Números reales

Pablo Martín Amador Puertos
Jorge Esteva Clave
Luis Ángel Zaldívar Cruz
Departamento de Ciencias Básicas
Instituto Tecnológico de Tehuacán

31 de octubre de 2014

Prólogo

Estas notas de clase están escritas sin ninguna pretensión de originalidad. Su finalidad es exponer, en forma sistemática, el cálculo o análisis matemático a los estudiantes de ingeniería del Instituto Tecnológico de Tehuacán.

Formalmente, las notas están divididas en tres partes, las cuales responden a los cursos de cálculo que se estudian en los primeros semestres de las carreras de ingeniería. La primera parte corresponde al cálculo diferencial, la segunda parte al cálculo integral y la tercera parte al cálculo vectorial.

Una de las características de las notas es su apego a los programas oficiales vigentes de matemáticas. Otra de sus características notorias es su nivel o rigorca, el cual satisface los criterios de Comité de Acreditación de la Enseñanza en Ingeniería (CACEI). Otra característica importante es el desarrollo de los ejemplos ya que se proporcionan indicaciones detalladas para resolverlos; no se asume, jamás, que existen pasos obvios. Los ejercicios de fin de sección juegan un papel esencial, ya que el cálculo se aprende estudiando regularmente y desarrollando hábitos de estudio apropiados. Se recomienda estudiar las matemáticas con lápiz y papel. Un buen inicio para la comprensión de una definición o teorema es la memorización inteligente de ellos.

Los autores expresan su profunda gratitud a los alumnos por sus sugerencias y corrección de errores. Sin embargo, los errores u omisiones son responsabilidad de los autores.

1. Introducción

Desde la antiguedad las nociones intuitivas de cambio continuo, crecimiento y movimiento han desafiado las mentes científicas. Sin embargo, el camino para la comprensión del cambio continuo fue abierto solo hasta mediados del siglo

XVII cuando inició la ciencia moderna y con ella, también el cálculo integral y diferencial, brevemente llamado Cálculo o Análisis Matemático.

Las nociones fundamentales del Cálculo son la derivada y la integral; la derivada es una medida de la tasa de cambio, la integral es una medida para el efecto total de un proceso de cambio continuo. La comprensión de estos conceptos y de sus aplicaciones, descansa en los conceptos de límite y de función que a su vez dependen del entendimiento del continuo de los números. Sólo sumergiéndose gradualmente, cada vez un poco más en la sustancia del Cálculo, se podrá apreciar su potencia y belleza.

En este tema introductorio explicaremos los conceptos básicos de los números.

2. El continuo de los números

Los enteros positivos o *números naturales*[1] $1, 2, 3, \ldots$ son símbolos abstractos para indicar "cuántos" objetos están en una *colección* o *conjunto* discreto de elementos.

Estos símbolos son despojados de toda referencia a cualidades concretas de los objetos contados, por lo que no importa si lo que se cuenta son personas, átomos, casas, chivos o cualquier otro objeto.

Los números naturales son el instrumento adecuado para contar elementos de una colección o conjunto. Sin embargo, no son apropiados para otro objetivo igualmente importante: *medir* cantidades tales como la longitud de una curva y el volumen o peso de un cuerpo. La pregunta *¿cuánto?* no puede ser contestada inmediatamente en términos de los números naturales. La imperiosa necesidad para expresar medidas de cantidades en términos de lo que nos gustaría llamar números, nos obliga a extender el concepto de número para que podamos describir una gradación continua de medidas. Esta extensión se denomina el *continuo numérico* o el *sistema de números reales* (un nombre no descriptivo pero generalmente aceptado).

La extensión del concepto de número al del continuo es tan convincentemente natural que fue utilizado por todos los grandes matemáticos y científicos de épocas remotas sin formalización alguna. Fue hasta el siglo diecinueve cuando los matemáticos se sintieron obligados a buscar una fundamentación lógica firme para el sistema de los números reales. La resultante formulación precisa de los conceptos, a su vez, condujo a progresos adicionales en matemáticas.

3. El sistema de los números reales

Una exposición adecuada del Cálculo Diferencial e Integral como matemática de la ingeniería depende esencialmente de un estudio cuidadoso del sistema de los números reales.

[1] Al conjunto de los números naturales se le designa con el símbolo $\mathbb{N}$.

Hay muchos métodos para introducir el sistema de los números reales. Un método usual es el de empezar con los enteros positivos $1, 2, 3, \ldots$ y utilizarlos como base para construir un sistema más amplio que tenga las propiedades deseadas. Brevemente, la idea de este método es tomar los enteros positivos como base para formar un sistema más amplio, que es el de los números *racionales* positivos (cocientes de enteros positivos). Los números racionales positivos se utilizan a su vez como base para construir los *irracionales* positivos (números reales como $\sqrt{2}$ y π que no son racionales). El paso final es la introducción de los números reales negativos y el cero. La parte más difícil del proceso total es el paso de los números racionales a los números irracionales.

Aunque la necesidad del número irracional se había presentado ya a los matemáticos de la antigua Grecia en sus estudios geométricos, no se introdujeron métodos satisfactorios de construcción de los números reales a partir de los racionales hasta entrado el siglo XIX. En esta época se perfilaron tres teorías distintas por Karl Weierstrass (1815-1897), Georg Cantor (1845-1918) y Richard Dedekind (1831-1916). En 1889, el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) propuso cinco axiomas para los enteros positivos que se utilizaron como punto de partida para la construcción total.[2]

El punto de vista que adoptaremos aquí no es el constructivo. El método que seguiremos en este curso para el estudio de los números reales es el axiomático, en el que se consideran a los números reales como *elementos primitivos* y se toman algunas de sus propiedades fundamentales como *axiomas*; es decir, se supone que existen ciertos objetos, llamados números reales, que satisfacen los 16 axiomas enunciados posteriormente en esta sección. Son éstas las propiedades que caracterizan completamente a los números reales y éste será nuestro punto de partida. Aceptamos estos axiomas y todos los demás conceptos que se desarrollarán en el Cálculo Diferencial e Integral se basarán en dichos axiomas. Los axiomas serán los únicos conceptos indefinidos. Los demás conceptos se definirán en términos de los números reales o en términos de conceptos previamente definidos.[3]

Luego, después de definir el sistema de los números reales por un conjunto de axiomas, demostraremos que el conjunto de los números racionales puede considerarse un subconjunto de los números reales. Enfatizamos, este es el método axiomático que nosotros utilizaremos para estudiar los números reales.

El *sistema de los números reales* es un conjunto $\mathbb{R}$ y dos operaciones, la adición y la multiplicación, y una relación de orden, denotada por "$<$" y leída "es menor que", que satisface los siguientes axiomas:

A1 Para todo a y b en $\mathbb{R}$, $a + b \in \mathbb{R}$. (Estabilidad o Cerradura).

A2 Para todo a y b en $\mathbb{R}$, $a + b = b + a$. (Ley conmutativa).

[2]Una exposición detallada de esta construcción empezando por los axiomas de Peano y utilizando el método de Dedekind para introducir el número irracional, se encuentra en el libro de E. Landau, *Foundations of Analysis*, AMS Chelsea Publishing Co., 1966.

[3]Las definiciones importantes estarán precedidas por la palabra *Definición*. Los resultados preliminares que conducen a resultados de mayor importancia o generalidad se llaman *Lemas*, y los más importantes, *Teoremas*. Las consecuencias directas de los teoremas que son casos especiales de los teoremas se denominan *Corolarios*.

A3 Para todo a, b y c en $\mathbb{R}$, $(a+b)+c = a+(b+c)$. (Ley asociativa).

A4 Hay un elemento y sólo un elemento en $\mathbb{R}$, al que denotamos por "0", tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, $a+0 = a = 0+a$. (La existencia y unicidad del elemento neutro aditivo).

A5 Para cada $a \in \mathbb{R}$, hay un y sólo un elemento en $\mathbb{R}$, al que denotaremos por "$-a$", tal que $a+(-a) = 0 = -a+a$. (La existencia y unicidad del inverso aditivo).

M1 Para todo a y b en $\mathbb{R}$, $ab \in \mathbb{R}$. (Estabilidad o Cerradura).

M2 Para todo a y b en $\mathbb{R}$, $a\,b = b\,a$. (Ley conmutativa).

M3 Para todo a, b y c en $\mathbb{R}$, $(a\,b)c = a(b\,c)$. (Ley asociativa).

M4 Hay un elemento y sólo un elemento en $\mathbb{R}$, al que denotamos por "1", diferente de 0, tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$. (La existencia y unicidad del elemento neutro multiplicativo).

M5 Para cada $a \in \mathbb{R}$, diferente de 0, hay un y sólo un elemento en $\mathbb{R}$, al que denotaremos por "a^{-1}", tal que $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$. (La existencia y unicidad del inverso multiplicativo).

D Para todo a, b y c en $\mathbb{R}$, $a(b+c) = a\,b + a\,c$ y $(b+c)a = b\,a + c\,a$. (Ley distributiva).

O1 Para dos elementos a y b en $\mathbb{R}$ una y solamente una de las siguientes relaciones se verifica: $a < b$, $a = b$, $b < a$. (Ley de tricotomía).

O2 Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. (Ley transitiva).

O3 Si $a < b$, entonces para todo $c \in \mathbb{R}$, $a+c < b+c$.

O4 Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $a\,c < b\,c$.

L El axioma del supremo.

El sistema de los números reales $\mathbb{R}$ es más que tan solo un conjunto de elementos. Es un conjunto en el que hay dos operaciones y una relación que satisfacen los axiomas dados. No es lo mismo una operación que una relación. La operación de adición asocia con un par de números reales cualesquiera, a y b, un elemento único en $\mathbb{R}$ al que denominamos *suma* y denotamos con $a+b$. Análogamente, la operación de multiplicación asocia con un par de números reales cualesquiera, a y b, un elemento único en $\mathbb{R}$ al que denominamos *producto* y designamos $a\,b$ o $a \cdot b$. A los símbolos "+" y "·" no se les asigna otro significado especial que el precisado en los axiomas. Por otra parte, $a < b$ no es un elemento de $\mathbb{R}$ sino una afirmación con respecto a los elementos a y b (a es menor que b).

Los axiomas del A1 al A5 se refieren a las propiedades básicas de la operación de adición y los axiomas del M1 al M5 son las proposiciones análogas pero con respecto a la operación de multiplicación. Los axiomas A1 y M1 se denominan leyes de estabilidad o cerradura para las operaciones de adición y multiplicación. Postulan una propiedad importante: que cuando se suman o multiplican dos números reales, se obtiene un número real, no otra cosa. A2 y M2 se llaman leyes conmutativas de la adición y multiplicación. A3 y M3 son leyes asociativas. A3 nos dice que para sumar tres número reales a, b y c, podemos primero obtener la suma de a y b para después añadir c, obteniéndose: $(a+b)+c$. Pero también nos dice que podemos añadir a a la suma de b y c, obteniéndose: $a+(b+c)$. Como estas dos sumas son iguales según A3, podemos prescindir de los paréntesis y escribir $a+b+c$. Pero A3 también sugiere, que es posible la adición de cualquier conjunto finito de números reales. M3 indica una interpretación análoga para la multiplicación de tres o más números reales. A4 y M4 enuncian la existencia y unicidad de un elemento neutro para cada operación y que estos elementos son distintos uno del otro. Al elemento neutro para la adición se le llama "cero" y al elemento neutro para la multiplicación se le llama "uno". A5 enuncia que todo elemento en $\mathbb{R}$ tiene un inverso aditivo único y M5 menciona que todo elemento distinto de cero tiene un inverso multiplicativo único.

El axioma D se denomina ley distributiva y nos dice cómo combinar las operaciones de adición y multiplicación. Los axiomas O1, O2, O3 y O4 postulan que el conjunto de los números reales es un conjunto ordenado. O2 es la propiedad transitiva de esta relación de orden y nos dice que si un primer número real es menor que un segundo número real y éste a su vez es menor que un tercer número real, entonces se puede concluir que el primero es también menor que el tercer número real. O3 nos dice cómo combinar la relación de orden con la operación de adición. Similarmente, O4 propone cómo combinar la relación de orden y la operación de multiplicación.

Es de observar que en la definición del sistema de los números reales no hay axioma alguno para la relación de igualdad. La explicación es lógica, puesto que la relación $a=b$ significa que se están utilizando dos símbolos diferentes para representar el mismo elemento. Esto es, la relación $a=b$ significa que "a es el mismo elemento que b". Por consiguiente, no necesitamos reglas explícitas para deducir que si $a=b$ y $b=c$, entonces $a=c$, o si $a=b$, entonces $a+c=b+c$. Al concluir que $a+c=b+c$, se está utilizando la unicidad de la adición. Similarmente, si $a=b$, por la unicidad de la multiplicación se puede deducir que $ac=bc$.

Los axiomas de los números reales se agrupan en forma natural en tres grupos, que son: los *axiomas de campo* que van del axioma A1 al D, los *axiomas de orden* que son los etiquetados con los símbolos O1 al O4, y el *axioma de completitud* denotado con la letra L, que no estudiaremos en este tema.

Si se considera que el entero positivo 1 es el número real 1 postulado en M4 y que $2=1+1$, entonces el entero 2 es un número real, según A1; como $3=2+1$, entonces por A1 el entero 3 es un número real. En esta forma vemos que cualquier entero positivo n es un número real. Si identificamos el entero 0 con el número real 0 postulado en A4 concluimos que $-n$ es un número real, según A5. Así, los enteros[4] son números reales.

[4] Al conjunto de los números enteros se les designa con el símbolo $\mathbb{Z}$.

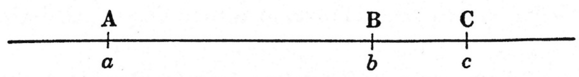

Figura 1: Recta numérica real.

La correspondencia entre números reales y puntos de una recta puede usarse para dar una interpretación geométrica de la relación de orden entre los números reales. La relación $a < b$ significa que sobre una recta numérica el punto A correspondiente al número a se encuentra a la izquierda del punto B correspondiente al número b (ver la Figura 1).

En este contexto geométrico, el axioma O1 nos dice que para dos números reales a y b cualesquiera donde A y B son los puntos correspondientes sobre la recta numérica, o A está a la izquierda de B, o B está a la izquierda de A, o A es el mismo punto que B. Geométricamente, el axioma O2 dice que si A está a la izquierda de B y B está a la izquierda de C, entonces A está a la izquierda de C (ver la Figura 1).

En esta sección y en la siguiente estudiaremos la estructura algebraica del sistema de los números reales. Los axiomas de campo, constituyen una lista de propiedades básicas de la adición y la multiplicación. Estos axiomas abarcan todas las propiedades algebraicas esenciales de los números reales en el sentido de que las demás propiedades algebraicas pueden deducirse como teoremas. Esto es lo que haremos a continuación. Para esta tarea, necesitaremos únicamente de los *axiomas de campo*.

Teorema 1. *Para todo a en $\mathbb{R}$, $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$.*

Demostración. En la prueba del Teorema indicaremos el axioma que justifica cada paso entre corchetes situados a la derecha.

$$
\begin{aligned}
a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && [\text{A4}] \\
&= a \cdot 0 + (a + (-a)) && [\text{A5}] \\
&= (a \cdot 0 + a) + (-a) && [\text{A3}] \\
&= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) && [\text{M4}] \\
&= a\,(0 + 1) + (-a) && [\text{D}] \\
&= a \cdot 1 + (-a) && [\text{A4}] \\
&= a + (-a) && [\text{M4}] \\
&= 0. && [\text{A5}]
\end{aligned}
$$

También, $0 \cdot a = 0$ según M2. $\square$

Teorema 2. *Para todo $a \in \mathbb{R}$, $-a = (-1)a$.*

Demostración. De acuerdo con el axioma A5, el inverso aditivo de a es único. De donde, si demostramos que $a + (-1)a = 0$, entonces $(-1)a = -a$.

Usando los axiomas M4, D y A5, y el Teorema 1,

$$a + (-1)\,a = 1 \cdot a + (-1)\,a = (1 + (-1))\,a = 0 \cdot a = 0.$$

$\square$

Corolario 1. *Para a y b cualesquiera en $\mathbb{R}$, $a(-b) = -(ab) = (-a)b$.*

Demostración. Utilizando el Teorema 2 y los axiomas M2 y M3,

$$a(\text{-}b) = a((-1)b) = (-1)(ab) = -(ab).$$

La prueba de que $(-a)b = -(ab)$ es análoga a la anterior:

$$(\text{-}a)b = ((\text{-}1)a)b = (\text{-}1)(ab) = \text{-}(ab).$$

$\square$

Teorema 3. *Para todo $a \in \mathbb{R}$, $-(-a) = a$.*

Demostración. Según el axioma A5 el inverso aditivo de $-a$ es único. Como $a + (-a) = 0 = (-a) + a$, a es el inverso aditivo de $-a$; es decir $-(-a) = a$. $\square$

Teorema 4. *Para a y b cualesquiera en $\mathbb{R}$, $(-a)(-b) = ab$.*

Demostración. Utilizando el Corolario 1 y el teorema 3, tenemos

$$(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab.$$

$\square$

Los teoremas anteriores representan una muestra reducida, pero importante, de las propiedades algebraicas de los números reales. Se pueden deducir muchas otras consecuencias de las propiedades de campo de $\mathbb{R}$ como las que estudiaremos en la siguiente sección y las que dejamos como ejercicios.

Hay otras dos operaciones con los números reales que no están incluidas explícitamente en los axiomas del sistema de números reales; a saber, la sustracción y la división, las que se definen como sigue.

Definición 1. Para todo a y b en $\mathbb{R}$, $a - b = a + (-b)$.

Definición 2. Para todo a y b en $\mathbb{R}$, con $b \neq 0$,

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

Observe que 0 no tiene inverso multiplicativo, y por tanto, la división por cero no está definida. La hipótesis de que 0 tuviera inverso multiplicativo no es consistente con los otros axiomas. Si 0 tuviese un inverso multiplicativo, llamémosle a, entonces $0 \cdot a = 1$. Esto estaría en contradicción con el Teorema 1, y por tanto no sería consistente con los axiomas en los que está basada la demostración del Teorema 1. Es en este sentido en el que decimos que la división por cero no puede definirse.

Es común escribir a^2 para designar el producto $a \cdot a$; a^3 para $\left(a^2\right) \cdot a$ y, en términos más generales, para $n \in \mathbb{N}$ se define $a^{n+1} = (a^n) \cdot a$. Es conveniente adoptar la convención de que si $a \neq 0$, entonces $a^0 = 1$; también que $a^1 = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Asimismo, si $a \neq 0$, se usa la notación a^{-1} para designar $1/a$ y si $n \in \mathbb{N}$ se escribe a^{-n} para designar $(1/a)^n$ cuando convenga hacerlo así.

3.1. Números racionales

A los números que pueden escribirse en la forma b/a donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$ se les denomina *números racionales*. El conjunto de todos los números racionales se denota con la notación típica $\mathbb{Q}$. La suma y el producto de dos números racionales es de nuevo un número racional (Demostrarlo.)

De la Definición 2 y los axiomas M5 y M1, resulta que el cociente de dos números reales cualesquiera es un número real con tal de que el denominador no sea 0. Como los enteros son números reales y un número racional es un cociente de dos enteros, los números racionales son números reales. Esto implica que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

El hecho de que hay elementos de $\mathbb{R}$ que no están en $\mathbb{Q}$ no se percibe de inmediato. En el siglo VI A.C., los antiguos discípulos de Pitágoras descubrieron que la diagonal de un cuadrado con lados de longitud unitaria (igual a 1) no podía expresarse como el cociente de dos enteros. Considerando el teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos, implica que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a dos. Este descubrimiento tuvo un efecto notable en el desarrollo de las matemáticas griegas. Una de sus consecuencias es que a los elementos de $\mathbb{R}$ que no están en $\mathbb{Q}$ llegó a conocérceles como números irracionales. Aún cuando esta terminología no es la más adecuada, se encuentra sumamente generalizada y esta es la razón por la que se adopta aquí.

A continuación se demuestra que no existe un número racional cuyo cuadrado sea dos.

Teorema 5. *No existe un número racional r tal que $r^2 = 2$.*

Demostración. Supóngase, por el contrario, que p y q son enteros tales que $(p/q)^2 = 2$. Se puede suponer que p y q no tienen factores enteros comunes diferentes de uno. (¿Por qué?) Puesto que $p^2 = 2q^2$, se ve que p^2 es par. Esto implica que p es par (porque si $p = 2k+1$ es impar, entonces $p^2 = 4k^2+4k+1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$ también es impar). Por tanto q debe ser un entero impar. Sin embargo, $p = 2m$ para algún entero m ya que p es par y por consiguiente $4m^2 = 2q^2$ de modo que $2m^2 = q^2$. Siguiendo el razonamiento anterior, se infiere que q es un entero par, y se ha llegado a una contradicción por el hecho de que ningún entero es par e impar a la vez. $\square$

Aunque hemos probado que $\sqrt{2}$ no es un número racional, no podemos demostrar en esta parte del curso que números irracionales tales como $\sqrt{2}$ o $\sqrt{5}$ son números reales; para ello se necesitaría utilizar el axioma L. Sin embargo, suponiendo que si n es un entero impar positivo y a es un número real cualquiera, entonces hay un número único b tal que $a = b^n$. El número b se denota con $\sqrt[n]{a}$ o por $a^{1/n}$ y se le llama *raíz n-ésima de a*. Por ejemplo, $\sqrt[3]{27} = 3$ y $\sqrt[5]{-32} = -2$. Sin embargo, observe que si n es un entero positivo par, entonces no hay un número b tal que $a = b^n$ si $a < 0$, y hay dos números tales que $a = b^n$ si $a > 0$. Así, si n es un entero positivo par suponemos que para cada número $a \geq 0$ hay un número único $b \geq 0$ tal que $a = b^n$. El número no negativo b se denota con $\sqrt[n]{a}$ o por $a^{1/n}$ y se denomina *raíz n-ésima de a*. Por ejemplo, $\sqrt{9}=3$ y $\sqrt[4]{16} = 2$.

3.2. Ejercicios

1. Pruebe que $-0 = 0$.
2. Pruebe que $-a - b = -(a + b)$.
3. Pruebe que si $a + b = a + c$, entonces $b = c$. Esta es la ley de cancelación para la adición.
4. Pruebe que $a - (b - c) = (a - b) + c$.
5. Pruebe que $1^{-1} = 1$.
6. Pruebe que si $a\,b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.
7. Pruebe que si $ab \neq 0$, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.
8. Pruebe que si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.
9. Pruebe que si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$. Esta es la ley de cancelación para la multiplicación.

4. Algo de álgebra

De los axiomas de campo se puede deducir todas las leyes usuales del álgebra elemental. A continuación mostraremos cómo pueden deducirse algunas de estas reglas utilizando estos axiomas de los números reales.

Ejemplo 1. Demuéstrese que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Solución. De acuerdo con la Definición 2 y los axiomas M4, M5, M2, M3, D y el ejercicio 7 de la sección Ejercicios 3.2

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{c}{d} &= ab^{-1}+cd^{-1} = ab^{-1}\cdot 1 + cd^{-1}\cdot 1\\ &= ab^{-1}\left(dd^{-1}\right)+cd^{-1}\left(bb^{-1}\right)\\ &= ad\left(b^{-1}d^{-1}\right)+bc\left(b^{-1}d^{-1}\right)\\ &= (ad+bc)\left(b^{-1}d^{-1}\right)\\ &= (ad+bc)\,(bd)^{-1}\\ &= \frac{ad+bc}{bd}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2. Demuéstrese que

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd.$$

Solución. Mediante aplicaciones sucesivas del axioma D, tenemos

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= a(c+d)+b(c+d)\\ &= ac+ad+bc+bd.\end{aligned}$$

Consideraremos a continuación las soluciones de las ecuaciones lineales y cuadráticas. Por solución de una ecuación tal como $ax+b=0$, se entiende el conjunto de números reales que cuando se sustituyen en la variable x de la ecuación ésta se reduce a una identidad; esto es, hacen que el lado izquierdo sea igual al lado derecho de la igualdad. El teorema siguiente proporciona el método para resolver una ecuación lineal $ax+b=0$.

Teorema 6. *Si a, b y x están en $\mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces $ax+b=0$ si y sólo si $x=-a^{-1}b$.*

Demostración. Hay dos cosas que debemos demostrar: primero, si $ax+b=0$, entonces $x=-a^{-1}b$, y segundo, si $x=-a^{-1}b$, entonces $ax+b=0$.

1. Si $ax+b=0$, entonces

   $$ax+b+(-b) = 0+(-b).$$

   Utilizando los axiomas A5 y A4,

   $$ax+0=-b.$$

   Por el axioma A4,

   $$ax=-b.$$

   Ahora,

   $$a^{-1}ax = a^{-1}(-b)$$

y por el axioma M5 y el Corolario 1, tenemos

$$1 \cdot x = -a^{-1}b.$$

Finalmente, utilizando el axioma M4 obtenemos

$$x = -a^{-1}b.$$

2. Si $x = -a^{-1}b$, entonces

$$ax = a\left(-a^{-1}b\right).$$

Por el Corolario 1,

$$ax = -aa^{-1}b.$$

Empleando el axioma M5,

$$ax = -1 \cdot b$$

y por el axioma M4

$$ax = -b.$$

Ahora,

$$ax + b = -b + b$$

y, finalmente, por el axioma A5, tenemos

$$ax + b = 0.$$

□

Cuando se tiene que resolver una ecuación lineal específica, el procedimiento usual no es aplicar el Teorema 6; en lugar de esto, se utiliza el procedimiento usado en la demostración del teorema.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación lineal

$$3x + 1 = 5x - 4.$$

Solución. Para resolver esta ecuación lineal, utilizaremos el método desarrollado en la prueba del teorema anterior. Si x es una solución de $3x+1 = 5x-4$, entonces

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= 5x - 4 \\ 3x + 1 - 5x - 1 &= 5x - 4 - 5x - 1 \\ -2x + 0 &= -5 + 0 \\ -2x &= -5 \\ x &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que si x es una solución, entonces $x = 5/2$, y por tanto que $x = 5/2$ es la única solución posible. Sin embargo, no hemos demostrado aún que 5/2 sea realmente una solución. Puede comprobarse que 5/2 es una solución sustituyendo este valor en la x de la ecuación dada y viendo si la reduce a una identidad. Otro método es mostrar—recorriendo los distintos pasos de la primera parte de la solución en sentido inverso—que si $x = 5/2$, entonces $3x-1 = 5x-4$. Esto es lo que haremos a continuación.

Si $x = 5/2$, entonces

$$
\begin{aligned}
-2x &= -5 \\
-2x + 5x + 1 &= -5 + 5x + 1 \\
3x + 1 &= 5x - 4.
\end{aligned}
$$

Hemos demostrado así que $\frac{5}{2}$ es una solución y, en realidad, la única solución de $3x + 1 = 5x - 4$.

La solución del ejemplo anterior podría acortarse notablemente si indicamos los pasos reversibles mediante el uso del término de enlace "si y sólo si".

Sabemos que si P y Q son dos proposiciones, entonces "P si y sólo si Q" significa que P implica Q y que Q implica P. Es decir, "P si y sólo si Q" significa que la proposición P es equivalente a la proposición Q. Para simbolizar el término de enlace "si y sólo si" se utiliza la flecha $\Leftrightarrow$; así, "P si y sólo si Q" se simboliza escribiendo $P \Leftrightarrow Q$.

Utilizando esta notación, la solución del Ejemplo 3 toma la forma siguiente:

$$
\begin{aligned}
&3x + 1 = 5x - 4 \Leftrightarrow 3x + 1 - 5x - 1 = 5x - 4 - 5x - 1 \\
&\qquad \Leftrightarrow -2x + 0 = -5 + 0 \Leftrightarrow -2x = -5 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) = \left(-\frac{1}{2}\right)(-5) \\
&\qquad \Leftrightarrow 1 \cdot x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.
\end{aligned}
$$

La solución de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ mediante el método de factorización, está basado en el teorema siguiente.

Teorema 7. *Si a y b son números reales, entonces $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$.*

Demostración. Si $ab = 0$ entonces, por el problema 6 de la sección de Ejercicios 3.2, $a = 0$ o $b = 0$. Ahora, por el Teorema 1, si $a = 0$ o $b = 0$ entonces $ab = 0$. $\square$

Ejemplo 4. Resuelva la ecuación cuadrática

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Solución. Factorizando y utilizando el Teorema 7, tenemos

$$
\begin{aligned}
x^2 - 3x + 2 = 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ o } x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 1 \text{ o } x = 2.
\end{aligned}
$$

Así, $x = 1$ y $x = 2$ son las únicas soluciones de la ecuación cuadrática.

La solución de una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ mediante el método de completación del cuadrado, está basado en el teorema siguiente.

Teorema 8. *Si a y b son números reales, entonces $a^2=b^2$ si y sólo si $a=b$ o $a=-b$.*

Demostración. Utilizando el Teorema 7

$$\begin{aligned} a^2=b^2 &\Leftrightarrow a^2-b^2=0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)(a+b)=0 \\ &\Leftrightarrow a-b=0 \text{ o } a+b=0 \\ &\Leftrightarrow a=b \text{ o } a=-b. \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 5. Resolver la ecuación cuadrática

$$x^2-4x+1=0.$$

Solución. Utilizando el Teorema 8, tenemos

$$\begin{aligned} x^2-4x+1=0 &\Leftrightarrow \left(x^2-4x+4\right)-3=0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2-3=0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2=3 \\ &\Leftrightarrow x-2=\sqrt{3} \text{ o } x-2=-\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow x=2+\sqrt{3} \text{ o } x=2-\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Así, la solución de $x^2-4x+1=0$ es el conjunto consistente en los números $2+\sqrt{3}$ y $2-\sqrt{3}$.

4.1. Ejercicios

1. Demostrar que $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$.
2. Demostrar que $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{ad}{bc}$.
3. Demostrar que $a+a=2a$.
4. Demostrar que $(2x-y)+(x+y)=3x$.
5. Demostrar que $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$.
6. Demostrar que $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$.
7. Demostrar que $\dfrac{2xy+x^2}{x^2+x}=\dfrac{2y+x}{x+1}$, $(x\neq 0, x\neq -1)$.

8. Demostrar que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$, $(bd \neq 0)$.

9. Resolver las siguientes ecuaciones:

   a) $3x + 5 = x - 3$.
   b) $3x - 1 = 2x + 4$.
   c) $x - 2 = 7$.
   d) $5x - 2 = 10x - 4$.
   e) $11 - 4x = x + 5$.
   f) $3x + 2 = 6x + 4$.

10. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorización.

    a) $x^2 + 4x - 5 = 0$
    b) $x^2 - 4x - 21 = 0$
    c) $2x^2 - x - 10 = 0$
    d) $3x^2 - 11x + 6 = 0$
    e) $5x^2 + 13x + 6 = 0$
    f) $x^3 + x^2 - 2x = 0$

11. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por completación del cuadrado.

    a) $x^2 + 4x - 5 = 0$
    b) $3x^2 - 11x + 6 = 0$
    c) $x^2 + 6x + 7 = 0$
    d) $9x^2 + 54x + 79 = 0$
    e) $5x^2 + 3x + 2 = 0$
    f) $5x^2 + 3x - 2 = 0$

5. Desigualdades

En esta sección estudiaremos las propiedades que se deducen de los axiomas de orden. Este grupo de axiomas establece una *ordenación* entre los números reales. Según esta ordenación se puede decir si un número real es mayor o menor que otro. Además del símbolo $<$ es conveniente emplear los símbolos $>$, $\geq$ y $\leq$. La relación $a > b$, que se lee "a es mayor que b" , tiene el mismo significado que $b < a$. La relación $a \geq b$ significa que "a es mayor que b o a es igual a b"; y $a \leq b$ significa que "a es menor que b o a es igual a b"

Un número a se dice positivo si $a > 0$ y negativo si $a < 0$. El estudiante debe quitarse la mala costumbre de creer que si hay un signo menos precediendo a un símbolo que representa un número, como por ejemplo $-a$, por ello $-a$ debe ser negativo. Por ejemplo, si $a=-3$, entonces $-a=3$, que es un número positivo.

Diremos que dos números tienen el mismo signo si ambos son positivos o ambos son negativos y que son de signo diferente si uno es positivo y el otro es negativo.

Como en el caso de la estructura algebraica del sistema de los números reales, de las propiedades básicas de orden postuladas en los axiomas O1, O2, O3 y O4, se deducirán las demás propiedades. Finalmente, el estudio de las propiedades de orden de los números reales, nos permitirán resolver problemas de desigualdades o inecuaciones.

Teorema 9. *Si $a<b$ y $c<d$, entonces $a+c<b+d$.*

Demostración. Utilizando el Axioma O3, tenemos: si $a<b$, entonces $a+c<b+c$, y si $c<d$, entonces por el mismo axioma $b+c<b+d$. Luego, por el axioma O2, $a+c<b+d$. □

Nota: En particular, este teorema implica que la suma de números positivos es positiva y que la suma de números negativos es negativa.

Teorema 10. *Si $a<b$, entonces $-a>-b$.*

Demostración. De acuerdo con el axioma O3, $a<b$ implica que

$$a+(-a)+(-b)<b+(-a)+(-b).$$

Por tanto,

$$-b<-a$$

o equivalentemente,

$$-a>-b.$$

□

Teorema 11. *Si $a<b$ y $c<0$, entonces $ac>bc$.*

Demostración. Si $c<0$, entonces, por el Teorema 10 y el problema 1 de los Ejercicios 3.2 ($-0=0$) tenemos que $-c>0$. De donde, por el axioma O4:

$$a(-c)<b(-c).$$

Según el Corolario 1 esto es equivalente a

$$-ac<-bc.$$

Aplicando los Teoremas 10 y 3, tenemos

$$-(-ac)>-(-bc)$$

y

$$ac>bc.$$

□

Es de esperarse que los números naturales sean positivos. En seguida se demuestra la forma en que este carácter positivo se deduce de las propiedades básicas de orden. El punto clave es observar que el cuadrado de cualquier número real diferente de cero es positivo.

Teorema 12. *Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.*

Demostración. Si $a \neq 0$, entonces $a > 0$ o $a < 0$. Si $a > 0$, entonces $a \cdot a > 0 \cdot a$ según el axioma O4 y, por tanto, $a^2 > 0$, según el Teorema 1 ($0 \cdot \mathrm{a} = 0$). Si $a < 0$, entonces $a \cdot a > 0 \cdot a$ según el Teorema 11 y, por tanto, $a^2 > 0$. □

Como $1 \neq 0$ y $1 = 1^2$, el Teorema 12 demuestra que $1 > 0$. Utilizando el Teorema 9 y el hecho de que $2 = 1 + 1$, concluimos que $2 > 0$. De esta manera podemos ver que todos los enteros positivos son números reales positivos. De este hecho y el Teorema 10, se deduce que todos los enteros negativos son números reales negativos.

Teorema 13. *Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$, entonces $ac < bd$. (La expresión $0 \leq a < b$ significa que $0 \leq a$ y $a < b$.)*

Demostración. Como $b > 0$ y $c < d$, $bc < bd$ según el axioma O4. Consideremos ahora dos casos: $c > 0$ y $c = 0$.

1. Si $c > 0$, entonces, como $a < b$, $ac < bc$ según el axioma O4. Utilizando el axioma O2, concluimos que $ac < bd$.

2. Si $c = 0$, entonces $ac = 0 = bc$. Luego $ac < bd$.

□

Teorema 14. *Si a y b tienen el mismo signo, entonces $ab > 0$. Si a y b son de diferente signo, entonces $ab < 0$. (Esta es la regla de los signos para la multiplicación.)*

Teorema 15. *Si a es un numero real distinto de cero, entonces a^{-1} tiene el mismo signo que a.*

El producto de dos números reales positivos también es un número real positivo. Sin embargo, la naturaleza positiva del producto de dos números reales no implica que los factores separados lo sean. La conclusión correcta es que los factores deben tener el mismo signo (ambos positivos o ambos negativos), como se demuestra a continuación.

Corolario 2. *Si $ab > 0$, entonces a y b tienen el mismo signo.*

Demostración. Se observa primero que $ab > 0$ implica que $a \neq 0$ (ya que si a o b fuesen cero su producto sería cero, de acuerdo con el Teorema 1). Por la propiedad de tricotomía $a > 0$ o $a < 0$. Si $a > 0$, entonces $1/a > 0$ por el Teorema 15 y por tanto

$$b = 1 \cdot b = \left(\left(\frac{1}{a}\right) a\right) b = \left(\frac{1}{a}\right)(ab) > 0.$$

De igual manera, si $a < 0$, entonces $1/a < 0$, de modo que $b = (1/a)\,(ab) < 0$. $\square$

Análogamente, la naturaleza negativa del producto de dos números reales no implica que los factores separados también sean negativos. La conclusión correcta es que los factores deben tener diferente signo (uno positivo y el otro negativo), como se muestra a continuación.

Corolario 3. *Si $ab < 0$, entonces a y b tienen diferente signo.*

Teorema 16. *Si a y b tienen el mismo signo y $a < b$, entonces $a^{-1} > b^{-1}$.*

Teorema 17. *Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces $a^2 > b^2$ si y sólo si $a > b$.*

Consideraremos ahora la solución de desigualdades lineales y cuadráticas. Por ejemplo, $2x - 5 > x + 4$ es una desigualdad lineal. Por solución de una desigualdad entendemos el conjunto de todos los números reales que cuando se sustituyen en la variable x verifican la desigualdad. El método de solución de una desigualdad es análogo al de solución de ecuaciones. Sin embargo, la solución de una desigualdad es generalmente un conjunto infinito.

Ejemplo 6. Resuelva la desigualdad $3x + 5 > x - 3$.

Solución. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} |\, 3x + 5 > x - 3\}$ el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $3x + 5 > x - 3$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$x \in A \Leftrightarrow 3x + 5 > x - 3.$$

Así, utilizando los axiomas O3 y O4, tenemos

$$\begin{aligned} 3x + 5 > x - 3 &\Leftrightarrow 3x + 5 - x - 5 > x - 3 - x - 5 \\ &\Leftrightarrow 2x + 0 > -8 + 0 \\ &\Leftrightarrow 2x > -8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)(2x) > (-8)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow x > -4. \end{aligned}$$

Así, la solución de esta desigualdad es el conjunto de todos los números reales mayores que -4.

Ejemplo 7. Resuelva la desigualdad $4x - 2 \leq x + 2$.

Solución. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} |\, 4x - 2 \leq x + 2\}$ el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $4x - 2 \leq x + 2$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$x \in A \Leftrightarrow 4x - 2 \leq x + 2.$$

Primero resolvemos la igualdad $4x - 2 = x + 2$:

$$\begin{aligned} 4x - 2 = x + 2 &\Leftrightarrow 4x - 2 - x + 2 = x + 2 - x + 2 \\ &\Leftrightarrow 3x + 0 = 4 + 0 \\ &\Leftrightarrow 3x = 4 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Resolvemos ahora la desigualdad: $4x - 2 < x + 2$:

$$\begin{aligned} 4x - 2 < x + 2 &\Leftrightarrow 4x - 2 - x + 2 < x + 2 - x + 2 \\ &\Leftrightarrow 3x + 0 < 4 + 0 \\ &\Leftrightarrow 3x < 4 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

De las soluciones de la igualdad y desigualdad, tenemos que la solución de $4x - 2 \leq x + 2$ es el conjunto de todos los números reales menores o iguales que $4/3$; esto es, los números reales $x \leq \frac{4}{3}$.

En el caso de desigualdades cuadráticas que pueden ser factorizadas, un método de solución puede basarse en el Teorema 14: $ab > 0$ si y sólo si a y b tienen el mismo signo, y $ab < 0$ si y sólo si a y b son de signo diferente. Sin embargo, preferimos el método de completación de cuadrados por ser más potente. El método de completación de cuadrados se basa en los dos siguientes teoremas que son consecuencias simples del Teorema 17.

Teorema 18. *Si $b \geq 0$, entonces $a^2 > b$ si y sólo si $a > \sqrt{b}$ o $a < -\sqrt{b}$.*

Demostración. Si $a \geq 0$, entonces, según el Teorema 17, $a^2 > b = \left(\sqrt{b}\right)^2$ si y sólo si $a > \sqrt{b}$. Si $a < 0$, entonces $-a > 0$, y aplicando el Teorema 17, tenemos $(-a)^2 = a^2 > b = \left(\sqrt{b}\right)^2$ si y sólo si $-a > \sqrt{b}$. Es decir, si $a < 0$, entonces $a^2 > b$ si y sólo si $a < -\sqrt{b}$. □

Teorema 19. *Si $b > 0$, entonces $a^2 < b$ si y sólo si $-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$.*

La prueba es análoga a la prueba del Teorema 18 y se deja para el estudiante.

Ejemplo 8. Resuelva la desigualdad $2x^2 + x - 6 > 0$.

Solución. Sea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} |\, 2x^2 + x - 6 > 0 \right\}$ el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $2x^2 + x - 6 > 0$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$x \in A \Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 > 0.$$

Así,

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 6 > 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - 3 > 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \right) - 3 > 0 + \frac{1}{16} \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 > \frac{49}{16} \\ &\Leftrightarrow x + \frac{1}{4} > \frac{7}{4} \text{ o } x + \frac{1}{4} < -\frac{7}{4} \\ &\Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \text{ o } x < -2. \end{aligned}$$

Así, la solución de la desigualdad es el conjunto de todos los números que son mayores que $\frac{3}{2}$ o menores que -2.

5.1. Ejercicios

1. Pruebe los siguientes teoremas: 14, 15, 16 y 17.

2. Si a es un número real distinto de cero, demuestre que a y $-a$ son de signo diferente.

3. Pruebe: si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces $ab \geq 0$.

4. Pruebe: si $a \geq 0$ y $b < 0$, entonces $ab \leq 0$.

5. Pruebe: si $a \leq c$ y $b \leq d$, entonces $a + b \leq c + d$.

6. Pruebe que $a < b$ si y sólo si $b - a > 0$.

7. Pruebe que $a < b$ si y sólo si existe un número positivo c tal que $a + c = b$.

8. Resuelva las siguientes desigualdades lineales:

   a) $x + 5 > 2$
   b) $-3x + 1 < 2x + 5$
   c) $11x - 7 \leq 4x + 2$
   d) $4x + 1 < 2x + 3$
   e) $3x \geq 5$

f) $3x - 5 > 7x + 12$

g) $11x - 7 \leq 4x + 2$

h) $\dfrac{9x}{5} + \dfrac{3-x}{8} \leq \dfrac{x}{3} + \dfrac{3-2x}{4}$

i) $\dfrac{5}{7}x - \dfrac{7}{3} \leq \dfrac{3x}{5} + \dfrac{7-5x}{3}$

9. Pruebe: si $a > 1$, entonces $a^2 > a$, y si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.

10. Resuelva las siguientes desigualdades cuadráticas:

    a) $x^2 - 5x + 6 < 0$

    b) $3x^2 - 7x + 6 < 0$

    c) $x^2 - 4x + 5 < 0$

    d) $2x^2 - x - 10 > 0$

    e) $3x^2 - 7x + 4 < 0$

    f) $x^2 - 4x + 4 < 0$

    g) $x^2 - 4x + 5 > 0$

11. Si a y b son dos números reales distintos cualesquiera, demuestre que hay un número real entre a y b.

12. Pruebe: $0 < a < b$ implica $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

6. Intervalos

Los conjuntos que son de uso frecuente en Cálculo son los intervalos. Los intervalos son conjuntos de números reales definidos por la propiedad de que sus elementos satisfacen ciertas desigualdades.

Definición 3. El *intervalo abierto* determinado por los números a y b, donde $a \leq b$, es el conjunto de todos los números x para los que $a < x < b$.

Los intervalos abiertos se denotan mediante (a, b). Otra forma de escribir la definición de un intervalo abierto es:

$$(a, b) = \{\, x \in \mathbb{R} |\, a < x < b \,\}\,.$$

Observe que si $a = b$, entonces $(a, b) = \emptyset$; esto es, es el conjunto vacío.

Definición 4. El *intervalo cerrado* determinado por los números a y b, donde $a \leq b$, es el conjunto de todos los números x para los que $a \leq x \leq b$.

Los intervalos cerrados se denotan mediante $[a,b]$ y su definición se escribe:

$$[a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} |\, a \leq x \leq b\} \,.$$

Observe que si $a = b$, entonces $[a,b] = \{a\}$.

Los *intervalos semiabiertos* se definen como sigue:

$$(a,b] = \{\, x \in \mathbb{R} |\, a < x \leq b\}$$

$$[a,b) = \{\, x \in \mathbb{R} |\, a \leq x < b\}$$

Los intervalos infinitos son:

$$(a,\infty) = \{\, x \in \mathbb{R} |\, x > a\}$$

$$[a,\infty) = \{\, x \in \mathbb{R} |\, x \geq a\}$$

$$(-\infty,a) = \{\, x \in \mathbb{R} |\, x < a\}$$

$$(-\infty,a] = \{\, x \in \mathbb{R} |\, x \leq a\}$$

$$(-\infty,\infty) = \mathbb{R}.$$

La interpretación geométrica de un intervalo abierto (a,b) es el conjunto de todos los puntos que se encuentran sobre la recta numérica entre a y b. Análogamente, el intervalo cerrado $[a,b]$ consiste de todos los puntos entre a y b además de los puntos extremos a y b. El intervalo semiabierto por la izquierda $(a,b]$ consiste de todos los puntos entre a y b además del punto extremo b. El intervalo infinito (a,∞) consiste en todos los puntos sobre la recta numérica que están a la derecha de a. El intervalo infinito $(-\infty,\infty)$ es la recta numérica completa.

Nota: ∞ y $-\infty$ son simplemente símbolos; no son números reales.

Ejemplo 9. Resuelva $2x - 4 \leq \dfrac{5x}{2} + \dfrac{3-x}{7}$.

Solución. Sea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| 2x - 4 \leq \frac{5x}{2} + \frac{3-x}{7} \right\}$ el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $2x - 4 \leq \dfrac{5x}{2} + \dfrac{3-x}{7}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$x \in A \Leftrightarrow 2x - 4 \leq \frac{5x}{2} + \frac{3-x}{7}.$$

Así, resolvemos primero la igualdad $2x - 4 = \frac{5x}{2} + \frac{3-x}{7}$; tenemos

$$\begin{aligned} 2x - 4 = \frac{5x}{2} + \frac{3-x}{7} &\Leftrightarrow 14\,(2x-4) = 35x + 2(3-x) \\ &\Leftrightarrow 28x - 56 = 35x + 6 - 2x \Leftrightarrow 5x = -62 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{62}{5}. \end{aligned}$$

La solución de la igualdad es: $x = -62/5$.

Procedemos a resolver la desigualdad:

$$\begin{aligned} 2x-4<\frac{5x}{2}+\frac{3-x}{7} &\Leftrightarrow 14\,(2x-4)<35x+2(3-x)\\ &\Leftrightarrow 28x-56<35x+6-2x \Leftrightarrow 5x<-62\\ &\Leftrightarrow x<-\frac{62}{5}. \end{aligned}$$

La solución de la desigualdad es: $x<-62/5$, o en notación de desigualdades, $(-\infty,-62/5)$.

Ejemplo 10. Resuelva:

$$\frac{1-2x}{x^2+1}\leq 0.$$

Solución. Sea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{1-2x}{x^2+1}\leq 0\right\}$ el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $\frac{1-2x}{x^2+1}\leq 0.$

Sea $x\in\mathbb{R}$. Entonces

$$x\in A\Leftrightarrow \frac{1-2x}{x^2+1}\leq 0.$$

Así, resolvemos primero la igualdad $\frac{1-2x}{x^2+1}=0$; utilizando la Definición 2, tenemos

$$\frac{1-2x}{x^2+1}=0\Leftrightarrow (1-2x)\left(x^2+1\right)^{-1}=0$$

Por unicidad de la multiplicación, M5, Teorema 1, y M4

$$\begin{aligned} \frac{1-2x}{x^2+1}=0 &\Leftrightarrow (1-2x)\left(x^2+1\right)^{-1}=0\\ &\Leftrightarrow (1-2x)\left(x^2+1\right)^{-1}\left(x^2+1\right)=0\cdot\left(x^2+1\right)\\ &\Leftrightarrow (1-2x)\cdot 1=0\\ &\Leftrightarrow 1-2x=0. \end{aligned}$$

Ahora, por unicidad de la adición,

$$1-2x+(-1)=0+(-1)$$

y por A5 y A4, se tiene

$$-2x+0=-1.$$

Por A4,

$$-2x=-1.$$

Ahora, por unicidad de la multiplicación y M5,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\Big(-2x\Big)=\left(-\frac{1}{2}\right)\Big(-1\Big).$$

Por M5 y el Teorema 4, tenemos

$$1 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 1$$

Finalmente, por M4, $x = \dfrac{1}{2}$.

Resolvemos ahora la desigualdad $\dfrac{1-2x}{x^2+1} < 0$. Entonces, utilizando la Definición 2, O4, M5, M4, y el Teorema 1 tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1-2x}{x^2+1} < 0 &\Leftrightarrow (1-2x)\left(x^2+1\right)^{-1} < 0 \\
&\Leftrightarrow (1-2x)\left(x^2+1\right)^{-1}\left(x^2+1\right) < 0 \cdot \left(x^2+1\right) \\
&\Leftrightarrow (1-2x) \cdot 1 < 0 \\
&\Leftrightarrow 1-2x < 0.
\end{aligned}$$

Utilizando O3, A4 y A5,

$$\begin{aligned}
1-2x < 0 &\Leftrightarrow 1-2x+(-1) < 0+(-1) \\
&\Leftrightarrow -2x+0 < -1 \\
&\Leftrightarrow -2x < -1.
\end{aligned}$$

Utilizando: el Teorema 11, M5, M4, el Teorema 4, tenemos

$$\begin{aligned}
-2x < -1 &\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-2x\right) > \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-1\right) \\
&\Leftrightarrow 1 \cdot x > \frac{1}{2} \cdot 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, uniendo las soluciones de la igualdad y desigualdad, obtenemos la solución de $\dfrac{1-2x}{x^2+1} \leq 0$: $x \geq \frac{1}{2}$ que con la notación de intervalos se escribe $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$.

Ejemplo 11. Resuelva:

$$\frac{3x+2}{2x-7} \leq 0.$$

Solución. Sea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \frac{7}{2}, \dfrac{3x+2}{2x-7} \leq 0 \right\}$ el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $\dfrac{3x+2}{2x-7} \leq 0$.

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq \frac{7}{2}$. Entonces

$$x \in A \Leftrightarrow \frac{3x+2}{2x-7} \leq 0.$$

Así, resolvemos primero la igualdad $\dfrac{3x+2}{2x-7}=0$; utilizando la Definición 2, unicidad de la multiplicación, unicidad de la adición, M5, M4, Teorema 1, A5 y A4, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{3x+2}{2x-7}=0 &\Leftrightarrow (3x+2)\,(2x-7)^{-1}=0\\ &\Leftrightarrow (3x+2)\,(2x-7)^{-1}\,(2x-7)=0\cdot(2x-7)\\ &\Leftrightarrow (3x+2)\cdot 1=0 \Leftrightarrow 3x+2=0 \Leftrightarrow 3x+2+(-2)=0+(-2)\\ &\Leftrightarrow 3x+0=-2 \Leftrightarrow 3x=-2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)(3x)=(-2)\left(\frac{1}{3}\right)\\ &\Leftrightarrow 1\cdot x=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Por lo que las solución de la igualdad es: $x=-2/3$.

Ahora, resolvemos la desigualdad. Utilizando la Definición 2, el Teorema 15, el Corolario 3, axiomas O3, A5, A4, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{3x+2}{2x-7}<0 &\Leftrightarrow (3x+2)\,(2x-7)^{-1}<0\\ &\Leftrightarrow (3x+2)\,(2x-7)<0\\ &\Leftrightarrow (3x+2>0 \text{ y } 2x-7<0) \text{ o } (3x+2<0 \text{ y } 2x-7>0)\\ &\Leftrightarrow (3x+2+(-2)>0+(-2) \text{ y } 2x-7+7<0+7)\\ &\quad o\ (3x+2+(-2)<0+(-2) \text{ y } (2x-7+7>0+7)\\ &\Leftrightarrow ((3x+0>-2) \text{ y } (2x+0<7)) \text{ o } ((3x+0<-2) \text{ y } (2x+0>7))\\ &\Leftrightarrow ((3x>-2) \text{ y } (2x<7)) \text{ o } ((3x<-2) \text{ y } (2x>7))\\ &\Leftrightarrow \left(x>-\frac{2}{3} \text{ y } x<\frac{7}{2}\right) \text{ o } \left(x<-\frac{2}{3} \text{ y } x>\frac{7}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow x>-\frac{2}{3} \text{ y } x<\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

Como $x<-\frac{2}{3}$ y $x>\frac{7}{2}$ es imposible, la solución de la desigualdad es el conjunto de los números reales x tales que $x>-\frac{2}{3}$ y $x<\frac{7}{2}$. Por consiguiente, la solución de la desigualdad $\dfrac{3x+2}{2x-7}\leq 0$ es el conjunto de los números reales x tales que $-\frac{2}{3}\leq x<\frac{7}{2}$ o, en notación de intervalos $x\in\left[-\frac{2}{3},\frac{7}{2}\right)$.

Ejemplo 12. Resuelva $\dfrac{x-2}{x+3}\leq\dfrac{x+1}{x}$.

Solución. Sea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x\neq -3,\ x\neq 0,\ \dfrac{x-2}{x+3}\leq\dfrac{x+1}{x}\right\}$ el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $\dfrac{x-2}{x+3}\leq\dfrac{x+1}{x}$.

Sea $x\in\mathbb{R}$, $x\neq -3$, $x\neq 0$. Entonces

$$x\in A \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+3}\leq\frac{x+1}{x}.$$

Así, resolvemos primero la igualdad $\frac{x-2}{x+3} = \frac{x+1}{x}$; tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{x+3} = \frac{x+1}{x} &\Leftrightarrow (x-2)(x+3)^{-1} = (x+1)\left(x^{-1}\right) \\
&\Leftrightarrow (x-2)(x+3)^{-1}(x+3)(x) = (x+1)\left(x^{-1}\right)(x+3)(x) \\
&\Leftrightarrow (x-2)x = (x+1)(x+3) \Leftrightarrow x^2-2x = x^2+4x+3 \Leftrightarrow 6x=-3 \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{3}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo que las solución de la igualdad es: $x = -1/2$.

Ahora, resolvemos la desigualdad:

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x} &\Leftrightarrow < \frac{x-2}{x+3} - \frac{x+1}{x} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(x-2)x - (x+1)(x+3)}{x(x+3)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2-2x-\left(x^2+4x+3\right)}{x^2+3x} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{-6x-3}{x^2+3x} < 0 \Leftrightarrow \frac{6x+3}{x^2+3x} > 0 \\
&\Leftrightarrow (6x+3)\left(x^2+3x\right)^{-1} > 0 \\
&\Leftrightarrow (6x+3)\left(x^2+3x\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \left(6x+3>0 \text{ y } x^2+3x>0\right) \text{ o } \left(6x+3<0 \text{ y } x^2+3x<0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(6x>-3 \text{ y } x^2+3x+\frac{9}{4}>\frac{9}{4}\right) \text{ o } \left(6x<-3 \text{ o } x^2+3x+\frac{9}{4}<\frac{9}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(x>-\frac{3}{6} \text{ y } \left(x+\frac{3}{2}\right)^2>\frac{9}{4}\right) \text{ o } \left(x<-\frac{3}{6} \text{ y } \left(x+\frac{3}{2}\right)^2<\frac{9}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(x>-\frac{1}{2} \text{ y } \left(x+\frac{3}{2}>\frac{3}{2} \text{ o } x+\frac{3}{2}<-\frac{3}{2}\right)\right) \\
&\text{o } \left(x<-\frac{1}{2} \text{ y } \left(-\frac{3}{2}<x+\frac{3}{2}<\frac{3}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x} &\Leftrightarrow \left(x>-\frac{1}{2} \text{ y } \left(x>0 \text{ o } x<-\frac{6}{2}\right)\right) \text{ o } \left(x<-\frac{1}{2} \text{ y } \left(-\frac{6}{2}<x<0\right)\right) \\
&\Leftrightarrow \left(x>-\frac{1}{2} \text{ y } (x>0 \text{ o } x<-3)\right) \text{ o } \left(x<-\frac{1}{2} \text{ y } (-3<x<0)\right) \\
&\Leftrightarrow (x>0) \text{ o } \left(-3<x<\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por lo que la solución de la desigualdad es: $-3 < x < \frac{1}{2}$ o $x > 0$.

Por consiguiente, la solución de la desigualdad $\dfrac{x-2}{x+3} \leq \dfrac{x+1}{x}$ es $-3 < x < \frac{1}{2}$ o $x > 0$. En notación de intervalos $x \in \left(-3, \frac{1}{2}\right) \cup (0, \infty)$.

Ejemplo 13. Resuelva: $x^3 - 5x^2 - 2x > 0$.

Solución. Sea $A = \left\{x \in \mathbb{R} |\, x^3 - 5x^2 - 2x > 0\right\}$ el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $x^3 - 5x^2 - 2x > 0$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$x \in A \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 - 2x > 0.$$

Resolvemos la desigualdad:

$$\begin{aligned}
x^3 - 5x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow\ & x\left(x^2 - 5x - 2\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x > 0 \text{ y } x^2 - 5x - 2 > 0\right) \text{ o } \left(x < 0 \text{ y } x^2 - 5x - 2 < 0\right) \\
&\Leftrightarrow \left(x > 0 \text{ y } \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) - 2 > \frac{25}{4}\right) \\
&\text{o } \left(x < 0 \text{ y } \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) - 2 < \frac{25}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(x > 0 \text{ y } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 > \frac{33}{4}\right) \text{ o } \left(x < 0 \text{ y } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 < \frac{33}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(x > 0 \text{ y } \left(x - \frac{5}{2} > \frac{\sqrt{33}}{2} \text{ o } x - \frac{5}{2} < -\frac{\sqrt{33}}{2}\right)\right) \\
&\text{o } \left(x < 0 \text{ y } \left(-\frac{\sqrt{33}}{2} < x - \frac{5}{2} < \frac{\sqrt{33}}{2}\right)\right) \\
&\Leftrightarrow \left(x > 0 \text{ y } \left(x > \frac{5+\sqrt{33}}{2} \text{ o } x < \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)\right) \\
&\text{o } \left(x < 0 \text{ y } \left(-\frac{\sqrt{33}}{2} < x - \frac{5}{2} < \frac{\sqrt{33}}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}
x^3 - 5x^2 - 2x \Leftrightarrow\ & \left(x > 0 \text{ y } \left(x > \frac{5+\sqrt{33}}{2} \text{ o } x < \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)\right) \\
&\text{o } \left(x < 0 \text{ y } \left(\frac{5-\sqrt{33}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right)\right) \\
&\Leftrightarrow \left(x > \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right) \text{ o } \left(\frac{5-\sqrt{33}}{2} < x < 0\right).
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la solución de la desigualdad es: $\frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{33}\right) < x < 0$ o $x > \frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{33}\right)$. En notación de intervalos la solución es: $x \in \left(\frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{33}\right), 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{33}\right), \infty\right)$.

6.1. Ejercicios

1. Demuestre que:

   a) Si $x \in [2, 4]$, entonces $2x + 3 \in [7, 11]$.

   b) Si $x \in (2, 4)$, entonces $\dfrac{1}{2x+3} \in (\frac{1}{11}, \frac{1}{7})$.

   c) Si $x - x_0 \in [-a, a]$, entonces $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.

   d) Si $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, entonces $x - x_0 \in [-a, a]$.

2. Pruebe que la intersección de dos intervalos abiertos es un intervalo abierto. *Nota*: recuerde que el conjunto nulo puede considerarse un intervalo abierto.

3. Pruebe que si la intersección de dos intervalos abiertos es distinta del conjunto nulo, entonces la unión de estos intervalos es un intervalo abierto.

4. Si $[a, b] \subset (c, d)$, demuestre que $c < a$ y $b < d$.

5. Escriba las soluciones de los incisos 8 y 10, del conjunto de Ejercicios 5.1 utilizando la notación de intervalos.

7. Valor absoluto de un número real

La ley de la tricotomía (Axioma O1) asegura que si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, entonces sólo uno de los números a y $-a$ es positivo. El valor absoluto de $a \neq 0$ se define como el número positivo del par $\{a, -a\}$ y el valor absoluto de $a = 0$ se define igual a cero.

Definición 5. El *valor absoluto* de un número real a, denotado por $|a|$, se define por la regla

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo, $|2| = 2$, $|-2| = 2$ y $|0| = 0$.

Geométricamente, el valor absoluto del número a es la distancia del origen al punto con coordenada a.

Es fácil probar que el número a tiene las siguientes propiedades:

$$|a| = |-a| \tag{1}$$

y

$$a \leq |a| \text{ y } -a \leq |a| \tag{2}$$

Las demostraciones de estas propiedades, son consecuencia directa de la definición de valor absoluto.

Las propiedades fundamentales del valor absoluto de números reales se presentan en los tres teoremas siguientes.

Teorema 20. *Para cualquier número real a, $|a| \geq 0$. Además $|a| = 0$ implica $a = 0$.*

Demostración. Si $a \geq 0$, entonces $|a| \geq 0$, de acuerdo con la Definición 5. Si $a < 0$, entonces de acuerdo con el resultado del problema 2 del conjunto de Ejercicios 5.1, $-a > 0$, de modo que utilizando otra vez la Definición 5, $|a| = -a > 0$. Esto prueba la primera parte del teorema.

Si $a \neq 0$, entonces o $a > 0$ y $|a| = a > 0$, o $a < 0$ y $|a| = -a > 0$. Así pues, $a \neq 0$ implica $|a| \neq 0$, o equivalentemente, $|a| = 0$ implica $a = 0$. $\square$

Teorema 21. *Para dos números reales cualesquiera a y b,*

$$|a|\,|b| = |ab|\,.$$

Demostración. **Caso 1**. Si $a \geq 0$, $b \geq 0$, entonces por definición, $|a| = a$ y $|b| = b$, de modo que $|a|\,|b| = ab$. Por otra parte, de acuerdo al problema 3 del conjunto de Ejercicios 5.1, $ab \geq 0$, de modo que por definición $|ab| = ab$. De donde $|a|\,|b| = ab = |ab|$.

Caso 2. Si $a \geq 0$, $b < 0$, entonces por la Propiedad 1 y el Corolario 1, $|ab| = |-(ab)| = |a(-b)|$. Ahora, el Caso 1 es aplicable $|a(-b)|$ puesto que $a \geq 0$ y $-b > 0$. Por consiguiente

$$|ab| = |a(-b)| = |a|\,|-b| = |a|\,|b|\,.$$

Caso 3. Si $a < 0$, $b \geq 0$, entonces intercambiamos a y b en el Caso 2.

Caso 4. Si $a < 0$, $b < 0$, entonces por el Teorema 4, por el Caso 1 y la Propiedad 1

$$|ab| = |(-a)(-b)| = |-a|\,|-b| = |a|\,|b|\,.$$

$\square$

Teorema 22. ***(La desigualdad del triángulo)*** *Para cualesquiera dos números reales a y b*

$$|a+b| \leq |a| + |b|\,.$$

Demostración. Sean a y b dos números reales. Entonces

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= \left|(a+b)^2\right| \\ &= (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ \\ &\leq |a|^2 + 2\,|ab| + |b|^2 \\ &= |a|^2 + 2\,|a|\,|b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2\,. \end{aligned}$$

Como $|a+b|$ y $|a|+|b|$ son ambos no negativos, podemos concluir que $|a+b| \leq |a| + |b|$, según el Teorema 17. $\square$

Corolario 4. *Para cualesquiera dos números reales a y b*

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Demostración. Aplicando la desigualdad del triángulo a los números a—b y b, tenemos

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$$

Consecuentemente

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

Análogamente

$$|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a|$$

y

$$|b| - |a| \leq |b - a|.$$

Según la Propiedad 1, $|b - a| = |a - b|$ y de aquí que

$$|b| - |a| \leq |a - b|.$$

De los números $|a| - |b|$ y $|b| - |a|$, uno es $||a| - |b||$. De donde se tiene

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

□

A continuación presentamos cinco resultados básicos que se utilizan para la solución de ecuaciones y desigualdades que contienen un valor absoluto al menos en uno de sus lados. De la Definición 5, tenemos

$$|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ y \\ -a = b \text{ o } a = b \end{cases} \tag{3}$$

De la Propiedad 2, tenemos

$$\begin{aligned} |a| < b &\Leftrightarrow -a < b \text{ y } a < b \\ &\Leftrightarrow a > -b \text{ y } a < b \\ &\Leftrightarrow -b < a < b. \end{aligned} \tag{4}$$

Si $b > 0$, entonces $|a| < b \Leftrightarrow a \in (-b, b)$.

De la Definición 5, tenemos

$$\begin{aligned} |a| > b &\Leftrightarrow -a > b \text{ o } a > b \\ &\Leftrightarrow a < -b \text{ o } a > b \\ &\Leftrightarrow a \in (-\infty, -b) \cup (b, \infty). \end{aligned} \tag{5}$$

De la definición de valor absoluto, tenemos

$$|a| = |b| \Leftrightarrow a = -b \text{ o } a = b. \tag{6}$$

De la Propiedad 4, tenemos

$$\begin{aligned} |a| < |b| &\Leftrightarrow a > -|b| \text{ y } a < |b| \\ &\Leftrightarrow (a > -b \text{ o } a > b) \text{ y } (a < -b \text{ o } a < b). \end{aligned} \tag{7}$$

En los siguientes ejemplos se ilustra la forma en que pueden usarse las propiedades anteriores del valor absoluto.

Ejemplo 14. Resuelva la ecuación

$$|3x - 1| = 2x + 5.$$

Solución. Utilizando el resultado 3, tenemos

$$\begin{aligned} |3x-1| = 2x+5 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ y \\ -(3x-1) = 2x+5 \text{ o } 3x-1 = 2x+5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ y \\ -3x+1 = 2x+5 \text{ o } 3x-1 = 2x+5 \end{cases} \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} |3x-1| = 2x+5 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ y \\ -5x = 4 \text{ o } x = 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ y \\ x = -\frac{4}{5} \text{ o } x = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Así, la ecuación tiene dos soluciones: $x = -\frac{4}{5}$ o $x = 6$.

Ejemplo 15. Resuelva la ecuación

$$|x + 1| = 3x - 9.$$

Solución. Utilizando el resultado 3, tenemos

$$|x+1| = 3x-9 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-9 \geq 0 \\ y \\ -(x+1) = 3x-9 \text{ o } x+1 = 3x-9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ y \\ -x-1 = 3x-9 \text{ o } x+1 = 3x-9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ y \\ x = 2 \text{ o } x = 5. \end{cases}$$

Así, la única solución es $x = 5$.

Ejemplo 16. Resuelva la desigualdad

$$|3x-1| < 2x+5.$$

Solución. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} |\, |3x-1| < 2x+5\}$ el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $|3x-1| < 2x+5$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$x \in A \Leftrightarrow |3x-1| < 2x+5.$$

Utilizando el resultado 4, tenemos

$$\begin{aligned} |3x-1| < 2x+5 &\Leftrightarrow 3x-1 > -(2x+5) \text{ y } 3x-1 < 2x+5 \\ &\Leftrightarrow 3x-1 > -2x-5 \text{ y } 3x-1 < 2x+5 \\ &\Leftrightarrow x > -\frac{4}{5} \text{ y } x < 6 \\ &\Leftrightarrow -\frac{4}{5} < x < 6 \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{5}, 6\right). \end{aligned}$$

Así, la solución es el conjunto de los números reales x tal que $x \in (-4/5, 6)$.

Ejemplo 17. Resuelva la desigualdad

$$|3x-1| > 2x+5.$$

Solución. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} |\, |3x-1| > 2x+5\}$ el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $|3x-1| > 2x+5$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$x \in A \Leftrightarrow |3x-1| > 2x+5.$$

Utilizando el resultado 5, tenemos

$$\begin{aligned} |3x-1| > 2x+5 &\Leftrightarrow 3x-1 < -(2x+5) \text{ o } 3x-1 > 2x+5 \\ &\Leftrightarrow 3x-1 < -2x-5 \text{ o } 3x-1 > 2x+5 \\ &\Leftrightarrow x < -\frac{4}{5} \text{ o } x > 6 \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{4}{5}\right) \cup \left(6, \infty\right). \end{aligned}$$

Así, la solución es el conjunto de los números reales x tal que $x \in (-\infty, -4/5) \cup (6, \infty)$.

Ejemplo 18. Resuelva $\left|x^2+4x-2\right| \leq 2x+3$.

Solución. Sea $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \left|x^2+4x-2\right| \leq 2x+3\right\}$ el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $\left|x^2+4x-2\right| \leq 2x+3$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$x \in A \Leftrightarrow \left|x^2+4x-2\right| \leq 2x+3.$$

Primero resolvemos la igualdad $\left|x^2+4x-2\right| = 2x+3$. Utilizando el resultado 3 tenemos

$$\begin{aligned}
\left|x^2+4x-2\right| = 2x+3 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ y \\ -\left(x^2+4x-2\right) = 2x+3 \text{ o } x^2+4x-2 = 2x+3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -3 \\ y \\ -\left(x^2+4x-2\right) = 2x+3 \text{ o } x^2+4x-2 = 2x+3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ y \\ x^2+6x+1 = 0 \text{ o } x^2+2x = 5 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ y \\ x^2+6x+9 = 8 \text{ o } x^2+2x+1 = 6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ y \\ (x+3)^2 = 8 \text{ o } (x+1)^2 = 6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ y \\ \left(x+3 = -\sqrt{8} \text{ o } x+3 = \sqrt{8}\right) \text{ o } \left(x+1 = -\sqrt{6} \text{ o } x+1 = \sqrt{6}\right) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ y \\ \left(x = -3-2\sqrt{2} \text{ o } x = -3+2\sqrt{2}\right) \text{ o } \left(x = -1-\sqrt{6} \text{ o } x = -1+\sqrt{6}\right). \end{cases}
\end{aligned}$$

Así, la ecuación tiene dos soluciones: $x = -1+\sqrt{6}$ o $x = -3+2\sqrt{2}$.

Ahora resolvemos la desigualdad $\left|x^2+4x-2\right| < 2x+3$.

Utilizando el resultado 4, tenemos

$$\begin{aligned}\left|x^2+4x-2\right|<2x+3 \Leftrightarrow & x^2+4x-2>-(2x+3) \text{ y } x^2+4x-2<2x+3\\ \Leftrightarrow & x^2+4x-2>-2x-3 \text{ y } x^2+4x-2<2x+3\\ \Leftrightarrow & x^2+6x+1>0 \text{ y } x^2+2x<5\\ \Leftrightarrow & x^2+6x+9>8 \text{ y } x^2+2x+1<6\\ \Leftrightarrow & (x+3)^2>8 \text{ y } (x+1)^2<6\\ \Leftrightarrow & \left(x+3>2\sqrt{2} \text{ o } x+3<-2\sqrt{2}\right) \text{ y } \left(-\sqrt{6}<x+1<\sqrt{6}\right)\\ \Leftrightarrow & \left(x>-3+2\sqrt{2} \text{ o } x<-3-2\sqrt{2}\right) \text{ y } \left(-1-\sqrt{6}<x<-1+\sqrt{6}\right)\\ \Leftrightarrow & x>-3+2\sqrt{2} \text{ y } x<-1+\sqrt{6} \Leftrightarrow -3+2\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{6}.\end{aligned}$$

Así, la solución de la desigualdad es $-3+2\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{6}$.

Por tanto, la solución de $\left|x^2+4x-2\right|\leq 2x+3$ es el conjunto de los números reales x tal que $-3+2\sqrt{2}\leq x\leq -1+\sqrt{6}$, o en notación de intervalos, $x\in\left[-3+2\sqrt{2},-1+\sqrt{6}\right]$.

Ejemplo 19. Resuelva: $\left|\frac{x+1}{3x-2}\right|<5$.

Solución. Sea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\middle| x\neq\frac{2}{3}, \left|\frac{x+1}{3x-2}\right|<5\right\}$ el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $\left|\dfrac{x+1}{3x-2}\right|<5$.

Sea $x\in\mathbb{R}$ y $x\neq\frac{2}{3}$. Entonces

$$x\in A\Leftrightarrow\left|\frac{x+1}{3x-2}\right|<5.$$

Resolviendo la desigualdad, tenemos

$$\begin{aligned}&\left|\frac{x+1}{3x-2}\right|<5\Leftrightarrow -5<\frac{x+1}{3x-2} \text{ y } \frac{x+1}{3x-2}<5\\ &\Leftrightarrow -5<(x+1)(3x-2)^{-1} \text{ y } (x+1)(3x-2)^{-1}<5\\ &\Leftrightarrow \left(-5\,(3x-2)<(x+1)(3x-2)^{-1}\,(3x-2) \text{ y } (x+1)(3x-2)^{-1}\,(3x-2)<5\,(3x-2)\right)\\ &\text{o } \left(-5\,(3x-2)>(x+1)(3x-2)^{-1}\,(3x-2) \text{ y } (x+1)(3x-2)^{-1}\,(3x-2)>5\,(3x-2)\right)\\ &\Leftrightarrow (-5\,(3x-2)<(x+1) \text{ y } (x+1)<5\,(3x-2))\\ &\text{o } (-5\,(3x-2)>(x+1) \text{ y } (x+1)>5\,(3x-2))\\ &\Leftrightarrow (-15x+10<x+1 \text{ y } x+1<15x-10)\\ &\text{o } (-15x+10>x+1) \text{ y } x+1)>15x-10)\\ &\Leftrightarrow (16x>9 \text{ y } 14x>11) \text{ o } (16x<9 \text{ y } 14x<11)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(x > \frac{9}{16} \text{ y } x > \frac{11}{14}\right) \text{ o } \left(x < \frac{9}{16} \text{ y } x < \frac{11}{14}\right)$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{11}{14} \text{ o } x < \frac{9}{16}.$$

Por consiguiente, la solución de la desigualdad es: $x < \frac{9}{16}$ o $x > \frac{11}{14}$. Utilizando la notación de intervalos, la solución es: $x \in \left(-\infty, \frac{9}{16}\right) \cup \left(\frac{11}{14}, \infty\right)$.

Ejemplo 20. Resuelva: $\frac{|x+2|}{x+5} \leq 3$.

Solución. Sea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x \neq -5, \frac{|x+2|}{x+5} \leq 3 \right\}$ el conjunto de números reales que satisfacen $x \neq -5$ y la desigualdad $\frac{|x+2|}{x+5} \leq 3$.

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq -5$. Entonces

$$x \in A \Leftrightarrow \frac{|x+2|}{x+5} \leq 3.$$

Así, resolvemos primero la igualdad $\frac{|x+2|}{x+5} = 3$; tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{|x+2|}{x+5} = 3 \Leftrightarrow |x+2| = 3\,(x+5) \Leftrightarrow |x+2| = 3x+15 \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 3x+15 \geq 0 \\ \text{y} \\ -\,(x+2) = 3x+15 \text{ o } x+2 = 3x+15 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} 3x \geq -15 \\ \text{y} \\ -x-2 = 3x+15 \text{ o } 2x = -13 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x \geq -\frac{15}{3} \\ \text{y} \\ 4x = -17 \text{ o } x = -\frac{13}{2} \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x \geq -5 \\ \text{y} \\ x = -\frac{17}{4} \text{ o } x = -\frac{13}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

La solución de la igualdad es: $x = -\frac{17}{4}$.

Resolvemos la desigualdad. Hay dos casos: o $x+5 > 0$ o $x+5 < 0$.

Sea $x+5 > 0$ o $x > -5$; así,

$$
\begin{aligned}
\frac{|x+2|}{x+5} < 3 &\Leftrightarrow (|x+2| < 3\,(x+5)) \text{ y } x > -5 \\
&\Leftrightarrow (|x+2| < 3x+15) \text{ y } x > -5 \\
&\Leftrightarrow (-\,(x+2) < 3x+15 \text{ y } x+2 < 3x+15) \text{ y } x > -5 \\
&\Leftrightarrow (-x-2 < 3x+15 \text{ y } 2x > -13) \text{ y } x > -5 \\
&\Leftrightarrow \left(4x > -17 \text{ y } x > -\frac{13}{2}\right) \text{ y } x > -5 \\
&\Leftrightarrow \left(x > -\frac{17}{4} \text{ y } x > -\frac{13}{2}\right) \text{ y } x > -5 \\
&\Leftrightarrow x > -\frac{17}{4} \text{ y } x > -5 \\
&\Leftrightarrow x > -\frac{17}{4}.
\end{aligned}
$$

Como $-\frac{17}{4} > -5$, la solución es $x > -\frac{17}{4}$.

Sea $x+5<0$ o, lo que es lo mismo, $x<-5$; así,

$$
\begin{aligned}
\frac{|x+2|}{x+5} < 3 &\Leftrightarrow (|x+2| > 3\,(x+5) \Leftrightarrow |x+2| > 3x+15) \text{ y } x < -5 \\
&\Leftrightarrow (x+2 < -\,(3x+15) \text{ o } x+2 > 3x+15) \text{ y } x < -5 \\
&\Leftrightarrow (x+2 < -3x-15 \text{ o } 2x < -13) \; y \; x < -5 \\
&\Leftrightarrow \left(4x < -17 \text{ o } x < -\frac{13}{2}\right) \text{ y } x < -5 \\
&\Leftrightarrow \left(x < -\frac{17}{4} \text{ o } x < -\frac{13}{2}\right) \text{ y } x < -5 \\
&\Leftrightarrow x < -\frac{17}{4} \text{ y } x < -5 \Leftrightarrow x < -5.
\end{aligned}
$$

La solución de la desigualdad es: $x < -5$ o $x > -\frac{17}{4}$.

Por consiguiente, la solución de $\frac{|x+2|}{x+5} \leq 3$ es $x < -5$ o $x \geq -\frac{17}{4}$, o en notación de intervalos: $x \in (-\infty, -5) \cup \left[-\frac{17}{4}, \infty\right)$.

Ejemplo 21. Resuelva: $|3-2x| \leq |x+4|$.

Solución. Sea $A = \{\, x \in \mathbb{R} |\, |3-2x| \leq |x+4| \}$ el conjunto de números reales que satisfacen la desigualdad $|3-2x| \leq |x+4|$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$x \in A \Leftrightarrow |3-2x| \leq |x+4|\,.$$

Resolvemos la igualdad utilizando la Propiedad 6, tenemos

$$
\begin{aligned}
|3-2x| = |x+4| &\Leftrightarrow 3-2x = -\,(x+4) \text{ o } 3-2x = x+4 \\
&\Leftrightarrow 3-2x = -x-4 \text{ o } 3x = -1 \Leftrightarrow x = 7 \text{ o } x = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Resolvemos la desigualdad utilizando la Propiedad 7, tenemos

$$\begin{aligned}
|3-2x| < |x+4| &\Leftrightarrow (3-2x > -(x+4) \text{ o } 3-2x > x+4) \\
&\quad \text{y } (3-2x < -(x+4) \text{ o } 3-2x < x+4) \\
&\Leftrightarrow (3-2x > -x-4 \text{ o } 3-2x > x+4) \\
&\quad \text{y } (3-2x < -x-4 \text{ o } 3-2x < x+4) \\
&\Leftrightarrow (x < 7 \text{ o } 3x < -1) \text{ y } (x > 7 \text{ o } 3x > -1) \\
&\Leftrightarrow \left(x < 7 \text{ o } x < -\frac{1}{3}\right) \text{ y } \left(x > 7 \text{ o } x > -\frac{1}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow (x < 7) \text{ y } \left(x > -\frac{1}{3}\right) \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 7.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la solución es: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 7$, o en notación de intervalos, $x \in \left[-\frac{1}{3}, 7\right]$.

7.1. Ejercicios

1. Pruebe que si a es un número real cualquiera, entonces $|a| = |-a|$.
2. Pruebe que para todo número real a, $a \leq |a|$ y $-a \leq |a|$.
3. Pruebe que si a y b ($b \neq 0$) son dos números reales cualesquiera, entonces
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$
4. Pruebe que si a y b son dos números reales cualesquiera, entonces
$$||a| - |b|| \leq |a| + |b|.$$
5. Pruebe que si a y b son dos números reales cualesquiera, entonces
$$||a| - |b|| \leq |a + b|.$$
6. Pruebe que si a, b y c son números reales cualesquiera, entonces
$$|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|.$$
7. Pruebe que: $|a| = |b|$ si y sólo si $a = b$ o $a = -b$.
8. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   a) $|x + 3| = |2x + 1|$

   b) $\left|x^2 - 4\right| = -2x + 4$

c) $|x-2|=4$

9. Resuelva las siguientes desigualdades:

   a) $|x+3| \leq 5$
   b) $|2x+1| \geq 2+x$
   c) $|x-2| \leq 2x$
   d) $|x+5| < 2x-3$
   e) $|4x-3| > x+2$
   f) $\left|x^2-4\right| > -2x+4$

10. Demuestre que:

    a) $|x-3| < 1$ implica $6 < x+4 < 8$
    b) $|x-1| < 1$ implica $\frac{1}{8} < \frac{1}{x+4} < \frac{1}{6}$
    c) $|x-1| < 2$ implica $0 \leq |2x-3| < 5$

Referencias

[1] Haaser, Norman B., J.P. LaSalle and J.A. Sullivan. *Introduction to Analysis.* Blaisdell Publishing Company, 1959.

[2] Courant R., F. John. *Introduction to Calculus and Analysis*, *Vol. 1.* Wiley, 1965.

[3] Bartle, Robert G., and C. Ionescu Tulcea. *Calculus.* Scott, Foresman and Company, 1968.

[4] Protter, Murray H., and C. B. Morrey. *Calculus with Analytic Geometry.* Addison-Wesley, 1963.

[5] Apostol, Tom M. *Calculus, One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra.* Blaisdell Publishing Co., 1967.

[6] Bartle, Robert G., and Donald R. Sherbert. *Introduction to Real Analysis.* Wiley, 1982.