Cours 2 - Maximisation de l'utilité

<u>Motivation</u> : une consommatrice, disposant d'un revenu $r > 0$, consomme deux biens, en quantités $x_1, x_2 \geq 0$, dont les prix sont p_1 et $p_2 > 0$.

Cette consommatrice cherche à :
- faire un choix de consommation (qu'l'on va supposer rationnel), i.e. à choisir des quantités $x_1, x_2 \geq 0$

$$\longrightarrow \text{choix} = (x_1, x_2) \in X = \mathbb{R}^2_+$$

- respecter sa contrainte budgétaire :

$$p_1 . x_1 + p_2 . x_2 \leq r \quad (\text{pas de crédit !})$$

On va même supposer que cette consommatrice souhaite faire le "meilleur choix possible", étant donné son budget (limité).

Pour cela, on suppose ses goûts modélisés par une fonction de choix vérifiant les propriétés vues au cours 1 (cohérence, notamment ...) : si ses préférences sont rationnelles, au sens où la relation de préférence $\precsim$ qui les modélise vérifie :

i) $(\forall x \in X)$: $x \precsim x$ (réflexivité)

ii) $(\forall (x,y) \in X^2)$: $x \precsim y$ ou $y \precsim x$ (complétude)

iii) $(\forall (x,y,z) \in X^3)$: $x \precsim y$ et $y \precsim z$ $\Longrightarrow x \precsim z$

On sait qu'il existe une (donc beaucoup, cf. remarque plus loin) fonction d'utilité

$u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ qui représente ces préférences :

$$(\forall (x,y) \in X^2) : \boxed{x \precsim y \Longleftrightarrow u(x) \leq u(y)}$$

l'ordre $\leq$ usuel sur les réels

<u>Remarque</u> : si la fonction d'utilité $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ convient, alors $2.u : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2u(x)$ convient également. On n'a donc pas, étant donnée une relation de préférence rationnelle, une seule façon de la représenter par une utilité (non unicité de u). De fait, si $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ convient, quelle que soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>strictement croissante</u>, la composée

$f \circ u : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(u(x))$ convient également.

$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

On est donc conduit, si on appelle $u : X \to \mathbb{R}$ une fonction d'utilité représentant les préférences de notre consommatrice, à considérer le problème ci-après :

$$\begin{cases} \text{maximiser l'utilité } u(x_1, x_2) \\ \text{sous la contrainte de budget} \\ \quad p_1 . x_1 + p_2 . x_2 \leq r \end{cases}$$

Mathématiquement, il s'agit d'un problème très étudié appelé " problème d'optimisation ", qui s'écrit : trouver $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ solution de

$$\begin{cases} u(x_1, x_2) \longrightarrow \max \\ p_1 . x_1 + p_2 . x_2 \leq r \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \longleftrightarrow X = \mathbb{R}^2_+ \end{cases} \qquad (1)$$

Remarque : on peut également s'intéresser à un second problème, consistant à échanger coût et contrainte, à savoir :

- minimiser la dépense
- sous contrainte de satisfaction d'une utilité minimale (u_0) ;

c'est encore un problème de choix (trouver $x = (x_1, x_2) \in X^1$) optimal, mais pour un autre coût à optimiser (ici minimiser), et d'autres contraintes (utilité et non budget).

Mathématiquement, ce problème s'écrit :
trouver $x = (x_1, x_2) \in X = \mathbb{R}^2$ tq

$$(1) \begin{cases} p_1 . x_1 + p_2 . x_2 \longrightarrow \underline{\underline{\min}} \\ u(x_1, x_2) \geq u_0 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : que ce soit pour la maximisation de l'utilité ou la minimisation du budget, le fait de pouvoir modéliser les préférences (les choix...) par une fonction d'utilité permet de quantifier et d'écrire un problème <u>mathématiquement</u> (et <u>numériquement</u>) traitable.

Se posent alors les questions usuelles :

- existence de solution ?
- unicité de solution ?

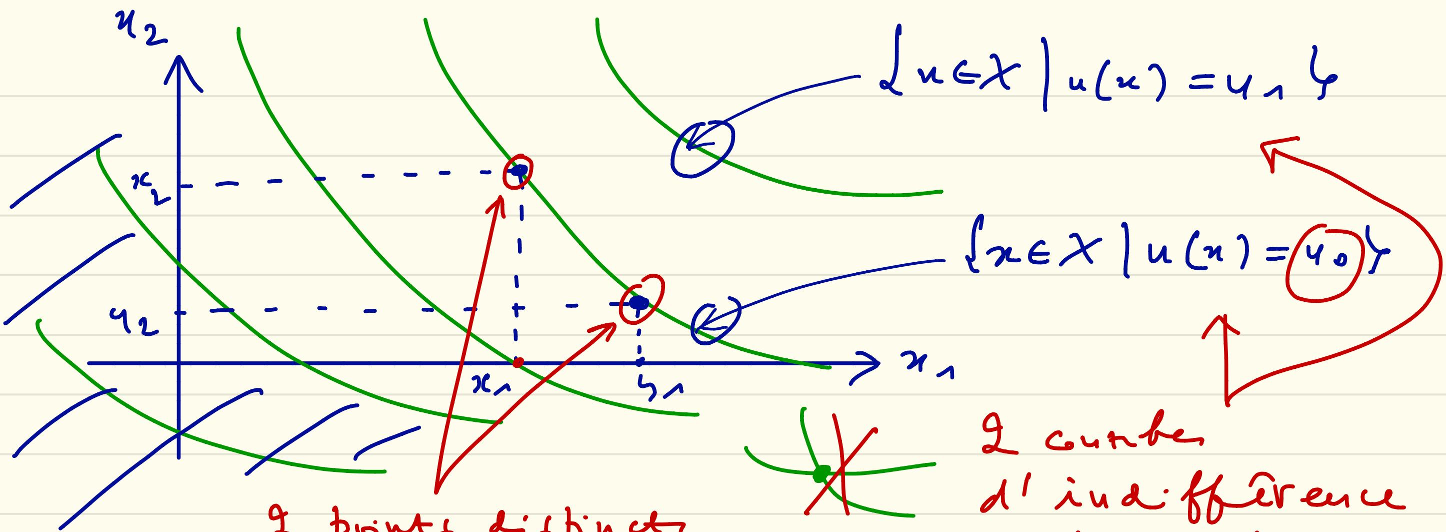
$\exists! \, \bar{x}$ sol. de (1)

- caractérisation (et calcul effectif) de la ou des solutions.

<u>Étude géométrique du problème.</u>

<u>Déf.</u> : soit $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'utilité ; soit $u_0 \in \mathbb{R}$ une valeur pour cette utilité, on appelle <u>courbe d'indifférence</u> (de niveau u_0) l'ensemble

$$\{x \in X \mid \underline{\underline{u(x) = u_0}}\}.$$



2 points distincts de la même courbe qui correspondent à deux choix distincts $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$ mais de même utilité : $u(x_1,x_2) = u(y_1,y_2) = u_0$

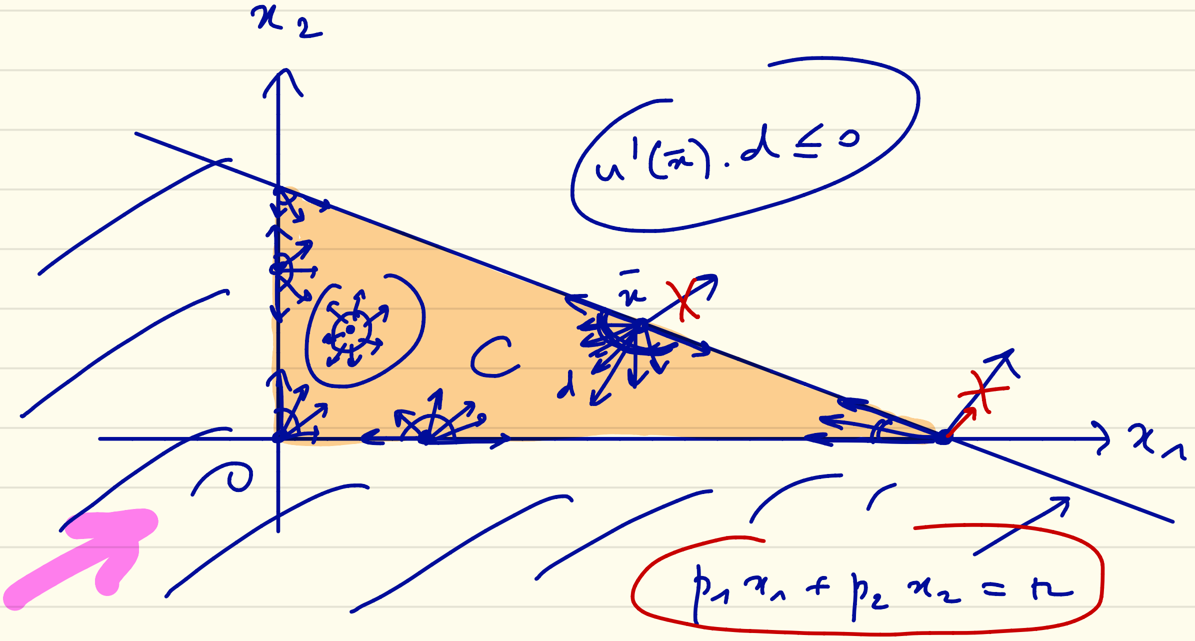
2 courbes d'indifférence disjointes ($u_0 \neq u_1$)

<u>Remarque</u> : soient $u_0 \neq u_1 \in \mathbb{R}$ des valeurs d'utilité distinctes, les deux courbes d'indifférence associées ne se coupent pas (leur intersection est vide — cf. dessin ci-avant) :

$$\{x \in X \mid u(x) = u_0\} \cap \{x \in X \mid u(x) = u_1\} = \emptyset.$$

(évident puisque $u_0 \neq u_1$!)

→ Supposons qu'on a trouvé une solution $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ au problème (1) de maximisation de l'utilité, établissons une <u>condition nécessairement</u> ("forcément...") vérifiée par ce maximiseur.



L'ensemble des contraintes $C \subset X$, délimité par la contrainte de budget $(p_1 . x_1 + p_2 . x_2 \leq r)$ et les contraintes de positivité des choix de biens 1 et 2, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, est le triangle ci-dessus.

Si $\bar{x}$ est solution, on doit avoir :

– $\bar{x} \in C$ ($\bar{x}$ vérifie les contraintes)

– $(\forall x \in C)$: $\boxed{u(\bar{x}) \geq u(x)}$ (optimalité)

En particulier, partant de $\bar{x}$, quelle que soit la direction d dans laquelle je me déplace tout en restant (localement) dans l'ensemble des contraintes C, je ne peux que faire diminuer l'utilité !

$$u(\bar{x} + \underset{\uparrow \; \varepsilon > 0}{\varepsilon} . d) \leq u(\bar{x})$$

$$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \geq u(x_1, x_2)$$

$$\iff (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \succsim (x_1, x_2)$$

ie $u(\bar{x}+\varepsilon.d)-u(\bar{x})\leq 0$, même si $\varepsilon>0$ est très petit. On a donc

$$\frac{u(\bar{x}+\varepsilon.d)-u(\bar{x})}{\varepsilon}\leq 0$$

dérivée directionnelle

quantité qui tend vers $u'(\bar{x}).d$ (dérivée de u — qu'on suppose dérivable) en $\bar{x}$ appliquée à d quand $\varepsilon \to 0$

Par conséquent, si on suppose u dérivable sur $X\subset\mathbb{R}^2$, pour toute direction d telle que, localement, on reste dans C (l'ensemble de ces directions s'appelle "le cône tangent à C en $\bar{x}$" et se note $T_{\bar{x}}C$), on doit avoir :

$$u'(\bar{x}).d\leq 0.$$

En utilisant plutôt le gradient de u en $\bar{x}$, cette relation se réécrit :

$$\boxed{(\forall d\in T_{\bar{x}}C):(\nabla u(\bar{x})\,|\,d)\leq 0.}$$

<u>Nota bene :</u> si $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est dérivable, on rappelle que

$$u'(\underbrace{x_1,x_2}_{x\in\mathbb{R}^2})=\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2)\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right]\quad (\text{ligne})$$

$$\nabla u(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2)\\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)\end{bmatrix}\quad (\text{colonne} = \text{vecteur de } \mathbb{R}^2)$$

vecteur de $\mathbb{R}^2$

$(\cdot\,|\,\cdot)$ $\quad x\cdot y$

$(x\,|\,y)=x_1.y_1+x_2.y_2$

prod. scalaire

$\cancel{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ $\cancel{(\cdot,\cdot)}$

et que

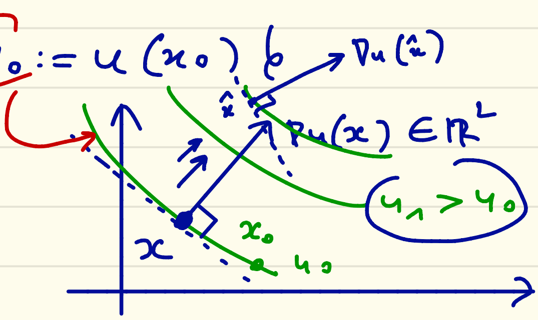
$$(\forall d=(d_1,d_2)\in\mathbb{R}^2): u'(x_1,x_2).\,d = \big(\nabla u(x_1,x_2)\,\big|\,d\big) \leq 0$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2).\,d_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2).\,d_2 .$$

Graphiquement, le gradient $\nabla u(x_0)$ de l'utilité en un point x_0 est perpendiculaire à la tangente en x_0 à la courbe d'indifférence

$$\{x\in X \mid u(x) = u_0 := u(x_0)\}$$

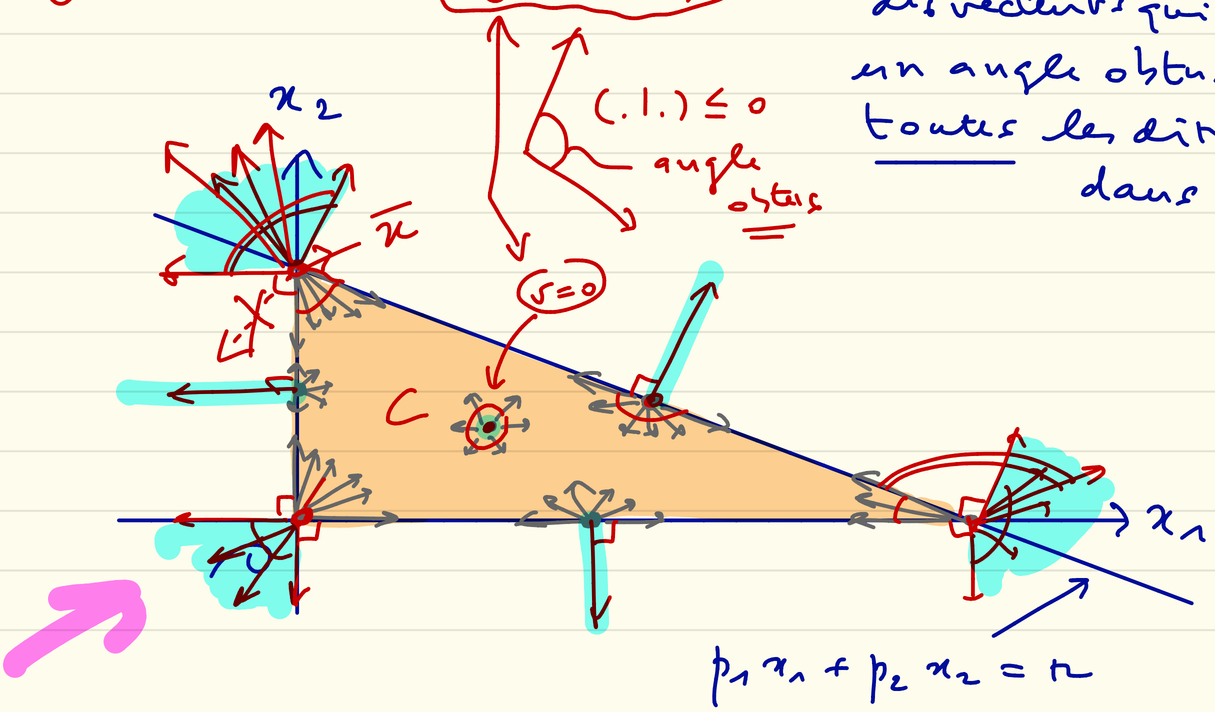
et dirigé dans le sens des utilités croissantes [prouvez-le !]



On sait par ailleurs déterminer, en chaque point x de C, l'ensemble de directions $v\in\mathbb{R}^2$ tq

$$(\forall d\in T_x C): (v \mid d) \leq 0$$

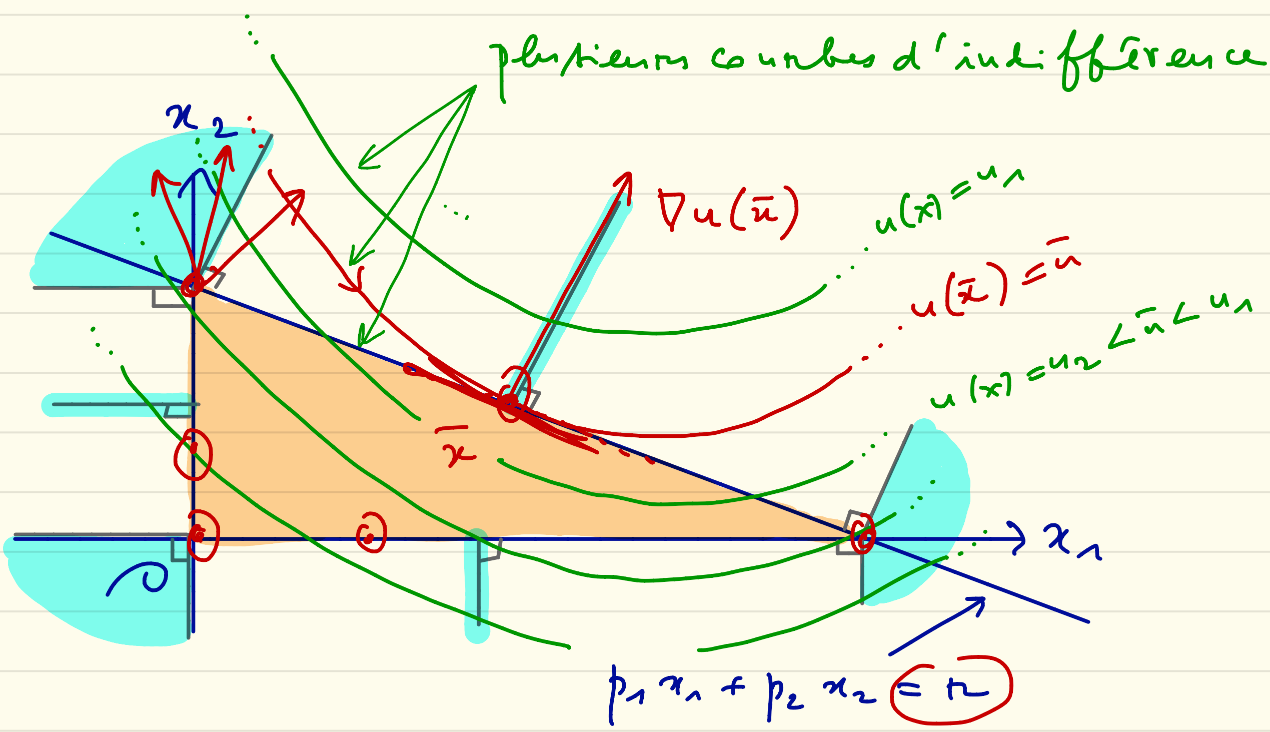
: il s'agit de l'ensemble des vecteurs qui forment un angle obtus avec toutes les directions dans $T_x C$



La condition nécessaire de solution

$$(\forall d \in T_{\bar{x}}C) : (\nabla u(\bar{x}) | d) \leq 0 \qquad (*)$$

exprime donc qu'on est par exemple dans la situation ci-dessous :



Exercice : représentez les autres possibilités permettant de réaliser la condition (*).

Suite du cours :

- traduire analytiquement la condition (*) (KKT)
- donner des conditions garantissant l'existence / l'unicité de solution, et le fait que (*) caractérise les solutions.