10. 2. 2023

PVA EXPO, Praha

Řešení

fykos.cz

fyziklani.cz

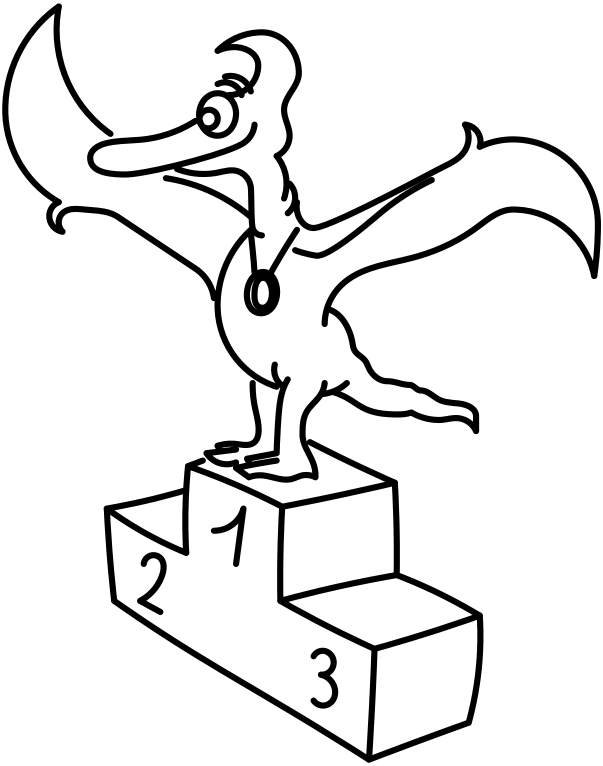
/fykos

@fykosak

Fyziklani2023

Řešení úloh

Fyziklani



Úloha AA ... na koncertě

Danka byla na koncertě na letišti. Během jedné písně měli sesynchronizované bubnování a blikání světelných reflektorů nad pódiem. Šlo o pravidelné bubnování a blikání s periodou $T = 1{,}5\,\mathrm{s}$, přičemž se vždy tyto dvě události odehrály najednou. Danka však viděla, že reflektory blikají s posunem půl periody oproti zvuku bicích. Jaká je nejmenší možná vzdálenost Danky od pódia, aby pozorovala tento jev? *Danka a další organizátoři byli na koncertě Rammsteinu.*

Ak Danka stojí vo vzdialenosti x od pódia, svetlo z pódia k nej dorazí za čas $t_1 = x/c$, kde c je rýchlosť svetla. Obdobne sa bubnovanie šíri vzduchom k Danke rýchlosťou zvuku vo vzduchu v, a teda zvuková vlna k nej dorazí za čas $t_2 = x/v$. Keďže Danka vidí, že svetelná a zvuková vlna k nej prichádzajú s časovým rozdielom $T/2$, musí platiť

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{2}\,.$$

Za časy t_1 a t_2 dosadíme vyššie uvedené vzťahy a následne už len vyjadríme hľadanú vzdialenosť

$$\begin{aligned} \frac{x}{v} - \frac{x}{c} &= \frac{T}{2}\,, \\ x\left(\frac{c-v}{cv}\right) &= \frac{T}{2}\,, \\ x &= \frac{T}{2}\left(\frac{cv}{c-v}\right)\,. \end{aligned}$$

Teraz si môžeme všimnúť, že druhý zlomok v poslednej rovnici sa dá upraviť do tvaru $v/(1-v/c)$, a keďže podiel v/c je o niekoľko rádov menší ako 1, celý zlomok je pomerne presne rovný v. Potom

$$x = \frac{vT}{2} \doteq 257\,\mathrm{m}\,.$$

Danka teda musela stáť vo vzdialenosti 257 m od pódia. Všeobecne môže Danka stáť aj v miestach, ktoré spĺňajú podmienku $t_2 - t_1 = (2n-1)\cdot T/2$, kde n je prirodzené číslo. Keďže sa ale pýtame na najmenšiu vzdialenosť, uvažujeme v celom riešení $n = 1$.

Daniela Dupkalová
`daniela@fykos.cz`

Úloha AB ... pomalý cyklista

Verča jede autem po silnici rychlostí $v_1 = 82\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Po kraji vozovky šlape na kole rychlostí $v_2 = 16\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ cyklista, kterého chce Verča objet, a proto musí vjet do středu silnice. Aby ho neohrozila, z pruhu vyjede vždy $d = 20\,\mathrm{m}$ za cyklistou a zpátky se zařadí až ve vzdálenosti $d = 20\,\mathrm{m}$ od cyklisty (ve směru jízdy). Jak dlouhá by musela být nehybná překážka na kraji silnice, aby Verča strávila jejím objížděním stejný čas jako v případě s cyklistou? Nehybné věci objíždí pouze s rezervou $l = 10\,\mathrm{m}$. Časy potřebné k přejíždění mezi středem silnice a pruhem zanedbejte. Délku auta a cyklisty neuvažujte.

Verču nebaví objíždět věci, když řídí. Takže neřídí.

Označme si hledanou délku překážky jako S a vzdálenost, kterou urazí cyklista během doby, kdy bude auto v objížděcím pruhu, jako s. Pro řešení úlohy je klíčové vyjádřit čas t, který zde auto stráví. Z výše napsaného dostáváme rovnici

$$v_2 \cdot t = s\,.$$

Druhá rovnice do soustavy popisuje vzdálenost, kterou za čas t ujede auto, tedy

$$v_1 \cdot t = 2d + s\,,$$

auto totiž objíždí cyklistu s rezervou d na obou stranách.

Z této soustavy rovnic snadno vyjádříme hledaný čas t a vzdálenost s jako

$$s = \frac{2d}{\frac{v_1}{v_2} - 1}\,, \quad t = \frac{2d}{v_1 - v_2}\,.$$

Hledanou vzdálenost S dostaneme jako tuto dráhu cyklisty, ke které přičteme rozdíl v rezervě objíždění, získáváme tedy

$$S = s + 2(d - l) = \frac{2d}{\frac{v_1}{v_2} - 1} + 2(d - l)\,.$$

Po dosazení číselných hodnot zjistíme, že překážka by musela měřit zhruba $S \doteq 30\,\mathrm{m}$.

Veronika Hendrychová
`veronika.hendrychova@fykos.cz`

Úloha AC ... málo času

Daniel by potřeboval prodloužit čas, který mu zůstává na sepsání diplomové práce. Ideálně tak, aby se ze tří týdnů stalo šest. Jako nejlepší a nejjednodušší řešení mu přijde trochu pohnout Zemí. O kolik astronomických jednotek musí Daniel zvětšit střední vzdálenost Země od Slunce, aby se oběžná doba Země zdvojnásobila? Výsledek napište s přesností na 3 platné cifry.

Daniel by potřeboval víc času na psaní diplomky.

Použijeme zjednodušený tretí Keplerov zákon, kde platí $a^3 = P^2$ pre obežnú periódu P v rokoch a strednú vzdialenosť od Slnka[1] a v astronomických jednotkách. Pre novú dĺžku obežnej doby $P = 2\,\mathrm{roky}$ dostaneme rovnicu $a^3 = 4$, z čoho po odmocnení dostaneme $a = 1{,}587\,\mathrm{au}$. Keďže stredná vzdialenosť Zeme od Slnka je $1\,\mathrm{au}$, Daniel musí posunúť Zem o približne 0,587 astronomickej jednotky, čo je až za dráhou Marsu.

Daniel Dupkala
`daniel.dupkala@fykos.cz`

[1] presnejšie ide o dĺžku veľkej polosy orbity

Úloha AD ... pružinky a závaží

Máme tři stejné pružiny zanedbatelné hmotnosti s tuhostí k a tři závaží se stejnou hmotností m. Připevníme jednu pružinu ke stropu a na její druhý konec zavěsíme závaží. Na něj připojíme další pružinu, která má na konci opět závaží, a nakonec třetí pružinu a třetí závaží. O kolik se celkově prodlouží pružiny oproti své klidové délce? *Karel zavzpomínal na pružinky.*

Vyřešíme prodloužení každé pružiny zvlášť a poté je sečteme. Očíslujeme-li si pružinky odspodu, je prodloužení spodní z nich

$$F_1 = mg = ky_1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{mg}{k} \,.$$

Podobně pro druhou a třetí

$$y_2 = \frac{2mg}{k} \,, \quad y_3 = \frac{3mg}{k} \,.$$

Celkově dostáváme

$$\Delta y = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{6mg}{k} \,.$$

Karel Kolář
karel@fykos.cz

Úloha AE ... gramofonová

Kamera zabírá gramofonovou desku, která je symetricky přeškrtnutá šesti čarami vedoucími středem od jednoho konce k druhému. Na záběru je vidět, jak se deska postupně roztáčí. V určitém okamžiku to vypadá, jako kdyby se vůbec nepohybovala. V tento moment se body na obvodu desky otáčejí rychlostí $v = 3{,}14\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, deska má poloměr $r = 10\,\mathrm{cm}$. Určete, kolik snímků za sekundu pořídí kamera. *Nadějný pták Fykosák zapomíná mrkat.*

Úhel mezi dvěma čarami na desce je

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \,.$$

Deska na videu bude vypadat nehybně, pokud se mezi dvěma snímky pootočí právě o libovolný násobek tohoto úhlu. Protože se však deska postupně roztáčí, hledáme nejmenší takové pootočení, proto je frekvence snímků

$$f = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{6v}{\pi r} \doteq 60\,\mathrm{s^{-1}} \,.$$

Jan Pijáček
jan.pijacek@fykos.cz

Úloha AF ... míček na lodi

Lego s Dodem plují na lodi po řece a na palubě si hází s míčem. Oba dva stojí přesně podél směru pohybu lodi i vody v řece. Zpovzdálí je sleduje Robo stojící na břehu. Když Lego hodí Dodovi, tak Robo vidí, že míč má vodorovnou rychlost $v_1 = 42\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, když Dodo hodí Legovi, tak Robo pozoruje rychlost $v_2 = 24\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ v opačném směru. Lego a Dodo Robovi potvrzují, že oba v horizontálním směru hází stejně rychle. Jakou rychlostí vůči Robovi pluje loď a kterým směrem (tzn. od Doda k Legovi, nebo od Lega k Dodovi)?

Karel chtěl konkurovat Nanynce, která šla do zelí.

Označme si rýchlosť lode v_L a rýchlosť, ktorou si Lego s Dodom hádžu (čiže rýchlosť lopty vzhľadom k lodi) ako v_H. Z rýchlostí, ktoré pozoruje Robo je väčšia rýchlosť v_1. Tú bude pozorovať v prípade, keď je lopta hodená v smere pohybu lode a teda rýchlosti sa budú sčítavať $v_1 = v_\mathrm{L} + v_\mathrm{H}$. Z toho, že Robo túto rýchlosť pozoruje, keď Lego hádže Dodovi, zároveň vidíme, že loď pláva smerom od Lega k Dodovi.

Rýchlosť v_2 bude pozorovať, keď je lopta hodená v opačnom smere, ako sa loď plaví. Veľkosť tejto rýchlosti bude rozdiel veľkostí v_L a v_H, čiže $v_2 = |v_\mathrm{L} - v_\mathrm{H}|$. Potrebujeme ešte zistiť, ktorá z tých dvoch rýchlostí je vyššia, aby sme sa mohli zbaviť absolútnej hodnoty. V zadaní je, že rýchlosť v_2 pozoroval Robo v opačnom smere ako v_1, to je možné jedine vtedy, keď si Lego s Dodom hádžu väčšou rýchlosťou, ako je rýchlosť lode, čiže platí $v_2 = v_\mathrm{H} - v_\mathrm{L}$.

Sumárne máme sústavu rovníc

$$v_1 = v_\mathrm{H} + v_\mathrm{L}\,,$$
$$v_2 = v_\mathrm{H} - v_\mathrm{L}\,,$$

kde neznáme sú v_H a v_L. Nás ale zaujíma iba rýchlosť lode, preto stačí, ak druhú rovnicu odčítame od prvej a dostávame

$$v_1 - v_2 = 2v_\mathrm{L}\,,$$
$$v_\mathrm{L} = \frac{v_1 - v_2}{2} = 9\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,,$$

čiže odpoveď na otázku v zadaní je, že loď pláva v smere od Lega k Dodovi rýchlosťou $9\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha AG ... vážení psa

Jarda došel se svým psem na veterinu, kde ho postavil na váhu a zvážil. Jakmile si jeho hmotnost přečetl, zatáhnul za vodítko, ale pes se ani nehnul. Váha při tažení ukázala o 10 procent menší údaj než předtím. Jaký je minimální koeficient tření mezi váhou a tlapkami psa? Jarda tahal za vodíko pod úhlem 40° vůči zemi.

Poslední pocta psovi Dortovi.

Označme velikost síly jako F, hmotnost psa jako m a úhel $\alpha = 40^\circ$. Při vážení s napnutým vodítkem působí na váhu normálová síla

$$F_\mathrm{N} = mg - F\sin\alpha\,,$$

tedy podle zadání $F\sin\alpha = 0{,}1mg$.

Ve vodorovném směru působí síla $F\cos\alpha$, proti které působí síla třecí. Ta je úměrná koeficientu tření f jako $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{N}$. Protože pes po váze neklouzal, musí platit $F_\mathrm{t} > F\cos\alpha$, odkud

$$f > \frac{F\cos\alpha}{mg - F\sin\alpha}\,.$$

Nyní už pouze dosadíme za F ze druhé rovnice a máme

$$f > \frac{\cos\alpha}{9\sin\alpha} = 0{,}13\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha AH ... napouštíme škopek

Zahradní hadice má délku 15 m *a vnitřní průměr* 1,5 cm. *Její konec o délce* 11 m *leží na přímém slunci, zbytek vede stínem ke kohoutku. Sluneční paprsky ohřály vodu v první části hadice na* 35 °C, *zatímco z přívodu teče voda o teplotě* 15 °C. *Předpokládejte, že mezi vyhřátou částí a kohoutkem se teplota vody mění lineárně. Nyní začneme z hadice napouštět nádobu. Jakou teplotu bude nakonec voda mít, pokud jí do nádoby napustíme* 5,5 ℓ*?*

Jarda vzpomíná na svou zahrádku a teplé letní dny.

V hadici leží na slunci objem vody $V_1 = l_1 S \doteq 1{,}9\,\ell$, kde $l_1 = 11\,\mathrm{m}$ a $S = \pi d^2/4$ je plocha průřezu hadice, přičemž $d = 1{,}5\,\mathrm{cm}$. Tato voda má teplotu $t_1 = 35\,{}^\circ\mathrm{C}$. Počítejme teplo, které je v ní uschované. Protože teplo je aditivní veličina, položme si hladinu nulového tepla vody při $0\,{}^\circ\mathrm{C}$. Po následném výpočtu nám díky tomu vyjde teplota rovnou ve stupních Celsia. Pak dostáváme

$$Q_1 = l_1 S\rho c t_1\,,$$

kde c je měrná tepelná kapacita vody a ρ její hustota.

V druhé části se teplota podle předpokladů ze zadání mění lineárně mezi $35\,{}^\circ\mathrm{C}$ a $t_2 = 15\,{}^\circ\mathrm{C}$, což odpovídá průměrné teplotě $t_\mathrm{p} = (t_1 + t_2)/2$. Teplo této části je tedy

$$Q_2 = l_2 S\rho c\frac{t_1 + t_2}{2}\,,$$

kde $l_2 = l - l_1 = 11\,\mathrm{m}$.

Neboť $Sl \doteq 2{,}6\,\ell$ je stále méně než $V = 5{,}5\,\ell$, musíme napustit i vodu, která je zatím za kohoutkem. Té potřebujeme $V - lS$. Její teplo je

$$Q_3 = (V - lS)\,\rho c t_2\,.$$

Ježto kapalina ve škopku je homogenní, získáme její teplotu ve stupních Celsia jako podíl celkového tepla ku celkové hmotnosti a měrné tepelné kapacitě, tedy

$$t = \frac{1}{\rho c}\frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{l_1 S t_1 + (l - l_1)\,S\,\frac{t_1 + t_2}{2} + (V - lS)\,t_2}{V} = 23{,}4\,{}^\circ\mathrm{C}\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha BA ... CR7

Možná nejlepší fotbalista světa, Cristiano Ronaldo, je vysoký 187 cm. V hlavičkovém souboji ovšem dokáže vyskočit tak, že vrchol jeho hlavy se nachází až ve výšce 268 cm. Při snaze dát gól hlavou je velmi důležité načasování výskoku. Určete, kolik procent času ve výskoku se alespoň část jeho hlavy nachází nad úrovní 250 cm, kde může zasáhnout letící balón.

Jarda si stejně myslí, že Messi je lepší.

Označme Ronaldovu výšku h_R, výšku, kam vyskočí jako h_v, a výšku, kde potřebuje trefit balon, jako $h_\mathrm{b} = 250\,\mathrm{cm}$. Při výskoku se tak Ronaldo zvedne o neuvěřitelných $h_\mathrm{v} - h_\mathrm{R} = 81\,\mathrm{cm}$. Dle zákonů pohybu v homogenním tíhovém poli, které na hřišti panují, stráví ve vzduchu celkem čas

$$t_\mathrm{v} = 2\sqrt{\frac{2\left(h_\mathrm{v} - h_\mathrm{R}\right)}{g}}\,,$$

kde g je tíhové zrychlení.

Podobně můžeme formulovat podmínku, kdy je výše než h_b. To vede na čas

$$t_\mathrm{p} = 2\sqrt{\frac{2\left(h_\mathrm{v} - h_\mathrm{b}\right)}{g}}\,.$$

Zajímá nás poměr

$$\frac{t_\mathrm{p}}{t_\mathrm{v}} = \sqrt{\frac{h_\mathrm{v} - h_\mathrm{b}}{h_\mathrm{v} - h_\mathrm{R}}} = 0{,}47\,,$$

což odpovídá 47 %. Ronaldo tak téměř polovinu doby ve vzduchu může zasáhnout míč letící nad výškou 250 cm.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha BB ... krájíme petržel

Jarda krájel petržel, která měla tvar dokonalého kuželu o vrcholovém úhlu $2\alpha = 10\,^\circ$. Nudilo ho ale krájet všechna kolečka stejně široká, proto je začal dělat tak, že všechna měla stejný objem $V = 0{,}9\,\mathrm{cm}^3$. Jak tlustý byl sedmý kousek, pokud krájel od špičky?

Jardovi v polévce plaval velký kus zeleniny.

Označme h_{n-1} jako vzdálenost špičky od bližší roviny n-tého kolečka, zatímco h_n je vzdálenost vrcholu od druhého řezu. Pak h_0 je rovno nulové vzdálenosti.

Objem první ukrojené části je V, její tvar je kužel. Pro jeho objem tak platí

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi h_1^3 \operatorname{tg}^2 \alpha\,,$$

kde jsme vyjádřili poloměr podstavy pomocí vrcholového úhlu a výšky.

Objem prvních n kousků je nV, celková výška je tak

$$h_n = \sqrt[3]{\frac{3nV}{\pi \operatorname{tg}^2 \alpha}}\,.$$

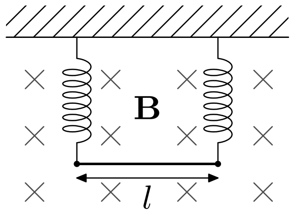
Odečtením h_6 od h_7 dostaneme požadovaný výsledek (nezapomeňme, že zde $\alpha = 5\,^\circ$)

$$t_n = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi \operatorname{tg}^2 \alpha}} \left(\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}\right) = 0{,}46\,\mathrm{cm}\,.$$

Je zřejmé, že se tloušťka koleček zmenšuje.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha BC ... tyč na pružinách



Kovovou tyč o délce $l = 34\,\mathrm{cm}$ a hmotnosti $m = 85\,\mathrm{g}$ zavěsíme za její konce pomocí dvou vodivých pružin ke stropu. Poté v místnosti vyrobíme homogenní magnetické pole o velikosti $B = 0{,}440\,\mathrm{T}$ orientované jako na obrázku. Jak velký proud musíme ve správném směru do tyče pustit, aby pružiny nebyly vůbec napjaté? Danka vzpomíná na učení se elektromagnetismu.

Aby pružiny neboli vôbec napäté, musí byť tiažová sila $F_\mathrm{G} = mg$, ktorá pôsobí v smere nadol na tyč, vykompenzovaná inou silou pôsobiacou nahor. Keď vložíme vodič, ktorým prechádza elektrický prúd, do magnetického poľa, začne naňho pôsobiť magnetická sila. Jej veľkosť popisuje Ampérov zákon pre silu v magnetickom poli

$$F_\mathrm{m} = IlB\sin\alpha\,,$$

kde α je uhol medzi smerom magnetického poľa a smerom prúdu. V našom prípade je tyč kolmá na magnetické pole, takže $\alpha = 90\,^\circ$, a teda $\sin\alpha = 1$. Keď sa magnetická a tiažová sila vyrovnajú, platí

$$mg = IlB\sin\alpha\,.$$

Odtiaľ vyjadríme hľadanú veľkosť prúdu a dosadíme číselné hodnoty

$$I = \frac{mg}{lB\sin\alpha} = \frac{mg}{lB} \doteq 5{,}6\,\mathrm{A}\,.$$

Do tyče musíme pustiť prúd s veľkosťou 5,6 A.

Daniela Dupkalová
daniela@fykos.cz

Úloha BD ... houpačka

Řetízek houpačky je v nejvyšším bodě odchýlený oproti svislici o $\alpha = 70\,^\circ$. Když sedátko houpačky prochází nejnižším bodem, řetízek se najednou přetrhne. Řetízek je dlouhý $l = 2\,\mathrm{m}$, sedátko se v klidu nachází ve výšce $h_0 = 1\,\mathrm{m}$ nad zemí. Jak daleko dopadne sedátko od svislice houpačky? Nadějný pták Fykosák přemýšlí nad budoucností.

Nejprve určíme maximální výšku, které houpačka dosáhne

$$h = h_0 + l\left(1 - \cos\alpha\right)\,.$$

Díky tomu, že v tomto případě předpokládáme zachování mechanické energie ($E_\mathrm{k} = E_\mathrm{p}$), můžeme určit vodorovnou složku rychlosti jako

$$\frac{1}{2}mv_x^2 = mg\left(h - h_0\right) ,$$

odkud vyjádříme rychlost ve vodorovném směru

$$v_x = \sqrt{2gl\left(1 - \cos\alpha\right)} .$$

Výšku svislého vrhu v homogenním tíhovém poli napíšeme jako $h_0 = gt^2/2$. Odtud najdeme čas

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} ,$$

což nám po vynásobení se vztahem pro v_x dává hledanou vodorovnou vzdálenost

$$s_x = v_x t = \sqrt{4h_0 l\left(1 - \cos\alpha\right)} = 2{,}3\,\mathrm{m} .$$

Jan Pijáček
`jan.pijacek@fykos.cz`

Úloha BE ... hustá energie

V dnešní době hledáme způsoby, jak získat energii. Jednou z cest je výroba elektřiny z obnovitelných zdrojů, jako je vítr nebo slunce. Ty ovšem neprodukují pořád, proto je potřeba vyrobenou energii skladovat. Porovnejme dvě možnosti – přečerpávací vodní elektrárnu a stlačený vodík. Elektrárna Dlouhé stráně má pracovní objem vody v horní nádrži $2\,580\,000\,\mathrm{m^3}$*, spád vody je* $510\,\mathrm{m}$ *a účinnost* $90\,\%$*. Plynný vodík* $\mathrm{H_2}$ *zase můžeme uchovat stlačený v lahvích o objemu* $50\,\ell$ *při tlaku* $70\,\mathrm{MPa}$*. Výhřevnost vodíku je* $120\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$ *a účinnost konverze na elektřinu je* $50\,\%$*. Vodík považujte za ideální plyn, teplota je* $25\,\mathrm{^\circ C}$*. Kolik zmíněných naplněných lahví s vodíkem odpovídá dostupné elektrické energii Dlouhých strání?*

Jarda si chtěl do zásoby koupit elektřinu, než se zdraží.

Dostupná energie z přečerpávací vodní elektrárny je z definice potenciální energie homogenního tíhového pole

$$E_\mathrm{e} = \eta_\mathrm{e} V_\mathrm{e} \rho_\mathrm{v} g h = 11\,600\,\mathrm{GJ} ,$$

kde $\eta_\mathrm{e} = 0{,}9$, V_e je objem horní nádrže, ρ_v hustota vody a $h = 510\,\mathrm{m}$ je spád vody.

Energii v jedné lahvi vodíku vypočítáme z jeho hmotnosti a gravimetrické energie (energie uchovaná v jednotce hmotnosti). Uvažujeme-li vodík jako ideální plyn, je jeho hustota při tlaku $p = 70\,\mathrm{MPa}$ a teplotě $T = 298\,\mathrm{K}$

$$\rho_\mathrm{h} = \frac{M_\mathrm{m} p}{TR} = 56{,}5\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} ,$$

kde $M_\mathrm{m} \doteq 2\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ je molární hmotnost molekuly vodíku.

Dostupná energie z lahve vodíku tak je

$$E_\mathrm{h} = \eta_\mathrm{h} l V_\mathrm{l} \rho_\mathrm{h} = 170\,\mathrm{MJ} ,$$

kde $\eta_\mathrm{h} = 0{,}5$, l je gravimetrická energie a V_l je objem lahve.

Podílem obou energií dostáváme počet lahví $N = 68\,000$. Celkový objem vodíku ve všech lahvích je ale o několik řádů menší než objem nádrže vodní elektrárny.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha BF ... kladka, co se posune

Mějme nehmotnou volnou kladku. Jeden konec nehmotného lana, které přes ni prochází, je připevněn ke stropu přímo, druhý je spojen s pružinou o tuhosti $k = 80\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, která je upevněna k témuž stropu. Na kladku zavěsíme závaží o hmotnosti $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$. O jakou vzdálenost se kladka posune směrem dolů? *Lega napadlo, když psal jinou úlohu...*

Sily sa vyrovnajú, keď oba konce lana budú kladku ťahať silou $mg/2$. Vtedy bude pružina vzhľadom na svoju pokojovú dĺžku predĺžená o $mg/(2k)$. Tento dĺžkový rozdiel sa rovnomerne rozdelí medzi obe strany lana idúceho z kladky, takže kladka vo výsledku klesne len o $mg/(4k) = 3{,}1\,\mathrm{cm}$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha BG ... plave to?

Máme těleso, o kterém víte jen to, že je to krychle se stranou kratší než $10\,\mathrm{cm}$. Zároveň máme nádobu s podstavou ve tvaru čtverce o straně $a = 10\,\mathrm{cm}$, kterou naplníme vodou o objemu $V = 1\,\ell$. Když do nádoby hodíme naši krychli, výška hladiny vzroste o $\Delta h_1 = 3{,}5\,\mathrm{cm}$. Následně krychli vytáhneme, vylijeme vodu a místo ní nalijeme metanol o objemu V a hustotě $\rho_\mathrm{M} = 792\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Když hodíme krychli do nádoby s metanolem, hladina vzroste o $\Delta h_2 = 4{,}2\,\mathrm{cm}$. Jaká je hustota našeho tělesa? Ano, máte zadány všechny potřebné údaje.

Lego chtěl zadat zajímavého Archiméda.

Kľúčové pozorovanie v tejto úlohe je, že $\Delta h_1 \rho_\mathrm{V} \neq \Delta h_2 \rho_\mathrm{M}$, čiže v aspoň jednej kvapaline kocka leží na dne. Lebo ak by v oboch kvapalinách plávala, tak by vztlaková sila musela byť rovnaká, takže by muselo platiť, že $a^2 \Delta h_1 \rho_\mathrm{V} g = a^2 \Delta h_2 \rho_\mathrm{M} g$. Vykrátime $a^2 g$ a dostávame podmienku na súčin nárastu výšky hladiny a hustoty, ktorá ale splnená nie je, to znamená, že nemôže byť pravda aby kocka v oboch kvapalinách plávala.

Navyše nemôže v oboch kvapalinách ležať na dne, keďže $\Delta h_1 \neq \Delta h_2$. Teda zjavne v jednej pláva a v druhej leží na dne. Logicky v tej s vyššou hustotou bude plávať a v tej s nižšou hustotou ležať na dne.

Z nárastu výšky hladiny metanolu vieme jednoducho spočítať objem kocky ako $V_\mathrm{k} = a^2 \Delta h_2$. Navyše z nárastu výšky hladiny vody môžeme spočítať hmotnosť kocky, lebo jej tiaž musí byť rovnaká ako tiaž kvapaliny s objemom rovným objemu ponorenej časti kocky, teda $m_\mathrm{k} = a^2 \Delta h_1 \rho_\mathrm{V}$.

Hustota kocky teda bude

$$\rho_\mathrm{k} = \frac{m_\mathrm{k}}{V_\mathrm{k}} = \frac{a^2 \Delta h_1 \rho_\mathrm{V}}{a^2 \Delta h_2} = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} \rho_\mathrm{V} = 832\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha BH ... neposedná mince

Při jízdě nahoru po nakloněném posuvném pásu o sklonu $\alpha = 10\,^\circ$ a délce $l = 30\,\mathrm{m}$ Verče přesně v jeho polovině vypadne z kapsy mince. Spadne na hranu do jedné z drážek na páse a začne se bez prokluzování kutálet dolů. Kolik má Verča času, aby minci stihla chytit, než spadne pod dolní okraj pásu? Rychlost pásu je $v = 0{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Verča plynule ztrácí obsah svých kapes a bojí se eskalátorů.

Nejprve si vyjádříme vzdálenost mince od dolního konce pásu v závislosti na čase. Určíme ji z celkové energetické bilance při ztrátě výšky h. Potenciální energie se přemění na energii translační

$$E_{\mathrm{k,t}} = \frac{1}{2}mv^2$$

a rotační

$$E_{\mathrm{k,r}} = \frac{1}{2}J\omega^2\,.$$

Znak J značí moment setrvačnosti. V našem konkrétním případě pro minci tvaru válce platí $J = mR^2/2$, kde m je hmotnost mince a R její poloměr. Úhlová rychlost ω je díky podmínce neprokluzování svázána s rychlostí mince jako $v = R\omega$. Sečteme-li tedy oba příspěvky ke kinetické energii, dostáváme ze zákona zachování energie

$$mg\Delta h = E_{\mathrm{k,t}} + E_{\mathrm{k,r}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m\left(R\omega\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mv^2\,.$$

Toto je stejný vztah jako pro rovnoměrně zrychlený pohyb, hmotnost mince napravo je pouze přenásobená koeficientem 3/2. Mince tak bude mít konstantní zrychlení o velikosti

$$a = \frac{2}{3}g\sin\alpha\,.$$

Mince koná rovnoměrně zrychlený pohyb dolů z pásu, zároveň ale na začátku měla rychlost vůči zemi v v opačném směru. Dostáváme tedy rovnici

$$x = \frac{l}{2} + vt - \frac{1}{2}\frac{2}{3}gt^2\sin\alpha\,.$$

Čas, ve kterém se mince dostane k dolnímu okraji pak získáme, když položíme $x = 0$. Řešíme tedy kvadratickou rovnici pro t a dostaneme kořeny

$$t_{1,2} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + \frac{2}{3}lg\sin\alpha}}{-\frac{2}{3}g\sin\alpha}\,.$$

Při dosazení číselných hodnot nám vyjde $t_1 \doteq -4{,}4\,\mathrm{s}$ a $t_2 \doteq 6{,}0\,\mathrm{s}$. Záporný čas uvažovat nebudeme, takže Verča má zhruba $6{,}0\,\mathrm{s}$, aby si pro minci doběhla.

Veronika Hendrychová
veronika.hendrychova@fykos.cz

Úloha CA ... kladka, co kmitá

Mějme nehmotnou volnou kladku. Jeden konec nehmotného lana, které přes ni prochází, je připevněn ke stropu přímo, druhý je připevněn k pružině s tuhostí $k = 80\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$, která je připevněna k témuž stropu. Na kladku zavěsíme závaží o hmotnosti $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$. Jaká bude perioda malých kmitů? *Lego má rád kmity a kladky, tak to zase spojil*

Keď posunieme závažie z rovnovážnej polohy o $\mathrm{d}x$ nadol, aj kladka sa posunie o $\mathrm{d}x$. Tým pádom musí celková dĺžka lana a pružiny vzrásť o $2\,\mathrm{d}x$. Lano sa však nepredĺži, takže sa o túto dĺžku musí predĺžiť pružina. Tá bude následne ťahať silou o $2k\,\mathrm{d}x$ väčšou, než v rovnovážnej polohe. Keďže lano aj kladka sú nehmotné, sila ktorou ťahá pružina je rovná pnutiu v celej dĺžke lana. Keďže kladku ťahá nahor lano na oboch stranách (čiže dvakrát), je kladka ťahaná nahor silou o $4k\,\mathrm{d}x$ väčšou, než v rovnovážnej polohe. Kladka je nehmotná, takže toto je zároveň príspevok, o ktorý vzrastie sila, ktorou je nahor ťahané naše závažie s hmotnosťou m, keď ho vychýlime z rovnovážnej polohy o $\mathrm{d}x$. Keď podelíme príspevok sily posunutím, ktoré ho vyvolalo, dostávame efektívnu tuhosť, ktorú teleso cíti ako $k_{\mathrm{ef}} = 4k$. (K rovnakému výsledku sme vlastne dospeli aj v úlohe „kladka, co se posune“, kde sme zistili, že po zavesení telesa na kladku sa kladka posunie nižšie o $mg/(4k) = mg/k_{\mathrm{ef}}$.)

Zostáva teda dosadiť do vzorca pre periódu lineárneho harmonického oscilátora

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{\mathrm{ef}}}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}35\,\mathrm{s}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha CB ... krystal berylu

Beryl krystalizuje v šesterečné soustavě, tedy s elementárními buňkami tvaru kolmých hranolů, které mají jako základnu kosočtverec. Když vhodně spojíme dohromady 3 elementární buňky, má podstava výsledného kolmého hranolu tvar pravidelného šestiúhelníku, jehož stranu označme a. Pro výšku hranolu c přibližně platí $a \doteq c$. V elementární buňce se nachází atomy odpovídající dvěma molekulám berylu, jehož sumární vzorec je $\mathrm{Be_3Al_2(SiO_3)_6}$. Relativní atomová hmotnost beryllia je $A_{\mathrm{Be}} = 9{,}01$, hliníku $A_{\mathrm{Al}} = 27{,}0$, křemíku $A_{\mathrm{Si}} = 28{,}1$ a kyslíku $A_{\mathrm{O}} = 16{,}0$. Jaká je délka strany a, je-li hustota berylu $\rho = 2\,760\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$?

Karel komplikoval jednoduchou úlohu z gymnázia.

Spočítajme si najprv hmotnosť molekuly berylu. Pre všetky atómy v molekule máme zadané relatívne atómové hmotnosti. Tie udávajú hmotnosti atómov ako násobok atómovej hmotnostnej jednotky (konštanty), ktorá je definovaná ako dvanástina hmotnosti atómu uhlíku $^{12}\mathrm{C}$. Nás prirodzene zaujíma hlavne jej hodnota, ktorá je $m_{\mathrm{u}} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\mathrm{kg}$.

Jedna molekula berylu obsahuje 3 atómy Be, 2 Al, 6 Si a $6 \cdot 3 = 18$ O, čiže spolu bude hmotnosť molekuly

$$m_{\mathrm{molekula}} = (3A_{\mathrm{Be}} + 2A_{\mathrm{Al}} + 6A_{\mathrm{Si}} + 18A_{\mathrm{O}})m_u = 537{,}6\,m_u = 8{,}92 \cdot 10^{-25}\mathrm{kg}\,.$$

Ďalej potrebujeme vypočítať objem jedného útvaru. Objem hranola je výška krát obsah podstavy, výška je v našom prípade jednoducho a. Podstava je pravidelný šesťuholník, čiže jej obsah vypočítame ako 6-násobok obsahu rovnostranného trojuholníka so stranou a

$$S_\mathrm{p} = 6S_\mathrm{t} = 3a\ v_a = 3a\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\,,$$

a na to, aby sme dostali objem to stačí len prenásobiť a.

Zostáva dosadiť do vzorca pre hustotu a nezabudnúť, že jednému útvaru s podstavou šesťuholníka prislúchajú $2 \cdot 3$ molekuly, a vyjadriť a

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{6m_\mathrm{molekula}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3}\,,$$

$$a = \left(\frac{4m_\mathrm{molekula}}{\sqrt{3}\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \doteq 0{,}91\,\mathrm{nm}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha CC ... lasagnada

Uvažujte vrstvící se lasagne. První vrstva má se vším všudy hmotnost $m_0 = 100\,\mathrm{g}$ a teplotu $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. Každá další vrstva váží $p = 1/3$krát tolik co předchozí, ale je čerstvější. To znamená, že její absolutní teplota je $q = 2$krát vyšší než u předchozí vrstvy. Protože měl Pepa velký hlad, složil nekonečně mnoho těchto vrstev. Na jaké teplotě se výsledné lasagne ustálí, dosáhnou-li tepelné rovnováhy? Tepelné ztráty neuvažujte. Dobrou chuť. *Pepa měl hlad.*

Spočítajme najprv hmotnosť celej lasagne. Hmotnosť i-tej vrstvy bude $m_i = m_0 p^i$. Hmotnosť celej lasagne bude teda

$$M = \sum_{i=0}^{\infty} m_0 p^i\,.$$

To je geometrický rad, kto pozná vzorec, môže ho použiť, kto nepozná vzorec, ukážeme si, ako ho dostať. Trik spočíva v tom, že vynásobíme obe strany p a na pravej strane potom môžme spraviť substitúciu $j = i + 1$

$$pM = \sum_{i=0}^{\infty} m_0 p^{i+1} = \sum_{j=1}^{\infty} m_0 p^j\,.$$

Všimneme si, že na pravej strane teraz máme rovnakú sumu ako je tá, ktorá sa rovná M, s tým rozdielom, že začína až od prvého člena, nie od nultého. Na pravej strane máme $M - m_0$, a teda dostávame lineárnu rovnicu

$$pM = M - m_0$$

$$M = \frac{m_0}{1-p}\,.$$

Zostáva spočítať celkové teplo obsiahnuté v lasagni a podeliť ho celkovou hmotnosťou. Teplo obsiahnuté v jednej vrstve môžme vypočítať ako $Q_i = m_i T_i c = m_0 p^i T_0 q^i c = Q_0 p^i q^i$, kde c je merná tepelná kapacita lasagní a $Q_0 = m_0 T_0 c$ je teplo v nultej vrstve. Celkové teplo teda dostaneme rovnakým postupom, ako celkovú hmotnosť

$$Q = \frac{Q_0}{1 - pq} = \frac{m_0 T_0 c}{1 - pq} \,.$$

Ak sa celá lasagna ustáli na jadnej teplote, pre túto teplotu musí platiť

$$\begin{aligned} T_\mathrm{v} c M &= Q \\ T_\mathrm{v} &= \frac{\frac{m_0 T_0 c}{1-pq}}{c \frac{m_0}{1-p}} \\ T_\mathrm{v} &= T_0 \frac{1 - p}{1 - pq} = 600\,\mathrm{K} \,. \end{aligned}$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha CD ... čočky na nic

Mějme dvě čočky ve vzájemné vzdálenosti $d = 25\,\mathrm{cm}$. První z nich je spojná čočka s ohniskovou vzdáleností $f = 10\,\mathrm{cm}$, druhá je rozptylka s ohniskovou vzdáleností $-f$. Jak daleko před první čočku musíme umístit objekt, aby se soustavou zobrazil sám na sebe?

Jarda se rád zobrazí sám na sebe.

Označme a vzdálenost objektu před spojnou čočkou. Objekt se podle Gaussovy zobrazovací rovnice přes tuto čočku zobrazí do vzdálenosti

$$a' = \frac{af}{a - f} \,.$$

Vzdálenost tohoto obrazu před druhou čočkou je $a_2 = d - a'$. Podruhé použijeme zobrazovací rovnici a dostáváme

$$a_2' = \frac{-a_2 f}{a_2 + f} = \frac{-\left(d - a'\right) f}{d - a' + f} = \frac{-\left(d - \frac{af}{a-f}\right) f}{d - \frac{af}{a-f} + f} \,.$$

Dle zadání se poloha obrazu rovná poloze objektu, tedy $a_2' = -d - a$. Řešíme tedy rovnici

$$\frac{-\left(da - df - af\right) f}{da - df - f^2} = -d - a \,,$$

odkud

$$a^2 + \left(d - 2f\right) a - df = 0 \,.$$

Řešením této rovnice je

$$a = \frac{-d + 2f \pm \sqrt{d^2 + 4f^2}}{2} \,.$$

Protože objekt umísťujeme před první čočku, bereme kořen s kladným znaménkem. Odpovědí tedy je $a = 13{,}5\,\mathrm{cm}$.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha CE ... topíme vodíkem

Elektrolýzou vody vyrábíme kyslík a vodík, který zachytáváme a uskladňujeme do nafukovacího balónku. Proces probíhá při napětí $1{,}48\,\mathrm{V}$ *a proudu* $15\,\mathrm{A}$ *a vyrobíme při něm* $0{,}16\,\mathrm{g}$ *molekul vodíku* $\mathrm{H_2}$*. Později necháme vodík na vzduchu hořet a zahřejeme tím baňku s vodou. Baňka má tepelnou kapacitu* $22\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$ *a je v ní* $55\,\mathrm{ml}$ *vody o počáteční teplotě* $23\,\mathrm{^\circ C}$*. Po skončení hoření jsme naměřili teplotu* $94\,\mathrm{^\circ C}$*. Kolik procent energie se využilo na zahřátí vody a baňky?*

Jarda se chtěl ohřát vodou.

Molární hmotnost vodíku je přibližně $M_{\mathrm{H_2}} = 2{,}0\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$, protože molekula vodíku je složena ze dvou protonů (ve skutečnosti je to $M_{\mathrm{H_2}} = 2{,}016\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$, nám ale stačí menší přesnost). Hmotnost $m = 0{,}16\,\mathrm{g}$ tedy odpovídá počtu molekul $n = N_\mathrm{A} m / M_{\mathrm{H_2}}$. Počet atomů vodíku je dvojnásobný, celkový náboj při reakcích je tak

$$Q = 2\frac{N_\mathrm{A} m}{M_{\mathrm{H_2}}} e\,.$$

Práce vykonaná elektrolyzérem je pak jednoduše

$$W = 2U\frac{N_\mathrm{A} m}{M_{\mathrm{H_2}}} e\,.$$

Tato energie je uložena ve vodíku tím, že jsme rozbili molekuly vody a schovali ji v samotném vodíku. Pokud necháme vodík hořet na vzduchu, energie se uvolní zpět ve formě tepla.

Zahřátím jsme baňce a vodě dodali teplo

$$Q = \left(C + V_\mathrm{w}\rho_\mathrm{w}c_\mathrm{w}\right)\left(t_2 - t_1\right)\,,$$

kde C je tepelná kapacita baňky, V_w, ρ_w a c_w jsou objem, hustota a měrná tepelná kapacita vody v baňce a $t_2 - t_1$ je rozdíl počáteční a koncové teploty.

Hledaná účinnost je

$$\eta = \frac{Q}{W} = \frac{M_{\mathrm{H_2}}\left(C + V_\mathrm{w}\rho_\mathrm{w}c_\mathrm{w}\right)\left(t_2 - t_1\right)}{2UeN_\mathrm{A} m} = 78\,\%\,.$$

Všimněme si toho, že na ohřátí tohoto množství vody téměř na bod varu jsme použili pouze $0{,}16\,\mathrm{g}$ vodíku! Vodík má totiž nejvyšší výhřevnost na jednotku hmotnosti ze všech chemických paliv.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha CF ... vozík s olovnicí

Máme kopec se sklonem α. Na něj položíme vozík o hmotnosti M, kterému ze střechy visí provázek délky l s hmotným bodem o hmotnosti m na konci (tuto hmotnost nepočítáme do hmotnosti vozíku). Poté pustíme vozík dolů z kopce. V jakém úhlu vzhledem ke svislému směru se provázek ustálí? Uveďte kladný výsledek, bude-li lanko vychýlené ve směru jízdy, a záporný, bude-li vychýlené v opačném směru. Vozík se pohybuje bez tření.

Lega napadl už dost dávno a sám neví, proč jej ještě nenavrhl.

Zaujíma nás ustálená situácia. V nej sa už povrázok a hmotný bodom voči vozíku nehýbu, a teda to pôsobí, akoby spolu s vozíkom tvorili jedno dokonale tuhé teleso. Môžeme teda spočítať, s akým zrýchlením bude toto teleso zrýchľovať dole kopcom.

Jeho celková hmotnosť je $M + m$, zložka tiažovej sily v smere rovnobežnom s kopcom bude $(M + m)\, g \sin\alpha$. Zrýchlenie teda bude $a = g \sin\alpha$.

Presuňme sa teda do sústavy zrýchľujúcej spolu s vozíkom. Na to, aby sa hmotný bod zavesený na lanku v tejto sústave nehýbal, musí naň pôsobiť nulová výsledná sila. Rozoberme si sily, ktoré naň pôsobia. Jeho tiažová sila mg pôsobí zvislo nadol; zotrvačná sila ma rovnobežne s kopcom smerom dozadu; a nakoniec sila, ktorou pôsobí lanko, na ktorom visí. Veľkosť a smer sily od lanka budú (v ustálenej situácii) presne také, aby táto sila kompenzovala výslednicu dvoch zvyšných síl. Dôležité je, že smer sily od lanka je rovnaký, ako smer samotného lanka. Musíme teda zistiť smer výslednice zvyšných dvoch síl.

Tiažová sila mg pôsobí v smere nadol. Zvislá zložka zotrvačnej sily má veľkosť $ma \sin\alpha = mg \sin^2\alpha$ a smeruje nahor, vodorovná zložka má veľkosť $ma \cos\alpha = mg \sin\alpha \cos\alpha$ a smeruje dozadu. Vyslednica tiažovej a zotrvačnej sily má teda v zvislom smere zložku o veľkosti $mg \left(1 - \sin^2\alpha\right) = mg \cos^2\alpha$ smerom nadol a vo vodorovnom $mg \sin\alpha \cos\alpha$ smerom dozadu. Všimnime si, že pre limitný prípad zvislého kopca ($\alpha = \pi/2$) nepôsobia na hmotný bod v sústave spojenej s vozíkom žiadne sily, to je spôsobené tým, že táto sústava padá so zrýchlením g, a teda hmotný bod je z pohľadu tejto sústavy v beztiažovom stave.

Vráťme sa však k uhlu vychýlenia lanka. Zaujíma nás jeho vychýlenie voči zvislému smeru, takže tento uhol získame ako arkustangens pomeru vodorovnej zložky sily ku zvislej zložke

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{mg \sin\alpha \cos\alpha}{mg \cos^2\alpha} = \operatorname{arctg} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha\,.$$

Povrázok bude vychýlený o uhol α smerom dozadu, preto výsledok musíme zadať ako $-\alpha$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha CG ... horkovzdušný balón

Horkovzdušný balón s objemem $V = 3\,000\,\mathrm{m}^3$ a hmotností $M = 724\,\mathrm{kg}$ (beze vzduchu) stoupá do oblak. Teplota vzduchu uvnitř balónu je $T_\mathrm{b} = 120\,^\circ\mathrm{C}$, zatímco v okolí je konstantních $T_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Jak ale balón letí vzhůru, klesá okolní tlak. Určete, při jaké hodnotě okolního tlaku se vyrovná tíha balónu se vztlakovou silou, která na něj působí? Objem zbytku balónu je v porovnání s objemem vzduchu v něm zanedbatelný.

Lego si vzpomněl na fyzikální olympiádu.

Vieme, že pri teplote T_0 a tlaku p_0 je hustota vzduchu ρ_0. Z veličín v stavovej rovnici vyplýva, že hustota je určite úmerná N/V, preto môžeme napísať

$$
\begin{aligned}
pV &= NkT \\
\frac{p}{kT} &= \frac{N}{V} \sim \rho \\
\frac{p}{T}C &= \rho\,,
\end{aligned}
$$

kde C je konštanta, ktorej hodnotu môžeme určiť práve z hustoty za normálnych podmienok ako

$$C = \frac{T_0\rho_0}{p_0}\,.$$

Spätným dosadením dostaneme hustotu vzduchu za všeobecnej teploty a tlaku.

$$\rho = \rho_0 \frac{T_0 p}{T p_0}\,.$$

Tým pádom hmotnosť vzduchu v balóne je pri tlaku p

$$m = V\rho_0 \frac{T_0 p}{T_\mathrm{b} p_0}\,,$$

a hmotnosť vzduchu vytlačeného balónom

$$m_\mathrm{vyt} = V\rho_0 \frac{p}{p_0}\,.$$

V zadaní sa pýtame, pre aký tlak p sa tiažová a vztlaková sila vyrovnajú

$$
\begin{aligned}
F_\mathrm{g} &= F_\mathrm{vz} \\
(M+m)g &= m_\mathrm{vyt} g \\
M + V\rho_0 \frac{T_0 p}{T_\mathrm{b} p_0} &= V\rho_0 \frac{p}{p_0} \\
M &= V\rho_0 \frac{p}{p_0}\left(1 - \frac{T_0}{T_\mathrm{b}}\right) \\
p &= p_0 \frac{1}{1 - \frac{T_0}{T_\mathrm{b}}} \frac{M}{V\rho_0} = 80\,\mathrm{kPa}\,.
\end{aligned}
$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha CH ... zahřívaná

Ve vědeckých aplikacích je někdy nutné ohřát vzorek zavěšený ve vakuu. Využívá se k tomu proud urychlených elektronů, jejichž pohybová energie se při dopadu přemění na tepelnou. Mějme katodu s emisním proudem elektronů I_e, které jsou urychlovány napětím U. Tyto elektrony dopadají na vzorek o celkovém povrchu S. Předpokládejte, že je dost malý, takže je na něm teplota všude stejná, a že se veškerá energie elektronů přemění na teplo. Na jaké teplotě T

se vzorek ustálí? Uvažujte, že se chová jako dokonale černé těleso, teplo ztrácí pouze vyzařováním, teplota okolí je výrazně nižší než T a počáteční rychlost elektronů při emisi zanedbejte.

Tak dlouho se s přístrojem měří, až se některé základní funkce zapamatují…

Předpokládáme konstantní emisní proud I_e, pro který platí

$$I_\mathrm{e} = \frac{Q}{t}\,,$$

kde Q je přenesný náboj elektronů za čas t.

Ze vztahu pro energii náboje urychleného napětím U můžeme vyjádřit výkon P ohřívající vzorek

$$E = QU = UI_\mathrm{e}t \quad \Rightarrow \quad P = UI_\mathrm{e}\,.$$

Pro výkon vyzařovaný do okolí platí ze Stefanova-Boltzmannova zákona

$$P_\mathrm{ok} = \sigma S T^4\,.$$

Teplota vzorku se ustálí ve chvíli, kdy nastane $P = P_\mathrm{ok}$, což vede na

$$UI_\mathrm{e} = \sigma S T^4 \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt[4]{\frac{UI_\mathrm{e}}{\sigma S}}\,.$$

Dle zadání jsme mohli zanedbat výkon tepelného záření od okolního prostředí, které na vzorek dopadá.

Jiří Blaha
`jirka.b@fykos.cz`

Úloha DA … krájíme jablko

Chceme okrájet jablko tvaru dokonalé koule o poloměru $R = 3{,}6\,\mathrm{cm}$ tak, aby nám zbyl jen ohryzek. Na začátku ukrojíme část jablka rovným řezem ve vzdálenosti $a = 0{,}7\,\mathrm{cm}$ od středu jablka tak, že rovina řezu je rovnoběžná k ohryzkové ose symetrie. Kolmo na tuto rovinu vedeme další dva řezy, oba též ve vzdálenosti a od středu. Poslední řez vedeme rovnoběžně s prvním, znovu ve vzdálenosti a od středu, takže má ohryzek při pohledu zeshora tvar čtverce o straně $2a$. Předpokládejte, že síla potřebná ke krájení je úměrná délce nože v jablku. Určete poměr práce, kterou vykonáme při posledním řezu, oproti práci při prvním řezu.

Jarda seděl pod stromem a spadlo mu na hlavu jablko.

Dle předpokladů ze zadání je síla úměrná délce řezu, kterou označíme l. To pak zapíšeme jako

$$F = kl\,,$$

kde k je konstanta úměrnosti. Pokud provedeme řez o $\mathrm{d}x$ hlubší, vykonáme práci $\mathrm{d}W$. Na provedení řezu jablkem přes celý jeho rozměr tak vykonáme práci

$$W = \int kl\,\mathrm{d}x = \int k\,\mathrm{d}S = kS\,,$$

práce je tedy přímo úměrná ploše řezu.

Plocha prvního řezu má tvar kruhu. Jeho poloměr je z Pythagorovy věty $r = \sqrt{R^2 - a^2}$. Plocha prvního řezu je proto $S_1 = \pi\left(R^2 - a^2\right)$.

Rovina posledního řezu je také vedena ve vzdálenosti a od středu, tvar řezu je tak podmnožinou kruhu, jehož poloměr je také r. Z tohoto kruhu je vyříznut pás o šířce $2a$, jehož plochu nyní musíme spočítat.

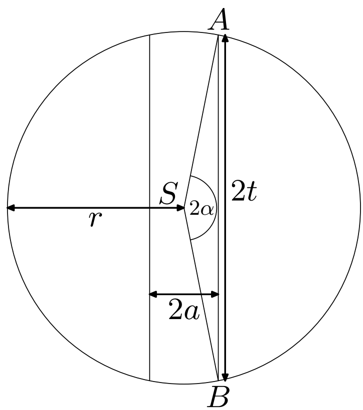
Tětiva protínající kruh má z Pythagorovy věty délku $2t = 2\sqrt{r^2 - a^2}$. Ze středu kruhu ji vidíme pod úhlem $2\alpha = 2\operatorname{arctg}(t/a)$. Plocha kruhové výseče o tomto středovém úhlu je $S_\mathrm{v} = (2\alpha/2\pi)\pi r^2$.

Ještě vypočítáme obsah trojúhelníku ABS. Ten je $S_\mathrm{t} = ta$. Plocha úseče tak je $S_\mathrm{u} = S_\mathrm{v} - S_\mathrm{t} = \alpha r^2 - ta$. Z plochy kruhu o poloměru r odečítáme tuto plochu úseče dvakrát (za každou stranu), proto je plocha posledního řezu

$$S_2 = (\pi - 2\alpha)\, r^2 + 2ta = \left(\pi - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{R^2 - 2a^2}}{a}\right)\right)\left(R^2 - a^2\right) + 2a\sqrt{R^2 - 2a^2}\,.$$

Hledaný poměr potřebných prací je roven poměru ploch, což je

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\left(\pi - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{R^2-2a^2}}{a}\right)\right)\left(R^2 - a^2\right) + 2a\sqrt{R^2 - 2a^2}}{\pi\left(R^2 - a^2\right)} \doteq 0{,}251\,.$$



Obr. 1: Řez jablkem.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha DB ... pohotovostně problematická

„Požárník“ naskočí na tyč, ale ta se náhle odlomí od země a on začne přehodnocovat situaci. V prvním případě může padat společně s tyčí až k zemi, přičemž se bude po celou dobu pádu držet horního konce tyče. V druhém případě se může tyče pustit a padat volným pádem z původní výšky. Jaký je poměr rychlostí dopadu z první a druhé situace? Délka tyče je l, její hmotnost M a hmotnost hasiče m.

Uvažujte nulovou počáteční rychlost v obou případech, a zároveň i to, že se tyč otáčí kolem osy procházející ulomeným koncem těsně u země. Velikost „požárníka“ je oproti délce tyče zanedbatelná. *Pepa si chtěl zavolat „požárníka“.*

Nejprve se podíváme na první případ, tedy ten, při kterém se požárník drží tyče a padá spolu s ní. V tomto případě je celá soustava v otáčivém pohybu kolem spodního bodu tyče. Rychlost dopadu spočítáme ze zákona zachování energie. Na počátku stojí tyč kolmo k zemi, její těžiště je tedy ve výšce $l/2$ a těžiště požárníka ve výšce l. Potenciální energie na počátku je pak

$$E_0 = mgl + Mg\frac{l}{2}\,.$$

Na konci pádu bude mít celá soustava kinetickou energii

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2\,,$$

kde I je moment setrvačnosti soustavy. Spočteme ho jako součet momentů setrvačnosti hasiče $I_h = ml^2$ a tyče, který je pro otáčení kolem jednoho konce $I_t = Ml^2/3$. Dostáváme tedy rovnici

$$mgl + Mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}\left(ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2\right)\omega^2\,.$$

Z ní vyjádříme dopadovou rychlost hasiče $v_1 = \omega l$:

$$2\frac{mgl + Mg\frac{l}{2}}{m + \frac{1}{3}M} = v_1^2\,,$$

$$v_1^2 = 2gl\frac{m + \frac{M}{2}}{m + \frac{M}{3}}\,,$$

$$v_1 = \sqrt{2gl\frac{m + \frac{M}{2}}{m + \frac{M}{3}}}\,.$$

Ve druhé situaci se požárník pustí tyče hned, budeme tedy řešit zákon zachování energie pouze pro něj. Na počátku má potenciální energii mgh a na konci pouze kinetickou energii

$$mgl = \frac{1}{2}mv_2^2\,,$$

$$v_2^2 = 2gl\,,$$

$$v_2 = \sqrt{2gl}\,.$$

Poměr rychlostí dopadu v obou případech tedy je

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m + \frac{M}{2}}{m + \frac{M}{3}}}\,.$$

Dodejme, že pro nenulovou hmotnost tyče tak dostáváme, že požárník držící se tyče dopadne větší rychlostí, než kdyby se pustil hned.

Kateřina Rosická
`kacka@fykos.cz`

Úloha DC ... plovoucí

Mějme bójku tvořenou z duté koule o vnějším poloměru $r = 51\,\mathrm{cm}$ a tloušťce $t = 1\,\mathrm{cm}$, jejíž materiál má hustotu $\rho = 854\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Na ní je zvenku kolmo k povrchu koule upevněná tyč o délkové hustotě $\lambda = 0{,}74\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$. V bójce je závaží o hmotnosti $m_\mathrm{z} = 1{,}12\,\mathrm{kg}$ (zanedbatelných rozměrů), které je upevněné uvnitř koule přesně na opačné straně, než je tyč.

Bójka plave na vodě, tyč je zpočátku ve svislé poloze nad koulí. Jaká může být maximální délka tyče l, aby bójka byla stabilní, tj. při malém vychýlení se vracela do původní polohy?

Martin a zkouška z mechaniky.

Poloha kedy je tyč zvislo, či už nad alebo pod bójkou, je rovnovážna. To vyplýva zo symetrie. Jedna z týchto polôh je ale stabilná a druhá labilná. Stabilnú rovnováhu spoznáme tak, že v nej je (lokálne) minimum potenciálnej energie, v labilnej je naopak potenciálna energia maximálna. Potrebujeme vyjadriť potenciálnu energiu v závislosti od vychýlenia tyče voči zvislému smeru nad bójkou.

Hmotnosť celej bójky sa nemení, ponorený bude teda vždy rovnako veľký objem bójky. Navyše malým vychýlením sa tyč nedostane pod vodu, preto bude mať ponorená časť vždy tvar guľového odseku, s polomerom r a daným objemom, takže aj keď sa dutá guľa naklonením bójky môže trocha posunúť vo vodorovnom smere, vo zvislom smere bude guľa vždy v rovnakej výške, z čoho vyplývajú 2 veci – potenciálna energia samotnej gule sa nemení, lebo jej stred (ktorý je zároveň ťažisko) nemení svoju výšku; potenciálna energia vody, v ktorej bójka pláva sa nemení tiež.

Zostáva nám spočítať, ako sa zmení potenciálna energia závažia a tyče. Závažie je upevnené zvnútra gule, vo vzdialenosti $r - t$ od stredu gule. Ak položíme nulovú hladinu do výšky stredu gule, bude teda potenciálna energia tohto závažia $m_\mathrm{z} g(r-t)(-\cos\varphi)$, kde φ je uhol, ktorý tyč zviera so smerom zvislo nahor.

Hmotnosť tyče bude $m_\mathrm{t} = l\lambda$ a vzdialenosť a jej ťažisko bude uprostred tyče. Od stredu gule bude toto ťažisko vzdialené $r + l/2$ a potenciálna energia tyče bude $l\lambda g(r + l/2)\cos\varphi$. Súčet potenciálnej energie závažia a tyče bude

$$E_\mathrm{p}(\varphi) = g(l\lambda(r + l/2) - m_\mathrm{z}(r-t))\cos\varphi\,.$$

Kosínus má v $\varphi = 0$ lokálne maximum, ak teda chceme, aby v polohe, kedy tyč smeruje zvislo nahor, bolo lokálne minimum, musí byť výraz v zátvorke záporný. Dostávame podmienku

$$0 > \frac{\lambda}{2}l^2 + r\lambda l - m_\mathrm{z}(r-t)\,.$$

Diskriminant je $D = r^2\lambda^2 + 2\lambda m_\mathrm{z}(r-t)$, korene teda budú

$$l_{1,2} = \frac{-r\lambda \pm \sqrt{r^2\lambda^2 + 2\lambda m_\mathrm{z}(r-t)}}{\lambda}\,,$$

kde záporný koreň nás nezaujíma a pri pohľade na pôvodnú nerovnicu vidíme, že kladný koreň nám dáva hornú hranicu, pre dĺžku tyče, pri ktorej bude ešte stabilná poloha smerom nahor. Táto maximálna dĺžka tyče bude

$$l_\mathrm{max} = -r + \sqrt{r^2 + 2\frac{m_\mathrm{z}(r-t)}{\lambda}} = 82\,\mathrm{cm}\,.$$

Poznámky: Keď sa ešte raz pozrieme na nerovnosť, ktorú sme odvodili, vidíme, že je to podmienka ekvivalentná podmienke, že výsledné ťažisko je pod stredom gule. Čo dáva zmysel, keďže vtedy pri otáčaní bójky pôjde nahor a teda bude vychýlením potenciálna energia rásť.

Ako by sa to riešilo cez sily? Dôležitými bodmi by boli opäť ťažisko bójky a centrum vztlaku, čo je bod, do ktorého by sme mohli umiestniť pôsobisko vztlakovej sily. Tento bod sa zrejme (zo symetrie) nachádza niekde pod stredom gule. Keď teda bójku vychýlime, ťažisko a centrum vztlaku nebudú priamo pod sebou a teda sily v nich pôsobiace budú roztáčať bójku nejakým momentom sily. V prípade, keď je ťažisko nižšie ako stred gule bude tento moment sily pôsobiť proti vychýleniu, a teda pôjde o stabilnú polohu a naopak.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha DD ... sněhová nadílka

Přes noc napadlo 6 cm *sněhu a Jarda ho tak ráno vyrazil odhazovat z chodníku. Vzal velkou lopatu o šířce* $d = 60\,\mathrm{cm}$, *položil ji na zem a začal ji před sebou tlačit rychlostí* $v = 0{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. *Na lopatu při tom nabíral sníh o hustotě* $\rho = 120\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. *Koeficient tření mezi lopatou a zemí je* $f = 0{,}6$ *a její hmotnost neuvažujte. Za jak dlouho se zastaví, jestliže může působit maximální silou* $F = 60\,\mathrm{N}$? *Předpokládejte, že se sníh na lopatě pohybuje spolu s ní.*

Jardův skleník zapadl sněhem…

Na lopatu se sněhem působí 2 síly. První z nich je třecí síla o velikosti $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{N} = fmg$, kde m je hmotnost sněhu na lopatě a g tíhové zrychlení. Jarda navíc nabraný sníh musí urychlit na rychlost v, na což potřebuje druhou část síly F_p. Hmotnost m nabraného sněhu se zvětšuje s časem jako $m = \rho h d v t$, odpovídající síla je tedy

$$F_\mathrm{p} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} v = \rho d h v^2 \,,$$

kde h je výška napadaného sněhu, d šířka lopaty. Vidíme, že síla je v čase konstantní.

Celková síla, kterou tak Jadra působí, je

$$F_\mathrm{p} + F_\mathrm{t} = \rho d h v \left(v + t g f\right) \,.$$

Položením $F = F_\mathrm{p} + F_\mathrm{t}$ dostáváme čas

$$t = \frac{F}{\rho d h v g f} - \frac{v}{g f} = 3{,}8\,\mathrm{s}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha DE ... USA anektuje

Říká se, že hranice mezi Kanadou a USA obsahuje nejdelší rovnou čáru, jejíž délka je $l = 2\,057\,\mathrm{km}$. To ale není pravda, protože tato část hranice vede po devětačtyřicáté rovnoběžce. Spočítejte, o kolik kilometrů by se zkrátila délka této „rovné“ části hranice, pokud by se jednalo o skutečně rovnou čáru (tj. nejkratší spojnici) vedoucí po povrchu koule, jejíž koncové by body zůstaly stejné.

Matěj je fascinován zvláštními hranicemi `https://www.youtube.com/shorts/caJeL1sjqJQ`.

Nejedná se o rovnou čáru, protože rovnoběžky (kromě rovníku) nejsou rovné. Kdybychom chtěli jít podél rovnoběžky, museli bychom neustále mírně zatáčet. Devětačtyřicátá rovnoběžka je kružnice o poloměru $r = R_\oplus \cos 49^\circ$. Současná hranice Kanady s USA má tak tvar kružnicového oblouku o úhlu $\alpha = l/r$. Skutečná vzdálenost okrajových bodů ve 3D prostoru je $d = 2r\sin(\alpha/2)$.

Rovná čára jdoucí po povrchu koule je vždy kružnice se středem ve středu koule a poloměru $R_\oplus$. Jedná se totiž o nejkratší cestu po povrchu, která spojuje dané dva body. Pro výpočet velikosti úhlu β oblouku skutečně rovné hranice použijeme stejný vzorec jako v odstavci výše, jen v inverzním tvaru $\beta = 2\arcsin\left(d/(2R_\oplus)\right)$. Délka tohoto oblouku je tedy $\beta R_\oplus$. Dosazením dohromady dostáváme

$$\Delta l = l - 2R_\oplus \arcsin\left(\cos 49^\circ \sin \frac{l}{2R_\oplus \cos 49^\circ}\right) = 12\,\mathrm{km}\,.$$

Pozn. pojem rovná čára na zakřiveném povrchu (tedy např. na povrchu koule) má v diferenciální geometrii přesnou definici. Tyto čáry se nazývají geodetiky a mají speciální význam v obecné teorii relativity. Zde geodetiky popisují trajektorie objektů ve 4D prostoru, který je zakřiven přítomností hmotných těles (pro představu např. pohyb věcí padajících do černé díry).

Matěj Mezera
`m.mezera@fykos.cz`

Úloha DF ... rychlost větru

Jednoho teplého letního odpoledne se Robo schovává před bouřkou pod přístřeškem, kde stojí ve vzdálenosti $R = 1{,}2\,\mathrm{m}$ od okraje. Jakou rychlostí proti němu fouká vítr, jestliže na něj prší od noh až po okraj ramen? Střecha přístřešku je $H = 2{,}3\,\mathrm{m}$ vysoko a Robo má ramena ve výšce $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Předpokládejte, že vítr fouká pouze vodorovně a na kapky působí odporová síla vzduchu. Kapky považujte za malé kuličky s poloměrem $r = 0{,}8\,\mathrm{mm}$, koeficient odporu pro kouli je $C = 0{,}5$. *Déšť je fajn, když se máte kam schovat.*

Najprv si uvedomme, že kvapky sa pohybujú konštantnou rýchlosťou. V zvislom smere na nich pôsobí odpor vzduchu, vo vodorovnom sú zas unášané vetrom.

Keď si nakreslíme obrázok, tak vidíme, že dostávame pravouhlý trojuholník s odvesnami R a $H-h$ a s preponou, ktorá charakterizuje trajektóriu kvapky. Uhol medzi preponou a odvesnou R nazvime θ a všimneme si, že rovnaký uhol zvierajú aj zložky rýchlostí v_x vo vodorovnom smere a v v smere trajektórie kvapky. Potom platí

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{H-h}{R} = \frac{v_y}{v_x}\,,$$

pričom v_y je ustálená rýchlosť kvapky v zvislom smere. Túto rýchlosť určíme z rovnováhy tiažovej sily F_g kvapky a odporovej sily F_o. Teda platí

$$
\begin{aligned}
F_g &= F_\mathrm{o}\,,\\
mg &= \frac{1}{2}CS\rho v_y^2\,,\\
\frac{4}{3}\pi r^3\rho_\mathrm{w} g &= \frac{1}{2}C\pi r^2\rho v_y^2\,,\\
v_y &= \sqrt{\frac{8g\rho_\mathrm{w} r}{3C\rho}}\,,
\end{aligned}
$$

kde sme využili guľový tvar kvapky a tiež prierez kvapky ako $S = \pi r^2$. Hustota vody je ρ_w a hustota vzduchu ρ. Predpokladáme, že rýchlosť v_x kvapky je tvorená čisto len rýchlosťou vetra, a tak dostávame finálne vyjadrenie rýchlosti vetra

$$
v_x = \frac{R}{H-h}\sqrt{\frac{8g\rho_\mathrm{w} r}{3C\rho}} = 8{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.
$$

Robert Jurenka
robert.jurenka@fykos.cz

Úloha DG ... závod stínů

Legolas šel v noci po chodníku, rovnoběžně se kterým bylo pouliční osvětlení, a sledoval pohyb svých stínů na zemi. Lampy však byly různě vysoké, proto se stíny pohybovaly dost zvláštně. Lego si chce spočítat, jakou rychlostí se pohybují dva stíny vrhané jeho hlavou vzhledem k sobě. Legolasovu hlavu pokládejte za bod ve výšce $h_\mathrm{h} = 1{,}7\,\mathrm{m}$, pohybující se rychlostí $v = 1{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Lampy stojí na přímce vzdálené $d = 2{,}1\,\mathrm{m}$ od přímky, po které jde Lego, a paty lamp jsou od sebe vzdálené $l = 13\,\mathrm{m}$. Jejich výšky jsou $h_1 = 3{,}1\,\mathrm{m}$ a $h_2 = 3{,}6\,\mathrm{m}$ a považujte je za bodové zdroje. Legolase by zajímala velikost vzájemné rychlosti stínů v okamžiku, kdy je od pat obou lamp vzdálen stejně. *Legolas šel po chodníku.*

Trojuholník daný tieňom hlavy, Legovou hlavou a Legovými chodidlami, je celkom určite podobný s trojuholníkom, ktorý je daný tieňom hlavy, pätou lampy a samotným bodovým zdrojom. Z toho vyplýva, že ich uhly sú zhodné.

Keď si premietneme celú situáciu do roviny kolmej na Legov smer, tak v nej sa Legov priemet nebude vôbec hýbať, konkrétne Legove nohy budú vzdialené od päty lampy d. Tým pádom sa ani tieň v tomto priemete nebude hýbať a bude vo vzdialenosti $t_{1,2}$ od päty lampy, kde (z podobnosti trojuholníkov)

$$
\begin{aligned}
\frac{t}{h_{1,2}} &= \frac{t-d}{h_\mathrm{h}}\,,\\
d\frac{h_{1,2}}{h_{1,2}-h_\mathrm{h}} &= t_{1,2}\,.
\end{aligned}
$$

Rýchlosti tieňov sú teda rovnobežné so smerom, ktorým Legolas kráča. Nakoľko rýchlosť jedného tieňa vzhľadom na druhý dostaneme ako rozdiel týchto dvoch vektorov, vidíme, že stačí odčítať ich veľkosti.

Aké sú teda tie veľkosti? Znova využijeme podobnosť trojuholníkov, tentokrát pri pohľade zhora. Zapamätáme si Legovu pôvodnú polohu a pôvodnú polohu tieňa a necháme Lega pohnúť sa. Následne trojuholník tvorený lampou a pôvodnou a novou Legovou polohou je podobný s trojuholníkom tvoreným lampou a pôvodnou a novou polohou tieňa. Keďže navyše vieme, že pomer vzdialenosti tieňa a lampy k vzdialenosti Lega a lampy je $t_{1,2}/d$, vieme, že pomer posunu tieňa k Legovmu posunu bude rovnaký. Tým pádom sa tieň Legovej hlavy hýbe $t_{1,2}/d$-krát rýchlejšie než Lego, čiže rýchlosťou $v_{1,2} = vt_{1,2}/d$.

Zostáva teda dosadiť a tieto dve rýchlosti odčítať

$$\Delta v = v_1 - v_2 = \frac{v}{d}\left(t_1 - t_2\right) = ,$$

$$\Delta v = \frac{v}{d}\left(d\frac{h_1}{h_1 - h_\mathrm{h}} - d\frac{h_2}{h_2 - h_\mathrm{h}}\right) ,$$

$$\Delta v = v\frac{h_\mathrm{h}(h_2 - h_1)}{(h_2 - h_\mathrm{h})(h_1 - h_\mathrm{h})} ,$$

$$\Delta v = 0{,}48\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} .$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha DH ... termoanemometr

K měření rychlosti proudění vody v trubici můžeme použít drát, který do ní umístíme. Necháme jím protékat konstantní proud $I = 200\,\mathrm{mA}$ a měříme na něm napětí. Pro objemový tok $Q = 70\,\mathrm{ml{\cdot}s^{-1}}$ jsme naměřili napětí $U = 522\,\mathrm{mV}$. Poté jsme při stejném proudu zvětšili průtok o $\Delta Q = 8\,\mathrm{ml{\cdot}s^{-1}}$, přičemž se vlivem tepelné změny odporu měřené napětí snížilo o $\Delta U = 25\,\mathrm{mV}$. Jak se změnila průměrná teplota tekutiny po průchodu anemometrem oproti prvnímu měření? Uveďte také, jestli je nyní teplota vyšší nebo nižší.

Jarda slyšel o přístroji se zvláštním názvem.

Teplotu vody před vstupem do přístroje označme T_0. Pak v prvním případě je teplota po výstupu z měřáku

$$T_1 = T_0 + \frac{IU}{Q\rho c} ,$$

kde c je měrná tepelná kapacita vody a ρ její hustota. Pro druhý případ platí

$$T_2 = T_0 + \frac{I\left(U - \Delta U\right)}{\left(Q + \Delta Q\right)\rho c} .$$

Tyto dvě hodnoty od sebe odečteme, čímž dostaneme

$$T_2 - T_1 = \frac{I}{\rho c}\left(\frac{U - \Delta U}{Q + \Delta Q} - \frac{U}{Q}\right) = -5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K} .$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha EA ... nešikovná Danka

Danka upustila malou kuličku o hmotnosti $m = 10\,\mathrm{g}$ *z výšky* $h = 1{,}3\,\mathrm{m}$ *nad podlahou tak, že dopadla na „bosu“ v horizontální vzdálenosti* $x_0 = 5\,\mathrm{cm}$ *od její osy symetrie a pružně se od ní odrazila. Jak daleko od osy bosu kulička dopadla po odrazu? Bosu je gumová podložka na cvičení ve tvaru polokoule s poloměrem podstavy* $29\,\mathrm{cm}$. *Předpokládejte, že bosu se nárazem neposune.* *Dančin bratr má doma bosu.*

Pohyb guličky sa skladá z voľného pádu, dokonale pružného odrazu od bosu a nakoniec šikmého vrchu. Poďme sa na to teda pozrieť postupne. Výška, v ktorej sa gulička odrazí od bosu, udáva, aká časť jej potenciálnej energie sa premení na kinetickú energiu udávajúcu počiatočnú rýchlosť šikmého vrchu. Zaveďme si súradnicovú sústavu s počiatkom v strede podstavy bosu. Nech x-ová súradnica je radiálna a určuje horizontálnu vzdialenosť od stredu bosu, a y-ová súradnica určuje vertikálnu vzdialenosť. Označme y_0 výšku, v ktorej sa gulička odrazí od bosu. Môžeme ju spočítať použitím Pytaghorovej vety z trojuholníka na obrázku ako

$$y_0 = \sqrt{r^2 - x^2} \doteq 28{,}565\,7\,\mathrm{cm}\,.$$

Potom zo zákona zachovania energie spočítame rýchlosť guličky po odraze v_0 ako

$$mg(h - y_0) = \frac{1}{2} m v_0^2\,,$$

$$v_0 = \sqrt{2g(h - y_0)} \doteq 4{,}461\,1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Ďalej potrebujeme spočítať uhol smeru rýchlosti guličky po odraze od bosu voči vodorovnej rovine, označme ho θ. Keď uvažujeme dokonale pružný odraz, uhol dopadu a odrazu sú totožné. Z obrázku vidíme, že platí

$$90^\circ = 2\alpha + \theta\,.$$

Uhol α spočítame opäť pomocou načrtnutého trojuholníka ako

$$\alpha = \arcsin\frac{x}{r}\,.$$

Potom máme

$$\theta = 90^\circ - 2\arcsin\frac{x}{r} \doteq 70{,}14^\circ$$

Konečne môžeme spočítať zložky rýchlosti na začiatku šikmého vrchu v_{0x} a v_{0y} ako

$$v_{0x} = v_0\cos\theta\,, \qquad v_{0y} = v_0\sin\theta\,.$$

Teraz už poznáme počiatočné súradnice aj zložky rýchlosti šikmého vrhu. Môžeme preto napísať rovnice šikmého vrhu

$$x = x_0 + v_{0x}t\,, \qquad y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Premenná t označuje čas letu guličky, ktorý začína plynúť v momente jej odrazu od bosu. Keď gulička dopadne na zem, jej y-ová súradnica bude nulová. Potom môžeme z kvadratickej rovnice

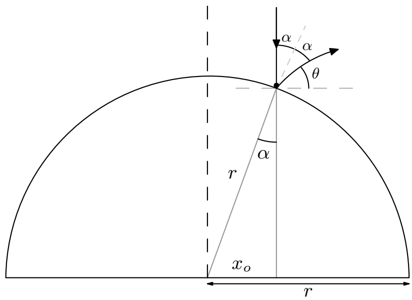
$$0 = y_0 + v_0\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2\,,$$

vyjadriť premennú t a úpravou dostaneme vzťah

$$t = \frac{v_0 \sin\theta \pm \sqrt{(v_0 \sin\theta)^2 + 2gy_0}}{g} \doteq 0{,}918\,8\,\mathrm{s}\,.$$

Keďže diskriminant bude väčší ako prvý člen čitateľa a my hľadáme kladný čas, fyzikálne riešenie predstavuje iba možnosť s kladným znamienkom pred odmocninou. Posledným krokom je dosadiť tento výraz do rovnice pre x, dosadiť všetky číselné hodnoty a získať výsledok.

Správne by sme mali získať výslednú rovnicu pre x obsahujúci iba veličiny zo zadania. V tomto prípade by však tento vzťah bol veľmi zložitý a pri dosadzovaní číselných hodnôt by sme sa veľmi pravdepodobne pomýlili. Preto je lepšie v tomto prípade spočítať si čiastkové výsledky kľúčových veličín s dostatočnou presnosťou, tak, ako sme to spravili v tomto vzorovom riešení, a tie dosadiť do finálneho vzorca. Dostávame, že gulička dopadne na zem vo vzdialenosti $x = 1{,}44\,\mathrm{m}$ od osi bosu.

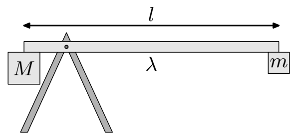


Obr. 2: Nákres situace.

Daniela Dupkalová
`daniela@fykos.cz`

Úloha EB ... zjednodušený trebuchet

Rameno trebuchetu má délku $l = 9{,}14\,\mathrm{m}$, přičemž osa otáčení jej dělí v poměru $1 : 5$. Délková hustota ramene je $\lambda = 10\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$. Pro jednoduchost předpokládejme, že závaží i projektil jsou hmotné body připevněné na koncích ramene. Závaží má hmotnost $M = 15\,\mathrm{t}$ a je připevněné na kratším konci, projektil má hmotnost $m = 60\,\mathrm{kg}$ a je připevněný na delším konci. Jaká bude velikost úhlového zrychlení, když bude rameno ve vodorovné poloze?



Legolas nepotřebuje jen kladky...

Uhlové zrýchlenie dostaneme priamočiaro tak, že podelíme celkový moment sily celkovým momentom zotrvačnosti, pričom oba musíme spočítať vzhľadom na os otáčania. Obe tieto veličiny sú navyše aditívne, čiže ich môžeme spočítať ako súčet cez závažie, projektil a rameno.

Moment sily závažia je jednoducho $M_\mathrm{z} = Mgl/6$. Podobne moment sily projektilu je $M_\mathrm{p} = -5mlg/6$, kde mínus znamená, že tento moment točí rameno do opačného smeru ako závažie. V opačnom smere bude pôsobiť aj moment samotného ramena, ktoré má hmotnosť $l\lambda$ a jeho ťažisko je vo vzdialenosti $2l/6 = l/3$ od osi otáčania. Moment ramena je teda $M_\mathrm{r} = -g\lambda l^2/3$. Výsledný moment sily pôsobiaci na rameno vzhľadom na os otáčania bude

$$M_\mathrm{v} = M_\mathrm{z} + M_\mathrm{p} + M_\mathrm{r} = gl\left(\frac{M}{6} - \frac{5m}{6} - \frac{l\lambda}{3}\right) .$$

Moment zotrvačnosti hmotného bodu m vzhľadom na os vo vzdialenosti r je mr^2, čiže moment zotrvačnosti závažia je $J_\mathrm{z} = Ml^2/36$ a moment zotrvačnosti projektilu je $J_\mathrm{p} = 25ml^2/36$.

Moment zotrvačnosti tyče okolo jej stredu je $ml^2/12$. My ale potrebujeme moment zotrvačnosti okolo osi otáčania, to získame pomocou Steinerovej vety tak, že pripočítame mr^2, kde r je vzdialenosť medzi ťažiskom telesa a osou otáčania, v našom prípade teda $l/3$. Spolu dostávame

$$J_r = J_0 + J_S = \frac{1}{12}\lambda l^3 + \frac{1}{9}\lambda l^3 = \frac{7}{36}\lambda l^3 .$$

Výsledný moment zotrvačnosti teda počítame ako

$$J = J_\mathrm{z} + J_\mathrm{p} + J_\mathrm{r} = \left(\frac{M}{36} + \frac{25m}{36} + \frac{7}{36}\lambda l\right) l^2 .$$

Zostáva dosadiť do vzorca pre uhlové zrýchlenie

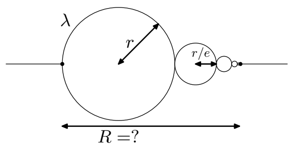
$$\varepsilon = \frac{M_\mathrm{v}}{J} = \frac{gl\left(\frac{M}{6} - \frac{5m}{6} - \frac{l\lambda}{3}\right)}{\left(\frac{M}{36} + \frac{25m}{36} + \frac{7}{36}\lambda l\right) l^2}$$

$$\varepsilon = 6\frac{g}{l}\frac{M - 5m - 2l\lambda}{M + 25m + 7\lambda l} = 5{,}5\,\mathrm{s^{-2}} .$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha EC ... odporný 2D sněhulák

Máme vodivý kroužek o délkovém odporu λ a poloměru r. Také máme kroužek ze stejného materiálu, jen s poloměrem e-krát menším. Kupodivu jsme postupně našli nekonečně mnoho dalších takových kroužků, každý o poloměru $1/\mathrm{e}$ oproti předchozímu. Poskládáme je vedle sebe do tvaru sněhuláka a vodivě spojíme. Jaký bude celkový odpor tohoto útvaru mezi koncovými body na ose symetrie?



Nerušte Jardovy kruhy.

Určíme nejdříve poměr mezi dvěma protějšími stranami jednoho kroužku o poloměru R. Jedná se vlastně o dva paralelně zapojené rezistory, každý s odporem $\pi r\lambda$. Celkový odpor kroužku tak je $R_0 = \pi r\lambda/2$.

Tento vztah platí pro každý z kroužků. Jakmile je spojíme vodivě za sebe do série, jejich celkový odpor je dán prostým součtem. Jediné, co se pro každý kroužek mění, je jeho poloměr. Dostáváme

$$R_\mathrm{c} = \frac{\pi r\lambda}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^n} = \frac{\pi r\lambda}{2}\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} ,$$

kde jsme použili vzorec pro součet nekonečné řady.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha ED ... hledání civilizace typu II

Organizátoři FYKOSu létají vesmírem a hledají nové civilizace, kam by mohli expandovat. Zatím ale našli jen jednu obruč, která by mohla být pozůstatkem Dysonovy sféry. Má poloměr $R = 1{,}2 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$, organizátory by ale zajímala i její hmotnost. Doletěli proto ve své raketě do jejího středu a vychýlili se ve směru kolmém na rovinu obruče. Když dostatečně dlouho počkali, zjistili, že perioda jejich kmitů je $T = 60\,\mathrm{h}$. Jaká je celková hmotnost obruče, jestliže předpokládáme, že hmota je na ní rozložena rovnoměrně a že amplituda kmitání je řádově menší než R?

Pepa se rád zhoupne.

Spočítame si, aká sila F bude pôsobiť na orgov, keď sa posunú o malé z v smere osi obruče. Element hmotnosti $\mathrm{d}M$ na obruči bude vtedy na orgov pôsobiť silou veľkosti $\mathrm{d}F = Gm\,\mathrm{d}M/(R^2 + z^2)$. Zložky týchto síl v rovine obruče sa vyrušia a zostane iba zložka kolmá na rovinu obruče. Pre túto zložku bude platiť

$$\frac{\mathrm{d}F_z}{\mathrm{d}F} = \sin\varphi = \frac{z}{\sqrt{(R^2 + z^2)}}\,,$$

kde φ je uhol, ktorý zviera spojnica orgov a elementu $\mathrm{d}M$ s rovinou obruče. Pre $\mathrm{d}F_z$ platí

$$\mathrm{d}F_z = Gm\,\mathrm{d}M\frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Vidíme, že táto zložka je rovnaká pre všetky elementy $\mathrm{d}M$, čiže "integrujeme konštantnú funkciu", a teda výsledná sila v smere kolmom na obruč bude

$$F_z = GmM\frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Teraz si pripomeňme, že vychýlenie z je malé, čiže v súčte s R ho môžme zanedbať, a teda $F_z = GmMz/R^3$. Tuhosť teda bude

$$k = \frac{GmM}{R^3}\,.$$

Zostáva nám dosadiť ju do vzorca pre periódu lineárneho harmonického oscilátora

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\,,$$

z čoho môžme vyjadriť celkovú hmotnosť obruče ako

$$M = 4\pi^2\frac{R^3}{GT^2} = 2{,}2 \cdot 10^{25}\mathrm{kg}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha EE ... Doppler na procházce

Christian Doppler byl na procházce. Po chvíli si všiml, že v obou směrech (v jeho směru i v protisměru) chodí lidé rychlostí $v = 1{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ s rozestupy $l = 4{,}0\,\mathrm{m}$. Rozhodl se, že toho využije a najde rychlost, kterou se musí pohybovat, aby potkával co nejméně lidí. Jakou rychlostí má jít, aby za čas $T \gg l/v$ potkal minimální počet lidí? Najděte všechna řešení.

Legolas je veľmi autík.

Označme v_D Dopplerovu rýchlosť. Potom čas, ktorý uplynie medzi stretnutím dvoch protiidúcich ľudí bude

$$t_\mathrm{p} = \frac{l}{v + v_\mathrm{D}}\,.$$

Z toho plynie frekvencia stretávania protiidúcich ľudí

$$f_\mathrm{p} = \frac{1}{t_\mathrm{p}} = \frac{v + v_\mathrm{D}}{l}\,.$$

Obdobne určíme frekvenciu stretávania ľudí idúcich v rovnakom smere ako

$$f_\mathrm{r} = \frac{1}{t_\mathrm{r}} = \frac{|v - v_\mathrm{D}|}{l}\,.$$

Absolútna hodnota potom rozdeľuje riešenie na dva prípady, keď okoloidúci obiehajú[2] Dopplera ($v_\mathrm{D} \leq v$), a prípad, keď Doppler obieha okoloidúceho ($v_\mathrm{D} \geq v$).

Počet ľudí, ktorých Doppler stretne je súčinom celkovej frekvencie stretávania a času T. Celkovou frekvenciou myslíme súčet frekvencií stretávania ľudí v jednom a druhom smere. V skutočnosti sa jedná skôr o akúsi priemernú frekvenciu, nakoľko nám ale stačí celkový počet ľudí, ktorých stretne a vieme, že ich stretne veľmi veľa (lebo $T \gg l/v$), úplne nám stačí tento údaj.

Aby sme sa zbavili absolútnej hodnoty, rozdeľme si problém na vyššie diskutované prípady.

Okoloidúci obiehajú Dopplera ($v_\mathrm{D} \leq v$)

Výsledná frekvencia bude

$$f_\mathrm{v1} = \frac{v + v_\mathrm{D}}{l} + \frac{v - v_\mathrm{D}}{l} = 2\frac{v}{l}\,,$$

čo je konštanta nezávislá od Dopplerovej rýchlosti. Celkový počet ľudí, ktorých stretne, teda bude

$$N_1 = f_\mathrm{v1} T = 2\frac{v}{l} T\,.$$

Doppler obieha okoloidúceho ($v_\mathrm{D} \geq v$)

Výsledná frekvencia bude

$$f_\mathrm{v2} = \frac{v + v_\mathrm{D}}{l} + \frac{v_\mathrm{D} - v}{l} = 2\frac{v_\mathrm{D}}{l}\,.$$

Celkový počet ľudí, ktorých stretne, teda bude

$$N_2 = f_\mathrm{v2} T = 2\frac{v_\mathrm{D}}{l} T\,,$$

[2] prípadne cestujú rovnako rýchlo

takže pri rýchlosti väčšej ako v stretne Doppler vždy viac ako N_1 ľudí. Minimálny počet ľudí, ktorých môže stretnúť za daný čas, teda je N_1, pričom stretne ich toľkoto, ak pôjde rýchlosťou menšou alebo rovnou v, čiže náš výsledok (nakoľko sme mali nájsť všetky riešenia) je $[0, v]$ prípadne $[-v, v]$ ak berieme, že môže ísť aj opačným smerom.

Za povšimnutie stojí, že ak by sme zástup okoloidúcich interpretovali ako vlnu s vlnovou dĺžkou l a rýchlosťou šírenia v, teda s frekvenciou $f_0 = v/l$, dostávame rozšírením výrazu pre frekvenciu stretávania

$$f_\mathrm{p} = \frac{v + v_\mathrm{D}}{l}\frac{v}{v} = \frac{v + v_\mathrm{D}}{v} f_0$$

vzťah pre Dopplerov posun s pohybujúcim sa pozorovateľom, ako aj analogicky pre f_r.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha EF ... holub nepadá daleko od kamene

Holub o hmotnosti $M = 300\,\mathrm{g}$ si v klidu letí ve výšce $h = 30\,\mathrm{m}$ nad zemí rychlostí $V = 20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Znenadání jej zezadu (tedy ve směru jeho rychlosti) zasáhne ze země hozený kámen o hmotnosti $m = 100\,\mathrm{g}$ a omráčí jej. Kámen, který se v tu chvíli nacházel v nejvyšším bodě své trajektorie, letěl rychlostí $v = 30\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a ztratil v důsledku srážky polovinu své kinetické energie. Určete, jak daleko dopadne bezvládné tělo holuba od místa, ze kterého byl kámen vyhozen. *Vrkú.*

Nejprve určíme horizontální vzdálenost místa, ze kterého byl kámen vyhozen, od místa srážky. Víme, že se v tu chvíli nacházel v nejvyšším bodě své trajektorie, čili svislá složka jeho rychlosti byla nulová. Z toho můžeme spočítat čas od momentu, kdy byl kámen vyhozen, jako

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Vodorovná složka rychlosti se celý tento čas nebude měnit, čili kámen ve vodorovném směru urazí vzdálenost

$$d = v\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Nyní se zaměříme na srážku. Ztratil-li kámen polovinu své kinetické energie, pohyboval se po srážce rychlostí v', kterou určíme jako

$$\frac{1}{2}mv'^2 = E_\mathrm{k}' = \frac{1}{2}E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{v}{\sqrt{2}}\,.$$

Bude proto ze zákona zachování hybnosti pro rychlost bezvládného těla holuba V' platit

$$MV + mv = MV' + m\frac{v}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad V' = V + \frac{mv}{M}\frac{2-\sqrt{2}}{2}\,.$$

Touto rychlostí holub poletí po dobu $\sqrt{2h/g}$, celkově tedy urazí horizontální dráhu

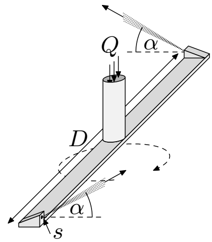
$$s = \left(V + \frac{mv}{M}\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Odpovědí na otázku ze zadání tedy bude

$$s + d = \left(V + \frac{mv}{M}\frac{2-\sqrt{2}}{2} + v\right)\sqrt{\frac{2h}{g}} = 36\,\mathrm{m}\,.$$

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha EG ... myčka



V myčce je umístěna otočná vrtule, do které jejím středem proudí voda o objemovém průtoku Q. Voda vrtuli roztáčí ve vodorovné rovině a proudí v ní radiálně v trubičkách o průřezu S na obě strany. Na koncích vrtule jsou umístěné díry o průřezu s, kterými stříká voda pryč a umývá nádobí. Směr vody je tečný k otáčení a svírá úhel α vůči vodorovné rovině. Jaké úhlové frekvence otáčení vrtule dosáhne, jestliže je její průměr D?

Jarda umýval nádobí po párty a ještě se mu přitom točila hlava.

Uvažujme nejprve soustavu spojenou s vrtulí. Do vrtule proudí voda s průtokem Q a nutně platí, že to, co do vrtule po ose symetrie vteče, to také musí dírami na koncích vytéct. Označme rychlost, kterou voda všemi dírami vytéká, jako v, a průřez jedné díry jako s. Rychlost výtoku z každé díry na konci je tak

$$v_{\mathrm{out}} = \frac{Q}{2s}\,,$$

neboť Q je společný průtok pro obě poloviny vrtule.

Tím, že se na koncích vrtule mění směr vody z radiálního na tečný, mění voda svůj moment hybnosti. Tím ovšem mění moment hybnosti i samotné vrtule. Moment sil, tedy změna momentu hybnosti celé vrtule, je

$$M_1 = \frac{\mathrm{d}L_1}{\mathrm{d}t} = 2\frac{RQ\cos\alpha}{2s}\frac{Q\rho}{2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \frac{Q^2\rho R\cos\alpha}{2s}\,.$$

V naší vztažné soustavě ovšem na vodu, která proudí v trubici, působí Coriolisova síla. Ta působí kolmo na směr proudění vody, vytváří tedy také moment hybnosti. Na element vody o délce $\mathrm{d}x$ ve vzdálenosti x od středu působí moment sil o velikosti $\mathrm{d}M_2 = x2\omega\frac{Q}{2S}S\rho\,\mathrm{d}x$. Zde $Q/2S$ značí radiální rychlost vody ve vrtuli. Celkový moment síly způsobený Coriolisovou silou je

$$M_2 = 2\int_0^R x\omega Q\rho\,\mathrm{d}x = R^2\omega Q\rho\,.$$

Protože nás v zadání zajímá ustálený stav a tyto dva momenty sil působí proti sobě, dostáváme z rovnosti $M_1 = M_2$ frekvenci otáčení jako

$$\omega = \frac{Q\cos\alpha}{Ds}\,,$$

kde jsme položili $R = D/2$.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha EH ... zalévání záhonu

Jardova zahradní hadice je zakončena tzv. pistolí, která dělí vodní svazek do mnoha menších. Předpokládejme, že tyto malé svazky vychází z půlkulového vrchlíku na konci této pistole a voda tryská ze všech jeho bodů stejnou rychlostí ve směru kolmém k tečné rovině v daném bodu. Když Jarda nechá vodu stříkat z pistole otočené přímo vzhůru, přičemž ji drží ve výšce h, dopadá voda na plochu A. Na jak velkou plochu bude voda dopadat, pokud bude mířit pistolí vodorovně? Poloměr vrchlíku je malý v porovnání s ostatními rozměry.

Zahrádka je pro Jardu velmi inspirativní prostředí.

Když Jarda drží hadici směrem vzhůru, dopadá voda na kruhovou plochu A s poloměrem r. Tento poloměr můžeme určit jako vzdálenost, která je maximální možnou pro dostříknutí z jedné hadice se stejnou rychlostí jako každá z trysek ze stejné výšky h, v jaké je konec hadice. Předpokládejme, že této vzdálenosti dosáhne pro nějaký úhel sklonu φ_0. Body s tímto úhlem tvoří na polokouli vrchlíku kružnici. Když nyní Jarda hadici otočí tak, že míří vodorovně, bude na aktuální poloze vrchlíku pouze polovina této kružnice. Zároveň bude voda v dané polorovině stříkat nad i pod pistoli, ale již ne zpátky. Výsledná plocha, na kterou bude dopadat voda, tedy bude polovina kruhu se stejným poloměrem r, obsah této plochy tedy bude $A/2$.

Kateřina Rosická
`kacka@fykos.cz`

Úloha FA ... až moc rychlý elektron

Jaké atomové číslo by musel mít prvek, aby rychlost elektronu v základním stavu v obalu překročila rychlost světla, pokud bychom neuvažovali relativistické korekce? Použijte Bohrův model atomu a předpokládejte, že atom je ionizován právě na jeden elektron.

Jarda nestíhá sledovat, kolik je ve FYKOSu práce.

V Bohrově modelu atomu uvažujeme, že elektron obíhá jádro atomu po dráze, která je zakřivována elektrostatickým působením mezi jádrem a elektronem. Vzniká tak pohyb po kružnici, podobně jako když planety obíhají kolem Slunce.

Jak je ale pozorováno, atomy mohou zářit na některých vlnových délkách. Energie tohoto vyzářeného světla závisí na změně poloměru trajektorie. Protože je spektrum těchto vyzářených energií diskrétní, mohou elektrony obíhat kolem jádra jen v určitých diskrétních vzdálenostech.

Tolik k úvodu. V Bohrově modelu atomu je postulováno, že elektrony obíhají pouze po drahách, na nichž platí, že velikost momentu hybnosti elektronu je $L = n\hbar$, kde n je číslo hladiny, na které elektron obíhá, a $\hbar = h/2\pi$ je redukovaná Planckova konstanta. Pro základní stav elektronu platí $n = 1$.

V silovém působení je velikost dostředivé síly rovna přitažlivé elektrostatické interakci

$$F_\mathrm{d} = m_\mathrm{e}\frac{v^2}{r} = F_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}\,,$$

kde m_e je hmotnost obíhajícího elektronu, v je rychlost obíhání, r je vzdálenost od jádra, Z je počet protonů v jádře, ε_0 permitivita vakua a e elementární náboj.

Ještě tedy napíšeme podmínku, která musí být splněna pro velikost momentu hybnosti, což je

$$L = m_\mathrm{e} r v = n\hbar\,.$$

Z této rovnice vyjádříme r a dosadíme do předchozí rovnice. Dostáváme tak

$$v = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}\,.$$

Dosadíme $v = c$, $n = 1$ a vyjádříme Z. Máme

$$Z = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar c}{e^2} \doteq 137{,}065\,.$$

Převrácená hodnota výsledku sa nazývá konstanta jemné struktury. Nyní ale pozor – náboj jádra musí být celočíselný. Pokud ale do vzorce pro rychlost dosadíme $Z = 137$, dostaneme rychlost obíhání $v = 2{,}997 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, což je ovšem nižší hodnota než $c = 2{,}998 \cdot 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Proto musí být náboj ještě o něco vyšší, odpovědí je tedy $Z = 138$.

Prvek s tolika protony zatím nebyl pozorován. Navíc by podle předpokladů v zadání musel být 137krát ionizovaný, což je opravdu hodně. Výsledek není řádově daleko od atomových čísel těžkých prvků, pro které je speciální teorii relativity nutné započítat.

Na závěr ještě poznamenejme, že Bohrův model atomu dává v prvním přiblížení stejnou strukturu atomového obalu jako pokročilejší kvantové modely, fyzikální podstatu ovšem nepopisuje dobře.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha FB ... anihilační pík

Daleko před materiál tloušťky t umístíme zdroj gama záření o energii přibližně $2\,\mathrm{MeV}$. Záření má v materiálu absorpční koeficient μ_1. Pro tak energetické záření se může stát, že se foton v materiálu přemění na elektron-pozitronový pár (úbytek intenzity způsobený tímto jevem je již obsažen v koeficientu μ_1). Pozitron ovšem hned anihiluje s nějakým elektronem a vytvoří 2 gama záblesky, každý o energii $E_\gamma = 511\,\mathrm{keV}$. Absorpční koeficient materiálu pro záření o této energii je μ_2. Daleko za materiálem umístíme detektor a sledujeme intenzitu záření o energii E_γ. Pro jakou tloušťku materiálu t bude tato intenzita nejvyšší? Intenzitou záření rozumíme počet fotonů ve svazku.

Nápověda: Infinitezimální ztráta intenzity gama záření v látce je úměrná velikosti intenzity, absorpčnímu koeficientu a jednotce vzdálenosti. *Jardovi se pořád někam ztrácí fotony.*

Z nápovědy odvodíme vztah, podle kterého klesá intenzita I (tj. počet fotonů ve svazku záření) v závislosti na vzdálenosti v materiálu. Platí totiž $-\,\mathrm{d}I = \mu_1 I\,\mathrm{d}x$, což je diferenciální rovnice, kterou vyřešíme pomocí separace proměnných a dostáváme očekávaný vztah

$$I(x) = I_0 \mathrm{e}^{-\mu_1 x}\,,$$

kde I_0 je intenzita před vstupem do materiálu a x je hloubka, ve které intenzitu počítáme.

Nějaká část tohoto záření se přemění na elektron-pozitronový pár. Předpokládáme, že pravděpodobnost tohoto jevu nezávisí na poloze materiálu, intenzita vzniku záření o energii E je tedy úměrná pouze $I(x)$. Nejvíce tohoto záření tedy vzniká na začátku, nejméně na konci materiálu.

Jakmile vznikne gama záření o energii E a začne se šířit materiálem, i ono je tlumeno, nyní s koeficientem μ_2. Nechť na $\mathrm{d}x$ okolí souřadnice x vznikne intenzita tohoto záření $\mathrm{d}J_0$. Podle vztahu výše poklesne po výstupu z materiálu tato intenzita na

$$\mathrm{d}J = \mathrm{d}J_0 \mathrm{e}^{-\mu_2(t-x)}\,,$$

neboť nyní záření urazilo v materiálu vzdálenost $t - x$.

Vznikající intenzita $\mathrm{d}J_0$ je ale úměrná $I(x)$ a délce $\mathrm{d}x$ přes nějaký koeficient úměrnosti α, což zapíšeme jako

$$\mathrm{d}J_0 = \alpha I(x)\,\mathrm{d}x = \alpha I_0 \mathrm{e}^{-\mu_1 x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Dosazením do předchozí rovnice a integrací před celou tloušťku materiálu dostáváme celkovou intenzitu záření o energii E jako

$$J = \alpha I_0 \int_0^t \mathrm{e}^{-\mu_1 x}\mathrm{e}^{-\mu_2(t-x)}\,\mathrm{d}x = \alpha I_0 \mathrm{e}^{-\mu_2 t}\int_0^t \mathrm{e}^{(\mu_2-\mu_1)x}\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha I_0 \mathrm{e}^{-\mu_2 t}}{\mu_2-\mu_1}\left(\mathrm{e}^{(\mu_2-\mu_1)t} - 1\right)\,.$$

Maximální intenzitu zjistíme pomocí derivace podle t

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha I_0}{\mu_2-\mu_1}\left(-\mu_2 \mathrm{e}^{-\mu_2 t}\left(\mathrm{e}^{(\mu_2-\mu_1)t} - 1\right) + \mathrm{e}^{-\mu_2 t}\left(\mu_2-\mu_1\right)\left(\mathrm{e}^{(\mu_2-\mu_1)t}\right)\right)\,,$$

kterou položíme rovnu nule. Dostaneme

$$0 = -\mu_2 \mathrm{e}^{(\mu_2-\mu_1)t_\mathrm{m}} + \mu_2 + \left(\mu_2-\mu_1\right)\mathrm{e}^{(\mu_2-\mu_1)t_\mathrm{m}}\,,$$

odkud

$$\mu_1 \mathrm{e}^{(\mu_2-\mu_1)t_\mathrm{m}} = \mu_2\,.$$

Poté už jednoduše vyjádříme tloušťku, pro kterou je intenzita extremální, jako

$$t_\mathrm{m} = \frac{1}{\mu_2-\mu_1}\ln\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\,.$$

Při pohledu na vztah $J(t)$ je patrné, že J je pro všechna (kladná) t kladné, a že pro body $t = 0$ a $t = \infty$ klesá k nule. Při výpočtu nulové derivace $J(t)$ jsme tedy opravdu našli maximum této funkce.

Nezávisle na tom, který z absorpčních koeficientů je větší, bude tloušťka t_m zřejmě kladná. Pokud se μ_2 blíží hodnotě μ_1, platí náš vztah i v této limitě.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha FC ... zlý lustr

Jardovi se doma často stává, že narazí hlavou do lustru v kuchyni. Ten má tvar válcového pláště bez podstav o výšce $h = 27\,\mathrm{cm}$ a poloměru $R = 12\,\mathrm{cm}$. V horní části lustru je přes jeho průměr vedena nehmotná příčka. Na střed této příčky je přivedeno vlákno o délce $l = 42\,\mathrm{cm}$, na kterém lustr u stropu visí. Jaká je perioda malých kmitů lustru, když ho Jarda vychýlí?

Jardovi se po nárazu konečně rozsvítilo.

Pro nalezení periody malých kmitů použijeme známý vztah pro fyzické kyvadlo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}\,,$$

kde J je moment setrvačnosti kmitajícího tělesa vůči ose otáčení, m je hmotnost tělesa, g tíhové zrychlení a d je vzdálenost těžiště od osy otáčení.

Vzdálenost těžiště od osy otáčení je zřejmě $d = l + h/2$.

Moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení určíme pomocí Steinerovy věty jako

$$J = J_\mathrm{T} + md^2\,,$$

kde J_T je moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm tělesa. Ten musíme určit integrací.

Uvažujme tenký kružnicový element lustru o tloušťce $\mathrm{d}x$, který má hmotnost $\mathrm{d}m = m\,\mathrm{d}x/h$, kde m je hmotnost celého lustru, a který je ve vzdálenosti x od středu lustru. Vůči středu a ose procházející kolmo na osu symetrie má tento element moment setrvačnosti

$$\mathrm{d}J_\mathrm{T} = \frac{1}{2}R^2\,\mathrm{d}m + x^2\,\mathrm{d}m\,,$$

kde jsme znova využili Steinerovu větu. Faktor $1/2$ vystupuje v důsledku momentu setrvačnosti tenkého prstence vůči ose kolmé na osu symetrie.

Integrací dostáváme

$$J_\mathrm{T} = \frac{m}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\frac{1}{2}R^2 + x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{m}{h}\left[\frac{1}{2}R^2x + \frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = m\left(\frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{12}h^2\right)\,.$$

Řešením úlohy tak je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{12}h^2 + \left(l + \frac{h}{2}\right)^2}{g\left(l + \frac{h}{2}\right)}} = 1{,}53\,\mathrm{s}\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha FD ... koule v zatáčce

Mějme vodorovnou kruhovou plochu o poloměru R, kolem které jsme vztyčili okraj výšky h. Koule o hmotnosti m a poloměru r se kutálí podél okraje tak, že se ho dotýká. Tření mezi koulí a všemi povrchy je dostatečně velké na to, aby neprokluzovala. Určete kinetickou energii koule, jestliže jeden oběh v této ohrádce jí trvá čas T. Platí $r < h$ a $R > r$.

Nemusíte mít volant, abyste mohli zatáčet.

Máme popsanou kinematiku koule. Označme úhlovou rychlost pohybu jejího těžiště jako $\omega = 2\pi/T$. Těžiště se pohybuje po kružnici o poloměru $R - r$, jeho rychlost tak je $v = \omega\,(R - r)$.

Nyní se přenesme do soustavy, která se pohybuje rychlostí v ve směru pohybu koule. Osu z veďme kolmo na podložku, osu x od středu kruhu směrem ke kouli.

Uvažujme rotaci po podložce. Koule stojí, podložka se pohybuje rychlostí v. Protože se koule pohybuje bez prokluzování, musí platit, že rychlost krajních bodů je také v. Značme úhlovou rychlost rotace kolem osy x jako ω_x, pak platí

$$\omega_x r = v = \omega\left(R - r\right) .$$

Nyní pro změnu uvažujme jen rotaci vůči okraji. Koule stojí, okraj se pohybuje rychlostí ωR. Znovu použijeme stejný argument a dostáváme, že pro úhlovou rychlost rotace vůči ose z platí

$$\omega_z r = \omega R .$$

Vektor úhlové rychlosti tak má velikost $\sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2}$. Protože koule má stejný moment setrvačnosti vůči všem svým osám, můžeme její rotační kinetickou energii zapsat jako

$$E_{\mathrm{k,\ r}} = \frac{1}{2}J\left(\omega_x^2 + \omega_z^2\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega^2\left(\left(\frac{R-r}{r}\right)^2 + \left(\frac{R}{r}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{5}m\omega^2\left(2R^2 - 2Rr + r^2\right) .$$

Tím jsme vyřešili rotaci koule, nyní přičteme kinetickou energii translace a dostáváme

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2 + E_{k,r} = \frac{2\pi^2 m}{5T^2}\left(9R^2 - 14Rr + 7r^2\right) .$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha FE ... zabráníme armagedonu

V srpnu 2022 provedla NASA test, jestli nárazem sondy do asteroidu dokáže ovlivnit jeho oběžnou dráhu. Vybraným objektem byl Dimorphos, malý asteroid obíhající svého většího kolegu jménem Didymos. Sonda o hmotnosti 570 kg *tehdy svým nárazem zkrátila periodu oběhu Dimorpha kolem Didyma o 32 minut. Jak nejvíce by se mohla změnit perioda oběhu přímo Didyma, pokud by sonda narazila do něj? Tento asteroid obíhá Slunce s hlavní polosou* 1,64 au *a excentricitou* 0,384*, má hmotnost* $5{,}2 \cdot 10^{11}$ kg *a sonda by do jeho povrchu narazila rychlostí* 22 000 km·h^{-1}*. Hmotnost Dimorpha (který byl mimochodem objeven na Ondřejovské hvězdárně) v této úloze zanedbejte. Neuvažujte odvržení materiálu z Didyma vlivem srážky.*

Jarda chce pohnout něčím těžkým.

Nejprve uvedeme třetí Keplerův zákon, ze kterého dostaneme periodu Didyma T, jako

$$T = T_\oplus\sqrt{\frac{a^3}{a_\oplus^3}} ,$$

kde $T_\oplus = 1$ rok je perioda Země, a velikost hlavní poloosy Dydima a $a_\oplus = 1$ au hlavní poloosa oběhu Země. Vidíme tedy, že perioda je úměrná hlavní poloose. Protože je sonda mnohem lehčí než asteroid, můžeme předpokládat, že náraz změní oběžnou dráhu asteroidu jen lehce. Provedeme proto diferenciaci tohoto vztahu, čímž získáme závislost změny periody na změně hlavní poloosy oběžné dráhy Didyma

$$\Delta T = \frac{3}{2}T_\oplus\sqrt{\frac{a^3}{a_\oplus^3}}\frac{\Delta a}{a} .$$

Jak víme, při pohybu v gravitačním poli platí zákon zachování energie. Celková energie tělesa (přičemž jeho hmotnost vůči centrálnímu tělesu zanedbáme) vztažená na jednotku jeho hmotnosti je $E = -GM_{\odot}/(2a)$, kde G je gravitační konstanta, $M_{\odot}$ je v našem případě hmotnost Slunce a a je hlavní poloosa. Vidíme tedy, že platí jednoduchý vztah mezi energií na jednotku hmotnosti a hlavní poloosou. Také můžeme tuto energii spočítat jako součet potenciálu a kinetické energie na jednotku hmotnosti

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{M_{\odot}G}{r}\,.$$

Porovnáním těchto dvou částí samozřejmě dostaneme

$$-\frac{GM_{\odot}}{2a} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{M_{\odot}G}{r}\,.$$

Tato rovnice musí platit před srážkou i po ní, ale s jinými a a v, neboť r se při srážce nemění. Změnu hlavní poloosy tak můžeme vyjádřit pomocí změny rychlosti asteroidu, a to diferenciováním této rovnice

$$\frac{GM_{\odot}}{2a^2}\Delta a = \mathbf{v}\cdot\Delta\mathbf{v}\,.$$

Aby byla změna hlavní poloosy co největší, požadujeme, aby $\mathbf{v}$ a $\Delta\mathbf{v}$ mířily stejným, nebo opačným směrem.

Na chvíli se teď zabývejme změnou rychlosti Didyma vlivem srážky $\Delta\mathbf{v}$. Tu najdeme ze zákona zachování hybnosti. Tato změna rychlosti bude stejná jak v soustavě spojené se Sluncem a celým planetárním systémem, tak v soustavě, kde je Didymos původně v klidu. Tam platí

$$m\mathbf{u} = (m + M)\,\Delta\mathbf{v}\,.$$

Teď už tedy můžeme dosadit do předchozího vztahu

$$\frac{GM_{\odot}}{2a^2}\Delta a = v\frac{mu}{M + m}\,.$$

Na pravé straně rovnice můžeme zanedbat ve jmenovateli m vůči M. Změna hlavní poloosy tak je

$$\Delta a = \frac{2muva^2}{GM_{\odot}M}\,.$$

Nyní chceme maximalizovat v, aby Δa bylo co největší. Asteroid měl nejvyšší rychlost, když byl nejblíže Slunci, což nastává ve vzdálenosti $a\,(1 - e)$. Zde je rychlost

$$v = \sqrt{\frac{M_{\odot}G}{a}\left(\frac{2}{1-e} - 1\right)} \doteq 35\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Dosazením za všechny neznámé parametry dostáváme

$$\Delta T = \frac{3}{2}T_{\oplus}\sqrt{\frac{a^3}{a_{\oplus}^3}}\frac{2mavu}{GM_{\odot}M} = 0{,}086\,\mathrm{s}\,.$$

Oběžná doba Didyma kolem Slunce by se změnila o 0,086 s. Dle zadání jsme pro jednoduchost neuvažovali efekt odvržení materiálu v důsledku nárazu sondy do povrchu tělesa. Úlomky vzniklé při dopadu by měly také nějakou hybnost, která by v průměru měla směr opačný než sonda. Změna hybnosti (a tedy v důsledku i periody oběžné dráhy) by tak byla vyšší.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha FF ... dva prstence

Dva prstence z tenkého vodivého drátu leží na společné ose ve vzdálenosti $z = 15\,\mathrm{cm}$. Jeden prstenec má poloměr $a = 5\,\mathrm{cm}$, zatímco druhý $b = 2\,\mathrm{mm}$, můžete proto uvažovat, že $b \ll a$. Oba prstence samozřejmě mohou fungovat jako cívky. Určete vzájemnou indukčnost prstenců.

Jindra nosí dva prsteny na jednom prstu.

Vzájemná indukčnost je stejná, ať už působí první prstenec na druhý nebo druhý prstenec na první. Magnetická indukce na ose velkého prstence ve vzdálenosti z je

$$B = \frac{\mu_0 I_1 a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}\,,$$

kde I_1 je proud ve větším prstenci. Jelikož druhý prstenec má řádově menší poloměr než první prstenec, můžeme tok magnetické indukce druhým prstencem aproximovat jako

$$\Phi_{12} = B\pi b^2 = \frac{\pi\mu_0 I_1 a^2 b^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}\,.$$

Vzájemná indukce dvou cívek pak je

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\pi\mu_0 a^2 b^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} = 5 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{H}\,.$$

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha FG ... kámen nepadá daleko od holuba

Nicnetušící holub s hlavou ve výšce $h = 20\,\mathrm{cm}$ zobe ze země drobky chleba. Znenadání na zem do vzdálenosti r od jeho hlavy dopadne kámen a holub se rozletí rychlostí $v = k/r^2$ směrem od kamene (směr je brán od místa dopadu k hlavě holuba), kde k je nějaká konstanta. Určete, jaká musí být hodnota r, aby holub doletěl co nejdál od své původní pozice, jestliže při pohybu nevynakládá žádnou další sílu, aby se udržel ve vzduchu.

Vojta vážně nemá nic proti holubům.

Holubův let není nic jiného než šikmý vrh. Vzdálenost, do které doletí hmotný bod vržený pod úhlem α, určíme jako

$$d = \frac{v^2}{g} 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

pro počáteční rychlost $v = k/r^2$. Sinus úhlu α určíme z jednoduché goniometrie jako h/r a kosinus jako $\sqrt{r^2 - h^2}/r$. Dosadíme-li vše do zkoumaného vztahu, dostaneme

$$d = 2\frac{k^2 h}{g}\frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r^6} = 2\frac{k^2 h}{g}\sqrt{\frac{r^2 - h^2}{r^{12}}}\,.$$

Stačí nám tedy najít maximum (které by z fyzikální intuice mělo existovat) výrazu

$$\mathcal{D} = \frac{r^2 - h^2}{r^{12}}\,.$$

Položíme derivaci výrazu rovnou nule, čímž dostaneme

$$\mathcal{D}' = \frac{12h^2 - 10r^2}{r^{13}} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{\max} = \frac{\sqrt{30}}{5} h \,,$$

což nám dává, že holub doletí nejdál, když kámen dopadne do vzdálenosti $r_{\max} \doteq 21{,}9\,\mathrm{cm}$.

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha FH ... láska a pravda zvítězí nad lží a nenávistí

Svoboda slova má rychlost $v = 1{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a letí si prostorem vstříc lepší společnosti. Tvrdě ovšem narazí na nehybnou stěnu, kterou proti svobodě postavil místní režim, a pružně se od ní odrazí. Opačným směrem však urazí pouze vzdálenost $l_1 = 1{,}0\,\mathrm{m}$, než narazí do stěny, která se přibližuje rychlostí $u = 0{,}01\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ k první stěně. Režim totiž začal svobodu slova utlačovat. Svoboda slova se od stěn pružně odráží a snaží se vymanit z tohoto sevření. Protože svět má mít dobrý konec, prolomí své vězení, pokud na pohybující se stěnu začne působit průměrnou silou $F = 10\,\mathrm{N}$. Otázkou ovšem je, po jak dlouhé době od prvního nárazu se jí to podaří. Sílu F počítejte jako průměrnou změnu hybnosti při dvou po sobě jdoucích nárazech za čas, který mezi nimi uplynul. Hmotnost svobody je $m = 1{,}0\,\mathrm{g}$. *Jarda se cítí pod tlakem.*

Označme si Δp_n změnu hybnosti svobody slova při n-tém nárazu do pohybující se stěny a t_n čas, který uplyne mezi n-tým a $n+1$. nárazem do pohybující se stěny. Pak dle zadání je průměrná síla

$$F_n = \frac{\Delta p_n + \Delta p_{n+1}}{2t_n} \,.$$

Nyní musíme spočítat p_n a t_n.

Celou úlohu řešíme v soustavě, kde byla rychlost svobody v. Po prvním nárazu do nehybné stěny se pohybuje stejnou rychlostí v opačném směru. Po každém odrazu od pohybující se stěny se rychlost zvýší o $2u$. To jednoduše zdůvodníme, přesuneme-li se do soustavy, kde je tato stěna v klidu. Zde je rychlost svobody $v + u$, po pružném odrazu je rychlost jen opačně orientovaná. Tato soustava se ovšem oproti původní pohybovala rychlostí u, proto je po odraze rychlost svobody v původní soustavě $v + 2u$. Toto platí pro každý odraz na této stěně, proto je rychlost svobody po n-tém odrazu od pohybující se stěny $v + 2nu$.

Spočítáme čas, který je potřeba mezi dvěma odrazy na této stěně. Vzdálenost mezi stěnami po n-tém odrazu nechť je l_n (l_1 po prvním odrazu známe ze zadání). Pro $n+1$. odraz musí být splněna podmínka

$$(v + 2nu)\, t_n + u\, t_n = 2l_n \quad \Rightarrow \quad t_n = \frac{2l_n}{v + (2n+1)\, u} \,,$$

která nám určuje, kdy dojde k dalšímu odrazu.

Vidíme, že t_n závisí na l_n, proto jej musíme určit. Mezi n-tým a následujícím odrazem se vzdálenost mezi stěnami zmenší o ut_n, takže platí

$$l_{n+1} = l_n - u\, t_n = l_n \frac{v + (2n-1)\, u}{v + (2n+1)\, u} \,.$$

Napišme tento výraz také pro l_n jako

$$l_n = l_{n-1}\frac{v + (2n-3)\,u}{v + (2n-1)\,u}$$

a dosaďme jej do rovnice výše. Dostaneme

$$l_{n+1} = l_{n-1}\frac{v + (2n-3)\,u}{v + (2n-1)\,u}\frac{v + (2n-1)\,u}{v + (2n+1)\,u} = l_{n-1}\frac{v + (2n-3)\,u}{v + (2n+1)\,u}\,.$$

Některé členy se nám pokrátily. Tento postup můžeme iterovat a dostaneme

$$l_n = l_1\frac{v + u}{v + (2n-1)\,u}\,.$$

Nyní už tedy víme, jak závisí t_n na n. Ještě vyjádříme Δp_n jako

$$\Delta p_n = m\left(v + 2nu - \left(-v - 2\left(n-1\right)u\right)\right) = m\left(2v + 2u\left(2n-1\right)\right)\,.$$

Pak dostaneme konečný vztah pro sílu F_n jako

$$F_n = 2m\frac{v + 2nu}{t_n} = m\frac{\left(v + (2n-1)\,u\right)\left(v + 2nu\right)\left(v + (2n+1)\,u\right)}{l_1\left(u+v\right)}\,.$$

Nyní zkontrolujme zadané hodnoty. Pro malá n můžeme členy s u zanedbat oproti v a dostáváme sílu řádově $10^{-3}\,\mathrm{N}$. Patrně tedy musí být n hodně velké, aby svoboda slova dokázala vyvinout tak velkou průměrnou sílu. Pak ale můžeme položit $2n-1 \approx 2n+1 \approx 2n$ a vyjádřit

$$F_n \doteq m\frac{\left(v+2nu\right)^3}{l_1\left(u+v\right)} \quad\Rightarrow\quad n \doteq \frac{\sqrt[3]{\frac{Fl_1(u+v)}{m}} - v}{2u} = 1\ 031\,.$$

Dosadíme-li $n = 1\ 030$, dostaneme $F_{1\ 030} \doteq 9{,}98\,\mathrm{N}$, pro $n = 1\ 031$ to je už $F_{1\ 031} \doteq 10{,}01\,\mathrm{N}$. Musí tedy dojít k $n = 1\ 031$ odrazům na pohybující se stěně.

Hledaný čas pak získáme ze znalosti l_n a pohybu stěny jako

$$t = \frac{l_1 - l_{1031}}{u} + \frac{l_1}{v} = \frac{l_1}{u}\frac{2\left(1\ 031 - 1\right)u}{v + \left(2\cdot 1\ 031 - 1\right)u} + \frac{l_1}{v} \doteq 96\,\mathrm{s}\,.$$

Všimněme si ještě, že pro $nu \gg v$ platí $ml'v' = ml_1v$, kde $v' = 2nu$ a l' je vzdálenost stěn při rychlosti svobody v'. Platí tak zákon zachování jakéhosi momentu hybnosti.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha GA ... utíkající princezna

Princezna se procházela po zámku, když si najednou všimla, že jí po vlečce leze pavouk rychlostí $u = 1{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ směrem k ní. Strašně zaječela (což jí samozřejmě vůbec nepomohlo) a začala utíkat rychlostí $v = 3{,}00\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (což jí taktéž vůbec nepomohlo, jelikož vlečku táhla za sebou…). Takto proběhla dveřmi, které se za ní zabouchly těsně za místem, kde se zrovna nacházel pavouk. V tom okamžiku mezi pavoukem a princeznou zbývaly $l_0 = 3{,}00\,\mathrm{m}$ vlečky.

Princezna i pavouk pokračovali ve svém pohybu, přičemž se přibouchnutá vlečka začala dokonale pružně natahovat. Princezna si myslela, že pavoukovi unikne, protože běží rychleji než on, ale mýlila se. Za jaký čas t_f pavouk princeznu dohoní? Pavouka považujte za bodového.

Legolas má rád pavouky.

Pri tejto úlohe je najťažšie nájsť spôsob, ako sa na ňu matematicky pozrieť. Podľa mňa je najefektívnejšie zaviesť si veličinu p, ktorou budeme označovať pomer úseku vlečky, ktorý má už pavúk za sebou a aktuálnej dĺžky vlečky, pričom aktuálnu dĺžku vlečky si označíme l a bude platiť $l = l_0 + vt$, kde t je čas od zabuchnutia dverí.

Na začiatku je $p = 0$. Pavúk dobehne princeznú v momente, keď bude $p = 1$.

Tento prístup je výhodný preto, že princeznin beh p priamo neovplyvňuje, pretože vlečka sa po celej dĺžke rozpína rovnako, a teda keby pavúk zostal stáť, p by sa vôbec nemenilo.

Keď sa ale pavúk hýbe, tak za malý okamih $\mathrm{d}t$ prejde vzdialenosť $u\,\mathrm{d}t$. Takže za tento okamih narastie p o element $\mathrm{d}p = u\,\mathrm{d}t/l$.

Dostávame diferenciálnu rovnicu

$$\mathrm{d}p = \frac{u\ \mathrm{d}t}{l_0 + vt}\,,$$

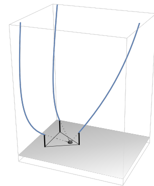
ktorá už je v tvare so separovanými premennými, čiže stačí integrovať a vyjadriť t_f

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}p &= \frac{u}{v}\int_0^{t_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}t}{l_0/v + t}\,,\\
[p]_0^1 &= \frac{u}{v}\left[\ln\left(\frac{l_0}{v} + t\right)\right]_0^{t_\mathrm{f}} = \frac{u}{v}\left(\ln\left(\frac{l_0}{v} + t_\mathrm{f}\right) - \ln\left(\frac{l_0}{v}\right)\right)\,,\\
\frac{v}{u} &= \ln\left(1 + \frac{t_\mathrm{f} v}{l_0}\right)\,,\\
\mathrm{e}^{\frac{v}{u}} &= 1 + \frac{t_\mathrm{f} v}{l_0}\,,\\
\left(\mathrm{e}^{\frac{v}{u}} - 1\right)\frac{l_0}{v} &= t_\mathrm{f}\,.
\end{aligned}$$

Môžeme si všimnúť, že pre v idúce limitne do 0 môžeme napísať $\mathrm{e}^{v/u} = 1 + v/u$ a potom dostávame $t_\mathrm{f} = l_0/u$, čo dáva zmysel. Po dosadení hodnôt zo zadania dostávame $t_\mathrm{f} = 19{,}1\,\mathrm{s}$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha GB ... kámen padá mezi holuby



Tři holubi stojící ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku o straně délky $a = 50\,\mathrm{cm}$ vysocí $h = 20\,\mathrm{cm}$ zobou drobky chleba. Znenadání mezi ně na jednu z těžnic trojúhelníku dopadne kámen tak, že místo dopadu dělí těžnici v poměru $2:1$ a není těžištěm trojúhelníku. Všichni holubi se rozletí počáteční rychlostí $v = k/r^2$ směrem od kamene (směr je brán od místa dopadu k hlavě opeřence), kde k je určitá konstanta a r je počáteční vzdálenost hlavy ptáka od místa dopadu kamene. V tuto chvíli ale u holubů naskočí skupinové chování. Každý pták v každý okamžik instinktivně průměruje vektory rychlostí svých dvou holubích kolegů a volí takové zrychlení, aby se po čase $T = 3\,\mathrm{s}$ rovnoměrně zrychleného pohybu pohyboval právě touto zprůměrovanou rychlostí. Po nějaké době se pohyb opeřenců ustálí a všichni poletí stejným směrem stejnou rychlostí. Určete úhel, který tento směr svírá se zemí.

Vojta přemýšlí, jak funguje holub.

Označme rychlosti holubů $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ a $\mathbf{v_3}$ a odpovídajícím způsobem jejich zrychlení. Heuristiku, kterou se podle zadání řídí holubi, můžeme matematicky přepsat jako

$$\mathbf{v_1} + \mathbf{a_1}T = \frac{1}{2}\left(\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}\right)\,,$$
$$\mathbf{v_2} + \mathbf{a_2}T = \frac{1}{2}\left(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_3}\right)\,,$$
$$\mathbf{v_3} + \mathbf{a_3}T = \frac{1}{2}\left(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}\right)\,.$$

Pokud tyto tři rovnice sečteme, dostaneme zajímavý vztah

$$\left(\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \mathbf{a_3}\right)T = 0\,.$$

To nám říká, že celkové okamžité zrychlení soustavy tří holubů je nulové. To znamená, že je celá soustava buď v klidu, nebo se pohybuje rovnoměrně přímočarým pohybem – tedy, že je součet rychlostí všech tří ptáků v průběhu pohybu konstantní. To znamená, že celkovou rychlost hejna holubů po ustálení směru určíme jako průměr vektorů rychlosti na počátku pohybu, tedy

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\left(\mathbf{v_1}(0) + \mathbf{v_2}(0) + \mathbf{v_3}(0)\right)\,,$$

Nyní nám zbývá pouze vyřešit počáteční podmínky. Zavedeme si kartézský souřadný systém s počátkem ve středu trojúhelníku, osou z kolmou na zem a prvním holubem stojícím na ose x. Polohy hlav holubů $\mathbf{h_i}$ a polohu kamene $\mathbf{s}$ pak můžeme určit z jednoduché geometrie jako

$$\mathbf{h_1} = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}a, 0, h\right]\,,$$
$$\mathbf{h_2} = \left[-\frac{\sqrt{3}}{6}a, \frac{1}{2}a, h\right]\,,$$
$$\mathbf{h_3} = \left[-\frac{\sqrt{3}}{6}a, -\frac{1}{2}a, h\right]\,,$$
$$\mathbf{s} = \left[\frac{\sqrt{3}}{6}a, 0, 0\right]\,,$$

odkud už snadno určíme směry a velikosti rychlostí $\mathbf{v_i}$ v čase nula jako

$$\mathbf{v_1}(0) = \frac{k}{||\mathbf{h_1} - \mathbf{s}||^3} (\mathbf{h_1} - \mathbf{s}) \doteq k \cdot \begin{pmatrix} 9{,}620 \\ 0{,}000 \\ 13{,}33 \end{pmatrix} \mathrm{m}^{-2} ,$$

$$\mathbf{v_2}(0) = \frac{k}{||\mathbf{h_2} - \mathbf{s}||^3} (\mathbf{h_2} - \mathbf{s}) \doteq k \cdot \begin{pmatrix} -3{,}604 \\ 3{,}121 \\ 2{,}497 \end{pmatrix} \mathrm{m}^{-2} ,$$

$$\mathbf{v_3}(0) = \frac{k}{||\mathbf{h_3} - \mathbf{s}||^3} (\mathbf{h_3} - \mathbf{s}) \doteq k \cdot \begin{pmatrix} -3{,}604 \\ -3{,}121 \\ 2{,}497 \end{pmatrix} \mathrm{m}^{-2} .$$

Hledaný vektor je tedy roven

$$\mathbf{v} = k' \begin{pmatrix} 2{,}413 \\ 0{,}000 \\ 18{,}32 \end{pmatrix} ,$$

kde k' je určitá konstanta. Nyní nám tedy už zbývá určit úhel, který tento vektor svírá se zemí, což uděláme jednoduše pomocí goniometrie, protože

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_z}{v_x} \doteq \frac{18,32}{2,413} \doteq 7,59 .$$

Z toho již určíme úhel $\varphi \doteq 82{,}5^\circ$.

Poznamenejme, že celou situaci můžeme také vyřešit exaktně, z čehož mimo jiné i vyplyne platnost předpokladu, že se rychlost opeřenců ustálí. Jeden z postupů, jak tuto situaci vyřešit, uvádíme níže.

Původní trojici pohybových rovnic můžeme přepsat též maticově, jen nesmíme zapomínat, že všechny prvky jsou samy o sobě vektory.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_1} \\ \mathbf{a_2} \\ \mathbf{a_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} \\ \mathbf{v_2} \\ \mathbf{v_3} \end{pmatrix}' = \frac{1}{2T} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} \\ \mathbf{v_2} \\ \mathbf{v_3} \end{pmatrix}$$

V tuto chvíli je naším cílem vyřešit soustavu lineárních diferenciálních rovnic. Za tímto účelem potřebujeme diagonalizovat uvedenou matici. Tato matice má vlastní čísla 0, -3 a -3, kterým přísluší vlastní vektory

$$M_0 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} , \qquad M_{-3} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Můžeme tedy naši soustavu přepsat do tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v_1} \\ \mathbf{v_2} \\ \mathbf{v_3} \end{pmatrix}' = \frac{1}{2T} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{v_1} \\ \mathbf{v_2} \\ \mathbf{v_3} \end{pmatrix} .$$

Nyní, zavedeme-li substituci

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u_1}\\ \mathbf{u_2}\\ \mathbf{u_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}\mathbf{v_1}\\ \mathbf{v_2}\\ \mathbf{v_3}\end{pmatrix} ,$$

můžeme naši soustavu ještě dále zjednodušit na

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u_1}\\ \mathbf{u_2}\\ \mathbf{u_3}\end{pmatrix}' = \frac{1}{2T}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mathbf{u_1}\\ \mathbf{u_2}\\ \mathbf{u_3}\end{pmatrix} ,$$

což jsou už tři jednoduché separovatelné diferenciální rovnice, které umíme vyřešit. Můžeme rovnou psát

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u_1}\\ \mathbf{u_2}\\ \mathbf{u_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{c_1}\\ \mathbf{c_2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2T}t}\\ \mathbf{c_3}\mathrm{e}^{-\frac{-3}{2T}t}\end{pmatrix} ,$$

odkud zpětným dosazením

$$\begin{pmatrix}\mathbf{v_1}\\ \mathbf{v_2}\\ \mathbf{v_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{c_1} - (\mathbf{c_2} + \mathbf{c_3})\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2T}t}\\ \mathbf{c_1} + \mathbf{c_2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2T}t}\\ \mathbf{c_1} + \mathbf{c_3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2T}t}\end{pmatrix} , \tag{1}$$

kde vektory $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ a $\mathbf{c_3}$ jsou vektorové integrační konstanty, které určíme z počátečních podmínek. Ještě než tyto počáteční podmínky nalezneme, uvědomme si, že po dostatečně dlouhém čase vymizí všechny složky, které nejsou závislé na $\mathbf{c_1}$, protože platí

$$\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix}\mathbf{v_1}\\ \mathbf{v_2}\\ \mathbf{v_3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{c_1}\\ \mathbf{c_1}\\ \mathbf{c_1}\end{pmatrix} ,$$

což vskutku odpovídá předpokladu, že holubi „dokonvergují“ ke stejné rychlosti, a můžeme naši intuici považovat za správnou. Stačí tedy nalézt pouze vektor $\mathbf{c_1}$. V čase $t = 0\,\mathrm{s}$ bude z rovnice (1) platit

$$\mathbf{c_1} = \frac{1}{3}\left(\mathbf{v_1}(0) + \mathbf{v_2}(0) + \mathbf{v_3}(0)\right) ,$$

čímž získáme čistě matematicky stejný výsledek jako s použitím fyzikálního vhledu výše.

Vojtěch David
vojtech.david@fykos.cz

Úloha GC ... sražené náboje

Dvě malé částice, každá o hmotnosti $m = 0{,}1\,\mathrm{g}$, se nacházejí v klidu ve vakuu ve vzdálenosti $L = 1{,}0\,\mathrm{m}$ od sebe. Jedna má náboj $Q = 0{,}1\,\mathrm{\mu C}$, druhá stejný náboj opačného znaménka. Za jak dlouho se dostanou k sobě? Ztrátu energie brzdným zářením můžete zanedbat.

Robo chtěl všechno anihilovat, ale dostal jen srážku.

V prvom rade si musíme uvedomiť, že rozmery častíc sú oveľa menšie ako ich počiatočné vzdialenosti, preto môžeme povedať, že sa k sebe dostanú, keď ich vzdialenosť bude 0. Obe častice sú rovnaké, čo znamená, že sa obe budú pohybovať s rovnakým zrýchlením oproti sebe, z čoho vyplýva, že každá častica musí prejsť vzdialenosť $L/2$. Čas, ktorý trvá časticiam prejsť vzdialenosť $L/2$ k ťažisku sústavy, budeme hľadať pomocou tretieho Keplerova zákona. Ten nám hovorí, že ak dve telesá obiehajú okolo toho istého hmotného bodu po kužeľosečkách (elipsa, kružnica, ...) s hlavnými polosami a_1, a_2 a ich obežnými dobami T_1, T_2, tak pre nich bude platiť

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 .$$

Obe častice pôjdu po priamkach k ich spoločnému hmotnému stredu vzdialenému $L/2$ od každej z nich. Úsečka je vlastne elipsa, ktorá má vedľajšiu polos rovnú 0, ohniská sú na jej koncoch, a hlavná polos má dĺžku $L/4$. Polovica obežnej doby po takejto elipse (úsečke) je rovná času, za ktorý prejde teleso z jedného konca úsečky na druhý. Z tretieho Keplerovho zákona viem, že táto obežná doba musí byť rovná obežnej dráhe častíc pohybujúcich sa po kružnici s polomerom $L/4$ a so stredom v spoločnom ťažisku. Preto nám stačí spočítať polovicu obehu po tejto kružnici. Z rovnováhy elektrickej a odstredivej sily máme

$$\frac{mv_0^2}{L/4} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0(2\cdot L/4)^2} .$$

Pre obežnú dobu po kružnici platí

$$T = \frac{2\pi L/4}{v_0} ,$$

z toho

$$T^2 = \left(\frac{2\pi L/4}{v_0}\right)^2 = \frac{\varepsilon_0 m\left(\pi L\right)^3}{Q^2} .$$

Polovica z toho je

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 m\left(\pi L\right)^3}}{2Q} .$$

Po vyčíslení dostávame $t = 0{,}83\,\mathrm{s}$.

Róbert Jurčo
`robert.jurco@fykos.cz`

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

/FYKOS ***@fykosak***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Organizátoři

FYKOS

matfyz

Generální partner

ESPR

Platinoví partneři

NADACE ČEZ

Neuron

Stříbrní partneři

KARÁSKOVY LIMONÁDY A SIRUPY

Quark
Magazín o vede a technike

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
Univerzita Karlova

Partneři

PROMETHEUS

HUMUSOFT | MathWorks

MINDOK

PETR HOBŽA
SNACK GROUP

CASIO

VIDA!
science centrum

ESCAPE ·point·

MERKUR

DOLLER

Efektivní altruismus