

DOSSIER DE CANDIDATURE
PROFESSEUR MONGE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

FLORENT YGOUF

TABLE DES MATIÈRES

1. Curriculum vitae	3
1.1. Informations générales	3
1.2. Productions scientifiques	3
1.3. Domaine de recherche	4
1.4. Activités de recherche	5
1.5. Activités d'enseignement	5
1.6. Activités de rapporteur	6
1.7. Collaborateurs	6
2. Résumé de mes travaux de recherche	6
2.1. Contexte et définitions	6
2.2. Dynamique isopériodique	7
2.3. Classification des sous-variétés invariantes non-arithmétiques en genre 3	9
2.4. Flot horocyclique dans les espaces de modules	10
2.5. Techniques de preuve des théorèmes 10 et 12	13
3. Projets de recherche en cours	13
3.1. Flot horocyclique dans les espaces de modules (suite)	13
3.2. Structures géométriques sur les fermés invariants de l'espace de modules	14
4. Programme de recherche	14
4.1. Un problème de comptage pour les réseaux des groupes de Lie et les surfaces de translation	14
4.2. Marches aléatoires Zariski-denses sur les surfaces de translation	15
4.3. Unique ergodicité des flots de translation dans des directions harmoniques	17
4.4. Birkhoff générnicité dans des directions fractales, diffusion dans le modèle du wind-tree et approximations diophantiniennes	18
4.5. Mouvement brownien isopériodique	20
4.6. Flot de Ricci et surfaces de translation	20
5. Enseignement et diffusion scientifique	21
5.1. Réflexions pédagogiques	21
5.2. Groupes de travail	21
5.3. Organisation de conférences	22
5.4. Activité de vulgarisation scientifique	22
6. Projets d'enseignement et de diffusion scientifique	22
6.1. Encadrement de doctorants	22
6.2. Un cours spécialisé	23
6.3. Pédagogie et intelligence artificielle	23
6.4. Une conférence sur le flot horocyclique modulaire	23
7. Documents complémentaires	24
7.1. Rapport du jury de thèse	24
7.2. Rapports de pré-soutenance de thèse	26
7.3. Lettres de recommandation	32

1. CURRICULUM VITAE

1.1. Informations générales.

Né le 1 octobre 1992 à Evry, France

Nationalité : Français

Adresse : 24 rue des fossés, 35000 Rennes, France.

E-mail : florent.ygouf@univ-rennes.fr

Page web : <https://fygouf.github.io>

Intérêts de recherche : dynamique dans les espaces de modules, dynamique homogène et applications, dynamique des feuilletages, géométrie des surfaces.

Parcours :

- Septembre 2023 - Présent : **Maitre de conférence** à l'université de Rennes, au sein de l'IRMAR.
- Septembre 2022 - Aout 2023 : **Postdoc** à l'Université de Tel Aviv, Israel. Superviseur : B. Weiss.
- Septembre 2021 - Aout 2022 : **Postdoc** à l'Université de Bologne, Italie. Superviseur : S. Francaviglia.
- Septembre 2019 - Aout 2021 : **Postdoc** à l'Université de Tel Aviv, Israel. Superviseur : B. Weiss.

Formation académique :

- 2016 - 2019 : **Doctorat** en Mathématiques à l'Institut Fourier, Université Grenoble Alpes
Directeur de thèse : Erwan Lanneau.
- 2014 - 2016 : **Master** en Mathématiques, École Normale Supérieure de Lyon.

Langues :

- Français : langue maternelle
- Anglais : pratique courante
- Italien : intermédiaire
- Hébreux : intermédiaire

1.2. Productions scientifiques.

1.2.1. Thèse de doctorat.

- Feuilletage isopériodique de l'espace de modules des surfaces de translation, [Ygo19]

1.2.2. Articles publiés.

- Horospherical dynamics in invariant subvarieties. *Advances in Mathematics*, 2024, avec P.Smillie, J. Smillie, B.Weiss. [lien](#).
- Horocycle dynamics in rank one invariant subvarieties I : weak measure classification and equidistribution. A paraître dans *Israel Journal of Mathematics*, 2023, avec J. Chaika, B. Weiss. [lien](#).
- A criterion for density of the isoperiodic leaves in rank one affine invariant orbifolds, *Journal of Topology*, 2023, [lien](#).
- Nonarithmetic affine invariant orbifolds in $\mathcal{H}^{odd}(2,2)$ and $\mathcal{H}(3,1)$, *Geometriae Dedicata*, 2022, [lien](#).
- Isoperiodic dynamics in rank one affine invariant orbifolds, *International Research Mathematical Notices*, 2022, [lien](#).

1.2.3. Articles d'exposition.

- Rigidity of linear random walks on the torus after Benoist & Quint, [lien vers ma page](#).

1.2.4. Articles en cours de rédaction.

- Horocycle dynamics in rank one invariant subvarieties II : support of measures and orbit closures, *en préparation*, 2025, avec J. Chaika, B. Weiss.
- Geometric structures on invariant subvarieties, *en préparation*, 2025, avec J. Smillie.

1.3. Domaine de recherche. Mon domaine de recherche est au sens large l'étude des systèmes dynamiques de nature géométrique. Mon travail porte en particulier sur deux familles de systèmes dynamiques : la dynamique de Teichmüller et la dynamique homogène.

La dynamique de Teichmüller désigne initialement l'étude de l'action du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur l'espace de modules des surfaces de translation. Un *espace de modules* est une variété dont les points paramétrisent des objets géométriques et dans le cas présent des surfaces de translation, il s'agit de paires (X, ω) où X est une surface de Riemann et ω est une 1-forme holomorphe non nulle sur X . Ces surfaces de translation apparaissent dans de nombreux contextes tels que la géométrie complexe, les groupes Lie, les billards polygonaux, la théorie des nombres ou encore la physique statistique. Plus globalement, la dynamique de Teichmüller désigne aussi l'étude d'autres systèmes dynamiques sur l'espace de modules des surfaces de translation comme le flot horocyclique, le feuilletage isopériodique, le feuilletage horosphérique et les flots réels. L'idée sous-jacente à la dynamique de Teichmüller est qu'il est possible de découvrir certaines propriétés intrinsèques des surfaces de translation et des objets auxquels elles sont reliées en comprenant la dynamique des systèmes dynamiques mentionnés ci-dessus. Par exemple, des travaux de Veech puis Eskin-Masur établissent un lien entre le comptage de trajectoires périodique passant par un point donné dans un billard rationnel (*i.e* dont les angles sont des multiples rationnels de π) et la rigidité de l'action du sous-groupe $U \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur l'espaces de modules des surfaces de translation, où

$$(1) \quad U = \left\{ u_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

La dynamique homogène s'intéresse quant à elle à la compréhension de la dynamique de l'action $H \curvearrowright G/\Gamma$ où G est un groupe de Lie, $H \subset G$ un sous-groupe fermé et $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret, souvent un réseau. L'action de H est celle induite par multiplication à gauche de H sur G et l'espace G/Γ est l'espace des classes d'équivalence à droite de Γ que l'on appelle *espace homogène*. De nombreuses situations sont décrites par ce formalisme. Par exemple, le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique est un quotient de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ par un sous-groupe Fuchsien et sous cette identification, les flots géodésique et horocyclique correspondent à l'action des groupes A et U , où U est défini dans (1) et

$$(2) \quad A = \left\{ g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

D'autres exemples sont donnés par l'espace $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(d, \mathbb{Z})$ des réseaux unimodulaires de \mathbb{R}^d et l'espace des tores avec $n+1$ points marqués $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{C}^n/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^{2n}$. Le groupe H peut être de différente nature, par exemple horosphérique (Dani), unipotent (Ratner), Zariski-dense (Benoist-Quint), Abélien (Einsiedler-Katok-Lindenstrauss) etc. Chacune de ces familles de groupes ont été largement étudiées tout au long des dernières décennies, chacune correspondant à un pan entier de la littérature sur la dynamique homogène. Cette fois encore, il a été observé que de nombreux problèmes, sans connexion apparente, peuvent être traduits en un problème de dynamique dans les espaces homogènes. Par exemple, la *correspondance de Dani* établit que les propriétés diophantiennes d'un nombre réel x sont encodées dans les A -orbite du réseau $u_x \cdot \mathbb{Z}^2$ dans l'espaces des réseaux unimodulaires $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

De façon particulièrement enthousiasmante, il existe de fortes connexions entre ces deux familles de systèmes dynamiques et de nombreux travaux des deux dernières décennies s'efforcent d'importer les outils et résultats de la dynamique homogène dans le cadre des espaces de modules. Une manifestation particulièrement frappante de ce paradigme est le théorème de la « baguette magique » établissant des propriétés fortes de rigidité pour l'action du groupe $P = AU$ sur l'espace de modules des surfaces de translation. Ce résultat est du à Eskin-Mirzakhani et permet d'obtenir une solution faible au problème de comptage dans les billards rationnels mentionné plus haut. L'étude de l'action du sous-groupe $U \subset P \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur les espaces de modules, connue sous le nom de *flot horocyclique* par analogie avec le cas des surfaces, a connu un important essor ces dernières années. Jon Chaika et Barak Weiss ont présenté d'importants travaux dans cette direction lors de leur *joint lecture* à l'ICM 2022. Mes travaux de recherche s'inscrivent dans la lignée de cette recherche de connexion entre la dynamique de Teichmüller et la dynamique homogène. Je suis aussi intéressé par l'exploration de telles connexions avec de nouveaux cadres non-homogènes, comme par exemple dans la partie §4.2.

1.4. Activités de recherche.

1.4.1. Exposés donnés dans des conférences.

- Aussois, France, École d'hiver de dynamique, 12/2018
- Toulouse, France, Mini-conférence sur les surfaces plates, 02/2019
- Oaxaca, Mexique, Workshop on Teichmüller dynamics, 05/2019. [Vidéo](#).
- Conférence Platon en ligne, Paroles aux jeunes géomètres dynamiques, 12/2020.
- Niteroi, Brésil, Workshop on homogeneous dynamics, 02/2020
- Paris, France, IHP, Conférence « Group Actions with Hyperbolicity and Measure Rigidity », 05/2024. [Vidéo](#).

1.4.2. Exposés donnés dans des séminaires.

- Grenoble, France, Institut Fourier, 01/2017
- Marseille, France, I2M, 12/2018
- Moscou, Russie, Skoltech, 12/2019
- Bordeaux, France, IMB, 12/2019
- Rio de Janeiro, Brésil, IMPA, 02/2020
- Ann Arbor, USA, UMICH Online seminar, 03/2021
- Bologne, Italie, UNIBO, 10/2021
- Tel Aviv, Isreal, TAU, 02/2022
- San Diego, USA, Online seminar, 10/2022
- Bordeaux, France, IMB, 03/2023
- Rennes, France, IRMAR, 03/2023
- Grenoble, France, Institut Fourier, 03/2023
- Nice, France, UNICE, 03/2023
- Marseille, France, Séminaire Rauzy, 03/2023
- Osray, France, LMO, 04/2023
- Paris, France, IHP, 04/2023

1.4.3. Visites de recherches.

- Moscou, Russie, 2018. Invité par [Sasha Skripchenko](#) à la Skoltech. Durée de la visite : 1 semaine.
- Rio de Janeiro, Brésil, 2020. Invité par Bertrand Deroin à l'IMPA. Durée de la visite : 3 semaines.
- Bonn, Allemagne, 2020. Semestre thématique au Hausdorff Institute of Mathematics [Dynamics : Topology and Numbers](#).
- Tel Aviv, Israel, 2022. Invité par [Barak Weiss](#) à l'université de Tel Aviv. Durée de la visite : 1 mois et demi.

1.4.4. Organisation de séminaire d'équipe.

Depuis la rentrée universitaire 2023/2024, j'organise le séminaire de l'équipe Théorie Ergodique de l'IRMAR. Plus d'informations sur la [page du séminaire](#).

1.5. Activités d'enseignement.

1.5.1. Chargé de TD.

Année universitaire 2024/2025 :

- Algèbre de base en M1, 50h.
- Mathématiques pour la biologie en L1, 30h.
- Equations différentielles en L2, 60h.

Année universitaire 2023/2024 :

- Algèbre de base en M1, 22,5h.
- Compléments mathématiques en L2, 24h.
- Analyses de base en L2, 12h.
- Equations différentielles en L2, 30h.

Année universitaire 2018/2017 :

- Algèbre linéaire en L1, 30h.
- Mathématiques pour la biologie en L2, 30h.

1.5.2. *Travaux pratiques.* Au premier semestre des années universitaire 2023/2024 et 2024/2025 j'ai encadré des séances de travaux pratiques basées sur le logiciel de calcul Sage dans le cadre de l'UE algèbre de base en M1, 15h.

1.5.3. *Préparation à l'agrégation.* Tout au long de l'année universitaire 2023/2024, je suis intervenu dans la préparation à l'agrégation des étudiants de M2 de l'université de Rennes. J'y ai donné des TD, aidé les étudiants à préparer leur leçon d'agrégation et je leur ai fait passer des oraux blancs. 23,5h.

1.5.4. *Cours magistraux.*

Année universitaire 2024/2025 :

- Mathématiques pour la biologie en L1, 9h.
- Equations différentielles en L2, 18h.

Année universitaire 2023/2024 :

- Equations différentielles en L2, 18h.

1.6. **Activités de rapporteur.** J'ai été rapporteur pour les revues [Illinois Journal of Mathematics](#), [International Mathematics Research Notices](#) et [Mathematische Annalen](#).

1.7. **Collaborateurs.**

- [Jon Chaika](#)
- [John Smillie](#)
- [Peter Smillie](#)
- [Barak Weiss](#)
- [Florestan Martin-Baillon](#)

2. RÉSUMÉ DE MES TRAVAUX DE RECHERCHE

2.1. **Contexte et définitions.** Une surface de translation est la donnée d'une surface de Riemann compact et connexe X munie d'une 1-forme holomorphe non nulle $\omega \in \Omega^1(X) - \{0\}$. Soit $g > 0$. L'espace de module des surfaces de translation de genre g est l'ensemble $\Omega\mathcal{M}_g$ (des classes d'isomorphisme) des surfaces de translation de genre g . Celui-ci admet une structure de fibré vectoriel holomorphe au dessus de l'espace \mathcal{M}_g des (classes d'isomorphisme) des surfaces de Riemann de genre g . Il découle du théorème de Riemann-Roch que la somme des zéros comptés avec multiplicité d'une forme holomorphe non-nulle sur une surface de genre g vaut $2g - 2$. Ceci induit une stratification

$$(3) \quad \Omega\mathcal{M}_g = \bigsqcup_{|\kappa|=2g-2} \mathcal{H}(\kappa)$$

correspondant au surfaces de translation de genre g ayant même nombre et ordre d'annulation des zéros. Les espaces $\mathcal{H}(\kappa)$ apparaissant dans (3) sont appelés *strates*. Nous insistons sur le fait que nous autorisons les zéros d'ordre 0, auquel cas nous parlons de *points marqués*. L'espace $\Omega\mathcal{M}_g$ est muni d'une action du groupe $SL(2, \mathbb{R})$ qui préserve la stratification (3). Par exemple quand $g = 1$ et $\kappa = \{0\}$, nous avons l'isomorphisme $\mathcal{H}(0) \simeq GL^+(2, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{Z})$ et l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}(0)$ correspond sous cet isomorphisme à l'action induite par multiplication à gauche. En genre supérieur, les strates $\mathcal{H}(\kappa)$ ne sont plus homogènes. L'étude de la dynamique de l'action induite dans les strates commence dans les années 80 avec les travaux de Masur et Veech établissant l'ergodicité par rapport à la mesure qui porte désormais le nom de mesure de Masur-Veech. De nombreux travaux ont depuis été dédiés à la compréhension de cette action. Parmi les jalons marquants, nous mentionnons la classification des mesures et des fermés $SL(2, \mathbb{R})$ -invariants en genre 2 due à McMullen [McM07a] au début des années 2000 puis les travaux d'Eskin-Mirzakhani [EM18] et Eskin-Mirzakhani-Mohammadi [EMM15] datant des années 2015 établissant des résultats de rigidité pour l'action du sous-groupe $P \subset SL(2, \mathbb{R})$. Ces résultats sont désormais connus sous le nom de « théorème de la baguette magique » en raison de l'impact qu'ils ont eu sur la dynamique de Teichmüller et au-delà. Nous le résumons sous la forme simplifiée suivante en raison du rôle prépondérant qu'il joue dans la suite de ce document :

Théorème 1 (Théorème de la baguette magique [EM18], [EMM15]). *L’adhérence de la P -orbite d’une surface de translation (X, ω) est une sous-variété fermée \mathcal{M} supportant une mesure lisse $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ -invariante $m_{\mathcal{M}}$ telle que*

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^1 (g_t u_s)_* \delta_{(X, \omega)} \, ds dt \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} m_{\mathcal{M}}.$$

Le théorème de la baguette magique est plus précis que la version donnée dans le théorème 1 ci dessus et il permet d'affirmer que la variété \mathcal{M} est décrite par certaines équations linéaires à coefficients dans \mathbb{R} satisfaites par les nombres complexes $\int_{\gamma} \omega$ où (X, ω) est une surface dans \mathcal{M} et $\gamma \in H_1(X, \Sigma_{\omega}, \mathbb{Z})$, Σ_{ω} dénotant l'ensemble des zéros de ω . Il est important de noter qu'en particulier, la variété \mathcal{M} est fermée et $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ -invariante. Pour simplifier, nous appellerons dans la suite une telle sous-variété \mathcal{M} une *sous-variété invariante*. Enfin, nous dénoterons par $k(\mathcal{M})$ le plus petit sous-corps de \mathbb{C} dans lequel les équations décrivant \mathcal{M} mentionnées ci-dessus prennent leur coefficients et nous appellerons celui-ci le *corps de définition* de la variété invariante \mathcal{M} . Il découle des travaux de Wright dans [Wri14] que $k(\mathcal{M})$ est une extension algébrique de \mathbb{Q} de degré borné par le genre des surfaces dans \mathcal{M} .

2.2. Dynamique isopériodique. Dans cette section, je décris les résultats que j'ai obtenus sur la dynamique du feuilletage isopériodique. Ces résultats sont publiés dans [Ygo21] et [Ygo23a]. Commençons par quelques définitions et éléments de contexte.

2.2.1. Introduction. Soit X une surface de Riemann. Le théorème de Torelli est un résultat fondamental de géométrie complexe qui affirme que X est complètement déterminée par ses périodes (ou plus précisément sa Jacobienne). Nous rappelons qu'une *période* de X est un nombre complexe de la forme $\int_{\gamma} \alpha$ où $\gamma \in H_1(X, \mathbb{Z})$ et $\alpha \in \Omega^1(X)$. Donnons-nous maintenant une 1-forme holomorphe $\omega \in \Omega^1(X)$ et posons :

$$(4) \quad \text{Per}(X, \omega) = \left\{ \int_{\gamma} \omega, \gamma \in H_1(X, \mathbb{Z}) \right\}.$$

Par comparaison avec le Théorème de Torelli, il est naturel de se demander dans quelle mesure (X, ω) est déterminée par $\text{Per}(X, \omega)$. Nous allons voir que la situation est ici bien souple et mène à l'étude de la dynamique d'un feuilletage.

Une *déformation isopériodique* est un chemin (X_t, ω_t) tracé dans $\Omega \mathcal{M}_g$ le long duquel $\text{Per}(X_t, \omega_t)$ est constant. Nous donnons un exemple d'une telle déformation isopériodique dans la figure 1. L'ensemble des déformations isopériodiques au sein d'une strate \mathcal{H} de l'espace de modules décrivent un feuilletage holomorphe $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ -invariant \mathcal{F} , que nous appelons *le feuilletage isopériodique*. Les premiers résultats sur la dynamique du feuilletage isopériodique ont été obtenus par McMullen dans [McM14] où l'ergodicité (par rapport à la mesure de Masur-Veech) du feuilletage dans les strates $\mathcal{H}(1, 1)$ et $\mathcal{H}(1, 1, 1, 1)$ est établie. McMullen utilise des outils de dynamique homogène dans l'espace de modules des variétés Abéliennes couplés à la surjectivité de l'application de Torelli dans le cas $g \leq 3$. En utilisant ceci comme le cas de base d'une récurrence topologique (utilisant des dégénérescences vers le bord de l'espace de modules similaires à celle présentée dans la figure 1), Calsamiglia-Deroin-Francaviglia classifient l'adhérence des feuilles isopériodiques et obtiennent l'ergodicité du feuilletage dans les strates *principales* en genre quelconque, c'est à dire les strates $\mathcal{H}(1, \dots, 1)$, voir [CDF15]. La partie ergodique de ce résultat est établie simultanément par Hamenstädt dans [Ham18] par des techniques similaires. Au moment où je débute ma thèse en 2016, le seul résultat non trivial connu pour la dynamique du feuilletage isopériodique en dehors des strates principales est la densité de la feuille passant par la surface de Arnoux-Yoccoz dans la strate $\mathcal{H}(g-1, g-1)$, voir [HW18].

Soit \mathcal{M} est une sous-variété invariante. Il est intéressant de remarquer que $q \in \mathcal{M} \mapsto T_q \mathcal{F} \cap T_q \mathcal{M}$ est une distribution involutive de \mathcal{M} et nous obtenons donc, en vertu du théorème de Frobenius, un feuilletage $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ sur \mathcal{M} . Ce feuilletage est relié au feuilletage isopériodique par le fait suivant : pour tout $q \in \mathcal{M}$, la feuille $\mathcal{F}_q^{\mathcal{M}}$ coïncide avec la composante connexe de $\mathcal{F}_q \cap \mathcal{M}$ contenant q . Étudier les feuilletages $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ pour mieux comprendre \mathcal{F} est un analogue de la technique qui consiste à étudier les sections transverses d'un flot pour mieux comprendre le flot lui-même.

Définition 1. *Le rang de \mathcal{M} est la moitié de la codimension complexe des feuilles de $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$.*

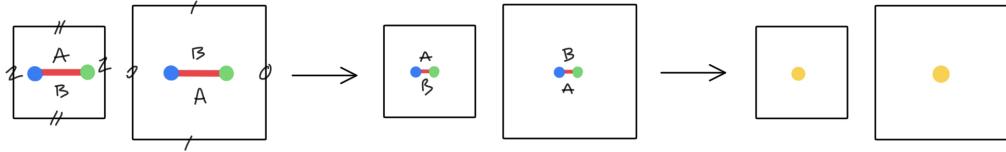


FIGURE 1. La figure ci-dessus présente une déformation isopériodique dans $\mathcal{H}(1,1)$ le long de laquelle la longueur du segment rouge tend vers zéro. Les deux singularités d'ordre 1, représentées en bleu et vert coalescent vers un unique point jaune, le chemin est donc divergent. Les arêtes marquées du même symbole sont identifiées par translation et ω_t est la forme induite par dz . Une base de l'homologie est donnée par les arêtes des carrés : les périodes de ω_t ne changent pas

La notion de rang est une quantité importante associée aux sous-variétés invariantes. Elle a été introduite initialement par Wright dans [Wri15] et est un nombre entier d'après [AEM17]. Dans le cas rang 1, le feuilletage en $SL(2, \mathbb{R})$ -orbites et le feuilletage isopériodique sont transverses. Par exemple l'espace de modules des surfaces de translation de genre 1 avec $n+1$ points marqués est isomorphe à $SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{C}^n / SL(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^{2n}$. Il s'agit d'un exemple de sous-variétés invariantes de rang 1 et le feuilletage isopériodique est le feuilletage en \mathbb{C}^n -orbites dont les feuilles sont les images des ensembles de la forme $\{g\} \times \mathbb{C}^n$.

2.2.2. Une dichotomie dynamique. La structure locale des sous-variétés invariantes de rang 1 mentionnée ci-dessus laisse penser qu'une feuille isopériodique non fermée devrait être invariante par certaines déformations le long de $SL(2, \mathbb{R})$. Cette idée est exploitée dans mon résultat suivant :

Théorème 2. [Ygo21, Théorème A] *Si \mathcal{M} une sous-variété invariante de rang 1, alors soit toutes les feuilles de $\mathcal{F}^\mathcal{M}$ sont fermées soit toutes les feuilles sont denses. Dans le second cas, le feuilletage est ergodique par rapport à la mesure $m_{\mathcal{M}}$.*

La preuve du théorème 2 repose sur l'observation que $SL(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur l'espace des feuilles de $\mathcal{F}^\mathcal{M}$, ce que je démontre en utilisant la description locale en rang 1 et le mélange topologique du flot géodésique correspondant à l'action de $A \curvearrowright \mathcal{M}$, ce qui découle par exemple de [AG10]. Rappelons que A est défini dans l'équation (2). L'espace des feuilles d'un feuilletage est en général très pathologique d'un point de vue topologique, par exemple il peut ne pas être séparé. J'introduis à la place une version mesurable de l'espace des feuilles. Une étude de l'action induite de $SL(2, \mathbb{R})$ sur celui-ci permet de montrer que les stabilisateurs de l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sont des sous-groupes fermés de co-volume fini et une application du théorème de densité de Borel permet de conclure que ceux-ci sont soit des réseaux, soit $SL(2, \mathbb{R})$ lui-même. Cette dichotomie sous-tend la dichotomie du théorème 2.

2.2.3. Un critère de densité. Étant donné la nature du Théorème 2, il est naturel de vouloir donner des exemples correspondant à chacun des cas mentionnés. Il est aisément de montrer que les feuilles sont toutes fermées quand \mathcal{M} est *arithmétique*, c'est à dire que son corps de définition satisfait $k(\mathcal{M}) = \mathbb{Q}$. Mon résultat suivant donne une famille d'exemples explicites de sous-variétés de rang 1 pour lesquelles les feuilles isopériodiques sont denses :

Théorème 3. [Ygo23a, Théorème B] *Soit \mathcal{M} un lieu de forme propre de Prym non-arithmétique en genre 3. Alors toutes les feuilles de $\mathcal{F}^\mathcal{M}$ sont denses.*

Les formes propres de Prym ont été découvertes par McMullen dans [McM07b] et correspondent à des surfaces de translation ayant une double propriété de symétrie : 1) une *symétrie topologique* se traduisant par l'existence d'une certaine involution holomorphe $\tau : X \rightarrow X$ telle que $\tau^* \omega = -\omega$ appelée *involution Prym* et 2) une *symétrie algébrique* se traduisant par l'abondance d'endomorphismes préservant le facteur τ -anti-invariant

de la Jacobienne de X avec ω comme vecteur propre¹. Par exemple, si X a genre 2, l’involution hyperelliptique sur X satisfait la condition 1. Un critère du à McMullen établit que la condition 2 est automatiquement vérifiée quand la condition 1 est satisfaite et (X, ω) est stabilisée par une matrice hyperbolique sous l’action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur l’espace de modules. Le Théorème 3 a été utilisé par Chaika-Weiss pour établir le mélange à tous les ordres (*mixing of all orders* en anglais) du flot réel dans les lieux de formes propres non-arithmétiques en genre 2, voir [CW23]. Il découle en particulier du Théorème 2 que le feuilletage $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ est ergodique quand \mathcal{M} est un lieu de formes propres de Prym non arithmétiques. Nous rappelons que nous avons introduit les feuilletages $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ dans l’idée d’étudier le feuilletage isoperiodique. Si q est une forme propre de Prym non arithmétique de genre 3, il découle de la relation entre $\mathcal{F}_q^{\mathcal{M}}$ et \mathcal{F}_q et du Théorème 3 que alors l’adhérence de \mathcal{F}_q est $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -invariante et donc une sous-variété invariante en vertu de [EMM15]. En utilisant la classification des sous-variétés invariantes de rang au moins 2 en genre 3 (voir la section 2.3 pour un historique de cette classification), j’ai obtenu le résultat suivant :

Théorème 4. [Ygo23a, Théorème C] *Soit $q \in \mathcal{H}(2, 1, 1)$ une forme propre de Prym non-arithmétique. Alors la feuille isoperiodique de \mathcal{F}_q est dense dans $\mathcal{H}(2, 1, 1)$.*

Insistons que le théorème 3 porte sur la feuille $\mathcal{F}_q^{\mathcal{M}}$ alors que dans le théorème, il s’agit de la feuille isopériodique entière \mathcal{F}_q . La feuille $\mathcal{F}_q^{\mathcal{M}}$ a codimension complexe 1 dans \mathcal{F}_q .

2.3. Classification des sous-variétés invariantes non-arithmétiques en genre 3. Dans cette section, je décris ma contribution au problème de la classification des sous-variétés invariantes. Les résultats correspondants sont publiés dans [Ygo23b].

2.3.1. Contexte et résultats. Comme mentionné précédemment, il existe une forte connexion entre la dynamique de l’action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et les propriétés intrinsèques des surfaces de translation. Cela explique, en vertu du théorème de la baguette magique, que la classification des sous-variétés invariantes est un des objectifs clés de la théorie de Teichmüller. Dénotons par ΩE_D l’ensemble des formes propres de Prym de discriminant D (nous renvoyons à la note de bas de page¹ pour une définition). Une sous-variété invariante est arithmétique si et seulement si elle contient un revêtement de translation d’une surface de translation de la forme $(\mathbb{C}/\Lambda, dz)$, c’est à dire contient une surface (X, ω) munie d’une application holomorphe $p : X \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ telle que $p^*dz = \omega$. Les lieux ΩE_D sont arithmétiques si et seulement si D est un carré.

En genre 2, McMullen a classifié les sous-variétés invariantes non arithmétiques de dimension 2 (c’est à dire les $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -orbites fermées) dans [McM05b], [McM05a], [McM06], a montré que celles de dimension 3 sont des composantes connexes d’un ΩE_D et que les strates $\mathcal{H}(2)$ et $\mathcal{H}(1, 1)$ sont les seules sous-variétés invariantes de dimension supérieure [McM07a]. La classification des sous-variétés invariantes arithmétiques de dimension 2 est, elle, encore ouverte malgré d’importants progrès dus à Hubert-Lelièvre [HL06] et Duryev [Dur18].

En genre 3, la classification des sous variétés de dimension (complexe) au moins 4 est due à des travaux de Aulicino, Hubert, Lanneau, Mirzakhani, Möller, Nguyen et Wright [ANW16] [AN16], [HLM12] [MW18], [ANW16]. Il découle des travaux de Kontsevitch-Zorich [KZ03] que la strate $\mathcal{H}(2, 2) \subset \Omega \mathcal{M}_3$ a deux composantes connexes, dénotées par $\mathcal{H}^{hyp}(2, 2)$ et $\mathcal{H}^{odd}(2, 2)$. La classification des sous-variétés invariantes non-arithmétiques de dimension 3 dans $\mathcal{H}^{hyp}(2, 2)$ est due à Apisa [Api17]. J’ai démontré :

Théorème 5. [Ygo23b, Théorème A] *Soit $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}^{odd}(2, 2)$ une sous-variété non arithmétique de dimension 3. Alors $k(\mathcal{M})$ est une extension quadratique de \mathbb{Q} et \mathcal{M} est une composante connexe de ΩE_D , où D est le discriminant de $k(\mathcal{M})$.*

Théorème 6. [Ygo23b, Théorème B] *Il n’y a pas de sous-variété invariante non-arithmétique de dimension au moins 3 dans la strate $\mathcal{H}(3, 1)$.*

Mentionnons que les composantes connexes de $\Omega E_D \cap \mathcal{H}^{odd}(2, 2)$ ont été classifiées par Lanneau-Nguyen [LN14]. Une classification complète des sous-variétés invariantes de dimension 2 en genre 3 est complètement ouverte et semble hors de portée des techniques actuelles. Plus récemment, Apisa et Wright ont introduit de puissants outils permettant d’approcher la classification des sous-variétés invariantes par des techniques

1. La formulation précise de la condition 2 requiert que l’ensemble des endomorphismes préservant le facteur τ -anti-invariant de la Jacobienne de X avec ω comme vecteur propre engendre un ordre quadratique. Si D est le discriminant de cet ordre quadratique, nous disons que q est une forme propre de Prym de discriminant D

de dégénérescences vers des strates de plus petite complexité (genre et nombre de singularités) [AW20]. Ces travaux permettent par exemple de classifier les variétés de “rang supérieur” [AW21] et soulignent l’intérêt de résultats de classification en petite complexité comme ceux mentionnés ci-dessus.

Pour démontrer les théorèmes 5 et 6, j’utilise une *machine à détecter les équations* dans les sous-variétés invariantes \mathcal{M} non-arithmétiques de dimension 3 que j’établis en m’inspirant de méthodes développées par Apisa dans [Api17] dans le cas des strates *hyperelliptiques*. Dans $\mathcal{H}^{odd}(2, 2)$, cette *machine à détecter les équations* me permet, après avoir résolu un problème combinatoire concernant la géométrie des surfaces de translation, de construire une involution Prym sur une surface (X, ω) dans \mathcal{M} qui persiste par petites déformations. En utilisant un lemme de fermeture pour le flot géodésique, je montre ensuite que je peux supposer de plus que (X, ω) est stabilisée par une matrice hyperbolique. Je conclus enfin par le critère de McMullen mentionné dans la partie 2.2.3 que \mathcal{M} est contenue dans un ΩE_D (le nombre D est relié à la trace de la matrice hyperbolique). Le problème combinatoire mentionné ci-dessus est un problème connectivité d’un graphe à 29 sommets pour lequel je me suis aidé du logiciel *SageMath* et plus particulièrement du package *surface dynamics*. Dans $\mathcal{H}(3, 1)$, la *machine à détecter les équations* produit trop d’équations et exclut l’existence de sous-variété non-arithmétique de dimension 3.

2.4. Flot horocyclique dans les espaces de modules. Dans cette section, je décris ma contribution à l’étude de la dynamique du flot horocyclique dans l’espaces de modules des surfaces de translation. Ces travaux correspondent aux deux articles suivants : [SSWY24] et [CWY23a].

2.4.1. Feuilletage et mesures horosphériques dans les sous-variétés invariantes. Je décris dans cette section des résultats obtenus en collaboration avec J. Smillie, P. Smillie et B. Weiss. Dans [SSWY24], nous introduisons le feuilletage *horosphérique* dans une sous-variété invariante \mathcal{M} quelconque qui joue le rôle du feuilletage fortement instable pour l’action de A sur \mathcal{M} . Nous définissons des mesures associées à ce feuilletage que nous appelons *mesures horosphériques*. Ces mesures ont la propriété fondamentale d’être invariantes par le flot horocyclique et nous y pensons comme des *mesures horocycliques avec beaucoup d’invariance supplémentaire*. Ce projet est donc une avancée vers la compréhension des mesures horocycliques qui est l’un des autres objectifs clés de la théorie de Teichmüller mentionnés dans la section 1.3. Suivant le parallèle entre la dynamique de Teichmüller et la dynamique homogène esquissée dans la section 1.3, nos mesures horosphériques sont l’analogue des mesures invariantes par un groupe horosphérique dans les espaces homogènes dont la compréhension est due à Dani [Dan78], [Dan81] et Margulis [Mar04] et pré-dates les travaux de Ratner sur les flots unipotents d’une dizaine d’années.

Par exemple, rappelons que l’espace de modules des surfaces de translation de genre 1 avec $n + 1$ points marqués est isomorphe à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{C}^n / \Gamma$ où $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^{2n}$. Une mesure y est horosphérique si, et seulement si, elle est invariante par l’action à gauche du sous-groupe $N = \langle U \times \{0\}, \{id\} \times \mathbb{R}^n \rangle$ et le feuilletage horosphérique correspond au feuilletage en orbites du groupe N . Si \mathcal{M} est une sous-variété invariante de rang 1, alors une mesure sur \mathcal{M} est horosphérique si, et seulement si, elle est invariante par les flots horocycliques et les *flot réels* (il s’agit de certains flots tangents au feuilletage isopériodique $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ définis dans la section 2.2 qui commutent au flot horocyclique).

Théorème 7. [SSWY24, Théorème 1.2] *Soit \mathcal{M} une sous-variété invariante et soit μ une mesure horosphérique sans connexion de selles. Alors μ est finie et coïncide avec la mesure $m_{\mathcal{M}}$ à une constante multiplicative près.*

La condition « sans connexion de selles » dans le théorème 7 signifie que l’ensemble des surfaces qui ont une connexion de selles horizontale a mesure nulle. Dans le cas des tores marqués, une connexion de selles correspond à un segment horizontal reliant deux points marqués. Le cas où \mathcal{M} est la strate principale $\mathcal{H}(1, \dots, 1)$ avait déjà été démontré par Lindenstrauss-Mirzakhani [LM08]. Le résultat suivant est nouveau, même dans le cas de la strate principale :

Théorème 8. [SSWY24, Théorème 1.2] *Soit \mathcal{M} une sous-variété invariante et soit q une surface sans cylindre horizontal. Alors la feuille du feuilletage horosphérique passant par q est dense dans \mathcal{M} .*

Un cylindre horizontal sur une surface (X, ω) est une famille de lacets homologues γ tels que $\gamma^* \mathfrak{I}(\omega) = 0$. La présence d’un cylindre horizontal implique en particulier la présence d’une connexion de selles horizontale. Contrairement au théorème 7, il est suffisant d’exclure la présence de cylindres horizontaux dans l’énoncé du théorème 8. Cela est du au fait que nous savons déformer une surface dans sa feuille horosphérique de sorte à

allonger les connexions de selles horizontales mais nous ne savons pas en général le faire de façon à préserver les mesures horosphériques. Cela est tout de même possible en rang 1 grâce aux flots réels et nous obtenons la classification suivante :

Théorème 9. [SSWY24, Théorème 5.4] *Soit \mathcal{M} une sous-variété invariante de rang 1. Si μ une mesure horosphérique alors soit μ est la mesure $m_{\mathcal{M}}$ soit μ est la mesure de Lebesgue sur une feuille horophérique compacte.*

2.4.2. *Techniques de preuves pour le théorème 7.* Les théorèmes 8 et 9 se déduisent assez facilement du théorème 7. La preuve du théorème 7 est modelée sur l'argument de *thickening* qui a été introduit la première fois par Margulis dans [Mar04]. Nous utilisons de façon cruciale la non-divergence du flot horocyclique, établie par Minsky-Weiss [MW02], et le mélange du flot géodésique, établi par [AG10], ainsi que des résultats de comparaison des mesures horosphériques sur des *boites feuillettées* que nous établissons. Plusieurs difficultés sont apparues dans notre adaptation de la théorie de la dynamique des actions de groupes horosphériques dans les espaces homogènes. Celles-ci sont essentiellement dues à la nature non-homogène des sous-variétés invariantes : points d'auto-intersection, points orbifolds et non-complétude des feuilles (points que nous avons volontairement omis dans la définition de sous-variétés invariantes pour des raisons de clarté de la présentation). Nous résolvons ces difficultés grâce à une nouvelle approche des sous-variétés invariantes que nous développons avec J.Smillie dans [SY]. Cette approche utilise le langage des structures géométriques (voir [Gol]). Nous établissons aussi dans [SSWY24] un dictionnaire entre les mesures dans l'espace de modules et les mesures invariantes par le groupe modulaire dans l'espace des surfaces de translation marquées. Cet espace est une variété lisse et notre dictionnaire nous permet d'y transférer tous les calculs différentiels.

2.4.3. *Flot horocyclique dans les sous-variétés invariantes de rang 1.* Dans cette section, je décris mes résultats obtenus en collaboration avec J.Chaika et B.Weiss sur la dynamique du flot horocyclique. Nos travaux sont modelés sur la théorie de Ratner pour les flots unipotents dans les espaces homogènes qui affirme, de façon très simplifiée, que chaque orbite d'un flot unipotent est equidistribuée dans une sous-variété fermée. Cette théorie est articulée en deux temps que nous résumons de la façon suivante : 1) classifier les mesures invariantes ergodiques 2) en déduire la classification des adhérences d'orbites et equidistribution. De nombreux travaux s'attellent à transposer la partie 1) de la théorie de Ratner dans différents contextes des espaces de modules. Dans [CWY23a] nous établissons l'équivalent de la partie 2) et nous exhibons de nouvelles situations où la partie 1) est possible.

Nous dirons qu'une sous-variété invariante \mathcal{M} de rang 1 satisfait la *classification faible des mesures U -invariantes* si pour toute mesure horocyclique et ergodique μ , il existe $\xi \in Z_{\mathcal{M}}$ et une sous-variété invariante $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ tels que $\mu = \text{Rel}_{\xi_*} m_{\mathcal{N}}$. L'application Rel_{ξ} est le *flot réel avec paramètre ξ* dont nous omettons la définition exacte et mentionnons simplement que les flots réels sont définis sur un ouvert dense de \mathcal{M} , sont tangents à $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ et commutent avec l'action de U , et ξ est paramétré par un espace vectoriel $Z_{\mathcal{M}}$ sur \mathbb{R} dont la dimension est la moitié de la dimension complexe des feuilles de $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$. Rappelons que les mesures de la forme $m_{\mathcal{N}}$ pour $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ sont exactement les mesures $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ -invariantes et ergodiques dont le support est contenu dans \mathcal{M} et donc elles sont U -invariantes et ergodiques (en vertu du phénomène de Mautner). Puisque les flots réels commutent avec le flot horocyclique, l'image des mesures $m_{\mathcal{N}}$ par ceux-ci produisent de nouvelles mesures U -invariantes ergodiques. La classification faible demande qu'il n'y ait pas d'autres exemples de mesures U -invariantes ergodiques sans connexion de selles horizontale. Conjecturalement, toutes les sous-variétés invariantes de rang 1 satisfont la classification faible. De plus, les mesures U -invariantes ergodiques avec des connexions de selles horizontales proviennent de mesures sans connexion de selles sur des sous-variétés invariantes de rang 1 dans le bord de \mathcal{M} dans une compactification adaptée. Leur étude devrait donc découler de la compréhension des mesures sans connexion de selles mais relève de techniques topologiques différentes qui ne sont pas l'objet de [CWY23a]. Nous montrons :

Théorème 10. [CWY23a, Théorème 6.2] *Soit \mathcal{M} une sous-variété invariante de rang 1 satisfaisant la classification faible des mesures U -invariantes. Soit (X, ω) une surface de translation sans connexion de selles horizontale. Alors l'adhérence de la U -orbite de (X, ω) est une sous-variété à bord $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ supportant une mesure lisse U -invariante et ergodique $\nu_{\mathcal{O}}$ telle que*

$$(5) \quad \frac{1}{T} \int_0^T u_{s*} \delta_{(X, \omega)} \, ds \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} \nu_{\mathcal{O}}$$

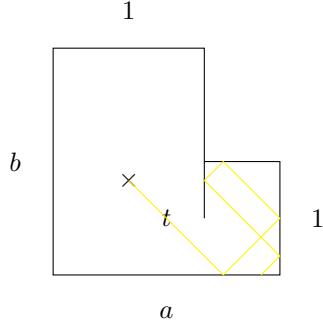


FIGURE 2. Une trajectoire de billard en jaune dans la table de billard $L(a, b, t)$

La mesure $\nu_{\mathcal{O}}$ qui apparaît dans (5) est de la forme $\text{Rel}_{\xi_*} m_{\mathcal{N}}$ pour une sous-variété invariante $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ en vertu de la classification faible des mesures U -invariantes et la variété à bord \mathcal{O} est l'image de \mathcal{N} par Rel_{ξ} , le bord provenant des singularités du flot Rel_{ξ} . La présence de bord est une subtilité nouvelle qui apparaît dans les espaces de modules. Il est instructif de comparer (5) avec (4) apparaissant dans la théorème de la baguette magique. Par contraste, il est démontré dans [CSW20] qu'il existe dans $\mathcal{H}(1, 1)$ un ensemble G_{δ} -dense de surfaces de translation pour lesquelles (5) n'est pas satisfaite pour aucune mesure. Mentionnons que $\mathcal{H}(1, 1)$ est une sous-variété invariante de rang 2 bien que contenant de nombreuses sous-variétés invariantes de rang 1 satisfaisant la classification des mesures U -invariantes (leur réunion est dense dans $\mathcal{H}(1, 1)$) comme démontré dans [BSW16].

Nous obtenons aussi une version uniforme du Théorème 10 [CW23, Théorème 6.4] qui est un analogue d'un résultat de Dani-Margulis [DM, Théorème 3] dans le cas des espaces homogènes. Nous obtenons aussi différents résultats d'équidistribution pour différentes suites de mesures [CW23, Théorème 7.1] ou [CW23, Théorème 7.3], ainsi que le résultat d'équidistribution des grands cercles suivant :

Théorème 11. [CWY23a, Théorème 7.4] *Soit \mathcal{M} une sous-variété invariante de rang 1 qui satisfait la classification faible des mesures U -invariantes et soit $q \in \mathcal{M}$. Alors, la suite de mesures $f_0^{2\pi}(g_t r_{\theta})_* \delta_q d\theta$ converge quand $t \rightarrow \infty$ pour la topologie préfable vers $m_{\mathcal{N}}$ où \mathcal{N} est l'adhérence de la $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ -orbite de q .*

Dans l'énoncé du théorème 11, nous dénotons par r_{θ} la rotation d'angle θ et δ_q la mesure de Dirac en q . Nous rappelons que g_t a été défini dans (2). Nous montrons enfin le résultat suivant :

Théorème 12. [CWY23a, Théorème 3.3] *Soit \mathcal{M} une sous-variété invariante de dimension ≤ 3 . Alors \mathcal{M} satisfait la classification faible des mesures U -invariantes.*

Dans [CWY23a, Corollaire 4.5] nous considérons une situation plus générale où nous autorisons aussi l'ajout de points marqués. Par exemple soit (X, ω) une forme propre de Prym dans $\mathcal{H}^{odd}(2, 2)$, soit z_1, \dots, z_n des points non singuliers sur X et soit \mathcal{M} l'adhérence de la $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ -orbite de $(X, \omega, z_1, \dots, z_n)$. Alors il découle de [CW23, Corollary 4.5] que \mathcal{M} satisfait la classification faible des mesures U -invariantes. Ce corollaire 4.5 généralise des résultats de Eskin-Masur-Schmoll [EMS03] et Eskin-Marklof-Morris [EMM06].

Soit $a, b > 0$ et $t \in [0, 1)$ et soit $L(a, b, t)$ la table de billard avec une barrière verticale représentée dans la figure 2. Le flot du billard consiste à suivre une particule évoluant sans frottements à vitesse unitaire et rebondissant de façon élastique sur les parois du billard selon les lois de l'optique. Les théorèmes 11 et 12 ont le corollaire suivant concernant le comptage des trajectoires périodiques du flot du billard que nous démontrons en reprenant un formalisme développé par Veech [Vee98] et Eskin-Masur [EM01] :

Théorème 13. [CWY23a, Théorème 7.5] *Soit $a = x + z\sqrt{d}$ et $b = y + z\sqrt{d}$ où $d \in \mathbb{N}$ et $x, y, z \in \mathbb{Q}$ sont tels que $x + y = 1$ et soit $t > 0$. Si $p \in L(a, b, t)$ et $L > 0$, nous dénotons par $N_p(L)$ le nombre de trajectoires périodiques du flot du billard de longueur au plus L et passant par p dans le billard $L(a, b, t)$. Alors pour tout $p \in L(a, b, t)$ il existe $c > 0$ tel que :*

$$N_p(L) \cdot L^{-2} \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{} c$$

Le théorème 13 est une manifestation du paradigme mentionné en introduction reliant compréhension de la dynamique de l'action de U et géométrie des surfaces de translation et objets reliés. Mentionnons qu'il existe des tables de billard particulièrement élémentaires (dans certains triangles par exemple) pour lesquelles on ne sait pas exhiber une seule trajectoire périodique. Le théorème 13 peut être interprété comme un analogue du problème de Gauss qui consiste à compter le nombre de points du réseaux \mathbb{Z}^2 dans la boule euclidienne centrée en l'origine de rayon L . En effet, une géodésique périodique de longueur $\leq L$ sur la surface de translation $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i], dz)$ provenant du « dépliage » du billard carré correspond à un point de \mathbb{Z}^2 à distance au plus L de l'origine par la théorie des revêtements pour le revêtement $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$.

2.5. Techniques de preuve des théorèmes 10 et 12. Soit \mathcal{M} une sous-variété de rang 1 et soit $q \in \mathcal{M}$. L'idée principale pour passer d'une compréhension des mesures U -invariantes à une compréhension de l'adhérence des U -orbites afin de prouver le théorème 10 consiste à étudier les valeurs d'adhérence de la famille de mesures $\mu_T = \frac{1}{T} \int_0^T \delta_{u_t q} dt$. Le fait que cette famille est relativement compacte découle de la non-divergence du flot horocyclique [MW02] qui affirme qu'une orbite passe la plupart de son temps dans la partie compacte de l'espace de modules. Nous montrons, sous l'hypothèse de classification faible des mesures U -invariantes, que la suite μ_T converge vers une mesure ergodique et est donc de la forme $m_{\mathcal{M}}$, à moins qu'il existe ξ et $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ tels que $\text{Rel}_{\xi}(q) \in \mathcal{N}$ (auquel cas on remplace \mathcal{M} par une telle sous-variété invariante \mathcal{N}). Notre approche repose sur un résultat de divergence lente à proximité des sous-variétés à bord U -invariantes [CWY23a, Proposition 5.7]. En combinant ce principe de divergence lente et une décomposition ergodique des valeurs d'adhérence de la famille $(\mu_T)_{T>0}$, nous pouvons déduire la preuve du théorème 10. La preuve du théorème 12 repose elle sur une adaptation d'argument classique dû Ratner et connu sous le nom de *dérive polynomial* ou *H-principe*. Cet argument est basé sur une analyse de la direction de séparation de deux particules voyageant le long du flot horocyclique et initialement indiscernables.

Deux difficultés qui n'existent pas dans la théorie des flots unipotents sur les espaces homogènes apparaissent dans ce cadre nouveau des sous-variétés de rang 1. La première est le fait que \mathcal{M} n'est pas parallélisable (*i.e.* son fibré tangent n'est pas trivial). Ceci est remplacé par l'existence d'une connexion $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ -equivariante, ce qui permet, étant donnés deux points proches x, y et $u \in U$, de comparer la position respective de deux points ux, uy en fonction de celle de x et y et de rendre effectif le *H-principe* de Ratner. La deuxième difficulté est due au fait que les flots réels ne sont définis que sur un sous-ensemble ouvert et dense de \mathcal{M} ce qui pose en particulier de sérieux problèmes d'injectivité. Nous pouvons néanmoins obtenir d'assez grands domaines d'injectivité en combinant des arguments de renormalisation par le flot géodésique et de non-divergence du flot horocyclique. Cette partie utilise crucialement l'absence de connexion de selles horizontale qui seraient contractées à vitesse exponentielle par le flot géodésique, mettant ainsi en échec notre processus de renormalisation.

3. PROJETS DE RECHERCHE EN COURS

3.1. Flot horocyclique dans les espaces de modules (suite). Dans cette partie, je décris des travaux en cours faisant suite à la partie §2.4.3 et en collaboration avec J. Chaika et B. Weiss. Les singularités des flots réels mentionnées précédemment rendent compliquées l'étude des mesures U -invariantes dans une sous-variété invariante de rang 1. Cela explique les hypothèses restrictives du théorème 12. Dans [CWY23b], nous montrons néanmoins :

Théorème 14. *Soit \mathcal{M} une sous-variété invariante de rang 1 et soit ν une mesure U -invariante et ergodique sans connexion de selles horizontale. Alors $\text{supp}(\nu)$ est une sous-variété à bord U -invariante. De plus, si $q \in \mathcal{M}$ n'a pas de connexion de selles horizontale, alors $U \cdot q$ est dense dans une sous-variété à bord U -invariante.*

Nous obtenons aussi un résultat d'uniforme densité, inspiré des travaux de Dani-Margulis [DM93] et leur technique de linéarisation, donnant une borne inférieure sur le temps nécessaire pour obtenir ε -densité des U -orbites de points d'une sous variété invariante de rang 1 vivant suffisamment loin des sous-variétés à bord U -invariantes de codimension positive décrites par le théorème 14 :

Théorème 15. *Soit \mathcal{M} une sous variété invariante de rang 1 et soit $\varepsilon > 0$. Il existe un nombre fini de sous variétés U -invariantes $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n \subset \mathcal{M}$ tel que pour tout compact $K \subset \mathcal{M} \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i$, il existe $T_0 > 0$, tel que pour tout $\forall T > T_0$ et $q \in K$, le segment d'orbite $u_{[0,T]} \cdot q$ est ε -dense dans \mathcal{M} .*

Ces résultats contrastent fortement avec les résultats de [CSW20] qui exhibent des exemples d'adhérence de U -orbites de dimension de Hausdorff non-entière dans $\mathcal{H}(1, 1)$, qui est une sous-variété invariante de rang 2. L'originalité de notre approche vient du fait qu'elle repose sur une récurrence topologique sur la dimension en utilisant des dégénérescences au bord de l'espace de modules et utilisant les théorèmes 12 et 10 comme cas de base. Au passage, nous introduisons la notion de surface de translation singulière que permet de traiter efficacement certaines dégénérescences des surfaces de translation. Nous montrons par exemple que les trajectoires du flot réel convergent naturellement vers une surfaces de translation singulière. Nous construisons l'espace de surfaces de translation singulières marquées, qui joue le rôle de l'analogue de l'espace de Teichmüller augmenté pour les courbes stables, montrons qu'il est naturellement muni d'une action du Mapping class group et que l'espace quotient admet une stratification de Whitney en orbifolds. Cette espace fournit une bordification géométrique naturelle de $\Omega\mathcal{M}_g$ et est muni d'une action de $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ qui étend l'action usuelle de $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}) \curvearrowright \Omega\mathcal{M}_g$. Cette construction nous semble plus naturelle et maniable que la compactification wsyswq utilisée par Mirzakhani et Wright dans [MW17], bien qu'elle en soit très proche. Il est intéressant de noter que nous arrivons à obtenir une classification topologique sans obtenir une classification des mesures U -invariantes comme c'est traditionnellement le cas en dynamique homogène, par exemple dans la théorie de Ratner. Ceci pose la question particulièrement intéressante suivante :

Problème 1. *Soit \mathcal{M} une sous variété invariante de rang 1. Existe-t-il deux mesures U -invariantes et ergodiques distinctes ayant le même support ?*

Par analogie, nous rappelons que les flots de translation dans les surfaces de translation peuvent être minimaux et non-uniquement ergodiques, y compris pour des surfaces vivant dans des sous-variétés de rang 1. Ce genre de phénomène est à l'origine des U -orbites fractales découvertes par [CSW20] mentionnées ci-dessus.

J'ai donné un exposé sur ces travaux en cours au printemps 2024 lors de la conférence « Group actions with hyperbolicity and measure rigidity » organisée à l'institut Henri Poincaré. Voici le [lien](#) vers la vidéo de l'exposé.

3.2. Structures géométriques sur les fermés invariants de l'espace de modules. Ce projet en cours est en collaboration avec J.Smillie. Nous donnons une nouvelle interprétation du théorème de la baguette magique [EM18, EMM15] en terme de structures géométriques, selon la terminologie de Goldman [Gol] :

Théorème 16. *L'adhérence d'orbite de n'importe quelle surface $q \in \Omega\mathcal{M}_g$ sous l'action de $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ est l'image d'un orbifold affine et unimodulaire avec une structure réelle et muni d'une action affine réelle ergodique de $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ par une application propre, affine réelle, $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ -équivariante et génériquement injective.*

Cet énoncé renforce donc le théorème de la baguette magique, et répare une brèche dans la littérature sur la dynamique de Teichmüller : bien qu'énoncé comme un résultat de rigidité de l'action de $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ sur l'espace de modules, le théorème de la baguette magique n'est en fait valable que pour son action sur un revêtement non-singulier de cet espace. Cette subtilité est souvent ignorée et nous montrons que cela est sans conséquence. Notons que la propriété d'injectivité générique n'est pas stable par passage au quotient. Nous n'utilisons par ailleurs que la description locale des adhérences d'orbites et des mesures ergodiques invariantes données par les travaux d'Eskin, Mirzakhani et Mohammadi et retrouvons leur formalisation globale comme un cas particulier de notre Théorème 16

Nous introduisons au passage la notion de « lieu linéaire » dans les espaces de modules qui donne une description alternative particulièrement simple des adhérences d'orbites sans faire références aux structures géométriques ni aux orbifolds. Cette formulation est bien adaptée à des arguments de géométrie différentielle sur les sous-variétés invariantes, elle a été utilisée de façon cruciale dans [SSWY24]. Nous espérons qu'elle sera aussi utile pour de futurs travaux en dynamique de Teichmüller, notamment ceux portant sur la dynamique du flot horocyclique.

4. PROGRAMME DE RECHERCHE

4.1. Un problème de comptage pour les réseaux des groupes de Lie et les surfaces de translation. Rappelons le problème de comptage suivant qui est le cadre général du théorème 13 présenté dans la partie §2.4.3 : soit (X, ω) une surface de translation. Une connexion de selles est un segment de droite dans X

qui relie deux singularités ou une singularité à elle même. Pour $L > 0$, dénotons par $N(X, \omega, L)$ le nombre de connexion de selles sur X de longueur au plus L . Un des succès de la dynamique de Teichmüller est le résultat suivant : il existe une constante $c > 0$ telle que $N(X, \omega, L) \cdot L^{-2}$ converge au sens de Césaro vers c quand $L \rightarrow \infty$. Ce résultat découle de travaux dus à Eskin-Masur [EM01] et Eskin-Mirzakhani [EM18] qui sont eux-même inspirés d'une littérature abondante en dynamique homogène (La connexion a été établie par Veech dans [Vee98]) et basés sur l'équidistribution des grands disques dans les espaces de modules de surfaces de translation.

Ce projet de recherche s'intéresse à une variation de ce problème de comptage où la direction des connexion de selles considérées est de plus en plus contrainte à mesure que $L \rightarrow \infty$. L'équidistribution des grands disques sera remplacée par l'équidistribution de grandes trajectoires de certaines marches aléatoires dans $\Omega\mathcal{M}_g$ modelée sur les travaux de Benoist-Quint [BQ11]. Bien que ce projet soit écrit dans le cas des surfaces de translation, il est à noter que les énoncés ont leur analogue en dynamique homogène et il sera intéressant de les étudier conjointement. Détailons maintenant le problème envisagé.

Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ un semi-groupe de Schottky dont on dénote par a_1, \dots, a_d un système de générateurs. L'ensemble limite $\mathcal{K} \subset \mathbf{P}^1(\mathbb{R})$ de Γ est un ensemble fractal dont on dénote par δ la dimension de Hausdorff. Cet ensemble peut être obtenu comme une intersection décroissante d'ensembles compacts K_n , construit de la façon suivante : Soit $K_0 = \cup_{i=1}^d I_i$ une union disjointe de d petits intervalles autour des points fixes attractifs des a_i et pour tout $n > 1$, dénotons par K_n la réunion des $b_1 \dots b_n I_i$ pour $b_1, \dots, b_n \in \{a_1, \dots, a_d\}$. Nous définissons la mesure uniforme suivante :

$$\mu = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \delta_{a_i}.$$

Si λ l'exposant de Lyapunov de la marche aléatoire induite par μ sur \mathbb{R}^2 , remarquons que la taille de K_n est de l'ordre de $\lambda^{-2n}|K_0|$, ce qui explique que nous dénotons cet ensemble $\mathcal{K}_{\lambda^{-2n}}$ pour indiquer qu'il s'agit d'un épaissement de taille λ^{-2n} de \mathcal{K} . Nous dénotons par $N(q, \mathcal{K}, \ell)$ le nombre de connexion de selles de taille au plus ℓ dont la direction est dans \mathcal{K}_ℓ . Nous pouvons maintenant énoncer le problème principal de ce projet de recherche.

Problème 2. Montrer que pour toute surface de translation, il existe une constante $c > 0$ telle que $N(q, \mathcal{K}, \ell) \cdot \ell^{-2\dim(\mathcal{K})}$ converge vers c au sens de Césaro.

Il est instructif de comparer les taux de croissance dans le problème 2 et dans la version classique du problème de comptage rappelé au début de cette section (la dimension de Hausdorff du cercle est 1!). Nous insistons sur le fait que nous espérons pouvoir prouver ce résultat asymptotique pour toute surface de translation. Comme mentionné plus haut, l'approche suggérée pour résoudre le problème 2 repose sur des résultats d'équidistribution de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -marches aléatoires dans l'espaces de modules des surfaces de translation $\Omega\mathcal{M}_g$. Nous aurons besoin du résultat suivant :

Problème 3. Montrer que n'importe quelle mesure μ -stationnaire et ergodique sans atome est $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -invariante. En particulier, montrer que la suite de mesures $\mu^{*n} * \delta_q$ converge au sens de Césaro vers une mesure $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -invariante pour n'importe quelle surface $q \in \Omega\mathcal{M}_g$.

Le problème précédent établirait en particulier une situation de *stiffness* au sens de Furstenberg [Fur98]. Les problèmes 2 et 3 sont reliés par la transformée de Siegel-Veech qui permet de convertir notre problème de comptage en un problème de convergence de la mesure $\mu^{*n} * \delta_q$. Le problème 3 est un analogue du théorème de la baguette magique et sa résolution reposera sur des techniques analogues. Dans la version dynamique homogène du problème de comptage présenté ici où nous remplacerions par exemple les connexions de selles par des points de \mathbb{Z}^d , l'équivalent du problème 3 découle des résultats de Benoit-Quint [BQ11] dans l'espace des réseaux $SL(d, \mathbb{R})/SL(d, \mathbb{Z})$. La seule autre application des résultats de Benoit-Quint que nous connaissons est donnée dans [SW19].

4.2. Marches aléatoires Zariski-denses sur les surfaces de translation. Ce projet propose d'étudier des phénomènes de rigidité pour les marches aléatoires Zariski-denses sur les surfaces de translation. La littérature est riche de résultats influents établissant de tels résultats de rigidité pour diverses actions de groupes sur les espaces homogènes, dont nous nous sommes inspirés pour la rédaction de ce projet. Nous citons

en particulier les travaux de Dani sur l'action des groupes horosphériques dans les espaces homogènes [Dan81], ceux de Ratner sur les flots unipotents [Rat91] puis ceux de Benoist et Quints sur la rigidité des marches aléatoires Zariski-denses dans les espaces homogènes [BQ11]. Plus récemment, ces résultats et les techniques de démonstrations ont été exportés à des cadres non-homogènes, par nature plus délicats à manipuler. Nous pensons en particulier aux travaux d'Eskin-Mirzakhani [EM18] et Eskin-Mirzakhani-Mohammadi [EMM15] dans l'espace de modules des surfaces de translation, ainsi qu'aux travaux de Brown-Rodriguez Hertz [BH14] sur les marches aléatoires hyperboliques sur les surfaces compactes et ceux de Cantat-Dujardin [CD20] sur les difféomorphismes algébriques de surfaces algébriques réelles. Ce projet propose d'établir de nouvelles situations de rigidité pour des actions de groupes dans un cadre non-homogène.

Soit (X, ω) une surface de translation et dénotons par $\Sigma_\omega \subset X$ l'ensemble des zéros de ω . Si $p \in X$ et $U \subset X \setminus \Sigma_\omega$ est un ouvert contractile contenant p , nous définissons la fonction lisse suivante :

$$(6) \quad \varphi : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad q \mapsto \int_p^q \omega.$$

Il est aisément vérifiable que φ réalise un biholomorphisme sur son image et que $\varphi^* dz = \omega$ si $p \in X \setminus \Sigma_\omega$. Nous obtenons un atlas holomorphe compatible en collectant l'ensemble des paires (U, φ) comme dans (6) pour lesquelles les fonctions de transition associées sont des translations. Nous appellerons ces cartes des *cartes plates*. Nous dirons qu'un difféomorphisme $f : X \rightarrow X$ est *affine* s'il existe une matrice inversible M_f telle que pour tout point $p \in X \setminus \Sigma_\omega$ nous avons :

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} = M_f,$$

Par exemple, une matrice $M \in SL(2, \mathbb{Z})$ induit un difféomorphisme affine f du tore plat $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i], dz)$ qui satisfait $M_f = M$. Les pseudo-Anosov (orientables) fournissent d'autres exemples de difféomorphismes affines. Nous dénotons par $\text{Aff}(X, \omega)$ l'ensemble des difféomorphismes affines de (X, ω) et nous définissons le morphisme de groupe suivant :

$$\rho : \text{Aff}(X, \omega) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R}), \quad f \mapsto M_f.$$

L'image de ρ est traditionnellement dénotée par $SL(X, \omega)$ et appelé le *groupe de Veech* de (X, ω) . Par exemple, le groupe de Veech du tore plat $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i], dz)$ coïncide avec le groupe $SL(2, \mathbb{Z})$. Plus généralement, une *surface de Veech* est une surface dont le groupe de Veech est un réseau (celui-ci est toujours non-uniforme). En particulier, il découle du Théorème de densité de Borel que dans ce cas $SL(X, \omega)$ est Zariski-dense dans $SL(2, \mathbb{R})$. Il existe de nombreux autres exemples de surfaces de translation dont le groupe de Veech est Zariski-dense dans $SL(2, \mathbb{R})$, par exemple les surfaces de type *Thurston-Veech* (ou *prelattice*) dont le groupe de Veech contient deux paraboliques non-commutatifs, ou encore la surface de Arnoux-Yoccoz en genre 3 qui, sans être une surface de Veech, possède deux hyperboliques non-commutatifs dans son groupe de Veech. Ces sont ces cas là où $SL(X, \omega)$ est Zariski-dense dans $SL(2, \mathbb{R})$ qui nous intéressent dans ce projet. Nous proposons d'étudier le problème suivant :

Problème 4. Soit (X, ω) une surface de translation et soit μ une probabilité à support compact sur $\text{Aff}(X, \omega)$ telle que $\rho(\Gamma_\mu)$ est Zariski-dense dans $SL(2, \mathbb{R})$, où Γ_μ est le groupe engendré par μ . Alors la mesure d'aire sur X donnée par ω est l'unique mesure μ -stationnaire sans atome. De plus, pour tout $x \in X$ dont la Γ_μ -orbite est infinie, la suite de mesures $\mu^{*n} * \delta_x$ converge vers la mesure d'aire sur X quand $n \rightarrow \infty$.

Dans l'énoncé précédent, l'opérateur $*$ désigne la convolution des mesures. La mesure $\mu^{*n} * \delta_x$ donne la loi de la position de la marche aléatoire issue de x au temps n . Le cas où Γ_μ est engendré par deux pseudo-Anosov transverses est particulièrement instructif. Par comparaison, l'action d'un seul pseudo-Anosov possède de nombreuses mesures invariantes. L'archétype de ce genre de phénomène est décrit par la conjecture $\times 2 \times 3$ de Furstenberg. Il est naturel de poser le problème suivant :

Problème 5. Soit $\Gamma \subset \text{Aff}(X, \omega)$ un semi-groupe tel que $\rho(\Gamma)$ est Zariski-dense dans $SL(2, \mathbb{R})$. Alors tout sous-ensemble Γ -invariant infini est dense.

Une résolution du Problème 5 a été donnée en 2003 par [GHS03] par des techniques complètement différentes dans le cas où (X, ω) est de type Thurston-Veech et $\Gamma = \text{Aff}(X, \omega)$. Les problèmes 4 et 5 ont

déjà été résolus dans le cas où (X, ω) est $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i], dz)$, c'est un cas particulier de la théorie de Benoist-Quint. [BQ11].

Notre approche pour la résolution du problème 4 repose sur la technique du *drift exponentiel* introduite par Benoist-Quint dans [BQ11] pour étudier les marches aléatoires dans les espaces homogènes. Cette technique permet de détecter certaines propriétés d'invariance additionnelle des mesures stationnaires qui peuvent ensuite être promues une classification via la théorie de Ratner. Dans notre cas, les flots unipotents de la théorie de Ratner sont remplacés par les flots de translation dans la surface (X, ω) . Bien qu'une classification des mesures invariantes par ces flots soit, en général, hors de portée, nous pouvons quand même espérer résoudre le problème suivant, suffisant pour remplacer la théorie de Ratner dans notre cas. Dénotant pas ν l'unique mesure μ stationnaire sur le cercle S^1 et par ϕ_θ^t le flot de translation dans la direction θ sur (X, ω) .

Problème 6. Montrer que pour ν -presque tout $\theta \in S^1$, le flot ϕ_θ^t est uniquement ergodique.

Le problème 6 est un cas particulier du problème 7 considéré dans la section suivante à laquelle nous renvoyons pour les idées de preuve.

4.3. Unique ergodicité des flots de translation dans des directions harmoniques. Soit (X, ω) une surface de translation. La partie imaginaire de la 1-forme $e^{i\theta}\omega$ définit un feuilletage en droite sur $X \setminus \Sigma_\omega$. Le flot de translation dans la direction θ que l'on dénote par ϕ_θ^t consiste à translater à vitesse unitaire les points le long de ce feuilletage. Un théorème important de Kerchoff-Masur-Smillie [KMS86] datant des années 80 affirme que ce flot est uniquement ergodique pour presque-tout $\theta \in S^1$ pour la mesure de Lebesgue sur le cercle.

Soit maintenant μ une mesure de probabilité à support compact sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et soit Γ_μ le support de cette mesure, c'est à dire le plus petit sous-groupe de μ -mesure 1. Supposons que Γ_μ est un sous-groupe zariski dense dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et soit ν_μ l'unique mesure μ -stationnaire sur S^1 correspondant à la marche aléatoire de Γ_μ sur S^1 i.e. celle dont les sauts sont choisis indépendamment avec loi μ . Nous proposons de généraliser le résultat de Kerchoff-Masur-Smillie de la façon suivante :

Problème 7. Soit (X, ω) une surface de translation. Montrer que le flot de translation ϕ_θ^t sur X dans la direction θ est uniquement ergodique pour presque tout $\theta \in S^1$ pour la mesure ν_μ .

Il existe de nombreuses constructions de mesure μ pour lesquelles ν_μ est soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue soit singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est en ce sens que le problème précédent est une généralisation du résultat de Kerchoff-Masur-Smillie.

Le critère de Masur [Mas92] énonce que le flot de translation sur (X, ω) est uniquement ergodique dès que $g_t(X, \omega)$ est non-divergent dans \mathcal{H} quand $t \rightarrow +\infty$. La non-divergence permet essentiellement de traiter (X, ω) comme un point périodique du flot g_t , qui transforme un segment vertical de longueur e^t en un autre de longueur 1. Il est donc possible d'utiliser un argument de *matching* des trajectoires verticales arbitrairement longues et de conclure par le Théorème Ergodique de Birkhoff qu'il n'y a qu'une unique mesure invariante. C'est une modification de l'argument *horosphérique* utilisé par Dani dans [Dan81] et qui est attribué à Margulis. C'est donc un argument par *renormalisation*. Pour approcher le problème 7, nous proposons d'adapter l'argument de Masur en remplaçant le flot g_t par la marche aléatoire issue de (X, ω) dont la loi des sauts est donnée par μ . Il est essentiel ici que le support de μ soit Zariski-dense dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ pour garantir la positivité de l'exposant de Lyapunov de la marche aléatoire (voir [FK60]) et s'assurer que la renormalisation est effective. Pour remplacer la non-divergence du flot de g_t , nous aurons besoin de résoudre le problème suivant :

Problème 8 (Non-divergence des marches aléatoires Zariski-denses sur \mathcal{H}). Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble compact $K \subset \mathcal{H}$ tel que pour tout $(X, \omega) \in \mathcal{H}$, il existe n_0 tel que pour tout $n > n_0$, on a

$$(7) \quad (\mu^{*n} * \delta_{(X, \omega)})(K) > (1 - \varepsilon).$$

Le Problème 8 est très semblable à [EM04] dont la preuve pourra être adaptée avec profit, en remplaçant la notion de *systole pour les réseaux* par celle de *plus petite connexion de selles sur M* . Ce résultat est intéressant indépendamment du présent projet. Un résultat correspondant pour le flot horocyclique a été obtenu par Minsky-Weiss dans [MW02]. Nous signalons aussi le résultat de non-divergence [BQ12] dont l'adaptation à l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sur \mathcal{H} serait très intéressante.

4.4. Birkhoff générnicité dans des directions fractales, diffusion dans le modèle du wind-tree et approximations diophantiennes. Ce projet est constitué d'une première partie où serons établis des résultats de rigidité de certaines marches aléatoires sur l'espace de modules des surfaces de translation et d'une seconde partie où nous envisageons une application de ces résultats à l'étude de la diffusion dans le modèle du wind-tree et aux approximations diophantiennes sur les surfaces de translation.

4.4.1. Marches aléatoires et Birkhoff générnicité pour le flot géodésique. Soit $s > 0$ et $t > 0$ deux nombres réels positifs, et dénotons $h_{s,t} = g_t u_{se-t} = \begin{pmatrix} e^t & s \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. Dénotons par $\mathcal{K} \subset S^1$ l'ensemble limite du groupe $\Gamma = \langle g, h \rangle$. Il s'agit d'une fractale autosimilaire dont on dénote par δ la dimension de Hausdorff. Soit $\nu_{\mathcal{K}}$ la mesure de probabilité δ -dimensionnelle sur \mathcal{K} . Soit \mathcal{H} une strate de l'espace de modules des surfaces de translation et dénotons par $r_\theta \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ la rotation d'angle θ . Nous proposons d'établir le résultat suivant :

Problème 9. Soit q une surface de translation dont on dénote par \mathcal{M} la $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -orbite. Montrer que pour $\nu_{\mathcal{K}}$ -presque tout $\theta \in S^1$ et pour toute $f \in C_c(\mathcal{H})$, nous avons

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(g_t r_\theta q) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \nu_{\mathcal{M}}.$$

où $\nu_{\mathcal{M}}$ est la mesure linéaire sur \mathcal{M} .

Le cas où $\nu_{\mathcal{K}}$ est remplacée par la mesure de Lebesgue dans le problème précédent est du à Chaika-Eskin [CE13]. L'action du flot géodésique sur une sous-variété invariante \mathcal{M} est ergodique par rapport à la mesure $m_{\mathcal{M}}$, ce qui découle d'une version adaptée de l'argument de Hopf. Établir le résultat du problème 9 précédent pour $\nu_{\mathcal{M}}$ -presque toute surface est donc une conséquence du théorème de Birkhoff pour les actions ergodiques. L'originalité du problème 9 est qu'il propose d'établir ce fait pour **toute** surface de translation. Nous prévoyons d'approcher ce résultat via une classification des mesures stationnaires pour l'action de Γ sur \mathcal{H} et un résultat de pistage des géodésiques $t \mapsto g_t r_\theta q$ par des trajectoires de la marche aléatoire correspondante. Cette classification est modelée sur les résultats d'Eskin-Mirzakhani [EM18]. Une difficulté que nous avons identifiée sera d'établir l'équivalent de [EM18, Théorème A.3] assurant une certaine *hyperbolicité* de la marche aléatoire et jouant le rôle de la positivité du premier exposant de Lyapunov dans le cas homogène, qui est due à Fursteberg [FK60]. Il sera intéressant d'étudier le cas des variétés invariantes de rang 1 dans un premier temps où ce fait est automatiquement vérifié. Dans ce cas, nous devrions de plus être avantagés par la compréhension partielle des mesures U -invariantes via les résultats des parties §2.4.3 et §3.1.

4.4.2. Application à l'étude du modèle du wind-tree. Dans cette partie, nous proposons une application des résultats mentionnés plus haut à l'étude des flots de translation sur des surfaces de translation d'aire infini. Des exemples bien connus de tels flot sont donnés par le flot du billard dans les billards *irrationnels*, c'est à dire ceux dont les arrêtes forment entre-elles des angles de mesure un multiple irrationnel de π . Les techniques de renormalisation des espaces de modules qui sont efficaces dans le cas des surfaces d'aire fini sont impuissantes dans le cas présent pour la raison qu'il n'y a pas d'espace de modules correspondant. Il s'agit donc d'un terrain d'exploration qui appelle à l'élaboration de nouveaux outils. Nous considérons ici le régime intermédiaire des *revêtements abéliens de degré infini de surfaces de translation d'aire fini*.

Le modèle du wind-tree périodique est le flot du billard ϕ_θ^t dans la table de billard $T(a, b) \subset \mathbb{R}^2$ obtenue en plaçant périodiquement des obstacles rectangulaires de longeur a et hauteur b sur les points de \mathbb{Z}^2 comme dans la figure suivante :

le modèle du wind-tree périodique a été introduit Hardy et Weber [HW80] en s'inspirant des travaux de Paul et Tatiana Ehrenfest de 1912. Il y a des trajectoires non récurrentes comme dans la figure 3 mais cela un événement exceptionnel d'un point de vue de la mesure de Lebesgue sur le cercle d'après un résultat de Avila-Hubert

Théorème 17 ([AH20]). Pour tout $0 < a, b < \frac{1}{2}$ et pour presque tout $\theta \in S^1$ pour la mesure de Lebesgue sur le cercle, le flot ϕ_θ^t dans $T(a, b)$ est récurrent.

Nous proposons d'établir le résultat suivant :

Problème 10. Montrer que pour tout $0 < a, b < \frac{1}{2}$ et pour $\nu_{\mathcal{K}}$ -presque tout $\theta \in S^1$, le flot ϕ_θ^t dans $T(a, b)$ est récurrent.

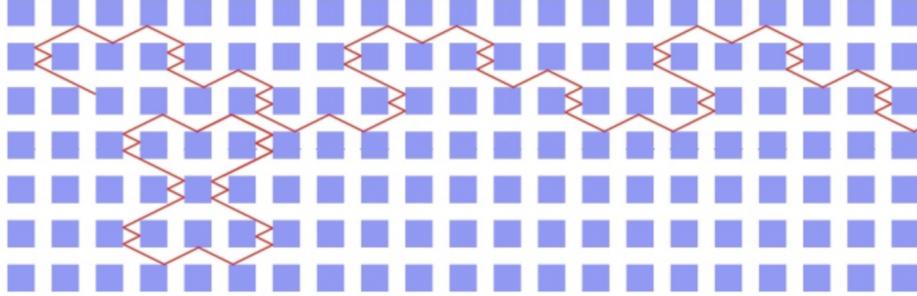


FIGURE 3. Deux trajectoires du billard dans le wind-tree, l'une est périodique et l'autre est divergente. Cette figure est tirée du [blog](#) Disquisitiones Mathematicae

Le taux de diffusion polynomial est défini pour tout $p \in T(a, b)$ et $\theta \in S^1$ par

$$\delta(p, \theta) = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log(d(\phi_\theta^t(p), p))}{\log(t)}.$$

Il découle de [DHL14] que pour Leb-presque tout $\theta \in S^1$ et pour tout $p \in T(a, b)$, nous avons $\delta(p, \theta) = \frac{2}{3}$. Nous proposons d'établir le résultat suivant

Problème 11. Montrer que pour tout $p \in T(a, b)$ et pour ν_K -presque tout $\theta \in S^1$, nous avons $\delta(p, \theta) = \frac{2}{3}$.

La technique du *dépliage* permet de transformer ces deux problèmes de billard en un problème de dynamique dans l'espace de modules des surfaces de translation et d'utiliser le résultat du problème 9 dans un processus de renormalisation.

4.4.3. Approximations diophantiennes sur les surfaces de translations. Rappelons qu'une connexion de selles sur une surface de translation $(X, \omega) \in \mathcal{H}$ est une ligne droite qui connecte deux singularités ou un point à lui-même. Chaque connexion de selles σ sur X est associée à un vecteur $v_\sigma = (x_\sigma, y_\sigma) := \int_\sigma \omega$ que l'on appelle *l'holonomie* de σ . Soit $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive décroissante.

Définition 2. Une surface $(X, \omega) \in \mathcal{H}$ est (ψ, θ) -approximable si elle possède une infinité de connexions σ telles que :

$$|y_\sigma \sin \theta - x_\sigma \cos \theta| < \psi(\|v_\sigma\|).$$

Il n'est pas difficile de démontrer pour n'importe quelle surface $(X, \omega) \in \mathcal{H}$, l'ensemble des directions de connexions de selles est dense dans le cercle. Ceci implique que pour tout θ , il est possible de trouver une suite de connexions de selles σ_n telle que $|y_{\sigma_n} \sin \theta - x_{\sigma_n} \cos \theta| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. La notion de (ψ, θ) -approximabilité exprime dans quelle mesure cette approximation de la direction θ par des connexions de selles est efficace. Nous dirons que q est mal-approximable dans la direction θ si elle n'est pas $(c\psi_0, \theta)$ -approximable pour $c > 0$ et $\psi_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$. Nous dirons que (X, ω) est très bien approximable dans la direction θ si elle est $(\psi_0^{1+\varepsilon}, \theta)$ -approximable pour $\varepsilon > 0$.

Ces notions pour les surfaces de translation sont très intimement liées aux approximations diophantiennes classiques pour les nombres réels. Par exemple, si (X, ω) est la surface $(\mathbb{C}/\Lambda_x, dz)$ où Λ_x est le réseau $u_x \cdot \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{C}$, alors (X, ω) est mal approximable dans la direction verticale $\theta = \frac{\pi}{2}$ si, et seulement si, x est mal approximable au sens classique de la théorie des approximations diophantiennes.

Les propriétés diophantiennes des surfaces de translation dans les directions typiques pour les mesures de Lebesgues sur le cercle ont déjà été largement étudiées. Nous proposons d'étudier les deux problèmes suivant décrivant des propriétés diophantiennes pour des directions typiques pour des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.

Problème 12. Soit $q \in \mathcal{H}$. Montrer que l'ensemble des $\theta \in S^1$ tels que q est mal approximable dans la direction θ est un ensemble de μ_K -mesure nulle.

Problème 13. Soit $q \in \mathcal{H}$. Montrer que l'ensemble des $\theta \in S^1$ tels que q est très bien approximable dans la direction θ est un ensemble de μ_K -mesure nulle.

Notre approche est basée sur une adaptation de la correspondance de Dani [Dan85] en dynamique homogène permettant de faire un lien entre les propriétés diophantiennes des surfaces de translation dans la direction θ et les propriétés de divergence des flots $t \mapsto g_t r_\theta$ qui sont contrôlées par le problème 9.

4.5. Mouvement brownien isopériodique. Cette partie propose une continuation des résultats présentés dans la section §2.2. Le but du projet est d'importer la théorie du mouvement brownien feuilleté introduit par Garnett [Gar83] pour étudier la dynamique du feuilletage isopériodique. Les feuilles de ce feuilletage sont munies d'une métrique euclidienne à singularité conique naturelle qui induit l'existence d'un Laplacien feuilleté décrivant la diffusion de la chaleur le long des feuilles dans le cas où celles-ci sont thermiquement isolées l'une de l'autre. Les lignes de champs de cette équation de la chaleur correspondent à des trajectoires browniennes *isopériodiques*. Ces lignes de champs remplacent la notion traditionnelle de flot en dynamique et permettent d'introduire les outils de la théorie ergodique pour l'étude des feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}^M (nous reprenons les notations de la section §2.2). Pour tout $t \geq 0$, nous dénotons par D_t^M l'opérateur de diffusion de la chaleur correspondant au feuilletage \mathcal{F}^M dans une sous-variété invariante M . Nous dirons qu'une mesure de probabilité est *harmonique* si $\forall t > 0$, nous avons $(D_t^M)_* \nu = \nu$. Si $f \in C_c(M)$ et $x \in M$ la quantité $D_t^M(f)(x)$ décrit intuitivement la température au point x au temps t quand la température initiale est donnée par f . Une mesure harmonique est dite ergodique si elle ne peut se décomposer en une somme non-triviale de deux mesures harmoniques.

Problème 14. Soit M une sous-variété invariante. Montrer que la mesure m_M est une mesure harmonique ergodique. De plus, existe-t-il des exemples de mesures harmoniques ergodiques singulières par rapport à m_M ?

Le cas d'une feuilles passant par un revêtement de translation d'une surface $(\mathbb{C}/\Lambda, dz)$ donne un exemple simple de mesure harmonique ergodique et singulière par rapport à la mesure m_M . Il serait intéressant d'en trouver de nouvelles. Nous proposons d'étudier le cas des sous-variétés de rang 1 dans lesquelles une description des mesures harmoniques semblent possibles.

Problème 15. Soit M une sous-variété primitive de rang 1. Montrer que m_M est l'unique mesure harmonique. En particulier, pour tout $x \in M$ et $f \in \mathcal{C}_c^0(M)$, montrer que :

$$\frac{1}{T} \int_0^T D_t(f)(x) dt \rightarrow \int_M f dm_M.$$

L'hypothèse de primitivité dans le problème précédent requiert que les surfaces de M ne soient pas des revêtements de translation au dessus de surfaces de genre inférieur. Par exemple quand M est arithmétique, toutes les surfaces de M revêtent une surface de translation de genre 1 et dans ce cas toutes les feuilles sont compactes et la mesure d'aire sur ces feuilles sont les mesures harmoniques ergodiques. Dans le cas où M est une composante connexe d'un lieu de forme propre de Prym de discriminant D avec $D \neq d^2$, alors M est primitive et McMullen a montré dans [McM07b] que M est une fibré en cercle au dessus de $X_D = \mathbb{H} \times \mathbb{H}/\text{SL}_2(\mathcal{O}_D)$ et le feuilletage isopériodique est envoyé sur le feuilletage horizontal dans X_D . Ici, \mathcal{O}_D dénote l'anneau des entiers dans $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ et $\text{SL}_2(\mathcal{O}_D)$ agit diagonalement sur $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$, le second facteur étant tordu par la conjugaison de Galois. Les translations verticales induisent des isométries entre les feuilles de \mathcal{F}^M ce qui permet de comparer les trajectoires browniennes de feuilles adjacentes et d'approcher le problème 15. Une description similaire due à Filip [Fil16] existe en général pour les sous-variétés invariantes de rang 1. Terminons par la question ambitieuse suivante qui pourra être approchée dans un second temps :

Problème 16. Peut-on décrire les mesures harmoniques ergodiques dans une sous-variété invariante quelconque ?

4.6. Flot de Ricci et surfaces de translation. Cette partie décrit un direction de recherche un peu différente des précédentes, plus centrée sur la géométrie des surfaces de translation que sur les objets dynamiques reliés. Les questions formulées ici sont moins précises car il s'agit d'un nouveau champs d'étude, mais je me sers de celles-ci comme d'un guide dans mon exploration de ce nouveau champs.

Soit (X, ω) une surface de translation de genre au moins 2. La surface X peut être munie de la métrique plate $\omega \otimes \bar{\omega}$. D'après le théorème d'uniformisation, elle possède également une unique métrique hyperbolique compatible avec sa structure complexe sous-jacente.

Problème 17. Soit (X, ω) une surface de translation de genre au moins 2. Quelle lien peut-on faire entre sa métrique plate et la métrique hyperbolique sous-jacente ?

C'est avec cette question en tête que je m'intéresse au flot de Ricci depuis quelques mois. J'organise à ce sujet avec mon collègue Miguel Rodrigues un [groupe de travail](#) au printemps 2025. Le flot de Ricci provient d'une équation de diffusion qui ressemble à une équation de la chaleur sur la courbure. Cette analogie laisse penser que la métrique plate, dont la courbure est concentrée en un nombre fini de points, devrait converger vers la métrique hyperbolique sous-jacente.

Problème 18. Soit (X, ω) une surface de translation de genre au moins 2. Est-ce que la métrique plate $\omega \otimes \bar{\omega}$ converge vers la métrique hyperbolique sous-jacente sur X sous l'effet du flot de Ricci ?

Une réponse positive établirait un pont entre la géométrie plate d'une surface de translation et sa géométrie hyperbolique sous-jacente, qui pourrait s'avérer fertile. Il serait alors intéressant de suivre l'évolution de certaines quantités géométriques le long du flot de Ricci comme les systoles et les valeurs propres du Laplacien (spectre).

Problème 19. Soit (X, ω) une surface de translation de genre au moins 2. Quel est le lien entre son spectre hyperbolique et son spectre plat ? Qu'en est-il pour la systole plate et la systole hyperbolique ?

5. ENSEIGNEMENT ET DIFFUSION SCIENTIFIQUE

5.1. Réflexions pédagogiques. J'expérimente un format de TD différent avec les étudiants de L2 d'une unité d'enseignement dont j'ai la responsabilité pour la deuxième année consécutive à l'université de Rennes. Le but de cette démarche est de créer les conditions d'un apprentissage plus individualisé. Ce format à la double avantage de prendre mieux en compte les hétérogénéités d'une classe et de me donner un meilleur aperçu des difficultés individuelles. Il me permet aussi de pouvoir échanger activement avec les étudiants, ce que je trouve très enthousiasmant ! J'ai écrit un [article](#) de blog au sujet de cette expérimentation, que je prévois de déployer à plus grande échelle si son succès se confirme à nouveau cette année.

5.2. Groupes de travail.

5.2.1. Printemps 2025 - Flot de Ricci et uniformisation des surfaces de Riemann. Avec [M.Rodrigues](#), je co-organise un groupe de travail sur le flot de Ricci et son application à l'uniformisation des surfaces de Riemann. Celui-ci se déroulera au second semestre 2025 avec la participation de membres de plusieurs équipes de l'IRMAR. Au-delà du sujet choisi pour son intérêt intrinsèque, ce groupe de travail a aussi vocation à renforcer la cohésion et la collaboration scientifique entre les différentes équipes de l'IRMAR. Voir la [page](#) du groupe de travail pour plus d'information.

5.2.2. Année 2023-2024 - Théorie de Eskin-Mirzakhani. J'ai co-organisé avec F.Martin-Baillon un [groupe de travail](#) sur la théorie de Eskin et Mirzakhani concernant la rigidité des mesures P -invariantes dans les espaces de modules de surfaces de translation [EM18]. Le but était de comprendre un cas similaire mais homogène : celui des mesures P -invariantes sur $SL(2, \mathbb{C})/\Gamma$, où Γ est un réseau de $SL(2, \mathbb{C})$. Le groupe de travail s'est déroulé de façon hebdomadaire sur plusieurs mois avec les membres de l'équipe de théorie ergodique de l'IRMAR.

5.2.3. Automne 2021 - Théorie de Ratner. J'ai organisé à l'université de Bologne un groupe de travail d'un semestre sur la théorie de Ratner sur la dynamique des flots unipotents dans les espaces homogènes. Nous avons abordé les rudiments de la théorie dans le cas de l'action de U sur $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ où Γ est un réseau avant d'étudier l'approche moderne des résultats de Ratner via la théorie de l'entropie en suivant les travaux de Margulis-Tomanov [MT94]. Le groupe de travail a été suivi de façon hebdomadaire par 5 chercheurs de l'université de Bologne.

5.2.4. Année 2020-2021 - Rigidité des mesures invariantes avec entropie positive et conjecture de Littlewood d'après Einsiedler Lindenstrauss & Katok. J'ai co-organisé avec B.Weiss et M.Luethi à l'université de Tel Aviv un groupe de travail dédié à la compréhension de l'article [EKL06] concernant les mesures sur $SL(3, \mathbb{R})/SL(3, \mathbb{Z})$ invariantes par l'action du sous-groupe diagonal et d'entropie positive. Nous avons aussi étudié l'application de cette classification à la conjecture de Littlewood concernant les approximations simultanées par des nombres rationnels. J'ai donné deux exposés sur la théorie de l'entropie métrique et son application à la rigidité des mesures invariantes.

5.2.5. *Année 2019-2020 - Marches aléatoires Zariski-denses d'après Benoist & Quint.* J'ai co-organisé avec B.Weiss et M.Luethi un groupe de travail sur la théorie de Benoist & Quint sur la rigidité des marches aléatoires Zariski-denses dans les espaces homogènes [BQ11] avec application aux approximations diophantiennes sur des ensembles fractals suivant Simmons-Weiss [SW19]. J'ai donné trois exposés sur la dérive exponentielle et la correspondance de Dani pour les approximations diophantiennes et j'ai écrit un [survol](#) des techniques de Benoist-Quint dans le cas simple du tore.

5.3. Organisation de conférences.

5.3.1. *Retraite scientifique de l'équipe de théorie ergodique.* Je co-organise avec [V. Guirardel](#) et [L. Marquis](#) la retraite scientifique de mon équipe de recherche. Il s'agit d'un séjour de 3 jours au printemps 2025 articulé autour des mini-cours donnés par deux chercheurs.e.s invités et des activités de cohésion.

5.3.2. *Une École d'été à Bologne.* J'ai co-organisé l'école d'été [Geometry and Dynamics of Moduli Spaces](#) à l'université de Bologne à l'été 2022 à laquelle une cinquantaine de chercheurs internationaux ont participé sur trois jours. L'école comprenait deux mini-cours, l'un sur le modèle du wind-tree et donné par P.Hubert et E.Lanneau et le second sur la dynamique horosphérique dans les espaces de modules dispensé par J.Chaika et B.Weiss.

5.3.3. *Une session de l'ICM 2022.* Le Congrès International des Mathématiciens (ICM) 2022 s'est déroulé virtuellement. Dans ce contexte, plusieurs universités à travers le monde ont organisé des conférences pendant lesquelles les orateurs de l'ICM 2022 pouvaient donner leur exposé devant un public en étant simultanément diffusés sur la plateforme numérique de l'ICM. J'ai co-organisé une telle [conférence](#) à l'académie des sciences de l'université de Bologne pour la *Joint invited lecture* de J.Chaika et B.Weiss pour leur exposé sur la dynamique du flot horocyclique dans les espaces de modules. La vidéo est disponible en cliquant sur ce [lien](#).

5.4. **Activité de vulgarisation scientifique.** J'ai été invité à participer à l'émission radiophonique de vulgarisation scientifique *On the Slab* pour la radio [Radio Campus](#) avec mon ancien collègue D.Gayet. Durant cette émission nous avons discuté de mathématiques et de la vie des chercheurs. L'enregistrement est disponible à ce [lien](#).

6. PROJETS D'ENSEIGNEMENT ET DE DIFFUSION SCIENTIFIQUE

6.1. **Encadrement de doctorants.** L'encadrement de doctorant·e·s constitue un objectif central de mon rôle d'enseignant-chercheur, pour plusieurs raisons :

D'abord, parce que le système de recherche publique, que j'estime indispensable à nos sociétés modernes, repose sur le renouvellement constant des générations de chercheurs et chercheuses. Ce renouvellement se fait en grande partie grâce à la formation des jeunes par leurs aînés, et je suis déterminé à jouer pleinement mon rôle dans ce processus. Ce faisant, je serai vigilant à défendre des valeurs d'égalité et d'inclusivité.

Ensuite, je considère l'encadrement de thèses comme une manière complémentaire de faire avancer la recherche, en plus de mon propre travail de chercheur. Cela permet de développer plus efficacement les axes de recherche que je juge pertinents et de les enrichir grâce aux nouvelles perspectives apportées par de jeunes chercheurs et chercheuses.

Enfin, je garde un excellent souvenir de mon propre parcours doctoral, une période à la fois intellectuellement stimulante et enrichissante. Cette expérience m'a permis de m'émanciper et de m'affirmer, notamment grâce aux rencontres avec des collègues français et internationaux, aux nombreux voyages, aux conférences, à l'acquisition d'un bon niveau d'anglais, et au développement de mes propres thématiques de recherche. Les encouragements et la bienveillance de mon directeur de thèse ont joué un rôle crucial dans ce processus. Cela m'inspire aujourd'hui à transmettre ce privilège à d'autres.

Pour atteindre cet objectif, je ferai de l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches une priorité pour les trois prochaines années. Dans ce cadre, je souhaite encadrer une première thèse en co-tutelle. Cette expérience me permettra non seulement d'apprendre les subtilités de l'encadrement aux côtés d'un·e collègue expérimenté·e, mais aussi d'élargir mon champ de compétences en proposant un sujet à l'interface de celui du co-encadrant. L'encadrement d'un projet scientifique en groupe pour les étudiants de deuxième année de l'École Polytechnique serait une autre manière stimulante de découvrir l'accompagnement, je prendrais plaisir à m'y investir.

6.2. Un cours spécialisé. Durant mes deux premières années en temps que maître de conférences à l'université de Rennes, j'ai eu l'occasion d'enseigner les mathématiques à des étudiants de premier cycle, notamment en première année de biologie et en deuxième année d'ingénierie électronique. Dans ce contexte, je me voyais davantage comme un vulgarisateur, m'efforçant avant tout de transmettre les intuitions mathématiques. C'est un rôle que j'ai trouvé particulièrement enrichissant. J'aimerais désormais m'essayer à l'enseignement pour des classes plus avancées, proches du niveau recherche.

L'offre de cours en systèmes dynamiques à l'École Polytechnique est déjà très diversifiée, mais je serais ravi d'y contribuer. Par exemple, je pourrais proposer un cours sur la dynamique homogène, autour des travaux de Benoist et Quint sur la rigidité des marches aléatoires Zariski-denses [BQ11], qui ont eu un impact significatif et constituent la base de progrès récents et spectaculaires en théorie des systèmes dynamiques, voir par exemple le très récent article [BEFH25]. Martin Leguil est un expert de ce sujet, nous pourrions collaborer à l'élaboration d'un tel cours s'il le souhaite.

Un autre sujet de cours que je trouve pertinent serait l'uniformisation des surfaces de Riemann par le flot de Ricci. Ce cours combinerait plusieurs enseignements du tronc commun, tels que les équations aux dérivées partielles, la géométrie riemannienne et les processus stochastiques, pour démontrer l'un des théorèmes les plus importants du XIX^e siècle grâce à des techniques modernes et influentes (géométrisation de Thurston et travaux de Perelman). De plus, le flot de Ricci semble connaître un essor important en mathématiques appliquées, notamment dans l'étude des réseaux de neurones, voir par exemple [BBC⁺24]. Ce mélange de mathématiques fondamentales et de technologie de pointe pourrait intéresser des étudiants ingénieurs comme ceux de l'École Polytechnique. Mon expertise sur ce deuxième sujet n'est pas encore assez mure, mais c'est une compétence que je suis en train d'acquérir, notamment grâce à un [groupe de travail](#) que j'organise à l'IRMAR au printemps 2025. D'ici un ou deux ans, je serai en mesure de proposer un tel cours.

6.3. Pédagogie et intelligence artificielle. L'irruption de l'intelligence artificielle et des agents conversationnels vient percuter nos pratiques de l'enseignement. Elle offre de nouvelles perspectives pédagogiques enthousiasmantes mais rend obsolète certaines pratiques traditionnelles et pose de nombreuses questions. Je constate dorénavant une adoption massive de l'IA par mes étudiants qui l'utilisent de plus en plus régulièrement dans leur apprentissage, parfois même avec une confiance exagérée. Pour ma part, je l'utilise déjà pour traquer de potentielles erreurs dans mes contenus pédagogiques, proposer des résolutions d'exercices, m'assister dans la correction de copies ([correctexam](#), [AMC](#)) ou sonder la littérature scientifique ([AI2 ScholarQA](#)). Par ailleurs, selon la fiche focus 1 du [rapport parlementaire](#) de Cédric Villani, l'intelligence artificielle offrirait de sérieuses perspectives pour améliorer la différenciation pédagogique, c'est à dire une approche éducative qui vise à adapter l'enseignement aux besoins, intérêts et rythmes d'apprentissage variés des élèves, permettant de diversifier les méthodes, les contenus et les évaluations pour favoriser la réussite de tous les élèves dans une classe hétérogène. Je me fixe les objectifs suivants :

- (1) Perfectionner mon usage des outils d'intelligence artificielle générative
- (2) Comprendre, au moins sommairement, leur fonctionnements, limites et dangers potentiels
- (3) Me tenir informé des nouvelles expérimentations pédagogiques, en particulier celles favorisant la différenciation pédagogique, via les revues spécialisées de pédagogie.
- (4) Incorporer, en accord avec le reste des équipes pédagogiques, de nouvelles innovations pertinentes dans ma pratique de l'enseignement.

Afin de réaliser ces objectifs, j'ai rejoins un groupe de travail sur les questions pédagogiques en lien avec l'intelligence artificielle à l'université de Rennes, lancé sous l'impulsion de mon collègue Matthieu Romagny. J'ai également noué des contacts avec des ingénieurs pédagogique du SUPTICE (le service universitaires de pédagogie et des technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement) de l'université de Rennes qui réfléchissent à ces questions. Enfin, l'IA Cluster [Hi!Paris](#), en partie porté par l'école polytechnique, semble offrir un cadre pertinent pour l'exploration de ces problématiques, même si l'éducation ne fait pas encore partie de la liste des applications visées par le cluster.

6.4. Une conférence sur le flot horocyclique modulaire. Le flot horocyclique dans les espaces de modules des surfaces de translations, qui fait l'objet de plusieurs de mes projets de recherche, est devenu un domaine de recherche actif avec de nouveaux résultats publiés régulièrement. C'est un bon moment pour rassembler les experts du domaine dans le cadre d'une conférence internationale et dresser un état de la

recherche, faire connaître le domaine plus largement et impulser de nouvelles directions de recherche. Je prévois de prendre la responsabilité de l'organisation d'une telle conférence dans les deux prochaines années.

7. DOCUMENTS COMPLÉMENTAIRES

7.1. Rapport du jury de thèse. Mon jury de thèse était composé de Bertrand Deroïn (rapporteur non présent à la soutenance), Louis Funar, Pascal Hubert (président), Erwan Lanneau, Christine Lescop, Carlos Matheus, Corinna Ulcigrai, Barak Weiss (rapporteur).

Rapport de soutenance

Florent Ygouf a présenté sa thèse sur la dynamique isopériodique dans les espaces de modules des différentielles abéliennes. Il a tout d'abord donné le cadre dans lequel s'inscrit son travail et a rappelé les principaux concepts de dynamique dans les espaces de modules des surfaces de translation, faisant preuve de grande pédagogie.

Il a ensuite énoncé très clairement les résultats essentiels de sa thèse sur l'adhérence des feuilles du feuilletage isopériodique ainsi que la façon dont elles se distribuent dans des sous-variétés $GL(2, \mathbb{R})$ -invariantes des strates de différentielles abéliennes. Il a enfin décrit une application inattendue à la classification des sous-variétés fermées $GL(2, \mathbb{R})$ -invariantes en genre 3.

Les réponses aux questions du jury ont montré une grande maturité scientifique et un programme de recherche très vaste.

En conclusion, Florent Ygouf a toutes les qualités pour être un excellent chercheur ou enseignant chercheur. Le jury, unanime, lui décerne le grade de docteur de la communauté université Grenoble-Alpes.



Pascal HUBERT

7.2. Rapports de pré-soutenance de thèse. Les deux rapporteurs de ma thèse étaient Bertrand Deroin et Barak Weiss.

Bertrand Deroïn,
 Directeur de recherche au CNRS
 Laboratoire Analyse Géométrie Modélisation
 2 av. Adolphe Chauvin - 95302 Cergy-Pontoise Cedex
 E-mail : bertrand.deroïn@u-cergy.fr

Rapport sur le mémoire de doctorat de Florent Ygouf intitulé :
Dynamique isopériodique dans les espaces de modules de différentielles abéliennes

Le mémoire de F. Y. est un « copié-collé » de deux prépublications, la première sur la dynamique des feuilletages isopériodiques dans les strates d'espaces de modules de formes Prym propres pour la multiplication par un ordre quadratique en genre trois, et la deuxième sur la classification des variétés affines invariantes irrationnelles et de rang un dans les strates $\mathcal{H}(3,1)$ et $\mathcal{H}(2,2)$. Il est précédé par une introduction sur l'état de l'art du sujet. Je commence par rappeler ce dernier dans ce rapport, avant de décrire les contributions de F. Y. de façon détaillée.

Contexte – Le groupe $GL_2^+(\mathbf{R})$ agit sur l'espace des modules $\Omega\mathcal{M}_g$ des différentielles abéliennes (en d'autres termes, des 1-formes holomorphes) sur une surface de Riemann de genre g , par post-composition de la différentielle abélienne (vu comme application du fibré tangent à la courbe à valeurs dans \mathbf{C}) par un automorphisme \mathbf{R} -linéaire de \mathbf{C} . Cette action préserve chaque strate $\mathcal{H}(\kappa)$ constituée des formes ayant des multiplicités d'annulation données par κ . En 2013, Eskin, Mirzakhani et Mohammadi ont montré que les ensembles fermés $GL_2^+(\mathbf{R})$ -invariants sont les sous-variétés (immégrées) de $\Omega\mathcal{M}_g$ localement définies par l'ensemble des formes vérifiant certaines relations linéaires à coefficients réels entre leurs périodes relatives (une période relative est une intégrale de la forme le long d'une courbe tracée sur la surface reliant deux zéros de la forme). De tels ensembles sont appelés des variétés affines invariantes. Un résultat de Filip stipule que ces variétés sont des sous-variétés algébriques complexes de $\Omega\mathcal{M}_g$ définies sur $\overline{\mathbf{Q}}$, bien que l'action de $GL_2^+(\mathbf{R})$ soit de nature transcendante.

Il se trouve que certaines propriétés géométrico-dynamiques d'une différentielle abélienne ne dépendent que de l'adhérence de sa $GL_2^+(\mathbf{R})$ -orbite. C'est par exemple le cas de l'asymptotique du nombre de géodésiques de longueur bornée reliant deux zéros de la différentielle. La classification des variétés affines invariantes est donc un problème important pour quiconque s'intéresse aux propriétés géométrico-dynamiques des différentielles abéliennes (et par voie de conséquence aux billards polygonaux rationnels et aux échanges d'intervalles). Les premiers exemples non triviaux de variétés affines invariantes sont les $GL_2^+(\mathbf{R})$ -orbites fermées, dont les propriétés géométrico-dynamiques ont été mises en lumière par Veech dans les années 80. On ne connaît actuellement qu'une poignée de familles de variétés affines invariantes, et leur classification semble hors d'atteinte en toute généralité avec les techniques actuelles.

Lorsque le genre est deux, la classification des variétés affines invariantes remonte aux travaux de Calta et McMullen en 2002 : en dehors des $GL_2^+(\mathbf{R})$ -orbites fermées et des strates, les variétés affines invariantes sont les composantes d'espaces de modules de formes abéliennes qui sont des valeurs propres pour la multiplication par un ordre quadratique sur la jacobienne de la surface de Riemann, éventuellement intersectées avec les strates (je renvoie au mémoire de F. Y. pour leur définition

précise). Le feuilletage isopériodique, défini localement par les lieux où les périodes absolues ne varient pas (les périodes absolues sont les intégrales d'une forme sur une courbe fermée), et qui est invariant par l'action de $GL_2^+(\mathbf{R})$, jouit de propriétés remarquables en genre deux : par exemple, le saturé par ce feuilletage d'une variété affine invariante est fermé, et définit donc une autre variété affine invariante. En toute généralité, il est vraisemblable que le feuilletage isopériodique d'une variété affine invariante joue un rôle déterminant dans la classification des variétés affines invariantes. La dynamique de ces derniers a été étudiée dans certaines strates très particulières : dans la strate $\mathcal{H}(g-1, g-1)$ par Hooper/Weiss, dans la strate principale par McMullen et Calsamiglia/Deroin/Francaviglia, et enfin par Hämenstadt dans les strates avec au moins un zéro simple.

Contributions de Florent Ygouf – Dans son mémoire, F. Y. présente une contribution substantielle à la classification des variétés affines invariantes dans les espaces de différentielles abéliennes en genre trois, en complétant une série de travaux récents de Nguyen/Wright, Lanneau/Nguyen, Aulicino/Nguyen/Wright, Aulicino/Nguyen, Mirzakhani/Wright and Apisa. En particulier, suite aux travaux de F. Y. et de tous ces auteurs, on peut maintenant lister les variétés affines invariantes dans les strates $\mathcal{H}(2, 2)$ et $\mathcal{H}(3, 1)$; à l'exception des orbites fermées et des strates elles-mêmes, ou bien ces variétés affines sont obtenues par un procédé de revêtement, ou bien ce sont des composantes d'espaces de modules de formes Prym propres pour la multiplication par un ordre quadratique, intersectés avec les strates considérées. Ces dernières ont été construites par McMullen en généralisant la construction en genre 2, elles existent en genre 3, 4, 5.

Pour énoncer précisément la contribution de F. Y., nous avons besoin d'introduire un certain nombre d'objets associés à une variété affine invariante. Le premier est son corps de définition. Il s'agit du plus petit corps sur lequel sont définies les relations liant les périodes relatives d'une forme abélienne de la variété affine considérée. C'est un corps de nombre totalement réel, dont le degré est majoré par g . Une variété affine invariante dont le corps de définition est \mathbf{Q} est appelée rationnelle, et irrationnelle sinon. Un deuxième invariant est le rang de la variété affine, introduit par Wright ; il s'agit de la moitié de la codimension du feuilletage isopériodique. Le résultat de F. Y. stipule que les variétés affines invariantes irrationnelles et de rang un, formées par des formes ayant au plus deux zéros, sont, à l'exception des $GL_2^+(\mathbf{R})$ -orbites fermées, des composantes des strates d'espaces de modules de formes Prym propres par rapport à la multiplication par un ordre quadratique.

Les techniques utilisées par F. Y. pour démontrer ce résultat ont pour point de départ le théorème de Wright selon lequel les formes abéliennes appartenant à une variété affine invariante de rang un ont la propriété de complète périodicité, c'est à dire qu'elles peuvent être découpées en une famille finie de cylindres parallèles, et ce dans la direction de n'importe quelle connection de selles. F. Y. associe à un tel découpage le tore contenu dans l'espace des modules de différentielles abéliennes, obtenu en recollant les cylindres suivant des paramètres de recollement quelconque tout en préservant la même combinatoire, et observe que les flots horocycliques de $GL_2^+(\mathbf{R})$ et les déformations isopériodiques parallèles à la direction des cylindres préservent ce tore en agissant par des flots linéaires. En exploitant les propriétés d'irrationalité du corps de définition (qui par la théorie de Wright est contenu dans le corps engendré par les quotients des circonférences des cylindres) F. Y. montre qu'il peut se déplacer dans ces tores (deux tores sont nécessaires dans l'argument) tout en restant dans la variété affine invariante considérée, pour aboutir à certaines configurations combinatoires (observées par McMullen) permettant *in fine* de détecter une formes Prym propres pour de la multiplication complexe par un corps quadratique. L'argument est donc un mélange de dynamique quasi-périodique

et de combinatoire, qui apporte une contribution originale et substantielle à la classification des variétés affines invariantes.

Un deuxième thème abordé dans le mémoire de F. Y. est l'étude dynamique des feuilletages isopériodiques dans les variétés affines invariantes. Il s'intéresse aux feuilletages isopériodiques en restriction aux variétés affines de rang 1, et commence par observer que dans ce cas, ou bien toutes les feuilles sont fermées, ou bien toutes sont denses. Il se concentre ensuite sur les strates des espaces de modules de formes Prym propres pour la multiplication par un ordre quadratique, et il fournit des conditions explicites sur le discriminant du corps quadratique pour que les feuilles du feuilletage isopériodique soient toutes denses ou toutes fermées. Il donne pour cela un critère permettant d'assurer qu'une feuille isopériodique dans une variété affine de rang un soit dense. Encore une fois, l'argument repose sur le théorème de Wright assurant l'existence d'un découpage en cylindres, et prend place dans les tores obtenus en twistant les paramètres de recollement, l'enjeu ici étant de démontrer que l'adhérence de la feuille isopériodique contient des orbites par le sous-groupe horocyclique de $GL_2^+(\mathbf{R})$ parallèle à la décomposition en cylindres, et repose au final sur des techniques de dynamiques quasi-périodiques.

Conclusion – Les travaux présentés dans le mémoire sont d'excellente qualité. Ils forment une contribution substantielle et originale à la classification des variétés affines invariantes dans l'espace des modules des différentielles abéliennes en genre trois, et sur la dynamique des feuilletages isopériodiques dans ces ensembles, qui est un domaine d'étude en pleine expansion, à l'interface entre dynamique de Teichmüller et la géométrie des espaces de modules de différentielles abéliennes. Florent Ygouf a implémenté pour cela des techniques de nature dynamique et combinatoire, et a acquis une expertise certaine dans ce domaine. Il va sans dire que je recommande sans réserve la soutenance de sa thèse.

Paris, le 5 juin 2019



Rapport d'évaluation du mémoire de thèse / Evaluation report of the PhD thesis

Doctorant Nom prénom / Full name
PhD student Ecole Doctorale / Doctoral School
 Titre thèse / PhD Title

Florent Youf

Rapporteur Nom prénom / Full name
Reviewer Etablissement / Institution
 Statut, fonction / Status, position

Bogak Weiss
 Tel-Aviv University
 Professor, head of Dept. of Pure
 Mathematics

Qualité du mémoire, rédaction & illustrations / Thesis quality, style & illustrations

→ Satisfaisant / Satisfactory [] Bon / Good [] Très bon / Very good [x] Exceptionnel []

Commentaires/comments :

The thesis is well-written and shows a complete command of scientific writing and mathematical argumentation. The author introduces several new arguments, some rather intricate and some that depend on intricate results that can be found in the literature. His clear writing makes it possible to precisely understand his contribution.

Contexte, état de l'art, collaborations / Background, state of the art, collaborations :

Commentaires/comments :

The author's thesis consists of two papers. In the first he classified rank 1 loci in some strata of genus 2 surfaces. This is a new result which nicely complements previous work of Erwan Lanneau and Duc-Manh Nguyen. In the second he chose a challenging set of questions regarding rel foliation : ergodicity and density of leaves. He obtains a complete answer in the same Prym loci which arise in the first classification problems.

Qualité scientifique, méthodologie, expérimentations, validation Scientific quality, methodology, experiments, validation

→ Satisfaisant / Satisfactory [] Bon / Good [] Très bon / Very good [x] Exceptionnel []

Commentaires/comments :

This is a thesis in pure mathematics so it would be irrelevant to discuss experiments and validation. The main point is that new arguments are introduced to tackle problems which are natural and had not been solved before. I have checked most of the arguments and they are sound.

Apports personnels, originalité, valorisation, perspectives

Personal contributions, originality, valorization, prospects

Commentaires/comments :

There are several innovations. In this work. The first is a merge of the conditions of Hooper-Weiss with ideas of Lanneau-Nguyen (in the first paper) and with Calsamiglia-Deroin-Francaviglia (in the second paper). The second is a new approach to the ergodicity question for the rel foliation in $SL(2, R)$ loci which is likely to be of value in future work.

Conclusions du rapporteur / Reviewer's conclusions

Commentaires/comments :

These are good results, represent a considerable advance on existing work, and certainly merit the award of a doctoral degree.

Avis du rapporteur / Reviewer's opinion :

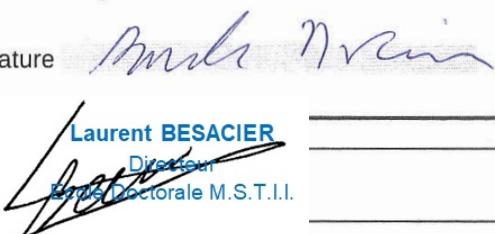
Défavorable à la soutenance / Unfavorable to the defence

Favorable

Date

June 4, 2019

Signature



Laurent BESACIER
Directeur
Ecole Doctorale M.S.T.I.

Visa du directeur de l'école doctorale :

Rapport détaillé, commentaires libres, questionnements, correction demandées
Detailed report, free comments, questions, requested corrections

7.3. Lettres de recommandation. Alex Eskin, Pascal Hubert, Martin Leguil, Erwan Lanneau et Carlos Matheus sont mes référents.

RÉFÉRENCES

- [AEM17] Artur Avila, Alex Eskin, and Martin Möller. Symplectic and isometric $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -invariant subbundles of the hodge bundle. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2017(732) :1–20, 2017.
- [AG10] A. Avila and S. Gouëzel. Small eigenvalues of the Laplacian for algebraic measures in moduli space, and mixing properties of the Teichmüller flow. *Ann. of Math. (2)*, 178 :385–442, 2010.
- [AH20] Artur Avila and Pascal Hubert. Recurrence for the wind-tree model. In *Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, volume 37, pages 1–11. Elsevier, 2020.
- [AN16] David Aulicino and Duc-Manh Nguyen. Rank two affine manifolds in genus 3. *arXiv preprint arXiv :1612.06970*, 2016.
- [ANW16] David Aulicino, Duc-Manh Nguyen, and Alex Wright. Classification of higher rank orbit closures in $\mathcal{H}^{odd}(4)$. *Journal of the European Mathematical Society*, 18(8) :1855–1872, 2016.
- [Api17] Paul Apisa. Rank one orbit closures in $\mathcal{H}^{hyp}(g-1, g-1)$. *arXiv preprint arXiv :1710.05507*, 2017.
- [AW20] Paul Apisa and Alex Wright. Reconstructing orbit closures from their boundaries. *arXiv preprint arXiv :2011.08807*, 2020.
- [AW21] Paul Apisa and Alex Wright. High rank invariant subvarieties. *arXiv preprint arXiv :2102.06567*, 2021.
- [BBC⁺24] Anthony Baptista, Alessandro Barp, Tapabrata Chakraborti, Chris Harbron, Ben D. MacArthur, and Christopher R. S. Banerji. Deep learning as ricci flow. *Scientific Reports*, 14(1) :23383, 2024.
- [BEFH25] Aaron Brown, Alex Eskin, Simion Filip, and Federico Rodriguez Hertz. Measure rigidity for generalized u-gibbs states and stationary measures via the factorization method, 2025.
- [BH14] Aaron W Brown and Federico Rodriguez Hertz. Measure rigidity for random dynamics on surfaces with positive entropy. *arXiv preprint arXiv :1406.7201*, 2014.
- [BQ11] Yves Benoist and Jean-François Quint. Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes. *Annals of mathematics*, pages 1111–1162, 2011.
- [BQ12] Yves Benoist and Jean-François Quint. Random walks on finite volume homogeneous spaces. *Inventiones mathematicae*, 187(1) :37–59, 2012.
- [BSW16] Matt Bainbridge, John Smillie, and Barak Weiss. Horocycle dynamics : new invariants and eigenform loci in the stratum $\mathcal{H}(1, 1)$. *arXiv preprint arXiv :1603.00808*, 2016.
- [CD20] Serge Cantat and Romain Dujardin. Random dynamics on real and complex projective surfaces. *arXiv preprint arXiv :2006.04394*, 2020.
- [CDF15] Gabriel Calsamiglia, Bertrand Deroin, and Stefano Francaviglia. A transfer principle : from periods to isoperiodic foliations. *arXiv preprint arXiv :1511.07635*, 2015.
- [CE13] Jon Chaika and Alex Eskin. Every flat surface is birkhoff and oseledets generic in almost every direction. *arXiv preprint arXiv :1305.1104*, 2013.
- [CSW20] Jon Chaika, John Smillie, and Barak Weiss. Tremors and horocycle dynamics on the moduli space of translation surfaces. *arXiv preprint arXiv :2004.04027*, 2020.
- [CW23] Jon Chaika and Barak Weiss. On the ergodicity of the rel foliation. *arXiv preprint arXiv :2301.02483*, 2023.
- [CWY23a] Jon Chaika, Barak Weiss, and Florent Ygouf. Horocycle dynamics in rank one invariant subvarieties i : weak measure classification and equidistribution. *arXiv preprint arXiv :2301.12419*, 2023.
- [CWY23b] Jon Chaika, Barak Weiss, and Florent Ygouf. Horocycle dynamics in rank one invariant subvarieties ii : support of measures and orbit closures. *under preparation*, 2023.
- [Dan78] S. G. Dani. Invariant measures of horospherical flows on noncompact homogeneous spaces. *Invent. Math.*, 47(2) :101–138, 1978.
- [Dan81] SG Dani. Invariant measures and minimal sets of horospherical flows. *Inventiones mathematicae*, 64(2) :357–385, 1981.
- [Dan85] Shrikrishna Gopal Dani. Divergent trajectories of flows on homogeneous spaces and diophantine approximation. 1985.
- [DHL14] Vincent Delecroix, Pascal Hubert, and Samuel Lelievre. Diffusion for the periodic wind-tree model. In *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure*, volume 47, pages 1085–1110, 2014.
- [DM] SG Dani and GA Margulis. Limit distributions of orbits of unipotent flows and values of quadratic forms. im gelfand seminar, 91–137. *Adv. Soviet Math.*, 16.
- [DM93] S. G. Dani and G. A. Margulis. Limit distributions of orbits of unipotent flows and values of quadratic forms. In *I. M. Gel’fand Seminar*, volume 16 of *Adv. Soviet Math.*, pages 91–137. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [Dur18] Eduard Duryev. Teichmuller curves in genus 2 : Square tiled surfaces and modular curves. *arXiv preprint arXiv :1710.05507*, 2018.

- [EKL06] Manfred Einsiedler, Anatole Katok, and Elon Lindenstrauss. Invariant measures and the set of exceptions to littlewood's conjecture. *Annals of mathematics*, pages 513–560, 2006.
- [EM01] Alex Eskin and Howard Masur. Asymptotic formulas on flat surfaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 21(2) :443–478, 2001.
- [EM04] Alex Eskin and Gregory Margulis. Recurrence properties of random walks on finite volume homogeneous manifolds. *Random walks and geometry*, pages 431–444, 2004.
- [EM18] Alex Eskin and Maryam Mirzakhani. Invariant and stationary measures for the action on moduli space. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 127(1) :95–324, 2018.
- [EMM06] Alex Eskin, Jens Marklof, and Dave Witte Morris. Unipotent flows on the space of branched covers of veech surfaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 26(1) :129–162, 2006.
- [EMM15] Alex Eskin, Maryam Mirzakhani, and Amir Mohammadi. Isolation, equidistribution, and orbit closures for the $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ action on moduli space. *Annals of Mathematics*, pages 673–721, 2015.
- [EMS03] Alex Eskin, Howard Masur, and Martin Schmoll. Billiards in rectangles with barriers. *Duke Math. J.*, 118(3) :427–463, 2003.
- [Fil16] Simion Filip. Semisimplicity and rigidity of the kontsevich-zorich cocycle. *Inventiones mathematicae*, 205(3) :617–670, 2016.
- [FK60] Harry Furstenberg and Harry Kesten. Products of random matrices. *The Annals of Mathematical Statistics*, 31(2) :457–469, 1960.
- [Fur98] Hillel Furstenberg. Stiffness of group actions. *Lie groups and ergodic theory (Mumbai, 1996)*, 14 :105–117, 1998.
- [Gar83] Lucy Garnett. Foliations, the ergodic theorem and brownian motion. *Journal of Functional Analysis*, 51(3) :285–311, 1983.
- [GHS03] Eugene Gutkin, Pascal Hubert, and Thomas A. Schmidt. Affine diffeomorphisms of translation surfaces : periodic points, fuchsian groups, and arithmeticity. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Ser. 4, 36(6) :847–866, 2003.
- [Gol] William Goldman. Geometric structures on manifolds. AMS Graduate Studies in Mathematics, accepted for publication.
- [Ham18] Ursula Hamenstädt. Ergodicity of the absolute period foliation. *Israel Journal of Mathematics*, 225 :661–680, 2018.
- [HL06] Pascal Hubert and Samuel Lelièvre. Prime arithmetic teichmüller discs in $\mathcal{H}(2)$. *Israel journal of mathematics*, 151 :281–321, 2006.
- [HLM12] Pascal Hubert, Erwan Lanneau, and Martin Möller. Completely periodic directions and orbit closures of many pseudo-anosov teichmueller discs in $q(1, 1, 1, 1)$ teichmüller discs in $q(1, 1, 1, 1)$. *Mathematische Annalen*, 353(1) :1–35, 2012.
- [HW80] Jean Hardy and Jaques Weber. Diffusion in a periodic wind-tree model. *Journal of Mathematical Physics*, 21(7) :1802–1808, 1980.
- [HW18] W Patrick Hooper and Barak Weiss. Rel leaves of the arnoux–yoccoz surfaces. *Selecta Mathematica*, 24 :875–934, 2018.
- [KMS86] Steven Kerckhoff, Howard Masur, and John Smillie. Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials. *Annals of Mathematics*, 124(2) :293–311, 1986.
- [KZ03] Maxim Kontsevich and Anton Zorich. Connected components of the moduli spaces of abelian differentials with prescribed singularities. *Inventiones mathematicae*, 153(3) :631–678, 2003.
- [LM08] Elon Lindenstrauss and Maryam Mirzakhani. Ergodic theory of the space of measured laminations. *International mathematics research notices*, 2008(1), 2008.
- [LN14] Erwan Lanneau and Duc-Manh Nguyen. Connected components of prym eigenform loci in genus three. *Mathematische Annalen*, pages 1–41, 2014.
- [Mar04] Grigoriy A. Margulis. *On some aspects of the theory of Anosov systems*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2004. With a survey by Richard Sharp : Periodic orbits of hyperbolic flows, Translated from the Russian by Valentina Vladimirovna Szulikowska.
- [Mas92] Howard Masur. Hausdorff dimension of the set of nonergodic foliations of a quadratic differential. *Duke Mathematical Journal*, 66(3) :387–442, 1992.
- [McM05a] CT McMullen. Teichmuller curves in genus two : The decagon and beyond. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 582 :173–199, 01 2005.
- [McM05b] Curtis T McMullen. Teichmüller curves in genus two : Discriminant and spin. *Mathematische Annalen*, 333(1) :87–130, 2005.
- [McM06] Curtis T McMullen. Teichmuller curves in genus two : Torsion divisors and ratios of sines. *Inventiones mathematicae*, 165(3) :651, 2006.
- [McM07a] Curtis T McMullen. Dynamics of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ over moduli space in genus two. *Annals of mathematics*, 165(2) :397–456, 2007.
- [McM07b] Curtis T McMullen. Prym varieties and teichmüller curves. 2007.

- [McM14] Curtis McMullen. Moduli spaces of isoperiodic forms on riemann surfaces. *Duke Mathematical Journal*, 163(12) :2271–2323, 2014.
- [MT94] Gregori Aleksandrovitch Margulis and Georges Metodiev Tomanov. Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces. *Inventiones mathematicae*, 116(1) :347–392, 1994.
- [MW02] Yair Minsky and Barak Weiss. Nondivergence of horocyclic flows on moduli space. *J. reine angew. Math.*, 2002(552) :131–177, 2002.
- [MW17] Maryam Mirzakhani and Alex Wright. The boundary of an affine invariant submanifold. *Invent. Math.*, 209(3) :927–984, 2017.
- [MW18] Maryam Mirzakhani and Alex Wright. Full-rank affine invariant submanifolds. *Duke Mathematical Journal*, 167(1) :1–40, 2018.
- [Rat91] Marina Ratner. On raghunathan’s measure conjecture. *Annals of Mathematics*, 134(3) :545–607, 1991.
- [SSWY24] John Smillie, Peter Smillie, Barak Weiss, and Florent Ygouf. Horospherical dynamics in invariant subvarieties. *Advances in Mathematics*, 451 :109783, 2024.
- [SW19] David Simmons and Barak Weiss. Random walks on homogeneous spaces and diophantine approximation on fractals. *Inventiones mathematicae*, 216(2) :337–394, 2019.
- [SY] John Smillie and Florent Ygouf. Geometric structures and orbit closures in moduli spaces of translation surfaces. Under preparation.
- [Vee98] William A. Veech. Siegel measures. *Annals of Mathematics*, 148(3) :895–944, 1998.
- [Wri14] Alex Wright. The field of definition of affine invariant submanifolds of the moduli space of abelian differentials. *Geometry & Topology*, 18(3) :1323–1341, 2014.
- [Wri15] Alex Wright. Cylinder deformations in orbit closures of translation surfaces. *Geometry & Topology*, 19(1) :413–438, 2015.
- [Ygo19] Florent Ygouf. *Feuilletage isopériodique de l'espace de modules des surfaces de translation*. Theses, Université Grenoble Alpes, June 2019.
- [Ygo21] Florent Ygouf. Isoperiodic Dynamics in Rank 1 Affine Invariant Orbifolds. *International Mathematics Research Notices*, 09 2021. rnab153.
- [Ygo23a] Florent Ygouf. A criterion for density of the isoperiodic leaves in rank one affine invariant orbifolds. *Journal of Topology*, 16(1) :1–19, 2023.
- [Ygo23b] Florent Ygouf. Nonarithmetic affine invariant orbifolds in $\mathcal{H}^{odd}(2, 2)$ and $\mathcal{H}(3, 1)$. *Geometriae Dedicata*, 217(4) :72, 2023.