TD 3 — Jeux.

Le dilemme des traders :

- interrogatoires séparés ;
- possibilités offertes à chacun :

i) si la personne interrogée dénonce (D) l'autre :
  - soit l'autre l'a dénoncé et amende de 500 € pour les deux
  - soit l'autre ne l'a pas dénoncé et pas d'amende pour le premier, amende de 1000 € pour l'autre ;

ii) symétriquement dans le cas où la personne interrogée ne dénonce pas ($\neg D$) l'autre :
  - soit l'autre ne l'a pas non plus dénoncé et amende de 100 € pour les deux ;
  - soit l'autre l'a dénoncé et amende de 1000 € (0 € pour l'autre)

stratégie du trader no. 2

J1 \ J2	D	$\neg$D
D	(-500, -500)	(0, -1000)
$\neg$D	(-1000, 0)	(-100, -100)

stratégie du no. 1

Déf. : (forme normale) un jeu à deux joueurs (généralisation immédiate à $n \geq 2$ joueurs) est dit sous forme normale si on connaît :

- l'ensemble des stratégies S_1, S_2 pour chaque joueur ;

ex. : $S_1 = \{D, \neg D\}$ (dénoncer ou non)
$S_2 = S_1$

- les fonctions de gain pour chaque joueur :

$$g_1 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g_2 : S_1 \times S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

ex. : $g_1(D, D) = -500$, etc.

(et symétrique pour g_2)

Retour sur le dilemme : dans tous les cas, $J1$ (= le traître 1), maximise son gain en dénonçant $J2$, quel que soit la stratégie choisie par celui-ci ; et symétriquement pour $J2$.

Déf. : (équilibre) un ensemble de stratégies $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$ est dit à l'équilibre si :

$$\begin{cases} (\forall s_1 \in S_1) : & g_1(s_1, \bar{s}_2) \leq g_1(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \\ (\forall s_2 \in S_2) : & g_2(\bar{s}_1, s_2) \leq g_2(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \end{cases}$$

Remarque : équilibre pour n joueurs :

$$g_i : S_1 \times \cdots \times S_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$(\bar s_1, \dots, \bar s_n)$ à l'équilibre si :

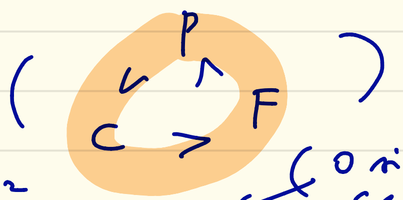
$$(\forall i \in \{1, \dots, n\})(\forall s_i \in S_i) : g_i(\bar s_1, \dots, s_i, \dots, \bar s_n) \leq g_i(\bar s_1, \dots, \bar s_i, \dots, \bar s_n)$$

Ex. du dilemme : (D, D) est un équilibre.

Exo 1. Mettre sous forme normale le jeu pierre - feuille - ciseaux :

$S_1 = S_2 = \{P, F, C\}$

règle : $P < F < C < P$ | préférence...



(0 si on ne gagne pas) (+1 si on gagne)

$$\underset{s_1}{g_1}(P, \underset{s_2}{F}) = 0, \quad g_2(P, F) = 1, \quad g_1(P, P) = 0, \dots$$

→ mettre le jeu sous forme normale et donner la matrice des gains :

$$\begin{array}{c|ccc} & \cdots & s_j & \cdots \\ \hline \vdots & & & \\ s_i & & \cdot & \\ \vdots & & & \end{array} \qquad (g_1(s_i, s_j), g_2(s_i, s_j)) \in \mathbb{R}^2$$

→ y a-t-il un (des...) équilibres ?

Remarque : dans le cas d'un jeu à deux joueurs sous forme normale dont les ensembles de stratégies S_1 et S_2 sont finis, on peut résumer le jeu par la matrice des gains (cf. schéma ci-avant) : c'est la matrice $\left((g_1(s_i, \tilde{s}_j), g_2(s_i, \tilde{s}_j)) \right)_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}$

où $S_1 = \{s_1, \dots, s_m\}$
$S_2 = \{\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n\}$.

$\longrightarrow$ matrice des gains :

$S_1 \backslash S_2$	P	F	C
P	(0,0)	(0,1)	(1,0)
F	(1,0)	(0,0)	(0,1)
C	(0,1)	(1,0)	(0,0)

$$\left(g_2(s_1, s_2) = g_1(s_2, s_1) \right)$$

(P,P) n'est pas un équilibre : en effet

$$g_1(F, \underset{\overset{\uparrow}{s_2}}{P}) = 1 > 0 = g_1(P, P) = g(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$$

On voit de même que ni (F, F), ni (C, C) ne sont des équilibres ; (P, F) n'est pas non plus un équilibre, pas plus que (P, C) puisque :

$$g_2(\bar{\mathcal{J}}_1 = P, F) = 1 > 0 = g_2(\bar{\mathcal{J}}_1, \bar{\mathcal{J}}_2 = C)$$

Par symétrie du problème, on conclut que ce problème ne possède pas d'équilibre.

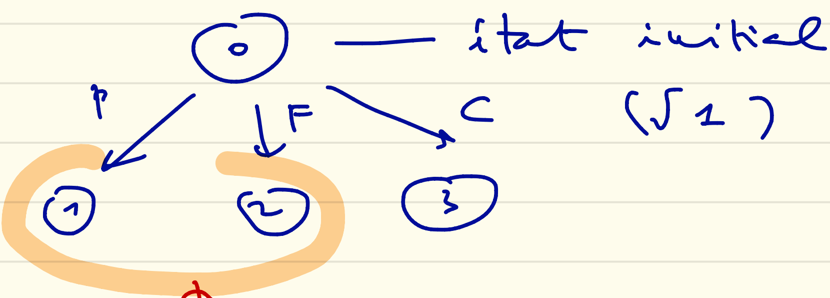
→ Variante (avec biais) : le $\mathcal{J}_2$ devine quand le $\mathcal{J}_1$ s'apprête à jouer C ; forme normale du jeu dans ce cas ? Équilibres ?

"arbre de décision"

1.2. P-F-C "biaisé" : sous forme extensive, on peut proposer le modèle suivant :

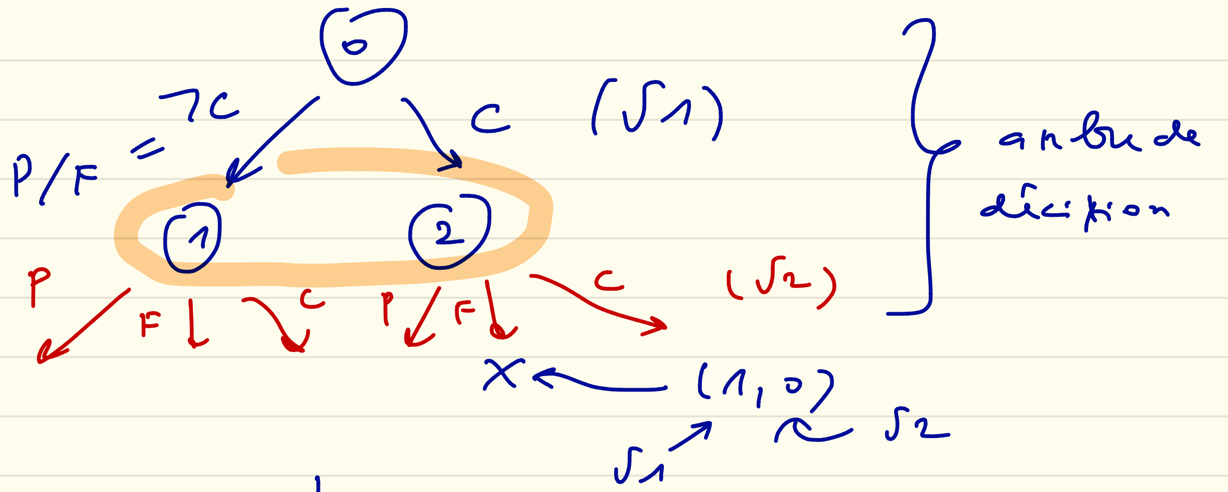
→ le biais, basé sur l'observation de $\mathcal{J}_1$ par $\mathcal{J}_2$, introduit le temps dans le jeu

→



les états ① et ② sont indiscernables par $\mathcal{J}_2$

Le bon modèle rendant compte de l'observation (information...) de $\mathcal{J}_1$ est le suivant :



Stratégie $s_1 = \{P, F, C\}$

Stratégies s_2 : faire un choix a priori (= avant que le jeu ne commence) du coup à jouer dans chacune des situations possibles ; ici, choisir une stratégie revient donc à préciser quel coup jouer :

— dans l'état ① (P, F ou C)

— ——— ② (P, F ou C)

ex. de stratégie pour J_2 : $s_2 \in S_2$,

s_2 = P dans le cas ①,
F dans le cas ②

ie : $s_2 \in \underbrace{\{P, F, C\}}_{①} \times \underbrace{\{P, F, C\}}_{②} =: S_2$

donc $S_2 = \{(a, b) \mid a = P, F \text{ ou } C,\ b = P, F \text{ ou } C\}$

On note s_2 = PP pour P dans l'état ①
P ——— ②

s_2 = PF pour P ——— ①
F ——— ②

...

$J_1 \backslash J_2$	PP	PF	PC	FP	FF	FC	CP	CF	CC
P	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,1)	(0,1)	(1,0)	(1,0)	(1,0)
F	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,1)	(0,1)
C	(0,1)	(1,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,0)

$s_1 = P$, $s_2 = PF$: J_1 joue P on arrive dans l'état (1), auquel cas J_2 joue P aussi :

$$\begin{cases} g_1(s_1, s_2) = 0 \\ g_2(s_1, s_2) = 0 \end{cases}$$

<u>Rappel</u> : $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$ équilibre (de Nash) ssi :

$$\begin{cases} (\forall s_1 \in S_1) : g_1(s_1, \bar{s}_2) \leq g_1(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \\ (\forall s_2 \in S_2) : g_2(\bar{s}_1, s_2) \leq g_2(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \end{cases}$$

Dans la mesure où chacune des trois lignes contient toujours une paire de gains de la forme $(\dots, 1)$, un équilibre $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ doit être tq $g_2(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \underline{(\dots, 1)}$.

De plus, puisque si on a un équilibre il correspond nécessairement à une paire de gains $(0,1)$ (cf. pas de $(1,1)$ dans le tableau !), nécessairement on doit avoir une colonne de zéros pour les gains de J_1.

On a donc 3 équilibre (P, FP), (C, FP), (P, FC).

strictement

Déf. : soient $\bar{s}_1$ et $\tilde{s}_1$ deux stratégies $\in S_1$; on dit que $\bar{s}_1$ domine $\tilde{s}_1$ (" $\bar{s}_1 \geq \tilde{s}_1$ ")
si : $(\forall s_2 \in S_2) : g_1(\bar{s}_1, s_2) \geq g_1(\tilde{s}_1, s_2)$

$>$

Si $\bar{s}_1$ domine toutes les autres stratégies de S_1, ont dit qu'elle est dominante. (*)
Au contraire, une stratégie est dite dominée si elle dominée par toutes les autres.

(*) une stratégie dominante est dite fortement dominante si elle domine strictement toutes les autres :

$$(\forall \tilde{s}_1 \in S_1 \setminus \{\bar{s}_1\}) : \bar{s}_1 > \tilde{s}_1$$

$$\iff (\forall \tilde{s}_1 \in S_1 \setminus \{\bar{s}_1\})(\forall s_2 \in S_2) : g_1(\bar{s}_1, s_2) > g_1(\tilde{s}_1, s_2)$$

une stratégie dominante mais pas fortement (" faiblement dominante ") :

$$(\exists \tilde{s}_1 \in S_1 \setminus \{\bar{s}_1\})(\exists s_2 \in S_2) : g_1(\bar{s}_1, s_2) = g_1(\tilde{s}_1, s_2)$$

On constate qu'il existe une colonne de zéros pour J_2, la colonne PF, donc :

- nécessairement PF est une stratégie dominée de J_2 ;
- toute stratégie dominée doit être de cette forme

$\implies$ 2 stratégies dominées pour J_2 ;

Pas de stratégie dominée pour J_1. On voit de même que :

- pas de stratégie dominante pour J_2,
- ——————————————————— J_1 !

En particulier, les stratégies FP et FC de J_2 qui interviennent dans les équilibres ne sont pas dominantes, pas plus que I pour J_1.