Análisis de varianza

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

ANOVA está diseñada específicamente para probar si dos o más poblaciones tienen la misma media.

En un estudio ANOVA se tiene:

Unidades experimentales: son los objetos que reciben el tratamiento.

Factor: fuerza o variable cuyo impacto en las unidades experimentales se desea medir.

Tratamientos: niveles del factor.

Suponga que se desea medir los efectos relativos en la producción de los empleados de tres programas de capacitación. Estos tres tipos de formación adicional pueden ser: 1) autodidactas, 2) impartido por computador, o 3) enseñado por un supervisor.

Unidades experimentales: **los empleados**

Factor: **capacitación**

Tratamientos: **niveles del factor capacitación**

La forma como se seleccionan los tratamientos determina si se está utilizando un modelo de efectos fijos o un modelo de efectos aleatorios.

Modelo de efectos fijos: en el cual se seleccionan tratamientos específicos o se fijan antes del estudio.

Modelos de efectos aleatorios: en el cual los niveles (tratamientos) utilizados en el estudio se seleccionan aleatoriamente de una población de niveles posibles.

Para la aplicación de un ANOVA son esenciales tres suposiciones:

1. Todas las poblaciones involucradas son normales.
2. Todas las poblaciones tienen la misma varianza.
3. Las muestras se seleccionan independientemente.

Si un número de tratamientos se designa como ***c***, el conjunto de hipótesis de prueba es:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_c$$

$$H_A: no\ todas\ las\ medias\ son\ iguales$$

Se puede argumentar que sería posible probar la igualdad de varias medias utilizando varias pruebas t con dos muestras, sin embargo, algunas complicaciones pueden hacer que este método no sea efectivo. Si el número de poblaciones se incrementa, el número de pruebas requeridas sube notablemente. La necesidad de hacer más pruebas incrementa la probabilidad del error tipo I más allá de los límites aceptables.

Análisis de varianza a una vía: diseño completamente aleatorizado

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Varios sujetos o unidades experimentales se asignan aleatoriamente a diferentes niveles de un solo factor.

El director administrativo de una empresa industrial desea determinar si los tres programas de capacitación distintos tienen efectos diferentes en los niveles de productividad de los empleados. Se seleccionan aleatoriamente 14 empleados y se asignan a uno de los tres programas. Al terminar la capacitación, cada empleado responde un examen para determinar su competencia. Se colocan cuatro empleados en el primer programa de capacitación y cinco en cada uno de los otros dos programas. Cada uno de estos tres grupos se trata de manera independiente como nuestras separadas.

	Tratamientos		
	Programa 1	Programa 2	Programa 3
	85	80	82
	72	84	80
	83	81	85
	80	78	90
		82	88
Columna medias $\bar{X}_j$	$\bar{X}_1 = 80$	$\bar{X}_2 = 81$	$\bar{X}_3 = 85$

Una celda se identifica como X_{ij} en donde *i* es la fila y *j* es la columna en la cual se encuentra ubicada la celda. El número de filas en cada columna se identifica con una *r* y el número de columnas o tratamientos se identifica con una *c*.

La media se calcula para cada tratamiento (columna). Debido a que las columnas se identifican mediante el subíndice *j*, el promedio de las columnas se representa como $\bar{X}_j$.

La gran media se calcula para todas las observaciones del experimento.

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum X_{ij}}{n}$$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{85 + 72 + 83 + \cdots + 90 + 88}{14} = 82.14$$

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

El análisis de varianza se basa en una comparación de la cantidad de variación en cada uno de los tratamientos. Si de un tratamiento al otro la variación es significativamente alta, puede concluirse que los tratamientos tienen efectos diferentes en las poblaciones. Se pueden identificar tres tipos o fuentes de variación:

Variación total: existe variación entre el número total de las observaciones.

Variación entre muestras: existe variación entre los diferentes tratamientos (muestras).

Variación dentro de la muestra: existe variación dentro de un tratamiento dado (muestra).

Variación total: no todos los 14 empleados tuvieron el mismo puntaje en la prueba.

Variación entre muestras: los empleados del programa 1 no tuvieron el mismo puntaje que los del programa 2 y 3.

Variación dentro de la muestra: no todos los empleados de la primera muestra tuvieron el mismo puntaje.

Fundamentos del ANOVA

La variación entre muestras puede ser producida en parte por tratamientos diferentes. La variación dentro de una muestra dada puede ser producida sólo por factores aleatorios como la suerte, la destreza y la motivación y es el resultado del **error de muestreo aleatorizado**.

Si la variación entre las muestras es significativamente mayor que la variación dentro de las muestras, un fuerte efecto de tratamiento está presente.

Efectos del tratamiento: coma las muestras diferentes tienen tratamientos distintos, la variación entre las muestras puede ser producida por los efectos de tratamientos diferentes.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

El análisis de varianza es una relación de la variación entre muestras con la variación dentro de las muestras. Esta variación se mide con la **razón F**.

En la razón F, cuando las medias poblacionales son diferentes, el efecto del tratamiento está presente y las desviaciones entre las muestras serán grandes comparadas con la desviación del error dentro de una muestra. Por tanto, el valor F aumentará, lo cual es una razón de la variación del tratamiento y de la variación del error.

La **variación total** es igual a la variación producida por los **tratamientos diferentes**, más la variación producida por elementos de **error aleatorios** dentro de los tratamientos.

La suma de cuadrados

Varianza muestral

$$S^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

El numerador es la suma de los cuadrados de las desviaciones de la media. De esta forma la suma de los cuadrados se utiliza para medir la variación. El denominador es el número de grados de libertad. Esta ecuación sirve como patrón que puede aplicarse a la suma de los cuadrados en el análisis de varianza.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Cada uno de los tres tipos de variación produce una suma de cuadrados.

1. **Suma de cuadrados total (SCT):** es la variación de las observaciones alrededor de la gran media.

$$SCT = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left(X_{ij} - \bar{\bar{X}}\right)^2$$

Donde

X_{ij} es la observación de la fila i columna j

$\bar{\bar{X}}$ es la gran media

$$SCT = (85 - 82.14)^2 + (72 - 82.14)^2 + \cdots + (90 - 82.14)^2 + (88 - 82.14)^2$$

$$SCT = 251.7$$

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

2. **Suma de cuadrados de los tratamientos (SCTR):** refleja la variación en las medias de la columna alrededor de la gran media.

$$SCTR = \sum r_j \left(\bar{X}_j - \bar{\bar{X}}\right)^2$$

Donde

$\bar{X}_j$ es la media de cada tratamiento j

r_j es el número de observaciones en cada tratamiento

$\bar{\bar{X}}$ es la gran media

$$SCTR = 4(80 - 82.14)^2 + 5(81 - 82.14)^2 + 5(85 - 82.14)^2$$
$$SCTR = 65.7$$

3. **Suma de cuadrados del error (SCE):** mide la variación aleatoria de los valores dentro de un tratamiento alrededor de su propia media.

$$SCE = \sum\sum\left(X_{ij} - \bar{X}_j\right)^2$$

$$SCE = \underbrace{(85-80)^2 + (72-80)^2 + (83-80)^2 + (80-80)^2}_{Primer\ tratamiento}$$
$$+ \underbrace{(80-81)^2 + (84-81)^2 + (81-81)^2 + (78-81)^2 + (82-81)^2}_{Segundo\ tratamiento}$$
$$+ \underbrace{(82-85)^2 + (80-85)^2 + (85-85)^2 + (90-85)^2 + (88-85)^2}_{Tercer\ tratamiento}$$
$$SCE = 186$$

Se espera que:

$$SCT = SCTR + SCE$$

Por lo tanto:

$$SCE = SCT - SCTR = 251.7 - 65.7 = 186$$

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Cuadrados medios

Un cuadrado medio se obtiene si se divide una suma de cuadrados por sus grados de libertad.

Cuadrado medio total (CMT)

$$CMT = \frac{SCT}{n-1}$$

Donde

SCT es la suma de cuadrados total

$n-1$ son los grados de libertad de la suma de cuadrados total

n es el número de observaciones

$$CMT = \frac{SCT}{n-1} = \frac{251.7}{14-1} = 19.4$$

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Cuadrado medio del tratamiento (CMTR)

$$CMTR = \frac{SCTR}{c-1}$$

Donde

$SCTR$ es la suma de cuadrados de los tratamientos

$c - 1$ son los grados de libertad de la suma de cuadrados de los tratamientos

c es el número de tratamientos

$$CMTR = \frac{SCTR}{c-1} = \frac{65.7}{3-1} = 32.9$$

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Cuadrado medio del error (CME)

$$CME = \frac{SCE}{n-c}$$

Donde

SCT es la suma del cuadrado del error

$n-c$ son los grados de libertad de la suma del cuadrado del error

n es el número de observaciones

c es el número de tratamientos

$$CME = \frac{SCE}{n-c} = \frac{186}{14-3} = 16.9$$

Estos tres cuadrados medios son sumas de los cuadrados divididas por sus grados de libertad, y como tales son varianzas. La razón de las dos últimas CMTR y CME, se utiliza como base del análisis de varianza para probar la hipótesis respecto a la igualdad de las medias.

Razón F para una prueba de medias

$$F = \frac{CMTR}{CME}$$

Donde

$CMTR$ es el cuadrado medio del tratamiento

CME es el cuadrado medio del error

$$F = \frac{CMTR}{CME} = \frac{32.9}{16.9} = 1.94$$

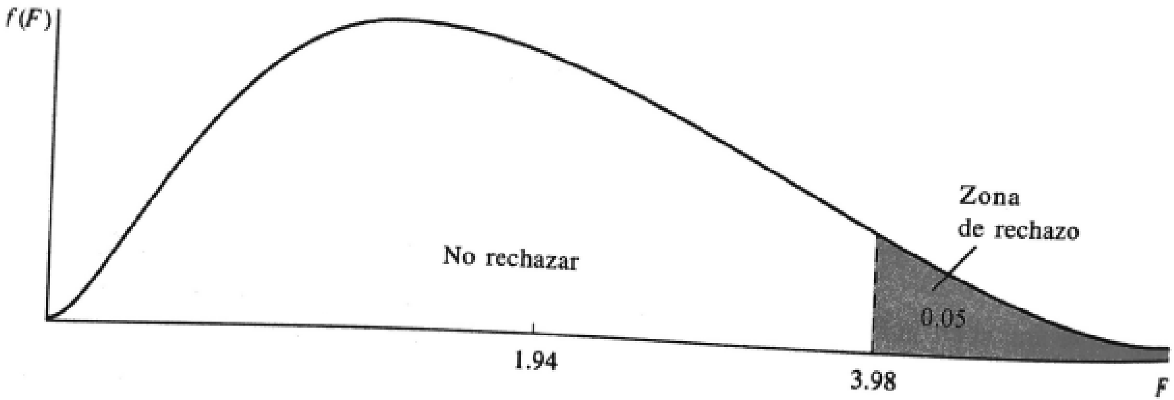
Si la razón F se vuelve "Significativamente" grande porque CMTR excede a CME por una cantidad grande, se reconoce que los efectos del tratamiento probablemente existen.

Se asume que el CEO desea probar la siguiente hipótesis a un nivel del 5%.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_A: no\ todas\ las\ medias\ son\ iguales$$

El valor crítico de F se busca en las tablas de la distribución F, para ello se requiere conocer el valor de α, además ésta distribución cuenta con dos grados de libertad, $c - 1$ para el numerador (CMTR) y $n - c$ para el denominador (CME).



Regla de decisión: “No rechazar si F ≤ 3.98. Rechazar la hipótesis nula si F > 3.98”

Debido a que el valor de F calculado con los datos 1.94 < 3.98 (valor crítico), el CEO no debería rechazar la hipótesis nula. No puede rechazar a un nivel del 5% la hipótesis de que los puntajes de prueba promedio son los mismos para todos los tres programas de capacitación. No existe efecto significativo del tratamiento relacionado con alguno de los programas.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Tabla de análisis de varianza

La tabla de análisis de varianza generalizada				
Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	Valor F
Entre muestras (tratamiento)	$SCTR$	$c-1$	$SCTR/(c-1)$	$CMTR/CME$
Dentro de muestras (error)	SCE	$n-c$	$SCE/(n-c)$	
Variación total	SCT	$n-1$		

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Tabla de ANOVA para los programas de entrenamiento de empleados				
Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	Valor F
Entre muestras (tratamiento)	65.7	2	32.9	1.94
Dentro de muestras (error)	186.0	11	16.9	
Variación total	251.7	13		

H_0: $\mu 1 = \mu 2 = \mu 3$

H_A: No todas las medias son iguales

Regla de decisión: No rechazar si $F \leq 3.98$. Rechazar si $F > 3.98$.

Conclusión: Ya que $F = 1.94 < 3.98$, no se rechaza la hipótesis nula.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Ejercicio 10.1. Robert Shade es vicepresidente de mercadeo en First City Bank en Atlanta. Los recientes esfuerzos promocionales para atraer nuevos depositantes incluyen algunos juegos y premios en cuatro sucursales del banco. Shade está convencido de que diferentes tipos de premios atraerían a diferentes grupos de ingreso. Las personas de un nivel de ingreso prefieren los regalos, mientras que los de otro grupo de ingreso pueden sentirse más atraídas por viajes gratuitos a sitios favoritos para pasar vacaciones. Shade decide utilizar el monto de los depósitos como una media representativa del ingreso. El desea determinar si existe una diferencia en el nivel promedio de depósitos entre las cuatro sucursales. Si se halla alguna diferencia, Shade ofrecerá una diversidad de premios promocionales. Se desea un alfa del 5%.

Depósito	Sucursal 1	Sucursal 2	Sucursal 3	Sucursal 4
1	5.1	1.9	3.6	1.3
2	4.9	1.9	4.2	1.5
3	5.6	2.1	4.5	0.9
4	4.8	2.4	4.8	1.0
5	3.8	2.1	3.9	1.9
6	5.1	3.1	4.1	1.5
7	4.8	2.5	5.1	2.1

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Pruebas para la diferencia entre pares de medias

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

El análisis de varianza dice si todas las medias son iguales. Sim embargo, cuando se rechaza la hipótesis nula, el análisis no revela cuál(es) media(s) es(son) diferentes del resto. Esto se puede determinar por el método Tukey y la diferencia mínima significativa (DMS).

Pruebas para diseños balanceados

En un diseño de análisis de varianza balanceado, cada muestra tiene el mismo número de observaciones.

Método Tukey

Requiere el cálculo de criterio de Tukey para comparación por pares.

$$T = q_{\alpha,c,n-c}\sqrt{\frac{CME}{r}}$$

Donde

q tiene una distribución de rangos estudentizada con c y $n-c$ grados de libertad y α es el valor α seleccionado.

CME es el cuadrado medio del error

r es el número de observaciones en cada tratamiento

La tabla valores críticos de la distribución de rangos de Student, proporciona los valores críticos para q con α = 0.01 y α = 0.05. Primero se elige la tabla con el valor α que se está utilizando, luego se pasa a la fila superior para los primeros grados de libertad (c) y luego se baja por esa columna hasta los segundos grados de libertad ($n-c$).

Si cualquier par de medias muestrales tiene una diferencia absoluta mayor que el valor de T, se puede concluir al nivel de significancia que se está utilizando, que sus medias poblacionales respectivas no son iguales.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

En el ejercicio 10.1, el señor Shade descubrió que no todas las cuatro sucursales del banco tenían los mismos niveles de depósitos. El siguiente paso lógico es determinar cuáles son diferentes. Utilizar un $\alpha = 0.05$.

$$T = q_{\alpha,c,n-c}\sqrt{\frac{CME}{r}} = 3.90\sqrt{\frac{0.236}{7}} = 0.716$$

$$q_{\alpha,c,n-c} = q_{0.05,4,24} = 3.90$$

Existe sólo un 5% de probabilidad que las poblaciones con medias iguales puedan producir muestras de estos tamaños con medias que difieran más de 0.716.

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| = |4.87 - 2.29| = 2.58 > 0.716 *$$

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_3| = |4.87 - 4.31| = 0.56 > 0.716$$

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_4| = |4.87 - 1.46| = 3.41 > 0.716 *$$

$$|\bar{X}_2 - \bar{X}_3| = |2.29 - 4.31| = 2.02 > 0.716 *$$

$$|\bar{X}_2 - \bar{X}_4| = |2.29 - 1.46| = 0.83 > 0.716 *$$

$$|\bar{X}_3 - \bar{X}_4| = |4.31 - 1.46| = 2.85 > 0.716 *$$

Al comparar los valores absolutos de cada diferencia entre los pares de medias muestrales con T = 0.716, Shade puede estar 95% seguro que sólo las sucursales 1 y 3 tienen igual nivel promedio de depósitos. Todas las otras diferencias exceden el criterio T.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Diferencia mínima significativa

Compara el criterio de la diferencia menos significativa con la diferencia absoluta en las medias muestrales.

$$DMS = \sqrt{\frac{2(CME)F_{\alpha,1,n-c}}{r}}$$

Donde

F tiene una distribución de rangos estudentizada con 1 y $n - c$ grados de libertad y α es el valor α seleccionado.

CME es el cuadrado medio del error

r es el número de observaciones en cada tratamiento

El método DMS es más conservador en que, dado un conjunto de condiciones cualquiera, el criterio DMS será menor que el valor Tukey.

$$DMS = \sqrt{\frac{2(CME)F_{\alpha,1,n-c}}{r}} = \sqrt{\frac{2(0.236)4.26}{7}} = 0.536$$

$$F_{\alpha,1,n-c} = F_{0.05,1,24} = 4.26$$

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| = |4.87 - 2.29| = 2.58 > 0.536 *$$

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_3| = |4.87 - 4.31| = 0.56 > 0.536 *$$

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_4| = |4.87 - 1.46| = 3.41 > 0.536 *$$

$$|\bar{X}_2 - \bar{X}_3| = |2.29 - 4.31| = 2.02 > 0.536 *$$

$$|\bar{X}_2 - \bar{X}_4| = |2.29 - 1.46| = 0.83 > 0.536 *$$

$$|\bar{X}_3 - \bar{X}_4| = |4.31 - 1.46| = 2.85 > 0.536 *$$

Shade encuentra que todos los valores sugieren medias poblacionales diferentes.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Pruebas para diseños no balanceados

Si una o más muestras tienen un número diferente de observaciones.

Método DMS alternativo

Compara las muestras jésima y késima.

Diferencia mínima significativa para el diseño no balanceado

$$DMS_{j,k} = \sqrt{\left[\frac{1}{r_j} + \frac{1}{r_k}\right](CME)F_{\alpha,c-1,n-c}}$$

Donde

r_j es el número de observaciones en la muestra jésima

r_k es el número de observaciones en la muestra késima

F tiene una distribución de rangos estudentizada con $c - 1$ y $n - c$ grados de libertad y α es el valor α seleccionado.

CME es el cuadrado medio del error

El valor DMS será diferente para cada par de comparaciones por pares, debido a que el número de observaciones no es el mismo en cada muestra.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Cada vez más norteamericanos buscan escapar de las presiones urbanas, los pagos de impuestos en los parques nacionales ha demostrado un incremento marcado de quienes acampan los fines de semana. Outdoor World informó recientemente que el parque Yosemite National Park ubicado en las sierras altas de California contrató un consultor en economía para estudiar la situación financiera del parque.

Parte del esfuerzo realizado por el consultor requería una comparación de los ingresos del parque provenientes de varias fuentes, incluyendo los pagos por acampar, licencias para pescar y para pasear en bote. Aquí aparecen los datos para visitantes seleccionados aleatoriamente. Se determina si existe diferencia en los ingresos promedio que recibe el parque provenientes de estas tres actividades. Asuma un alfa de 5%.

Visitante	Acampar	Pesca	Pasear en bote
1	38	30	19
2	32	25	35
3	35	31	20
4	36	35	22
5	38		25
6	32		
$\overline{X}_j$	35.17	30.25	24.2

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Como el valor de alfa es 5%, entonces $F_{\alpha,c-1,n-c} = F_{0.05,2,12} = 3.89$

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	Valor F
Entre muestras (tratamiento)	328.0	2	164.0	7.74
Dentro de muestras (error)	254.4	12	21.2	
Variación total	582.4	14		

H_0: $\mu1 = \mu2 = \mu3$

H_A: No todas las medias son iguales

Regla de dicisión: No rechazar si $F \leq 3.89$. Rechazar si $F > 3.89$

Conclusión: Rechazar la hipótesis nula ya que $F = 7.74 > 3.89$.

Debido a que se rechaza la hipótesis nula de los ingresos promedio provenientes de todas las tres actividades, el consultor desearía utilizar las comparaciones por pares para determinar cuáles difieren del resto.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Comparación para acampar (C) y pescar (F):

$$DMS_{j,k} = \sqrt{\left[\frac{1}{r_j} + \frac{1}{r_k}\right](CME)F_{\alpha,c-1,n-c}} = \sqrt{\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right](21.2)3.89} = 5.85$$

Comparación para acampar (C) y montar en bote (B):

$$DMS_{j,k} = \sqrt{\left[\frac{1}{r_j} + \frac{1}{r_k}\right](CME)F_{\alpha,c-1,n-c}} = \sqrt{\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right](21.2)3.89} = 5.48$$

Comparación para pescar (F) y montar en bote (B):

$$DMS_{j,k} = \sqrt{\left[\frac{1}{r_j} + \frac{1}{r_k}\right](CME)F_{\alpha,c-1,n-c}} = \sqrt{\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right](21.2)3.89} = 6.08$$

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Diferencias entre las medias y si exceden o no su valor DMS respectivo son:

$$\left|\bar{X}_c - \bar{X}_f\right| = |35.17 - 30.25| = 4.92 < 5.85$$

$$|\bar{X}_c - \bar{X}_b| = |35.17 - 24.20| = 10.97 > 5.48$$

$$\left|\bar{X}_f - \bar{X}_b\right| = |30.25 - 24.20| = 6.05 < 6.08$$

Solo acampar y montar en bote difieren significativamente.

Se puede concluir a un nivel de significancia del 5% que solo montar en bote y acampar difieren significativamente.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

ANOVA a dos vías: diseño aleatorizado en bloques

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Con frecuencia se encuentra que una segunda influencia exterior puede impactar las unidades experimentales.

Ejemplo: comparar la productividad promedio de 3 tipos de máquinas (tratamientos). Sin embargo, puede que la destreza y experiencia del operador puedan afectar la producción de la máquina.

Esta consideración simultánea de las dos fuerzas requiere del **análisis de varianza a dos vías**.

Para obtener una medida decisiva, se debe "bloquear" el factor externo colocando las observaciones en grupos homogéneos, así las observaciones se clasifican tanto por bloques como por tratamientos.

El propósito del bloqueo es reducir la variación dentro de un tratamiento. Este diseño se llama **diseño aleatorizado por bloques**.

Si los bloques se realizan de manera efectiva y se basan en un factor que verdaderamente afecte, se obtiene una medida más pura del efecto del tratamiento. Si el factor seleccionado para el bloqueo no afecta, los resultados pueden ser engañosos.

Una empresa de contabilidad grande trata de seleccionar un sistema de computación integrado a la oficina, entre los tres modelos que están actualmente en estudio. La selección final dependerá de la productividad de los sistemas. Se seleccionan aleatoriamente cinco operadores para manejar cada sistema. Es importante tener en cuenta que el nivel de experiencia que tienen los empleados en el manejo de computadores puede afectar el resultado de la prueba. Por tanto, existe la necesidad de justificar el impacto de la experiencia al determinar los méritos relativos de los sistemas de computación. Los niveles resultantes de producción medios en unidades por hora aparecen a continuación. El nivel de experiencia más alto indica más años de capacitación.

	Sistemas (tratamientos)			
Nivel de experiencia	1	2	3	$\bar{X}_i$
1	27	21	25	24.33
2	31	33	35	33.00
3	42	39	39	40.00
4	38	41	37	38.67
5	45	46	45	45.33
$\bar{X}_i$	36.5	36.0	36.2	

$$\bar{\bar{X}} = 36.27$$

Se tienen r bloques (filas), c tratamientos (columnas) y $n = rc$ observaciones.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

La empresa puede considerar que los años de experiencia de un operador afectan significativamente su productividad. Sin embargo, la empresa está interesada en la productividad de los sistemas de computación y no en la de los empleados. Por tanto se debe ajustar la productividad de los empleados eliminando el efecto de la variabilidad del operador para obtener una medida precisa, no contaminada, de la calidad del sistema.

Con el análisis de varianza a dos vías, la suma de cuadrados total se divide en tres partes: La suma de cuadrados del tratamiento (SCTR), suma de cuadrados del error (SCE) y la suma de cuadrados de bloques (SCBL).

$$SCT = SCTR + SCE + SCBL$$

SCT y *SCTR* se calculan de la misma forma que en análisis de varianza de una vía.

La suma de los cuadrados del bloque mide el grado de variación de las mediad del bloque (filas) alrededor de la gran media.

$$SCBL = \sum c_i\left(\bar{X}_i - \bar{\bar{X}}\right)^2$$

Donde:

c_i es el número de tratamientos de cada bloque.

$\bar{X}_i$ es la media para cada bloque.

$\bar{\bar{X}}$ es la gran media.

$$SCBL = 3(24.33 - 36.27)^2 + 3(33 - 36.27)^2 + 3(40 - 36.27)^2 + 3(38.67 - 36.27)^2 + 3(45.33 - 36.27)^2$$

$$SCBL = 765.04$$

$$SCT = 806.93$$

$$SCTR = 0.93$$

Suma de cuadrados del error

$$SCE = SCT - SCTR - SCBL$$

$$SCE = 806.93 - 0.93 - 765.04 = 40.96$$

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Cuadrado medio total

$$CMT = \frac{SCT}{n-1}$$

$$CMT = \frac{806.93}{14} = 57.64$$

Cuadrado medio del tratamiento

$$CMTR = \frac{SCTR}{c-1}$$

$$CMTR = \frac{0.93}{2} = 0.47$$

Cuadrado medio del error

$$CME = \frac{SCE}{(r-1)(c-1)}$$

$$CME = \frac{40.96}{8} = 5.1$$

Cuadrado medio del bloque

$$CMBL = \frac{SCBL}{r-1}$$

$$CMBL = \frac{765.04}{4} = 191.26$$

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Se calculan dos valores de F:

$$F = \frac{CMTR}{CME}$$

$$F = \frac{0.47}{5.1} = 0.09$$

El valor F para CMBL se calcula para determinar si los bloques se realizaron de manera efectiva.

$$F = \frac{CMBL}{CME}$$

$$F = \frac{191.26}{5.1} = 37.50$$

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	Valor *F*
Entre muestras (tratamiento)	0.93	2	0.47	0.09
Entre bloques	765.04	4	191.26	37.50
Dentro de las muestras (error)	40.96	8	5.10	
Variación total	806.93	14		

A un nivel del 5%, el valor crítico de F para CMBL con 4 y 8 grados de libertad se obtiene de la tabla y es $F_{0.05,4,8}$ = 3.84 (4 en el numerador por CMBL y 8 en el denominador por CME).

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

La empresa contable debe primero probar la hipótesis de que el nivel promedio de producción para cada nivel de experiencia es el mismo. Si es así, entonces la experiencia no es un factor determinante en la producción, y el bloqueo sobre ésta sería inútil. Si los niveles promedio de producción y los niveles de experiencia no son los mismos, entonces la empresa de contabilidad debe bloquear la experiencia para corregir su impacto y por ende obtener una medida más exacta de las diferencias en la calidad del sistema de computación. La hipótesis a probar es:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$$

$$H_A: no\ todas\ las\ medias\ de\ las\ filas\ son\ iguales$$

Donde

μ_i son los niveles promedio de producción para cada nivel de experiencia (fila).

Regla de decisión: "No rechazar la hipótesis nula si F ≤ 3.84. Rechazar la hipótesis nula si F > 3.84".

Debido a que F = 37.50, la **hipótesis nula debería rechazarse** y la empresa debería concluir que los niveles de experiencia tienen un efecto en las tasas de producción. Debe corregir la experiencia utilizando el análisis de varianza de dos vías.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Ahora la empresa está preparada para probar la hipótesis en la cual estuvo originalmente interesada. ¿Existe alguna diferencia en la producción promedio de los sistemas de computación (tratamientos)?

Si el valor de alfa del 5% se mantiene, el valor crítico de F para CMTR con 2 y 8 grados de libertad se obtiene de la tabla y es $F_{\alpha,(c-1),(r-1)(c-1)} = F_{0.05,2,8} = 4.46$ (2 en el numerador por CMTR y 8 en el denominador por CME).

La hipótesis a probar es:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_A: no\ todas\ las\ medias\ de\ las\ columnas\ son\ iguales$$

Donde

μ_i son las medias de las columnas para los tres sistemas de computación.

Regla de decisión: "No rechazar la hipótesis nula si $F \leq 4.46$. Rechazar la hipótesis nula si $F > 4.46$".

$F = 0.09 < 4.46$ por lo que la hipótesis nula no se rechaza y la empresa concluye que los niveles de producción promedio de los tres sistemas de computación no difieren, una vez que se ha hecho la corrección para el factor experiencia. Los empleados de diferentes niveles de experiencia se desempeñan igualmente bien en todas las máquinas. No interesa cual sistema de computación compren.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Ejercicio 10.2. Una emisión reciente de la revista Fortune describió los esfuerzos realizados por una importante empresa electrónica para desarrollar un sistema en el cual se les daba a los empleados la oportunidad de evaluar el desempeño de sus supervisores. Se seleccionan aleatoriamente cinco empleados y se les pide evaluar a cuatro de sus gerentes en una escala del 10 al 50. Los resultados son:

	Gerente (tratamiento)			
Empleado	1	2	3	4
1	31	35	46	38
2	29	32	45	36
3	13	17	35	20
4	28	38	52	39
5	14	20	40	20

El gerente de la empresa de electrónica desea saber si existe diferencia entre las clasificaciones promedio de los cuatro gerentes.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad