Analyse de la décision.

TD 2 – Maximisation de l'utilité

Exo 1. Contrainte de budget :

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \leq r \quad (r > 0 \text{ fixé})$$

$$(x_1, x_2) \in X = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^2 \text{ (infini)}$$

L'utilité que la consommatrice cherche à maximiser est donnée :

$$u(x_1, x_2) = (x_1 + 2)(x_1 + 3x_2), \quad x_1, x_2 \geq 0$$

$$= x_1^2 + 3x_1 x_2 + 2x_1 + 6x_2$$

fonction coût

(forme quadratique en (x_1, x_2)...)

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \longrightarrow \max \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \leq r \end{cases}$$

$r > 0$: paramètre

contraintes

$p_1 = 5$

$p_2 = 3$ (prix fixés et connus)

C'est un problème d'optimisation (ici de maximisation), cf. cm2 (et cm3).

→ existence de solution ?

→ unicité de solution ?

→ moyen effectif de déterminer les solutions (si elles existent) ?

1.1. Soit $u_0 > 0$ un niveau d'utilité fixé, on définit la courbe d'indifférence (de niveau u_0) selon :

$$\mathcal{C}_{u_0} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \mid u(x_1, x_2) = u_0\}$$

$$(u_1 \neq u_0, \quad \mathcal{C}_{u_0} \cap \mathcal{C}_{u_1} = \emptyset : \text{partition de } X)$$

$$(x_1, x_2) \in \mathcal{C}_{u_0} \Leftrightarrow u(x_1, x_2) = u_0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + 2)(x_1 + 3x_2) = u_0$$

2 degrés de liberté : x_1, x_2 ;

1 équation

$2 - 1$: 1 degré de liberté

"Tirons x_2 en fonction de x_1" :

$$\Leftrightarrow x_1 + 3x_2 = \frac{u_0}{x_1 + 2}$$

$x_1 \geq 0$

$\Rightarrow x_1 + 2 > 2$

$\Rightarrow x_1 + 2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{u_0}{x_1 + 2} - x_1\right) =: f(x_1)$$: on a représenté $\mathcal{C}_{u_0}$ comme le graphe de f.

On dit (cf. CM3) que les préférences (celles qui sont modélisées par l'utilité :

$$(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \Leftrightarrow u(x_1, x_2) \leq u(y_1, y_2))$$

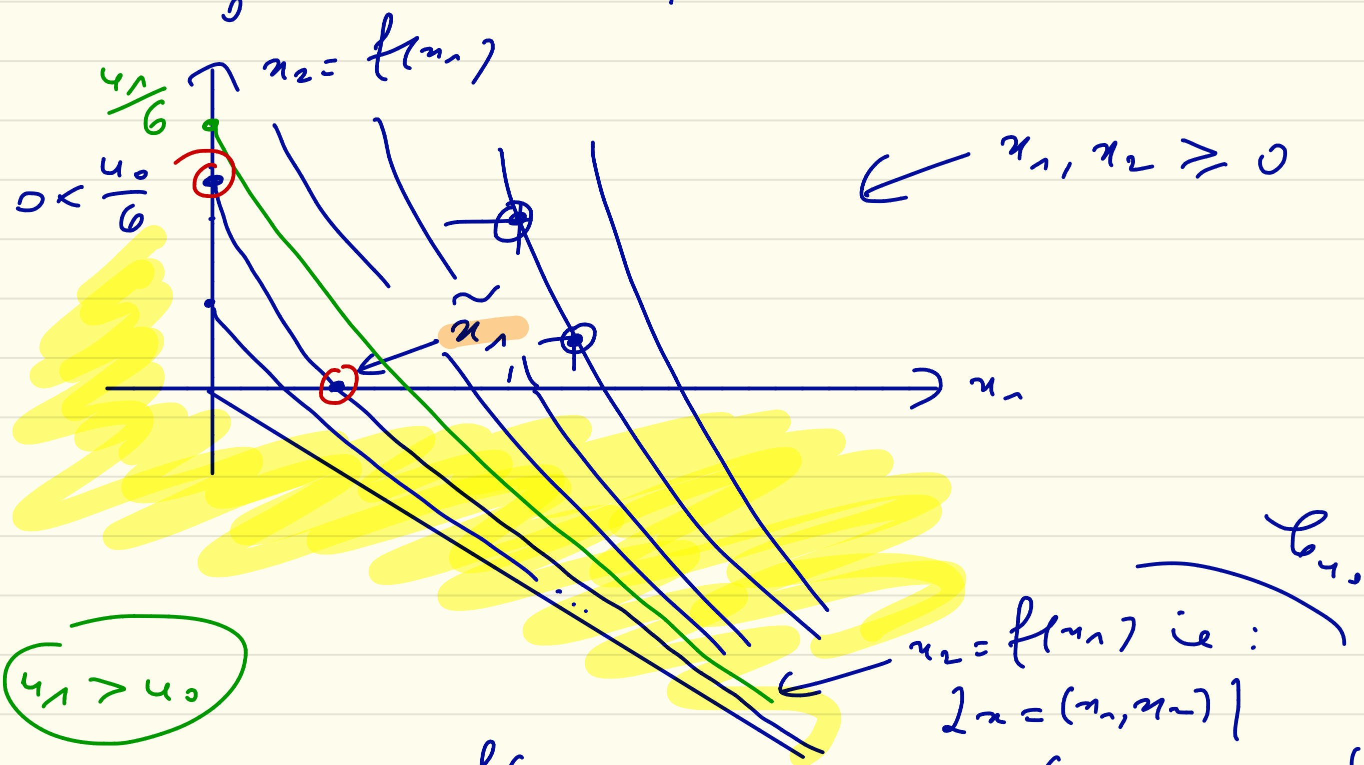
sont monotones ($\nearrow$ ou $\searrow$) si la fonction f (qui paramétrise la courbe d'indifférence, et qui dépend de u_0) est monotone.

Ici, $x_1 \geqslant 0 \Rightarrow x_1 > -2$ et $f(x_1) = \left(\frac{u_0}{x_1+2} - x_1\right)\cdot\frac{1}{3}$

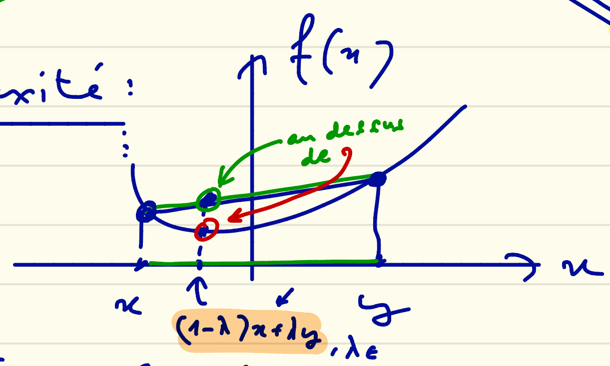
est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ ($x_1 \geqslant 0$), et :

$$f'(x_1) = \frac{1}{3}\left(\underbrace{-\frac{u_0}{(x_1+2)^2}}_{<0} - 1\right) < -1 < 0 : f \searrow$$

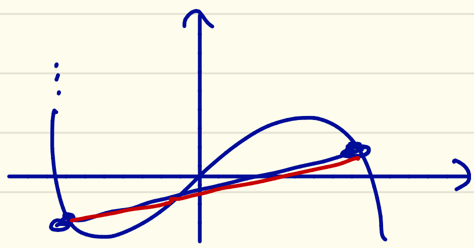
x_1	0		$\tilde{x}_1$	$+\infty$
$f'(x_1)$		$-$		
$f(x_1)$	$u_0/6 > 0$	$\searrow$	0	$-\infty$



Convexité :



fonction CONVEXE

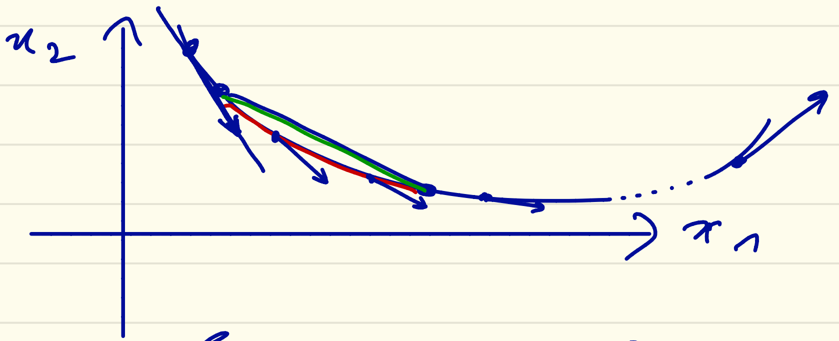


PAS CONVEXE

$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)(\forall \lambda \in [0,1])$:

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$$

Autre interprétation (géométrique) :



Convexité $\Leftrightarrow$ la pente de la tangente au graphe est croissante

$\Leftrightarrow$ la dérivée $f' \nearrow$

$\Leftrightarrow$ $(f')' = f'' \geq 0$

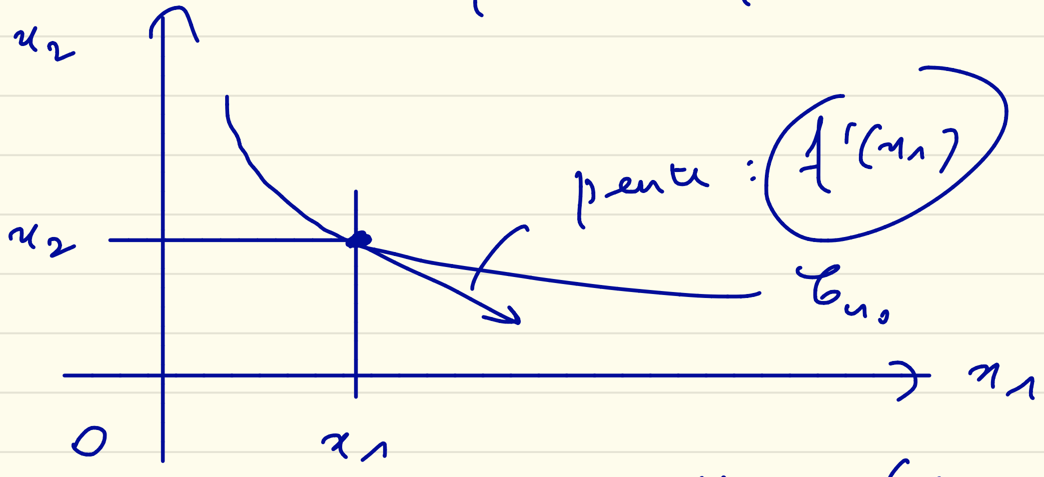
Calculons ici f'' :

$$f'(x_1) = -\frac{1}{3}\left(\frac{u_0}{(x_1+2)^2} - 1\right), \quad x_1 \geq 0 > -2$$

$$\Rightarrow f''(x_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\overbrace{(u_0)}^{>0}}{(x_1+2)^3} > 0 \geq 0 : \text{convexe.}$$

On dit alors (cf. CM3) que les préférences sont convexes (voir aussi la convexité de l'ensemble $\{(x_1,x_2) \in X \mid u(x_1,x_2) \geq u_0\}$ est convexe ... cf. Exo 2).

TMS (cf. CM3) : le Taux Marginal de Substitution en $(x_1,x_2) \in X$ est l'opposé de la pente (de la tangente ...) de la courbe d'indifférence passant par ce point :



$u_0 = u(x_1, x_2)$

où f tq $\mathcal{C}_{u_0}$ = graphe de f

(ie $u(x_1, x_2) = u_0 \Leftrightarrow x_2 = f(x_1)$)

$$TMS_{12}(x_1, x_2) = -f'(x_1) > 0$$

$$\| $$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2) \Big/ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)$$

(cf. ch 3)

cf. ici $f' < 0$ $(\forall u_0 > 0)$

1.2. D'après le tableau de variation, on sait que le graphe intersecte l'axe $x_1 = 0$ en le point $(0, u_0/6)$ $(u_0/6 \geq 0)$;

de plus, l'intersection avec $x_2 = 0$ se détermine en résolvant $f(x_1) = 0$, ie :

$$\frac{1}{3}\left(\frac{u_0}{x_1+2} - x_1\right) = 0$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{u_0}{x_1+2} - x_1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u_0}{x_1+2} = x_1$$

$$\Rightarrow u_0 = x_1^2 + 2x_1$$

$$\Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - u_0 = 0, \quad x_1 \geq 0$$

cf. $u_0 > 0$

$\Delta = 4 + 4u_0 = 4(1+u_0) > 0$: 2 racines

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \dfrac{-2-2\sqrt{1+u_0}}{2} = -1-\sqrt{1+u_0} < -1 < 0 \\[2ex] \tilde{x}_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{1+u_0}}{2} = -1 + \underbrace{\sqrt{1+u_0}}_{>1\ (u_0>0)} > 0 \end{cases}$$

($\nearrow$ en u_0)

$$\left(= \frac{\cancel{(1}+u_0\cancel{)}-\cancel{1}}{1+\sqrt{1+u_0}} = \frac{u_0}{1+\sqrt{\ }} > 0 \right)$$

1.3. Le problème se formule comme suit :

$$(*) \begin{cases} u(x_1, x_2) = (x_1+2)(x_1+3x_2) \longrightarrow \max \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \leq r \quad (r > 0) \end{cases}$$

$$(*) \Longleftrightarrow \begin{cases} -(x_1+2)(x_1+3x_2) \longrightarrow \min \\ -x_1 \leq 0, \ -x_2 \leq 0 \\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - r \leq 0 \end{cases}$$

on met toutes les inégalités sous la forme

$— \leq 0$

On a mis (*) sous la forme

$$(**)\begin{cases} c(x_1, x_2) \longrightarrow \min & (c = -u \dots) \\ g_1(x_1, x_2) \leq 0 \\ g_2(\text{—}) \leq 0 \\ g_3(\text{—}) \leq 0 \end{cases}$$

avec
$$\begin{cases} c(x) = -u(x) \\ g_1(x_1, x_2) = -x_1 \\ g_2(x_1, x_2) = -x_2 \\ g_3(x_1, x_2) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - r \end{cases}$$

cf. CM3

Par déf., le Lagrangien du problème est :

$$L(x_1, x_2, \underbrace{\mu_1, \mu_2, \mu_3}_{\text{3 multiplicateurs de Lagrange}}) := c(x_1, x_2) + \mu_1 \cdot g_1(x_1, x_2) + \mu_2 \cdot g_2(\text{—}) + \mu_3 \cdot g_3(\text{—})$$

$$= c(x) + (\mu \mid g(x))$$

où $\mu := (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$

& $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x))$

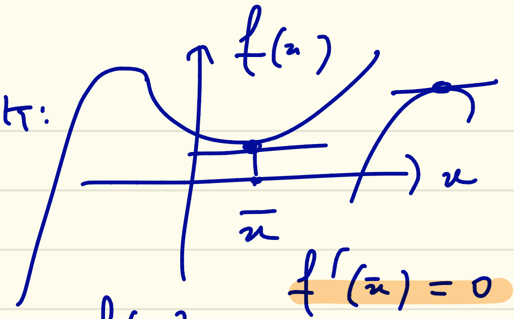
$(= (-x_1, -x_2, p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - r))$

(avec $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot y_i$: produit scalaire)

Si $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ est solution de (**) (ie est sol. de (*) qui est équivalent), alors :

SI... ALORS : CONDITION NÉCESSAIRE

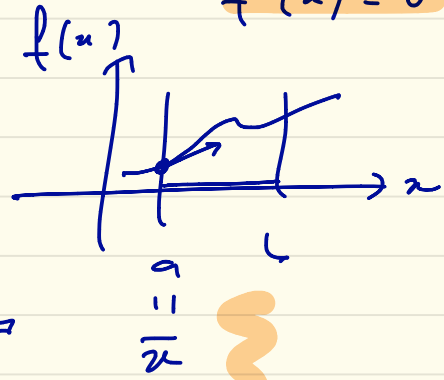
il existe $\bar\mu = (\bar\mu_1, \bar\mu_2, \bar\mu_3) \in \mathbb{R}^3$ tq :



i) $\nabla_x L(\bar x, \bar\mu) = 0$

ie $\nabla_{x_1} L(\bar x_1, \bar x_2, \bar\mu_1, \bar\mu_2, \bar\mu_3) = 0$

$\nabla_{x_2} L(\text{———}) = 0$



ii) $\bar\mu \geq 0$ ie $\bar\mu_1 \geq 0$, $\bar\mu_2 \geq 0$, $\bar\mu_3 \geq 0$

(positivité des multiplicateurs de Lagrange associés à des inégalités)

Le Lagrangien permet d'écrire ce type de condition même avec des contraintes

iii) $\left\{\begin{array}{l} \bar\mu_1 \cdot g_1(\bar x_1, \bar x_2) = 0 \\ (\bar\mu_1 = 0 \text{ ou } g_1(\bar x_1, \bar x_2) = 0) \\ \bar\mu_2 \cdot g_2(\bar x_1, \bar x_2) = 0 \\ \bar\mu_3 \cdot g_3(\bar x_1, \bar x_2) = 0 \end{array}\right.$

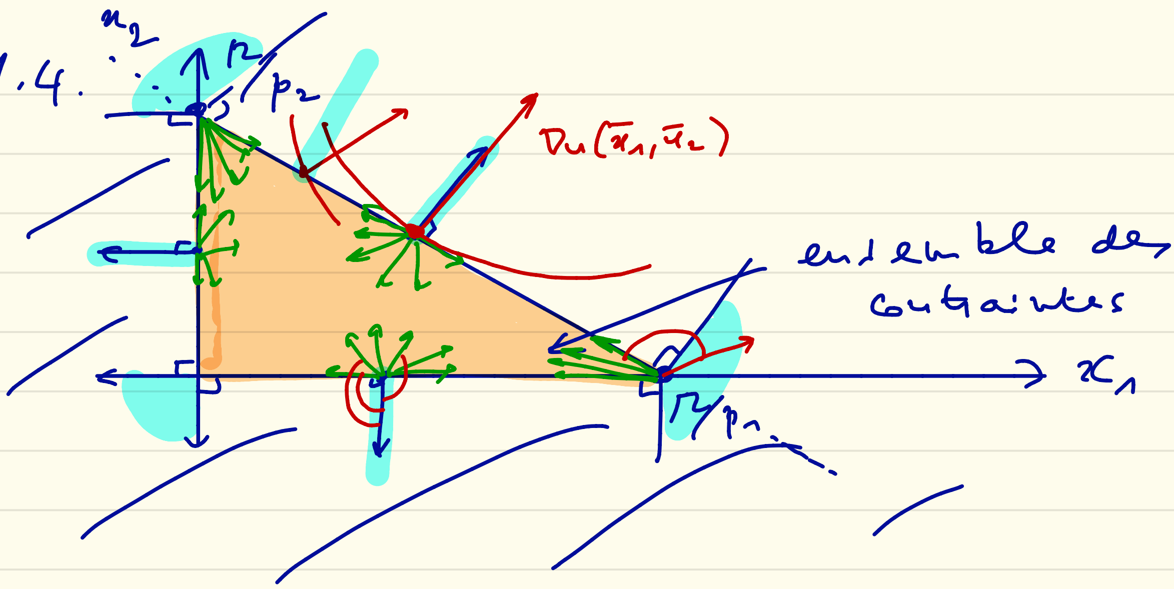
(complémentarité)

$\boxed{\text{On a 5 équations et 5 inconnues : } \bar x_1, \bar x_2, \bar\mu_1, \bar\mu_2, \bar\mu_3}$

↳ Soit $g_i(\bar x) = 0$ (auquel cas on sait juste que $\bar\mu_i \geq 0$), soit $g_i(\bar x) < 0$ et nécessairement $\bar\mu_i = 0$.

Ici : $L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = -(x_1 + 2)(x_1 + 3x_2)$
$+ \mu_1(-x_1)$
$+ \mu_2(-x_2)$
$+ \mu_3(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - R).$

1.4.



$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \leq r\}$$

Droite de contrainte budgétaire : $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = r$

Les conditions (nécessaires) i)-ii)-iii) traduisent algébriquement la condition géométrique du cas 2 : le gradient de l'utilité en une solution $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $Du(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^2$

doit appartenir à l'ensemble des directions bleues

$$Du(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{bmatrix}$$