ~ *Q* ) ∙ ( *L* v ~ *P* ) 7, 8, Conj

10. ( ~ *P* v ~ *Q* ) ∙ ( ~ *P* v *L* ) 9, Com

11. ~ *P* v ( ~ *Q ∙* *L* ) 10, Dist

**[26]** 1. *P* v ( *Q* ⊃ *R* )

2. *P* ⊃ *R*

3. ~ *Q* ⊃ *S*

4. ~ *R* / *S* v *K*

5. ~ *P* 2, 4, MT

6. *Q* ⊃ *R* 1, 5, DS

7. ~ *Q* 4, 6, MT

8. *S* 3, 7, MP

9. *S* v *K* 8, Add

**[27]** 1. ( *P* v *Q* ) ⊃ *R*

2. ~ *R*

3. ~ *S* ⊃ ( *Q* v *R* ) / *S*

4. ~ ( *P* v *Q* ) 1, 2, MT

5. ~ *P* ∙ ~ *Q* 4, DM

6. ~ *Q* 5, Simp

7. ~ *Q* ∙ ~ *R* 2, 6, Conj

8. ~ ( *Q* v *R* ) 7, DM

9. ~ ~ *S* 3, 8, MT

10. *S* 9, DN

**[28]** 1. *P* ⊃ *Q*

2. *R* v *P*

3. *S* ⊃ ( *L* v ~ *R* )

4. *S* ∙ ~ *L* / *Q* v *M*

5. *S* 4, Simp

6. *L* v ~ *R* 3, 5, MP

7. ~ *L* 4, Simp

8. ~ *R* 6, 7, DS

9. *P* 2, 8, DS

10. *Q* 1, 9, MP

11. *Q* v *M* 10, Add

**[29]** 1. *P* ⊃ ~ *Q*

2. *P* **∙** ( *R* v *Q* )

3. *R* ⊃ *S* / *S*

4. *P* 2, Simp

5. ~ *Q* 1, 4, MP

6. *R* v *Q* 2, Simp

7. *R* 5, 6, DS

8. *S* 3, 7, MP

**[30]** 1. *P* ⊃ *Q*

2. ~ ( *L* v ~ *P* )

3. *L* v *S* / *Q* **∙**  *S*

4. ~ *L* **∙**  ~ ~ *P* 2, DM

5. ~ *L* 4, Simp

6. ~ ~ *P* 4, Simp

7. *P* 6, DN

8. *Q* 1, 7, MP

9. *S* 3, 5, DS

10. *Q* **∙** *S* 8, 9, Conj

**[31]** 1. ( *Q* v *S* ) ⊃ ~ *P*

2. *Q* v ( *R* **∙** *S* )

3. ( *Q* v *R* ) ⊃ ~ *L*

4. *K* ⊃ ( *L* v *P* ) / ~ *K*

5. ( *Q* v *R* ) **∙** ( *Q* v *S* ) 2, Dist

6. *Q*  v *R* 5, Simp

7. ~ *L* 3, 6, MP

8. *Q* v *S* 5, Simp

9. ~ *P* 1, 8, MP

10. ~ *L* **∙** ~ *P* 7, 9, Conj

11. ~ ( *L* v *P* ) 10, DM

12. ~ *K* 4, 11, MT

**[32]** 1. ( *P* v *Q* ) ⊃ ~ *R*

2. *P* ∙ ( *S* v *R* )

3. ( *N* ∙ *M* ) ∙ *L* / *N* ∙ *S*

4. *P* 2, Simp

5. *P* v *Q* 4, Add

6. ~ *R* 1, 5, MP

7. *S* v *R* 2, Simp

8. *S* 6, 7, DS

9. *N* ∙ *M* 3, Simp

10. *N* 9, Simp

11. *N* ∙ *S* 8, 10, Conj

**[33]** 1. ~ ( *J* ≡ *M* ) ∙ *R*

2. [ *S* ⊃ ( *L* **∙**  *M* ) ] v ( *N*  ∙ *J* )

3. [ *S* ⊃ ( *L* **∙** *M* ) ] ⊃ ( *J* ≡ *M* ) / ( *J* v *K* ) **∙** ( *R* v ~ *H* )

4. ~ ( *J* ≡ *M* ) 1, Simp

5. ~ [ *S* ⊃ ( *L* **∙**  *M* ) ] 3, 4, MT

6. *N* **∙** *J* 2, 5, DS

7. *J* 6, Simp

8. *J* v *K* 7, Add

9. *R* 1, Simp

10. *R* v ~ *H* 9, Add

11. ( *J* v *K* ) **∙** ( *R* v ~ *H* ) 8, 10, Conj

**[34]** 1. ~ [ ( ~ *P* v ~ *Q* ) v ( *R* v ~ *S* ) ]

2. *P* ⊃ ( *R* v *L* ) / *L*

3. ~ ( ~ *P* v ~ *Q* ) ∙ ~ ( *R* v ~ *S* ) 1, DM

4. ~ ( ~ *P* v ~ *Q* ) 3, Simp

5. ~ ~ *P* **∙** ~ ~ *Q* 4, DM

6. ~ ~ *P* 5, Simp

7. *P* 6, DN

8. *R* v *L* 2, 7, MP

9. ~ ( *R* v ~ *S* ) 3, Simp

10. ~ *R* **∙** ~ ~ *S* 9, DM

11. ~ *R* 10, Simp

12. *L* 8, 11, DS

**[35]** 1. ( *R* ∙ *M* ) ⊃ *L*

2. ( ~ *M* v *Q* ) ⊃ ~ ( *R* ∙ *S* )

3. *R* **∙** ~ *L*  / ~ ( *L* v *S* )

4. ~ *L* 3, Simp

5. ~ ( *R* **∙** *M* ) 1, 4, MT

6. ~ *R* v ~ *M*  5, DM

7. *R* 3, Simp

8. ~ ~ *R* 7, DN

9. ~ *M*  6, 8, DS

10. ~ *M* v *Q* 9, Add

11. ~ ( *R* **∙** *S* ) 2, 10, MP

12. ~ *R* v ~ *S* 11, DM

13. ~ *S* 8, 12, DS

14. ~ *L* **∙** ~ *S* 4, 13, Conj

15. ~ ( *L* v *S* ) 14, DM

***Exercises 8F***

**I.**

**[1]** 2. ~ *S* ⊃ ~ *R* 1, Trans

**[2]** 2. *S* ⊃ ( *R* ⊃ *Q* ) 1, Exp

**[3]** 2. ~ *P* v *Q* 1, Impl

**[4]** 2. *R* v *R* 1, Taut

**[5]** 2. ( *R* ⊃ *S* ) **·** ( *S* ⊃ *R* ) 1, Equiv

**[6]** 2. *Q* ⊃ *P* 1, Trans

**[7]** 2. *P* ≡ *Q* 1, Equiv

**[8]** 2. ( *P*  **·** *Q* ) ⊃ *R*  1, Exp

**[9]** 2. *P* ⊃ *Q* 1, Impl

**[10]** 2. *P*  1, Taut

**[11]** 2. ( *P* v *Q* ) ⊃ [ *R* ⊃ ( *S* v *L* ) ] 1, Exp

**[12]** 2. ~ *R* ⊃ ~ ( *P*  **·**  *Q* ) 1, Trans

**[13]** 2. [ ( *S* v *L* ) **·**  ( *Q* v *K* ) ] v [ ~ ( *S* v *L* ) **·** ~ ( *Q* v *K* ) ] 1, Equiv

**[14]** 2. *M* **·** ~ *P* 1, Taut

**[15]** 2. [ *P* v ( *Q* · *R* ) ] ⊃ ( *S* · *L* ) 1, Impl

**II.**

**[1]** 2. *R* ⊃ *S* 1, Trans

**[2]** 2. *R* ≡ *S* 1, Equiv

**[3]** 2. *Q* 1, Taut

**[4]** 2. ( *R* **·**  *S* ) ⊃ *P* 1, Exp

**[5]** 2. *S* ⊃ *P* 1, Impl

**[6]** 2. ( *P* v *Q* ) ≡ ( *S* v *R* ) 1, Equiv

**[7]** 2. *S* v *S* 1,Taut

**[8]** 2. [ ( *Q* v *L* ) **·** ~ *K* ] ⊃ ( *M* ⊃ *P* ) 1, Impl

**[9]** 2. [ ( *R* v *K* ) ⊃ ( *Q* v *S* ) ] **·** [ ( *Q* v *S* ) ⊃ ( *R* v *K* ) ] 1, Equiv

**[10]** 2. ( *S* v *Q* ) ⊃ ( *P* **·** *Q* ) 1, Trans

**III.**

**[1]** 1. ( ~ *T* v ~ *R* ) ⊃ *S*

2. ~ ( *T* **·** *R* ) / S

3. ~ *T* v ~ *R* 2, DM

4. *S*  1, 3, MP

**[2]** 1. *S* ⊃ *P*

2. ~ *P* v ( *R* **·** *Q* ) / *S* ⊃ ( *R* **·**  *Q* )

3. *P* ⊃ ( *R* **·** *Q* ) 2, Impl

4. *S* ⊃ ( *R*  **·** *Q* ) 1, 3, HS

**[3]** 1. *T* v *S*

2. ~ ~ *R* / (*T* v *S*) **·** *R*

3. *R* 2, DN

4. ( *T* v *S* ) **·** *R* 1, 3, Conj

**[4]** 1. ( ~*T* ⊃ *S* ) **·** ( *R* ⊃ *P* )

2. *T* ⊃ *R*  / *S* v *P*

3. ~ *T* v *R* 2, Impl

4. *S* v *P* 1, 3, CD

**[5]** 1. *S* ⊃ ( *P*  ⊃ *Q* )

2. ~ *Q* / ~ ( *S* **·** *P* )

3. ( *S* **·**  P ) ⊃ *Q* 1, Exp

4. ~ ( *S*  **·**  *P* ) 2, 3, MT

**[6]** 1. ( *T* v *Q* ) v *S*

2. ~ *T* / *Q*  v *S*

3. *T* v ( *Q* v *S* ) 1, Assoc

4. *Q* v *S* 2, 3, DS

**[7]** 1. *S* v ( *T* **·**  *R*) / *S* v *T*

2. ( *S* v *T* ) **·** ( *S* v *R* ) 1, Dist

3. *S* v *T*  2, Simp

**[8]** 1. *S* v *S* / *S* v *T*

2. *S*  1, Taut

3. *S*  v *T* 2, Add

**[9]** 1. *P* ≡ *S* / *P* ⊃ *S*

2. ( *P* ⊃ *S* ) **·** ( *S* ⊃ *P* ) 1, Equiv

3. *P* ⊃ *S*  2, Simp

**[10]** 1. ~ *T* ⊃ ~ *P*

2. *T* ⊃ *S* / *P* ⊃ *S*

3. *P* ⊃ *T* 1, Trans

4. *P* ⊃ *S* 2, 3, HS

**[11]** 1. ~ ( *T* v *S* ) ⊃ ( *P* v *Q* )

2. ~ *T* **·** ~ *S* / ( *P* v *Q* )

3. ~ ( *T* v *S* ) 2, DM

4. *P* v *Q* 1, 3, MP

**[12]** 1. *R* v ( *P* v *S*)

2. ~ *S* / *R* v *P*

3. ( *R* v *P* ) v *S* 1, Assoc

4. *P* 2, 3, DS

**[13]** 1. ( *S* **·**  *T* ) **·**  *R* / *S*

2. *S* **·**  ( *T* **·**  *R* ) 1, Assoc

3. *S* 2, Simp

**[14]** 1. *T* **·** ( *S* v *R* )

2. ~ ( *T* **·**  *S* ) / *T*  **·** *R*

3. ( *T* **·**  *S* ) v ( *T*  **·**  *R* ) 1, Dist

4. *T*  **·** *R* 2, 3, DS

**[15]** 1. ( *R* **·**  *P* ) v ( ~ *R* **·** ~ *P* )

2. ( *R* ≡ *P* ) ⊃ *T* / *T*

3. *R* **≡** *P* 1, Equiv

4. *T* 2, 3, MP

**IV.**

**[1]** 1. ( *S* v ~ *P* ) v *R*

2. ~ *S*  / *P* ⊃ *R*

3. *S* v ( ~ *P* v *R* ) 1, Assoc

4. ~ *P* v *R* 2, 3, DS

5. *P* ⊃ *R* 4, Impl

**[2]** 1. ~ *P*

2. (*Q* v *P*) v *R*  / *Q* v *R*

3. (*P* v *Q*) v *R*  2, Com

4. *P* v ( *Q* v *R* ) 3, Assoc

5. *Q* v *R* 1, 4, DS

**[3]** 1. ~ ( *P* **·** *P* ) / *P* ⊃ *Q*

2. ~ *P* 1, Taut

3. ~ *P* v *Q* 2, Add

4. *P* ⊃ *Q* 3, Impl

**[4]** 1. *Q* v *R*

2. [ *Q* ⊃ ( *S* **·** *P* ) ] **·** [ *R* ⊃ ( *P*  **·** *L* ) ] / *P*

3. ( *S* **·** *P* ) v ( *P* **·** *L* ) 1, 2, CD

4. ( *P* **·** *S* ) v ( *P* **·** *L* ) 3, Com

5. *P* **·** ( *S* v *L* ) 4, Dist

6. *P* 5, Simp

**[5]** 1. ~ *Q* ⊃ ~ *P*

2. ( *P* **·** *R* ) ⊃ *S*

3. *P* / *Q* v *S*

4. *P* ⊃ *Q* 1, Trans

5. *Q* 3, 4, MP

6. *Q* v *S* 5, Add

**[6]** 1. *P* ⊃ *Q*

2. ( *R* · *S* ) ⊃ *P*

3. *R* / *S* ⊃ *Q*

4. *R* ⊃ ( *S* ⊃ *P* ) 2, Exp

5. *S* ⊃ *P* 3, 4, MP

6. *S* ⊃ *Q* 1, 5, HS

**[7]** 1. *P* v ( *T* · *R* )

2. *S* ⊃ ~ ( *P* v *T* ) / ~ *S*

3. ( *P* v *T* ) · ( *P* v *R* ) 1, Dist

4. P v T 3, Simp

5. ~ ~ ( *P* v *T* ) 4, DN

6. ~ *S* 2, 5, MT

**[8]** 1. ~ ( *S* v *Q* ) / ~ *P* ⊃ ~ *S*

2. ~ *S* **·** ~ *Q*  1, DM

3. ~ *S* 2, Simp

4. ~ *S* v *P* 3, Add

5. *S* ⊃ *P*  4, Impl

6. ~ *P* ⊃ ~ *S* 5, Trans

**[9]** 1. ~ *P* **·**  *Q*

2. *Q* ⊃ ( *R* ⊃ *P* ) / ~ *R*

3. *Q* 1, Simp

4. *R* ⊃ *P* 2, 3, MP

5. ~ *P*  1, Simp

6. ~ *R* 4, 5, MT

**[10]** 1. ~ *P*

2. ~ *Q* ⊃ *P*

3. ~ *Q* v ( ~ *P* ⊃ *R* ) / *R* v *S*

4. ~ ~ *Q* 1, 2, MT

5. ~ *P* ⊃ *R* 3, 4, DS

6. *R* 1, 5, MP

7. *R* v *S*  6, Add

**[11]** 1. *P* v *Q*

2. ( *Q* ⊃ *R* ) **·** ( *T* ⊃ *A* )

3. ( *P* ⊃ *B* ) **·**  ( *C* ⊃ *D* ) / *B* v *R*

4. *P* ⊃ *B* 3, Simp

5. *Q* ⊃ *R* 2, Simp

6. ( *P* ⊃ *B* ) **·**  ( *Q* ⊃ *R* ) 4, 5, Conj

7. *B* v *R* 1, 6, CD

**[12]** 1. *P*  ⊃ ( ~ *Q* · *R* )

2. *R* ⊃ *Q* / ~ *P*

3. ~ *R* v *Q* 2, Impl

4. *Q* v ~ *R* 3, Com

5. ~ ~ *Q* v ~ *R* 4, DN

6. ~ ( ~ *Q* · *R* ) 5, DM

7. ~ *P* 1, 6, MT

**[13]** 1. [ *P* ⊃ ( *Q* · *R* ) ] · [ *S* ⊃ ( *L* · *Q* ) ]

2. *P* · *R* / *Q* · ( *R* v *L* )

3. *P* 2, Simp

4. *P* v *S* 3, Add

5. ( *Q* · *R* ) v ( *L* · *Q* ) 1, 4, CD

6. ( *Q* · *R* ) v ( *Q* · *L* ) 5, Com

7. *Q* · ( *R* v *L* ) 6, Dist

**[14]** 1. ~ *P* ⊃ ( *Q* v *R* ) / ( ~ *P* · ~ *Q* ) ⊃ *R*

2. ~ ~ *P* v ( *Q* v *R* ) 1, Impl

3. *P* v ( *Q* v *R* ) 2, DN

4. ( *P* v *Q* ) v *R* 3, Assoc

5. ~ ~ ( *P* v *Q* ) v *R* 4, DN

6. ~ ( *P* v *Q* ) ⊃ *R* 5, Impl

7. ( ~ *P* · ~ *Q* ) ⊃ *R* 6, DM

**[15]** 1. *P* ⊃ ( *Q* · *R* )

2. *Q* ⊃ ~ *R* / *P* ⊃ *S*

3. ~ *Q* v ~ *R*  2, Impl

4. ~ ( *Q* · *R* ) 3, DM

5. ~ *P* 1, 4, MT

6. ~ *P* v *S* 5, Add

7. *P* ⊃ *S* 6, Impl

**[16]** 1. *T* ⊃ ( *R* · *S* )

2. *R* ⊃ ( *S* ⊃ *P* ) / ( *P* v ~*T* ) v *Q*

3. ( *R* **·** *S* ) ⊃ *P*  2, Exp

4. *T* ⊃ *P* 1, 3, HS

5. ~*T* v *P* 4, Impl

6. *P* v ~*T* 5, Com

7. ( *P* v ~*T* ) v *Q* 6, Add

**[17]** 1. ~ ( *P* **·** *Q* ) ⊃ ( *R* v *S* )

2. ~ *P* v ~ *Q*

3. *T* / ( *T* **·** *R* ) v ( *T* **·** *S* )

4. ~ ( *P* **·** *Q* ) 2, DM

5. *R* v *S* 1, 4, MP

6. *T* **·** ( *R* v *S* ) 3, 5, Conj

7. ( *T* **·** *R* ) v ( *T* **·** *S* ) 6, Dist

**[18]** 1. ~ ( *P* · *Q* )

2. ( *P* · *Q* ) v ( *R* · *S* ) / *Q* v *S*

3. *R* · *S* 1, 2, DS

4. *S* 3, Simp

5. *S* v *Q* 4, Add

6. *Q* v *S* 5, Com

**[19]** 1. *P* ⊃ ( *Q*  v *R* )

2. *S* ⊃ ~ ( *Q* v *R* ) / ~ ( *P* · *S* )

3. ~ ( *Q* v *R* ) ⊃ ~ *P* 1, Trans

4. *S* ⊃ ~ *P* 2, 3, HS

5. ~ ~ *P* ⊃ ~ *S* 4, Trans

6. *P* ⊃ ~ *S* 5, DN

7. ~ *P* v ~ *S* 6, Impl

8. ~ ( *P* · *S* ) 7, DM

**[20]** 1. *T* v *S*

2. ~ *T*

3. ( *S* v *S* ) ⊃ ( ~ *P* v *R* ) / ~ *R* ⊃ ~ *P*

4. *S*  1, 2, DS

5. *S* v *S* 4, Taut

6. ~ *P* v *R* 3, 5, MP

7. *P* ⊃ *R* 6, Impl

8. ~ *R* ⊃ ~ *P* 7, Trans

**[21]** 1. ( *P* v *Q* ) v ~ *R*

2. [ ( *P* v *Q* ) ⊃ *Q* ] · ( ~ *R* ⊃ *S* )

3. ~ *P* / *Q* v ( *S* · ~ *R* )

4. *Q*  v *S* 1, 2, CD

5. *P* v ( *Q* v ~ *R*) 1, Assoc

6. *Q* v ~ *R* 3, 5, DS

7. ( *Q* v *S* ) · ( *Q* v ~ *R* ) 4, 6, Conj

8. *Q* v ( *S* · ~ *R* ) 7, Dist

**[22]** 1. ( ~ *P* v *Q* ) ⊃ *R*

2. ( *S* v *R* ) ⊃ *P*

3. *P* ⊃ *Q* / *Q*

4. ( *P* ⊃ *Q* ) ⊃ *R* 1, Impl

5. *R* 3, 4, MP

6. *R* v *S* 5, Add

7. *S* v *R* 6, Com

8. *P* 2, 7, MP

9. *Q* 3, 8, MP

**[23]** 1. *P* ⊃ *Q*

2. *R* ⊃ ( *S* ⊃ *P* )

3. *Q* ⊃ ~ *P* / ~ *R* v ~ *S*

4. ( *R* · *S* ) ⊃ *P* 2, Exp

5. *P* ⊃ ~ *P* 1, 3, HS

6. ~ *P* v ~ *P* 5, Impl

7. ~ *P* 6, Taut

8. ~ ( *R* · *S* ) 4, 7, MT

9. ~ *R* v ~ *S* 8, DM

**[24]** 1. ~ *Q*

2. *R* ⊃ *Q*

3. ~ *S* ⊃ *M*

4. *R* v ( *S* ⊃ *Q* ) / *M* v *K*

5. ~ *R* 1, 2, MT

6. *S* ⊃ *Q* 4, 5, DS

7. ~ *S* 1, 6, MT

8. *M* 3, 7, MP

9. *M* v *K* 8, Add

**[25]** 1. ~ *P* ⊃ *Q*

2. ~ *R* ⊃ ~ ( ~ *S* v *P* )

3. *Q* ⊃ ~ *S* / *R*

4. ~ *P* ⊃ ~ *S* 1, 3, HS

5. *S* ⊃ *P* 4, Trans

6. ~ *S* v *P* 5, Impl

7. ~ ~ ( ~ *S* v *P* ) 6, DN

8. ~ ~ *R* 2, 7, MT

9. *R* 8, DN

**[26]** 1. ~ *P*

2. ( *Q* ⊃ *P* ) · ( *S* ⊃ *L* )

3. *Q* / *M* ⊃ *L*

4. *Q*  v *S* 3, Add

5. *P* v *L* 2, 4, CD

6. *L* 1, 5, DS

7. *L* v ~ *M* 6, Add

8. ~ *M* v *L* 7, Com

9. *M* ⊃ *L* 8, Impl

**[27]** 1. *T* ≡ *R*

2. ( ~ *R* ⊃ ~ *T* ) ⊃ ( *P* **·** ~ *S* ) / ~ *S* v *T*

3. ( *T* ⊃ *R* ) **·**  ( *R* ⊃ *T* ) 1, Equiv

4. *T* ⊃ *R* 3, Simp

5. ~ *R* ⊃ ~ *T*  4, Trans

6. *P* **·**  ~ *S* 2, 5, MP

7. ~ *S* 6, Simp

8. ~ *S* v *T* 7, Add

**[28]** 1. *P* ⊃ ( *Q* v *R* )

2. ( *S* v *T* ) ⊃ *R*

3. ~ *Q* **·** ~ *R* / ~ *P* **·** ~ ( *S* v *T* )

4. ~ ( *Q* v *R* ) 3, DM

5. ~ *P* 1, 4, MT

6. ~ *R* 3, Simp

7. ~ ( *S* v *T* ) 2, 6, MT

8. ~ *P*  **· ~** ( *S* v *T* ) 5, 7, Conj

**[29]** 1. ~ *R* v ~ *S*

2. *P* v [ *Q* v ( *R* · *S* ) ]

3. *L* ⊃ ~ *P* / *L* ⊃ *Q*

4. ( *P*  v *Q* ) v ( *R* · *S* ) 2, Assoc

5. ~ ( *R* · *S* ) 1, DM

6. *P* v *Q* 4, 5, DS

7. ~ ~ *P* v *Q* 6, DN

8. ~ *P* ⊃ *Q* 7, Impl

9. *L* ⊃ *Q* 3, 8, HS

**[30]** 1. ( *P* · *Q* ) ⊃ *R*

2. *P*

3. ~ *Q* v *S* / ~ *Q* v ( *R* · *S* )

4. *P* ⊃ ( *Q* ⊃ *R* ) 1, Exp

5. *Q* ⊃ *R* 2, 4, MP

6. ~ *Q* v *R* 5, Impl

7. ( ~ *Q* v *R* ) · ( ~ *Q* v *S* ) 3, 6, Conj

8. ~ *Q* v ( *R* · *S* ) 7, Dist

**[31]** 1. ( *P* v *Q* ) ⊃ *S*

2. *R* v ( *P* v *Q* )

3. ~ *R*

4. ~ *T* ⊃ *R* / *S* ≡ *T*

5. *P* v *Q* 2, 3, DS

6. *S*  1, 5, MP

7. ~ ~ *T*  3, 4, MT

8. *T*  7, DN

9. *S* **·** *T* 6, 8, Conj

10. ( *S* **·** *T* ) v ( ~ *S* **·**  ~ *T* ) 9, Add

11. *S* ≡ *T* 10, Equiv

**[32]** 1. ~ *P* ⊃ ( *Q* v *R* )

2. ( *S* v *Q* ) ⊃ *R*

3. ~ *R* / *P*

4. ~ ( *S* v *Q* ) 2, 3, MT

5. ~ *S* · ~ *Q* 4, DM

6. ~ *Q* 5, Simp

7. ~ *Q* · ~ *R* 3, 6, Conj

8. ~ ( *Q* v *R* ) 7, DM

9. ~ ~ *P* 1, 8, MT

10. *P* 9, DN

**[33]** 1. *S* ⊃ *Q*

2. *R* · *S*

3. *Q* ⊃ ( *L* v ~ *R* ) / *L*

4. *S* 2, Simp

5. *Q* 1, 4, MP

6. *L* v ~ *R* 3, 5, MP

7. *R* 2, Simp

8. ~ ~ *R* 7, DN

9. *L* 6, 8, DS

**[34]** 1. *C* ⊃ *F*

2. *A* ⊃ *B*

3. ~ *F* **·**  *A*

4. ~ *C* ⊃ ( *B* ⊃ *D* ) / *B* **·**  *D*

5. ~ *F* 3, Simp

6. ~ *C* 1, 5, MT

7. *B* ⊃ *D* 4, 6, MP

8. *A* 3, Simp

9. *B* 2, 8, MP

10. *D* 7, 9, MP

11. *B* **·** *D* 9, 10, Conj

**[35]** 1. ~ *P* v *Q*

2. *R* · ( *S* v *P* )

3. ~ *S* / *Q*

4. *P* ⊃ *Q* 1, Impl

5. *S* v *P* 2, Simp

6. *P* 3, 5, DS

7. *Q* 4, 6, MP

**[36]** 1. *P* v *Q*

2. [ *P* ⊃ ( *R* · *S* ) ] · ( *Q* ⊃ *L* )

3. ~ ( *R* · *S*)

4. *Q* / ~ *R* v ( ~ *S* · *L* )

5. ( *R* · *S* ) v ( *Q* ⊃ *L* ) 1, 2, CD

6. *Q* ⊃ *L* 3, 5, DS

7. *L* 4, 6, MP

8. ~ *R* v ~ *S* 3, DM

9. *L* v ~ *R* 7, Add

10. ( ~ *R*  v ~ *S* ) · ( *L* v ~ *R* ) 8, 9, Conj

11. ( ~ *R*  v ~ *S* ) · ( ~ *R*  v *L* ) 10, Com

12. ~ *R*  v ( ~ *S* · *L* ) 11, Dist

**[37]** 1. *Q* v (*P* ⊃ *S*)

2. *S* ≡ (*R* **·**  *T*)

3. *P* **·** ~ *Q*  / *P*  **·**  *R*

4. *P*  3, Simp

5. ~ *Q* 3, Simp

6. *P* ⊃ *S* 1, 5, DS

7. *S* 4, 6, MP

8. [ *S* ⊃ ( *R* **·** *T*)] **·** [( *R* **·** *T*) ⊃ *S* ] 2, Equiv

9. *S* ⊃ ( *R* **·** *T* ) 8, Simp

10. *R* **·** *T* 7, 9, MP

11. *R*  10, Simp

12. *P* **·** *R* 4, 11, Conj

**[38]** 1. *P* ⊃ ( *R*  v *S* )

2. ~ [ ( ~ *P* v ~ *Q* ) v ( *R* v ~ *L* ) ] / *S*

3. ~ ( ~ *P* v ~ *Q* ) · ~ ( *R* v ~ *L* ) 2, DM

4. ~ ( ~ *P* v ~ *Q* ) 3, Simp

5. ~ ~ *P* · ~ ~ *Q* 4, DM

6. ~ ~ *P* 5, Simp

7. *P* 6, DN

8. *R*  v *S* 1, 7, MP

9. ~ ( *R* v ~ *L* ) 3, Simp

10. ~ *R* · ~ ~ *L* 9, DM

11. ~ *R* 10, Simp

12. *S* 8, 11, DS

**[39]** 1. ( *Q* v *S* ) ⊃ ~ *P*

2. *Q* v ( *R* · *S* )

3. ( *Q* v *R* ) ⊃ ~ *L*

4. *K* ⊃ ( *L* v *P* ) / ~ *K*

5. ( *Q* v *R* ) · ( *Q* v *S* ) 2, Dist

6. *Q* v *R* 5, Simp

7. ~ *L* 3, 6, MP

8. *Q* v *S* 5, Simp

9. ~ *P* 1, 8, MP

10. ~ *L* · ~ *P* 7, 9, Conj

11. ~ ( *L* v *P* ) 10, DM

12. ~ *K* 4, 11, MT

**[40]** 1. *R*

2. ~ ( *P* **·** ~ *Q* )

3. *P* v *S*

4. ~ ( *R* **·** *S* ) / *Q*

5. ~ *P* v ~ ~ *Q* 2, DM

6. ~ *P* v *Q*  5, DN

7. ~ *R* v ~ *S* 4, DM

8. ~ ~ *R* 1, DN

9. ~ *S*  7, 8, DS

10. *P* 3, 9, DS

11. ~ ~ *P* 10, DN

12. *Q* 6, 11, DS

**[41]** 1. *P* v *R*

2. ~ *P* v ( *Q* **·** *R* )

3. *R* ⊃ ( *Q* **·** *S* ) / *Q*  **·** *S*

4. *R* v *P* 1, Com

5. ~ *R* ⊃ *P* 4, Impl

6. *P* ⊃ ( *Q* **·** *R* ) 2, Impl

7. ~ *R* ⊃ ( *Q* **·** *R* ) 5, 6, HS

8. ~ ~ *R* v ( *Q* **·** *R* ) 7, Impl

9. *R* v ( *Q* **·** *R* ) 8, DN

10. ( *R* v *Q* ) **·**  ( *R* v *R* ) 9, Dist

11. *R* v *R* 10, Simp

12. *R* 11, Taut

13. *Q* **·** *S* 3, 12, MP

**[42]** 1. ~ *S*

2. ~ *P* ⊃ ~ *Q*

3. *Q* · ( *R* v *S* ) / *P* · *R*

4. *Q* ⊃ *P* 2, Trans

5. *Q* 3, Simp

6. *P* 4, 5, MP

7. *R* v *S* 3, Simp

8. *R*  1, 7, DS

9. *P* · *R*  6, 8, Conj

**[43]** 1. *Q* **·** *S*

2. ( *Q* **·** ~ *P* ) ⊃ ~ *R*

3. *Q* ⊃ ~ *P*

4. ( *S*  **·** *T* ) ⊃ ( *P* v *R* ) / ~ *T*

5. *Q* 1, Simp

6. ~ *P* 3, 5, MP

7. *Q* **·**  ~ *P* 5, 6, Conj

8. ~ *R* 2, 7, MP

9. ~ *P* **·** ~ *R* 6, 8, Conj

10. ~ ( *P* v *R* ) 9, DM

11. ~ ( *S* **·** *T*) 4, 10, MT

12. ~ *S* v ~ *T* 11, DM

13. *S* 1, Simp

14. ~ ~ *S* 13, DN

15. ~ *T*  12, 14, DS

**[44]** 1. ~ *P*  v *Q*

2. ( *P* v *R* ) · *S*

3. ~ ( *R* v *L* ) / *Q*

4. *S* · ( *P* v *R* ) 2, Com

5. ( *S* · *P* ) v ( *S* · *R* ) 4, Dist

6. ~ *R* · ~ *L* 3, DM

7. ~ *R* 6, Simp

8. ~ *R* v ~ *S* 7, Add

9. ~ ( *R* · *S* ) 8, DM

10. ~ ( *S* · *R* ) 9, Com

11. *S* · *P* 5, 10, DS

12. *P* 11, Simp

13. *P* ⊃ *Q* 1, Impl

14. *Q* 12, 13,MP

**[45]** 1. *P* ⊃ *Q*

2. *Q* ⊃ ~ ( *R* v *P* )

3. ~ *S* ⊃ *Q*

4. *S* ⊃ ( *M* ⊃ *L* )

5. *R*

6. *M* v *P* / *L*

7. *R* v *P* 5, Add

8. ~ ~ ( *R* v *P* ) 7, DN

9. ~ *Q* 2, 8, MT

10. ~ *P* 1, 9, MT

11. *M* 6, 10, DS

12. ~ ~ *S* 3, 9, MT

13. *S* 12, DN

14. *S* · *M* 11, 13, Conj

15. ( *S* · *M* ) ⊃ *L* 4, Exp

16. *L* 14, 15, MP

**[46]** 1. ~ *S* ⊃ ( *N* ⊃ *T* )

2. ~ *S* **·**  ( *R* ⊃ *S* )

3. ( ~ *M* **·** ~ *N* ) ⊃ ( ~ *O* v ~ *P* )

4. ( *Q* v ~ *R* ) ⊃ ~ *M*

5. ( ~ *R* **·**  ~ *S* ) ⊃ ( ~ ~ *O* **·**  ~ *T* ) / ~ *P*

6. ~ *S* 2, Simp

7. *R* ⊃ *S* 2, Simp

8. ~ *R* 6, 7, MT

9. ~ *R* **·**  ~ *S* 6, 8, Conj

10. ~ ~ *O* **·**  ~ *T* 5, 9, MP

11. *N* ⊃ *T* 1, 6, MP

12. ~ *T* 10, Simp

13. ~ *N* 11, 12, MT

14. ~ *R* v *Q* 8, Add

15. *Q* v ~ *R* 14, Com

16. ~ *M* 4, 15, MP

17. ~ *M* **·** ~ *N* 13, 16, Conj

18. ~ *O* v ~ *P* 3, 17, MP

19. ~ ~ *O* 10, Simp

20. ~ *P* 18, 19, DS

**[47]** 1. ~ *A* **·**  ~ *B*

2. ~ *D* ⊃ *A*

3. *M* ⊃ [ ( *N* v *O* ) ⊃ *P* ]

4. *Q* ⊃ ( *S* v *T* )

5. ( ~ *Q* v ~ *R* ) ⊃ ( *M* **·**  *N* )

6. ~ *D* v ~ ( *S* v *T* ) / *P* **·**  ~ *B*

7. ~ *A* 1, Simp

8. ~ *B* 1, Simp

9. ~ ~ *D*  2, 7, MT

10. ~ ( *S* v *T* ) 6, 9, DS

11. ~ *Q*  4, 10, MT

12. ~ *Q* v ~ *R* 11, Add

13. *M* **·** *N* 5, 12, MP

14. *M* 13, Simp

15. ( *N* v *O* ) ⊃ *P*  3, 14, MP

16. *N* 13, Simp

17. *N* v *O* 16, Add

18. *P* 15, 17, MP

19. *P* **·** ~ *B* 8, 18, Conj

**[48]** 1. ( ~ *Q* v ~ *S* ) ⊃ *T*

2. ( *M* v *N* ) ⊃ [( *O* v *P* ) ⊃ ( ~ *Q* **·** *R* )] / *M* ⊃ ( *O* ⊃ *T* )

3. ~ ( *M* v *N* ) v [( *O* v *P* ) ⊃ ( ~ *Q* **·**  *R* )] 2, Impl

4. [( *O* v *P* ) ⊃ ( ~ *Q* **·**  *R* )] v ~ ( *M* v *N* ) 3, Com

5. [( *O* v *P* ) ⊃ ( ~ *Q* **·** *R* )] v (~ *M* **·** ~ *N* ) 4, DM

6. {[( *O* v *P* ) ⊃ ( ~ *Q* · *R* )] v ~ *M*}**·** {[( *O* v *P* ) ⊃ ( ~ *Q* **·** *R* )] v ~ *N*} 5, Dist

7. [( *O* v *P* ) ⊃ ( ~ *Q* **·** *R* )] v ~ *M* 6, Simp

8. [ ~ ( *O* v *P* ) v ( ~ *Q* **·** *R* )] v ~ *M*  7, Impl

9. ~ ( *O* v *P* ) v [( ~ *Q* **·** *R* )] v ~ *M*] 8, Assoc

10. [( ~ *Q* **·** *R* ) v ~ *M*] v ~ ( *O* v *P* ) 9, Com

11. [( ~ *Q* **·** *R* ) v ~ *M*] v ( ~ *O* **·** ~ *P* ) 10, DM

12. {[( ~ *Q* **·** *R* ) v ~ *M*] v ~ *O*} **·** {[( ~ *Q* **·** *R* ) v ~ *M*] v ~ *P*} 11, Dist

13. [( ~ *Q* **·** *R* ) v ~ *M*] v ~ *O* 12, Simp

14. ( ~ *Q* **·** *R* ) v ( ~ *M* v ~ *O* ) 13, Assoc

15. ( ~ *M* v ~ *O* ) v ( ~ *Q* **·** *R* ) 14, Com

16. [( ~ *M* v ~ *O* ) v ~ *Q*] **·**  [( ~ *M* v ~ *O* ) v *R* ] 15, Dist

17. (~ *M* v ~ *O* ) v ~ *Q*  16, Simp

18. [( ~ *M* v ~ *O* ) v ~ *Q*] v ~ *S* 17, Add

19. ( ~ *M* v ~ *O* ) v ( ~ *Q* v ~ *S* ) 18, Assoc

20. ~ ( *M* **·** *O* ) v ( ~ *Q* v ~ *S* ) 19, DM

21. ( *M* **·** *O* ) ⊃ ( ~ *Q* v ~ *S* ) 20, Impl

22. ( *M* **·** *O* ) ⊃ *T* 1, 21, HS

23. *M* ⊃ ( *O* ⊃ *T* ) 22, Exp

**[49]** 1. ~ ( *S* ⊃ *Q* )

2. ( *M* **·** *N* ) ⊃ ( *O* v *P* )

3. ~ [ *O* v ( *N* **·** *P* ) ]

4. *N* ≡ ~ ( *Q* **·** *R* ) / ~ ( *M* v *Q* )

5. ~ ( ~ *S* v *Q* ) 1, Impl

6. ~ ~ *S* **·**  ~ *Q*  5, DM

7. ~ *O* **·** ~ ( *N* **·** *P* ) 3, DM

8. ~ *Q* 6, Simp

9. ~ *Q* v ~ *R* 8, Add

10. ~ ( *Q* **·** *R* ) 9, DM

11. [ *N* ⊃ ~ ( *Q* **·** *R* ) ] **·** [ ~ ( *Q* **·** *R* ) ⊃ *N* ] 4, Equiv

12. ~ ( *Q* **·** *R* ) ⊃ *N* 11, Simp

13. *N*  10, 12, MP

14. ~ ( *N* **·** *P* ) 7, Simp

15. ~ *N* v ~ *P* 14, DM

16. ~ ~ *N* 13, DN

17. ~ *P*  15, 16, DS

18. ~ *O* 7, Simp

19. ~ *O* **·**  ~ *P* 17, 18, Conj

20. ~ ( *O* v *P* ) 19, DM

21. ~ ( *M* **·** *N* ) 2, 20, MT

22. ~ *M* v ~ *N* 21, DM

23. ~ *M*  16, 22, DS

24. ~ *M* **·** ~ *Q* 8, 23, Conj

25. ~ ( *M* v *Q* ) 24, DM

**[50]** 1. ~ ( *R* v *S* )

2. ~ ( *M* **·**  *N* ) v ~ ( *O* **·**  *P* )

3. ~ ( *O* **·** *M* ) ⊃ *S*

4. ( *Q* **·**  *R* ) ≡ ~ *P* / ~ ( *N* **·**  *T* )

5. ~ *R* **·**  ~ *S* 1, DM

6. ~ *R*  5, Simp

7. ~ *R* v ~ *Q* 6, Add

8. ~ *Q* v ~ *R* 7, Com

9. ~ ( *Q* **·** *R* ) 8, DM

10. [ ( *Q* **·** *R* ) ⊃ ~ *P* ] **·**  [ ~ *P* ⊃ ( *Q* **·** *R* ) ] 4, Equiv

11. ~ *P* ⊃ ( *Q* **·**  *R* ) 10, Simp

12. ~ ~ *P* 9, 11, MT

13. *P* 12, DN

14. ~ *S* 5, Simp

15. ~ ~ ( *O* **·**  *M* ) 3, 14, MT

16. *O* **·** *M* 15, DN

17. *O* 16, Simp

18. *O* **·** *P* 13, 17, Conj

19. ~ ~ ( *O* **·** *P* ) 18, DN

20. ~ ( *M* **·**  *N* ) 2, 19, DS

21. ~ *M* v ~ *N* 20, DM

22. *M* 16, Simp

23. ~ ~ *M* 22, DN

24. ~ *N*  21, 23, DS

25. ~ *N* v ~ *T* 24, Add

26. ~ ( *N* **·** *T* ) 25, DM