Analyse de la décision

TD 1 – Choix, préférence, utilité

Exo 1. **Rappel** : $c : A \neq \emptyset \longmapsto c(A) \subset A$ cohérente si

$$(\forall A, B \neq \emptyset)\,(\forall (x,y) \in (A \cap B)^2) : \begin{cases} x \in c(A) \\ y \notin c(A) \end{cases} \Rightarrow y \notin c(B)$$

(cf. x est mieux et $\in B$!)

fonction de choix

$\underbrace{c : A \neq \emptyset \longmapsto c(A) \subset A}$

$c(A) \neq \emptyset$

Ici : 3 critères par vin
= pays, couleur, prix

Fonction de choix (cf. CM 1) :

i) prix ≤ 40 €
ii) puis pays tq cond max (+ Bel. > France > Ita. > Esp.)
iii) puis couleur tq cond max (+ blanc > rouge > rosé)
iv) puis prix le plus élevé

$$\begin{cases} x_1 = \text{rouge californien} \simeq 20\text{ €} \\ x_2 = \text{blanc français} \simeq 20\text{ €} \\ x_3 = \text{rouge californien} \simeq 25\text{ €} \\ x_4 = \text{rouge français} \simeq 30\text{ €} \end{cases}$$

(x_1, x_2, x_3 : A ; x_2, x_3, x_4 : B)

$A = \{x_1, x_2, x_3\}$
$B = \{x_2, x_3, x_4\}$

$c(A) = \{\text{californien rouge} \simeq 25\text{ €}\} = \{x_3\}$
$c(B) = \{\text{français blanc} \simeq 20\text{ €}\} = \{x_2\}$

Mq cette fonction de choix ne vérifie pas

$(\forall A, B \neq \emptyset)(\forall (x,y) \in (A\cap B)^2) : \begin{cases} x \in C(A) \\ y \notin C(A) \end{cases} \Rightarrow y \notin C(B)$

et

ie vérifie la négation logique de cette propriété :

(rappel : $\overset{\text{négation}}{\neg}\big((\forall x \in X) : P(x)\big)$

$\Leftrightarrow \quad (\exists x \in X) : \neg P(x)$

de même : $\neg\big((\exists x \in X) : P(x)\big)$

$\Leftrightarrow \quad (\forall x \in X) : \neg P(x)$)

Soit donc ici :

$\wedge \ \cap$

$\vee \ \cup$

$(\exists A, B \neq \emptyset)(\exists x \text{ et } y \in A\cap B)$:

et (ou : v)

$\neg\big(x \in C(A) \wedge y \notin C(A) \Rightarrow y \notin C(B)\big)$

(rappel : $(A \Rightarrow B)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
V	V	V	V
F	V	V	V
V	F	F	F
F	F	V	V

donc $\neg(A \Rightarrow B)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg A) \wedge \neg B$

$\Leftrightarrow A \wedge \neg B$)

Ici :

$\neg\big(x \in C(A) \wedge y \notin C(A) \Rightarrow y \notin C(B)\big)$

$\Leftrightarrow \quad (x \in C(A) \wedge y \notin C(A)) \wedge y \in C(B))$

$(\exists A, B \neq \emptyset)(\exists x \text{ et } y \in A \cap B)$:
$(x \in c(A) \wedge y \notin c(A)) \wedge y \in c(B)$

On a :

$$A = \{x_1, x_2, x_3\}$$
$$B = \{x_2, x_3, x_4\}$$
$$A \cap B = \{x_2, x_3\}$$

$c(A) = \{$ californien rouge $\bar{=} 25$ € $\} = \{x_3\}$
$c(B) = \{$ français blanc $\bar{=} 20$ € $\} = \{x_2\}$

et il suffit de prendre $x = x_3$, $y = x_2$

$x_3 \in c(A)$ et $x_2 \in c(B)$
$x_2 \notin c(A)$

<u>Remarque:</u> en particulier, il n'existe pas (cf. CM 1) de relation de préférence $\precsim$ rationnelle qui représenterait cette fonction de choix au sens :

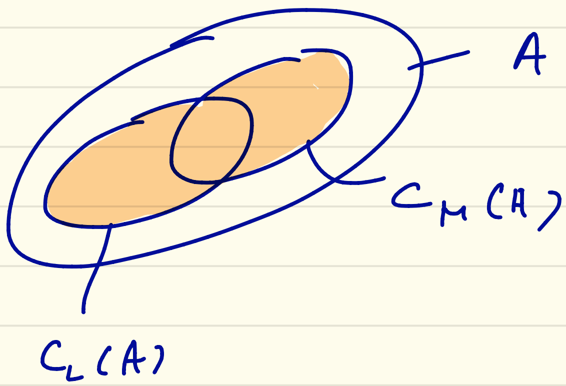
$$\underset{A \neq \emptyset}{c(A)} = \{x \in A \mid (\forall y \in A) : x \succsim y\}$$

<u>Exo 2.</u> 2.1. On définit

$$c^*: A \neq \emptyset \longmapsto c^*(A) := c_L(A) \cup c_M(A)$$

C'est bien une fonction de choix puisque si $A \neq \emptyset$

$$\begin{cases} c_L(A) \subset A \\ c_M(A) \subset A \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{c_L(A) \cup c_M(A)}_{c^*(A)} \subset A$$



i) <u>c^* est finiment $\neq \emptyset$</u> : soit $A \neq \emptyset$,

$c_L(A) \neq \emptyset$ (cf. c_L finiment cohérente)

$$\Rightarrow c^*(A) = \underbrace{c_L(A)}_{\neq \emptyset} \cup c_M(A) \supset c_L(A) \neq \emptyset$$

ii) <u>c^* n'est pas cohérente</u> :

$X = \{x, y, z\}$

$x \succsim_L y$ et $\neg(y \succsim_L x)$
$x \succsim_L z$ $\neg(z \succsim_L x)$

$$\left\{\begin{array}{l} c_L(\{x,y,z\}) = \{x\} \\ c_L(\{y,z\}) = \{y\} \end{array}\right\} (*)$$

$y \succsim_L z$

ce que l'on note : $x \succ_L y$, $x \succ_L z$
($\succ_L$: $\succsim_L$ "strict")

$$\left\{\begin{array}{l} c_M(\{x,y,z\}) = \{z\} \\ c_M(\{x,y\}) = \{x\} \end{array}\right\} (**)$$

ie : $x \succ y \Leftrightarrow x \succsim y$ et $\neg(y \succsim x)$

<u>Remarque</u> : les deux égalités $(*)$ définissent complètement c_L ; en effet :

$c_L(\{x,y\}) = \{x\}$ car $c_L(\{x,y\}) = \{y\}$ contredirait la cohérence ; on peut, puisque c_L est supposée finiment $\neq \emptyset$ et cohérente la représenter par une relation de préférence : $\exists \precsim_L$ rationnelle tq

$$(\forall A \neq \emptyset) : c_L(A) = \{x \in A \mid (\forall y \in A) : x \succsim_L y\}$$

(<u>rappel</u> : $\precsim$ rationnelle $\Leftrightarrow$ i) réflexive
ii) complète
iii) transitive)

De fait la cohérence implique qu'on a :

$$x \succ_L y \succ_L z .$$

(De même, $c_L(\{x, z\}) = \{x\} \ldots$)

Pareillement, la cohérence de c_M implique (**) spécifie complètement c_M.

Considérons $A = \{x, y, z\}$, $B = \{y, z\}$: pour mq c^* est incohérente, on doit trouver a et $b \in A \cap B$ tq $\left\{\begin{array}{l} a \in c^*(A) \\ b \notin c^*(A) \end{array}\right]$ et $b \in c^*(B)$;

prenons $a = z$ et $b = y$;

$y, z \in A \cap B = \{y, z\}$,

$$c^*(A) = c^*(\{x, y, z\}) = c_L(\{x, y, z\}) \cup c_M(\{x, y, z\})$$
$$= \{x\} \cup \{z\}$$
$$= \{x, z\} \not\ni y$$

$$c^*(B) = c^*(\{y, z\}) = c_L(\{y, z\}) \cup c_M(\{y, z\})$$
$$= \{y\} \cup \{z\}$$
$$= \{y, z\} \ni y : b \in c^*(B),$$

contradiction à la cohérence.

2.2. On définit $\precsim^*$ comme suit : (préf. rationnelles)

$$x \precsim^* y \overset{\text{déf.}}{\iff} x \precsim_L y \text{ ou } x \precsim_M y$$

Mq $\precsim^*$ est :

i) <u>réflexive</u> : soit $x \in X$, $x \precsim_L x$ (cf. $\precsim_L$ réflexive)

$$\Rightarrow \underbrace{x \precsim_L x \text{ ou } x \precsim_M x}_{x \precsim^* x}$$

ii) <u>complète</u> : soient x et $y \in X$; $\precsim_L$ est rat. elle est complète, donc soit $x \precsim_L y$, soit $y \precsim_L x$;

- si $x \precsim_L y$, alors $x \precsim_L y$ ou $x \precsim_M y$
  ie $x \precsim^* y$
- si $y \precsim_L x$, alors $y \precsim_L x$ ou $y \precsim_M x$
  ie $y \precsim^* x$

iii) <u>contrexemple à la transitivité (et donc au caractère rationnel de $\precsim^*$)</u> :

Reprenons $X = \{x, y, z\}$ et considérons les deux relations suivantes :

$\precsim_L$: $x \succ_L y \succ_L z$ (définit complètement $\precsim_L$)

$\precsim_M$: $y \succ_M z \succ_M x$ (— " — $\precsim_M$)

Alors : $z \succsim^* x$, $x \succsim^* y$ MAIS $\neg(z \succsim^* y)$ cf.
$\neg(z \succsim_L y \lor z \succsim_M y)$ ie $\neg(z \succsim_L y) \land \neg(z \succsim_M y)$. $\square$

2.3. Mq on a la relation suivante entre c^* et $\precsim^*$:

$$(\forall (x,y) \in X^2) : \quad x \precsim^* y \iff y \in c^*(\{x,y\}).$$

En effet, soient x et $y \in X$, par définition de $\precsim^*$,

$$\begin{aligned} x \precsim^* y &\iff x \precsim_L y \text{ ou } x \precsim_M y \\ &\iff y \in c_L(\{x,y\}) \text{ ou } y \in c_M(\{x,y\}) \\ &\iff y \in \underbrace{c_L(\{x,y\}) \cup c_M(\{x,y\})}_{c^*(\{x,y\})} \end{aligned}$$

<u>Remarque</u>: la connaissance de c^* détermine donc complètement la relation de préférence $\precsim^*$; la réciproque n'est pas vraie (admis, cf. [Kreps'2013] pour un contrexemple).