TD 3 — Jeux.

Le dilemme des traders :

- interrogatoire séparés ;
- possibilités offertes à chacun :

i) si la personne interrogée dénonce (D) l'autre :

- soit l'autre l'a dénoncé et amende de 500 € pour les deux
- soit l'autre ne l'a pas dénoncé et pas d'amende pour le premier, amende de 1000 € pour l'autre ;

ii) symétriquement dans le cas où la personne interrogée ne dénonce pas (¬D) l'autre :

- soit l'autre ne l'a pas non plus dénoncé et amende de 100 € pour les deux ;
- soit l'autre l'a dénoncé et amende de 1000 € (0 € pour l'autre)

stratégie du trader no. 2

J1 \ J2	D	¬D
D	(-500, -500)	(0, -1000)
¬D	(-1000, 0)	(-100, -100)

stratégie du no. 1

Déf. : (forme normale) un jeu à deux joueurs (généralisation immédiate à $n \geq 2$ joueurs) est dit sous forme normale si on connaît :

- l'ensemble des stratégies S_1, S_2 pour chaque joueur ;

ex. : $S_1 = \{D, \neg D\}$ (dénoncer ou non)

$S_2 = S_1$

- les fonctions de gain pour chaque joueur :

$$g_1 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g_2 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ex. : $g_1(D, D) = -500$, etc.

(et symétrique pour g_2)

Retour sur le dilemme : dans tous les cas, $J1$ (= le traître 1), maximise son gain en dénonçant $J2$, quel que soit la stratégie choisie par celui-ci ; et symétriquement pour $J2$.

Déf. : (équilibre) un ensemble de stratégies $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$ est dit à l'équilibre si :

$$\begin{cases} (\forall s_1 \in S_1) : & g_1(s_1, \bar{s}_2) \leq g_1(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \\ (\forall s_2 \in S_2) : & g_2(\bar{s}_1, s_2) \leq g_2(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \end{cases}$$

Remarque : équilibre pour n joueurs :

$$g_i : S_1 \times \dots \times S_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n)$ à l'équilibre si :

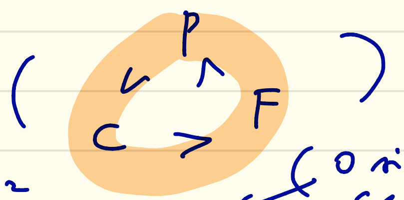
$$(\forall i \in \{1, \dots, n\})(\forall s_i \in S_i) : g_i(\bar{s}_1, \dots, s_i, \dots, \bar{s}_n) \le g_i(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_i, \dots, \bar{s}_n)$$

Ex. du dilemme : (D, D) est un équilibre.

Exo 1. Mettre sous forme normale le jeu pierre – feuille – ciseaux :

$S_1 = S_2 = \{P, F, C\}$

règle : $P < F < C < P$ | préférence...



(0 si on ne gagne pas) (+1 si on gagne)

$g_1(\overset{s_1}{P}, \overset{s_2}{F}) = 0$, $g_2(P, F) = 1$, $g_1(P, P) = 0, \dots$

→ mettre le jeu sous forme normale et donner la matrice de gains :

$$\begin{array}{c|c|c|c} & \cdots & s_j & \cdots \\ \hline \vdots & & & \\ \hline s_i & & \bullet & \\ \hline \vdots & & & \end{array} \quad (g_1(s_i, s_j), g_2(s_i, s_j)) \in \mathbb{R}^2$$

→ y a-t-il un (des...) équilibres ?

<u>Remarque</u>: dans le cas d'un jeu à deux joueurs sous forme normale dont les ensembles de stratégies S_1 et S_2 sont finis, on peut résumer le jeu par la matrice des gains (cf. schéma ci-avant) : c'est la matrice $\left((g_1(s_i, \tilde{s}_j), g_2(s_i, \tilde{s}_j)) \right)_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}$

où $S_1 = \{s_1, \dots, s_m\}$
$S_2 = \{\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n\}$.

$\longrightarrow$ matrice des gains :

$S_1 \backslash S_2$	P	F	C
P	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$
F	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$
C	$(0,1)$	$(1,0)$	$(0,0)$

$$\left(g_2(s_1, s_2) = g_1(s_2, s_1) \right)$$

(P,P) n'est pas un équilibre : en effet
$$g_1(F, \underset{\substack{\uparrow \\ \bar{s}_2}}{P}) = 1 > 0 = g_1(P,P) = g(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$$

On voit de même que ni (F, F), ni (C, C) ne sont des équilibres ; (P, F) n'est pas non plus un équilibre, pas plus que (P, C) puisque :

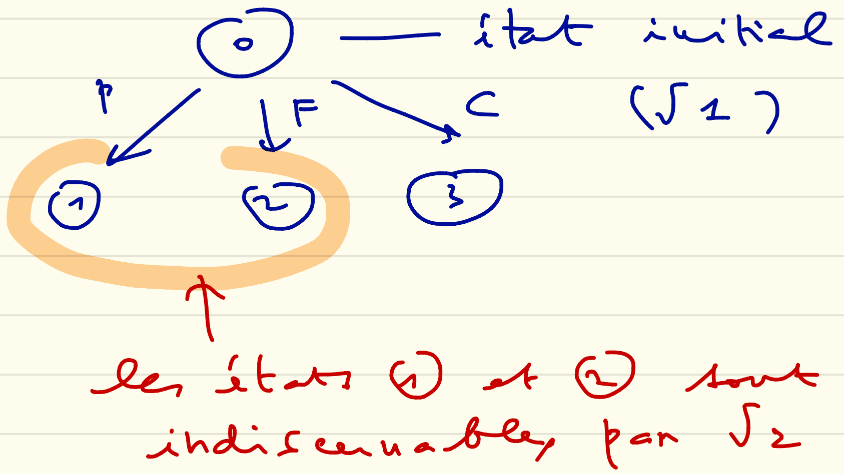
$$S_2(\bar{J}_1 = P, F) = 1 > 0 = S_2(\bar{J}_1, \bar{J}_2 = C)$$

Par symétrie du problème, on conclut que ce problème ne possède pas d'équilibre.

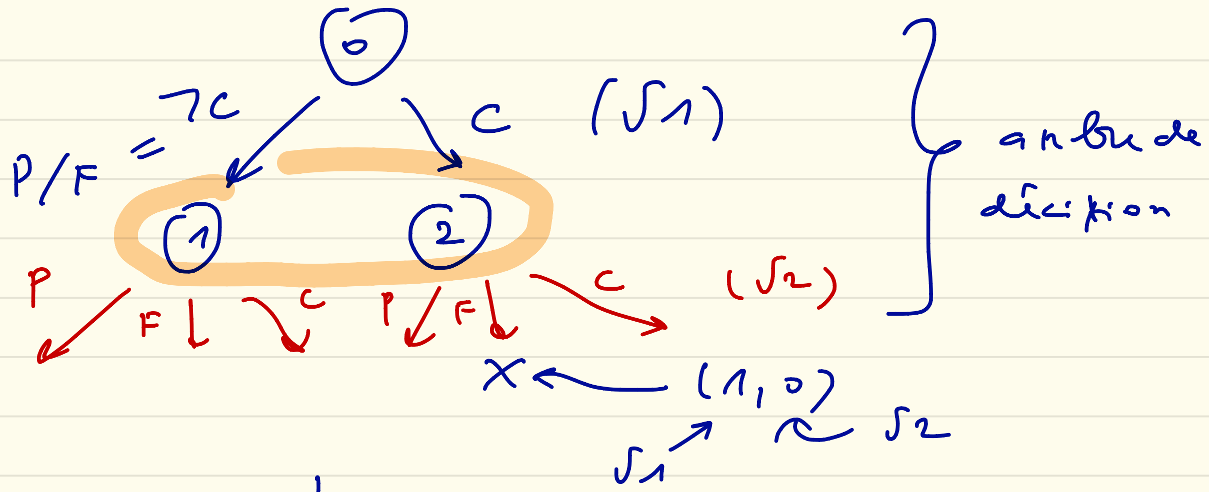
→ Variante (avec biais) : le J_2 devine quand le J_1 s'apprête à jouer C ; forme normale du jeu dans ce cas ? Équilibres ?

1.2. P-F-C "biaisé" : sous forme extensive ("arbre de décision"), on peut proposer le modèle suivant :

→ le biais, basé sur l'observation de J_1 par J_2, introduit le temps dans le jeu

→ 

Le bon modèle rendant compte de l'observation (information...) de J_2 est le suivant :



Stratégie $s_1 = \{P, F, C\}$

Stratégies s_2 : faire un choix a priori (= avant que le jeu ne commence) du coup à jouer dans chacune des situations possibles ; ici, choisir une stratégie revient donc à préciser quel coup jouer :

- dans l'état 1 (P, F ou C)
- ——— 2 (P, F ou C)

ex. de stratégie pour J_2 : $s_2 \in S_2$,

$s_2 =$ P dans le cas 1,
F dans le cas 2

ie : $s_2 \in \underbrace{\{P, F, C\}}_{1} \times \underbrace{\{P, F, C\}}_{2} =: S_2$

donc $S_2 = \{(a, b) \mid a = P, F$ ou $C,\ b = P, F$ ou $C\}$

On note $s_2 =$ PP pour P dans l'état 1
P ——— 2

$s_2 =$ PF pour P ——— 1
F ——— 2

...

J_1 \ J_2	PP	PF	PC	FP	FF	FC	CP	CF	CC
P	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(1,0)	(1,0)	(1,0)
F	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,1)	(0,1)
C	(0,1)	(1,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,0)

$s_1 = P$, $s_2 = PF$: J_1 joue P on arrive dans l'état (2), auquel cas J_2 joue P aussi :

$$\begin{cases} g_1(s_1, s_2) = 0 \\ g_2(s_1, s_2) = 0 \end{cases}$$

<u>Rappel</u> : $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$ équilibre (de Nash) ssi :

$$\begin{cases} (\forall s_1 \in S_1) : g_1(s_1, \bar{s}_2) \leq g_1(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \\ (\forall s_2 \in S_2) : g_2(\bar{s}_1, s_2) \leq g_2(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \end{cases}$$

Dans la mesure où chacune des trois lignes contient toujours une paire de gains de la forme $(\ldots, 1)$, un équilibre $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ doit être tq $g_2(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \underline{(\ldots, 1)}$.

De plus, puisque si on a un équilibre il correspond nécessairement à une paire de gains $(0,1)$ (cf. pas de $(1,1)$ dans le tableau !), nécessairement on doit avoir une colonne de zéros pour les gains de J_1.

On a donc 3 équilibre (P, FP), (C, FP), (P, FC).

Déf. : soient $\bar{s}_1$ et $\tilde{s}_1$ deux stratégies $\in S_1$;
on dit que $\bar{s}_1$ domine strictement $\tilde{s}_1$ (" $\bar{s}_1 \geq \tilde{s}_1$ ")
si : $(\forall s_2 \in S_2)$: $g_1(\bar{s}_1, s_2) \underset{>}{\geq} g_1(\tilde{s}_1, s_2)$

Si $\bar{s}_1$ domine toutes les autres stratégies de S_1, ont dit qu'elle est dominante. (*)
A contrario, une stratégie est dite dominée si elle dominée par toutes les autres.

(*) une stratégie dominante est dite fortement dominante si elle domine strictement toutes les autres :

$$(\forall \tilde{s}_1 \in S_1 \setminus \{\bar{s}_1\}) : \bar{s}_1 > \tilde{s}_1$$

$$\iff (\forall \tilde{s}_1 \in S_1 \setminus \{\bar{s}_1\})(\forall s_2 \in S_2) : g_1(\bar{s}_1, s_2) > g_1(\tilde{s}_1, s_2)$$

une stratégie dominante mais pas fortement ("faiblement dominante") :

$$(\exists \tilde{s}_1 \in S_1 \setminus \{\bar{s}_1\})(\exists s_2 \in S_2) : g_1(\bar{s}_1, s_2) = g_1(\tilde{s}_1, s_2)$$

On constate qu'il existe une colonne de zéros pour J_2, la colonne PF, donc :
- nécessairement PF est une stratégie dominée de J_2 ;
- toute stratégie dominée doit être de cette forme

$\Longrightarrow$ 2 stratégies dominées pour J_2 ;

Pas de stratégie dominante pour J_1. On voit de même que :

- pas de stratégie dominante pour J_2,
- ―――――――――――――――――――― J_1.

En particulier, les stratégies FP et FC de J_2 qui interviennent dans les équilibres ne sont pas dominantes, pas plus que I pour J_1.

Exo 2. forme extensive du jeu

Joueur 1	*Joueur 2*	*Joueur 1*	*Pot*
mise ⟶ ①	voit ⟶		meilleure main
	passe ⟶		joueur 1
⓪			
passe ⟶ ②	passe ⟶		meilleure main
	mise ⟶ ③	voit ⟶	meilleure main
		passe ⟶	joueur 2

main $= (3,1)$
$\Rightarrow g_1 = 2$
$g_2 = -2$

(jeu : somme nulle !)

$$\boxed{g_1(s_1, s_2) = -g_2(s_1, s_2)}$$

(Ekeland '74)

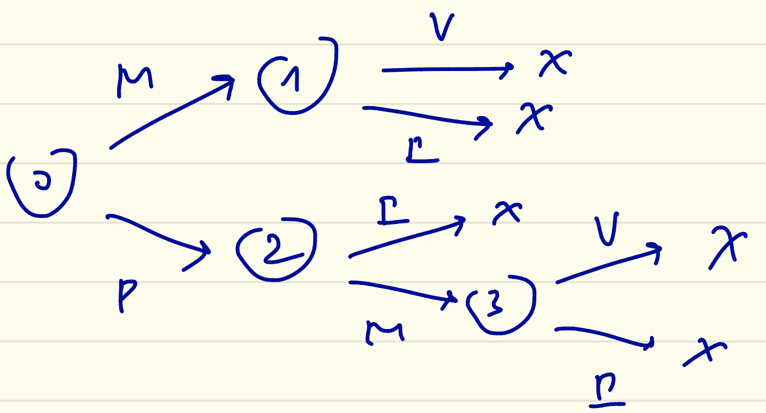
Pour les mains, on a $3 \times 2 = 6 = 3!$ $(= A_3^2 \ldots)$ possibilités :

$$
\begin{array}{ccc}
1 & < & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \\
2 & < & \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \\
3 & < & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \\
\uparrow & & \uparrow \\
J_1 & & J_2
\end{array}
$$

6 possibilités de mains :

$$(\underset{\nearrow \atop J_1}{1}, \underset{\uparrow \atop J_2}{2}), \ldots, (3, 2)$$

S_1 : ensemble des stratégies du joueur J_1, sachant que : 1 stratégie ($s_1 \in S_1$) = déterminer à l'avance ce que J_1 joue dans chacun des cas possibles ;



(x = fin et calcul des gains)

Connaissant sa main (= les cartes qu'il a en main), J_1 peut choisir

- soit de miser ($M = M_0$)
- soit de passer puis de voir ($PV = P_0 V_3$)
- soit de passer puis de passer ($PP = P_0 P_3$)

$\Longrightarrow$ 3 choix : (M, PV, PP)

Ce choix dépend bien sûr de la main de J_1 : une stratégie consiste donc à déterminer pour chacune des mains possibles ce choix :

ex. : $s_1 = (PP, M, PV)$

si main = 1

si main = 2

si main = 3

$$\Rightarrow S_1 = \underbrace{\{M, PV, PP\}}_{\text{si main 1}} \times \underbrace{\{M, PV, PP\}}_{\text{main 2}} \times \underbrace{\{M, PV, PP\}}_{\text{main 3}}$$

(card $S_1 = 3^3 = 27$)

S_2 : une stratégie consiste à prévoir ce que S_2 joue, connaissant sa main, dans chacun des états possibles (ici : 1 et 2)

En 1, V ou B (2 choix {B, V})

En 2, P ou M (2 choix {P, M})

$\Rightarrow$ $2 \times 2 = 4$ possibilités à savoir :

$$\underbrace{\{V, B\}}_{\text{en } 1} \times \underbrace{\{P, M\}}_{\text{en } 2} = \{(V,P), (V,M), (P,P), (P,M)\}$$

$$= \{VB, VM, PP, PM\}$$

$$VB = V_1 B_2$$

Au final, comme S_2 doit choisir sa stratégie pour chacune des 3 mains possibles,

$$S_2 = \underbrace{\{VB, VM, PP, PM\}}_{\text{main 1}} \times \overbrace{\{VB, VM, PP, PM\}}^{\text{main 2}} \times \underbrace{\{VB, VM, PP, PM\}}_{\text{main 3}}$$

$$s_2 = (\underset{\text{bluff}}{PM}, VM, VM)$$

$\Rightarrow$ $\text{card } S_2 = 4^3 = 64$

$\Rightarrow$ tableau des gains 27×64

(et dans chaque case on met non pas $(S_1(s_1, s_2), S_2(s_1, s_2))$ mais simplement $S_1(s_1, s_2)$ puisque $S_2(s_1, s_2) = -S_1(s_1, s_2)$, cf. jeu à somme nulle).

2.2.- Calcul des gains :

$$s_1 = (PP, M, PV)$$

PP : si main $= 1$; M : si main $= 2$; PV : si main $= 3$

$$s_2 = (PM, VM, VM)$$

PM : bluff

$$\Longrightarrow g_1(s_1, s_2) = \,?$$

Si les mains pour J_1 et J_2 sont connues,

$$M = (\text{main de } J_1, \text{main de } J_2) \in \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\} = \Omega$$

$$(= \{1,2,3\} \times \{1,2,3\} \setminus \{(1,1),(2,2),(3,3)\})$$

alors, la valeur du gain de J_1, $G_1(s_1,s_2,M)$, est également connue ;

$$g_1(s_1,s_2) = E(\overbrace{G_1(s_1,s_2,M)}^{v.a.})$$

sachant que M est une v.a. (= variable aléatoire) discrète à valeurs dans Ω (card $\Omega = 3! = 6$)

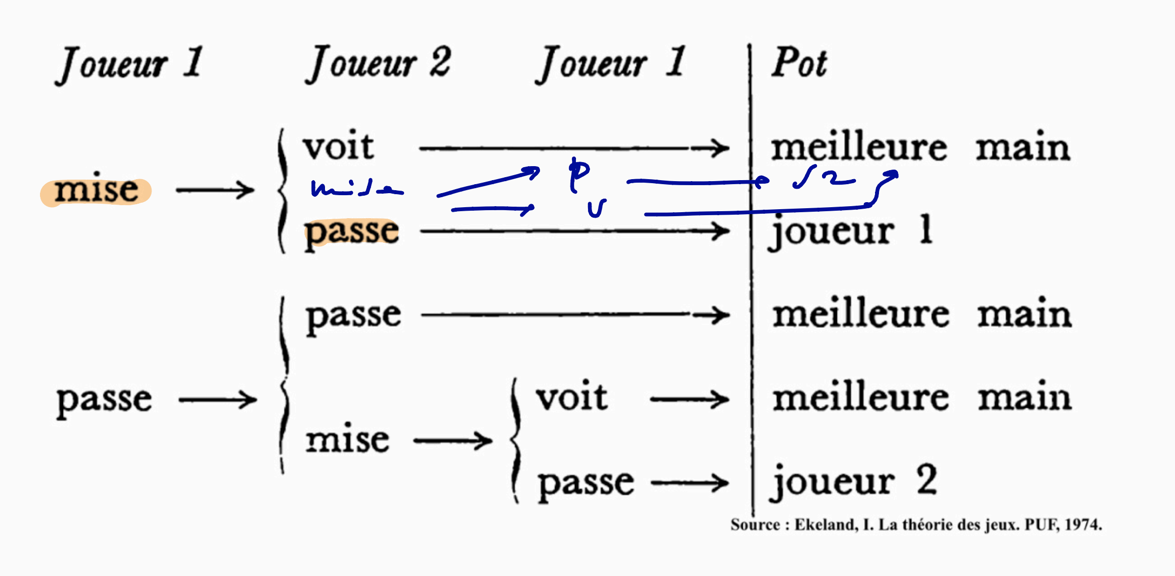
$$\text{ie : } g_1(s_1,s_2) = \sum_{m \in \Omega} G_1(s_1,s_2,m) \cdot \overbrace{\mathbb{P}(M=m)}^{\text{proba que } M=m}$$

On fait ici l'hypothèse que toutes les mains sont équiprobables, ie que : $P(M=m) = \frac{1}{6}$, $\forall m \in \Omega$;

$s_1 \downarrow \quad \swarrow s_2$

$(1,2)$: $s_1 = (PP, M, PV)$, $s_2 = (PM, VM, VM)$

La séquence de jeu est : $P \to M \to P$: $g_1 = -1$



2.1

$(1,3)$: $s_1 \to PP$, $s_2 \to VM$: $g_1 = -1$

$(2,1)$: $s_1 \to M$, $s_2 \to PM$, $M \to P$: $g_1 = -2+3 = 1$

$(2,3)$: $s_1 \to M$, $s_2 \to VM$, $M \to V$: $g_1 = -2$

$(3,1)$: $s_1 \to PV$, $s_2 \to PM$, $P \to M \to V$: $g_1 = 2$

$(3,2)$: $s_1 \to PV$, $s_2 \to VM$, $P \to M \to V$: $g_1 = 2$

$\Longrightarrow g_1(s_1, s_2) = (-1-1+1-2+2+2)/6 = 1/6 > 0$

(et $g_2(s_1, s_2) = -1/6 < 0$).