Cours 4 — Dilemme et jeux

Motivation : deux tradeuses sont arrêtées pour malversation par l'autorité des marchés financiers. Elles sont interrogées séparément, et le "deal" qui leur est proposé consiste à dénoncer ou non l'autre tradeuse. Les amendes encourues par chacune d'elle sont résumées dans le tableau ci-dessous (une amende est un "gain négatif", d'où les signes "−") :

Tradeuse 1 \ Tradeuse 2	Dénonce (D)	Ne dénonce pas (¬D)
Dénonce (D)	(−500 €, −500 €)	(0 €, −1000 €)
Ne dénonce pas (¬D)	(−1000 €, 0 €)	(−100 €, −100 €)

→ Il s'agit d'un "jeu"
- à 2 joueuses
- non-collaboratif

Le tableau ci-avant qui indique l'ensemble des stratégies de chaque joueuse et les gains associés réalise la mise sous forme normale du jeu. On notera :

S_1 : l'ensemble des stratégies pour J_1
S_2 : —— " —— J_2

Ici, $S_1 = S_2 = \{ D, \neg D \}$ (dénoncer ou non)

Chaque joueuse a sa fonction de gain :

$g_1 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$g_2 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Ici, $g_1(D, D) = -500 = g_2(D, D)$
$g_1(D, \neg D) = 0$, $g_2(D, \neg D) = -1000$, etc.

Une analyse rapide par chaque tricheuse montre à chacune d'elle qu'elle a toujours intérêt (indépendamment du choix de l'autre, choix qu'elle ne connaît pas) à dénoncer. On a ce qu'on appelle un équilibre.

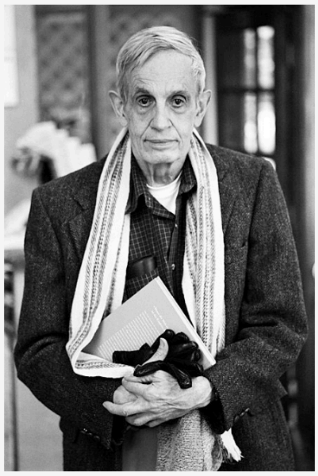
<u>Déf.</u> : un couple de stratégies $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$ réalise un équilibre de Nash si :

$$\begin{cases} (\forall s_1 \in S_1) : & g_1(s_1, \bar{s}_2) \leq g_1(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \\ (\forall s_2 \in S_2) : & g_2(\bar{s}_1, s_2) \leq g_2(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \end{cases}$$

Examinons maintenant le cas où la tradeuse no. 2 est informée par un inspecteur corrompu du choix de la tradeuse no. 1. Cette rupture de la symétrie entre joueuses et de la simultanéité de leurs choix donne lieu à un "jeu séquentiel" :

- la tradeuse 1 fait son choix
- puis la tradeuse 2, connaissant ce choix, fait son propre choix.

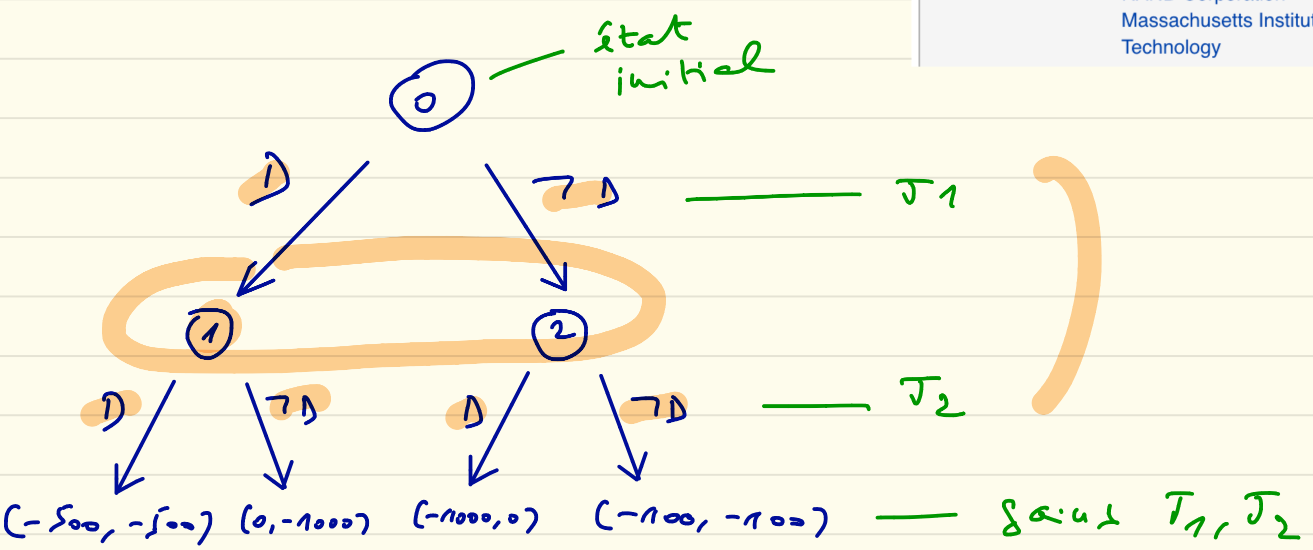
John Forbes Nash, Jr.



John Nash en 2000.

Nom de naissance	John Forbes Nash Jr.
Naissance	13 juin 1928 Bluefield, Virginie-Occidentale (États-Unis)
Décès	23 mai 2015 (à 86 ans) près de Monroe Township (comté de Middelsex) New Jersey (États-Unis)
Nationalité	Américain
Institutions	Université de Princeton RAND Corporation Massachusetts Institute of Technology

On a l'arbre de décision / de possibilités suivant :



Cette modélisation s'appelle la mise sous "forme extensive" du jeu séquentiel. Tout tel jeu peut toujours être mis sous forme normale. Il suffit pour cela de déterminer l'ensemble des stratégies de chaque joueuse (et les gains).

Une stratégie consiste, pour une joueuse donnée, à décider à l'avance de quel coup jouer dans chaque état possible où elle est amenée à jouer.

Ici, pour la tradeuse no. 1 : choix entre D ou ¬D à l'état ⓪ $\Longrightarrow$ $S_1 = \{ D, \neg D \}$.

Pour la tradeuse no. 2 : choix entre D et ¬D à l'état ①, et choix entre D et ¬D à l'état ② $\Longrightarrow$ $S_2 = \underbrace{\{ D_1, \neg D_1 \}}_{\text{choix dans ①}} \times \underbrace{\{ D_2, \neg D_2 \}}_{\text{choix dans ②}}$

$= \{ D_1 D_2, D_1 \neg D_2, \neg D_1 D_2, \neg D_1 \neg D_2 \}$: elle a non plus 2 mais désormais 4 stratégies possibles. La forme normale de ce nouveau jeu est :

$S_1 \backslash S_2$	$D_1 D_2$	$D_1 \neg D_2$	$\neg D_1 D_2$	$\neg D_1 \neg D_2$
D	$(-500, -500)$	$(-500, -500)$	$(0, -1000)$	$(0, -1000)$
$\neg D$	$(-1000, 0)$	$(-100, -100)$	$(-1000, 0)$	$(-100, -100)$

L'examen du tableau montre qu'on a encore un et un seul couple de stratégies en équilibre, $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = (D, D_1 D_2)$, associé aux mêmes gains $(-500, -500)$ que précédemment.

On a par contre fait apparaître de nouvelles stratégies pour J_2, dont certaines sont clairement pires que toutes les autres : jouer $s_2 = \neg D_1 \neg D_2$ (ie ne jamais dénoncer) semble une mauvaise idée puisque les gains associés, quoi que joue J_1, sont toujours inférieurs ou égaux aux gains des autres stratégies possibles pour J_2.
On parle de "stratégie dominée".

<u>Déf.</u> : soient $\bar{s}_1$ et $\hat{s}_1 \in S_1$ deux stratégies de J_1 ; on dit que $\bar{s}_1$ est dominée par $\hat{s}_1$ si :

$$(\forall s_2 \in S_2) : g_1(\bar{s}_1, s_2) \leq g_1(\hat{s}_1, s_2).$$

Si $\bar{s}_1$ est dominée par toutes les autres stratégies, on dit qu'elle est dominée, et on peut préciser en disant qu'elle est
- fortement dominée si
$(\forall s_1 \in S_1, s_1 \neq \bar{s}_1)(\forall s_2 \in S_2) : g_1(\bar{s}_1, s_2) < g_1(s_1, s_2)$
- faiblement dominée sinon (ie : il existe au moins un cas d'égalité).

L'existence d'un équilibre n'est pas garantie, même pour un jeu fini (= jeu tq les ensembles de stratégies S_1 et S_2 sont finis) ; voir par exemple le cas de Pierre-Feuille-Ciseaux (TD3). On peut néanmoins préciser les choses en "jeux à somme nulle".

Déf. : on dit qu'un jeu est à somme nulle si :

$$(\forall (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2) : g_2(s_1, s_2) = -g_1(s_1, s_2)$$

(la somme des gains de J_1 et J_2 est toujours nulle, ie l'une perd ce que l'autre gagne).

Considérons un tel jeu et notons

$$g : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(s_1, s_2) = g_1(s_1, s_2) = -g_2(s_1, s_2)$$

(= gain de J_1 = perte de J_2).

Par définition, $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$ est un équilibre si :

$$g(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \max_{s_1 \in S_1} g(s_1, \bar{s}_2) = \min_{s_2 \in S_2} g(\bar{s}_1, s_2)$$

ce qui nous conduit à définir :

$$\begin{cases} \alpha := \sup\limits_{s_1 \in S_1} \inf\limits_{s_2 \in S_2} g(s_1, s_2) \\ \beta := \inf\limits_{s_2 \in S_2} \sup\limits_{s_1 \in S_1} g(s_1, s_2) \end{cases}$$

Remarque : on a $\alpha \leq \beta$, ces deux valeurs peuvent valoir $\pm\infty$.

[Rappels : . Soit $A \subset \mathbb{R}$, $\inf A$ est – s'il existe – le plus grand des minorants de A ;

. toute partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et minorée possède un inf (= "borne inférieure") ;

. si $A = \emptyset$, par convention $\inf A := +\infty$;

. si $A \neq \emptyset$ ne possède pas d'inf (parce qu'elle n'est pas minorée), $\inf A := -\infty$ (ex. : $A =]-\infty, 0] \Longrightarrow \inf A = -\infty$).]

En effet, soit $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$,

$$\inf_{S_2} g(s_1, \cdot) \leq g(s_1, s_2) \leq \sup_{S_1} g(\cdot, s_2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup_{S_1} \inf_{S_2} g}_{\alpha} \leq g(s_1, s_2) \leq \underbrace{\inf_{S_2} \sup_{S_1} g}_{\beta} .$$

Ces quantités α et β s'interprètent clairement :

" Tu sais que ce que tu peux espérer de mieux est d'éviter le pire. "
I. Calvino

– J_1 cherche une stratégie $\bar{s}_1$ qui maximise son pire gain :

$$\inf_{s_2 \in S_2} g(\bar{s}_1, s_2) = \underbrace{\sup_{s_1 \in S_1} \inf_{s_2 \in S_2} g(s_1, s_2)}_{\alpha}$$

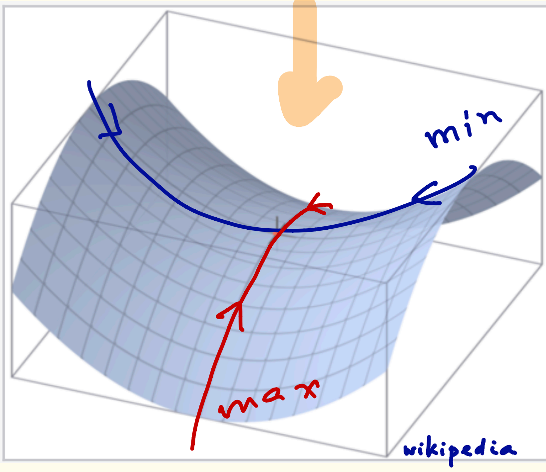
- symétriquement, J_2 cherche une stratégie $\bar{s}_2$ qui minimise sa pire perte :

$$\sup_{s_1 \in S_1} g(s_1, \bar{s}_2) = \underbrace{\inf_{s_2 \in S_2} \sup_{s_1 \in S_1} g(s_1, s_2)}_{\beta}.$$

<u>Th.</u> : $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$ est un équilibre si et seulement si

$$\inf_{s_2 \in S_2} g(\bar{s}_1, s_2) = g(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \sup_{s_1 \in S_1} g(s_1, \bar{s}_2),$$

auquel cas $\alpha = \beta$ s'appelle "la valeur" du jeu. On dit également que $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ est un "point-selle" du jeu.



<u>Corollaire</u> : si $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ et $(\hat{s}_1, \hat{s}_2) \in S_1 \times S_2$ sont deux équilibres, alors $(\bar{s}_1, \hat{s}_2)$ (et $(\hat{s}_1, \bar{s}_2)$) aussi.

<u>dém.</u> : on a

$$g(\hat{s}_1, \bar{s}_2) \leq \max_{s_1} g(s_1, \bar{s}_2) = \underset{\substack{\| \\ \alpha = \beta}}{g(\bar{s}_1, \bar{s}_2)} = \min_{s_2} g(\bar{s}_1, s_2) \leq g(\bar{s}_1, \hat{s}_2)$$

$$g(\bar{s}_1, \hat{s}_2) \leq \overset{\|}{g(\hat{s}_1, \hat{s}_2)} \leq g(\hat{s}_1, \bar{s}_2),$$ d'où l'égalité. $\square$

dém. (du théorème) : si $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$ est un équilibre, on a

$$g(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \max_{s_1 \in S_1} g(s_1, \bar{s}_2) \geq \underbrace{\inf_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_2} g(s_1, s_2)}_{= \beta}$$

$$\|$$

$$\text{et } g(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \min_{s_2 \in S_2} g(\bar{s}_1, s_2) \leq \underbrace{\sup_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} g(s_1, s_2)}_{= \alpha}$$

Donc $\alpha \geq \beta$, d'où l'égalité puisqu'on a toujours $\alpha \leq \beta$, et l'existence d'un pt selle. La réciproque se montre de façon analogue. □

Comme on l'a vu, même pour de jeux finis, l'existence d'équilibre / de pt-selle n'est pas garantie. L'objectif de la dernière partie du cours est de montrer comment, en élargissant (convexifiant...) l'ensemble des stratégies possibles pour chacun des joueuses (ce qui s'interprète de façon probabiliste pour des jeux que l'on répète un grand nombre de fois — notion de "stratégie mixte"), on peut assurer l'existence d'un équilibre... et le calculer.
