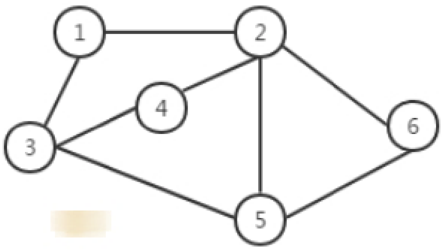
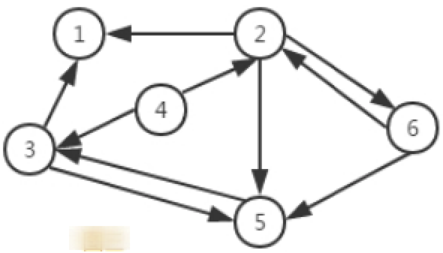
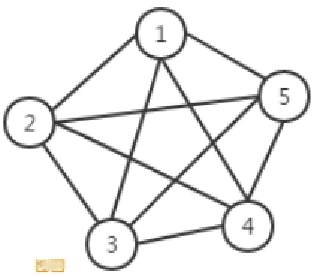
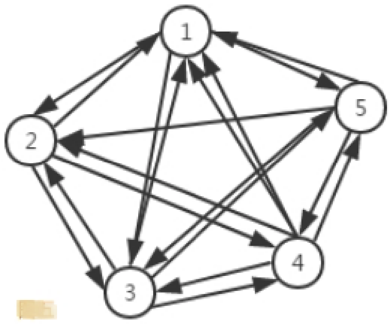
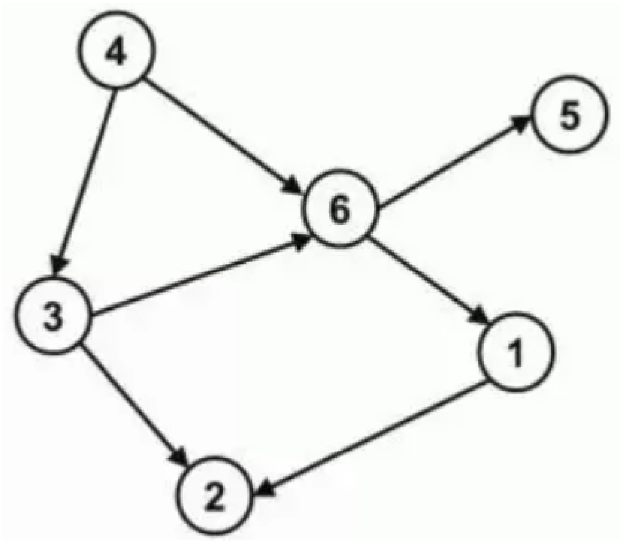
十一、图论

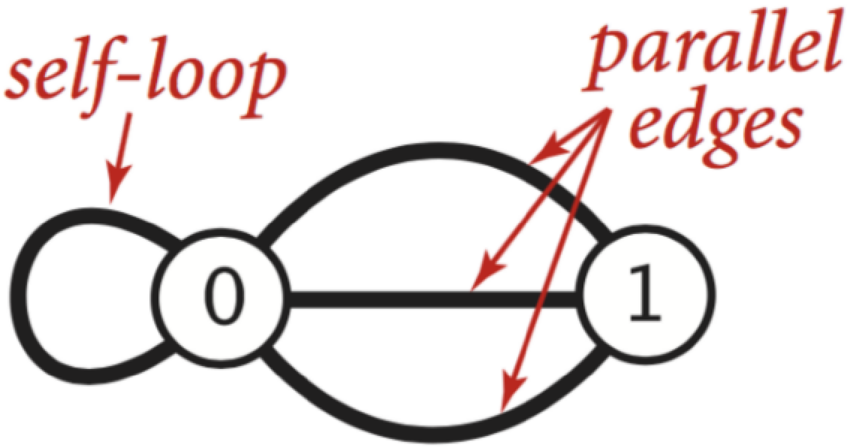
11.1 图的基本概念

- 图是一种网状的数据结构，其中的结点之间的关系是任意的，即图中任何两个结点之间都可能直接相关。
- **顶点**：图中的数据元素。设它的集合用 `V(Vertex)` 表示。
- **边**：**顶点**之间的**关系**的集合用 `E(edge)` 来表示：
- **顶点的度**：**连接顶点**的**边**的**数量**称为该顶点的度。顶点的度在有向图和无向图中具有不同的表示。
  - 对于**无向图**，一个顶点 `V` 的度比较简单，其是连接该顶点的**边的数量**，记为 `D(V)` 。
  - 对于**有向图**要稍复杂些，根据连接顶点 `V` 的边的方向性，一个顶点的度有**入度**和**出度**之分。
    - **入度**是以该顶点为端点的**入边**数量， 记为ID(V)。
    - **出度**是以该顶点为端点的**出边**数量， 记为OD(V)。
- **无向图(Undigraph)**：若图中**任意**$< v_1, v_2 > \in E$必能推导出$< v2, v1 > \in E$，此时的图称为**无向图。**
  - 无向图用无序对(v_1, v_2)，表示v_1和v_2之间的一条**双向边** `(Edge)` 。
  - 
- **有向图(Digraph)**：如果图中 $v_1, v_2 \in V$，若存在$< v_1, v_2 > \in E$，而 $< v_2, v_1 > \notin E$ 此时的图称为**有向图**
  - 有向图用有序对$< v_1, v_2 >$，表示v_1和v_2之间的一条**单向边** `(Edge)` 。
  - 
- **无向完全图**：如果在一个无向图中， **任意两个顶点**之间都存在一条**双向边**，那么这种图结构称为无向完全图
  - 理论上可以证明，对于一个包含 `N` 个顶点的无向完全图，其总边数为 `N(N-1)/2` 。
  - 
- **有向完全图**：如果在一个有向图中，**任意两个顶点**之间都存在**方向相反**的**两条边**，那么这种图结构称为有向完全图。
  - 理论上可以证明，对于一个包含 `N` 的顶点的有向完全图，其总的边数为 `N(N-1)` 。这是无向完全图的两倍，这个也很好理解，因为每两个顶点之间需要两条边。

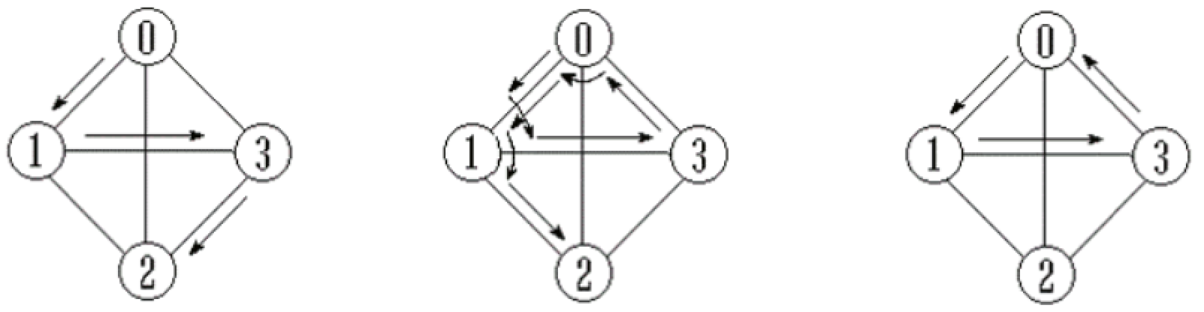
- 

- **有向无环图（DAG图）**
  - 如果一个有向图无法从某个顶点出发经过若干条边回到该点，则这个图是一个有向无环图。
  - 树型有向图一定是一个有向无环图。
  - 

- **自环和平行边**：对于节点与节点之间存在两种边，这两种边相对比较特殊
  - **自环边** `(self-loop)` ：节点自身的边，**自己指向自己。**
  - **平行边**（parallel-edges）：两个节点之间存在多个边相连接，也叫**重边。**

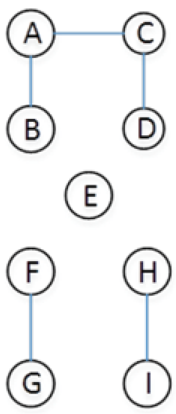


- **简单图 (Simple Graph)**：**不**存在**自环**和**重边**的图叫简单图。
- **路径、简单路径、回路**：
  - 路径：无向图中从一个节点到达另一个节点所经过的节点序列
  - 简单路径：路径中的各顶点不重复的路径。
  - 回路：路径上的第一个顶点和最后一个顶点重合，这样的路径叫做回路。
  - 下图箭头表示路径

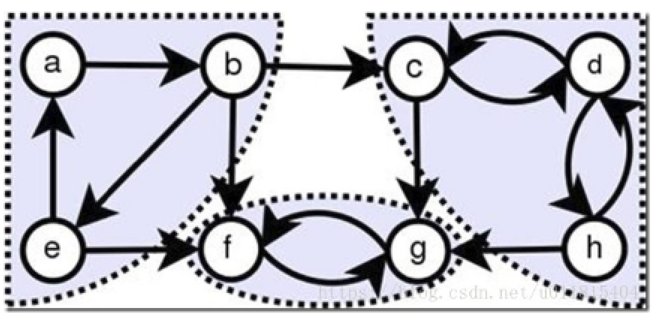


(a) 简单路径　　(b) 非简单路径　　(c) 回路

- **连通图与连通分量**
  - **连通图**：**无向图** `G` 中，若对**任意**两点，从顶点 V_i 到顶点 V_j 有路径，则称 V_i 和 V_j 是连通的，图 `G` 是一连通图。
  - **连通分量**：**无向图** `G` 的**连通子图**称为 `G` 的连通分量
    - 任何**连通图**的**连通分量**只有**一个**，即其自身，而**非连通**的无向图有**多个**连通分量
    - 以下图为例，总共有四个连通分量，分别是： `ABCD` 、 `E` 、 `FG` 、 `HI` 。



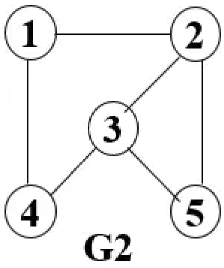
- **强连通图与强连通分量**
  - **强连通图**：有向图 `G` 中，若对**任意两点**，从顶点V_i 到顶点 V_j ，都存在从 V_i到 V_j 以及从V_j 到 V_i 的路径，则称 `G` 是强连通图
  - **强连通分量**：有向图 `G` 的**强连通子图**称为 `G` 的**强连通分量。**
    - **强连通图**只有**一个强连通分量**，即其自身，非强连通的有向图有多个强连通分量。
    - 以下图为例，总共有三个强连通分量，分别是： `abe` 、 `fg` 、 `cdh` 。



11.2 图的存储

11.2.1 邻接矩阵

- 设图 `G` 有$n(n \geq 1)$ 个顶点，则邻接矩阵是一个 `n` 阶方阵。
- 当矩阵中的 `[i,j] !=0` （下标从 `1` 开始），代表其对应的第 `i` 个顶点与第 `j` 个顶点是连接的。

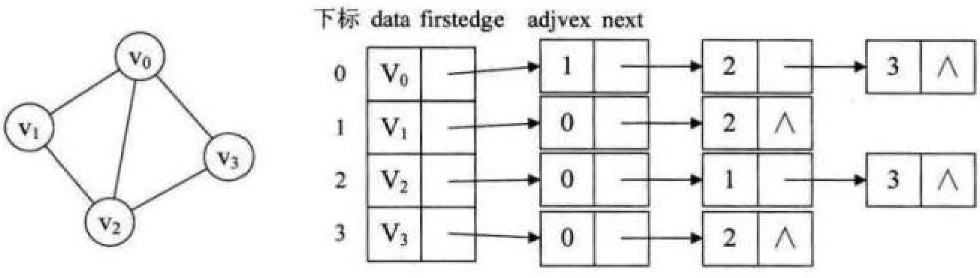


$$\begin{array}{c|ccccc} & ① & ② & ③ & ④ & ⑤ \\ ① & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ ② & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ ③ & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ ④ & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ ⑤ & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

- 邻接矩阵的特点：
  - **无向图**的邻接矩阵是**对称矩阵**， `n` 个顶点的无向图需要 `n*(n+1)/2` 个空间大小。
  - **有向图**的邻接矩阵**不一定对称**， `n` 个顶点的有向图需要n^2的存储空间。
  - **无向图**中第 `i` 行的**非零**元素的个数为顶点V_i 的**度**。
  - **有向图中**第 `i` 行的**非零**元素的个数为顶点 V_i 的**出度**，第 `i` 列的**非零**元素的个数为顶点 V_i 的**入度** 。
  - 一般情况下，空间复杂度为 $O(N^2)$。

11.2.2 邻接表（边表）

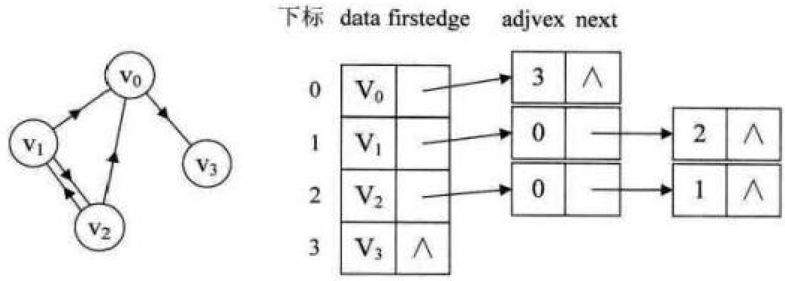
- 把数组与链表相结合的存储方法称为邻接表。邻接表为图 `G` 中的每一个顶点建立一个**单链表**，每条链表的结点元素为与**该顶点连接的顶点。**
- 邻接表的处理办法：
  - 顶点用一个一维指针数组存储（较容易读取顶点信息），作为表头，每个数据元素还需要存储指向第一个邻接点的指针，以便于查找该顶点的边信息（更多情况下，表头不需要保存其他信息，因此可以直接定义一个结点类型的指针数组）。
  - 每个顶点的所有邻接点构成一个链表。
  - 空间复杂度为 $O(V+E)$，V 表示结点个数，E 表示边数。
- 无向图的邻接表结构



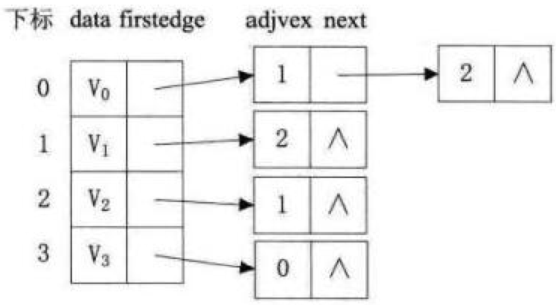
上图中 `data` 是数据域，存储顶点 `u` 的信息； `firstedge` 是指针域，指向与结点 `u` 相连的第一个结点，即此顶点的第一个邻接点。

边表结点由 `adjvex` 和 `next` 两个域组成。 `adjvex` 是邻接点域，存储某顶点 `u` 的邻接点在顶点 `v` ， `next` 则存储指向邻接表中下一个结点的指针，如果不存在下一个结点（即没有边），则指针为 `NULL` 。

- 有向图的邻接表和逆邻接表：



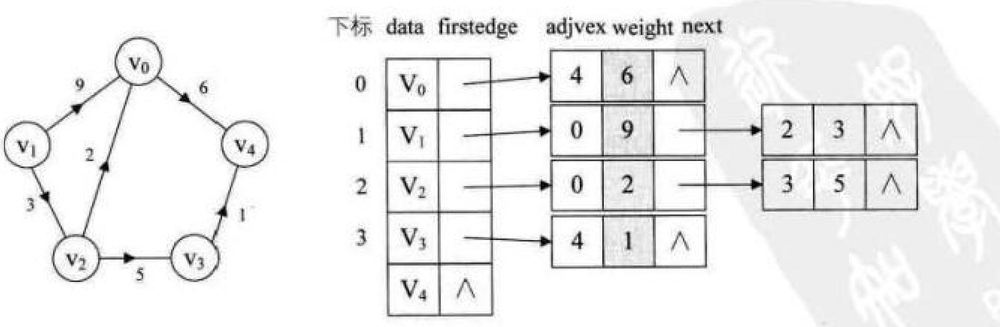
邻接表



逆邻接表

有向图由于有方向，我们是以顶点为弧尾来存储邻接表的，这样很容易就可以得到每个顶点的出度。但也有时为了便于确定顶点的入度或以顶点为弧头的弧，我们可以建立一个有向图的逆邻接表，即对每个顶点 `u` 都建立一个链接为 `u` 为弧头的表。

- 对于带权值的网图，可以在边表结点定义中再增加一个weight的数据域，存储权值信息即可。



- 邻接表创建代码——链表（动态建点）：

```
/*
 * 向邻接表中添加一条边，从 from 到 to，权值为 w
 * next 为指向与 from 相邻的下一个结点（另一条边）的指针
 */
struct Edge { // 保存链表中的每个结点
    int from, to, w; // 通常 from 可以不用，因为表头表示了边的起点编号
    Edge* next;
};
Edge* head[MAXN]; // 全局变量，定义表头指针数组，大小为结点个数，初始值为 NULL

void AddEdge(int from, int to, int w) {
    Edge* p = new Edge; // 新建一个结点，并将信息进行赋值
    p->from = from;
    p->to = to;
    p->w = w;
    p->next = head[from]; // 先将该结点的 next 指向表头指向的结点
    head[from] = p; // 更改表头的指向，即可将新结点串进来
}
```

- 邻接表创建代码——前向星（数组实现）：

```
/*
 * 向邻接表中添加一条边，从 from 到 to，权值为 w
 * next 为保存与 from 相邻的下一个结点（另一条边）在数组中的位置
 */
struct Edge { // 保存链表中的每个结点
    int from, to, w; // 通常 from 可以不用，因为表头表示了边的起点编号
    int next;
```

```
};
int head[MAXN]; // 定义表头指针数组，大小为结点个数，初始值为 -1
int tot = 0; // 记录总边数，同时也表示新加的边在数组中的下标
Edge e[MAXM]; // 定义边数组，如果是无向图，大小为给出边数的 2 倍

void AddEdge(int from, int to, int w) {
    e[tot].from = from; // 将信息赋值到 tot 对应的位置
    e[tot].to = to;
    e[tot].w = w;
    e[tot].next = head[from]; // 更新新加结点的 next 指向
    head[from] = tot; // 更新表头的指向
    tot++; // 边数加 1，也作为下一条边的放入的位置
}
```

- 邻接表创建代码——vector 实现：

```
/*
 * 向邻接表中添加一条边，从 from 到 to，权值为 w
 */
struct Edge { // 保存链表中的每个结点
    int from, to, w; // 通常 from 可以不用，因为表头表示了边的起点编号
    Edge(){} // 不带参的构造函数
    Edge(int x, int y, int z) { // 带参构造函数，后面使用方便
        from = x; to = y; w = z;
    }
};

vector<Edge> e[MAXN]; // 定义 vector 数组，大小为结点个数，其中的每一个 vector 模拟一个链表
void AddEdge(int from, int to, int w) {
    e[from].push_back(Edge(from, to, w)); // 将新结点加入到 from 对应的链表
}
```

注意：如果要保存的图是无向图，则需要双向加边，例如添加一条边 (from, to, w)，则需要调用函数 AddEdge(from, to, w); AddEdge(to, from, w); 否则只需要调用一次。

11.2.3 遍历某个结点的邻接点

通常我们需要将与某个结点相邻的所有结点遍历一遍，针对图的不同的存储方式，遍历的方式也不相同。

1. 邻接矩阵存储的遍历

```
// 输出与结点 u 相邻的所有结点，简单明了，不解释
for (int i = 1; i <= n; ++i) {
    if (g[u][i] != -1) { // 假设我们用 -1 表示 u 与 i 之间没有边
        printf("%d ", i);
    }
}
```

2. 邻接表存储的遍历

   这种存图的方式是我们常用的，所以一定要熟练掌握。根据上面给出的不同的构建方法，给出示例代码来输出 结点 u 的所有邻接点编号。

   - 链表（指针实现）：

```
// 从表头开始，访问完一个邻接点后，通过 next 调到下一个邻接点
for (Edge* p = head[u]; p != NULL; p = p->next) {
    printf("%d ", p->to);
}
```

   - 前向星（数组实现）：

```
// 从表头开始，访问完一个邻接点后，通过 next 调到下一个邻接点
for (int i = head[u]; i != -1; i = e[i].next) {
    printf("%d ", e[i].to);
}
```

   - vector 实现：

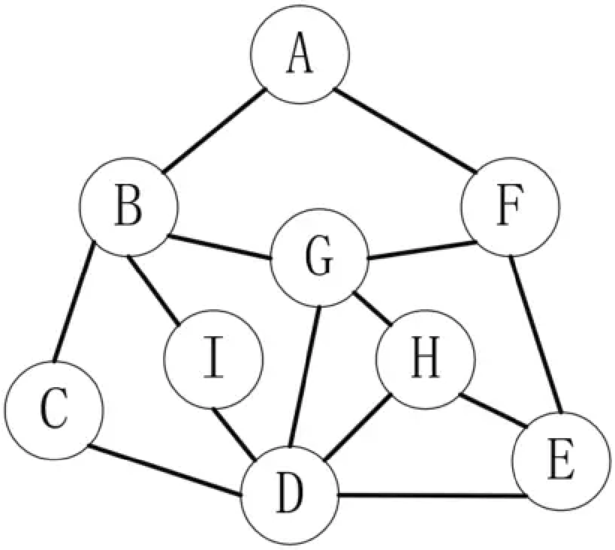
```
// 从表头开始，访问完一个邻接点后，通过 next 调到下一个邻接点
int gs = e[u].size();
for (int i = 0; i < gs; ++i) {
    printf("%d ", e[i].to);
}
```

11.3 图的遍历

- 从图中某一顶点出发访遍图中其余顶点，且使**每一个顶点**仅被**访问一次**，这一过程就叫做**图的遍历。**
- 根据遍历路径的不同，通常有两种遍历图的方法：**深度优先遍历**和**广度优先遍历。**

11.3.1 深度优先遍历

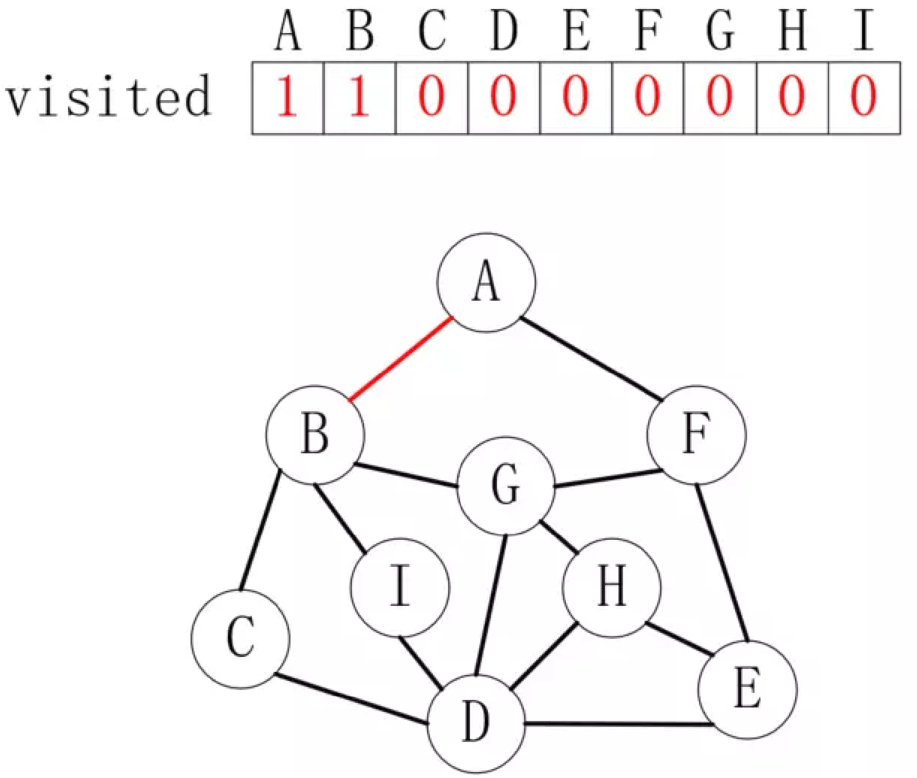
- 深度优先遍历 `(Depth_First_Search)` 也称为深度优先搜索，简称为 `DFS` 。
- 它是从图中某个顶点 `v` 出发，访问此顶点，然后从 `v` 的未被访问的邻接点出发深度优先遍历图，直至图中所有和 `v` 有路径相通的顶点都被访问到。
- 对于非连通图，只需要对它的连通分量分别进行深度优先遍历即可。接下来我们以一个示例演示图的深度优先遍历。如下图所示：



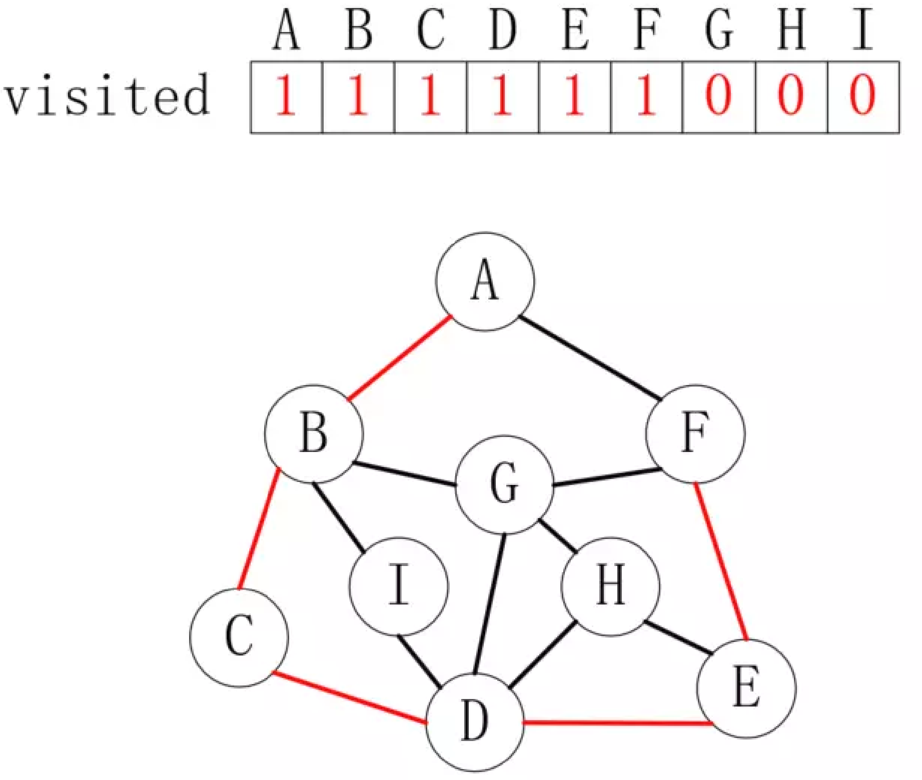
  - 在开始进行遍历之前，我们还要准备一个数组，用来记录已经访问过的元素。其中 `0` 代表未访问， `1` 代表已访问，如下所示：

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
visited	0	0	0	0	0	0	0	0	0

  - 假设我们是在走迷宫， `A` 是入口，每次都向右手边前进。首先从 `A` 走到 `B` ，结果如下：

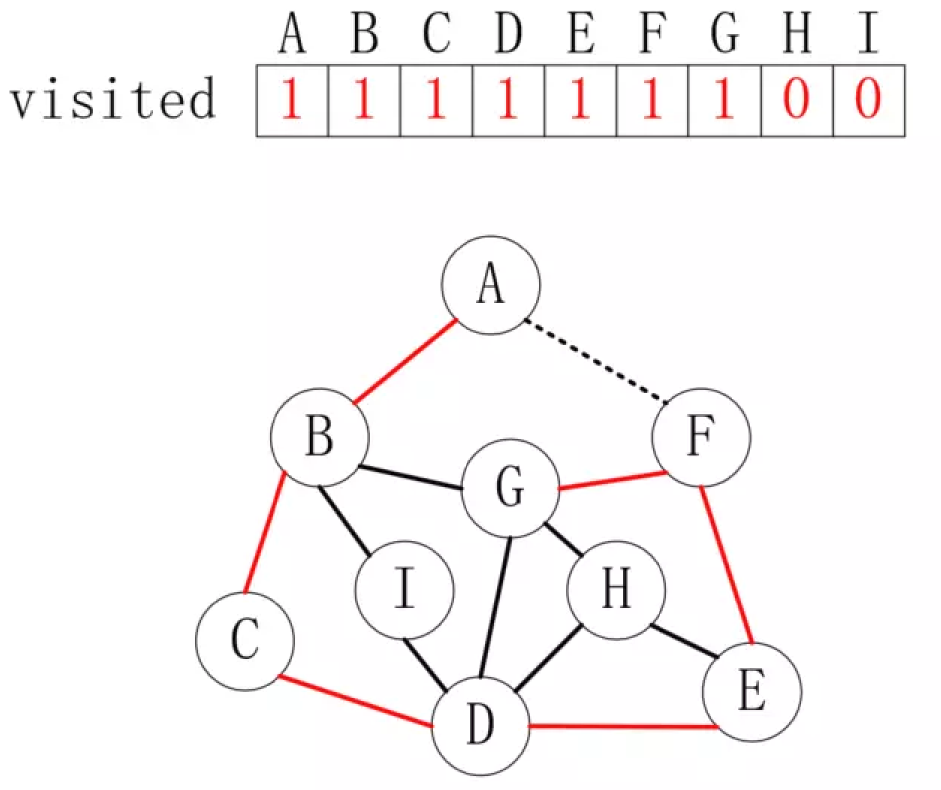


- B 之后有三个路，我们依然选择最右边，如此下去，直到走到 F ，如下所示：



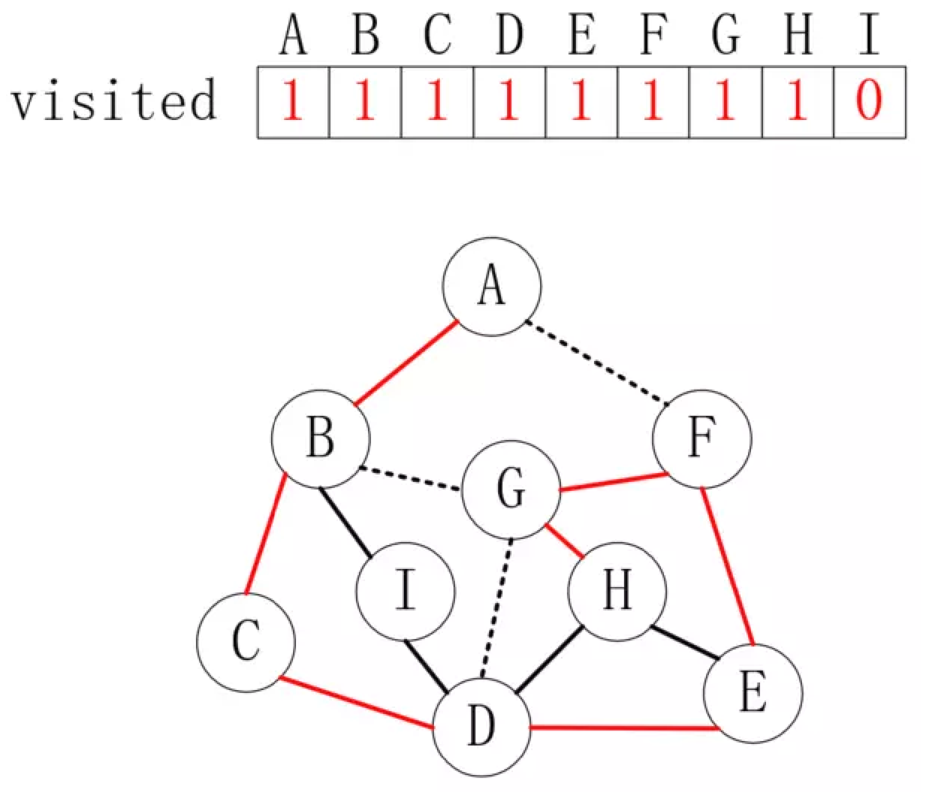
B-F

- 到达 F 后，如果我们继续按照向右走的原则，就会再次访问 A ，但 A 已访问，则访问另一个邻接点 G ，如下所示：



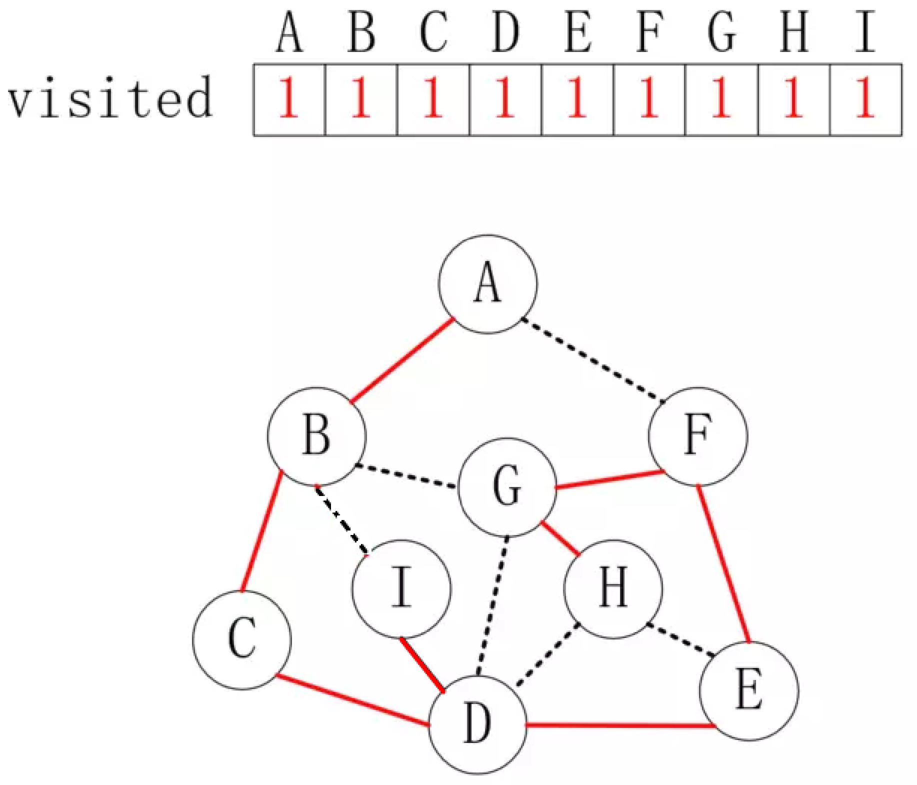
F-G

- 到达 `G` 后，可以发现 `B` 和 `D` 都走过了，这时候走到 `H` ，如下所示：



G-H

- 到达 `H` 后， `H` 的邻接点都已访问过了，所以我们从 `H` 退回到上层节点 `G` ，发现 `G,F,E` 的邻接点全部已经访问过了，直到退回到 `D` 时，发现 `I` 还没走过，于是访问顶点 `I` ，如下所示：



B-I

  - 同理，访问 `I` 之后，发现与 `I` 连通的顶点都访问过了，所以再向前回退，直到回到顶点 `A` ，发现全部顶点都访问过了，至此遍历完毕。

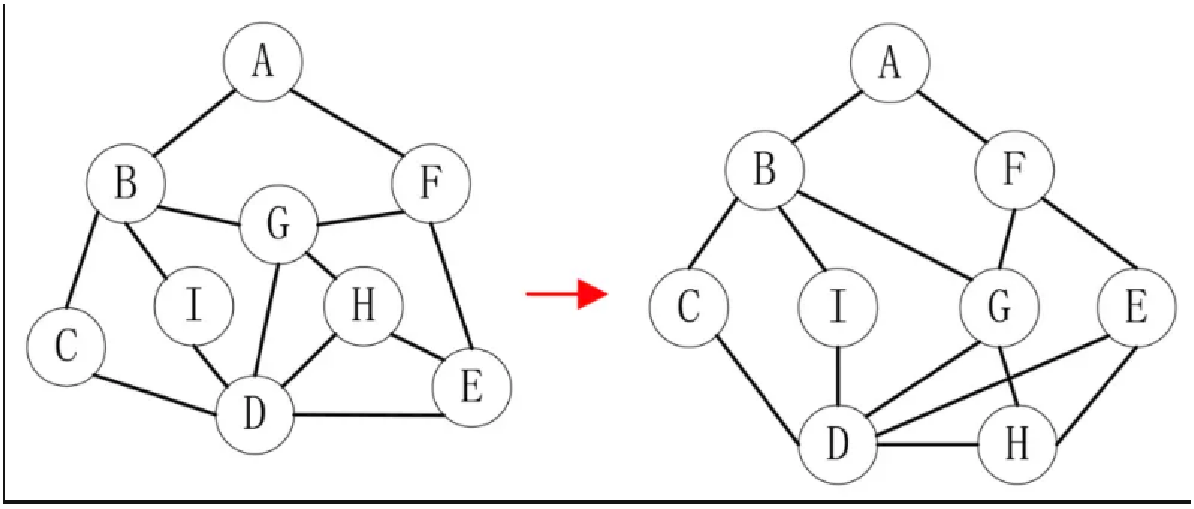
- 下面给出的深度优先遍历的参考程序，假设图以邻接表存储（其他情况自己处理即可）

```
void dfs(int i) { //邻接表存储图，访问点 i
    visited[i] = true; //标记为已经访问过
    for (Edge* p = head[i]; p != NULL; p = p->next) { // 深度优先遍历 i 的所有邻接点
        if (!visited[p->to]) {
            dfs(p->to);
        }
    }
}
// 假设全局变量已经定义好了
int main() {
    memset(visited, false, sizeof(visited));
    // 如果是有向图，必须用循环才能保证所有的结点都遍历到
    // 如果是连通的无向图，从任一结点开始即可
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        if (!visited[i]) {
            dfs(i);
        }
    }
    return 0;
}
```

11.3.2 广度优先搜索

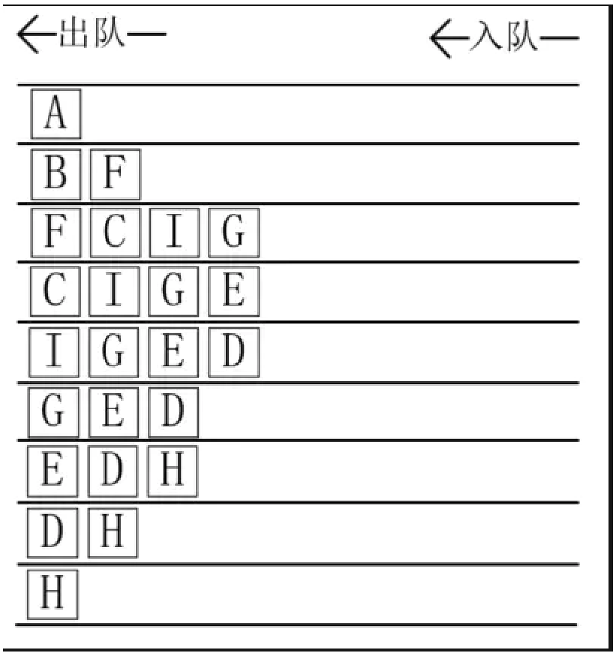
广度优先遍历并不常用，从编程复杂度的角度考虑，通常采用的是深度优先遍历。

深度优先遍历可以认为是纵向遍历图，而广度优先遍历（Breadth_First_Search）则是横向进行遍历。还以上图为例，不过为了方便查看，我们把上图调整为如下样式：



我们依然以 A 为起点，把和 A 邻接的 B 和 F 放在第二层，把和 B、F 邻接的 C、I、G、E 放在第三层，剩下的放在第四层。

广度优先遍历就是从上到下一层一层进行遍历，这和树的层序遍历很像。我们依然借助一个队列来完成遍历过程，因为和树的层序遍历很像，这里只展示结果，如下所示：



广度优先遍历和广搜 `BFS` 相似，因此使用广度优先遍历一张图并不需要掌握什么新的知识，在原有的广度优先搜索的基础上，做一点小小的修改，就成了广度优先遍历算法。

```
void bfs(int s) { //邻接表存储图，访问点 s
    queue<int> que;
    visited[s] = true; // 将起点 s 标记并放到队列
    que.push(s);

    while (!que.empty()) { //
        int now = que.front();
        printf("%d ", now);
        for (Edge* p = head[now]; p != NULL; p = p->next) { // 广度优先遍历邻接点
            if (!visited[p->to]) {
                que.push(p->to); // 找到未被访问过的邻接点加入队列，并标记
                visited[p->to] = true;
            }
        }
    }
}

// 假设全局变量已经定义好了
int main() {
    memset(visited, false, sizeof(visited));
    // 如果是有向图，必须用循环才能保证所有的结点都遍历到
    // 如果是连通的无向图，从任一结点开始即可
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        if (!visited[i]) {
            bfs(i);
```

```
        }
    }
    return 0;
}
```

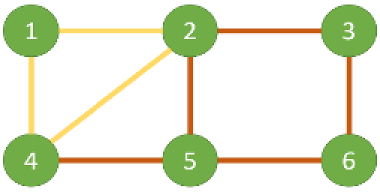
11.4 欧拉路

11.4.1 基本概念

- 如果一个图存在一笔画，则**一笔画的路径**叫做**欧拉路**，如果**最后**又**回到起点**，那这个路径叫做**欧拉回路。**
- **欧拉图**：**存在欧拉回路**的图称作欧拉图。
- **半欧拉图**：**存在欧拉路径**但**不存在欧拉回路**的图称作半欧拉图。
- **欧拉图、半欧拉图的判定**
  - **无向图**
    - **奇点**：跟这个**点相连**的**边数**目有**奇数个**的点。对于能够一笔画的图，我们有以下两个定理。
    - **定理1**：无向图 `G` 为**欧拉图**，当且仅当 `G` 为**连通图**，且所有顶点度为偶数，即**奇点**为**零。**
    - **定理2**：无向图 `G` 为**半欧拉图**，当且仅当 `G` 为**连通图**，且除了两个顶点的度为奇数外，其它顶点度为偶数，即存在**两个奇点。**
    - **半欧拉图**的欧拉路径**起点**必须是一个**奇点**，**终点**是另一个**奇点**，欧拉图任一点均可成为起点。
    - 两个定理的正确性是显而易见的，既然**每条边**都要**经过一次**，那么对于**欧拉路**，**除了起点**和终**点外**，**每个点**如果**进入了一次**，显然一定要**出去一次**，显然**是偶点。**
    - 对于**欧拉回路**，每个点**进入**和**出去次数**一定都是**相等**的，显然没有奇点。
  - **有向图**
    - **基图**：**忽略**有向图所有**边**的**方向**，得到的无向图称为该有向图的基图。
    - **定理1**：有向图 `G` 为**欧拉图**，当且仅当 `G` 的**基图连通**，且**所有顶点**的**入度等于出度。**
    - **定理2**：有向图 `G` 为**半欧拉图**，当且仅当 `G` 的**基图连通**，且存在顶点 `u` 的**入度**比**出度大** `1` ， `v` 的**入度**比**出度小** `1` ,其它所有顶点的**入度等于出度。**

11.4.2 Hierholzer 算法

- 一个无向图如果存在欧拉路径，那么我们如何遍历才能找到一条欧拉路经呢？

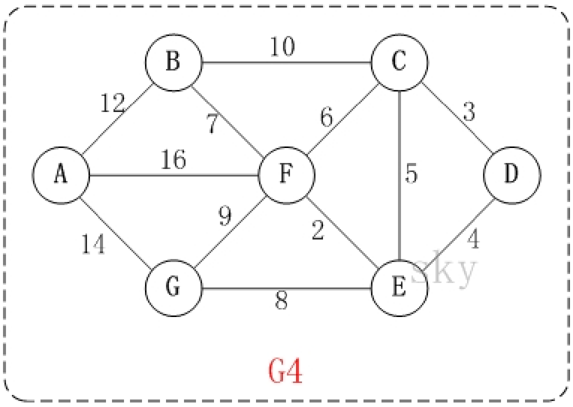


- 假设上图我们其中一种走法是：我们从点 `4` 开始，一笔划到达了点 `5` ，形成路径 `4-5-2-3-6-5` 。此时我们把这条路径去掉，则剩下三条边， `2-4-1-2` 可以一笔画出。显然上面走法不是欧拉路
- 我们用 `+` 代表入栈， `-` 代表出栈，把刚才的路经重新描述一下：
  - `4+ 5+ 2+ 3+ 6+ 5+ 5- 6- 3- 1+ 4+ 2+ 2- 4- 1- 2- 5- 4-`
  - 把所有出栈的记录连接起来，得到 `5-6-3-2-4-1-2-5-4`
  - 我们把上面的出栈序列倒序输出，正好是一个从 `4` 开始到 `5` 结束的一条欧拉回路。
- 算法实现：

```
#include <cstdio>
#include <cstring>
const int maxn = 500 + 5,maxe=2*1024+5;//无向图一定注意边数要翻倍
struct Node{//节点定义
    int to,next;
}a[maxe];//存储边
int Head[maxn],len=0;//len记录边数,Head[u]表示以u为起点的边在边表中的编号。
int Path[maxe],cnt=0;//记录回路的节点, 每条边要访问一次所以点数=边数+1
bool vis[maxe];//记录边是否已访问
void Insert(int x,int y){//边表的建立x起点, y为终点
    a[len].to=y;a[len].next=Head[x];Head[x]=len++;
}//要用位运算标记无向图的正反两条边, 所以边的编号从0开始。
void Dfs(int u){//递归的最大深度为边数, 当边数较大时容易爆栈, 可以改为非递归
    for(int i=Head[u];i!=-1;i=a[i].next){
```

```
        if(vis[i])continue;//第i条边已访问
        vis[i]=vis[i^1]=1;//i是i^1的反向边，把这两条边设为已访问
        Head[u]=i;//优化，前面的边已经走过了，没有必要每次从最后一个位置往前找了
        int v=a[i].to;Dfs(v);//从第i条边的终点深搜
        i=Head[u];//优化，有可能v的子树中也更新过了u的共点边
    }
    Path[++cnt]=u;//u回溯时记录路径经过点u
}
void Euler(int u){////递归的最大深度为边数，当边数较大时容易爆栈，可以改为非递归
    std::stack<int> q;
    q.push(u);//把起点u进栈
    while(!q.empty()){
        int i,x=q.top();
        for(i=Head[x];i!=-1 && vis[i];i=a[i].next);
        //跳出循环时i==-1或第i条边已访问即vis[i]=1
        if(i==-1){//说明x已不存在未访问的邻接边
            Path[++cnt]=x;q.pop();
        }
        else{//说明第i条未访问
            q.push(a[i].to);//第i条边的去边进栈
            vis[i]=vis[i^1]=1;//标记第i条边及其反向边
            Head[x]=a[i].next;//指向下一条未访问过的邻接边
        }
    }
}
void Solve(){
    int m;scanf("%d",&m);
    memset(Head,-1,sizeof(Head));//边的编号从0开始，所以要初始化为-1
    for(int i=1;i<=m;++i){
        int x,y;scanf("%d%d",&x,&y);
        Insert(x,y);Insert(y,x);//无向图要加双向，有向图只加一遍
    }
    Dfs(1);//欧拉图随便一个点都可以作为源点
    for(int i=cnt;i>0;--i)//逆序输出路径
        printf("%d\n",Path[i]);
}
int main(){
    Solve();
    return 0;
}
```

11.5 最短路

- 最短路径问题是图的又一个比较典型的应用问题。例如，某一地区的一个公路网，给定了该网内的 `n` 个城市以及这些城市之间的相通公路的距离，能否找到城市 `A` 到城市 `B` 之间一条距离最近的通路呢？
- 如果将**城市**用**点**表示，城市间的**公路**用**边**表示，公路的**长度**作为**边**的**权**值，那么，这个问题就可归结为在网中，求点 `A` 到点 `B` 的所有路径中边的**权值**之**和最短**的那一条**路径。**
- 这条路径就是两点之间的最短路径，并称路径上的**第一个顶点**为**源点**(`Sourse`)，**最后一个顶点**为**终点**(`Destination`)。
- 

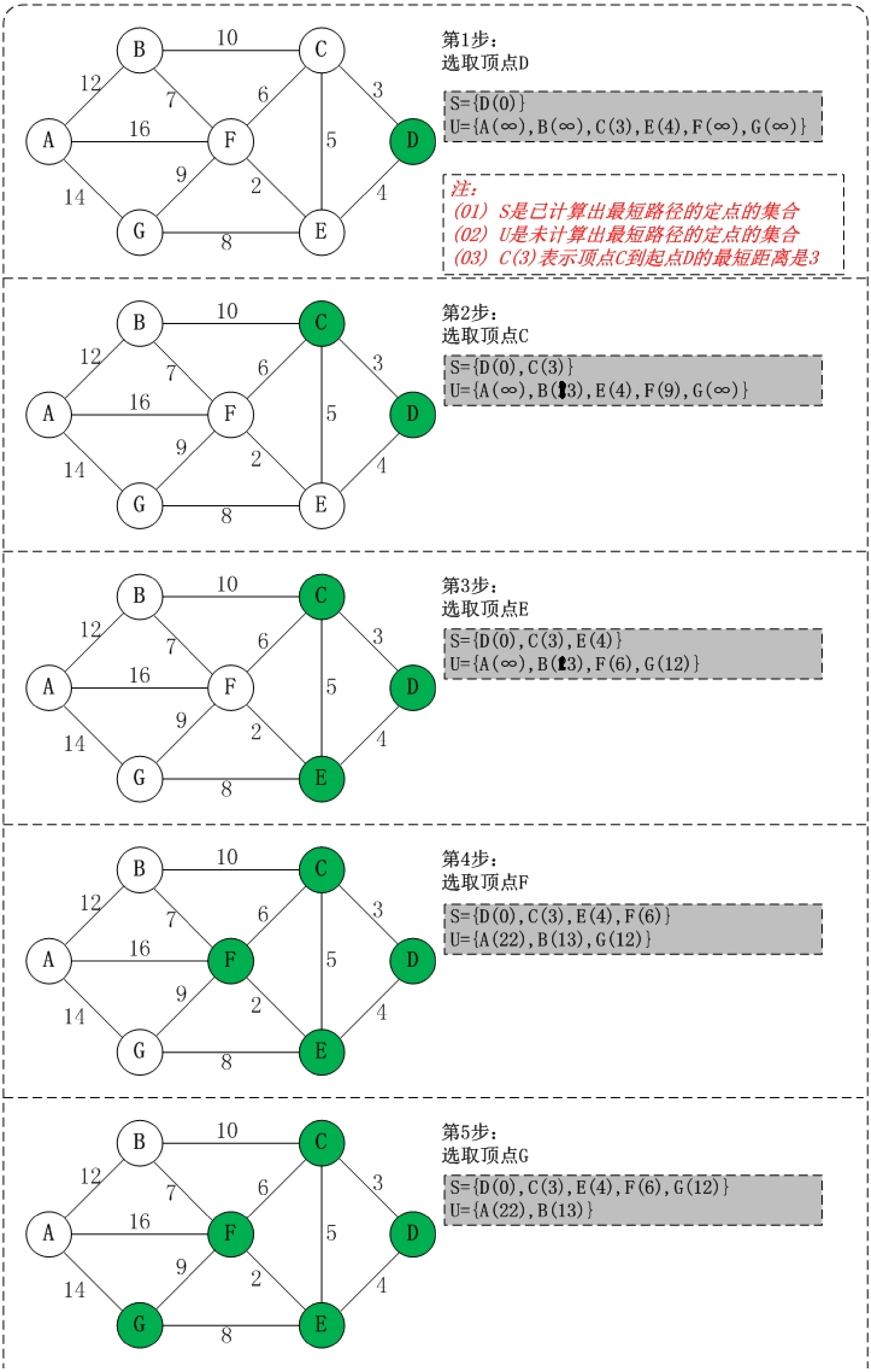
11.5.1 迪杰斯特拉(Dijkstra)

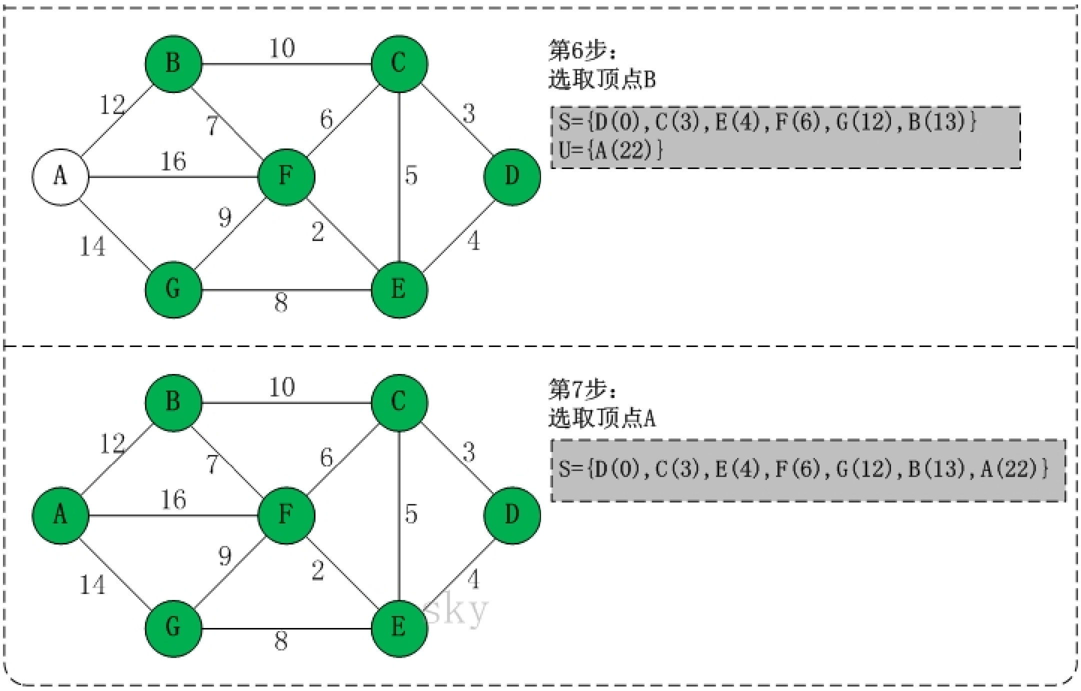
- 迪杰斯特拉(**Dijkstra**)算法是典型最短路径算法，用于计算一个节点到其他节点的最短路径。
- 它的主要特点是以起始点为中心向外层层扩展(广度优先搜索思想)，直到扩展到终点为止。

11.5.1.1 算法思路

- 通过 `Dijkstra` 计算图 `G` 中的最短路径时，需要指定起点 `s` (即从顶点 `s` 开始计算)。

- 引入两个集合 `(S , U)` ， `S` 集合包含**已求出**的**最短路径**的**点**（以及相应的最短长度）， `U` 集合包含未求出最短路径的点。
- 操作步骤:
  - 初始时， `S` 只包含起点 `s` ； `U` 包含除 `s` 外的其他顶点，且 `U` 中顶点的距离为：起点 `s` 到该顶点的距离(s的邻接点的距离为边权，其他点为∞)
  - 从 `U` 中选出距离源点 `s` 最短的顶点 `k` ，并将顶点 `k` 加入到 `S` 中；同时，从 `U` 中移除顶点 `k` 。
  - 松弛操作：利用 `k` 更新 `U` 中各个顶点到起点 `s` 的距离。
  - 重复步骤 `2)` 和 `3)` ，直到遍历完所有顶点。
- 图解





- 代码实现

```
#include <cstdio>
#include <cstring>
const int maxn = 100 + 5,Inf=0x3f3f3f3f;//两个Inf相加不会超int
int n,a[maxn][maxn],dis[maxn],path[maxn];//dis[i]表示i到源点的最短距离,path[i]记录路径
void Dijs(int s){//源点s
    bool f[maxn];memset(f,0,sizeof(f));//f[i]表示i到源点s的最短距离已求出
    f[s]=1;//源点进确定集合
    for(int i=1;i<=n;++i){//除邻接点外，其他点离源点距离初始化为Inf
        if(a[s][i]){
            dis[i]=a[s][i];path[i]=s;
        }
        else dis[i]=Inf;
    }
    dis[s]=0;path[s]=s;//源点s到自己的距离为0
    for(int i=1;i<n;++i){//每次能确定一个点到源点的最短路，n-1次能求出所有
        int Min=Inf,k=0;//每次从不在确定集合的点中找出离源点最近的点
        for(int j=1;j<=n;++j){
            if(!f[j] && Min>dis[j]){
                Min=dis[j];k=j;//k记录最近的点
            }
        }
        f[k]=1;//k到源点距离已确定，进集合
        for(int j=1;j<=n;++j)//经过k进行松弛操作
            if(a[k][j] && dis[j]>dis[k]+a[k][j]){
                dis[j]=dis[k]+a[k][j];path[j]=k;
            }
    }
}
void Solve(){
    int m;scanf("%d%d",&n,&m);//n个顶点，m条边
    for(int i=1;i<=m;++i){
        int x,y,z;scanf("%d%d%d",&x,&y,&z);
        a[x][y]=a[y][x]=z;//x到y的距离为z
    }
    Dijs(4);//节点4为源点
    for(int i=1;i<=n;++i)//输出每个点到源点的最短距离
        printf("%d ",dis[i]);
}
int main(){
    Solve();
    eturn 0;
}
/*数据为上图样例
7 12
1 2 12
1 6 16
1 7 14
2 3 10
```

```
2 6 7
3 4 3
3 5 5
3 6 6
4 5 4
5 6 2
5 7 8
6 7 9
*/
```

- 时间效率 $O(n^2)$，`n-1` 次的松弛必不可少，但需要 `O(n)` 的时间效率去找最小的边，再用 `O(n)` 的效率去松弛，对这一部分我们可以用堆进行优化。

11.5.1.2 堆优化的 `Dijkstra`

- 对于上一节普通的最短路算法我们可以进行如下优化：
  - 对于松弛部分，我们可以用邻接表的存储方式进行优化，对一个节点较多的图来说一般来说邻接表的遍历方式是常数的，远远小于 `O(n)` 。
  - 对求集合外的节点到源点的最小值，我们可以建一个小根堆，这样我们时间消耗就是进堆的操作，为 `O(ElogE)` ，我们可以用有限队列进行操作。
- 代码实现

```
#include <bits/stdc++.h>
const int maxn=1000+5,maxe=1e4*2+5;
struct Node{
    int num,dis;
    Node(){};
    Node(int x,int y){num=x;dis=y;}
    bool operator <(const Node &a)const{//优先队列默认大根堆所以重载
        return dis > a.dis;//小根堆
    }
};
struct Edge{//边节点
    int to,dis,next;
}a[maxe];
int dis[maxn],Head[maxn],len;//dis[i]表示i到源点的最短距离，Head, len同边表
void Insert(int x,int y,int z){//边表创建,此处最小边编号为1
    a[++len].to=y;a[len].dis=z;a[len].next=Head[x];Head[x]=len;
}
void Dijs(int x){
    std::priority_queue <Node> q;//优先队列，以距离为key的小根堆
    bool f[maxn];memset(f,0,sizeof(f));//f[i]标记是否在确认集合
    memset(dis,0x3f,sizeof(dis));//初始化其他节点到源点的最小距离为无穷大
    dis[x]=0;//源点到自己的距离为0
    q.push(Node(x,0));//源点进队
    while(!q.empty()){//队列非空说明还有点可以松弛
        Node t=q.top();q.pop();//取出堆顶的点并出堆，必然到源点的距离最小
        int k=t.num;
        if(f[k])continue;//如果k到源点的最短路已经求出，说明其邻接点已经松弛
        f[k]=1;//k点进确定集合
        for(int i=Head[k];i;i=a[i].next){//以k为中间点松弛k的邻接点
            int y=a[i].to,d;
            if(dis[y]>(d=dis[k]+a[i].dis)){
                dis[y]=d;q.push(Node(y,d));//松弛成功k的邻接点y进堆
            }
        }
    }
}
void Solve(){
    int m,n;scanf("%d%d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=m;++i){
        int x,y,z;scanf("%d%d%d",&x,&y,&z);
        Insert(x,y,z);Insert(y,x,z);//无向图
    }
    Dijs(4);
    for(int i=1;i<=n;++i)
        printf("%d ",dis[i]);
}
int main(){
    Solve();
    return 0;
}
```

- 迪杰斯拉算法的核心思想是贪心，此贪心思想是建立在权值为正的基础上，所以此算法无法解决权值为负的问题。

11.5.2 `Bellman-Ford` 算法

- **算法的基本思路**：以任意顺序考虑图的边，沿着各条边进行松弛操作，重复操作 `V` 次(`V` 表示图中顶点的个数)。
- 对有向带权图 `G = (V, E)` ，从顶点 `s` 起始，利用 `Bellman-Ford` 算法求解各顶点最短距离，算法描述如下：

```
for(i = 0;i < V;i++)
    for each edge(u,v) ∈ E //对每一条边
        Relax(u,v);//松弛操作
```

  - 算法对**每条边做松弛**操作，并且**重复** `V` 次，所以算法可以在于 `O(V*E)` 成正比的时间内解决单源最短路径问题。

- 代码实现：

```
#include <bits/stdc++.h>
const int maxn = 10000 + 5,maxe=1e5 + 5;
struct Node{
    int from,to,dis;//不需要边表，注意跟边表的区别
}a[2*maxe];//无向图
int d[maxn];//d[i]表示i到源点的最短距离
int m,n,len=0;
void Insert(int x,int y,int z){//建边
    a[++len].from=x;a[len].to=y;a[len].dis=z;
}
bool Check(){//对所有边再做一次松弛，如果成功返回1
    for(int i=1;i<=len;++i){//遍历每条边
        int x=a[i].from,y=a[i].to,z=a[i].dis;
        if(d[y]>d[x]+z)return 1;//松弛成功
    }
    return 0;
}
void Bellman_ford(int u){
    memset(d,0x3f,sizeof(d));//初始化其他点到源点的最短距离为无穷大
    d[u]=0;//源点到自己的最短距离为0
    for(int i=1;i<n;++i){//对每条边做n-1次松弛
        for(int j=1;j<=len;++j){//遍历每条边
            int x=a[j].from,y=a[j].to,z=a[j].dis;
            d[y]=std::min(d[y],d[x]+z);//松弛操作
        }
    }
}
void Solve(){
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=m;++i){
        int x,y,z;scanf("%d%d%d",&x,&y,&z);
        Insert(x,y,z);Insert(y,x,z);
    }
    Bellman_ford(4);
    if(Check()){//松弛完n-1次后如果还能松弛成功说明有负环回路
        printf("NO\n");return;
    }//无法松弛说明不存在负权回路
    for(int i=1;i<=n;++i)
        printf("%d ",d[i]);
}
int main(){
    Solve();
    return 0;
}
```

- `Dijkstra` 算法和 `Bellman-ford` 算法的区别：
  - `Dijkstra` 算法在求解的过程中，源点到集合 `S` 内各顶点的最短路径一旦求出，则之后就不变了，修改的仅仅是源点到未确定最短距离的集合 `T` 中各顶点的最短路路径长度。
  - `Bellman-ford` 算法在求解过程中，源点到各顶点的最短距离知道算法结束才能确定下来。
  - `Bellman-ford` 能解决负权问题，也可以判断图中是否存在负环，而 `Dijkstra` 只能解决权值为正的问题。

11.5.3 `spfa` 算法

- `spfa` 可以看成是 `Bellman-ford` 的队列优化版本。
- `Bellman` 每一轮用所有边来进行松弛操作可以多确定一个点的最短路径，但是用每次都把所有边拿来松弛太浪费了。

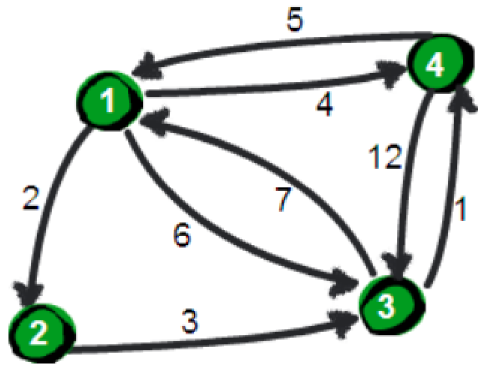
- 只有那些松弛成功的点才有可能松弛它的邻接点，所以我们可以用一个队列记录松弛成功点的，依次用这些点去松弛邻接点。
- 代码实现：

```
#include <bits/stdc++.h>
const int maxn = 10000 + 5,maxe=1e5 + 5;
struct Node{
    int to,dis,next;
}a[maxe];
int d[maxn],head[maxn];//d[i]表示i到源点的最短距离
int m,n,len=0,cnt[maxn];//cnt[i]记录节点i进队次数
bool inq[maxn];//inq[i]=0表示节点i在队列
void Insert(int x,int y,int z){
    a[++len].to=y;a[len].dis=z;a[len].next=head[x];head[x]=len;
}
bool spfa(int s){//返回0表示不存在最短路，即有负环
    memset(d,0x3f,sizeof(d));d[s]=0;//除了源点，其他点到源点最短距离为无穷
    std::queue<int>q;q.push(s);inq[s]=1;//源点入队
    while(!q.empty()){
        int u=q.front();q.pop();//取出队首，并出队
        inq[u]=0;//顶点可以反复入队，所以出队后要把标记设为0
        for(int i=head[u];i;i=a[i].next){
            int v=a[i].to,dis;
            if(d[v]>(dis=d[u]+a[i].dis)){//松弛成功
                d[v]=dis;
                if(!inq[v]){//节点v不在队列中
                    if(++cnt[v]>=n)return 0;//一个点被松弛n次，肯定有负环
                    q.push(v);inq[v]=1;
                }
            }
        }
    }
    return 1;
}
void Solve(){
    scanf("%d%d",&n,&m);
    for(int i=1;i<=m;++i){
        int x,y,z;scanf("%d%d%d",&x,&y,&z);
        Insert(x,y,z);Insert(y,x,z);
    }
    if(!spfa(4)){
        printf("NO\n");return;
    }
    for(int i=1;i<=n;++i)
        printf("%d ",d[i]);
    }
int main(){
    Solve();
    return 0;
}
```

- `spfa` 算法对随机数据效果很好，甚至比堆优化的 `dijkstra` 还要快。但如果在处理非负权的最短路时不建议使用 `spfa` 容易被卡。
- `spfa` 有一般有三种简单的优化，这三种优化都是把队列换成双端队列，但都容易被正对性数据卡掉，
  - `LLL` **优化**：每次将入队结点距离和队内**距离平均值比较**，如果**更大**则插入至**队尾**，否则插入**队首**。
    - `Hack` ：向 `1` 连接一条权值巨大的边，这样 `LLL` 就失效了。
  - `SLF` **优化**：每次将入队结点距离和**队首比较**，如果**更大**则插入至**队尾**，否则插入**队首**。
    - Hack：使用链套菊花的方法，在链上用几个并列在一起的小边权边就能欺骗算法多次进入菊花。
  - `SLF` **带容错**：每次将入队结点距离和**队首比较**，如果比**队首大超过一定值**则插入至**队尾**，否则插入**队首**。
    - 卡法是卡 SLF 的做法，并开大边权，权值总和最好超过 10^{12}。

11.5.4 `Floyd` 算法

- `Floyd` 算法（ `Floyd-Warshall algorithm` ）又称为弗洛伊德算法、插点法，是解决给定的加权图中顶点间的最短路径的一种算法。
- 该算法名称以创始人之一、1978年图灵奖获得者、斯坦福大学计算机科学系教授罗伯特·弗洛伊德命名。
- 适用范围：**无负权回路**即可，边权可正可负，运行一次算法即可求得任意两点间最短路。
- **问题模型**：
  - 某个国家有 `n` 个城市，这 `n` 个城市间有 `m` 条公路相连，第 `i` 条公路长度为 a_i 。我们现在需要求任意两个城市之间的最短路程，也就是求任意两个点之间的最短路径。这个问题这也被称为“多源最短路径”问题。



- 上图中有 `4` 个城市 `8` 条公路，公路上的数字表示这条公路的长短。请注意这些公路是单向的。
- `Floyd` 算法的数据的存储，我们一般用邻接矩阵，即一个二维数组来存储。

	1	2	3	4
1	0	2	6	4
2	∞	0	3	∞
3	7	∞	0	1
4	5	∞	12	0

- 算法分析：
  - 如果要让任意两点 (例如从顶点 `A` 点到顶点 `B`) 之间的路程变短，只能引入第三个点 (顶点 `K`)，并通过这个顶点 `K` 中转即 `A-> K -> B` ，才可能缩短其距离。
  - 假如现在只允许经过 `1` 号顶点，即 `K=1` 来中转，求任意两点之间的最短路程，我们只需判断节点 `1` 是否能松弛当前边即可。

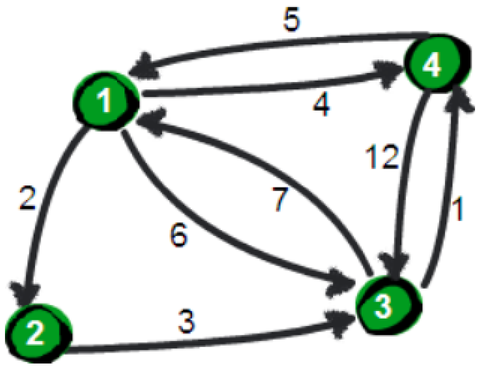
```
//核心代码
for(int i=1;i<=n;++i)//枚举边的起点
    for(int j=1;j<=n;++j)//枚举边的终点
        if(a[i][j]>a[i][1]+a[1][j])//如果1能松弛边i->j
            a[i][j]=a[i][1]+a[1][j];
```

  - 通过节点 `1` 松弛后结果如下图所示。
  -

	1	2	3	4
1	0	2	6	4
2	∞	0	3	∞
3	7	9	0	1
4	5	7	11	0

  - 接下来继续求在只允许经过 `1` 和 `2` 号两个顶点的情况下任意两点之间的最短路程。

```
//经过1号顶点
for(int i=1;i<=n;++i)//枚举边的起点
    for(int j=1;j<=n;++j)//枚举边的终点
        if(a[i][j]>a[i][1]+a[1][j])//如果1能松弛边i->j
            a[i][j]=a[i][1]+a[1][j];
//经过2号顶点
for(int i=1;i<=n;++i)//枚举边的起点
    for(int j=1;j<=n;++j)//枚举边的终点
        if(a[i][j]>a[i][2]+a[2][j])//如果2能松弛边i->j
            a[i][j]=a[i][2]+a[2][j];
```



- 依此类推，我们只要依次枚举中转点即可。

```
for(int k=1;k<=n;++k)//枚举中转点
    for(int i=1;i<=n;++i)//枚举边的起点
        for(int j=1;j<=n;++j)//枚举边的终点
            if(a[i][j]>a[i][k]+a[k][j])//松弛操作
                a[i][j]=a[i][k]+a[k][j];
```

- **时间效率**：$O(n^3)$