

亥姆霍兹线圈空间的磁场分布

邹志纯

(西安邮电学院 应用数理系, 陕西 西安 710061)

摘要: 计算了亥姆霍兹线圈空间的磁感应强度分布, 给出了解析表达式, 并绘出了它们的空间分布图。

关键词: 毕奥-萨伐尔定律; 亥姆霍兹线圈; 磁场分布

中图分类号: O441

文献标识码: A

文章编号: 1007-3264(2004)03-0089

1 基本模型

亥姆霍兹线圈在一些工程问题中有重要的应用[1]。教科书上讨论亥姆霍兹线圈的磁场分布问题时只考虑轴线上的磁场分布, 跟实际的应用有一定的距离。文献[2]讨论过亥姆霍兹线圈空间的磁场分布的均匀性问题, 但普适性不是太好。利用本文的方法, 可以较容易地计算亥姆霍兹线圈空间的磁场分布。

设亥姆霍兹线圈的半径为 R , 电流为 I , 如图1所示放置亥姆霍兹线圈(直角坐标系), 由于亥姆霍兹线圈具有关于 Z 轴旋转对称性和关于 XOY 平面对称性, 故只需计算 YOZ 平面内磁场的分布。

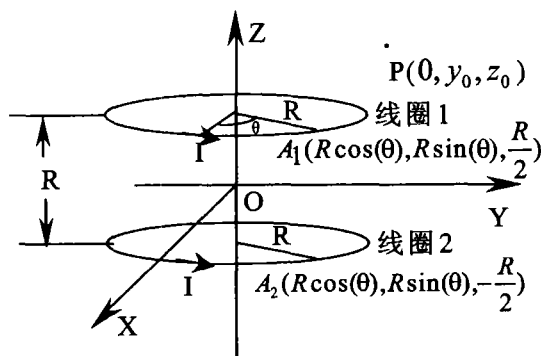


图1 亥姆霍兹线圈位置图

在 YOZ 平面内取点 $P(0, y_0, z_0)$, 在亥姆霍兹线圈上分别取关于 XOY 平面对称的 A_1, A_2 两点,

其坐标见图1, 该处的电流元 $Id\vec{l}_1, Id\vec{l}_2$ 可分别表示为:

$$Id\vec{l}_1 = IRd\theta[\cos(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{i} + \sin(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{j}] = IRd\theta[-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}] \quad (1)$$

$$Id\vec{l}_2 = IRd\theta[\cos(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{i} + \sin(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{j}] = IRd\theta[-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}] \quad (2)$$

电流元 $Id\vec{l}_1, Id\vec{l}_2$ 到点 P 的位置矢量 \vec{r}_1, \vec{r}_2 分别为:

$$\vec{r}_1 = -R\cos(\theta)\vec{i} + (y_0 - R\sin(\theta))\vec{j} + (z_0 - \frac{R}{2})\vec{k} \quad (3)$$

$$\vec{r}_2 = -R\cos(\theta)\vec{i} + (y_0 - R\sin(\theta))\vec{j} + (z_0 + \frac{R}{2})\vec{k} \quad (4)$$

根据毕奥-萨伐尔定律可以写出电流元 $Id\vec{l}_1, Id\vec{l}_2$ 在点 P 产生的磁感应强度 $d\vec{B}$

$$d\vec{B} = d\vec{B}_1 + d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}_1}{r_1^3} + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \times \vec{R}_2}{r_2^3} \quad (5)$$

其中 $d\vec{B}_1, d\vec{B}_2$ 分别 $Id\vec{l}_1, Id\vec{l}_2$ 在点 P 产生的磁感应强度分量;

收稿日期: 2004-03-10

作者简介: 邹志纯(1963-), 男, 湖南常德人, 西安邮电学院应用数理系高级实验师。

$r_1 =$

$$\sqrt{[R\cos(\theta)]^2 + [y_0 - R\sin(\theta)]^2 + (z_0 - R/2)^2}$$

 $r_2 =$

$$\sqrt{[R\cos(\theta)]^2 + [y_0 - R\sin(\theta)]^2 + (z_0 + R/2)^2}$$

利用矢量的乘法分别算得磁感应强度 $d\vec{B}$ 在 YOZ 平面上 X、Y、Z 轴方向上的三个分量:

$$B_x = \int dB_x = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \left(\frac{R\cos(\theta)(z_0 - R/2)}{r_1^3} + \frac{R\cos(\theta)(z_0 + R/2)}{r_2^3} \right) d\theta = 0 \quad (6)$$

$$B_y = \int dB_y = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \left(\frac{R\sin(\theta)(z_0 - R/2)}{r_1^3} + \frac{R\sin(\theta)(z_0 + R/2)}{r_2^3} \right) d\theta = 0 \quad (7)$$

$$B_z = \int dB_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \left(\frac{R - (R - y_0\sin(\theta))}{r_1^3} + \frac{R(R - y_0\sin(\theta))}{r_2^3} \right) d\theta = 0 \quad (8)$$

2 数值分析

B_x 的积分结果为 0, 其余两个分量 B_y, B_z (由于含有椭圆积分) 无法解析得出, 对 (7), (8) 进行以下数值分析:

令 $R = 10$, 先看径向分量 B_y 随坐标 y, z (此处的 y, z 即图 1 中的 y_0, z_0 , 下同) 的变化, 见图 2 和图 3:

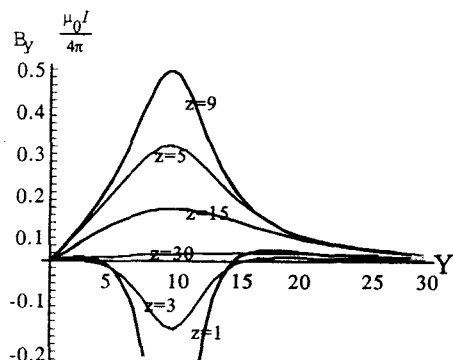


图 2 固定的 z 值, B_y 与 Y 坐标的关系

从图中看出, 对固定的 z 值, 当 $z < 5$ 时, $B_y(y)$ 由随 y 的增加呈“V”型变化, 在线圈处最大; 当 $z > 5$ 时, $B_y(y)$ 由随 y 的增加呈“倒 V”型变化。对固定的 y 值, $B_y(z)$ 随 z 的增加先后经历反向增加、反向减小、正向增加、正向减小的过程。

其次, 看轴向分量 B_z 随坐标 y, z 的变化, 见图 4 和图 5:

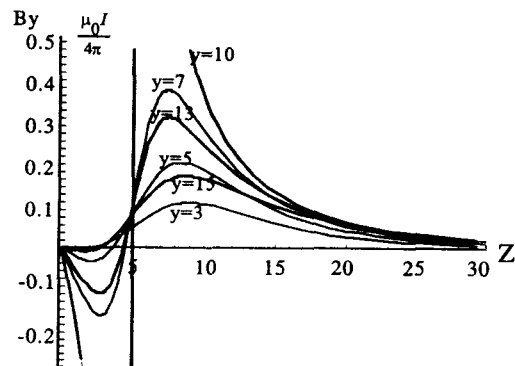


图 3 固定的 y 值, B_y 与 Z 坐标的关系

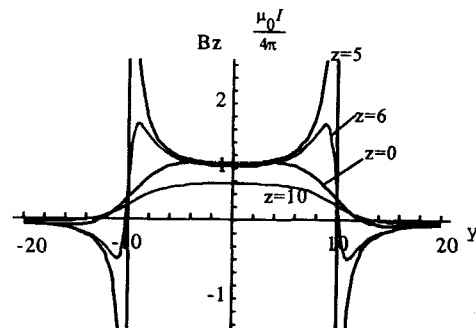


图 4 固定的 z 值, B_z 与 Y 坐标的关系

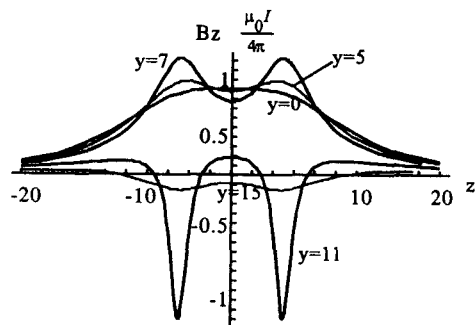


图 5 固定的 y 值, B_z 与 Z 坐标的关系

对固定的 z 值, 当其在轴线圈平面附近时, $B_z(y)$ 随着 $y(y > 0)$ 的变化先后经历正向增大、正向减小、反向增加、反向减小的过程; 当 z 在两线圈中部附近或远离线圈平面时, $B_z(y)$ 随着 $y(y > 0)$ 的变化先后经历正向减小、反向增加和反向减小的过程。对固定的 y 值, 当其在轴线附近时, $B_z(z)$ 随着 $z(z > 0)$ 的增加单调减小; 当 y 值从内部靠近线圈时, $B_z(z)$ 随着 $z(z > 0)$ 的增加先后经历正向增加、正向减小的过程; 当 y 值从外部靠近线圈时, $B_z(z)$ 随着 $z(z > 0)$ 的增加先后经历正向减小、反向增大、反向减小、正向增大及正向减小的过程;

利用 $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ 计算磁感应强度的大小并用 Mathematica 画出 B 随 y, z 的变化, 见图 6 和图 7, 此处不再详细讨论。

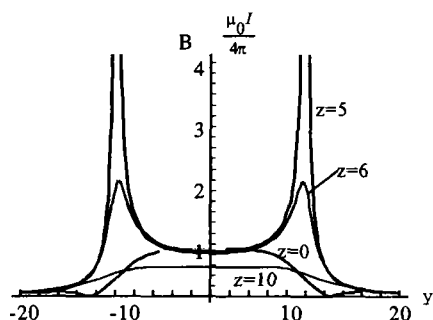


图 6 固定的 z 值, 磁感应强度 B 与 Y 坐标的关系

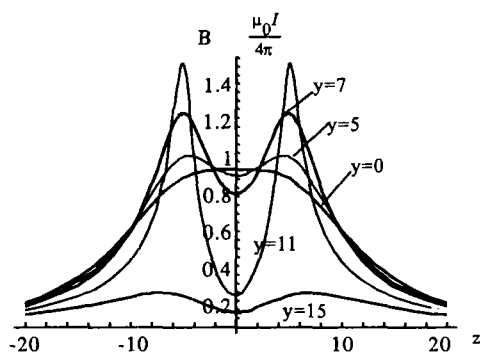


图 7 固定的 z 值, 磁感应强度 B 与 Y 坐标的关系

3 结论

本文给出了亥姆霍兹线圈磁感应强度的空间分布的解析表达式, 并借助 Mathematica 数学软件画出了半径 $R=10$ 的亥姆霍兹线圈的磁场分布图, 定量地说明了磁感应强度以及其分布, 不但有助于学生理解基础知识, 而且对于工程设计有一定的指导意义。

参 考 文 献

- [1] 张明. 利用亥姆霍兹线圈测定永磁体的 P-c 值[J]. 磁性材料及器件, 1997, 28(4): 49-50.
- [2] 王森, 罗成. 亥姆霍兹线圈磁场的均匀性分析[J]. 大学物理, 1998, 17(3): 17-19.

The distribution of the magnetic field intensity of the helmholtz coils

ZOU Zhi-chun

(Department of the Applied Mathematics and Physics of Xi'an University of Post and Telecommunications, Xi'an 710061, China)

Abstract: We calculate the distribution of the magnetic field intensity of the Helmholtz coils, its analytic expression and the distribution diagrams are also shown.

Key words: distribution of the magnetic field; helmholtz coils; biot-savart law