Pruebas cuando se tienen dos poblaciones

Muchas preguntas importantes pueden resolverse comparando dos poblaciones.

¿Los trabajadores de una planta producen en promedio más que los trabajadores de una segunda planta?

El procedimiento exacto a seguir para la realización de estas pruebas depende de la técnica de muestreo que se utilice. Las muestras para pruebas con dos poblaciones pueden ser:

1. Independientes: se realiza recolectando muestras independientes de cada población, incluso las muestras no tienen que ser del mismo tamaño.
2. Por pares: las observaciones de cada población tienen su correspondiente.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

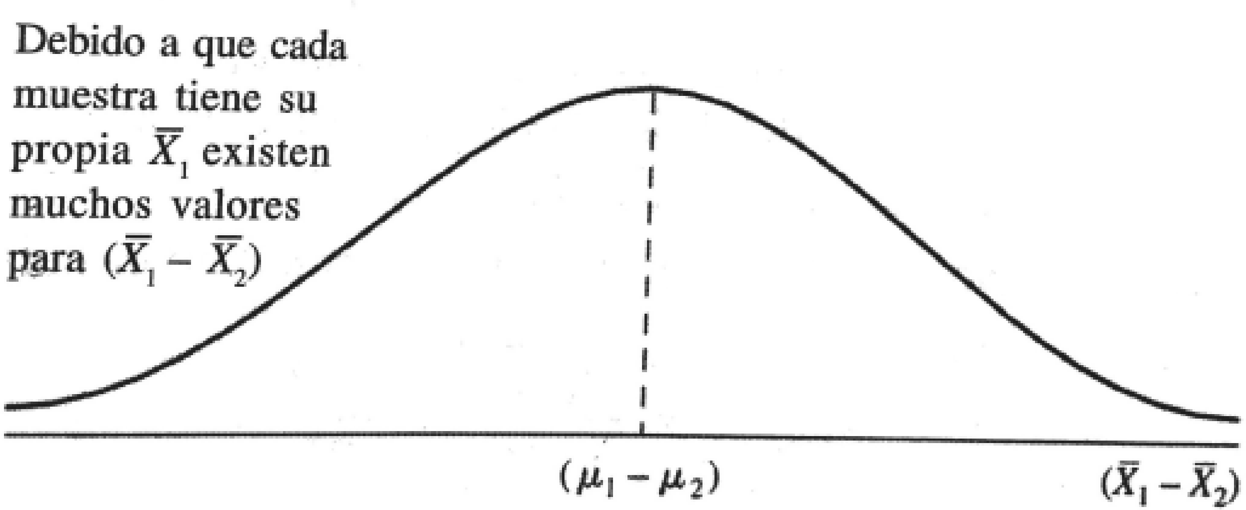
Estimación por intervalo en el caso de muestras independientes

Aquí el interés está en estimar la diferencia entre dos medias poblacionales $(\mu_1 - \mu_2)$. El método apropiado depende de los tamaños de las muestras n_1 y n_2. Si ambos tamaños son mayores o iguales que 30 la técnica difiere cuando alguno o ambos tamaños son menores de 30.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Estimación con muestras grandes

La estimación puntual de la diferencia entre $(\mu_1 - \mu_2)$ está dada por la diferencia entre las dos medias muestrales $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$. Ya que muchas muestras diferentes pueden tomarse de cada población, resulta toda una distribución de diferencias de estas medias muestrales. Si tanto n_1 y n_2 son grandes, la distribución de las diferencias entre las medias muestrales $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ es una distribución normal centrada en $(\mu_1 - \mu_2)$.



Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Intervalo de confianza para la diferencia entre dos medias poblacionales – muestras grandes

$$I.C.\, para\, (\mu_1 - \mu_2) = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Z\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$$

Donde:

$\bar{X}_1 y\, \bar{X}_2$ son las medias muestrales

Z es la desviación normal

$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$ es el error estándar de las diferencias entre las medias muestrales

Error estándar de las diferencias entre las medias muestrales

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Donde:

$\sigma_1^2\ y\ \sigma_2^2$ son las dos varianzas poblacionales

n_1 y n_2 son los dos tamaños de las muestras

En el evento probable de que $\sigma_1^2\ y\ \sigma_2^2$ sean desconocidas, deben utilizarse las varianzas muestrales $s_1^2\ y\ s_2^2$.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Intervalo de confianza cuando las varianzas poblacionales son desconocidas

$$I.C. para\ (\mu_1 - \mu_2) = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm Zs_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$$

Donde:

$\bar{X}_1 y\ \bar{X}_2$ son las medias muestrales

Z es la desviación normal

$s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$ es la estimación el error estándar de las diferencias entre las medias muestrales

Estimación del error estándar de la diferencia entre medias muestrales

$$s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Donde:

$s_1^2\ y\ s_2^2$ son las dos varianzas muestrales

n_1 y n_2 son los dos tamaños de las muestras

Vale la pena destacar que no se está interesado en el valor de cualquiera de las medias poblacionales, sino solamente en la diferencia que existe entre las dos medias poblacionales.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Transfer Trucking transporta remesas entre Chicago y Kansas City por dos rutas. Una muestra de 100 camiones enviados por la ruta del norte reveló un tiempo promedio de tránsito de $\bar{X}_N = 17.2$ horas con una desviación estándar de $s_N = 5.3$ horas, mientras que 75 camiones que utilizan la ruta del sur necesitaron un promedio de $\bar{X}_S = 19.4$ horas con una desviación estándar de $s_s = 4.5$ horas. Delmar, el despachador de Transfer Trucking, desea desarrollar un intervalo d confianza del 95% para la diferencia en el tiempo promedio entre estas dos rutas alternas.

Debido a que las desviaciones estándar de las poblaciones son desconocidas, el error estándar es:

$$s_{\bar{X}_N - \bar{X}_S} = \sqrt{\frac{s_N^2}{n_N} + \frac{s_S^2}{n_S}} = \sqrt{\frac{(5.3)^2}{100} + \frac{(4.5)^2}{75}} = 0.742$$

Un intervalo del 95% genera un valor Z de 1.96

$$I.C. para\ (\mu_N - \mu_S) = (\bar{X}_N - \bar{X}_S) \pm Z s_{\bar{X}_N - \bar{X}_S}$$

$$I.C. para\ (\mu_N - \mu_S) = (17.2 - 19.4) \pm (1.96)(0.742)$$

$$-3.7 \le (\mu_N - \mu_S) \le -0.75$$

Delmar puede estar 95% seguro de que $(\mu_N - \mu_S)$ está entre -3.7 horas y -0.75

Delmar puede tener un 95% de confianza en que la ruta sur se toma
entre 0.75 y 3.7 horas más.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Ejercicio 9.1. Charles Schwab, del servicio de corretaje de descuentos, recientemente instituyó dos programas de capacitación para los representantes de mercadeo telefónico contratados recientemente. Para probar la efectividad relativa de cada programa, a 45 representantes entrenados en el primero programa se les hizo la prueba de competencia. El puntaje promedio fue $\overline{X}_1 = 76$ con $s_1 = 13.5$ puntos. Las 40 personas entrenadas bajo el segundo programa reportaron un puntaje medio de $\overline{X}_2 = 77.97$ con $s_2 = 9.05$ puntos. La gerencia desea saber si un programa de entrenamiento es más efectivo que el otro. Siendo usted la persona seleccionada para tomar esta determinación, usted debe construir un intervalo de confianza del 99% para hallar la diferencia entre los puntajes de competencia promedio de los empleados entrenados que se encuentran en cada programa. Usted también es responsable de recomendar cuál programa de entrenamiento deberá utilizar la compañía exclusivamente.

Estimación con muestras pequeñas, la distribución t

Si cualquier muestra es pequeña (menor que 30), no se puede asumir que la distribución de las diferencias en las medias muestrales $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ se ajusta a una distribución normal.

Si las poblaciones están distribuidas normalmente o distribuidas casi normalmente, y las varianzas poblacionales son desconocidas, se debe utilizar la distribución t.

Para aplicar adecuadamente la distribución t, también se debe determinar si las varianzas de las dos poblaciones son iguales. Se analizarán los intervalos de confianza cuando se asume que las varianzas son iguales y cuando no se asume que lo son.

Suposición que las varianzas $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ son iguales pero desconocidas

Si las varianzas de las dos poblaciones son iguales, existe alguna varianza σ^2 común a ambas poblaciones, es decir $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Los datos de ambas muestras pueden mancomunarse para obtener un solo estimado de σ^2.

Estimado mancomunado de la varianza común a ambas poblaciones

$$s_p^2 = \frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

Donde:

$s_1^2 \; y \; s_2^2$ son las dos varianzas muestrales

n_1 y n_2 son los dos tamaños de las muestras

El intervalo de confianza para la diferencia entre las dos medias poblacionales se halla entonces con una distribución t con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

Intervalo para la diferencia entre medias poblacionales cuando $\boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$ desconocidas

$$I.C.\,para\ (\mu_1 - \mu_2) = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}$$

Donde:

$\bar{X}_1\, y\ \bar{X}_2$ son las medias muestrales

t es el valor de la distribución t

s_p^2 es el estimado mancomunado de la varianza común de ambas poblaciones

En la cafetería de los estudiantes, una máquina expendedora de bebidas dispensa bebidas en tazas de papel. Una muestra de 15 tazas da una media de 15.3 onzas con una varianza de 3.5. Después de ajustar la máquina, una muestra de 10 tazas produce un promedio de 17.1 onzas con una varianza de 3.9. Si se asume que s^2 es constante antes y después del ajuste, construya un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre los contenidos promedio de llenado. Se asume que las cantidades dispensadas están distribuidas normalmente.

$$s_p^2 = \frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$s_p^2 = \frac{3.5(14) + 3.9(9)}{15 + 10 - 2} = 3.66$$

Con α = 0.05 (nivel de confianza del 95%) y $n_1 + n_2 - 2 = 15 + 10 - 2 = 23$ grados de libertad, la tabla t (prueba de dos colas) indica un valor t = 2.069.

$$I.C. para\ (\mu_1 - \mu_2) = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}$$

$$I.C. para\ (\mu_1 - \mu_2) = (15.3 - 17.1) \pm 2.069\sqrt{\frac{3.66}{15} + \frac{3.66}{10}}$$

$$I.C. para\ (\mu_1 - \mu_2) = -1.8 \pm 1.61$$

$$-3.41 \le \mu_1 - \mu_2 \le -0.19$$

El intervalo no contiene cero, por consiguiente se puede tener un nivel de confianza del 95% en el que el ajuste incremento el nivel de contenido promedio entre 0.19 onzas y 3.41 onzas.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Ejercicio 9.2. Las negociaciones salariales entre su empresa y el sindicato de sus trabajadores están a punto de romperse. Existe un desacuerdo considerable sobre el nivel salarial promedio de los trabajadores en la planta de Atlanta y en la planta de Virginia. Los salarios fueron fijados por el antiguo acuerdo laboral de hace tres años y se basan estrictamente en la antigüedad. Debido a que los salarios están controlados muy de cerca por el contrato laboral, se asume que la variación en los salarios es la misma en ambas plantas y que los salarios están distribuidos normalmente. Sin embargo, se siente que existe una diferencia entre los niveles salariales promedio debido a los patrones de antigüedad diferentes en las dos plantas.

El negociador laboral que representa a la gerencia desea que usted desarrolle un intervalo de confianza del 98% para estimar la diferencia entre los niveles salariales promedio. Si existe una diferencia en las medias, deben hacerse ajustes para hacer que los salarios más bajos alcancen el nivel de los más altos. Dados los siguientes datos, ¿qué ajustes se requieren, si es el caso?

Planta de Atlanta	Planta de Virginia
n_A = 23	n_V = 19
$\bar{X}_A$ = 17.53 por hora	$\bar{X}_V$ = 15.5 por hora
s_A^2 = 92.10	s_V^2 = 87.10

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Varianzas desiguales

Se ha propuesto una aproximación tal que utilice el estadístico t con grados de libertad levemente alterados en el evento de que $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Grados de libertad cuando las varianzas poblacionales no son iguales

$$g.l. = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{(s_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)}$$

Donde:

s_1^2 y s_2^2 son las dos varianzas muestrales

n_1 y n_2 son los dos tamaños de las muestras

Debido a que g.l. se calcula de esta manera alterada, el estadístico t se simboliza con t'.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Intervalo para la diferencia entre medias poblacionales

$$I.C.\,para\,(\mu_1 - \mu_2) = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t' \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Donde:

$\bar{X}_1\, y\, \bar{X}_2$ son las medias muestrales

t ‘es el valor de la distribución t con grados de libertad aproximados

$s_1^2\ y\ s_2^2$ son las dos varianzas muestrales

n_1 y n_2 son los dos tamaños de las muestras

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

The Wall Street Journal describió dos programas de entrenamiento utilizados por IBM. Doce ejecutivos a quienes se les dio el primer tipo de entrenamiento obtuvieron un promedio de 73.5 en la prueba de competencia. Aunque el artículo de noticias no reportó la desviación estándar para estos 12 empleados, se asume que la varianza en los puntajes para este grupo fue de 100.2. Quince ejecutivos a quienes se les administró el segundo programa de entrenamiento obtuvieron un promedio de 79.8. Se asume una varianza de 121.3 para este segundo grupo. Hay un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en los puntajes promedio para todos los ejecutivos que ingresaron a estos programas.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

$$g.l. = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{(s_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)}$$

$$g.l. = \frac{(100.2/12 + 121.3/15)^2}{(100.2/12)^2/(12 - 1) + (121.3/15)^2/(15 - 1)} = 24.55$$

Si g.l. es fraccionario, se aproxima hacia el entero inmediatamente anterior.

Con α = 0.05 (nivel de confianza del 95%) y g.l. = 24, la tabla t (prueba de dos colas) indica un valor t = 2.064.

$$I.C. para\ (\mu_1 - \mu_2) = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm t' \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$I.C. para\ (\mu_1 - \mu_2) = (73.5 - 79.8) \pm 2.064 \sqrt{\frac{100.2}{12} + \frac{121.3}{15}}$$

$$I.C. para\ (\mu_1 - \mu_2) = -6.3 \pm 8.36$$

$$-14.66 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 2.06$$

Debido a que el intervalo contiene cero, no existe una fuerte evidencia de que exista diferencia alguna en la efectividad de los programas de entrenamiento.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Ejercicio 9.3. Acme Ltd. Vende dos tipos de amortiguadores de caucho para coches de bebés. Las pruebas de desgaste para medir la durabilidad revelaron que 13 amortiguadores del tipo 1 duraron un promedio de 11.3 semanas, con una desviación estándar de 3.5 semanas; mientras 10 del tipo 2 duraron un promedio de 7.5 semanas, con una desviación estándar de 2.7 semanas. El tipo 1 es más costoso para fabricar y el CEO de Acme no desea utilizarlo a menos que tenga un promedio de duración de por lo menos ocho semanas más que el tipo 2. El CEO tolerará una probabilidad de error de sólo el 2%. No existe evidencia que sugiera que las varianzas de la duración de los dos productos sean iguales.

Estimación del intervalo con muestras pareadas

Se llaman pares correspondientes (muestras pareadas) dos observaciones que son lo más similares posibles entre sí. Sólo difieren en un aspecto relevante.

Diferencia promedio entre las observaciones pareadas

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$$

Donde:

d_i es la diferencia entre el i –ésimo par correspondiente

n es el número de pares

Desviación estándar de las diferencias entre las observaciones pareadas

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n\left(\bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Donde:

d_i es la diferencia entre el i –ésimo par correspondiente

$\bar{d}$ es la diferencia promedio entre las observaciones pareadas

n es el número de pares

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Cuando $n < 30$ y la desviación estándar de las diferencias de los puntajes σ_d es desconocida, se requiere el uso del estadístico t. Si n es mayor que 30 o σ_d es conocido, el estadístico Z se puede utilizar.

Con el nivel de confianza y los grados de libertad (g.l. = n – 1), en la tabla t (prueba de dos colas) se busca el valor de t.

Intervalo para la diferencia entre medias, observaciones pareadas

$$I.C.\, para\ \mu_d = \bar{d}\ \pm t\frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

Donde:

s_d es la Desviación estándar de las diferencias entre las observaciones pareadas

$\bar{d}$ es la diferencia promedio entre las observaciones pareadas

n es el número de pares

Se asume que se tienen los puntajes de la prueba de 10 empleados antes y después de habérseles impartido una capacitación laboral adicional. Encuentre el intrvalo de confianza para un nivel de confianza del 90%.

Empleado	Puntaje antes de la capacitación	Puntaje después de la capacitación
1	9.0	9.2
2	7.3	8.2
3	6.7	8.5
4	5.3	4.9
5	8.7	8.9
6	6.3	5.8
7	7.9	8.2
8	7.3	7.8
9	8.0	9.5
10	7.5	8.0

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Empleado	Puntaje antes de la capacitación	Puntaje después de la capacitación	d_1	d_1^2
1	9.0	9.2	-0.2	0.04
2	7.3	8.2	-0.9	0.81
3	6.7	8.5	-1.8	3.24
4	5.3	4.9	0.4	0.16
5	8.7	8.9	-0.2	0.04
6	6.3	5.8	0.5	0.25
7	7.9	8.2	-0.3	0.09
8	7.3	7.8	-0.5	0.25
9	8.0	9.5	-1.5	2.25
10	7.5	8.0	-0.5	0.25
	74.0	**79.0**	**-5.0**	**7.38**

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{-5.0}{10} = -0.5$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n\left(\bar{d}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{7.38 - 10(-0.5)^2}{9}} = 0.736$$

Con α = 0.1 (nivel de confianza del 90%) y g.l. = 10 – 1 = 9, la tabla t (prueba de dos colas) indica un valor t = 1.833.

$$I.C.\,para\;\mu_d = \bar{d}\;\pm t\frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

$$I.C.\,para\;\mu_d = -0.5\;\pm(1.833)\frac{0.736}{\sqrt{10}}$$

$$-0.927 \le \mu_d \le -0.073$$

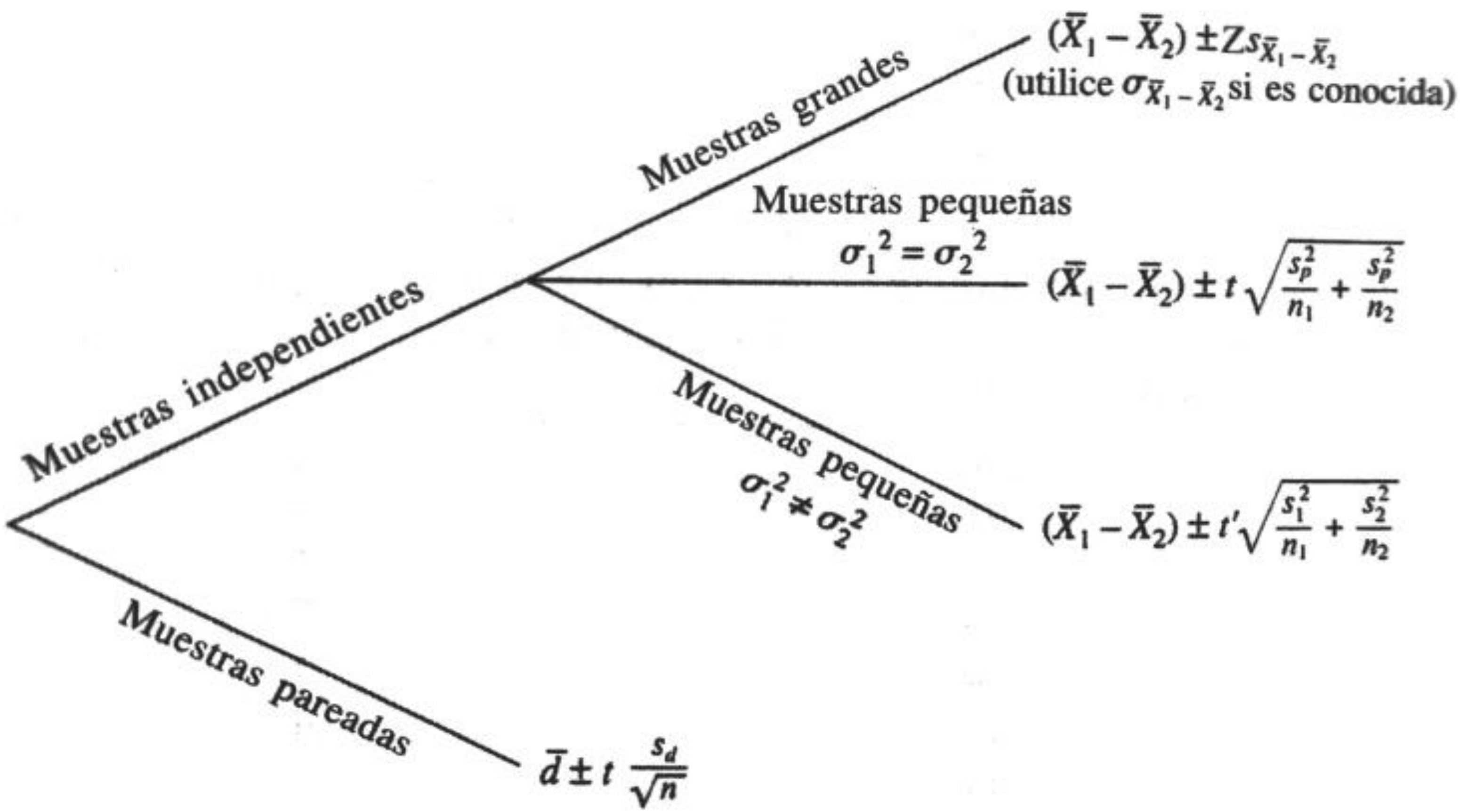
Debido a que se restaron los puntajes posteriores al entrenamiento de los puntajes anteriores al entrenamiento produciendo valores negativos, se puede estar 90% seguro de que la media de los puntajes posteriores al entrenamiento está entre 0.073 y 0.927 puntos más alto.

Ejercicio 9.4. Vicki Peplow, directora regional de pagos de asistencia médica para Aetna Insurance, constató que dos hospitales diferentes parecían cobrar cantidades ampliamente diferentes por el mismo procedimiento médico. Ella recolectó observaciones sobre costos de facturación para 15 procedimientos idénticos en cada hospital, y construyó un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre los costos promedio presentados por cada hospital. Se utilizaron muestras pareadas porque Vicki corrigió todos los demás factores relevantes distintos al costo.

Si existe una diferencia, la señora Peplow planea reportar este asunto a las autoridades de asistencia médica Medicare. ¿Deberá ella presentar el informe?

ID	Hospital 1	Hospital 2
1	465	512
2	532	654
3	426	453
4	543	521
5	587	632
6	537	418
7	598	587
8	698	376
9	378	529
10	376	517
11	524	476
12	387	519
13	429	587
14	398	639
15	412	754

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad



Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Intervalo de confianza para la diferencia entre dos proporciones

Error estándar de la diferencia entre dos proporciones muestrales

$$s_{p_1 - p_2} = \sqrt{\frac{p_{1(1-p_1)}}{n_1} + \frac{p_{2(1-p_2)}}{n_2}}$$

Donde:

$p_1 \ y \ p_2$ son las proporciones de las muestras

n_1 y n_2 son los dos tamaños de las muestras

Intervalo para la diferencia entre proporciones poblacionales

$$I.C. para\ (\pi_1 - \pi_2) = (p_1 - p_2) \pm Zs_{p_1 - p_2}$$

Donde:

$p_1 \ y \ p_2$ son las proporciones de las muestras

Z es la desviación normal

$s_{p_1 - p_2}$ es el error estándar de la diferencia entre dos proporciones muestrales

Una empresa realiza un estudio para determinar si el ausentismo de los trabajadores en el turno del día es diferente al de los trabajadores de la noche. Se realiza una comparación de 150 trabajadores de cada turno. Los resultados muestran que 37 trabajadores diurnos han estado ausentes por lo menos 5 veces durante el año anterior, mientras que 52 trabajadores nocturnos han faltado por lo menos 5 veces. ¿Qué revelan estos datos sobre la tendencia al ausentismo entre los trabajadores? Calcule un intervalo de confianza del 90% para la diferencia entre las proporciones de trabajadores de los dos turnos que faltaron 5 veces o más.

$$p_1 = \frac{éxitos_1}{n_1} = \frac{37}{150} = 0.25$$

$$p_2 = \frac{éxitos_2}{n_2} = \frac{52}{150} = 0.35$$

$$s_{p_1 - p_2} = \sqrt{\frac{p_{1(1-p_1)}}{n_1} + \frac{p_{2(1-p_2)}}{n_2}} = \sqrt{\frac{(0.25)(0.75)}{150} + \frac{(0.35)(0.65)}{150}} = 0.0526$$

$$I.C. para\ (\pi_1 - \pi_2) = (p_1 - p_2) \pm Zs_{p_1 - p_2}$$

$$I.C. para\ (\pi_1 - \pi_2) = (0.25 - 0.35) \pm (1.65)(0.0526)$$

$$I.C. para\ (\pi_1 - \pi_2) = -0.10 \pm 0.087$$

$$-18.7\% \leq \pi_1 - \pi_2 \leq -1.3\%$$

Debido a que la proporción de trabajadores nocturnos se resto de la proporción de trabajadores diurnos, la empresa puede estar 90% segura de que la propoporción de trabajadores nocturnos ausentes entá entre 1.3% y 18.7% más alta que las del turno diurno.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Ejercicio 9.5. Su empresa utiliza dos máquinas diferentes para cortar los disfraces que se utilizan en una obra. Se han presentado problemas en cuanto al ajuste apropiado, debido al funcionamiento de las máquinas. Como director de control de calidad su trabajo es estimar la diferencia en la proporción de defectos producidos por cada máquina. Se tomaron muestras de tamaños $n_1 = 120$ y $n_2 = 95$, la primera máquina produjo 38% de defectos y la segunda 43% de defectos. Fijar α en el 5%. Si la evidencia sugiere que la difrencia en la proporción de defectos exede el 5% , todos los disfraces se producirán en la máquina que parezca tener una tasa de defectos menor. ¿Qué decisión tomará usted?

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Selección del tamaño apropiado de la muestra

El tamaño de la muestra requerido depende de:

1. Las varianzas poblacionales
2. El grado de exactitud deseado

Tamaño de la muestra para estimar la diferencia entre medias poblacionales $\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2}$

$$n = \frac{Z^2\ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(error)^2}$$

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

La Comisión de Planeación Económica de Texas pidió a un economista, que desarrollara un intervalo de confianza del 99% para la diferencia entre la duración promedio del servicio prestado por empleados públicos y el de los trabajadores del sector privado. La comisión desea un ancho de intervalo de 3 años. Las muestras piloto produjeron varianzas de 15 y 21 respectivamente. ¿Qué tan grande deberían tomarse las muestras de cada población?

$$n = \frac{Z^2\ (\sigma_1^2 +\ \sigma_2^2)}{(error)^2}$$

$$n = \frac{(2.58)^2\ (15 +\ 21)}{(1.5)^2} = 106.5\ \approx 107$$

Se deberían seleccionar 107 empleados del sector público como del privado para hacer la comparación.

Tamaño de la muestra para estimar la diferencia entre proporciones poblacionales $\boldsymbol{\pi_1 - \pi_2}$

$$n = \frac{Z^2\left(\pi_1(1-\pi_1) + \pi_2(1-\pi_2)\right)}{(error)^2}$$

Wally Simpleton, el candidato líder en la carrera por la gobernación, desea desarrollar un intervalo de confianza con un ancho de 3 puntos porcentuales y un nivel de confianza del 99% para hallar la diferencia entre la proporción de hombres y de mujeres que están a favor de su candidatura. ¿Qué tan grandes deberían ser las muestras? Una muestra piloto para hombres y mujeres reveló que $p_H = 0.40$ y $p_M = 0.30$.

$$n = \frac{Z^2\left(\pi_1(1-\pi_1) + \pi_2(1-\pi_2)\right)}{(error)^2}$$

$$n = \frac{(2.58)^2\left(0.4(1-0.4) + 0.3(1-0.3)\right)}{(0.015)^2} = 13312.8 \approx 13313$$

Se deberían seleccionar 13313 mujeres y hombres para hacer la comparación.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Pruebas de hipótesis para dos medias con muestras independientes

Las pruebas de hipótesis para diferencias entre las medias siguen un procedimiento parecido al de los intervalos en que las muestras son independientes o pareadas. Sin embargo, en este caso, a diferencia de la estimación por intervalo, no se está interesado en el tamaño de la diferencia en las medias, sino sólo en si existe o no una diferencia.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_A: \mu_1 \neq \mu_2$$

O el equivalente

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

La prueba de hipótesis para la diferencia entre medias de dos poblaciones es muy parecida a la de una sola población, debe seguir los mismos pasos:

- Se plantea la hipótesis.
- Se calcula un estadístico Z o t.
- Se forma la regla de decisión.
- Interpretación y conclusiones.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Pruebas con muestras grandes

Estadístico de prueba Z para muestras grandes

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

Donde:

$\bar{X}_1 y \bar{X}_2$ son las medias muestrales

$\mu_1 - \mu_2$ son las medias poblacionales

$s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$ es la estimación el error estándar de las diferencias entre las medias muestrales

Si las varianzas poblacionales son conocidas, debería utilizarse $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$

$$s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Donde:

$s_1^2 \; y \; s_2^2$ son las dos varianzas muestrales

n_1 y n_2 son los dos tamaños de las muestras

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Weaver Ridge Golf Course desea ver si el tiempo promedio que requieren los hombres para jugar los 18 hoyos es diferente al de las mujeres. Se mide el tiempo para 50 partidos de hombres y 45 de mujeres y se obtiene:

Hombres	Mujeres
$\bar{X} = 3.5\ horas$	$\bar{X} = 4.9\ horas$
S = 0.9 horas	S = 1.5 horas

Utilice un α de 0.05.

$$H_0: \mu_H = \mu_M$$

$$H_A: \mu_H \neq \mu_M$$

$$s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(0.9)^2}{50} + \frac{(1.5)^2}{45}} = 0.257$$

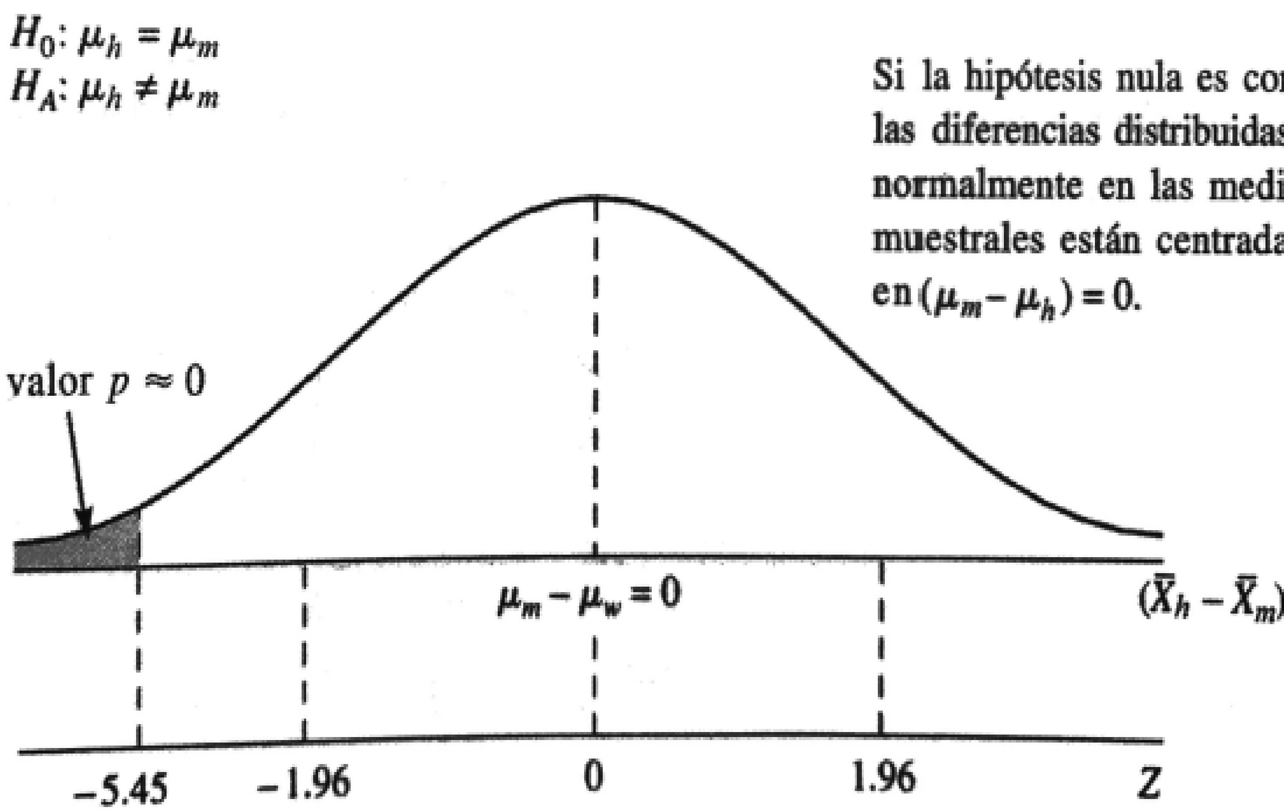
$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{(3.5 - 4.9) - 0}{0.257} = -5.45$$

Si α = 0.05, el valor crítico de Z es 1.96.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Regla de decisión: “No rechazar si -1.96 ≤ Z ≤ 1.96. Rechazar si z < -1.96 o si z > 1.96”

La hipótesis nula es rechazada. Debido a que la hipótesis nula de igualdad es rechazada y $\bar{X}_M > \bar{X}_H$, la evidencia sugiere que las mujeres toman más tiempo en promedio. Vale la pena notar también que el valor de p relacionado con la prueba es virtualmente cero.

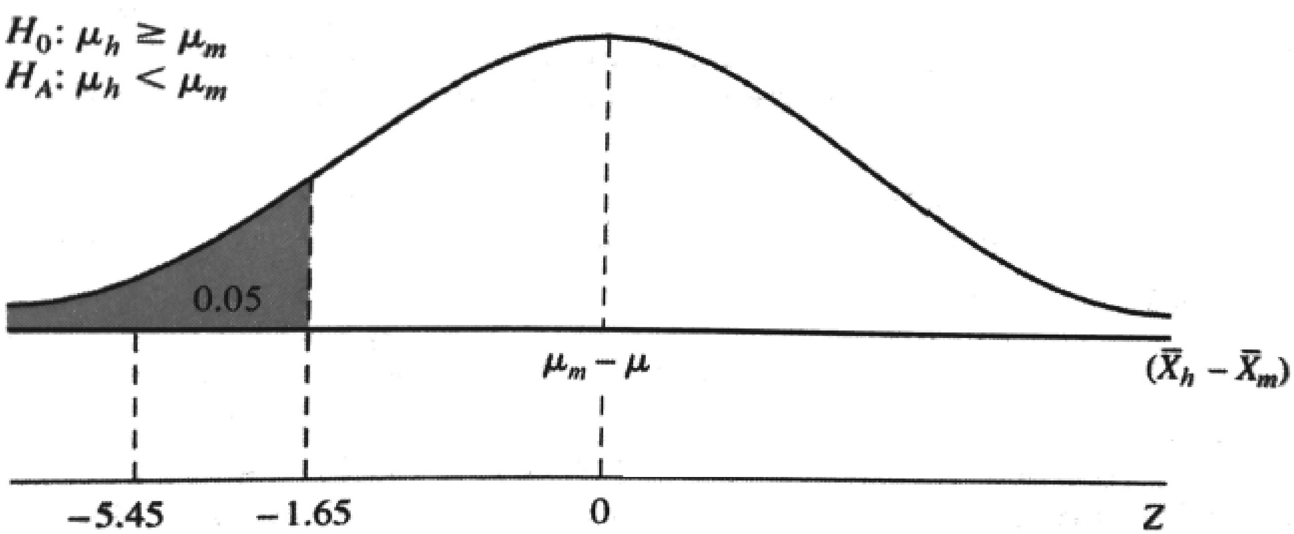


Si con el recorrido del campo de golf se hubiera planteado como hipótesis que los hombres toman menos tiempo que las mujeres, las hipótesis se plantearían como:

$$H_0: \mu_H \geq \ \mu_M$$

$$H_A: \mu_H < \ \mu_M$$

Se realizaría una prueba de cola a la izquierda. Si α = 0.05 se mantiene, la prueba de cola izquierda requiere un valor crítico de Z 0 -1.65. El valor Z = -5.45 calculado no cambia por lo tanto cae nuevamente en la zona de rechazo.



Ejercicio 9.6. En el ejercicio 9.1, los gerentes del Charles Schwab construyeron un estimado de intervalo del 99% para la diferencia entre los niveles de competencia promedio de los dos grupos de empleados. El resultado fue $-8.34 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 4.40$. Se supone que querían probar la hipótesis de que las competencias promedio eran iguales.

Pruebas con muestras pequeñas: la distribución t

De la misma manera que en el caso de los intervalos de confianza, las pruebas que involucran muestras pequeñas dependen de si las varianzas poblacionales pueden asumirse como iguales, o si permiten datos mancomunados.

Prueba de hipótesis con muestras pequeñas cuando $\boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$ desconocidas

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}}$$

Donde:

$\bar{X}_1 \, y \, \bar{X}_2$ son las medias muestrales

$\mu_1 - \mu_2$ son las medias poblacionales

s_p^2 es el estimado mancomunado de la varianza común de ambas poblaciones

n_1 y n_2 son los dos tamaños de las muestras

$$s_p^2 = \frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

Donde:

$s_1^2 \; y \; s_2^2$ son las dos varianzas muestrales

n_1 y n_2 son los dos tamaños de las muestras

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Regresando al ejercicio 9.2, un estimado del intervalo del 98% de la diferencia en los salarios promedio de los trabajadores en Atlanta y Virginia se calculó con base en:

Planta de Atlanta	Planta de Virginia
n_A = 23	n_V = 19
$\bar{X}_A$ = 17.53 por hora	$\bar{X}_V$ = 15.5 por hora
s_A^2 = 92.10	s_V^2 = 87.10

El intervalo era de $-5.09 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 9.15$. Si en lugar de un estimado por intervalo se hubiera querido realizar una prueba de hipótesis para medias iguales, entonces se tendría:

$$H_0: \mu_A = \mu_V$$

$$H_A: \mu_A \neq \mu_V$$

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}} = \frac{(17.53 - 15.5) - 0}{\sqrt{\frac{89.85}{23} + \frac{89.85}{19}}} = 0.69$$

Dado que α = 2% y que hay 23 + 19 -2 = 40 g.l, el valor crítico de t es 2.423.

La hipótesis nula por tanto no se rechaza. Parece que no hay diferencia en el salario promedio. Esta conclusión se confirma por el hecho de que el intervalo contenía cero.

Pruebas con muestras pequeñas con varianzas desiguales

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Donde:

$\bar{X}_1 y \bar{X}_2$ son las medias muestrales

$\mu_1 - \mu_2$ son las medias poblacionales

$s_1^2 \ y \ s_2^2$ son las dos varianzas muestrales

n_1 y n_2 son los dos tamaños de las muestras

Este valor de t se compara con el valor crítico de t con base en los grados de libertad determinados por:

$$g.l. = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{(s_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)}$$

Donde:

$s_1^2 \ y \ s_2^2$ son las dos varianzas muestrales

n_1 y n_2 son los dos tamaños de las muestras

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

En el ejercicio 9.3, un intervalo del 98% para la diferencia en la durabilidad promedio de los dos tipos de amortiguadores de caucho para coches de bebé, se estimó que era

$$0.5 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 7.1$$

Los resultados se basaron en los datos

Amortiguador 1	Amortiguador 2
n_1 = 13	n_2 = 10
$\bar{X}_1$ = 11.3 semanas	$\bar{X}_2$ = 7.5 semanas
s_1 = 3.5 semanas	s_2 = 2.7 semanas

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_A: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(11.3 - 7.5) - 0}{\sqrt{\frac{(3.5)^2}{13} + \frac{(2.7)^2}{10}}} = 2.94$$

Dado que α = 2% y los g.l son 20, el valor crítico de t es 2.528.

Regla de decisión: “No rechazar si -2.528 ≤ t ≤ 2.528. Rechazar si t < -2.528 o si t > 2.528”

Debido a que 2.94 > 2.528, la hipótesis nula de igualdad es rechazada. Dado $\bar{X}_1 > \bar{X}_2$,la evidencia sugiere que el tipo 1 deamortiguador de caucho para coche de bebé presenta mayor durabilidad. De nueva esta afirmación se confirma con el hecho de que el intervalo del ejercicio 9.3 no contenía cero.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Prueba de hipótesis con datos pareados

$$t = \frac{\bar{d} - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

Donde:

$\bar{d}$ es la media de las diferencias en las observaciones pareadas

$\mu_1 - \mu_2$ son las medias poblacionales

s_d es el error estándar de las diferencias en las observaciones pareadas

n es el tamaño de la muestras

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

En el ejercicio 9.4, Vicki Peplow preparó un estimado de intervalo del 95% para la diferencia en costos para procedimientos idénticos en los dos hospitales. El resultado fue

$$-146.33 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 28.47$$

Con base en n = 15, $\sum d_i = -884$, y $\sum d_i^2 = 400716$. Si la señora Peplow fuera a probar una hipótesis de igualdad, hallaría

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_A: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$t = \frac{\bar{d} - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{-58.93 - 0}{\frac{157.8}{\sqrt{15}}} = -1.44$$

Dado que α = 0.05 y los g.l son 14, el valor crítico de t es 2.145.

Regla de decisión: “No rechazar si -2.145 ≤ t ≤ 2.145. Rechazar si t < -2.145 o si t > 2.145”

Esto termina en un no rechazo de la hipótesis nula.

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Una prueba para la diferencia entre dos proporciones

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{s_{p_1 - p_2}}$$

Donde:

$p_1 y\ p_2$ son las proporciones de éxitos en las muestras

$\pi_1 y\ \pi_2$ son las proporciones de éxitos en las poblaciones

$s_{p_1 - p_2}$ es la desviación estándar de la diferencia entre las proporciones de éxitos en las muestras

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Un minorista desea probar la hipótesis de que la proporción de sus clientes masculinos, quienes compran a crédito, es igual a la proporción de mujeres que utilizan el crédito. Él selecciona 100 clientes hombres y encuentra que 57 compraron a crédito, mientras que 52 de las 110 mujeres lo hicieron. Utilice α = 1%.

$$H_0: \mu_h = \pi_m$$

$$H_A: \pi_h \neq \pi_m$$

$$s_{p_1 - p_2} = \sqrt{\frac{p_{1(1-p_1)}}{n_1} + \frac{p_{2(1-p_2)}}{n_2}} = \sqrt{\frac{0.57(0.43)}{100} + \frac{0.473(0.527)}{110}} = 0.069$$

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{s_{p_1 - p_2}} = \frac{(0.57 - 0.473) - 0}{0.069} = 1.41$$

Para un α = 0.01 el valor de Z es 2.58.

Regla de decisión: “No rechazar si -2.58 ≤ t ≤ 2.58. Rechazar si t < -2.58 o si t > 2.58”

Debido a que Z está entre $\pm$ 2.58, la hipótesis nula no se rechaza. El minorista no puede concluir a un nivel del 1% que las proporciones de hombres y mujeres que compran a crédito difieren.

Ejercicio 9.7. Recientemente Johnson Manufacturing ha experimentado un incremento en el número de unidades defectuosas. El supervisor de producción considera que el turno de la noche produce una proporción más elevada de defectos que los del turno de día. Para comparar la proporción de defectos, se toma una muestra de 500 unidades de la producción del turno de día y revela 14 defectos. Una muestra de 700 unidades del turno de la noche muestra 22 defectos. Si una proporción más grande de defectos se origina en la producción nocturna, el supervisor pretende instituir un programa de capacitación para que los trabajadores mejoren sus destrezas laborales. ¿A un nivel del 5%, debería implementarse el programa?

Comparación de la varianza de dos poblaciones normales

Cuando se comparan las varianzas de dos poblaciones, se toma una muestra de cada población. Las varianzas de la muestra sirven como estimados de sus varianzas poblacionales respectivas. Una distribución F se forma por la razón de estas dos varianzas muestrales.

Razón F utilizada para comparar dos varianzas poblacionales

$$F = \frac{S_L^2}{S_S^2}$$

Donde

S_L^2 es la más grande de las varianzas muestrales y S_S^2 la más pequeña.

El valor α: cuando se controla la razón F para asegurar que F > 1, se realiza la prueba de dos colas de la hipótesis $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ como si fuera una prueba de una cola. Por tanto, es necesario dividir por 2 el valor α.

El valor crítico de F se busca en las tablas de la distribución F, para ello se requiere conocer el valor de α/2, además ésta distribución cuenta con dos grados de libertad, $n_L - 1$ para el numerador y $n_s - 1$ para el denominador, en donde n_L y n_s son los tamaños de las muestras del numerador y denominador respectivamente.

Un consultor gerencial desea probar una hipótesis respecto a dos medias poblacionales. Sin embargo, antes de hacerlo debe decidir si hay alguna evidencia que sugiera que las varianzas poblacionales son iguales. Al recolectar sus datos, el consultor encuentra que:

	Muestra 1	Muestra 2
Tamaño muestral	10	10
Desviación estándar	12.2	15.4
Varianza	148.84	237.16

El consultor utiliza un $\alpha = 5\%$

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

Desea probar:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_A: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$F = \frac{S_L^2}{S_s^2} = \frac{(15.4)^2}{(12.2)^2} = 1.59$$

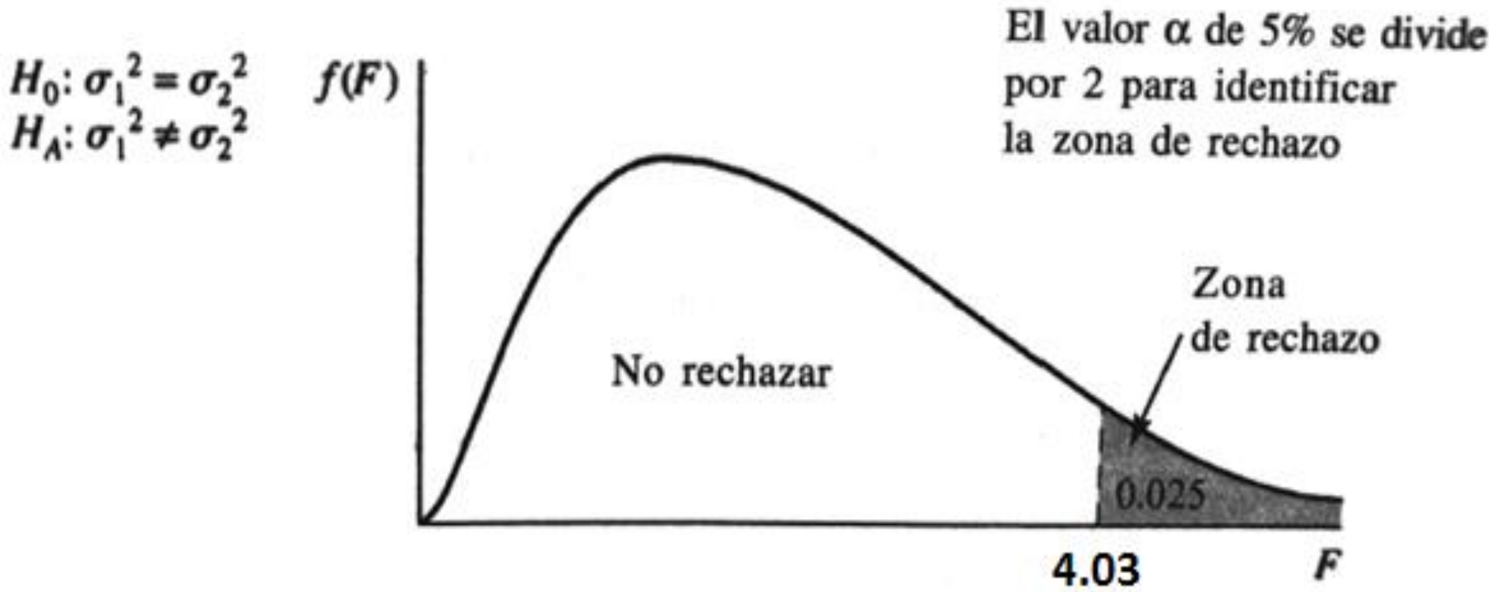
α/2 =0.025

g.l. n_L = $n_L - 1 = 10 - 1 = 9$

g.l. n_s = $n_s - 1 = 10 - 1 = 9$

F crítico = 4.03

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad



Regla de decisión: “No rechazar si F ≤ 4.03. Rechazar si F > 4.03”.

Debido a que F = 1.59 < 4.03, la hipótesis nula no se rechaza. El consultor puede proceder con la prueba de hipótesis respecto a las medias poblacionales bajo la suposición de que las varianzas son iguales.