

Vorbereitungsfragen

a) Herleitung des Drehmoment aus der Mechanik: Ausgehend vom Drehimpuls \vec{L} muss eine Kraft wirken, um den Impuls zu verändern [1].

$$\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{p}) = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right) \quad (2)$$

Die Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ und der Impuls \vec{p} sind parallel zueinander und entfallen somit. Mit Hilfe des zweiten Newtonschen Axioms ergibt sich:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}, \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = m \cdot \vec{a} \quad (3)$$

$$\vec{M} = m \cdot |\vec{r} \times \vec{a}| = r \cdot F \cdot \sin(\theta) = M \quad (4)$$

b) Das Drehmoment auf Basis der Drehgeschwindigkeit ergibt sich aus Gl.(5). Dabei entspricht r dem Radius des Hinterrads und n bezeichnet die Umdrehungen pro Minute [4].

$$P = M \cdot w \Rightarrow M = \frac{P}{w}, \quad w = \frac{2\pi \cdot r \cdot n}{60} \quad (5)$$

c) Das Torsionsmoment M_t ruft eine Verdrehung α eines damit belasteten Objekts hervor. Die resultierende Verformung ist abhängig vom Material und der Querschnittsgeometrie des unter Torsion stehenden Objekts. Im Objekt treten mechanische Spannungen auf, die dem Torsionsmoment das Gleichgewicht halten, siehe Abb.(1). Diese Schubspannungen wachsen beispielsweise bei zylindrischen Bauteilen linear mit dem Querschnittsradius nach außen hin an und sind notwendig um den Verdrehwinkel und somit das Moment zu bestimmen [2],[3].

d) • Lichtschranken: Wie in c) beschrieben besteht eine Verbindung zwischen der Verdrehung des Rades zum wirkenden Moment (siehe Gl.(7)). Folglich

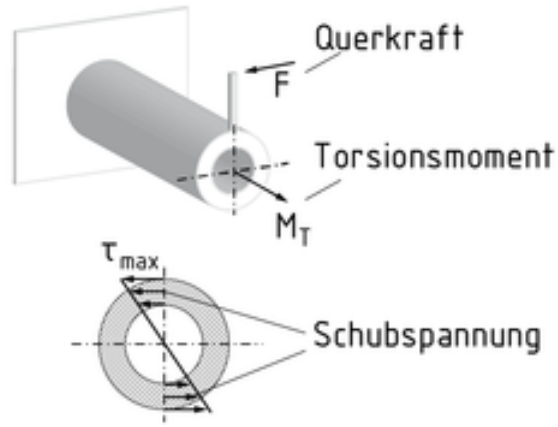


Figure 1: Torsionsmoment M_t an einem Stab/Zylinder, [2]

werden die Lichtschranken zum einen an der Felge und zum anderen an der Achse postiert. Dort nehmen sie sich abwechselnde hell/dunkel Perioden auf und erzeugten über einen analog digital Wandler die zu analysierenden Signale. An den notwendigen Verdrehwinkel kommt man über die Zeit-Frequenzanalyse der gemessenen Signale heran. Durch den Hinweis im Aufgabenblatt lässt sich das Drehmoment ausschließlich in Abhängigkeit vom Verdrehwinkel betrachten. Zu beachten ist der Gruppenphasenversatz der Sensoren.

- Dehnungsmessstreifen:
- Piezosensor:
- Generator:

e) Ein Ladungsverstärker hat die Funktion eine sehr geringe Ladung in eine dazu proportionale Spannung umzuwandeln. Hierbei kommt ein Operationsverstärker zum Einsatz, dessen invertierender Eingang (-) die gemessene Ladung des Piezosensors q_{Piezo} empfängt. Der nichtinvertierende Eingang liegt auf Massepotenzial. Wird der Operationsverstärker als ideal angenommen, so ergibt sich am invertierenden Eingang virtuelle Masse und somit kompensieren sich laut Knotenregel die Ladung des Sensors und die Ladungen q_{C_f} der Rückkoppelkapazität C_f . Folglich berechnet sich die Ausgangsspannung U_{ADC} proportional zur gemessenen Ladung und lässt sich über die Wahl der Rückkoppelkapazität entsprechend einstellen [4],[6].

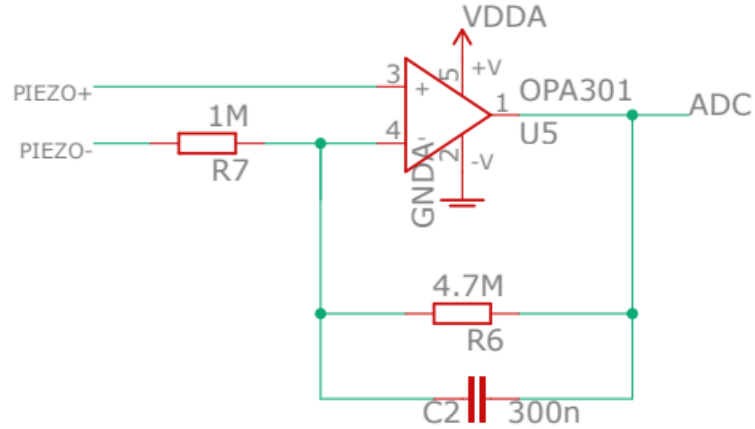


Figure 2: Schaltplan Ladungsverstärker, [4]

$$q_{Piezo} = -q_{C_f} \Rightarrow U_{ADC} = \frac{q_{C_f}}{C_f} = -\frac{q_{Piezo}}{C_f} \quad (6)$$

f) Der DMS wird über das Aufbringen zweier bekannter Kräfte am Pedal und dem linearen Zusammenhang zwischen Dehnung/Stauchung, damit einhergehender Widerstandsänderung und der resultierenden Brückenspannung kalibriert. Jede der beiden Kräfte sorgt für eine gewissen Dehnung/Stauchung und somit Änderung der Brückenspannung. Diese Werte werden aufgetragen und dann mittels einer Geraden interpoliert. Demzufolge kann man die sich im Versuch ergebenden Spannungsänderungen durch den interpolierten Zusammenhang interpretieren. Für das Aufbringen der Kräfte wurde ein Pedal durch Ketten und Karabinerhaken an einem Rahmen fixiert und am anderen Pedal durch eine ähnliche Fixierung mit Gewindeschrauben zwei, durch ein Zugkraftmessgerät ablesbare Kräfte angezogen.

g) Beide Sensoren sind jeweils an einem Pedal angebracht. Wohingegen der Piezosensor die Kraft am Ende des Hebels misst, erfasst der DMS die Längenänderung am Hebel. Diese Längenänderung kann zurückgeführt werden auf die Kraft am Hebelende und somit können die Sensoren verglichen werden. Zudem muss ein Phasenversatz von 180 Grad bei den Signalen des

Piezosensors im Vergleich zum DMS beachtet werden, denn wenn der DMS aktiv, durch treten ins Pedal, belastet wird, befindet sich der Piezo gerade in einer Phase bei der keine Belastung erfolgt und umgekehrt.

Drehmomentmessung mit Hilfe von Lichtschranken

Einleitung und physikalischer Hintergrund

Um mit Hilfe von Lichtschranken das wirkende Moment am Hinterrad zu bestimmen, muss die Verdrehung des Rades bestimmt werden. Durch das wirkende Torsionsmoment entsteht die Verdrehung am Hinterrad, siehe Abb.(1). Dabei treten mechanische Spannungen auf, die dem Moment das Gleichgewicht halten. Die in der Folge zu charakterisierende Größe ist der Verdrehwinkel $|\Delta\phi|$, dieser ist zum Torsionsmoment proportional. Zudem spielen die Proportionalitätsfaktoren Schubmodul G , polares Trägheitsmoment I_p und die Achsenlänge l eine Rolle, siehe Gl.(7). Da die Bestimmung des Schubmoduls über die Torsion am Hinterrad nicht trivial ist, wurde mit Hilfe einer Kalibrierungsmessung ein Proportionalitätsfaktor ($k = 300 \text{ Nm}/^\circ$) zur Errechnung des Drehmoments am Hinterrad ermittelt. Dieser bezieht sich jedoch auf eine hell/dunkel Periode und wird später in Bezug zu einer Radumdrehung (36 hell/dunkel Perioden) gesetzt, siehe Gl.(8),[4].

$$M = \frac{|\Delta\phi| \cdot G \cdot I_p}{l}, \quad k = \frac{G \cdot I_p}{l} = 300 \text{ Nm}/^\circ \quad (7)$$

$$M = \frac{k \cdot |\Delta\phi|}{36} \quad (8)$$

Der für das Moment notwendig zu ermittelnde Verdrehwinkel, ergibt sich aus der Differenz der Gangunterschiede im Leerlauf- und Lastfall, siehe Gl.(9) [4]. Dabei wurde der Leerlauffall über den Motorbetrieb eines Generators realisiert, indem das Rad entgegen der Tretrichtung bewegt wurde. Der Lastfall hingegen erfolgte durch das treten der Pedale bei ausgewählten Geschwindigkeiten und Widerständen.

$$|\Delta\phi| = |\Delta\phi_{unbelastet}| - |\Delta\phi_{belastet}| \quad (9)$$

Grundsätzlich lässt sich ein Gangunterschied zwischen zwei aufgenommenen Signalen mit Hilfe der Phasendifferenz der einzelnen Phasenlagen berechnen,

siehe Gl.(10,11). Für die Berechnung des Gangunterschieds wird mit Hilfe von zwei Lichtschranken zum einen im Achs- und zum anderen im Felgenbereich des Rades jeweils ein Signal aufgenommen. Ein Signal besteht dabei, fortlaufend über der Simulationszeit, aus sich abwechselnden hell/dunkel Perioden. Insgesamt enthält eine vollständige Umdrehung des Rades 36 dieser Perioden. Somit entspricht eine Periode 10 Grad. Dementsprechend sind die Phasen der einzelnen Signale zu bestimmen. Dabei gilt es den Fehler in der Fräsung der Felge am Hinterrad zu berücksichtigen. Folglich sind die 36 hell/dunkel Perioden nicht äquidistant und somit ist eine Signalauswertung hinsichtlich der Phase gemittelt über dem gesamten Messablauf sinnvoll, [4].

$$|\Delta\phi_{unbelastet}| = \phi_{Felge,Leerlauf} - \phi_{Achse,Leerlauf} \quad (10)$$

$$|\Delta\phi_{belastet}| = \phi_{Felge,Last} - \phi_{Achse,Last} \quad (11)$$

Bestimmung der Phase eines Signals

Die beiden Signale $s_{au\beta en}(t)$, $s_{innen}(t)$ der Lichtschranken werden im ersten Schritt analog digital gewandelt (ADC) und dann am PC in Form eines Graphen ausgegeben, siehe Abb.(3). Folglich liegen diskrete Abtastwerte im Abstand von $dt = 1 \cdot 10^{-4}s$ bei Signaldauern von bis zu 10 Sekunden vor.

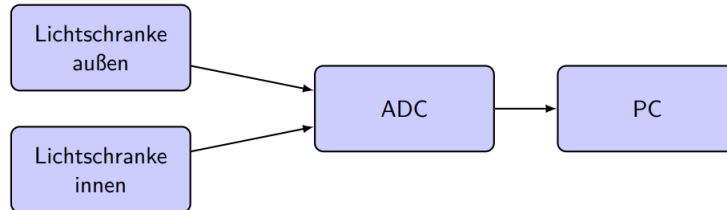


Figure 3: Signalübertragungskette, [4]

Diese Signale lassen sich im Frequenzbereich hinsichtlich ihrer Phase und Frequenz analysieren. Zum einen kann die Phase eines Signals über die Fast Fourier Transformation (FFT) und zum anderen über die Hilbertransformation bestimmt werden.

Bei der Analyse über die FFT muss das aufgenommene Signal korrekt in den Frequenzbereich überführt werden. Die FFT realisiert besonders effiziente

diskrete Fouriertransformationen (Gl.(12,13)), bei denen redundante Rechenschritte vermieden werden. Schließlich soll zunächst die Signalfrequenz f_s des aufgenommenen Signals bestimmt werden. Dabei ist es wichtig ein ganzzahliges Vielfaches der Signalfrequenz im Zeitbereich zu berücksichtigen, damit sich die spektrale Leistung des Signals nicht auf mehrere Frequenzwerte in der Umgebung verteilt und eine Angabe der Signalfrequenz erschwert. Abhilfe hierbei schafft eine entsprechende Fensterung des Signals im Zeitbereich. Zudem muss der Gleichanteil bei der Analyse gelöscht werden, da dieser den höchsten Peak im Frequenzbereich ausprägt, aber nicht der gesuchten Signalfrequenz entspricht. Erfüllt man die genannte Voraussetzung exakt, lässt sich die Signalfrequenz an Hand des höchsten Peaks im Frequenzbereich bestimmen. Andernfalls existieren Methoden um die Frequenz genau zu schätzen. Mit der bekannten Signalfrequenz f_s kann man den spektralen Koeffizienten $S(f_s)$ und somit die genaue Phasenlage des Signals bestimmen, siehe Gl.(14), [5].

$$H(k\Delta f) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n\Delta t) e^{-j2\pi kn/N} \quad (12)$$

$$h(n\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k\Delta f) e^{j2\pi kn/N} \quad (13)$$

Im Anschluss wird die Phasenlage über Gl.(14) bestimmt.

$$\phi(f_s) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(S(f_s))}{\text{Re}(S(f_s))}\right), \quad S(f_s) = \sum_{n=0}^N s_n e^{-j2\pi f_s n \Delta t} \quad (14)$$

Bei der Hilbertransformation wird der Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil der Fouriertransformierten eines kausalen Signals $s(t)$ beschrieben. Dieser Zusammenhang wird über die Erzeugung eines sogenannten analytischen Signals $a_n(t)$ verdeutlicht. Um dieses Signal zu erhalten, wird das aufgenommene Signal als erstes einer Fouriertransformation unterzogen. Im Anschluss wird im Frequenzbereich mit einem zweifachen fouriertransformierten Einheitssprung multipliziert und folglich die negativen Frequenzanteile gelöscht. Schließlich erhält man durch inverse Fouriertransformation das analytische Signal. Dabei stimmt der Realteil des analytischen Signals mit dem ursprünglichen Signal überein und der Imaginärteil des Signals ist um $\pi/2$

phasenverschoben. Nun lässt sich ein Phasenverlauf für alle Zeitwerte über Gl.(15) ermitteln. Bedingt durch die arctan-Funktion ergeben sich Intervalle die auf $-\pi < \phi_n < \pi$ beschränkt sind. Durch Addition von 2π vielfachen erhält man einen stetigen Verlauf des Phasenwinkels in Abhängigkeit der Zeit, [5].

$$\phi_n(t) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(a_n(t))}{\text{Re}(a_n(t))}\right) \quad (15)$$

Auswertung der Phasen, Gangunterschiede und Torsionsmomente

Da die Lichtschranken zueinander einen Gruppenphasenversatz $|\Delta\phi_{unbelastet}|$ (Gl.(10)) haben wird dieser zuerst über die eingangs beschriebene Leerlaufmessung ermittelt. Der Gruppenphasenversatz durch die Hilberttransformation betrug $|\Delta\phi_{unbelastet}| = 89.5863^\circ$. Im wesentlichen wurden die Phasenverläufe vom Felgen- und Achssignal voneinander abgezogen und gemittelt, siehe Abb.(4). Zum Vergleich liefert die Variante durch die Ermittlung explizite Phasenlage auf Basis der Signalfrequenz der Signale aus der FFT mit $|\Delta\phi_{unbelastet,FFT}| = 89.5360^\circ$ ein sehr ähnliches Ergebnis. Die Leerlaufmessung dauerte dabei in etwa 2 Sekunden.

Nun sind die sich ergebenden Gangunterschiede bei variierender Last von Interesse (Gl.(11)). Die Daten ergeben sich auf Basis von 10 Sekunden Simulationszeit und der über diesem Zeitraum gemittelt betrachteten Signalanalyse. Abb.(5) zeigt beispielhaft die Phasenverläufe von Felge und Achse im Lastfall bei einer Geschwindigkeit von 8km/h und 10 Ohm Widerstand. Durch die erneute Differenzbildung beider Phasenverläufe, ergab sich ein gemittelter Gangunterschied von $|\Delta\phi_{belastet}| = 92.0353^\circ$. Die Vorgehensweise über die FFT ergab für diesen Lastfall einen Gangunterschied von $|\Delta\phi_{belastet,FFT}| = 92.8847^\circ$.

In nachfolgender Tabelle () sind diverse Lastfälle sowohl für die Hilberttransformation als auch für die fast Fouriertransformation dargestellt. Auf Basis von Gl.(9) wird der Verdrehwinkel errechnet und ermöglicht schließlich über

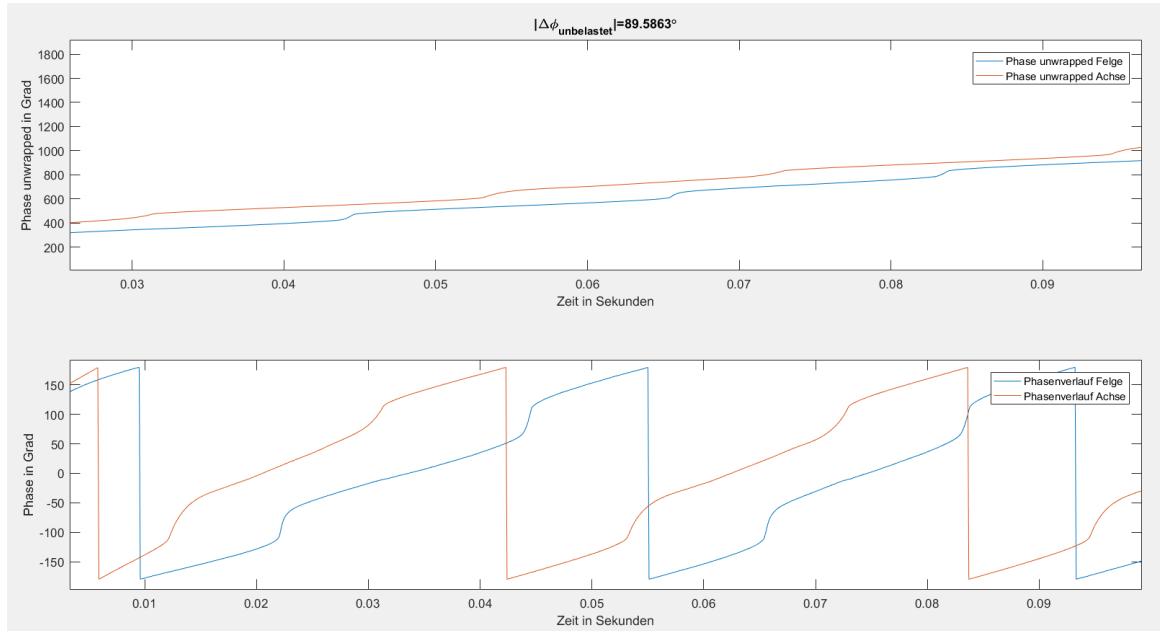


Figure 4: Hilberttransformation Leerlauf, Phasenverlauf unwrapped oben, Phasenverlauf durch arctan unten

Gl.(8) Rückschlüsse auf das Drehmoment am Hinterrad.

Aus der Tabelle () lässt sich entnehmen, dass das Drehmoment entweder bei höherer Geschwindigkeit oder bei sinkendem Widerstand (bedeutet hier aber, dass das Radfahren deutlich erschwert wird) ansteigt. Da das Drehmoment beim Treten über die Kraft der Beine, dem Hebel und dem Übersetzungsverhältnis generiert wird und in diesen Messreihen einzig die aufgewendete Kraft variiert wurde, ist der deutliche Anstieg im Drehmoment (und somit der notwendig aufzubringenden Kraft der Beine) vor allem bei den unterschiedlichen Geschwindigkeiten wenig verwunderlich und entsprechen den Erfahrungen des Radfahrers. Da die Hilberttransformation den Gangunterschied auf Basis der gemittelten Differenz der Signalphasenverläufe über dem Simulationszeitraum ausgibt, ist sie von diesem Abhängig. Das Ergebnis ist also von der Gleichmäßigkeit des Fahrens und der Messzeit abhängig. Der FFT Algorithmus hingegen scheint in anderem Maß von der Gleichmäßigkeit des Tretens und der Messzeit abzuhängen, denn die Werte beider Methoden unterscheiden sich nicht ver-

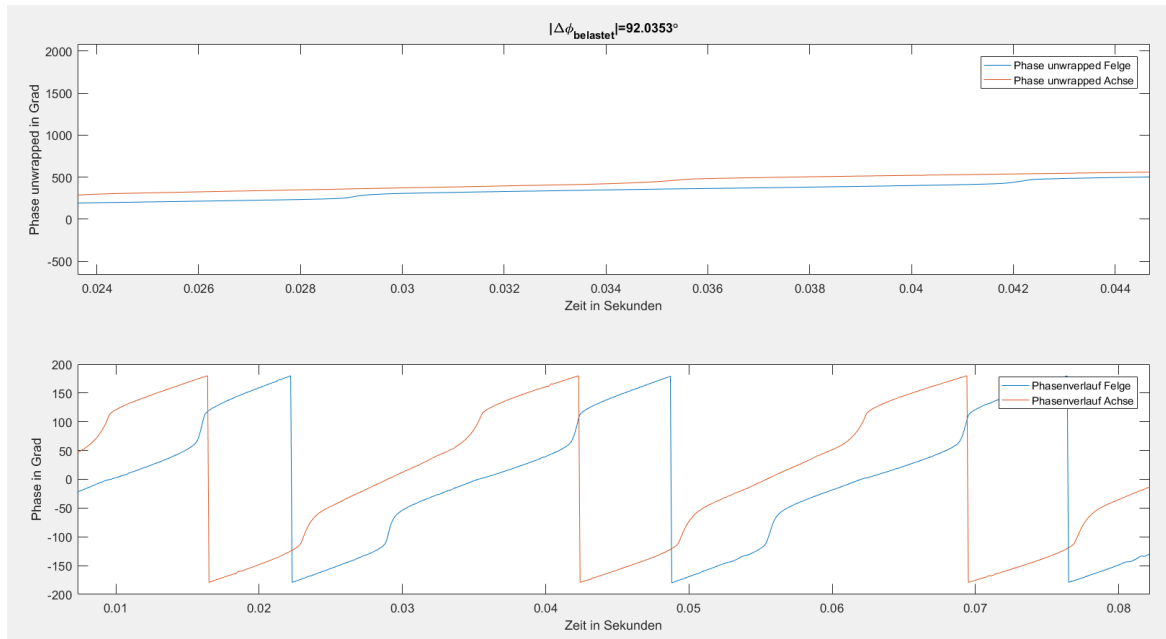


Figure 5: Hilberttransformation bei 8km/h 100Ohm, Phasenverlauf unwrapped oben, Phasenverlauf durch arctan unten

nachlässigbar. Dennoch liefern sie gute Vergleichswerte für die anderen Sensoren, da sie weitgehend unabhängig von Übersetzungsverhältnissen oder elektrischen Verlusten sind.

References

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Drehimpuls>, Zugriff am 29.11.2021
- [2] <https://glossar.item24.com/glossarindex/artikel/item/torsion-4.html>, Zugriff am 02.12.2021
- [3] <https://de.wikipedia.org/wiki/Torsionsmoment>, Zugriff am 02.12.2021

Hilberttransformation	$ \Delta\phi_{belastet} [^\circ]$	$ \Delta\phi [^\circ]$	$M [Nm]$
8kmh, 10 Ohm	92.035	2.449	20.40
12kmh, 10 Ohm	92.728	3.142	26.18
8kmh, 8 Ohm	92.386	2.800	23.34
12kmh, 8 Ohm	93.375	3.788	31.57
FFT			
8kmh, 10 Ohm	92.2714	2.7354	22.80
12kmh, 10 Ohm	93.5430	4.007	33.39
8kmh, 8 Ohm	92.8847	3.348	27.91
12kmh, 8 Ohm	93.8879	4.352	36.28

Table 1: Vergleich der Methoden bei Last, an Hand des Moments M

- [4] Vortrag Pascal Gollor Drehmomentmessung, Zugriff am 30.11.2021
- [5] Skript analoge und digitale Messtechnik, Skript Digitale Messtechnik, Prof. Dr.-Ing. Lehmann, Zugriff am 30.11.2021
- [6] <https://de.wikipedia.org/wiki/Ladungsverstärker>, Zugriff am 30.11.2021