TD 3 — Jeux.

Le dilemme des traders :

- interrogatoires séparés ;
- possibilités offertes à chacun :

i) si la personne interrogée dénonce (D) l'autre :

- soit l'autre l'a dénoncé et amende de 500 € pour les deux
- soit l'autre ne l'a pas dénoncé et pas d'amende pour le premier, amende de 1000 € pour l'autre ;

ii) symétriquement dans le cas où la personne interrogée ne dénonce pas (¬D) l'autre :

- soit l'autre ne l'a pas non plus dénoncé et amende de 100 € pour les deux ;
- soit l'autre l'a dénoncé et amende de 1000 € (0 € pour l'autre)

J1 \ J2	D	¬D
D	(-500, -500)	(0, -1000)
¬D	(-1000, 0)	(-100, -100)

stratégie du trader no. 2

stratégies du no. 1

Déf. : (forme normale) un jeu à deux joueurs (généralisation immédiate à $n \geq 2$ joueurs) est dit sous forme normale si on connaît :

- l'ensemble des stratégies S_1, S_2 pour chaque joueur ;

ex. : $S_1 = \{D, \neg D\}$ (dénoncer ou non)
$S_2 = S_1$

- les fonctions de gain pour chaque joueur :

$$g_1 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g_2 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ex. : $g_1(D, D) = -500$, etc.

(et symétrique pour g_2)

Retour sur le dilemme : dans tous les cas, $J1$ (= le traître 1), maximise son gain en dénonçant $J2$, quel que soit la stratégie choisie par celui-ci ; et symétriquement pour $J2$.

Déf. : (équilibre) un ensemble de stratégies $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$ est dit à l'équilibre si :

$$\begin{cases} (\forall s_1 \in S_1) : & g_1(s_1, \bar{s}_2) \leq g_1(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \\ (\forall s_2 \in S_2) : & g_2(\bar{s}_1, s_2) \leq g_2(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \end{cases}$$

__Remarque :__ équilibre pour n joueurs :

$$g_i : S_1 \times \dots \times S_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n)$ à l'équilibre si :

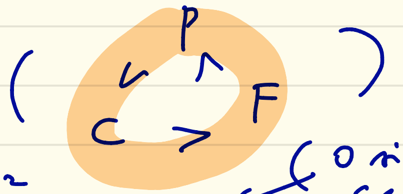
$$(\forall i \in \{1, \dots, n\})(\forall s_i \in S_i) : g_i(\bar{s}_1, \dots, s_i, \dots, \bar{s}_n) \leq g_i(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_i, \dots, \bar{s}_n)$$

__Ex. du dilemme :__ (D, D) est un équilibre.

__Exo 1.__ Mettre sous forme normale le jeu pierre – feuille – ciseaux :

$S_1 = S_2 = \{P, F, C\}$

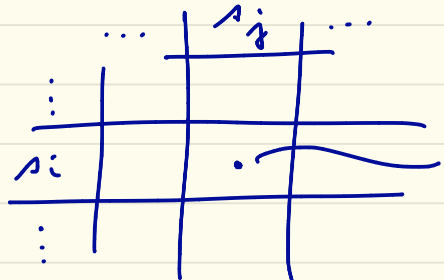
règle : $P < F < C < P$ | préférence...



$s_1 \quad s_2$ (0 si on ne gagne pas) (+1 si on gagne)

$g_1(P, F) = 0$, $g_2(P, F) = 1$, $g_1(P, P) = 0$, ...

→ mettre le jeu sous forme normale et donner la matrice de gains :



$(g_1(s_i, s_j), g_2(s_i, s_j)) \in \mathbb{R}^2$

→ y a-t-il un (des...) équilibres ?

<u>Remarque</u>: dans le cas d'un jeu à deux joueurs sous forme normale dont les ensembles de stratégies S_1 et S_2 sont finis, on peut résumer le jeu par la matrice des gains (cf. schéma ci-avant) : c'est la matrice $\left((g_1(s_i, \tilde{s}_j), g_2(s_i, \tilde{s}_j)) \right)_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}$

où $S_1 = \{s_1, \dots, s_m\}$
$S_2 = \{\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n\}$.

$\longrightarrow$ matrice des gains :

$S_1 \backslash S_2$	P	F	C
P	(0,0)	(0,1)	(1,0)
F	(1,0)	(0,0)	(0,1)
C	(0,1)	(1,0)	(0,0)

$$\left(g_2(s_1, s_2) = g_1(s_2, s_1) \right)$$

(P,P) n'est pas un équilibre : en effet
$$g_1(F, \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{s}_2}}{P}) = 1 > 0 = g_1(P, P) = g(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$$

On voit de même que ni (F, F), ni (C, C) ne sont des équilibres ; (P, F) n'est pas non plus un équilibre, pas plus que (P, C) puisque :

$$g_2(\bar{s}_1 = P, F) = 1 > 0 = g_2(\bar{s}_1, \bar{s}_2 = C)$$

Par symétrie du problème, on conclut que ce problème ne possède pas d'équilibre.

→ Variante (avec biais) : le J_2 devine quand le J_1 s'apprête à jouer C ; forme normale du jeu dans ce cas ? Équilibres ?