Analyse de la décision

TD 1 – Choix, préférence, utilité

Exo 1. Rappel : $c : A \neq \emptyset \longmapsto c(A) \subset A$ cohérente si

$(\forall A, B \neq \emptyset)(\forall (x,y) \in (A \cap B)^2) : \begin{cases} x \in c(A) \\ y \notin c(A) \end{cases} \Rightarrow y \notin c(B)$

(cf. x est mieux et $\in B$!)

Ici : 3 critères par vin
= pays, couleur, prix

fonction de choix
$c : A \neq \emptyset \longmapsto c(A) \subset A$, $c(A) \neq \emptyset$

Fonction de choix (cf. CM 1) :

i) prix ≤ 40 €
ii) puis pays tq cond max (+ Bel. > France > Ita. > Esp.)
iii) puis couleur tq cond max (+ blanc > rouge > rosé)
iv) puis prix le plus élevé

$$\begin{cases} x_1 = \text{rouge californien} \approx 20 \text{ €} \\ x_2 = \text{blanc français} \approx 20 \text{ €} \\ x_3 = \text{rouge californien} \approx 25 \text{ €} \\ x_4 = \text{rouge français} \approx 30 \text{ €} \end{cases}$$

A : x_1, x_2, x_3 ; B : x_2, x_3, x_4

$A = \{x_1, x_2, x_3\}$
$B = \{x_2, x_3, x_4\}$

$c(A) = \{\text{californien rouge} \approx 25 \text{ €}\} = \{x_3\}$
$c(B) = \{\text{français blanc} \approx 20 \text{ €}\} = \{x_2\}$

Mq cette fonction de choix ne vérifie pas

$$(\forall A, B \neq \emptyset)(\forall (x,y) \in (A \cap B)^2) : \begin{cases} x \in C(A) \\ y \notin C(A) \end{cases} \Rightarrow y \notin C(B)$$

et

ie vérifie la négation logique de cette propriété :

négation

(rappel : $\neg \left((\forall x \in X) : P(x) \right)$

$\Leftrightarrow \quad (\exists x \in X) : \neg P(x)$

de même : $\neg \left((\exists x \in X) : P(x) \right)$

$\Leftrightarrow \quad (\forall x \in X) : \neg P(x)$)

$\wedge \quad \cap$

$\vee \quad \cup$

Soit donc ici :

$(\exists A, B \neq \emptyset)(\exists x \text{ et } y \in A \cap B)$:

et (ou : $\vee$)

$\neg \left(x \in C(A) \wedge y \notin C(A) \Rightarrow y \notin C(B) \right)$

(rappel : $(A \Rightarrow B)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

donc $\neg (A \Rightarrow B)$

$\Leftrightarrow \neg (\neg A \vee B)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg A) \wedge \neg B$

$\Leftrightarrow A \wedge \neg B$)

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \cup B$
V	V	V	V
F	V	V	V
V	F	F	F
F	F	V	V

Ici :

$\neg \left(x \in C(A) \wedge y \notin C(A) \Rightarrow y \notin C(B) \right)$

$\Leftrightarrow \quad (x \in C(A) \wedge y \notin C(A)) \wedge y \in C(B)$

$(\exists A, B \neq \emptyset)(\exists x \text{ et } y \in A \cap B)$:
$(x \in c(A) \wedge y \notin c(A)) \wedge y \in c(B)$

On a :

$$\left.\begin{array}{l} A = \{x_1, x_2, x_3\} \\ B = \{x_2, x_3, x_4\} \end{array}\right) \quad A \cap B = \{x_2, x_3\}$$

$c(A) = \{$ californien rouge ≈ 25 €$\} = \{x_3\}$
$c(B) = \{$ français blanc ≈ 20 €$\} = \{x_2\}$

et il suffit de prendre $x = x_3$, $y = x_2$

$x_3 \in c(A)$ et $x_2 \in c(B)$
$x_2 \notin c(A)$

<u>Remarque</u> : en particulier, il n'existe pas (cf. CM1) de relation de préférence $\precsim$ rationnelle qui représenterait cette fonction de choix au sens :

$$c(A) = \{x \in A \mid (\forall y \in A) : x \succsim y\}$$

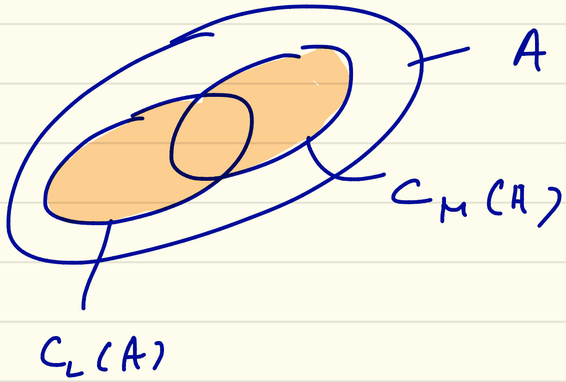
$A \neq \emptyset$

<u>Exo2.</u> 2.1. On définit

$$c^*: A \neq \emptyset \longmapsto c^*(A) := c_L(A) \cup c_M(A)$$

C'est bien une fonction de choix puisque si $A \neq \emptyset$

$$\left\{\begin{array}{l} c_L(A) \subset A \\ c_M(A) \subset A \end{array}\right. \Longrightarrow \underbrace{c_L(A) \cup c_M(A)}_{c^*(A)} \subset A$$



i) <u>c^* est finiment $\neq \emptyset$</u> : soit $A \neq \emptyset$,

$c_L(A) \neq \emptyset$ (cf. c_L finiment cohérente)

$$\Rightarrow c^*(A) = \underbrace{c_L(A)}_{\neq \emptyset} \cup c_M(A) \supset c_L(A) \neq \emptyset$$

ii) <u>c^* n'est pas cohérente</u> :

$X = \{x, y, z\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_L(\{x,y,z\}) = \{x\} \\ c_L(\{y,z\}) = \{y\} \end{array} \right) \quad (*)$$

$x \succsim_L y$ et $\neg(y \succsim_L x)$

$x \succsim_L z$ $\neg(z \succsim_L x)$

$y \succsim_L z$

ce que l'on note : $x \succ_L y$, $x \succ_L z$

($\succ_L$: $\succsim_L$ "strict")

$$\left\{ \begin{array}{l} c_M(\{x,y,z\}) = \{z\} \\ c_M(\{x,y\}) = \{x\} \end{array} \right) \quad (**)$$

ie : $x \succ y \iff x \succsim y$ et $\neg(y \succsim x)$

<u>Remarque</u> : les deux égalités $(*)$ définissent complètement c_L ; en effet :

$c_L(\{x,y\}) = \{x\}$ car $c_L(\{x,y\}) = \{y\}$ contredirait la cohérence ; on peut, puisque c_L est supposée finiment $\neq \emptyset$ et cohérente la représenter par une relation de préférence : $\exists \precsim_L$ rationnelle tq

$$(\forall A \neq \emptyset) : c_L(A) = \{x \in A \mid (\forall y \in A) : x \succsim_L y\}$$

(rappel : $\precsim$ rationnelle $\Leftrightarrow$ i) réflexive
ii) complète
iii) transitive)

De fait la cohérence implique qu'on a :

$$x \succ_L y \succ_L z .$$

(De même, $c_L(\{x, z\}) = \{x\} \ldots$)

Pareillement, la cohérence de c_M implique (**) spécifie complètement c_M.

Considérons $A = \{x, y, z\}$, $B = \{y, z\}$: pour mq c^* est incohérente, on doit trouver a et $b \in A \cap B$ tq $\left\{\begin{array}{l} a \in c^*(A) \\ b \notin c^*(A) \end{array}\right]$ et $b \in c^*(B)$;

prenons $a = z$ et $b = y$;

$y, z \in A \cap B = \{y, z\}$,

$$c^*(A) = c^*(\{x, y, z\}) = c_L(\{x, y, z\}) \cup c_M(\{x, y, z\})$$
$$= \{x\} \cup \{z\}$$
$$= \{x, z\} \not\ni y$$

$$c^*(B) = c^*(\{y, z\}) = c_L(\{y, z\}) \cup c_M(\{y, z\})$$
$$= \{y\} \cup \{z\}$$
$$= \{y, z\} \ni y \; : b \in c^*(B),$$

contradiction à la cohérence.

2.2. On définit $\precsim^*$ comme suit :

préf. rationnelles

$$x \precsim^* y \overset{\text{déf.}}{\iff} x \precsim_L y \text{ ou } x \precsim_M y$$

Mq $\precsim^*$ est :

i) <u>réflexive</u> : soit $x \in X$, $x \precsim_L x$ (cf. $\precsim_L$ réflexive)

$\Rightarrow \underbrace{x \precsim_L x \text{ ou } x \precsim_M x}_{x \precsim^* x}$

ii) <u>complète</u> : soient x et $y \in X$; $\precsim_L$ est rat. elle est complète, donc soit $x \precsim_L y$, soit $y \precsim_L x$;

- si $x \precsim_L y$, alors $x \precsim_L y$ ou $x \precsim_M y$ ie $x \precsim^* y$

- si $y \precsim_L x$, alors $y \precsim_L x$ ou $y \precsim_M x$ ie $y \precsim^* x$

iii) <u>contrexemple à la transitivité (et donc au caractère rationnel de $\precsim^*$)</u> :

Reprenons $X = \{x, y, z\}$ et considérons les deux relations suivantes :

$\precsim_L$: $x \succ_L y \succ_L z$ (définit complètement $\precsim_L$)

$\precsim_M$: $y \succ_M z \succ_M x$ (— " — $\precsim_M$)

Alors : $z \succsim^* x$, $x \succsim^* y$ MAIS $\neg(z \succsim^* y)$ cf. $\neg(z \succsim_L y \vee z \succsim_M y)$ ie $\neg(z \succsim_L y) \wedge \neg(z \succsim_M y)$. $\square$

TD 1 - Choix, préférences, utilité (fin)

Exo 2 (fin).

2.3. Mq on a la relation suivante entre c^* et $\precsim^*$:

$$(\forall (x,y)\in X^2) : \quad x \precsim^* y \iff y \in c^*(\{x,y\}).$$

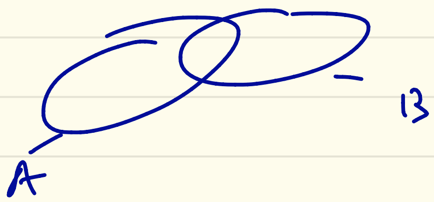
En effet, soient $x, y \in X$,

$x \precsim^* y \iff x \precsim_L y$ ou $x \precsim_M y$ (déf. de $\precsim^*$)

$\iff y \in c_L(\{x,y\})$ ou $y \in c_M(\{x,y\})$

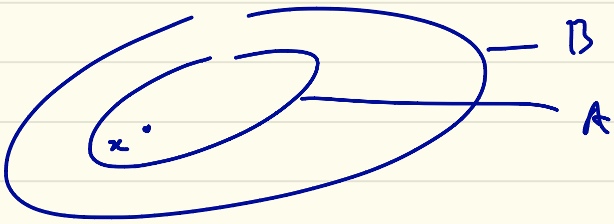
$\iff y \in c_L(\{x,y\}) \cup c_M(\{x,y\})$

(NB. $x \in A \cup B \iff x \in A$ ou $x \in B$)



$\iff y \in c^*(\{x,y\})$.

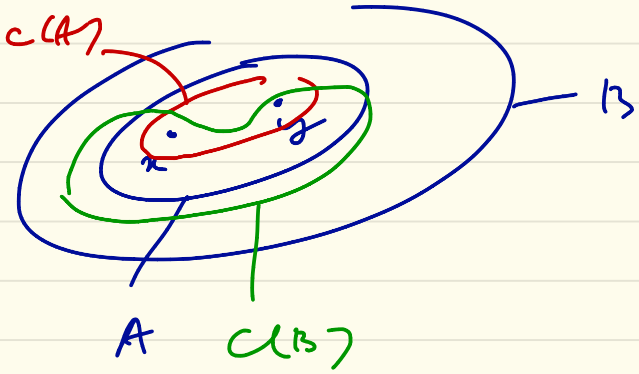
Exo 3. (a)

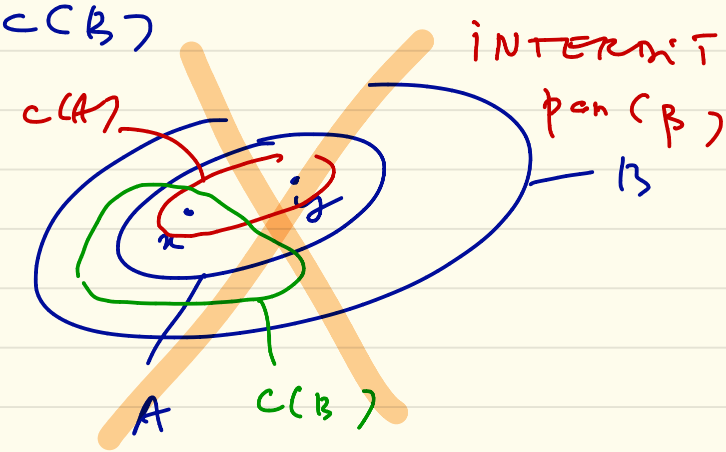


$A \,(\neq \emptyset) \subset B$, $x \in A$; $x \in c(B) \Rightarrow x \in c(A)$

(β) $A (\neq \emptyset) \subset B$, x et $y \in c(A)$, alors

$$x \in c(B) \Longrightarrow y \in c(B)$$





3.1. Soit $c : A \neq \emptyset \longmapsto c(A) \subset A$ finiment $\neq \emptyset$ ($c(A) \neq \emptyset$) et cohérente ; mq c vérifie (α) et (β).

<u>Rappel</u> : c cohérente $\overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall A, B \subset X$,

$$\forall x, y \in A \cap B, \ \begin{cases} x \in c(A) \\ y \notin c(A) \end{cases} \Longrightarrow y \notin c(B)$$

• (α) : soient $A (\neq \emptyset) \subset B$, soit $x \in A$ tq $x \in c(B)$; mq $x \in c(A)$; par l'absurde, supposons que $\boxed{x \notin c(A)}$; c finiment $\neq \emptyset$, $c(A) \neq \emptyset$ donc $\exists y \in c(A)$; mais alors, x et $y \in A \cap B = A$

$$\text{et } \begin{cases} y \in c(A) \\ x \notin c(A) \end{cases} \underset{c \text{ cohérente}}{\Longrightarrow} x \notin c(B) : \text{contredit } x \in c(B).$$

<u>Rappel</u> : raisonnement par l'absurde :

$A \Longrightarrow B$ (ie "$x \in c(B) \Longrightarrow x \in c(A)$" ...)

$(\Longleftrightarrow)$ $\neg A \vee B$ ($\vee$ = ou)

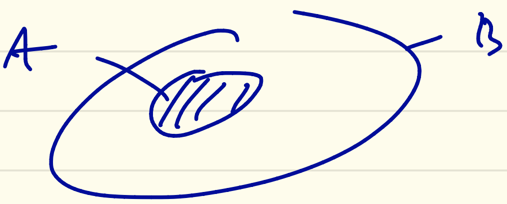
$(\Longleftrightarrow)$ $\neg\neg(\neg A \vee B)$

$(\Longleftrightarrow)$ $\neg(\underbrace{A \wedge \neg B})$

ie : hypothèse A vraie et conclusion B fausse

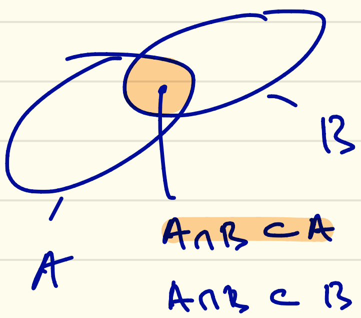
• (β) : soient $A\ (\neq \emptyset) \subset B$, soient x et $y \in c(A)$;
supposons $x \in c(B)$, mq $y \in c(B)$;
par l'absurde, supposons que $y \notin c(B)$.
Alors, x et $y \in c(A) \subset A \subset B$, donc x et $y \in$
$A \cap B\ (= A)$;

$$\left\{\begin{array}{l} x \in c(B) \\ y \notin c(B) \end{array}\right. \underset{c \text{ cohérente}}{\Longrightarrow} y \notin c(A) : \text{ contredit } y \in c(A).$$



$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

3.2. Réciproquement, supposons que
$c : A \neq \emptyset \mapsto c(A) \subset A$ vérifie (α) et (β) ;
mq c est cohérente. Soient donc A et B,
soient x et $y \in A \cap B$; supposons que
$x \in c(A)$, $y \notin c(A)$ et mq $y \notin c(B)$.
Par l'absurde, supposons $y \in c(B)$. Alors,



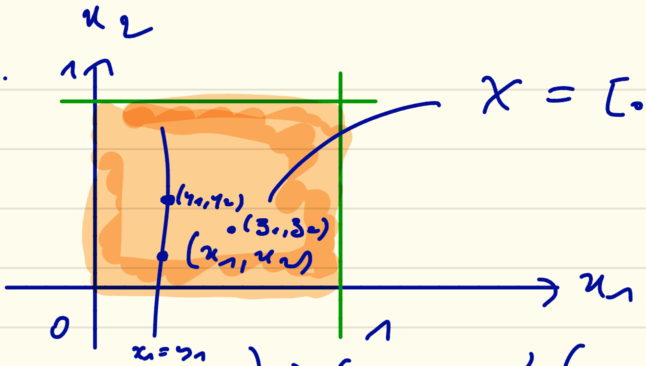
$$\left\{\begin{array}{l} A \cap B \subset B \overset{(\alpha)}{\Longrightarrow} y \in c(A \cap B) \\ A \cap B \subset A \overset{\alpha}{\Longrightarrow} x \in c(A \cap B) \end{array}\right.$$

Donc x et $y \in c(A \cap B)$, $x \in c(A)$
$(\beta) \Rightarrow y \in c(A)$: contredit $y \notin c(A)$.

<u>Remarque</u> : i) on n'a utilisé dans le 3.1 le caractère finiment $\neq \emptyset$ que pour prouver (α) ;
ii) pour une fonction de choix c on a donc l'équivalence :

c finiment $\neq \emptyset$ et cohérente $\Longleftrightarrow$ c vérifie (α) et (β) et finiment $\neq \emptyset$.

Exo 4.



$X = [0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1 \\ x_2 \leq y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1, x_2) \precsim (y_1, y_2)$

$3_1 > y_1 \Rightarrow (3_1, 3_2) \succ (y_1, y_2)$

4.1. Mq $\precsim$ est rationnelle, ie que $\precsim$ est réflexive, complète et transitive.

<u>Remarque</u> : une relation de préférence complète est nécessairement réflexive ; soit $x \in X$, et soit $\precsim$ complète ; par complétude, soit $x \precsim x$, soit $x \precsim x$: donc $x \precsim x$.

i) <u>complétude</u> : soient (x_1, x_2) et $(y_1, y_2) \in X$, $\in [0,1] \times [0,1]$
mq $(x_1, x_2) \precsim (y_1, y_2)$
ou $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$;

— soit $x_1 < y_1$, auquel cas $(y_1, y_2) \succ (x_1, x_2)$
— soit $y_1 < x_1$, — $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$
— soit $x_1 = y_1$: alors,
  • soit $x_2 \leq y_2$ et $(x_1, x_2) \precsim (y_1, y_2)$
  • soit $x_2 > y_2$ et $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$

On a examiné tous les cas possibles et conclu à une comparaison dans tous les cas : $\precsim$ est complète.

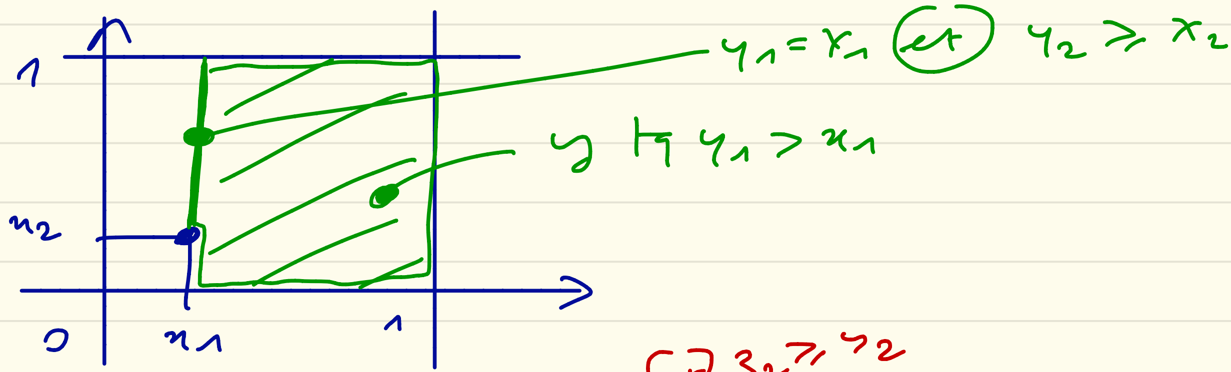
Remarque : examiner le cas de la relation $\tilde{\precsim}$ définie par :

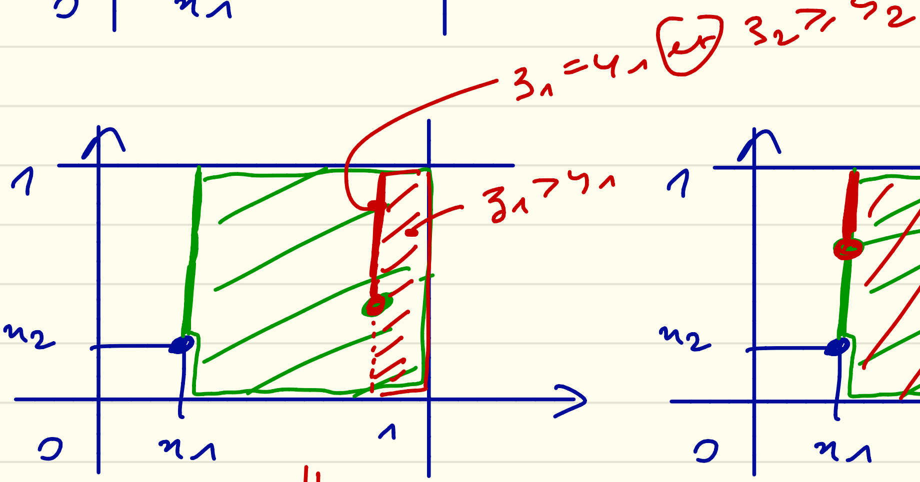
$$(x_1, x_2) \tilde{\precsim} (y_1, y_2) \overset{\text{def}}{\iff} x_1 \leq y_1 \text{ et } x_2 \leq y_2$$

ii) transitivité : supposons qu'on a $x, y, z \in X$ tq :

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2) \precsim (y_1, y_2) = y \\ y = (y_1, y_2) \precsim (z_1, z_2) = z \end{cases}$$

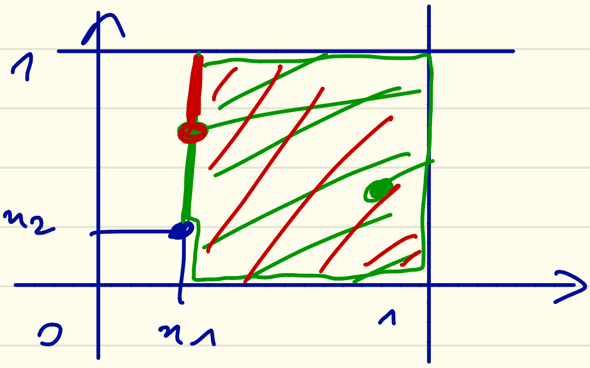
Mq $x \precsim z$.





$\Downarrow$

$z \succsim x$



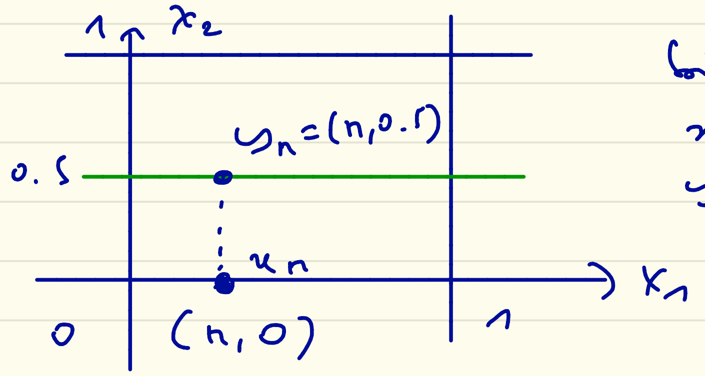
$\Downarrow$

$z \succsim x$

$\Rightarrow z \succsim x$: d'où la transitivité.

4.2. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une fonction d'utilité $u : X = [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tq :

$$\left(\forall (x,y) \in X^2\right) : x \precsim y \iff u(x) \leq u(y).$$



Soit $r \in [0,1]$, on considère
$x_n = (r, 0)$
$y_n = (r, 0.5)$

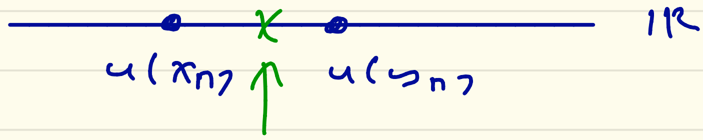
$x_n \precsim y_n$

et même $x_n \prec y_n$

(rappel : $x \prec y \iff x \precsim y$ et $\neg(y \precsim x)$) ;

donc $u(x_n) < u(y_n)$;

donc l'intervalle ouvert $]u(x_n), u(y_n)[\neq \emptyset$:



$\Rightarrow \exists q_n \in \mathbb{Q} \in \,]u(x_n), u(y_n)[$

(q_n rationnel $\iff \exists a$ et $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $q_n = \frac{a}{b}$)

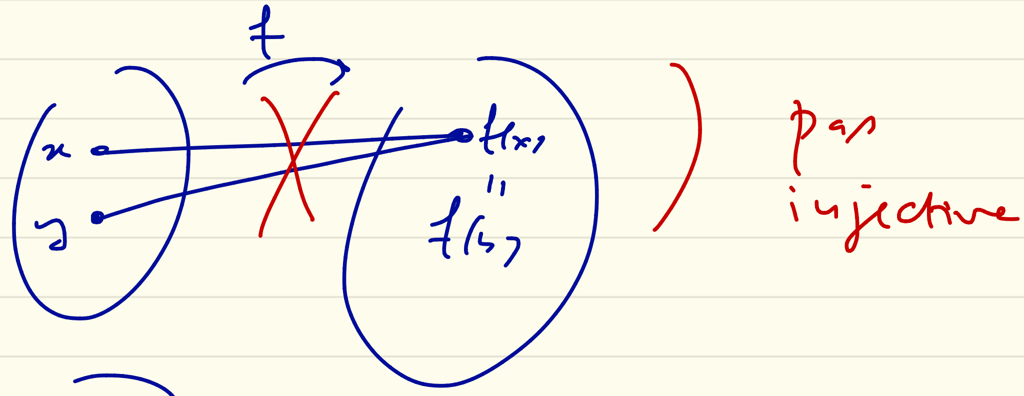
<u>Remarque</u> : ça vient du fait que, par construction de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, ie : tout $x \in \mathbb{R}$ est limite d'une suite de rationnels.

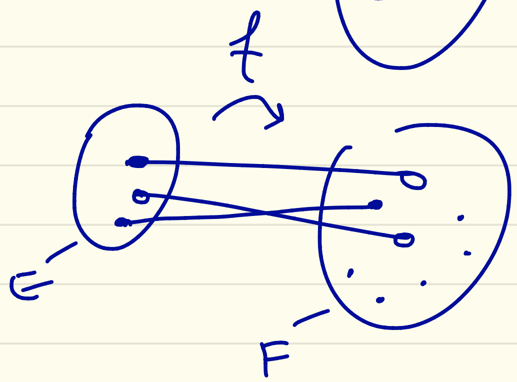
On construit ainsi une fonction

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$r \longmapsto \varphi(r) := q_n$$

Si on mq φ est injective, on aura "injecté" $[0,1]$ dans $\mathbb{Q}$... ce qui est impossible, d'où la contradiction.

<u>Rappel</u> :





"one-to-one"

f injective, $f : E \longrightarrow F$

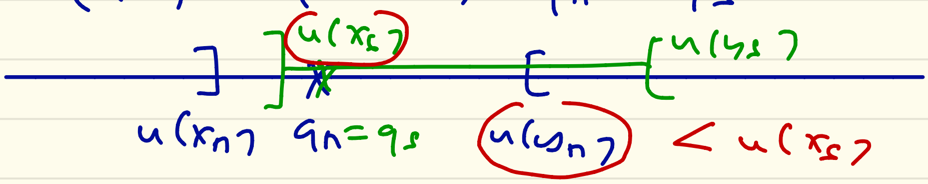
$\iff (\forall (x,y) \in E^2) : f(x) = f(y) \implies x = y$.

En particulier, s'il existe une injection de E dans F, on dit que $\operatorname{card} F \geq \operatorname{card} E$.

Or, ici, on sait que $\underset{(\operatorname{card} \mathbb{N})}{\operatorname{card} \mathbb{Q}} < \underset{(\operatorname{card} \mathbb{R})}{\operatorname{card} [0,1]}$

de sorte qu'on a une contradiction si φ est injective. Montrons donc que φ est injective ; soient donc r et $s \in [0,1]$ tq $\varphi(r) = \varphi(s)$, et supposons (par l'absurde) que $r \neq s$, par exemple $r < s$;

$\varphi(r) = \varphi(s) \implies q_r = q_s$



$\implies]u(x_r), u(y_r)[\cap]u(x_s), u(y_s)[\neq \emptyset$

On, $r < s \Rightarrow \underbrace{(r, 0.5)}_{y_r} \prec \underbrace{(s, 0)}_{x_s}$

$$\Rightarrow u(y_r) < u(x_s)$$

$$\Rightarrow \underbrace{u(x_r) \quad u(y_r) \quad u(x_s) \quad u(y_s)}_{]u(x_r), u(y_r)[\ \cap\ ]u(x_s), u(y_s)[\ = \emptyset\ !}$$

Donc r et s doivent être égaux et φ est injective. Ce qui est impossible au vu des cardinaux de $[0,1]$ et $\mathbb{Q}$. On conclut qu'on ne peut donc pas représenter $\preceq$ par une utilité.