

Cours 4 — Dilemme et jeux

Motivation: deux traduses sont arrêtées pour malversation par l'autorité des marchés financiers.

Elles sont interrogées séparément, et le "deal" qui leur est proposé consiste à dénoncer ou non l'autre traduse. Les amendes encourues par chacune d'elles sont résumées dans le tableau ci-dessous (une amende est un "gain négatif", d'où les signes "-") :

$\begin{array}{c} \text{Traduse 2} \\ \text{Traduse 1} \end{array}$	Dénonce (D)	Ne dénonce pas (ND)
Dénonce (D)	$(-500 \text{ €}, -500 \text{ €})$	$(0 \text{ €}, -1000 \text{ €})$
Ne dénonce pas (ND)	$(-1000 \text{ €}, 0 \text{ €})$	$(-100 \text{ €}, -100 \text{ €})$

→ Il s'agit d'un "jeu"

- à 2 joueurs
- non-coopératif

Le tableau ci-dessus qui indique l'ensemble des stratégies de chaque joueur et les gains associés réalise la mise sous forme normale du jeu. On note :

I_1 : l'ensemble des stratégies pour T_1

$$f_2 : \text{---} e \text{---} T_2$$

$\mathcal{I}c, \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \{ \mathcal{D}, \neg \mathcal{D} \}$ (déloué ou non)

Chaque joueur a sa fonction de gain :

$$S_1 : L_1 \times L_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f_2: L_1 \times L_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{I}^c, \quad g_1(0, 0) = -500 = g_2(0, 0)$$

$$g_1(\tau, \tau_0) = 0, \quad g_2(\tau, \tau_0) = -1000, \text{ etc.}$$

Donc analyse rapide par chaque triaduse montre à chacun d'elle qu'elle a toujours intérêt (indépendamment du choix de l'autre, chose qu'elle ne connaît pas) à dénoncer. On a ce qu'on appelle un équilibre.

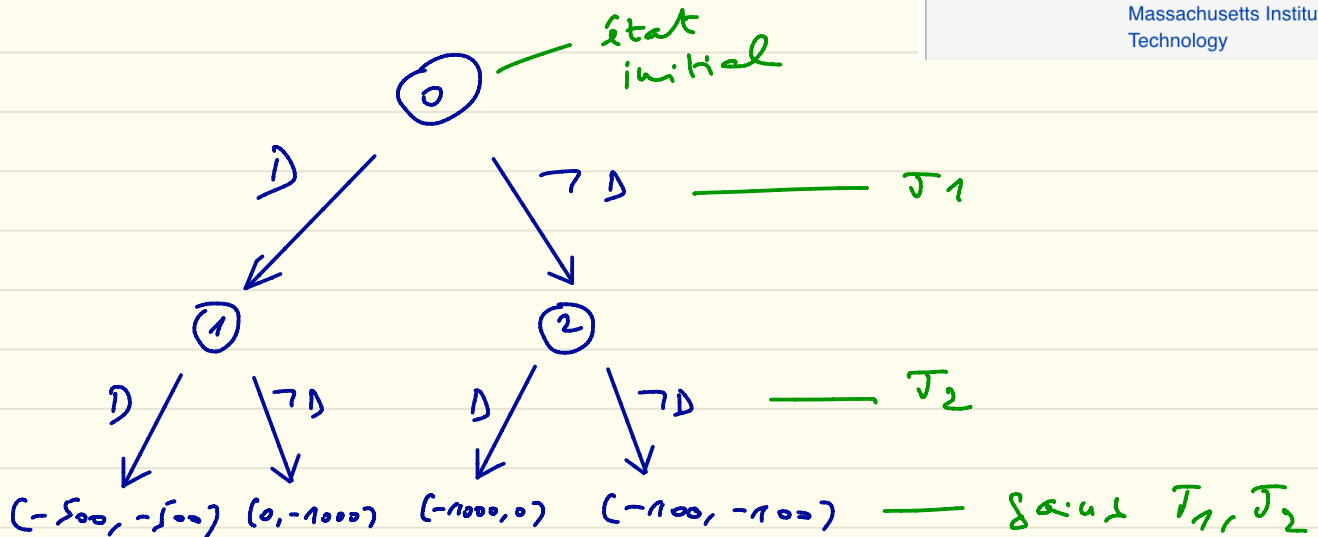
Def.: un couple de stratégies $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ réalise un équilibre de Nash si :

$$\bigcup \left(\begin{array}{l} (\forall x_1 \in L_1): g_1(x_1, \bar{x}_2) \leq g_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ (\forall x_2 \in L_2): g_2(\bar{x}_1, x_2) \leq g_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{array} \right)$$

Examinons maintenant le cas où la traductrice no. 2 est informée par un inspecteur complice du choix de la traductrice no. 1. Cette rupture de la symétrie entre joueuses et de la simultanéité de leurs choix donne lieu à un "jeu séquentiel" :

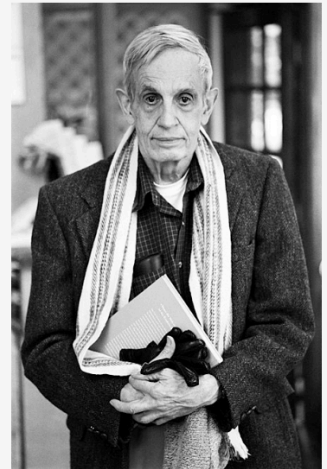
- la traductrice 1 fait son choix
- puis la traductrice 2, connaissant ce choix, fait son propre choix.

On a l'arbre de décision / de possibilités suivant :



Cette modélisation s'appelle la mise sous forme extensive du jeu séquentiel. Tout tel jeu peut toujours être mis sous forme normale. Il suffit pour cela de déterminer l'ensemble des stratégies de chaque joueuse (et les gains).

John Forbes Nash, Jr.



John Nash en 2000.

Nom de naissance	John Forbes Nash Jr.
Naissance	13 juin 1928 Bluefield, Virginie-Occidentale (États-Unis)
Décès	23 mai 2015 (à 86 ans) près de Monroe Township (comté de Middlesex) New Jersey (États-Unis)
Nationalité	Américain
Institutions	Université de Princeton RAND Corporation Massachusetts Institute of Technology

Une stratégie consiste, pour une joueur donnée, à décider à l'avance de quel coup jouer dans chaque état possible où elle est amenée à jouer.

Ici, pour la traduse no. 1 : choix entre D et $\neg D$ à l'état ① $\Rightarrow S_1 = \{D, \neg D\}$.

Pour la traduse no. 2 : choix entre D et $\neg D$ à l'état ①, et choix entre D et $\neg D$ à l'état ② $\Rightarrow S_2 = \underbrace{\{D, \neg D\}}_{\text{choix dans ①}} \times \underbrace{\{D, \neg D\}}_{\text{choix dans ②}}$

$= \{D_1 D_2, D_1 \neg D_2, \neg D_1 D_2, \neg D_1 \neg D_2\}$: elle a non plus 2 mais désormais 4 stratégies possibles. La forme normale de ce nouveau jeu est :

$S_1 \backslash S_2$	$D_1 D_2$	$D_1 \neg D_2$	$\neg D_1 D_2$	$\neg D_1 \neg D_2$
D	$(-500, -500)$	$(-500, -500)$	$(0, -1000)$	$(0, -1000)$
$\neg D$	$(-1000, 0)$	$(-1000, -100)$	$(-1000, 0)$	$(-100, -100)$

L'examen du tableau montre qu'on a encore un et un seul couple de stratégies en équilibre, $(\bar{S}_1, \bar{S}_2) = (D, D_1 D_2)$, associé aux mêmes gains $(-500, -500)$ que précédemment.

On a par contre fait apparaître de nouvelles stratégies pour \mathcal{J}_2 , dont certaines sont clairement pires que toutes les autres: jouer $\mathcal{I}_2 = \neg D_1 \neg D_2$ (i.e. ne jamais dénoncer)

semble une mauvaise idée puisque les gains associés, quoi que joue \mathcal{J}_1 , sont toujours inférieurs ou égaux aux gains des autres stratégies possibles pour \mathcal{J}_2 . On parle de "stratégie dominée".

Déf.: Soient \bar{s}_1 et $\hat{s}_1 \in \mathcal{I}_1$ deux stratégies de \mathcal{J}_1 ; on dit que \bar{s}_1 est dominée par \hat{s}_1 si:

$$(\forall s_2 \in \mathcal{I}_2) : g_1(\bar{s}_1, s_2) \leq g_1(\hat{s}_1, s_2).$$

Si \bar{s}_1 est dominée par toutes les autres stratégies, on dit qu'elle est dominée, et on peut préciser en disant qu'elle est

- fortement dominée si

$$(\forall \hat{s}_1 \in \mathcal{I}_1, \hat{s}_1 \neq \bar{s}_1) (\forall s_2 \in \mathcal{I}_2) : g_1(\bar{s}_1, s_2) < g_1(\hat{s}_1, s_2)$$

- faiblement dominée sinon (i.e. : il existe au moins un cas d'égalité).

L'existence d'un équilibre n'est pas garantie, même pour un jeu fini (= pour tous les ensembles de stratégies \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 sont finis); voir par exemple le cas de Pierre-Ferme-Ciseaux (TP3). On peut néanmoins préciser les choses en "jeu à somme nulle".

Déf.: on dit qu'un jeu est à somme nulle
si : $(\forall (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2) : g_2(s_1, s_2) = -g_1(s_1, s_2)$

(la somme des gains de T_1 et T_2 est toujours nulle, ie l'un perd ce que l'autre gagne).

Considérons un tel jeu et notons

$$g : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(s_1, s_2) = g_1(s_1, s_2) \\ = -g_2(s_1, s_2) \\ (= \text{gain de } T_1 = \text{perte de } T_2).$$

Par définition, $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$ est un équilibre si :

$$g(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \max_{s_1 \in S_1} g(s_1, \bar{s}_2) \\ = \min_{s_2 \in S_2} g(\bar{s}_1, s_2)$$

ce qui nous conduit à définir :

$$\begin{cases} \alpha := \sup_{s_1 \in S_1} \inf_{s_2 \in S_2} g(s_1, s_2) \\ \beta := \inf_{s_2 \in S_2} \sup_{s_1 \in S_1} g(s_1, s_2) \end{cases}$$

Remarque: on a $\alpha \leq \beta$, ces deux valeurs peuvent valoir $\pm \infty$.

[Rappels : . Soit $A \subset \mathbb{R}$, $\inf A$ est - s'il existe - le plus grand des mineurs de A ;
 . toute partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et minorée possède un \inf (= "bonne inférieure") ;
 . si $A = \emptyset$, par convention $\inf A := +\infty$;
 . si $A \neq \emptyset$ ne possède pas d' \inf (pense qu'elle n'est pas minorée), $\inf A := -\infty$ (ex. : $A =]-\infty, 0] \Rightarrow \inf A = -\infty$).]

En effet, soit $(s_1, s_2) \in I_1 \times I_2$,

$$\inf_{I_2} g(s_1, \cdot) \leq g(s_1, s_2) \leq \sup_{I_1} g(\cdot, s_2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup_{I_1} \inf_{I_2} g}_{\alpha} \leq g(s_1, s_2) \leq \underbrace{\inf_{I_2} \sup_{I_1} g}_{\beta}$$

Ces quantités α et β s'interprètent clairement :

"Tu sais que ce que tu peux espérer de mieux est d'éviter le pire."
 I. Calvino

- T_1 cherche une stratégie \bar{s}_1 qui maximise son pire gain :

$$\inf_{s_2 \in I_2} g(\bar{s}_1, s_2) = \sup_{s_1 \in I_1} \underbrace{\inf_{s_2 \in I_2} g(s_1, s_2)}_{\alpha}$$

Italo Calvino	
	
Naissance	15 octobre 1923 Santiago de Las Vegas, Cuba
Décès	19 septembre 1985 (à 61 ans) Sienne, Italie
Activité principale	Romancier

- Symétriquement, J_2 cherche une stratégie \bar{s}_2 qui minimise sa pire perte :

$$\sup_{s_1 \in S_1} g(s_1, \bar{s}_2) = \inf_{s_2 \in S_2} \underbrace{\sup_{s_1 \in S_1} g(s_1, s_2)}_{\beta}.$$

Th. : $(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in S_1 \times S_2$ est un équilibre si et seulement si

$$\inf_{s_2 \in S_2} g(\bar{s}_1, s_2) = g(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \sup_{s_1 \in S_1} g(s_1, \bar{s}_2),$$

auquel cas $\alpha = \beta$ s'appelle "la valeur" du jeu. On dit également que (\bar{s}_1, \bar{s}_2) est un "point-selle" du jeu.

Corollaire : si (\bar{s}_1, \bar{s}_2) et $(\hat{s}_1, \hat{s}_2) \in S_1 \times S_2$ sont deux équilibres, alors (\bar{s}_1, \hat{s}_2) (et (\hat{s}_1, \bar{s}_2)) aussi.

Dém. : on a

$$g(\hat{s}_1, \bar{s}_2) \leq \max_{s_1} g(s_1, \bar{s}_2) = g(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \min_{s_2} g(\bar{s}_1, s_2) \leq g(\bar{s}_1, \hat{s}_2)$$

" $\alpha = \beta$

$$g(\bar{s}_1, \hat{s}_2) \leq g(\bar{s}_1, \bar{s}_2) \leq g(\hat{s}_1, \bar{s}_2), \text{ d'où l'égalité. } \square$$

