Lois de probabilité et estimation

FX Jollois

TC - 2ème année - 2021/2022

Rappels de probabilités : Définitions

- **Expérience aléatoire** : expérience dont le résultat ne peut pas être déterminé *a priori*
- **Univers de l'expérience** : ensemble des résultats possibles (noté Ω)
- **Résultat élémentaire** : résultat possible de l'expérience (noté ω)
- **Ensemble des parties** : ensemble constitué de tous les sous-ensembles possible de Ω (noté $\mathcal{P}(\Omega)$)
- **Evènement** (aléatoire) : partie (sous-ensemble) de Ω (noté A)
  - On parle de *réalisation* lorsque l'évènement se produit (*i.e* le résultat ω appartient au sous-ensemble A)
  - $A = \Omega$ se réalise toujours
  - $A = \emptyset$ ne se réalise jamais
  - $A = \{\omega\}$ s'appelle donc un évènement élémentaire

Exemple simple

Lancer d'un dé à 6 faces (non pipé), avec un jeu où on doit faire un nombre pair

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{P}(\Omega)$: ensemble des 64 sous-ensembles possibles
    - $\emptyset$ et Ω
    - $\{1\}, \{2\}, \ldots$
    - $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots$
    - $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \ldots$
    - $\ldots$
- $A = \{2, 4, 6\}$

Rappels de probabilités : Evènements

- **Complémentaire** de A : évènement constitué des éléments de Ω non inclus dans A
  - $\bar{A} = \{\omega \in \Omega, \omega \notin A\}$
- **Union** de A et B : évènement constitué des éléments de A et des éléments de B (ou aux deux donc)
  - $A \cup B = \{w \in \Omega, \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$
- **Intersection** de A et B : événement constitué des éléments de Ω étant à la fois dans A et dans B
  - $A \cap B = \{w \in \Omega, \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$
- **Différence** entre A et B (non symétrique) : ensemble constitué des éléments de A n'étant pas dans B
  - $A \setminus B = \{w \in \Omega, \omega \in A \text{ et } \omega \notin B\}$

Rappels de probabilités : Evènements

- **Inclusion** : A est inclus dans B si tous les éléments de A sont dans B
  - $A \subset B \Leftrightarrow (\omega \in A \implies \omega \in B)$
- **Disjonction** (ou incompatibilité) : A et B sont disjoints s'il n'y aucun élément commun entre les deux
  - A et B disjoints $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
- **Système complet** d'évènements : $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ constitue un système complet s'ils forment une **partition** de Ω
  - Ils sont 2 à 2 incompatibles : $\forall p \neq q, A_p \cap A_q = \emptyset$
  - Leur réunion est égale à Ω : $\bigcup_{p=1}^{n} A_p = \Omega$

Rappels de probabilités

Probabilité : fonction permettant de mesurer la chance de réalisation d'un évènement

Quelques opérations :

- $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A) \leq P(B)$ si $A \subset B$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$

Rappels de probabilités

- Probabilité conditionnelle de A sachant B

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Indépendance de 2 évènements A et B

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A/B) = P(A)$$

$$P(B/A) = P(B)$$

  - 2 évènements disjoints ne sont pas considérés comme indépendant
- Théorème de Bayes

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

Variable aléatoire

Variable aléatoire

Mesure d'un phénomène (*variable*) dont le résultat est déterminée par une expérience *aléatoire* (*i.e.* dépendant du hasard)

- Exemples classiques : Pile/Face ou Lancer de dé
- Chaque résultat d'une expérience : **issue**
- Ensemble de toutes les issues possibles : **univers des possibles** Ω
- Sous-ensemble de Ω : **évènement**
  - Si ensemble à une seule issue *évènement élémentaire*
- Possibilité d'associer une valeur réelle à chaque issue
  - Notion de gain par exemple

Variable aléatoire et loi de probabilité

Définition

Une **variable aléatoire** (ou *v.a.*) **X** est une fonction définie sur Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$, à laquelle on associe une **loi de probabilité** (ou *distribution de probabilité*) dont la masse totale est égale à 1

- V.a. *continue* si les valeurs de X sont quantitatives continues
- V.a. *discrète* si le nombre de résultats est faible (ou si c'est qualitatif)

Variable aléatoire

Fonction de masse

Soit **X** une *v.a.* prenant des valeurs x_i discrètes.
La *fonction de masse* de la v.a. associe une probabilité $P(X = x_i)$ à chaque résultat élémentaire x_i

Densité de probabilité

Soit **X** une *v.a.* prenant des valeurs x réelles.
La *fonction de densité* permet de calculer la probabilité d'appartenance à un domaine $P(a \leq X \leq b)$ (c'est la dérivée de la fonction de répartition).

Fonction de répartition

Soit **X** une *v.a.* prenant des valeurs x réelles ou discrètes.
La *fonction de répartition* F_X de la v.a. est la fonction qui associe une probabilité $P(X \leq x)$ à tout x.

Exemple de cas discret

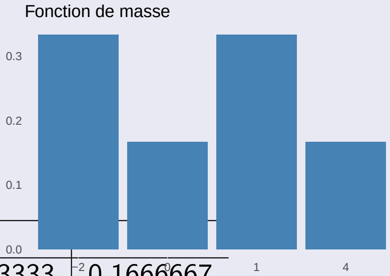
On lance un dé (à 6 faces), et on calcule notre gain avec

- $+1$ si c'est pair
- -2 si c'est ≤ 3
- $+5$ si c'est 2

x	1	2	3	4	5	6
gain	-2	4	-2	1	0	1

A noter

- V.a. **X** *discrète* : gain d'un lancer
- Ω : $1, \ldots, 6$
- **Issues** : $-2, 0, 1, 4$
- Loi de probabilité :



gain	-2	0	1	
p	0.3333333	0.1666667	0.3333333	0.1666667

Cas discret

- **Loi uniforme discrète** (résultats équi-probables)
- **Loi de Bernouilli**
- **Loi Binomiale**
- **Loi de Poisson**

Loi uniforme discrète

Définition

Soit **X** une *v.a.* prenant des valeurs k discrètes (avec $k = 1, \dots, n$).
X suit une **loi uniforme discrète** si pour chaque k, $P(X = k) = \frac{1}{n}$.

Exemple

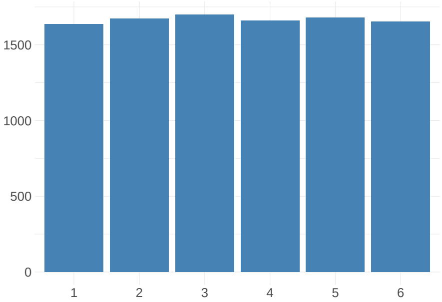
Dé à 6 faces (non pipé) $\rightarrow P(X = k) = \frac{1}{6}$ (avec $k = 1, \dots, 6$).

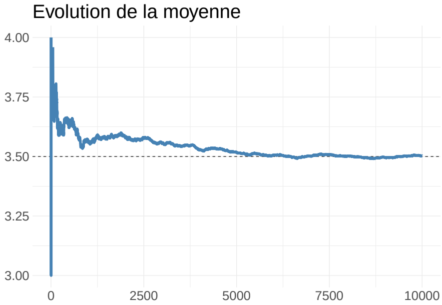
Espérance et variance

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Loi uniforme discrète

$\rightarrow$ Simulation avec 6 valeurs possibles, et 10^4 tirages.





Loi de Bernouilli

Définition

Soit **X** une *v.a.* prenant deux valeurs 0 ou 1
X suit une **loi de Bernouilli** si $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = q = 1 - p$.

Exemple

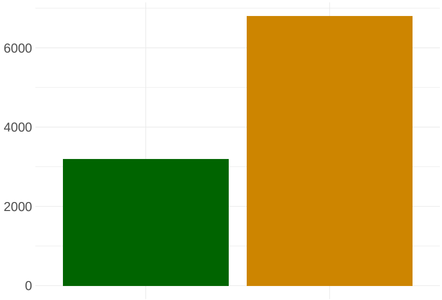
Pile ou face avec une pièce équilibrée

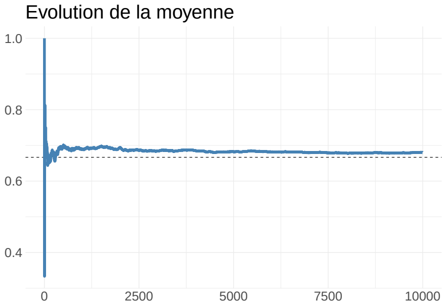
Espérance et Variance

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = pq$$

Loi de Bernouilli

$\rightarrow$ Simulation avec une urne avec 100 boules oranges et 50 boules vertes. On considère qu'on veut des boules oranges, donc $P(X = 1) = \frac{100}{150}$. On fait toujours 10^4 tirages, avec remise ici.





Loi Binomiale

C'est la loi de la somme de n v.a. indépendants de loi de Bernouilli.

Définition

Soit $\mathbf{X}$ une *v.a.* prenant les valeurs 0 (avec une probabilité p) ou 1 (avec une probabilité $1 - p$), et n le nombre de tirages réalisés.
$\mathbf{X}$ suit une **loi Binomiale** lorsque $P(X = k) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k}$.
$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ se nomme le coefficient binomiale, et représente le nombre d'ensemble à k éléments qu'on peut obtenir dans l'ensemble des n éléments.

Exemple

Avec 100 tirages à pile ou face, on se pose la question de savoir combien de fois on aura pile.

Espérance et Variance

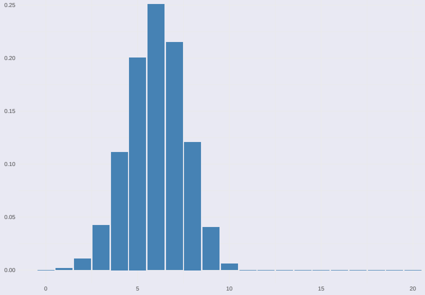
$$E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1 - p)$$

Loi Binomiale

Fonction de masse

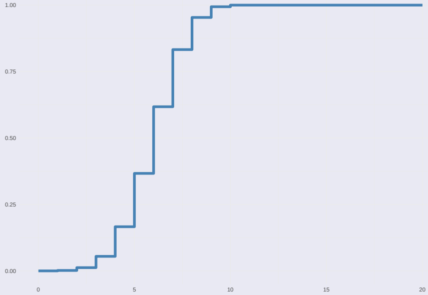
$$P(X = k) = f(k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$$

Exemple avec $n = 10$ et $p = .6$



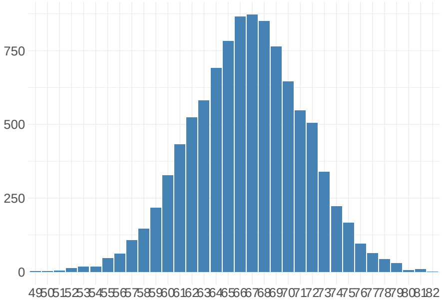
Fonction de répartition

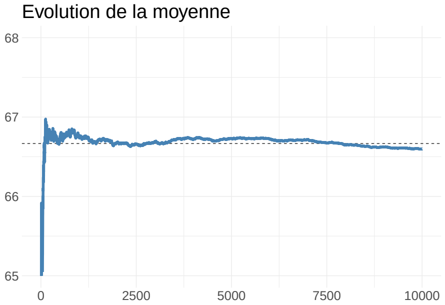
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq 0 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} f(k) & \text{pour } 0 \leq x \leq \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$



Loi Binomiale

→ Simulation avec notre urne avec 100 boules oranges et 50 boules vertes. Chaque essai comportera 100 tirages avec remise. On fait toujours 10^4 essais. On cherche à savoir combien on aura de boules oranges dans ces 100 tirages.





Loi de Poisson

Définition

Soit **X** une *v.a.* prenant des valeurs k discrètes (avec $k = 1, 2, \ldots$).

X suit une **loi de Poisson** $Pois(\lambda)$ si pour chaque k, $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k}$ où

- e est la base de l'exponentielle
- λ représente le nombre moyen d'occurences dans un intervalle de temps fixé

Exemple

Nombre de personnes à l'arrêt d'un bus après une certaine durée

Espérance et Variance

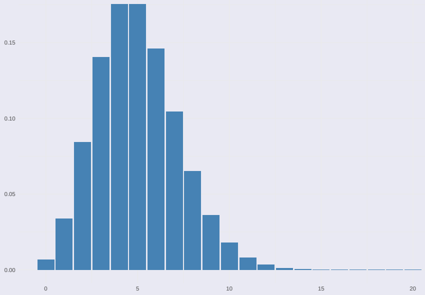
$$E(X) = \lambda \text{ et } V(X) = \lambda$$

Loi de Poisson

Fonction de masse

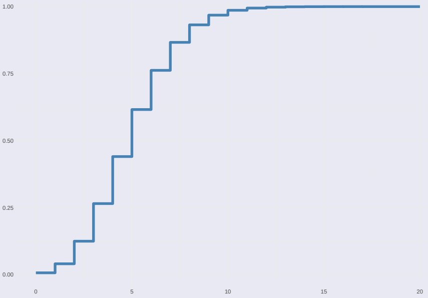
$$P(X = k) = f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k}$$

Exemple avec $\lambda = 5$



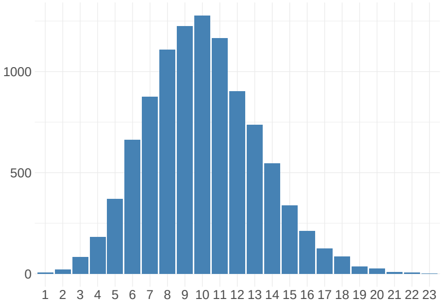
Fonction de répartition

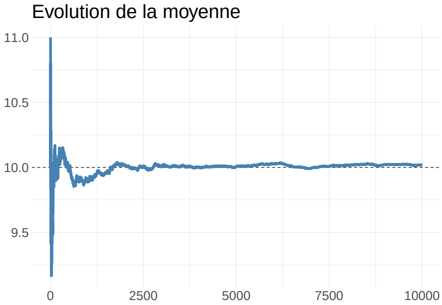
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq 0 \\ \frac{\Gamma(\lfloor k+1 \rfloor, \lambda)}{\lfloor k \rfloor !} & \text{sinon} \end{cases}$$



Loi de Poisson

$\rightarrow$ Simulation en considérant un arrêt de bus. On considère que 2 personnes viennent toutes les minutes. On étudie le nombre de personnes sur une durée de 5 minutes. On choisit donc $\lambda = 10$.





Cas continu

- Loi uniforme
- Loi Normale

Loi uniforme continue

Définition

Soit **X** une *v.a.* prenant des valeurs x réelles dans $[a; b]$.
X suit une **loi uniforme continue** $U(a, b)$ si tous les intervalles de même longueur ont la même probabilité

Exemple

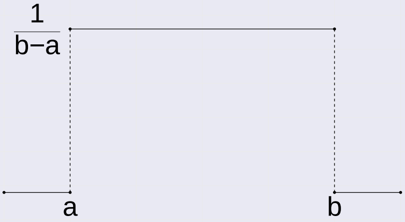
Espérance, Variance

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ et } V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Loi uniforme continue

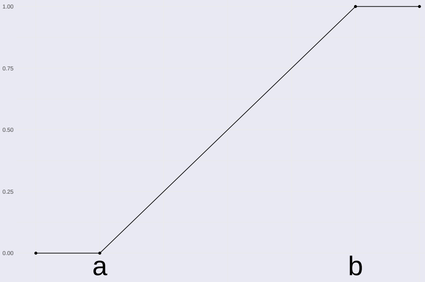
Densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pour } x \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



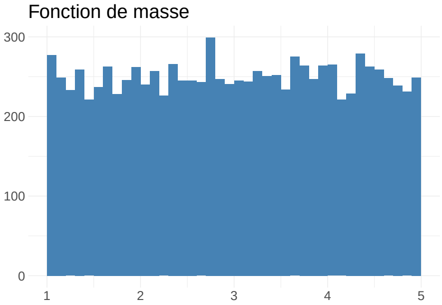
Fonction de répartition

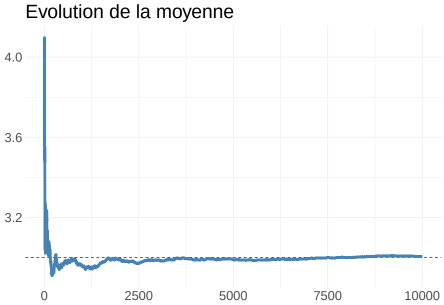
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pour } x \in [a;b] \\ 1 & \text{pour } x > b \end{cases}$$



Loi uniforme continue

→ Simulation sur l'intervalle $[1; 5]$





Loi Normale

Définition

Soit **X** une *v.a.* prenant des valeurs x réelles.
X suit une **loi Normale** $N(\mu, \sigma^2)$ de moyenne μ et de variance σ^2.

Exemple

Mesure de la taille d'une population

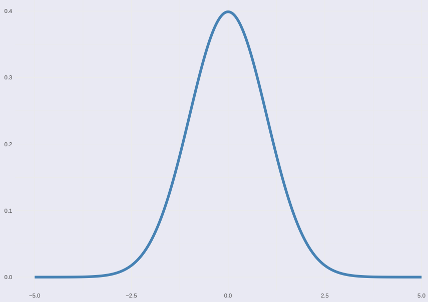
Espérance et Variance

$$E(X) = \mu \text{ et } V(X) = \sigma^2$$

Loi Normale

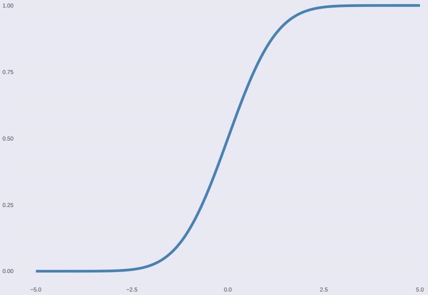
Densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



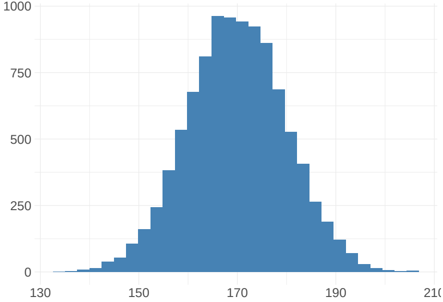
Fonction de répartition

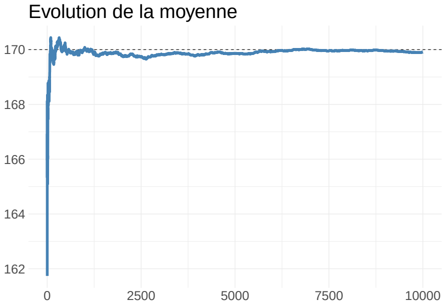
$$F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \text{erf}\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$



Loi Normale

$\rightarrow$ Simulation d'une loi Normale de moyenne $\mu = 170$ et d'écart-type 10





Exercice

Plus grand nombre tiré

On joue à un jeu avec deux dés (non pipés), pendant lequel on note le plus grand chiffre obtenu. Quelle est la loi de la variable aléatoire ?

Solution

Plus grand nombre tiré

On définit Ω avec :

$$\Omega = \{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\ldots\}$$

On peut donc faire le tableau suivant, avec en ligne les résultats du dé A et en colonnes ceux du dé B. Chaque cellule représente donc le plus grand des 2 chiffres obtenus.

	b=1	b=2	b=3	b=4	b=5	b=6
a=1	1	2	3	4	5	6
a=2	2	2	3	4	5	6
a=3	3	3	3	4	5	6
a=4	4	4	4	4	5	6
a=5	5	5	5	5	5	6
a=6	6	6	6	6	6	6

Solution

Plus grand nombre tiré

On obtient ainsi la loi de probabilité suivante :

Plus grand	Nb	Px	P
1	1	1/36	0.03
2	3	3/36	0.08
3	5	5/36	0.14
4	7	7/36	0.19
5	9	9/36	0.25
6	11	11/36	0.31