

*Řešení úloh Fyziklání Online 2025*

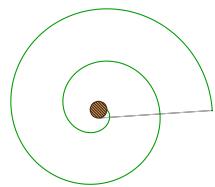


**FyzikláníOnline**

**Úloha 1 ... sekací**

3 body

Ve snaze ušetřit si práci se Verča rozhodla automatizovat sekání zahrady. Dopravstřed trávníku pevně zarazila tyč, ke které provazem připevnila sekačku. Ta umí jezdit a sekat pouze dopředu, ale díky namotávání provazu na tyč uprostřed bude její dráha tvaru spirály a může tak posekat zhruba kruhovou plochu okolo tyče. Jaký musí mít tyč poloměr, aby se na ní lano namotávalo takovým způsobem, že na sebe budou posekané pruhy přesně navazovat? Sekačka vysekává pruhy trávy šířky 0,75 m, tloušťku lana neuvažujte.

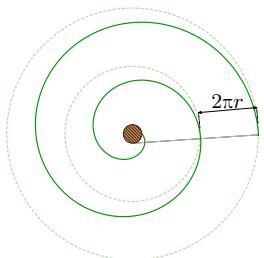


Verča sledovala kutilská videa.

V řešení si stačí uvědomit, jak chceme, aby situace vypadala v jedné a té samé přímce spojující určitou polohu sekačky a střed tyče. Představme si, že v jeden moment sekačka projíždí určitým bodem a vyseká pás široký 0,75 m. Po jednom otočení tyče chceme, aby její příští stejně široký pás přesně navazoval na tento. Pro zjednodušení si můžeme představit, že je sekačka bod uvázaný provazem přesně ve středu pásu, proto aby se kraje opět potkaly musí se posunout právě o 0,75 m za jednu otočku (polovinu té vzdálenosti aby se dostala na samotný okraj a poté druhou polovinu aby se dostala opět do středu). To znamená, že jedno otočení kolem tyče musí provaz zkrátit právě o 0,75 m, což musí odpovídat obvodu tyče. Z této rovnice už jen vyjádříme poloměr  $r$  jako

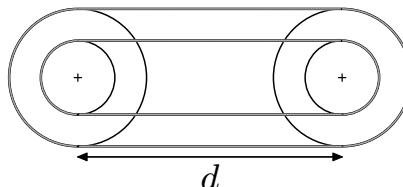
$$2\pi r = 0,75 \text{ m}, \quad \Rightarrow \quad r = \frac{0,75 \text{ m}}{2\pi} \doteq 0,12 \text{ m} = 12 \text{ cm}.$$

Tyč tedy musí mít poloměr  $r \doteq 12 \text{ cm}$ .

**Úloha 2 ... různá perioda**

3 body

Uvažujme dvě rovnoběžné hřídele ve vzájemné vzdálenosti  $d = 25,0 \text{ cm}$ . Na každou z nich navléčeme jedno kolo o poloměru  $r = 3,50 \text{ cm}$  a druhé o poloměru  $R = 6,50 \text{ cm}$ . Přes obě malá kola navléčeme natáhnutou gumi, stejně tak přes obě velká. Jednu z hřidel roztočíme frekvencí  $f = 1,28 \text{ Hz}$ . Jaký bude poměr mezi časem, po kterém se po jednom otočení dostane guma natažená kolem malých kol do své výchozí polohy, kdy se totéž uděje pro gumi kolem velkých kol? Guma na kolech neprokluzuje.



Jardu upoutaly řetězy.

Pro délky gum platí

$$L = 2\pi R + 2d$$

a

$$l = 2\pi r + 2d.$$

Rychlosť gum je dáná rychlosťí okrajov kol, ktorá je pro velké kolo  $V = \omega R$  a pro malé  $v = \omega r$ , kde  $\omega = 2\pi f$  je úhlová frekvencia otáčení hřídele.

Pak platí

$$t = \frac{l}{v} = \frac{2\pi r + 2d}{\omega r}$$

a

$$T = \frac{L}{V} = \frac{2\pi R + 2d}{\omega R},$$

takže hledaný poměr časů je

$$\frac{t}{T} = \frac{1 + \frac{d}{\pi r}}{1 + \frac{d}{\pi R}} \doteq 1,47.$$

### Úloha 3 ... hraní si s plyнем

3 body

Kolikrát se změní objem ideálního plynu, jestliže se jeho termodynamická teplota zvýší o 80 % a tlak se zmenší o 60 %?

*Tomáš měl nadýmání.*

Nech  $\alpha = 1 + 0,8 = 1,8$  a  $\beta = 1 - 0,6 = 0,4$ .

Napišeme si stavovú rovnicu pre prípad na začiatku a na konci

$$\begin{aligned} pV &= NkT, \\ \beta pV' &= Nk\alpha T, \end{aligned}$$

Druhú rovnicu vydelíme prvou a dostávame  $V' = 4,5 V$ . Aktuálny objem je 4,5 násobkom pôvodného objemu plynu.

### Úloha 4 ... rychlý servis

4 body

Ve stolním tenisu je někdy taktické překvapit soupeře dlouhým rychlým servisem. První dopad míčku je co nejblíže hraně stolu u podávajícího, druhý dopad je naopak co nejblíže hraně soupeře. Jaký je nejkratší možný čas letu míčku z jedné strany stolu na druhou, neuvažujeme-li odpor vzduchu ani rotaci míčku? Všechny potřebné parametry si dohledejte.

*Jarda by si vás chtěl podat.*

Uvažujme, jak se míček po stole pohybuje. Dopadne někde na polovině podávajícího a pak na druhé. Mezitím se pohybuje po trajektorii šíkmého vrhu, pro který platí rovnice v horizontálním  $x$  a vertikálním směru  $y$

$$x = v_0 \cos \alpha t,$$

$$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2,$$

kde  $v_0$  je počáteční velikost rychlosti a  $\alpha$  je úhel, pod kterým je míček s touto rychlostí vržen vůči horizontální rovině. Čas, po kterém míček znovu po odražení od stolu dopadne, je

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Je vidět, že čím vyšší je rychlosť  $v_0 \sin \alpha$ , tím delší je čas mezi dopady.

Ve vertikálním směru je ovšem situace limitována výškou sítky, která je podle oficiálních pravidel  $H \doteq 15,25 \text{ cm} = 6 \text{ inch}$ . Tu musí míček přeletět, takže se sníží jeho kinetická energie o  $mgH$ . Protože se rychlosť v horizontálním směru nemění, tato změna se děje na úkor rychlosťi ve světlém směru

$$mgH = \frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2 \alpha.$$

Odsud můžeme dosadit za rychlosť, abychom dostali čas mezi dopady

$$t = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Toto je nejmenší čas, který míček potřebuje pro překonání sítky. Zároveň je vidět, že kdyby měl míček nastoupit vyšší výšku, tak mu to zabere ještě déle. Ideální je navíc případ, kdy míček dopadne hned u podávajícího na hraně a pak až na druhé straně na hraně stolu. Kdyby byl totiž dopad někde uvnitř stolu, tak tam míček musí nejprve doletět, ale pořád pak musí vystoupit výšku  $H$ , což opět zabere nás čas  $t$ .

Nejmenší čas, který míček pro překonání stolu a sítky potřebuje, je tedy opravdu

$$t = 2\sqrt{\frac{2H}{g}} \doteq 0,35 \text{ s},$$

nehledě na to, kudy sítku překoná. V reálném případě samozřejmě působí odporové síly, takže rychlosť míčku se během letu výrazně sníží.

## Úloha 5 ... starý zdroj

3 body

David našel ve skříně starý zdroj stejnosměrného napětí. Přemýšlel, jak by ho jenom využil, a tak zkousil zapojit ke zdroji 2 rezistory o odporu  $R = 10 \Omega$ . Nejdříve je zapojil seriově, poté paralelně. V obou případech měřil proud, který obvodem protékal. V prvním případě naměřil  $I_1 = 1,2 \text{ A}$ , v druhém z multimetru odečetl hodnotu  $I_2 = 4,0 \text{ A}$ . David ale tušil, že zdroj nebude ideální. Určete proto, jaký má tento zdroj vnitřní odpór.

David hledal nějakou pěknou elektrickou úlohu.

Označme si vnútorný odpór zdroja  $R_i$ . Tento odpór je efektivně vždy zapojený sériovo k ostatním. Čiže v prvním případě je celkový odpór  $2R + R_i$  a v druhém  $R/2 + R_i$ . Napätie zdroja je v oboch případech  $U$ , stačí teda dosadit do Ohmovho zákona a máme sústavu dvou rovníc o dvou neznámých

$$U = (2R + R_i)I_1,$$

$$U = (R/2 + R_i)I_2.$$

Napäťia sa zbavíme na základe toho, že ľavé strany sa rovnajú, tým pádom sa musia rovnať aj pravé. Potom už len doriešime lineárnu rovnicu pre  $R_i$

$$(R/2 + R_i)I_2 = (2R + R_i)I_1, \\ R_i(I_2 - I_1) = R(2I_1 - I_2/2), \\ R_i = R \frac{2I_1 - I_2/2}{I_2 - I_1} \doteq 1,4\Omega.$$

### Úloha 6 ... pevně spojená matematická kyvadla

3 body

Mějme dvě nehmotné hůlky o délce  $l = 15\text{ cm}$ , které obě visí za jeden svůj konec a mohou se okolo bodu zavěšení volně otáčet. Tyto body závesu jsou ve shodné výšce, jejich vzájemná vzdálenost je rovna  $d = 30\text{ cm}$ . Volné konce hůlek jsou spojeny hůlkou o hmotnosti  $m = 300\text{ g}$  a délce  $d$ . Jaká bude perioda malých kmitů, pokud systém rozkýváme v rovině, ve které hůlky leží? Systém se nachází v těžovém poli se zrychlením  $g$ . *Lego idealizoval pružinku jako hůlku.*

Základ je uvedomiť si, že napoko nehmotné paličky majú obe dĺžku  $l$  a ich horné konce sú od seba vzdialené  $d$ , a tiež ich dolné konce sú vzdialené od seba  $d$ , tak paličky budú počas kývania vždy tvoriť rovnobežník (ak si domyslíme hornú stranu ako úsečku spájajúcu body závesu paličiek).

Takže hmotná palička bude vždy vodorovne, a ak jedna z nehmotných paličiek bude vychýlená o  $\varphi$ , tak aj druhá bude vychýlená o  $\varphi$ . Tým pádom si môžeme predstaviť, že tažisko hmotnej paličky visí na pomyselnej paličke, ktorá je presne medzi tými dvomi reálnymi (a teda tiež vždy vychýlená o rovnaký uhol).

Čím sme úlohu previedli na obyčajné matematické kyvadlo s dĺžkou  $l$ , perióda takého kyvadla je  $T = 2\pi\sqrt{l/g} = 0,78\text{ s}$ .

### Úloha 7 ... ledové LEDky

3 body

David četl studii, podle ktoré LEDky v laboratoři mají elektrický príkon  $P_{\text{ele}} = 30\text{ pW}$ , ale optický výkon  $P_{\text{opt}} = 69\text{ pW}$ , což by odpovedalo väčší než 100% účinnosti. Nejprve se zarazil, ale pak si uviedomil, že časť výkonu pochádza z energie tepelné. Právě kolik bychom potrebovali takovýchto diod, abychom vytvorili kostku ledu o objemu  $V = 10\text{ cm}^3$  za 1 hodinu, pokud máme dostupnou vodu o teplotě  $20^\circ\text{C}$ ? Uvažujte, že veškerý optický výkon pochádza z tepla z vody a elektrického zdroje. Optický výkon není závislý na teplotě a prenos tepla z okolí zanedbejte.

*David slyšel, že ledky jsou pojmenované podle toho, že jsou studené.*

Uvedomíme si, jak vlastne určíme chladící výkon  $P$ . Vyjdeme ze zákona zachování energie, respektive z toho, že víme, že musí platiť

$$P + P_{\text{ele}} = P_{\text{opt}} \Rightarrow P = P_{\text{opt}} - P_{\text{ele}} = 39\text{ pW}.$$

Určíme potom, kolik energie  $Q$  musí voda predat, abychom meli  $10\text{ cm}^3$  ledu

$$Q = l_T \cdot m + m \cdot c \cdot \Delta T.$$

Zde je  $l_T$  měrné skupenské teplo tuhnutí,  $m$  je hmotnost ledu,  $c$  je měrná tepelná kapacita vody a  $\Delta T$  je rozdíl teploty vody a teploty tuhnutí. Díky znalosti vzájemného vztahu hustoty ledu  $\rho = 917 \text{ kg/m}^3$  a objemu můžeme určit hmotnost ledu jako

$$m = V\rho \doteq 9,17 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

Protože má led zamrznout za čas  $\tau = 1 \text{ h}$ , pak musí pro celkový výkon  $P_{\text{celkový}}$  platit

$$\begin{aligned} P_{\text{celkový}} &= \frac{Q}{\tau} = \frac{l_T \cdot V\rho + V\rho \cdot c \cdot \Delta T}{\tau} \\ &= \frac{334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot 9,17 \cdot 10^{-3} \text{ kg} + 9,17 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 4184 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 20 \text{ K}}{1 \text{ h}} \\ &\doteq 1,06 \text{ W}. \end{aligned}$$

Protože chceme určit počet diod, zajímá nás  $n$ , pro které platí

$$P_{\text{celkový}} = nP \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1,06 \text{ W}}{39 \text{ pW}} \doteq 2,7 \cdot 10^{10}.$$

Takže na ledničku z LEDek si ještě nějakou dobu počkáme.

### Úloha 8 ... ztracený plyn

4 body

Při zkoumání velikosti povrchu porézních nebo práškových materiálů můžeme využít adsorpci plynu na dané látce. Do pipety o objemu  $15 \text{ ml}$  vložíme vzorek se skeletální hustotou  $1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  o hmotnosti  $59 \text{ mg}$  a vyčerpáme vzduch tak, že zde bude velmi vysoké vakuu. Poté dovnitř vpustíme  $1,1 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$  dusíku a po ustálení naměříme tlak  $0,15 \text{ bar}$ . Jaký je povrch vzorku, jestliže plocha jedné adsorbované molekuly činí  $0,16 \text{ nm}^2$ ? Uvažujte, že celý experiment probíhá při teplotě kapalného dusíku  $T = -196^\circ\text{C}$ .

Jarda hledá způsob, jak ted dostane svůj plyn zpátky.

Při daném experimentu naměříme menší tlak, než bychom očekávali ze stavové rovnice pro ideální plyn

$$p_s = \frac{nRT}{V_p},$$

kde  $p_s$  je tlak v případě, kdy by k žádné adsorpce nedocházelo,  $R$  je molární plynová konstanta,  $T = -196^\circ\text{C} = 77 \text{ K}$  je teplota plynu a  $V_p$  je objem, který může plyn v pipetě zaujmout. Rozdíl je dán tím, že navázané molekuly dusíku se nepohybují prostorem, nenaráží na stěny nádoby, a k tlaku tak nepřispívají. Naměřený tlak  $p_m$  odpovídá látkovému množství volného dusíku v plynném skupenství  $n_p$

$$n_p = \frac{p_m V_p}{RT},$$

kde dostupný objem můžeme určit z velikosti pipety a objemu vzorku jako

$$V_p = V - \frac{m}{\rho}.$$

Na vzorek se tedy navázalo

$$n_{\text{ads}} = n - n_p = n - \frac{p_m \left( V - \frac{m}{\rho} \right)}{RT}$$

dusíku. Jestliže na jednu molekulu připadá plocha  $\sigma$ , je celková plocha vzorku

$$A = n_{\text{ads}} N_A \sigma \doteq 72 \text{ m}^2,$$

kde jsme látkové množství (počet molů) pomocí Avogadrovy konstanty  $N_A$  přepočítali na počet částic. Vidíme, že některé materiály mohou mít i ve velmi malém množství povrch srovnatelný s plochou velkého bytu. Toho se dá využívat například při katalytických reakcích.

### Úloha 9 ... rozbitě nabité

4 body

Kolmo na magnetické indukční čáry letí částice rychlostí  $v = 100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  charakterizovaná nábojem  $Q = -15,0 \mu\text{C}$  a hmotností  $M = 50,0 \mu\text{g}$ . V jednom momentu se tato částice rozpadne na dvě částice s opačnými náboji. Jaký je poměr velikosti poloměru křivosti trajektorie kladné nabité částice k velikosti poloměru křivosti záporně nabité částice? Hmotnost vzniklé kladné částice je  $m = 20,0 \mu\text{g}$  a její náboj je  $q = 10,0 \mu\text{C}$ . Uvažujte, že po rozpadu zůstane rychlosť častic  $v$  a nebudou se dál vzájemně ovlivňovat.

*Pepa prokrastinoval na dějinách fyziky.*

Polomer krivosti trajektórie nabitej častice v magnetickom poli určíme z rovnosti Lorentzovej a dostredivej sily. Pre kladnú časticu platí

$$qvB = m \frac{v^2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{mv}{qB}.$$

Záporná častica bude mať hmotnosť  $m_2 = M - m = 30 \mu\text{g}$  a náboj  $q_2 = Q - q = -25 \mu\text{C}$ , potom jej polomer krivosti bude

$$r_2 = \frac{(M - m)v}{|Q - q| B}.$$

Potom pomer polomerov krivosti je

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\frac{mv}{qB}}{\frac{(M-m)v}{|Q-q|B}} = \frac{|Q - q| m}{q(M - m)} = \frac{5}{3} \doteq 1,67.$$

### Úloha 10 ... kreativní DnD hrdina

4 body

Hrdinové zápasí s nekromantem v jeho laboratoři. Jeden z hrdinů není zrovna silný, zato je vynálezavý, a tak ho napadne shodit skříň na blízkou nemrtvou. Pak ho ale napadne, pokud má on dost síly, aby skříň shodil, bude mít i nemrtvou dost síly, aby ji následně udržela, nebo ne? Předpokládejme, že skříň je homogenní a má výšku  $a = 3,5 \text{ m}$ , šířku  $b = 1,5 \text{ m}$  a hloubku  $c = 60 \text{ cm}$  a hrdina ji dokáže převrhnut podél její šířky. Hrdina i nemrtvola mají výšku  $h = 180 \text{ cm}$ , v této výšce budou na skříň působit. Nemrtvola stojí  $d = 1,5 \text{ m}$  od skříně (měřeno

od paty, která zůstane na zemi). Jaký je poměr síly, kterou potřebuje nemrtvola k tomu, aby ji udržela bez pohnutí tam, kde stojí; k síle, kterou potřeboval hrdina ke shození skříně? To, že skřín na nemrtvolu padne nenulovou rychlostí, neřešte a předpokládejte, že nemrtvola i hrdina tlačili kolmo ke stěne.

Lego hrál DnD jen párkrt.

Nejvíce síly bude hrdina potřebovat na počáteční vychýlení skříně. Potom už bude těžiště blíže ose otáčení, a tedy moment síly, proti které musí hrdina působit, bude menší (samozřejmě za předpokladu, že hrdina má stále rameno síly  $h$ ). Na začátku bude rameno těhové síly  $c/2$ . Onačme si hmotnost skříně  $m$ , potom hrdina potřebuje mít sílu aspoň

$$F_h = \frac{M}{r_h} = \frac{mg}{h} \frac{c}{2}.$$

Spojnica těžiště skříně a paty, okolo které byla převrhnutá, svírala před jejím převrhnutím se svislým směrem úhel

$$\psi = \arctg \frac{c/2}{a/2} = \arctg \frac{c}{a}.$$

Úhel  $\varphi$ , který svírá stěna skříně se svislým směrem po převrhnutí, můžeme spočítat z výšky nemrtvoly a její vzdálenosti od paty skříně

$$\varphi = \arctg \frac{d}{h}.$$

Jelikož stěna byla původně ve svislém směru, toto je zároveň úhel, o který se skříně pootočila. Pokud chceme určit úhel, který svírá spojnice těžiště a paty se svislým směrem, potřebujeme zjistit rozdíl těchto dvou úhlů. (Rozdíl úhlů, přestože skříně byla převrhnutá „opačným směrem“, než jak se těžiště nacházelo vůči patě na začátku.)

Potřebujeme určit i rameno síly, které dostaneme jako horizontální vzdálenost těžiště od paty. Jejich celková vzdálenost (přepona v příslušném trojúhelníku, který použijeme) je  $\sqrt{a^2 + c^2}/2$ , a proto použijeme sinus

$$\Delta x = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c^2} \sin \left( \arctg \frac{d}{h} - \arctg \frac{c}{a} \right).$$

Získali jsme rameno těhové síly. Jaké rameno bude mít nemrtvola? Pokud bude tlačit kolmo na stěnu skříně, rameno bude z Pythagorovy věty  $r_z = \sqrt{d^2 + h^2}$ . Tím pádem bude potřebovat sílu

$$F_z = mg \frac{\Delta x}{r_z} = mg \frac{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c^2} \sin \left( \arctg \frac{d}{h} - \arctg \frac{c}{a} \right)}{\sqrt{d^2 + h^2}}.$$

Tím pádem hledaný poměr je

$$\frac{F_z}{F_h} = \frac{mg \frac{\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c^2} \sin \left( \arctg \frac{d}{h} - \arctg \frac{c}{a} \right)}{\sqrt{d^2 + h^2}}}{\frac{mgc/2}{h}} = \frac{h \sqrt{a^2 + c^2} \sin \left( \arctg \frac{d}{h} - \arctg \frac{c}{a} \right)}{c \sqrt{d^2 + h^2}} = 2,3.$$

**Úloha 11 ... schody v Atomiu**

3 body

Bruselské Atomium je monumentální turistická atrakce, která připomíná elementární buňku prostorově centrované mřížky krystalického železa. Místo atomů jsou velké koule, do nichž je možné vstoupit. Koule jsou propojeny průchody vedoucími po všech hranách krychle a také z rohových koulí do koule centrální. Krychle je postavena na roh tak, že její tělesová úhlopříčka míří kolmo k zemi. Jaký je sklon schodiště vedoucího z druhé nejnižší koule do koule středové vzhledem k vodorovné rovině země?

*Jarda byl na dovolené v Belgii.*

Atomium má podle zadání tvar krychle o hraně  $a$ , která je postavená svou tělesovou úhlopříčkou kolmo vzhůru. Jestliže definujeme vrcholy krychle jako ABCDEFGH, aby ABCD ohraničovaly jednu stěnu a EFGH druhou, tak vybereme takovou rovinu, která obsahuje dvě stěnové úhlopříčky AC a EG. Řez krychle touto rovinou tvorí obdélník o stranách  $a$  a  $\sqrt{2}a$  a leží v něm i střed krychle. Diagonála tohoto obdélníku je tělesová úhlopříčka celé krychle.

Když si představíme, že tento obdélník stojí na svém rohu svojí úhlopříčkou kolmo k zemi, vidíme, že reprezentuje i polohu koulí v Atomiu. Úhel delší strany od kolmice k zemi označme  $\alpha$  a platí pro něj

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Výška, ve které jsou spodní tři koule Atomia, je

$$h_s = a \sin \alpha$$

a jejich vzdálenost od tělesové úhlopříčky je

$$d_s = a \cos \alpha.$$

Výška prostřední koule nad zemí je

$$h_p = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Nyní již můžeme vyjádřit tangens úhlu, který schody svírají se zemí, jako

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{h_p - h_s}{d_s} = \frac{\sqrt{3} - 2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha}, \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{\sqrt{3} - 2 \frac{1}{\sqrt{3}}}{2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}, \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{1}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

odkud dostáváme hledaný úhel

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{2}} \doteq 19,5^\circ.$$

**Úloha 12 ... síla LED pásků**

4 body

Jarda si na kuchyňskou linku namontoval 2,5 m dlouhé LED pásky se spotřebou 11 W/m a napětím  $U = 12$  V. Z transformátoru k nim vede napětí  $l = 4,8$  m dlouhou rovnou dvojlinkou, ve které jsou kabely od sebe vzdálené  $d = 3,0$  mm. Jak velkou silou na sebe dvojice kabelů působí? Pokud je přitažlivá, uvedte kladnou hodnotu a naopak. Uvažujte, že tloušťka kovových kabelů je zanedbatelná.

*Jarda osvětloval kuchyňku, když ho začala přitahovat síla proudících elektronů v kabelech.*

Dôsledkom prechodu prúdu dvojlinkou vzniká v okolí oboch káblov magnetické pole. Prúd vo vodiči je realizovaný pohybom elektrónov, na ktoré v prítomnosti magnetického pola pôsobí Lorentzova sila. Veľkosť tejto sily môžeme určiť z Ampérovho zákona pre silu medzi dvoma vodičmi

$$|F| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l, \quad (1)$$

kde  $I_1 = I_2 = I$  sú prúdy prechádzajúce jednotlivými vodičmi,  $d = 3$  mm je ich vzdialenosť a  $l = 4,8$  m je ich dĺžka. Dvojlinka sa skladá z napájania a „zeme“, spolu vytvárajú uzavretý obvod. Prúd v jednotlivých vodičoch má tým pádom navzájom opačný smer, kvôli čomu je sila odpudivá (Flemingovo pravidlo lavej ruky). Ostáva už len zistieť veľkosť prúdu prechádzajúceho cez obvod. Zo zadania máme, že dĺžkový príkon LED páskov je  $11 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}$  a dĺžka LED páskov je 2,5 m, na základe čoho vieme, že príkon obvodu  $P = (11 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}) \cdot (2,5 \text{ m}) = 27,5 \text{ W}$ . Z celkového príkonu máme

$$I = \frac{P}{U}.$$

Po dosadení do vzťahu (1) dostávame

$$|F| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{P^2}{U^2 d} l \doteq 1,7 \text{ mN}.$$

Kedže je sila medzi vodičmi odpudivá, tak má podľa zadania záporné znamienko  $F = -1,7 \text{ mN}$ .

**Úloha 13 ... hopsající pizza**

4 body

Na pružině s plošinou o tuhosti  $k = 100 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  je položena pizza o hmotnosti  $m = 0,40 \text{ kg}$ . Pružina s plošinou je pomocí zabudovaného mechanizmu stlačena do počáteční výchylky  $x_0 = 0,020 \text{ m}$  oproti rovnovážné poloze. Následně mechanismus uvolní pružinu, která vystřelí pizzu a hned po výstřelu stlačí pružinu zpět na počáteční výchylku  $x_0$ . Pizza poté dopadne zpět na plošinu, čímž stlačí pružinu a je opět vystřelená. Mechanismus okamžitě po výstřelu stálne pružinu na maximální výchylku od rovnovážné polohy, které dosáhla po dopadu pizzy. Tenhle proces se dále opakuje.

Do jaké výchylky bude pružina mechanismem stlačena po výstřelu, při kterém pizza poprvé překoná výšku  $h = 1,0 \text{ m}$  od rovnovážné polohy? Odpor vzduchu zanedbejte. Uvažujte, že veškerá kinetická energie pizzy a potenciální energie pružiny se na sebe převádí ideálně (bez ztrát) a že hmotnost desky a pružiny jsou zanedbatelná vůči hmotnosti pizzy.

*David přemýšlel, jak zefektivnit přípravu pizzy havaj.*

Aby pizza překonala výšku  $h = 1,0 \text{ m}$ , musí platit, že energie předána pružinou pizzě  $E_k$  musí být větší nebo rovná potenciální energii pizzy ve výšce  $h$ , tedy  $E_k \geq E_p$ .

Pro potenciální energii platí

$$E_p = mgh,$$

tedy pro  $h = 1,0 \text{ m}$  bude platit  $E_p \doteq 3,92 \text{ J}$ .

Energii pružiny určíme jako

$$E_k = \frac{1}{2}kx^2.$$

To nám pro první výstřel dává  $E_k = 0,02 \text{ J}$ . Pokud si zapíšeme první 4 výstřely

$$E_{k_1} = 0,02 \text{ J},$$

$$E_{k_2} = 0,04 \text{ J},$$

$$E_{k_3} = 0,08 \text{ J},$$

$$E_{k_4} = 0,16 \text{ J}.$$

Lze vidět, že nám bude energie růst dána rekurentní posloupností

$$E_{k_n} = 2E_{k_{n-1}}.$$

Pokud si zapíšeme danou rekurentní posloupnost do tvaru zadaným  $n$ -tým členem srovnáme s potenciální energií, získáme nerovnost ve tvaru

$$2^{n-1}0,02 \geq 3,92.$$

Máme tedy  $n \geq 8,62$ . Z toho dostáváme, že po 9. výstřelu pizza překoná výšku  $h$ . Pro 9. člen platí  $E_{k_9} = 5,12 \text{ J}$ . Pro výpočet výchylky si vyjádříme z rovnice pro energii pružiny výchylku  $x_9$  jako

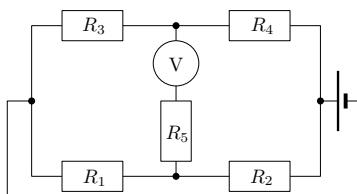
$$x_9 = \sqrt{\frac{2E_{k_9}}{k}}.$$

Pizza překoná  $h = 1,0 \text{ m}$  při výchylce pružiny  $x_9 = 0,32 \text{ m}$ .

### Úloha 14 ... napětí na voltmetu

4 body

Jaké napětí naměříme na voltmetu ve schématu na obrázku? Napětí zdroje je  $U_0 = 4,50 \text{ V}$ , zdroj má zanedbatelný vnitřní odpor, voltmetr je ideální, rezistory mají hodnoty odporů  $R_1 = 1,00 \Omega$ ,  $R_2 = 2,00 \Omega$ ,  $R_3 = 4,00 \Omega$ ,  $R_4 = 2,00 \Omega$  a  $R_5 = 5,00 \Omega$ . Výsledek zadejte jako kladné číslo.



Karel přemýšlel o špatném zapojování voltmetu.

Ideální voltmeter má nekonečný vnitřní odpor. Můžeme tedy zanedbat rezistor  $R_5$  a považovat obvod ve věti s voltmetrem jako za rozpojený.

Napětí na voltmetu pak bude dáno rozdílem potenciálů mezi uzly. Označme potenciál v uzlu mezi rezistory  $R_1$  a  $R_2$  jako  $\varphi_{12}$ , obdobně  $\varphi_{34}$  mezi  $R_3$  a  $R_4$ . Pokud bereme potenciál od kladné elektrody, dostáváme

$$\varphi_{12} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_0 \doteq 1,50 \text{ V},$$

$$\varphi_{34} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} U_0 \doteq 3,00 \text{ V}.$$

Celkově pak absolutní hodnota napětí na voltmetu bude daná rozdílem napětí

$$U_V = |\varphi_{12} - \varphi_{34}| \doteq 1,50 \text{ V}.$$

Na voltmetu naměříme 1,50 V. Dle zadání je výsledek udán kladně – ve skutečnosti by záleželo na tom v jaké polaritě by byl voltmetr zapojený.

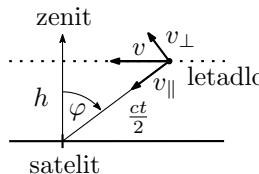
### Úloha 15 ... problémy operátora radaru

4 body

Operátor radaru vyslal pulz o frekvenci  $f = 50 \text{ MHz}$  proti nepřátelskému letadlu, které letí ve výšce  $h = 20\,000 \text{ ft}$  nad zemí. Po čase  $t = 0,10 \text{ ms}$  se mu vrátil pulz s frekvencí o  $\Delta f = 190 \text{ Hz}$  jinou oproti vyslanému pulzu. Určete, za jak dlouho bude nepřátelské letadlo nad operátorem, pokud předpokládáme, že letadlo letí rovnoměrně přímočaře a rovnoběžně se Zemí k bodu přímo nad operátorem.

Dodo sledoval radar.

Najprv sa zamyslíme nad situáciou popísanou v zadani. V kolmom smere sa k zenitu blíži lietadlo vo výške  $h$  rýchlosťou  $v$ , pričom v bode odrazu pulzu od lietadla je uhol zenit-satelit-lietadlo  $\varphi$  (obr. 1). Pri odraze pulzu dochádza ku dvojitej zmene frekvencie – prvýkrát príjma lietadlo pulz ako pozorovateľ, ktorý sa ku zdroju blíži rýchlosťou  $v_{\parallel}$  a druhýkrát (pri odraze) "vysiela" ako zdroj pohybujúci sa priamo ku pozorovateľovi (satelitu) rýchlosťou  $v_{\parallel}$ . Rozdiel frekvencie vyslanej a prijatej je  $\Delta f = f' - f$ . Keďže platí  $\Delta f \ll f$ , tak nám postačí uvažovať nerelativistického Dopplera.



Obrázek 1: Náčrt situácie zo zadania

Z obrázku 1 je jasné, že sa lietadlo nepohybuje priamo ku pozorovateľovi. Jeho rýchlosť vieme rozdeliť na radiálnu rýchlosť  $v_{\parallel} = v \sin \varphi$ , ktorej smer je rovnobežný so spojnicou satelit-lietadlo, a tangenciálnu  $v_{\perp}$ , ktorej smer je kolmý na radiálnu rýchlosť. Ak si elektromagnetické vlnenie (pulz) znázorníme jeho vlnoplochami, zistíme, že tangenciálna zložka rýchlosť neovplyvňuje to, ako pozorovateľ vníma vysielaný signál. Bude nás preto zaujímať iba radiálna zložka rýchlosť  $v_{\parallel}$ .

Ked sa priamo ku zdroju približuje pozorovateľ rýchlosťou  $v_{\parallel}$ , tak pozorovateľ vníma vlnu s tou istou fyzickou vlnovou dĺžkou, avšak s inou rýchlosťou, a teda aj frekvenciou. Platí tak

$$\frac{f_1}{c + v_{\parallel}} = \frac{f}{c} \rightarrow f_1 = \frac{c + v_{\parallel}}{c} f.$$

Ked sa zdroj približuje k pozorovateľovi, tak sa skracuje fyzická vlnová dĺžka, avšak rýchlosť vlnenia  $c$  ostáva rovnaká. Za periódu  $T$  dôjde ku skráteniu pôvodnej vlnovej dĺžky  $\lambda_1$  na

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \lambda_1 - v_{\parallel}T = \lambda_1 - v_{\parallel} \frac{\lambda_1}{c} = \lambda_1 \frac{c - v_{\parallel}}{c}, \\ f_2 &= \frac{c}{c - v_{\parallel}} f_1.\end{aligned}$$

Spojením oboch Dopplerov dokopy dostávame

$$f' = f_2 = \frac{c}{c - v_{\parallel}} \frac{c + v_{\parallel}}{c} f = \frac{c + v_{\parallel}}{c - v_{\parallel}} f.$$

Z čoho vieme určiť

$$\begin{aligned}v &= \frac{v_{\parallel}}{\sin \varphi} = \frac{f' - f}{f' + f \sin \varphi} \frac{c}{c} = \\ &= \frac{\Delta f}{2f + \Delta f} \frac{c}{\sin \varphi} \approx \frac{\Delta f}{2f} \frac{c}{\sin \varphi},\end{aligned}$$

kde sme využili  $\Delta f \ll f$ .

Kým pulz dôjde ku lietadlu za čas  $t/2$ , tak medzitým prejde vzdialenosť

$$\frac{h}{\cos \varphi} = \frac{ct}{2} \rightarrow \cos \varphi = \frac{2h}{ct}.$$

Od odrazenia pulzu od lietadla ubehne čas  $t/2$ , kým sa vráti pulz späť k satelitu. Čas  $t_2$ , za ktorý od prijatia pulzu priletí lietadlo ku zenitu, je potom

$$\begin{aligned}\frac{ct}{2} \sin \varphi &= v \left( t_2 + \frac{t}{2} \right), \\ t_2 &= \left( \frac{c}{v} \sin \varphi - 1 \right) \frac{t}{2}.\end{aligned}$$

Po úpravách

$$\begin{aligned}t_2 &= \left( \frac{2f}{\Delta f} \sin^2 \varphi - 1 \right) \frac{t}{2} = \left( \frac{2f}{\Delta f} (1 - \cos^2 \varphi) - 1 \right) \frac{t}{2} = \\ &= \left( \frac{2f}{\Delta f} \left( 1 - \frac{4h^2}{c^2 t^2} \right) - 1 \right) \frac{t}{2} \doteq 22 \text{ s}.\end{aligned}$$

**Úloha 16 ... rotující elektrony**

4 body

Danka si na praktiku hrála s baňkou naplněnou argonem s nízkým tlakem, do které se vpouštěl kolimovaný elektronový svazek. Ten ionizoval argon, při jehož rekombinaci bylo možné pozorovat dráhu elektronového svazku díky luminiscenci. Danka nastavila svazek tak, aby jeho dráha měla tvar šroubovice o poloměru 5,00 cm s konstantním stoupáním 5,00 cm. Urychlující napětí elektronů bylo 200 V. Jaká byla v tomto stavu velikost magnetická indukce v baňce od vnějších magnetů? Uvažujte, že v celém objemu baňky je magnetická indukce konstantní a má stejný směr.

Danka někdy dávno dělala úlohu na praktika.

Pokud jsou elektrony urychljené napětím  $U$ , pak jejich celkovou rychlosť dostaneme ze zákona zachování energie

$$Ue = \frac{1}{2}m_e v^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}}.$$

Tuto rychlosť můžeme rozložit do směru rovnoběžného se směrem magnetické indukce (ozn.:  $v_x$ ) a do směru kolmého k magnetické indukci ( $v_y$ ). Máme zadáno stoupání, tedy vzdálenost  $s$ , kterou elektron urazí ve směru  $x$ , zatímco opíše kružnici v rovině kolmé na magnetickou indukci  $B$ . Odtud plyne

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2,$$

$$\frac{s}{v_x} = \frac{2\pi R}{v_y},$$

kde  $R$  je poloměr kružnice opsané v rovině kolmé na  $B$ . Odtud můžeme dostat  $v_y$  jako

$$v_y = \frac{v}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{2\pi R}\right)^2}}.$$

Dále víme, že elektrony jsou v magnetickém poli zakřivovány podle vztahu

$$Bev_y = \frac{m_e (v_y)^2}{R}.$$

Spojením výše uvedených rovnic dostaneme

$$B = \frac{m_e v_y}{eR} = \frac{m_e \frac{v}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{2\pi R}\right)^2}}}{eR} = \frac{\sqrt{2Ue m_e}}{eR \sqrt{1 + \left(\frac{s}{2\pi R}\right)^2}} = 0,942 \text{ mT}.$$

**Úloha 17 ... převrácená kadibudka**

4 body

Foukalo a Kuba šel po pěšince. Najednou uviděl převrácenou kadibudku a v tu ránu se zamyslel, jak velké větry jsou potřeba na její převrácení. Kadibudku approximujte homogenním kvádrem o výšce  $a = 244$  cm, čtvercové základně o délce hrany  $b = 152$  cm a o hmotnosti  $m = 140$  kg; koeficient odporu má hodnotu  $C = 1,05$ . Uvažujte, že vítr fouká kolmo na jednu z bočních stěn a osa rotace je pevně umístěna na hraně kadibudky dotýkající se země proti straně, na kterou fouká vítr. Hustotu vzduchu uvažujte  $\rho = 1,225 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Jaká je nejnižší potřebná rychlosť větru na to, aby se kadibudka začala naklánět?

Jarda P. šel na záchod.

Nejprve určíme sílu, kterou působí vzduch dopadající na kadibudku. Ta je dána známým vzorcem

$$F_v = \frac{1}{2} C \rho S v^2,$$

kde  $S$  je efektivní plocha, což je plocha, na kterou proud vzduchu dopadá. Dále má kadibudka hmotnost  $m$ . Tedy máme těhovou sílu o velikosti

$$F_g = mg.$$

Elementy odporové síly působí podél stěny kadibudky; můžeme je všechny nahradit jedinou ekvivalentní sílou působící ve středu stěny. Vektor této síly lze bez změny jejího pohybového účinku přesunout po vektorové přímce do těžiště, kde působí i těžiště. Odporová síla vzduchu bude působit vodorovně s půdou, na které kadibudka stojí, zatímco těhová síla bude působit vertikálně kolmo na ni. Sečtením obou sil dostaneme výslednici.

Protože kadibudka je approximována kvádrem, který je homogenní, víme, že těžiště leží v geometrickém středu. Výslednici, která působí v těžišti, tak můžeme spojit s osou rotace úsečkou o délce poloviny úhlopříčky. Úhlopříčkou zde nemyslíme tělesovou úhlopříčku, ale úhlopříčku obdélníku kolmého na osu rotace.

Rotaci kadibudky ovlivňuje složka kolmá na tuto spojnici, tedy na úhlopříčku. Bude-li tato složka bude mít směrem k zemi, bude se kadibudka tlačit na zem. Pokud bude mít opačným směrem, bude se kadibudka převracet. Zlomový bod, tedy bod, kdy převracení může být poprvé možné, nastává, když je kolmá složka výslednice nulová, tedy když je výslednice rovnoběžná s úhlopříčkou.

Úhel, který svírá těhová síla a výslednice, pojmenujme  $\varphi$ . Z předchozích úvah vidíme, že bude mít tvar

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{F_v}{F_g} = \frac{\frac{1}{2} C \rho S v^2}{mg}. \quad (2)$$

Úhlopříčka svírá s delší hranou kadibudky úhel  $\theta$ , proto

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{b}{a}. \quad (3)$$

Protože hledáme zlomový bod, položíme  $\varphi = \theta$ . Nyní porovnáme vztahy (2) a (3). Taky dosadíme pro  $S = ab$ , čímž získáváme rovnici ve tvaru

$$\frac{C \rho a b v^2}{2 m g} = \frac{b}{a}.$$

Úpravou dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho a^2}} \doteq 18,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

### Úloha 18 ... kostička draslíku

4 body

Draslík  ${}^{40}\text{K}$  má poločas rozpadu  $T = 1,3 \cdot 10^9$  let, přičemž pomocí přeměny  $\beta^-$  přechází s pravděpodobností 89 % na stabilní  ${}^{40}\text{Ca}$  a pomocí přeměny  $\beta^+$  s pravděpodobností 11 % na stabilní  ${}^{40}\text{Ar}$ . Jakou hmotnost by musela mít kostka  ${}^{40}\text{K}$ , aby dokázala za  $t = 1,0$  rok vytvořit dostatek argonu, který by vyplnil místo o rozměrech  $a = 5,0$  m,  $b = 10$  m,  $c = 3,0$  m s hustotou částic argonu  $\rho = 1,0 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ ? Uvažujte, že se argon uvolňuje z celého objemu. Molární hmotnost  ${}^{40}\text{K}$  je  $M = 40 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

*David přemýšlel o tom, kolik banánů by ho udusilo.*

Nejprve vypočteme, jaký počet částic  $N$  je obsažen v potřebné hmotnosti draslíku  $m$

$$N = N_A \frac{m}{M},$$

kde  $N_A$  je Avogadrova konstanta. Nyní využijeme rozpadový zákon, abychom dostali počet částic  $N_r$ , které se rozpadnou za dobu  $t$ .

$$N_r = N \left( 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \right).$$

Ve vzniklých částicích jsou zahrnutý částice vápníku i argonu, tudíž musíme celkový počet přeměněných částic přenásobit pravděpodobností  $p$  vzniku argonu. Tím dostaneme počet částic argonu  $N_{Ar}$ , který se za čas  $t$  uvolní radioaktivním rozpadem z draslíku. Jejich počet musí být pro dosažení požadované hustoty roven

$$N_{Ar} = \rho abc.$$

Spojením výše uvedených rovnic dostaneme

$$\rho abc = p N_A \frac{m}{M} \left( 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \right),$$

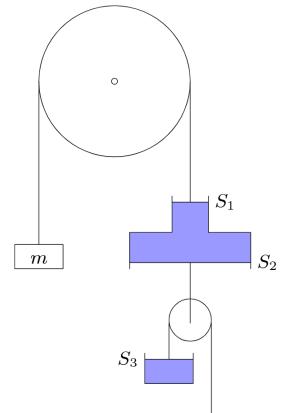
odkud vyjádříme  $m$

$$m = \frac{\rho abc M}{p N_A \left( 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T} t} \right)} = 1,7 \cdot 10^{12} \text{ kg}.$$

**Úloha 19 ... termodynamické kladky**

4 body

Máme ustálenou situaci jako na obrázku. Obě nádoby s plynem jsou pevně uchyceny a je v nich  $n = 1$  mol plynu o teplotě  $T = 20^\circ\text{C}$ , což je zároveň teplota okolí, ve kterém je atmosférický tlak. Jaký je objem plynu ve spodním pístu? Zanedbejte tíhu všeho kromě závaží o hmotnosti  $m = 2,5\text{ kg}$ . Plochy z obrázku jsou:  $S_1 = 15\text{ cm}^2$ ,  $S_2 = 50\text{ cm}^2$ ,  $S_3 = 25\text{ cm}^2$ .



*Lego kombinuje.*

Najprv sa pozrieme na vrchnú nádobu. Kedže zanebávame tiaže, zanedbávame hydrostatický tlak plynu v nej, čiže tlak pri hornom pieste je rovný tlaku pri dolnom pieste. Z rovnováhy síl na prvom lane vyplýva, že tento tlak musí byť o

$$\Delta p_1 = \frac{mg}{S_1},$$

menší než atmosférický. Rovnaký rozdiel bude i pri dolnom, čiže sila, ktorou je druhý piest fahaný nahor je  $F_2 = mgS_2/S_1$ .

Táto sila fahá nahor voľnú kladku, ktorá tú silu rozdelí medzi dve strany lana, čiže piest spodnej nádoby je fahaný lanom nahor, a to silou  $F_2/2$ . Samozrejme na piest pôsobí atmosférický tlak, čiže tlak v pieste bude

$$p = p_a - \frac{F_2}{2S_3} = p_a - \frac{mgS_2}{2S_1S_3}.$$

Zostáva dosadiť do stavovej rovnice

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{nRT}{p_a - \frac{mgS_2}{2S_1S_3}} \doteq 0,029\text{ m}^3 = 29\text{ l}.$$

**Úloha 20 ... kolo na dráte**

5 bodů

Na rovině nakloněné od horizontálnímu směru o  $35^\circ$  se nachází obruč o hmotnosti 1,3 kg a průměru 73 cm. Ta má na své ose souměrnosti hrídel, okolo které se může volně otáčet. Hřídel je připojena pružinou o tuhosti  $2,5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ , která vede rovnoběžně s rovinou směrem vzhůru. Pokud obruč vychýlíme z rovnovážné polohy směrem dolů, s jakou periodou bude kmitat? Uvažujte, že obruč po rovině neprokluzuje.

*Jarda v obchodě se suvenýry našel skutečně unikátní kousek.*

Tím, že kolo neprokluzuje, je myšleno, že obvodová rychlosť bodů na obvodu kola vůči jeho středu je stejná, jako rychlosť těžiště kola vůči podložce

$$v = \omega R,$$

kde  $\omega$  je úhlová rychlosť rotace kola a  $R$  jeho poloměr. Pokud je tato podmínka splněna, tak se kolo po povrchu valí a neprokluzuje.

Kinetická energie takového pohybu je kola je složena z translační a rotační složky

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}(2m)v^2,$$

kam jsme dosadili za moment setrvačnosti obruče

$$J = mR^2.$$

Vidíme, že při odvalování se obruč chová jako hmotný bod, ale s efektivní dvojnásobnou hmotností, protože se část energie spotřebuje i na rotační pohyb.

Perioda oscilací hmotného bodu s hmotností  $m$  na pružině o tuhosti  $k$  nezávisí na směru vůči těžovému poli. To se projeví jenom tím, jak se pružina protáhne vůči své klidové délce. Protože je ale tato síla konstatní nezávisle na poloze a času, na frekvenci kmitání vliv nemá. Perioda kmitání hmotného bodu je tedy

$$T_b = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Naše obruč má při valivém pohybu efektivní hmotnost  $2m$ , což stačí dosadit do této rovnice, a dostáváme výsledek úlohy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} \doteq 6,4 \text{ s}.$$

**Úloha 21 ... částice**

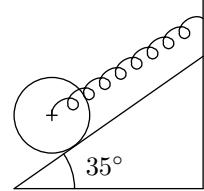
4 body

Máme relativistický protom, jehož energii detektor změřil jako  $E = 5,12 \cdot 10^{-10} \text{ J}$ . Jak velká musí být magnetická indukce  $B$ , aby měla trajektorie částice poloměr zakřivení  $R = 1,11 \text{ m}$ ?

*Vítěk zaslechl, že se možná vyhne Praktiku IV.*

Pro energii relativistické částice můžeme psát

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2,$$



kde  $\gamma$  je Lorenzův faktor a  $m_0$  je klidová hmotnost částice. Magnetické pole zakřivuje trajektorii protonu, proto píšeme rovnost magnetické síly a síly odstředivé jako

$$\begin{aligned} F_m &= F_c m_0 \gamma \frac{v_\perp^2}{R} \\ &= qBv_\perp, \\ B &= \frac{m_0 \gamma v_\perp}{qR}. \end{aligned}$$

Rychlosť  $v_\perp$  následne získáme z následující rovnice

$$\begin{aligned} E &= m_0 \gamma c^2 = \frac{m_0 c^2}{\left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ v_\perp &= c \sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2}}. \end{aligned}$$

Vztah pro rychlosť dosadíme do vztahu pro indukci magnetického pole a získáme

$$B = \frac{E}{qRc} \left(1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Po dosazení číselných hodnot získáme, že  $B \doteq 9,18 \text{ T}$ .

## Úloha 22 ... modifikovaná sluneční soustava

5 bodů

Představme si, že by Slunce mělo teplotu  $T_2 = 8\,000 \text{ K}$ . O kolik procent by se musela prodloužit perioda oběhu Jupitera, aby na něj dopadal stejný výkon, jako je tomu nyní? Dráhu Jupitera kolem Slunce můžete považovat za kruhovou. Dále předpokládejte, že ostatní parametry Slunce zůstanou zachovány.

*Danka se snažila vymyslet zajímavou úlohu.*

Výkon Slunce  $L$  můžeme určit ze Stefan-Boltzmannova zákona

$$L = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4,$$

kde  $R_S$  značí poloměr Slunce,  $\sigma$  je Stefan-Boltzmannova konstanta a  $T_S$  je teplota Slunce. Z tohoto výkonu dopadne na povrch Jupiteru výkon

$$P_J = \frac{L}{4\pi R_o^2} \pi R_J^2,$$

kde  $R_o$  je vzdálenost Slunce a Jupiteru a  $R_J$  je poloměr Jupiteru. Z toho, že dopadající výkon při původní a nové teplotě musí být rovny, dostaneme, jaká musí být nová vzdálenost Jupiteru od Slunce  $R_N$

$$\begin{aligned} \frac{4\pi R_S^2 \sigma T_2^4}{4\pi R_N^2} \pi R_J^2 &= \frac{4\pi R_S^2 \sigma T_1^4}{4\pi R_0^2} \pi R_J^2 \\ R_N &= \frac{T_2^2}{T_1^2} R_0, \end{aligned}$$

kde  $T_1$  je původní teplota Slunce a  $R_0$  je původní vzdálenost Jupiteru od Slunce. Původní teplotu Slunce bychom si mohli dohledat (sama o sobě není zadána v konstantovníku), ale v konstantovníku je zadán střední zářivý výkon Slunce  $L_\odot$ , z něhož můžeme  $T_S$  dopočítat podle vztahu výše

$$T_1 = \left( \frac{L_\odot}{4\pi R_S^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = 5772 \text{ K}.$$

Dále využijeme rovnost gravitační a odstředivé síly, která plyne z toho, že Jupiter obíhá kolem Slunce po kruhové trajektorii

$$G \frac{M_S M_J}{R_o^2} = \frac{4\pi^2}{t^2} R_o,$$

$M_S$  je hmotnost Slunce,  $M_J$  hmotnost Jupiteru a  $t$  je perioda oběhu Jupiteru, kterou můžeme z této rovnice vyjádřit

$$t = \sqrt{\frac{4\pi^2 R_o^3}{GM_S M_J}}.$$

Nyní zbývá pouze určit poměr původní a nové periody

$$\frac{t_N}{t_0} = \sqrt{\frac{R_N^3}{R_0^3}} = \frac{T_2^3}{T_1^3} = 2,66.$$

Perioda oběhu Jupiteru by se tedy musela prodloužit o 166 procent. První rovnost v rovnici výše je vlastně 3. Keplerův zákon, který jsme tímto postupem odvodili pro kruhovou trajektorii (byť jeho platnost je obecnější), tedy stačilo do něj dosadit.

### Úloha 23 ... harmonické tření

5 bodů

Jak je známo, nerovnosti dotýkajících se povrchů mezi nimi způsobují tření. Za velmi jednoduchý jednorozměrný model takového povrchu můžeme považovat graf harmonické funkce  $s$  periodou  $d = 20,0 \mu\text{m}$  a amplitudou  $h = 1,00 \mu\text{m}$ . Přiložíme-li dva takové stejné „povrchy“ k sobě, zaklesnou do sebe tak, že budou kopírovat stejnou křivku. Určete koeficient statického tření takového systému, tedy poměr  $F/F_n$  horizontální síly  $F$  působící na horní těleso, při které se systém dá do trvalého pohybu, a síly  $F_n$ , kterou tlačíme na horní těleso směrem dolů. Spodní těleso je pevně přichyceno a nepohybuje se. Modelové povrchy jsou dokonale hladké.

Kuba chtiel vymyslet jednoduchý model tření.

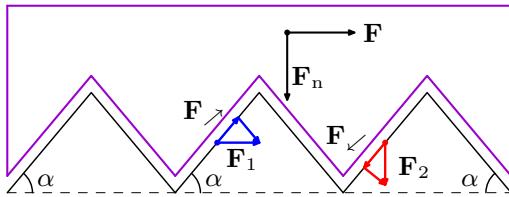
Najprv sa zamyslíme nad podobnou, avšak trošku jednoduchšou úlohou. Namiesto sínusoidy uvažujme zúbky, ktoré s vodorovnou osou zvierajú uhol  $\alpha$  (Obr. 2).

Ak na zúbky pôsobí horizontálna sila  $F$  a teleso sa nehýbe, výslednica síly  $F$  a sily, ktorou na ňu pôsobia zúbky, musí byť rovná nule. Zo symetrie zúbkov vyplýva, že každý zúbok pôsobí horizontálnou silou

$$F_1 = \frac{F}{N},$$

kde  $N$  je počet uvažovaných zúbkov. Keď sa teleso začne pohybovať, tak v limitnom prípade to bude v smere zúbku (Obr. 2). Priemet sily  $F_1$  do tohto smeru je

$$F_{\nearrow} = F_1 \cos \alpha = \frac{F}{N} \cos \alpha.$$



Obrázek 2: Dva zubkovité povrchy.

Proti tejto sile pôsobí normálová sila, ktorá pritláča teleso dolu. Ak na teleso pôsobí normálová sila  $F_n$ , tak na každý zúbok pôsobí sila  $F_2 = F_n/N$ . Priemet sily  $F_2$  do smeru spádu zúbku je

$$F_{\swarrow} = F_2 \sin \alpha = \frac{F_n}{N} \sin \alpha.$$

Povrchy medzi zúbkami považujeme za dokonalo hladké, preto v limitnom prípade dôjde k pohybu ak

$$\begin{aligned} F_{\nearrow} &= F_{\swarrow}, \\ \frac{F}{N} \cos \alpha &= \frac{F_n}{N} \sin \alpha, \end{aligned}$$

z čoho dostávame koeficient trenia

$$\mu = \frac{F}{F_n} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Teraz sa presuňeme k pôvodnej úlohe. Interakcia dvoch povrchov prebieha v mieste ich dotyku a je realizovaná cez vztyčnú plochu, ktorá je kolmá na obidva povrchy, a prechádza miestom dotyku. Menej formálne, ak chceme pracovať so silami, ktorými na seba vzájomne pôsobia dve telesá, tak si nakreslíme dotyčnicu v bode ich dotyku a ďalej už pracujeme so silami cez ňu. A to je presne to, čo sme riešili doteraz – tie zúbky z prvej časti vzorového riešenia sú vlastne dotyčnice v mieste dotyku. Najmenšia horizontálna sila, ktorou musí byť fahané teleso, aby sa začalo pohybovať; musí byť dostatočná, aby prekonala „trenie každého zúbka.“ Keďže koeficient trenia rastie s uhloprievidom  $\alpha$ , tak hľadáme na uvažovanej sínusoide „zúbok“ s najväčším uhloprievidom  $\alpha$ , inými slovami, hľadáme dotyčnicu s najväčšou smernicou.

Uvažujme sínusoidu zo zadania, pre ktorú platí

$$y = h \sin \left( 2\pi \frac{x}{d} \right), \quad (4)$$

kde  $y$  je vertikálna výchylka,  $x$  je horizontálna súradnica a  $d$  je podľa zadania vlnová dĺžka. Na určenie smernice dotyčnice pre rôzne hodnoty  $x$  zderivujeme rovnicu (4), čím dostaneme

$$\operatorname{tg}(\alpha(x)) = \frac{dy}{dx} = \frac{2\pi h}{d} \cos \left( 2\pi \frac{x}{d} \right).$$

Obor hodnôt funkcie kosínus je interval  $\langle -1, 1 \rangle$ , preto maximálna hodnota trenia bude pre  $\cos(2\pi x/d) = 1$ , čo nastáva napríklad pre  $x = 0$ . Koeficient trenia uvažovaných povrchov je potom

$$\mu = \frac{2\pi h}{d} \doteq 0,314.$$

**Úloha 24 ... napjaté kmitání**

5 bodů

Terka si hrála s deskovým kondenzátorem, který je složen ze dvou rovnoběžných kovových desek, které jsou od sebe vzdálené  $d = 10,0 \text{ cm}$  a mezi kterými je napětí  $U = 200 \text{ V}$ , když v tom jí do kondenzátoru spadla náušnice. Napjaté se podívala a všimla si zajímavého jevu, náušnice začala přeskakovat z jedné desky na druhou.

Jaká bude ustálená frekvence těchto kmitů? Každá z desek kondenzátoru má plochu  $S = 1,00 \text{ m}^2$ . Uvažujte, že náušnice je kulička s poloměrem  $a = 2,00 \text{ mm}$  a hmotností  $m = 0,15 \text{ g}$ . Nárazy náušnice do plochy kondenzátoru mají koeficient restituce  $\beta = 0,98$ . Při doteku s deskou se kulička nabije nábojem  $q = \pm 4,45 \cdot 10^{-11} \text{ C}$ . Vliv gravitační síly na zrychlení neuvažujte.

*Davidovi chybí měření v laboratoři.*

Energie, kterou kulička dostane při cestě z jedné desky na druhou, odpovídá

$$\Delta E_{\text{kin}} = U q = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2Uq}{m}}.$$

Odtud určíme  $v_0$  jako rychlosť odpovídající přírůstku energie. Tato představa nám pomůže s dalšími výpočty. Když kulička narazí na druhou desku, část kinetické energie se přemění na teplo. V rovnovážném stavu tedy platí

$$v_2 = \beta \sqrt{\frac{1/2mv_2^2 + \Delta E_{\text{kin}}}{1/2m}} = \beta \sqrt{v_2^2 + v_0^2},$$

kde  $v_2$  je rychlosť těsně po odrazu. Další úpravou pak dostaneme

$$\frac{v_2}{v_0} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Určeme nejprve čas  $\tau$ , za který se kulička dostane od jedné desky k druhé, tedy urazí vzdálenost  $d - 2a$

$$\frac{d - 2a}{\tau} = \bar{v} = \frac{v_2 + v_0/\beta}{2} \quad \Rightarrow \quad \tau = 2 \frac{d - 2a}{v_2 + v_0/\beta}.$$

Z toho určíme frekvenci  $f$  jako

$$f = \frac{1}{2\tau} = \frac{v_2 + v_0/\beta}{4(d - 2a)} = \frac{v_0}{4(d - 2a)} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \frac{\sqrt{2Uq/m}}{4(d - 2a)} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \doteq 0,282 \text{ Hz}.$$

**Úloha 25 ... bizarní jojo dobrodružství**

5 bodů

Jojo je tvořené dvěma válci o poloměru  $R$  spojenými malým válečkem o poloměru  $r$ . Poměr mezi  $R$  a  $r$  je  $q = 3,00$ . Všechny tři válce jsou stejně tlusté a homogenní ze stejného materiálu. Na malém válečku je navinuto nehmotné, nekonečně tenké lanko o délce  $L = 1,25 \text{ m}$ , na konci vinutí je lanko k válečku pevně upevněno. Když jojo pustíme a necháme volně odvijet, za jakou dobu  $\tau$  se vrátí do původní pozice? Uvažujte, že v moment vypouštění je tečna k volnému konci provázku svislá. Dále uvažujte, že  $r \ll L$  a že tedy můžeme zanedbat jevy v bodě obratu pohybu joja.

*Petr brainstormoval úlohy.*

Nejprve krátký komentář k rozebíranému pohybu. V první fázi jojo sjede dolů na konec lanka tak, že provázek bude stále viset tečně k joju. Poté si můžeme představit, že se jojo jako kyvadlo zhoupne okolo dolního konce o úhel  $\pi$  na druhou stranu provázku. Ve třetí fázi pohybu pak po druhé straně provázku vyjede až zpět nahoru. Vzhledem k tomu, že první a třetí fáze trvají stejně dlouho a že druhou fázi zanedbáváme, můžeme řešit jen čas  $\tau/2$  potřebný k sestupu dolů a celkový čas  $\tau$  získáme vynásobením dvěma.

Na jojo působí tíhová síla  $F = mg$  a napěťová síla od lanka  $-T$  (jako kladný směr působení sil si volíme ten ve směru dolů). Pro jojo tak můžeme napsat pohybovou rovnici

$$mg - T = ma,$$

kde  $a$  je zrychlení, se kterým se jojo bude pohybovat dolů. Na jojo však také působí nenulový celkový moment sil a dle druhé impulsové věty platí

$$M = \varepsilon J,$$

kde  $\varepsilon$  je úhlové zrychlení otáčení joja a  $J$  je jeho moment setrvačnosti. My si jako referenční bod pro momenty síly přirozeně zvolíme osu joja, díky čemuž můžeme psát  $M = Tr$ . Označíme-li si úhel, o který se jojo od začátku pohybu otočilo jako  $\varphi$ , zřejmě platí  $\varepsilon = \ddot{\varphi}$  a z druhé impulsové věty získáváme jednoduchou diferenciální rovnici, kterou jednoduše vyřešíme dvojím zintegrováním

$$\ddot{\varphi} = \frac{Tr}{J} \implies \varphi = \frac{Tr}{2J}t^2 + c_1 t + c_2.$$

Když si uvědomíme, že na počátku má jojo nulové pootočení a nulovou úhlovou rychlosť otáčení, koeficienty  $c_1, c_2$  vypadnou a platí jednoduše

$$\varphi = \frac{Tr}{2J}t^2.$$

Uvažme nyní, o jaké  $\varphi_{\max}$  se jojo pootočí, než doputuje na konec lanka  $L$ . Jednoduchou úvahou si můžeme odvodit, že to bude  $2\pi$  násobek poměru délky lanka  $L$  a obvodu menšího válečku, tedy

$$\varphi_{\max} = 2\pi \frac{L}{2\pi r} = \frac{L}{r}.$$

Pootočení  $\varphi_{\max}$  přitom jojo dosáhne, když dojede na konec lanka, tedy za dobu  $\tau/2$ . To nám dává rovnici

$$\frac{L}{r} = \frac{Tr}{8J}\tau^2.$$

Z ní si můžeme vyjádřit dosud neznámou napěťovou sílu  $T$

$$T = \frac{8JL}{r^2\tau^2},$$

a dosadit jí do pohybové rovnice

$$mg - \frac{8JL}{r^2\tau^2} = ma.$$

Protože se jojo pohybuje rovnoměrně zrychleným přímočarým pohybem, platí

$$\frac{1}{2}a\frac{\tau^2}{4} = L.$$

Z toho můžeme vyjádřit zrychlení  $a$  a také ho dosadit ho do pohybové rovnice. Tedy jsme eliminovali téměř všechny neznámé a máme rovnici

$$mg - \frac{8JL}{r^2\tau^2} = \frac{8mL}{\tau^2},$$

úpravou z ní dostáváme

$$\tau = 2\sqrt{\frac{2L}{g}}\sqrt{1 + \frac{J}{mr^2}}.$$

Nyní nám zbývá poslední krok a to je vyjádření momentu setrvačnosti  $J$ . Pro moment setrvačnosti  $j$  válce o poloměru  $r'$  a hmotnosti  $m'$  platí

$$j = \frac{1}{2}m'r'^2.$$

Naše jojo je slepenina tří válců. Nicméně, protože se válce otáčí okolo stejné osy, bude celkový moment setrvačnosti  $J$  dán jednoduchým součtem jednotlivých momentů setrvačnosti malého válečku  $J_r$  a velkých válců  $J_R$ . Označíme-li si hmotnost malého válečku jako  $\mu$  a hmotnost jednoho velkého válce jako  $M$ , platí

$$J = MR^2 + \frac{1}{2}\mu r^2.$$

Protože jsou válce homogenní a mají stejnou tloušťku, je poměr jejich hmotností roven poměru obsahů jejich podstavy. Máme tedy

$$\frac{M}{\mu} = \frac{R^2}{r^2} = q^2.$$

Zároveň platí  $2M + \mu = m$ . Využitím této a předchozí rovnice máme

$$M = \frac{q^2m}{2q^2 + 1},$$

$$\mu = \frac{m}{2q^2 + 1}.$$

Dosazením do vztahu pro  $J$  pak máme

$$J = \frac{1}{2} \left( \frac{2q^4 + 1}{2q^2 + 1} \right) mr^2.$$

A dozením do rovnice pro  $\tau$  dostáváme jako finální výsledek

$$\tau = 2\sqrt{\frac{2L}{g}}\sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{2q^4 + 1}{2q^2 + 1}} \doteq 2,32 \text{ s}.$$

### Komentář k zanedbání času k obratu joja

Podle zadání jsme v řešení zanedbali čas, který jojo potřebuje k tomu, aby se před svým výstupem zpět nahoru jako kyvadlo zhouplo okolo dolního konce provázku. Ukažme si, proč je zanedbání tohoto času (označme ho  $t'$ ) rozumný předpoklad.

Precizní analytický rozbor tohoto pohybu je nemožný, neboť se jedná o fyzické kyvadlo s velkou výchylkou – konkrétně s výchylkou  $\pi/2$ . Uděláme si tedy alespoň pro čas potřebný k zhoupnutí nějaký rozumný odhad. Označme si úhlovou rychlosť, kterou bude mít jojo na konci svého sestupu jako  $\omega$ . Označíme-li si průměrnou úhlovou rychlosť, kterou bude mít jojo při svém zhoupnutí jako  $\Omega$ , můžeme si celkem jednoduše rozmyslet, že platí

$$\Omega > \omega \implies t' = \frac{\pi}{\Omega} < \frac{\pi}{\omega}.$$

Vyjádříme-li si  $\omega = v/r$ , kde  $v = a\tau/2$  a  $a = 8L/\tau^2$ , dostáváme

$$t' < \frac{\pi\tau}{4} \frac{r}{L} \propto \frac{r}{L}.$$

Ze zadání máme  $r \ll L$ , tedy  $r/L$  je malé. Z horního odhadu dostáváme  $t' \ll \tau$  a tedy náš počáteční předpoklad byl správný.

### Úloha 26 ... padající čtverec

5 bodů

Velmi dlouhou vertikálně orientovanou tyčí o zanedbatelném průměru teče směrem vzhůru proud  $I = 1,7\text{ A}$ . Symetricky kolem tyče umístíme tenký vodivý čtverec o straně  $a = 15\text{ cm}$  a délkovém odporu  $\lambda = 230\text{ m}\Omega\cdot\text{m}^{-1}$  a hmotnosti  $12\text{ g}$  a pustíme ho. Jaké rychlosti dosáhne čtverec po čase  $7,5\text{ s}$ ?

*Jarda se snaží zařídit, aby mu přestaly padat věci.*

Proud procházející vertikální tyčí vytváří kolem sebe magnetické pole. Jeho siločáry jsou tečné k soustředným kružnicím, v jejichž středu je umístěna tyč a leží v rovině kolmé na ni. Velikost magnetické indukce pole ve vzdálenosti  $r$  od tyče je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

kde  $\mu_0$  je permeabilita vakua (prostředí) a  $I$  je proud v tyči. Když čtverec padá tímto polem, tak se pohybuje v daném magnetickém poli. Ze zákona elektromagnetické indukce se po jeho délce indukuje napětí

$$U = \oint B_\perp v \, dl,$$

kde  $B_\perp$  je složka magnetického pole kolmá v daném místě na kousek strany čtverce o délce  $dl$  a  $v$  je rychlosť čtverce vůči tyči. V rovnici vystupuje kříkový integrál po celé délce obvodu čtverce.

Výsledek tohoto integrálu je ale nulový. Na jedné straně čtverce má kolmá složka vektoru magnetické indukce směr jak ven ze čtverce, tak dovnitř, a to vždy symetricky vůči středu dané strany. Jednotlivé příspěvky se tedy vzájemně vyruší. Celkově se žádné napětí na čtverci neindukuje a celá situace je stejná, jako kdyby v tyči žádný proud netekl.

Čtverec tak padá s konstantním tíhovým zrychlením  $g$ . Jeho rychlosť po čase  $t = 7,5\text{s}$  tak je

$$v_t = gt \doteq 74 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Jiný přístup by uvažoval změnu toku magnetického pole uvnitř čtverce. Protože směr magnetického pole je vždy v rovině čtverce, je tok pole čtvercem nulový, a tedy i jeho časová derivace je nulová. Na čtverci se tedy neindukuje žádné napětí a magnetické pole na jeho pohyb tedy nemá vliv.

### Úloha 27 ... ion thrust engine

4 body

V současné době se pracuje s konceptem vesmírného motoru, který urychluje raketu vystřelováním plazmy urychlené na relativistické rychlosti. Uvažujme, že máme raketu o celkové hmotnosti  $100\text{ t}$ , kterou urychlujeme vystřelováním protonů. Každý proton má celkovou energii  $1\text{ TeV}$  a z rakety vyletuje  $1,0 \cdot 10^{-3}$  mol protonů za sekundu. Za jak dlouho takto urychlíme raketu na rychlosť  $100\text{ km/s}$ ? Předpokládejte, že je hmotnost rakety po celou dobu urychlování přibližně konstantní.

*Jirka poslouchal zajímavý podcast.*

Označme  $\nu = nN_A$  počet vyletujících protonů za sekundu, kde  $n = 10^{-3}$  mol  $\cdot$  s $^{-1}$  a  $N_A$  je Avogadrova konstanta. Za dobu  $\Delta t$  potom z rakety vyletí urychlené protony o celkové hybnosti

$$\Delta p = p_1 \nu \Delta t,$$

kde  $p_1$  je hybnost jednoho protonu, kterou spočítáme z relativistického vzorce

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \nu p_1.$$

Hybnost jednoho protonu  $p_1$  spočítáme z relativistického vzorce

$$E^2 = E_0^2 + p_1^2 c^2$$

kde  $E_0 = 938\text{ MeV}$  je klidová energie potonu. Vidíme, že je mnohem menší než celková energie protonu  $1\text{ TeV}$ . Proto ji můžeme zanedbat a vyjádřit hybnost jako

$$p_1 = \frac{E}{c}.$$

Dodejme, že při výpočtu hybnosti budeme muset převádět jednotky. To lze udělat snadno pomocí převodního vztahu

$$1\text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J},$$

který vychází z velikosti elementárního náboje  $e$ . Zbyvá vyjádřit dobu zrychlování. Na raketu působí konstantní síla a podle zadání máme zanedbat změny hmotnosti rakety (z doby zrychlování uvidíme, že je to rozumný předpoklad), tedy máme konstantní zrychlení. Doba zrychlování proto je

$$t = \frac{v}{a} = \frac{mv}{F},$$

kde  $m = 100\text{ t}$  je hmotnost rakety. Po dosazení přechozích mezivýsledků máme

$$t = \frac{mv}{nN_A E} \doteq 3,1 \cdot 10^4 \text{ s} \doteq 8,6 \text{ h}.$$

**Úloha 28 ... akční scéna s motorkou a kamionem**

5 bodů

Kvádr o hmotnosti  $M = 123\text{ kg}$  jede bez tření stálou rychlostí  $v = 7,35\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  po vodorovné podložce. Na kvádru je válec o hmotnosti  $m = 11,0\text{ kg}$ , který se kutálí rychlostí  $u = 2,23\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  vůči kvádru ve směru pohybu kvádru. Z kvádru tedy po chvíli spadne a začne se také pohybovat po rovině, přičemž uvažujte, že rychlosť ve svislém směru se při dopadu absorbuje. Za jak dlouho po dopadu se válec s kvádem srazí? Uvažujte, že jejich vzájemná vzdálenost v okamžiku dopadu byla zanedbatelná. Koeficient smykového tření mezi válcem a rovinou je  $f = 0,278$ .

Vašek už začíná navrhovat úlohy.

Při dopadu válce na rovinu je rychlosť těžiště  $u + v$ , ale rychlosť bodů na obvodu pouze  $u$ , takže se začne po povrchu smýkat. Tření válec sice začne roztáčet na vyšší úhlovou rychlosť, ale těžiště se začne zpomalovat. Při správné volbě hodnot by tak mělo být možné, aby se nakonec válec pohyboval pomaleji než  $v$ , takže ho kvádr dojede.

Protože obvodová rychlosť bodů na okraji válce vůči jeho středu není stejná jako rychlosť těžiště vůči podložce, působí mezi válcem a podložkou třecí síla o velikosti

$$F = mgf,$$

kde  $m$  je hmotnosť válce,  $g$  těžové zrychlení a  $f$  koeficient tření. Tato síla zpomaluje těžiště válce, takže pro jeho rychlosť platí

$$v_v = u + v - at = u + v - gft,$$

kde  $a = F/m$  je zrychlení, se kterým válec zpomaluje. Zároveň ale tato síla působí momentem síly a roztáčí válec na vyšší úhlovou rychlosť. Platí

$$M = Fr = J\varepsilon,$$

kde  $M$  je moment síly,  $r$  je poloměr válce a tedy i rameno síly,  $J = mr^2/2$  je moment setrváčnosti válce vzhledem k rotační ose a  $\varepsilon$  je úhlové zrychlení, se kterým se válec roztáčí. Pro úhlovou rychlosť platí

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Jakmile se válec roztočí na takovou úhlovou rychlosť, že jeho obvodové body budou rotovat stejnou rychlosťí, s jakou se pohybuje střed válce, tak třecí síla přestane působit a válec bude pokračovat v rovnomořném přímočarém pohybu. Najdeme tedy čas, ve kterém se to stane. Tehdy platí

$$wr = \omega_0 r + \varepsilon tr = u + v - gft \Rightarrow \tau = \frac{v}{3gf} \doteq 0,898\text{ s},$$

kde jsme využili  $\omega_0 r = u$  a předchozích vztahů.

Aby kvádr válec vůbec dohonil, musí být konečná rychlosť válce nižší než rychlosť kvádru, tedy

$$v > u + v - gft = u + \frac{2v}{3} \Rightarrow v > 3u.$$

Dosazením hodnot ze zadání si ověříme, že opravdu toto platí a že ke srážce dojde.

Nyní určíme polohu válce i kvádru vůči zemi v závislosti na čase, kdy válec z kvádru spadnul. Označme souřadnici tohoto místa jako  $x = 0$ . Pak pro polohu kvádru platí

$$x_k = vt.$$

S polohou válce je to složitější, protože prvně se pohybuje rovnoměrně zpomaleně, a teprve poté s konstantní rychlostí. Při zpomalování urazí vzdálenost

$$x_{v1} = (v + u) \tau - \frac{1}{2} g f \tau^2 = \frac{v(6u + 5v)}{18gf},$$

a dál je tedy jeho poloha dána jako

$$x_v = x_{v1} + (u + v - gf\tau)(t - \tau).$$

Nyní už nám zbývá najít jenom čas  $t_s$ , ve kterém je souřadnice obou objektů stejná, takže hledáme řešení rovnice

$$\begin{aligned} x_k &= x_v, \\ vt_s &= x_{v1} + (u + v - gf\tau)(t_s - \tau), \\ t_s &= \frac{x_{v1} - \tau(u + v - gf\tau)}{gf\tau - u}, \\ t_s &= \frac{\frac{v(6u + 5v)}{18gf} - \frac{v}{3gf}(u + \frac{2v}{3})}{\frac{v}{3} - u}, \\ t_s &= \frac{v^2}{18gf} \frac{1}{\frac{v}{3} - u} \doteq 5,00 \text{ s}. \end{aligned}$$

### Úloha 29 ... zatáčka na vodě

6 bodů

Uvažujme lodku o hmotnosti  $m = 900 \text{ kg}$  tvaru kvádru, která má délku  $a = 4,0 \text{ m}$ , šířku  $b = 1,2 \text{ m}$  a výšku  $c = 80 \text{ cm}$ . Lodka je poháněna lodním šroubem, který má při plném výkonu moment hybnosti o  $L = 400 \text{ J}\cdot\text{s}$ , který míří směrem k přídi. Na vodní hladině lodka zatačí úhlovou rychlosť  $10^\circ\cdot\text{s}^{-1}$  doprava. Jaký úhel při tomto manévrnu svírá hladina s palubou? Pokud je příď výše než zád, uvedte kladnou hodnotu. Těžiště lodi je v jejím geometrickém středu.

*Jarda by chtěl lézt na velblouda.*

Moment hybnosti lodního šroubu díky pevnému uchycení v konstrukci lodi míří vždy od zádi k přídi ve vodorovné rovině. Když loď zatačí, nemusí se sice měnit velikost tohoto momentu hybnosti, ale mění se jeho směr v inerciální vztažné soustavě. Abychom měnili moment hybnosti v inerciální vztažné soustavě, musíme působit vnějším momentem sil podle vztahu

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

Použijme analogii se změnou vektoru rychlosti v při rovnoměrném pohybu hmotného bodu po kružnici. Zde pro zrychlení  $\mathbf{a}$  platí

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (5)$$

kde  $\omega$  je vektor úhlové rychlosti. V inerciální vztažné soustavě vektor  $\mathbf{v}$  rotuje okolo rotační osy, v rotující vztažné soustavě ovšem zůstává v klidu. Dostředivé zrychlení  $\mathbf{a}$  musí být zprostředkováno nějakou vnější vazbou. Podobně, vektor momentu hybnosti se v rotující vztažné soustavě spojené s lodkou nemění. Moment síly  $\mathbf{M}$  je tudíž analogem zrychlení  $\mathbf{a}$  z rovnice (5) a moment hybnosti  $\mathbf{L}$  lodního šroubu je analogem rychlosti  $\mathbf{v}$ . Zavedením vektoru rychlosti zatáčení lodky  $\boldsymbol{\Omega}$  můžeme zapsat změnu momentu hybnosti jako

$$\mathbf{M}_s = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}.$$

Protože vektor  $\boldsymbol{\Omega}$  působí kolmo k hladině a vektor  $\mathbf{L}$  od zádi k přídi, vektor momentu sil  $\mathbf{M}_s$  má směr kolmo k boku lodi, čímž ji na hladině nakládí. Jeho směr můžeme určit pravidlem Žukovského: Je-li setrvačník (v našem případě lodní šroub) nucen vykonávat precesní pohyb, pak vzniká gyrokopický moment, který se snaží nejkratší cestou otočit osu rotace setrvačníku do směru osy vnuzeného pohybu.<sup>1</sup> Při zatáčení doprava míří vektor úhlové rychlosti pod hladinu. Když moment hybnosti míří k přídi, tak pro jeho otočení směrem pod hladinu se musí více potopit příd lodi. Při zatáčení tak bude zád lodi výše než její příd, znaménko úhlu tedy bude podle zadání záporné. Musíme ještě najít jeho hodnotu.

Gyrokopický moment nakládající příd lodi do vody bude vyrovnan reakčním momentem. Nyní tedy musíme zjistit, jaký moment sil vyvolá naklopení lodky o úhel  $\alpha$ . Uvažujme, že tento úhel je malý, a proto pracujme v approximaci  $\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha$ . Jeho velikost je dána těžištěm ponořené části a její velikostí. V nenaklopeném stavu je hloubka ponoru lodky  $h$  (vzdálenost dna lodky od hladiny vody o hustotě  $\rho$ )

$$V\rho g = mg \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{ab} = \frac{m}{\rho ab},$$

a působiště této síly se nachází uprostřed ponořené části, tedy ve vzdálenosti  $h/2$  nad dnem. Lodka se otáčí kolem bodu, který leží na její ose symetrie, ale zároveň je na hladině vody. Velikost ponořené části lodky se nemení, protože pořád působí stejná velikost sil, ale mění se jejich rozložení, které vytváří moment sil. Moment síly od těhové síly je

$$M_g = F_g \left( \frac{c}{2} - \frac{h}{2} \right) \alpha,$$

kde jsme vyjádřili vzdálenost těžiště lodky od místa otáčení.

Zároveň je na jedné straně potopená větší část lodky, konkrétně se jedná o pravoúhlý trojúhelník o odvěsnách  $a/2$  a  $(a/2) \tan \alpha$ . Protože očekáváme pouze malé naklopení, tak je průměr jeho těžiště do vodorovného směru ve vzdálenosti

$$p_1 = \frac{2}{3} \frac{a}{2}$$

od osy otáčení a velikost síly

$$F_1 = \frac{1}{2} \frac{a}{2} \frac{a}{2} \alpha b \rho g,$$

což vytváří moment síly

$$M_1 = F_1 p_1 = \alpha b \rho g \frac{a^3}{24}.$$

---

<sup>1</sup>Pravidlo převzato z <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/setrv.pdf>.

Stejným momentem síly působí i vynořená trojúhelníková část, protože tam zase vztaková síla chybí. V celkovém momentu proto budeme počítat s  $2M_1$ . Pro lepší představu výpočtu celé situace odkazujeme čtenáře na text k Fyzikální olympiádě, dostupný na adrese <http://fyzikalniolympia.cz/texty/kapaliny.pdf>.

Výsledný moment sil tak je

$$\begin{aligned} M &= 2M_1 - M_g = \alpha b\rho g \frac{a^3}{12} - mg \left( \frac{c}{2} - \frac{h}{2} \right) \alpha = \\ &= \frac{g}{2} \left( \frac{1}{6} a^3 b\rho - mc + \frac{m^2}{\rho ab} \right) \alpha. \end{aligned}$$

Tento moment sil nyní můžeme porovnat s momentem sil, který je zapotřebí pro změnu směru momentu hybnosti lodního šroubu, a dostaváme hledaný úhel

$$|\mathbf{M}_s| = M \Rightarrow \alpha = \frac{2\Omega L}{g \left( \frac{1}{6} a^3 b\rho - mc + \frac{m^2}{\rho ab} \right)} \doteq 0,067^\circ.$$

Jako výsledek musíme dle směru jednotlivých vektorů uvést zápornou hodnotu, tedy  $\alpha = -0,067^\circ$ .

Jako zajímavost můžeme zmínit, že stejný fyzikální jev stál za pověstnou obratností stíhacích letounů Sopwith Camel z první světové války. Rotační motor nesl velký moment hybnosti. Při pravotočivé zatáčce se nos letadla stlačil dolů, čímž letadlo nabralo rychlosť a urychlilo zatáčení. Naopak při levotočivé zatáčce se nos naklopil nahoru a zatáčení doleva bylo pomalé. Zkušení piloti toho dokázali využít v soubojích.

### Úloha 30 ... let za Sluncem

5 bodů

Je 6.10 ráno, Danka sedí v letadle a právě vzlétá z pražského letiště přímo na východ. Letadlo stoupá pod úhlem  $30^\circ$  rychlostí  $300 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Východ Slunce v Praze v ten den má nastat v 6.38, ale Danka ho z letadla uvidí dříve. Po kolika minutách po vzlétnutí uvidí Danka východ Slunce? Pro potřeby této úlohy byla Praha přesunuta na rovník a Danka letěla v den rovnodennosti. Předpokládejte, že Země je dokonale kulatá, den má 24 hodin a zanedbejte otáčení Země okolo Slunce.

*Danka už několikrát zažila dřívější východ Slunce díky létání.*

Celý problém si převedeme do řeči analytické geometrie. Představme si kartézské osy x a y tak, že jejich průsečík (bod  $[0, 0]$ ) je ve středu Země. Země je v tento moment tedy kružnice s poloměrem  $R$  popsána rovnicí:

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

zároveň si osy natočíme tak, aby Praha byla přesně na ose y, tedy souřadnice Prahy v čase  $t_0$  (6:10 ráno) jsou  $P[0, R]$ .

Nyní si popíšeme paprsek Slunce, který představuje svítání. Tento paprsek je vlastně jen tečnou k Zemi, která vede právě tím bodem, kde na povrchu začíná svítat. Tečnu ke kružnici bodem  $T[x_0, y_0]$  můžeme analyticky popsat jako ( $V[m, n]$  je střed kružnice):

$$(x - m)(x_0 - m) + (y - n)(y_0 - n) = R^2,$$

pro nás tedy bude pouze:

$$(x)(x_0) + (y)(y_0) = R^2.$$

Naše  $x_0$  a  $y_0$  budou v každý čas místa, kde na Zemi právě svítá. Tato místa na kružnici se dají jednoduše popsat pomocí úhlu od osy  $y$ . Víme, že v 6:38 bude toto místo právě v bodě  $P[0, R]$ , proto nyní bude na místě vzdáleném o úhel, který odpovídá 28 minutám pohybu Slunce ( $\Delta t = t_P - t_0$ , kde  $t_P$  je čas kdy svítá v Praze a  $t_0$  je aktuální čas). To se pohybuje rychlostí:

$$\omega = \frac{2\pi}{24} \text{ rad} \cdot \text{hod}^{-1},$$

úhel mezi místem kde aktuálně svítá a Prahou je tedy:

$$\varphi = \Delta t \cdot \omega = \frac{28}{60} \cdot \frac{2\pi}{24}.$$

Toto místo samozřejmě leží na kružnici a jeho kartézské souřadnice potom lze snadno vyjádřit z pravoúhlého trojúhelníku jako:

$$x_{01} = R \sin(\varphi),$$

$$y_{01} = R \cos(\varphi).$$

Úhel mezi Prahou a místem, kde svítá se vsak bude časem zmenšovat, jak se bude Slunce pohybovat. Protože úhel se vždy zmenší o právě uhlovou rychlosť, dostaneme časovou závislost pro polohy obou bodů jako:

$$x_0 = R \sin(\varphi - \omega t),$$

$$y_0 = R \cos(\varphi - \omega t).$$

Nyní si ještě najdeme polohu letadla. Letadlo vylétá v čase  $t_0$  z bodu  $P[0, R]$ , rychlosť  $v = 300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  pod úhlem  $30^\circ$ . Z pravoúhlého trojúhelníku tedy můžeme jeho polohu v čase popsat jako:

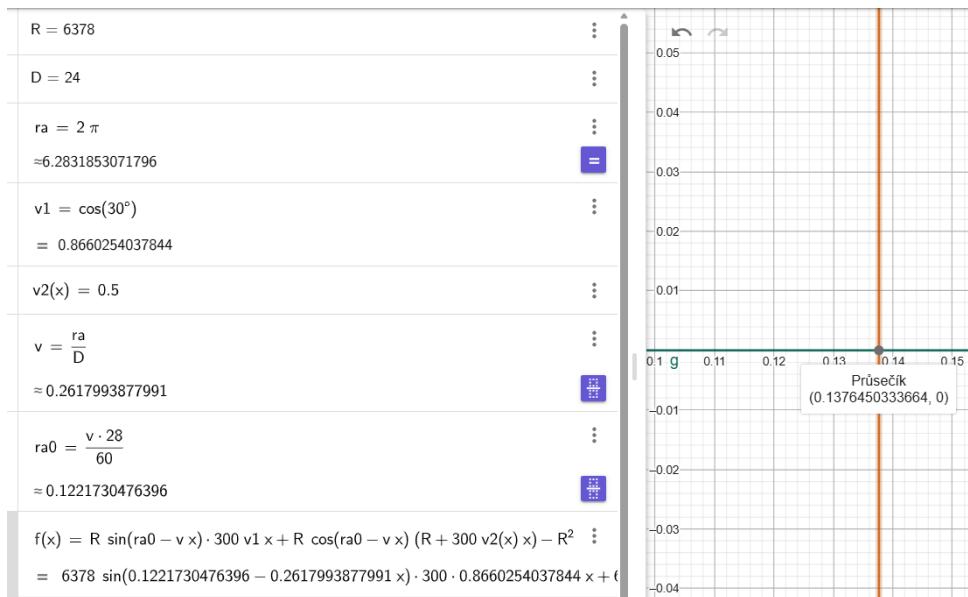
$$x = \cos(30^\circ)vt$$

$$y = R + \sin(30^\circ)vt.$$

Nyní stačí najít, kdy bude bod popisující letadlo, ležet na tečně, kterou tvoří paprsky svítání. To nastane tehdy, když bude letadlo ležet na přímce tečny, tedy když budou body  $x_0, y_0, x$  a  $y$  splňovat rovnici tečny. Dosazením všech našich časových vývojů dostaneme:

$$\begin{aligned} R^2 &= R \sin(\varphi - \omega t) (\cos(30^\circ)vt) + R \cos(\varphi - \omega t) (R + \sin(30^\circ)vt) = \\ &= R \sin(\Delta t \cdot \omega - \omega t) (\cos(30^\circ)vt) + R \cos(\Delta t \cdot \omega - \omega t) (R + \sin(30^\circ)vt). \end{aligned}$$

tuto rovnici bychom analyticky řešili jen těžko, proto ji můžeme řešit numericky. My jsme odečetli člen  $R^2$  a v programu Geogebra (obr. 3) jsme si řešení vykreslili jako funkci  $t$  a hledali průsečík s horizontální osou (rovněž můžeme vsak použít libovolný program na řešení rovnic). Jediný, který měl fyzikální význam (nebyl záporný a jeho hodnota byla menší než  $\frac{28}{60}$ , protože to je čas, kdy bychom viděli východ Slunce v Praze) byl  $t \approx 0,1376 \text{ h} \doteq 8,3 \text{ min}$ . Danka tedy uvidí východ Slunce po přibližně 8 minutách letu, tedy v 6:18.

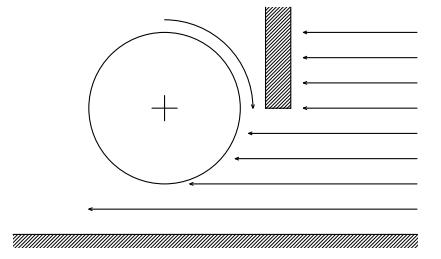


Obrázek 3: Numerické řešení rovnice z programu Geogebra

### Úloha 31 ... proud plynu

Uvažujte váleček o poloměru  $r = 3,00\text{ mm}$  a výšce  $h = 5,00\text{ mm}$ , který se může otáčet kolem své osy symetrie. Směrem k válečku pustíme plyn tak, že částice dopadají pouze na jednu polovinu válečku. Druhá polovina je zakrytá (rozhraní mezi polovinami je rovina, ve které leží osa symetrie válečku, viz. obrázek). Váleček se roztočí na frekvenci  $f = 65,0\text{ Hz}$ . Uvažujme, že z druhé strany na váleček nic nedopadá. Na jeho otáčení působí odporové síly s momentem  $M = 2,00 \cdot 10^{-9}\text{ N}\cdot\text{m}$  tak, že při nárazu změní pláště válečku v daném bodě a plyn proudí homogicky. Jaké látkové množství plynu dopadá na váleček objemovou koncentrací  $c = 2,00 \cdot 10^{-4}\text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$ .

5 bodů



Jarda ve volném čase rád ostřelyuje různé předměty plným.

Označme si rýchlosť častíc pred nárazom  $v$ . Ked častica zasiahne valček v kolmej vzdialosti  $x$  od osi, potom moment hybnosti, ktorý predá valčeku bude

$$\Delta L = mvx - 2\pi fmr^2,$$

kde  $m$  je hmotnosť molekúl. Prvý člen je v absolútnej hodnote moment hybnosti, ktorú mala molekula voči osi valčeka pred zrážkou, druhý člen je moment hybnosti po zrážke, a preto z ich

rozdielu dostaneme moment hybnosti predanej valčeku. Všimnime si, že pre niektoré molekuly môže byť  $\Delta L < 0$  (napríklad pre molekuly, ktoré trafia predok valčeku, a teda pre ktoré  $x = 0$  určite bude  $\Delta L < 0$ ), a v tom prípade molekuly valček len brzdia (čo dáva zmysel).

Ak je prúd molekúl homogénny v danom priereze, potom všetky  $d \in (0, r)$  sú rovnako pravdepodobné, čiže majú pravdepodobnosť hustotu  $1/r$ . Tým pádom priemerná molekula predá moment hybnosti

$$\Delta \bar{L} = \frac{1}{r} \int_0^r (mvx - 2\pi fmr^2) dx = \frac{1}{2} mvr - 2\pi fmr^2.$$

(Toto väzne nebolo treba integrovať, stačilo si uvedomiť, že druhý člen je konštantný a prvý člen bude mať "tažisko" v  $r/2$ .)

Zadanie sa nás pýta na to, kolko mолов molekúl za sekundu zasiahne valček. Označme si túto neznámu  $\dot{n}$ . Potom moment sily, ktorým molekuly pôsobia na valček spočítame ako moment hybnosti, ktorý mu predajú za jednotku času, čiže

$$M = \Delta \bar{L} N_A \dot{n} = (\frac{1}{2} vr - 2\pi fr^2) M_{Ar} \dot{n},$$

kde  $M_{Ar}$  je molárna hmotnosť argónu. Zároveň si tu môžeme uvedomiť, že frekvencia valčeka sa ustáli na takej hodnote, kedy sa tento moment sily bude rovnať momentu odporových síl zo zadania, čiže už vlastne máme rovnici pre  $\dot{n}$ .

Akurát v tej rovnici ešte vystupuje rýchlosť molekúl, ktorú zatiaľ nepoznáme. Tu sa musíme zamyslieť a z analógií s hmotnostným a objemovým prietokom si uvedomiť, že

$$\dot{n} = cvS,$$

kde  $c$  je objemová koncentrácia molekúl (tú máme zadanú) a  $S$  je prierez prúdu, čiže v našom prípade  $S = rh$ . Tým pádom  $v = \dot{n}/(crh)$ , dosadíme do rovnice a vyjadríme  $\dot{n}$

$$0 = \dot{n}^2 \frac{1}{2ch} - \dot{n} 2\pi fr^2 - \frac{M}{M_{Ar}}$$

$$\dot{n} = ch \left( 2\pi fr^2 \pm \sqrt{(2\pi fr^2)^2 + \frac{2M}{chM_{Ar}}} \right),$$

kde koreň s mínusom by bol záporný, a teda nedáva fyzikálny zmysel (molekuly by sa museli odraziť od valčeka rýchlosťou  $v$  priamo do trysky). Odpovedou teda je

$$\dot{n} = ch \left( 2\pi fr^2 + \sqrt{(2\pi fr^2)^2 + \frac{2M}{chM_{Ar}}} \right) \doteq 3,20 \cdot 10^{-7} \text{ mol}\cdot\text{s}^{-1},$$

### Úloha 32 ... zahŕňáme prací

5 bodů

Mějme píst se vzduchem (Poissonova konstanta  $\kappa = 1,4$ ) za normálních podmínek. Okolí má také normální podmínky a stěny pístu jsou tepelně vodivé. Chceme tento vzduch dostat do stavu, kdy má dvojnásobnou teplotu (v termodynamickém smyslu) a stejný objem jako nyní. Máme ohříváč, kterým umíme dodat vzduchu potřebné teplo, jeho energii si však chceme pošetřit na

horší časy. Z toho dôvodu chceme z niejaké časti dodat vzduchu energii prací. Konkrétně můžeme zvětšit objem pístu na dvojnásobek aktuálního objemu (a pak i zmáčknout zpět) a kdykoli během toho použít náš ohříváč. Jakou nejmenší energii musíme dodat ohříváčem? (Zadejte jako procento z hodnoty, kterou bychom museli dodat, pokud bychom nepracovali a pouze použili ohříváč.)

*Lego si vzpomněl na neúplné diferenciály v termodynamice.*

Najprv píest natiahneme na objem  $2V$ . Akú prácu pri tom vykonáme a koľko tepla dostaneme z okolia, závisí od rýchlosťi natahovania. Avšak na tom v tejto úlohe nezáleží, lebo riešime iba teplo z ohrievača, a to je v tomto kroku tak či onak nulové. Počkáme teda, pokým sa teplota vzduchu v píeste vyrovná s teplotou okolia, teda bude  $T$  – na to sme opäť nepoužili žiadne teplo z ohrievača.

Teraz už na rýchlosťi začne záležať: ak by sme vzduch stláčali izotermicky, vrátili by sme sa späť do pôvodného stavu, to sa nám avšak nevyplatí. Stlačíme ho teda nekonečne rýchlo (adiabaticky), aby počas toho nestratil žiadnu energiu tepelnou výmenou. Pri adiabatickom deji okrem iného platí  $TV^{\kappa-1} = \text{konst}$ , čiže po tomto stlačení bude teplota

$$T_1 V^{\kappa-1} = T(2V)^{\kappa-1} \Rightarrow T_1 = T 2^{\kappa-1}.$$

Dôsledkom toho musíme ohrievačom dodať ešte energiu rovnú rozdielu vnútornej energie plynu v tomto stave a pri teplote  $2T$ , čiže

$$Q_1 = c_V N (2T) - c_V N T 2^{\kappa-1} = (2 - 2^{\kappa-1}) c_V N T,$$

kde  $c_V$  je tepelná kapacita vzduchu pri konštantnom objeme (mohli by sme ju vyjadriť z Poissonovej konštanty  $\kappa$ ),  $N$  je počet molekúl v píste (čo si vieme vyjadriť z  $p_A, V, T$ ), avšak tie isté faktory vyskočia aj pre prípad, kedy nekonáme prácu, a teda sa vo výsledku vykrátia.

Čo ak by bolo výhodnejšie vzduch zahriat ešte v roztahnutom stave, a až potom ho rýchlo stlačiť? Teplotu, na ktorú je ho potrebné zahriať, aby po stlačení späť na  $V$  mal teplotu  $2T$ , označíme ako  $T_2$ . Potom táto teplota je

$$2TV^{\kappa-1} = T_2(2V)^{\kappa-1} \Rightarrow T_2 = T 2 / 2^{\kappa-1} = T 2^{2-\kappa}.$$

To znamená, že ohrievač musel zahriat vzduch energiou

$$Q_2 = c_V N T 2^{2-\kappa} - c_V N T = (2^{2-\kappa} - 1) c_V N T,$$

kde  $c_V$  a  $N$  (aj  $T$ ) sú rovnaké ako pri  $Q_1$ , stačí nám teda porovnať iba zátvorky. Môžeme jednoducho dosadiť  $\kappa$  zo zadania, ale veľmi odporúčame si zátvorky vykresliť v závislosti na  $\kappa$ , čo sa ukáže, že pre  $\kappa \in (1, 2)$  platí  $Q_2 < Q_1$ , pričom reálne  $\kappa \in (1, 5/3) \subset (1, 2)$ . Z toho vyplýva, že sa viac oplatí vzduch najprv zahriať, a až potom stlačiť späť.

Niekto by mohol namietať, že okrem týchto dvoch možností existuje nekonečne veľa ďalších, pri ktorých si ohrievanie rozdelíme na niekolko momentov ľubovoľne rozmiestnených počas stláčania. Malo by byť však intuitívne, že dve nami preskúmané možnosti sú extrémne prípady z nekonečného množstva možností a lokálny extrém by sa mal nachádzať v jednom z týchto extrémov tohto nekonečnedimenzionálneho intervalu. Dôvodom, prečo je najvhodnejšie konkrétnie zahriať plyn hneď naplno, je po fyzikálnej stránke pekne vidieť napríklad z toho, že tým zdvihнем tlak v píste, a tým pádom vykonáme viac práce pri následnom stláčaní. Celková energia, ktorú dodáme prácou počas stláčania, je energia, ktorú ušetríme ohrievaču. Akékoľvek

”oneskorenie ohrievania” len znižuje prácu, ktorú vykonáme pri stláčaní, a tým zvyšuje energiu, ktorú musí dodať ohrievač.

Minimálna energia, ktorú musíme dodať ohrievačom je teda  $Q_2$ . Odpoveď máme zadat ako percento, ktoré tvorí táto energia z tej, ktorú by sme museli dodať bez vykonania práce. V takom prípade by ohrievač musel dodať

$$Q_0 = c_V N(2T) - c_V NT = c_V NT,$$

čiže našou prácou sme potrebné teplo znížili na

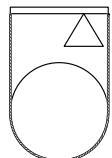
$$\frac{Q_2}{Q_0} = \frac{(2^{2-\kappa} - 1)c_V NT}{c_V NT} = (2^{2-\kappa} - 1) \doteq 52\%$$

základnej hodnoty.

### Úloha 33 ... kladky – páky

5 bodů

Máme kladku a páku spojenou nehmotným lanem ako na obrázku. Páku považujeme za úsečku dĺžky  $2r = 20\text{ cm}$  o hmotnosti  $m = 300\text{ g}$ . Páka je podeprená tak, že dĺžky jejich ramen jsou v pomere 3 : 1. Kladka má tvar disku o polomere  $r = 10\text{ cm}$  a hmotnosť  $M = 600\text{ g}$ . Páka i kladka jsou homogenní a lano po kladce neprokluzuje. Jaké je zrychlenie těžiště kladky v okamžiku vypuštění ze stavu, který je zakreslen na obrázku?



Lego si říkal, že tyto jednoduché stroje ještě nespojil.

Označme si napätie v lane na ľavej strane ako  $T_1$  a na pravej strane ako  $T_2$ . Vzhľadom na bod podoprenia, na páku pôsobí moment sily  $M_p = 3rT_1/2 - rT_2/2 + rm/2$ . Moment zotrvačnosti páky určíme zo Steinerovej vety

$$I_p = I_{p0} + I_{pS} = \frac{1}{12}m(2r)^2 + \left(m\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}mr^2.$$

Uhlové zrýchlenie páky potom bude

$$\varepsilon_p = \frac{M_p}{I_p} = \frac{\frac{3}{2}rT_1 - \frac{1}{2}rT_2 + \frac{1}{2}rmg}{\frac{7}{12}mr^2} = \frac{6}{7} \frac{3T_1 - T_2 + mg}{mr},$$

kde kladný smer sme si definovali ako ten, kedy ľavá strana páky klesá (čo je intuitívne očakávaný smer pohybu).

Moment sily pôsobiaci na kladku vzhľadom na jej stred bude  $M_k = r(T_2 - T_1)$  ( kladný smer je opäť ten, kedy ľavá strana páky klesá). Moment zotrvačnosti disku je  $I_k = Mr^2/2$ , potom jej uhlové zrýchlenie je

$$\varepsilon_k = \frac{M_k}{I_k} = \frac{r(T_2 - T_1)}{\frac{1}{2}Mr^2} = 2 \frac{T_2 - T_1}{Mr}.$$

Výsledná sila pôsobiaca na kladku je  $F_k = Mg - T_1 - T_2$  (kladný smer nadol), potom zrýchlenie jej tažiska bude

$$a_k = \frac{F_k}{M} = g - \frac{T_1 + T_2}{M}.$$

Získali sme všetky pohybové rovnice.

Presuňme sa ku geometrii danej úlohy. Predstavme si, že sa páka pootočí o uhol  $d\varphi_p$ . Potom sa na ľavej strane pohnie lano o  $3/2r d\varphi_p$  smerom nadol a na pravej strane o  $1/2r d\varphi_p$  smerom nahor. Ak si dostatočne pod kladku nakreslíme nejakú vodorovnú čiaru, tak po tomto pootočení pod ňou bude v súčte o  $r d\varphi_p$  lana viac. To si rozdelíme medzi obe strany kladky, a tým pádom tažisko kladky klesne o  $dx_k = 1/2r d\varphi_p$ .

Zároveň na pravej strane sa páka zdvihla o  $1/2r d\varphi_p$  a kladka klesla o  $1/2r d\varphi_p$ , čiže je medzi nimi teraz o  $r d\varphi_p$  viac lana než predtým. Kedže lano a kladka neprekľázajú, kladka sa musela odváliť po lane práve o túto dĺžku. To znamená, že sa musela otočiť o uhol

$$d\varphi_k = \frac{r d\varphi_p}{r} = d\varphi_p .$$

Tieto dva vzťahy sme odvodili pre posuny, ale keď ich 2 krát zderivujeme podľa času, dostaneme ekvivalentné vzťahy pre zrýchlenia

$$a_k = 1/2r \varepsilon_p$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_p .$$

Máme 5 rovníc (3 pohybové + 2 posledné), a 5 neznámych ( $\varepsilon_p, \varepsilon_k, a_k, T_1, T_2$ ), čo už sa dá zriešiť. Začneme s

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \varepsilon_p \\ 2 \frac{T_2 - T_1}{Mr} &= \frac{6}{7} \frac{3T_1 - T_2 + mg}{mr} \\ 7m(T_2 - T_1) &= 3M(3T_1 - T_2 + mg) \\ \frac{(7m + 3M)T_2 - 3Mmg}{9M + 7m} &= T_1 . \end{aligned}$$

Ďalej využijeme vzťah medzi  $a_k$  a  $\varepsilon_p$ , ale napäťko to má veľmi dlhý výraz, rovno využijeme vedomosť, že tieto uhlové zrýchlenia sa rovnajú a napíšeme

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} r \varepsilon_k \\ g - \frac{T_1 + T_2}{M} &= \frac{1}{2} r^2 \frac{T_2 - T_1}{Mr} \\ Mg - T_1 - T_2 &= T_2 - T_1 \\ \frac{Mg}{2} &= T_2 . \end{aligned}$$

Zostáva podosádať predošlé zistenia do pohybovej rovnice pre zrýchlenie

$$\begin{aligned} a_k &= g - \frac{T_1 + T_2}{M} = g - \frac{(7m + 3M)\frac{g}{2} - 3mg}{9M + 7m} - \frac{g}{2} = g \frac{9M + 7m - (7m + 3M) + 6m}{2(9M + 7m)} \\ a_k &= g \frac{6M + 6m}{2(9M + 7m)} = 3 \frac{M + m}{9M + 7m} g = 3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} . \end{aligned}$$

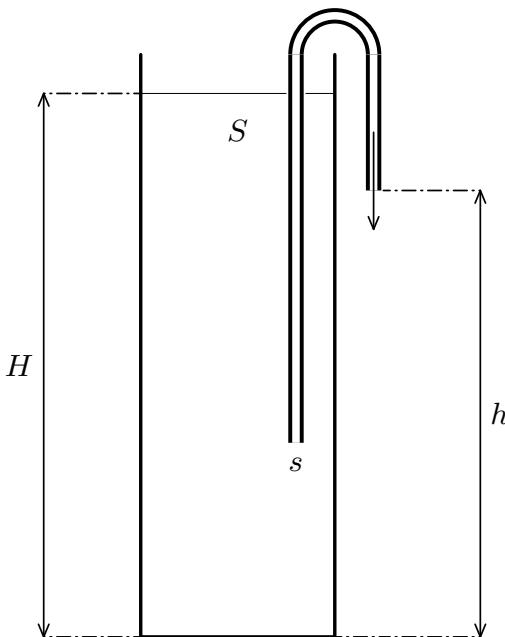
**Úloha 34 ... brčko**

6 bodů

Jarda si hrál se svým koktejlem. Vzal brčko a celé ho ponořil do koktejlu. Poté ucpal prstem jeho kratší konec a vytáhl ho mimo skleničku tak, aby koktejl nevytekl. Když jej pustil, koktejl začal těct z brčka všude po stole, navzdory nevěti všech okolo.

Spočtěte, jak dlouho bude tato kalamita trvat, pokud Jarda nezasáhne. Víme, že vodorovný průřez sklenice je  $S = 16 \text{ cm}^2$  a brčko má po celé své délce průřez  $s = 0,40 \text{ cm}^2$ . Na počátku je výška hladiny ve sklenici  $H = 8,0 \text{ cm}$  ode dna a brčko má ústí mimo sklenici ve výšce  $h = 5,0 \text{ cm}$  od dna sklenice.

Uvažujte, že koktejl je ideální nestlačitelná kapalina. Zanedbejte jakékoliv nežádoucí jevy, například pronikání bublinek nebo povrchové napětí. Brčko se při vytékání nehýbe.



*Jarda rozleje každé pití, které se pokusí vypít.*

Předtím, než se pustíme do řešení, udělejme následující úvahu. Koktejl bude z brčka vytékat pouze tehdy, když bude jeho hladina nad výchozím otvorem brčka. Kdyby tomu bylo jinak, tj. kdyby koktejl tekl i tehdy, když by byl pod výstupním otvorem brčka, tak by to bylo ekvivalentem tečení do kopce. To ale v reálném světě úplně nepozorujeme. Tudíž je tato úloha ekvivalentní úloze, kdy koktejl vytéká ze sklenice z otvoru ve výšce hladiny  $h$  nad dnem.

Takovou úlohu řešíme pomocí dvou zákonů. Pomocí rovnice kontinuity a pomocí Bernoulliovy rovnice. Když bude koktejl vytékat, tak výška hladiny bude klesat. Výšku hladiny popíšeme souřadnicí  $y > 0$ . Velikost rychlosti poklesu hladiny pojmenujme  $V$  a uvědomme si, že se musí jednat o funkci výšky hladiny, tedy  $V = V(y)$ . Rychlosť výtoku koktejlu u hrnka brčka

pojmenujeme jako  $v$  a opět si uvědomme, že  $v = v(y)$ . Tedy můžeme napsat rovnici kontinuity

$$sv = SV \quad \Rightarrow \quad v = \frac{S}{s}V. \quad (6)$$

Nyní napišme Bernoulliovu rovnici

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho hg + p = \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho yg + p. \quad (7)$$

Do vztahu (7) dosadíme (6) a zkrátíme  $p$ . Vyjádříme rychlost  $V$ . Po úpravách dostaneme

$$V(y) = \sqrt{\frac{2g(y-h)}{\left[\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1\right]}}.$$

Nyní si uvědomme, že rychlost  $V(y)$  popisuje časovou změnu výšky hladiny. Nicméně si nyní uvědomme, jak vypadá vektor rychlosti  $V$ . Ten můžeme v libovolných kartézských souřadnicích vyjádřit jako  $\vec{V} = (0, -V(y), 0)$ , kde záporné znaménko se bere z toho, že rychlosť vyjadřuje pokles. (Tím, že jsme uvažovali  $y > 0$  od hladiny a šipka rychlosti míří ke hladině je zjevné, že musí mít opačné znaménko.) Tedy máme, že  $V(y) = -\dot{y}$ , čímž dostáváme diferenciální rovnici

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{\frac{2g(y-h)}{\left[\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1\right]}}.$$

Nyní pohlédneme bystrým pohledem zralého matematika a uvidíme, že podělením  $\sqrt{y-h}$  dostaneme diferenciální rovnici se separovanými proměnnými. Tedy integrací dostaneme, že

$$\int_H^h \frac{1}{\sqrt{y-h}} dy = -\sqrt{\frac{2g}{\left[\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1\right]}} \int_0^{t_{\max}} dt.$$

Integrál na pravé straně je triviální. Vypočteme integrál na levé straně jako

$$\begin{aligned} \int_H^h \frac{1}{\sqrt{y-h}} dy &= \left| \begin{array}{l} u = y-h \\ u(H) = 0 \\ u(h) = H-h \end{array} \right| \frac{du}{dy} = \int_{u(H)}^{u(h)} u^{-\frac{1}{2}} du = \\ &= 2[\sqrt{u}]_{H-h}^0 = 2(0 - \sqrt{H-h}) = -2\sqrt{H-h}, \end{aligned}$$

čímž dostaneme

$$-2\sqrt{H-h} = -\sqrt{\frac{2g}{\left[\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1\right]}} t_{\max},$$

z čehož získáváme výsledek ve tvaru

$$t_{\max} = 2\sqrt{\frac{\left[\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1\right](H-h)}{2g}} \doteq 3,1 \text{ s}.$$

**Úloha 35 ... boj s větrným mlýnem**

6 bodů

Don Quijote poklidně jede na své věrné Rosinantě Manchou, když v tom spatří na obzoru čtyřrukého obra, jak na něj všemi čtyřmi hnátami výhružně mává. Ovšem my, kteří máme vsech pět pohromadě, jasně vidíme, že nejde o obra, ale o větrný mlýn. Ten má čtyři lopatky přičného průřezu tvaru obdélníku s obsahem  $S = 300 \text{ cm}^2$  a plochou  $P = 24 \text{ m}^2$ , které jsou umístěny na tuhých tyčích ve vzdálenosti  $d = 1,00 \text{ m}$  od osy otáčení mlýna a mají délku  $L = 6,00 \text{ m}$ . Jsou vyrobeny z homogenního materiálu s Youngovým modelem pružnosti  $E = 1,00 \text{ MPa}$  a každá z nich má hmotnost  $M = 170 \text{ kg}$ . „Obrovo“ výhružné mávání bylo způsobeno poryvem větru, který lopatky roztočil na úhlovou rychlosť  $\omega = 1,60 \text{ s}^{-1}$ . Na jakou délku  $L'$  se lopatky prodlouží? Předpokládejte, že se jedná o malé deformace a dochází k nim jen v radiálním směru; také předpokládejte, že šířka a tloušťka lopatky je malá v porovnání se vzdáleností od osy, tj. velikost odstředivé síly závisí pouze na kolmé vzdálenosti od konce lopatky. Vliv tihové síly na deformaci lopatky neuvažujte.

Petr vzpomínal na mechaniku.

Uvažme, jaká odstředivá síla  $f$  působí na „plátek“ lopatky o tloušťce  $dx'$ . Víme, že hmotnost  $dm$  takového plátku bude

$$dm = \rho S dx',$$

hustotu můžeme díky homogenitě spočítat jako

$$\rho = \frac{M}{LS}.$$

Uvážíme-li, že na takový element působí odstředivé zrychlení  $a = \omega^2 r$ , kde  $r$  je vzdálenost elementu od osy, platí

$$f = \frac{M\omega^2}{L} (d + x') dx',$$

kde jsme si zavedli souřadnice  $x'$ , kterou měříme od místa uchytení lopatky.

Protože se v naší situaci žádný kus lopatky neutrhne a neodlétne, musí být odstředivá síla kompenzována silou dostředivou o stejně velikosti. Ze zákona akce a reakce pak plyne, že na element  $dx'$  dostředivou silou působí stejná síla v opačném směru; iterací této úvahy dostáváme, že na libovolný element před elementem  $dx'$  je tímto plátkem působeno silovým příspěvkem  $-f$ . Celkovou „externí“ sílu na element  $dx$  pak tedy spočítáme jako integrál z příspěvků  $-f$  od všech elementů dále od osy (tedy v intervalu  $(x, L]$ )<sup>2</sup>:

$$F = \int_x^L \frac{M\omega^2}{L} (d + x') dx' = \frac{M\omega^2}{L} (L - x) \left( d + \frac{L + x}{2} \right).$$

Nyní aplikujeme Hookeův zákon

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{M\omega^2}{LES} (L - x) \left( d + \frac{L + x}{2} \right).$$

Celkové prodloužení  $\Delta L$  je rovno integrálu z  $\varepsilon$  přes celou délku lopatky. Dostáváme tedy

<sup>2</sup>Pro další účely budeme za kladný směr síly považovat směr od osy.

$$L' = L + \Delta L = L + \int_0^L \frac{M\omega^2}{LES} \left( Ld + \frac{L^2}{2} - xd - \frac{x^2}{2} \right) = L \left[ 1 + \frac{M\omega^2}{ES} \left( \frac{d}{2} + \frac{L}{3} \right) \right].$$

Dosazením zadaných hodnot máme

$$L' \doteq 6,22 \text{ m}.$$

### Úloha 36 ... vodivý kout

7 bodů

Povrch prvního oktantu kartézského systému souřadnic tvoří vodivý kout (skládá se tedy ze tří čtvrtrovin, každé orientované v jiném ze směrů  $x$ ,  $y$  a  $z$ ). Na polopřímce  $x = y = z > 0$  se pohybuje náboj  $q$ . Určete poměr náboje  $Q$  umístěného pevně do počátku souřadnicového systému ku náboji  $q$ , aby jím šlo vodivý kout nahradit tak, že silové působení na náboj  $q$  zůstane stejně. Indukované magnetické pole můžete zanedbat.

*Kuba byl za trest poslán do kouta.*

Nechť se náboj nachází v bodě  $\mathbf{r} = a(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) \equiv a\mathbf{e}$ , kde  $a > 0$ . Hledejme takové rozmístění nábojů v prostoru, které na vodivém koutu vytvoří nulový potenciál.

Využijeme skutečnosti, že na rovině symetrie dvou opačných nábojů je konstantní potenciál. Hledáme tedy takové rozmístění nábojů, které je invariantní vůči ozrcadlení (a změně znaménka) přes roviny  $xy$ ,  $yz$  a  $xz$ . Všechny náboje se budou nacházet na osách jednotlivých kvadrantů a ve stejné vzdálenosti od počátku. Snadno nahlédneme, že v kvadrantech II, IV a V bude náboj  $-q$ , v kvadrantech III, VI a VIII náboj  $+q$  a v kvadrantu VII náboj  $-q$ . Tím dostáváme (včetně původního náboje v kvadrantu I) čtyři kladné a čtyři záporné náboje ve vrcholech pomyslné krychle o délce hrany  $2a$ .

Snadno se lze přesvědčit, že takové rozložení má skutečně na vodivém koutě konstantní potenciál. Zároveň v prvním kvadrantu zůstal pouze nás původní náboj. Splnili jsme tak všechny požadavky na podobu hledaného řešení, a jelikož má příroda pro dané rozložení náboje vždy jediné řešení (představte si, co by se dělo, kdyby ne!), je toto řešení také jediným správným.

Každý z nábojů generuje Coulombické elektrické pole. Na původní náboj působí pouze pole od ostatních sedmi nábojů, které v jeho pozici čítá

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{im}}(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{4a^2} \mathbf{e} + \frac{1}{8a^2} \frac{\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8a^2} \frac{\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8a^2} \frac{\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{12a^2} \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{3}} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{12\sqrt{3}} \right) \frac{\mathbf{e}}{a^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qk}{a^2} \mathbf{e}, \end{aligned}$$

kde

$$k = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{12\sqrt{3}}.$$

Vidíme, že pole vytvořené fiktivními náboji je samo o sobě Coulombické. Ze symetrie úlohy je zřejmé, že jakékoli magnetické pole generované proměnlivým elektrickým polem musí mít na ose prvního kvadrantu směr  $\mathbf{e}$ , a tedy na pohyb náboje nemá vliv (neboť náboj se také

pohybuje výhradně ve směru  $\mathbf{e}$ ). Celkové silové působení tak lze simulovat umístěním náboje  $Q$  do vrcholu koutu. Chceme, aby platilo

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{3a^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qk}{a^2} \|\mathbf{e}\| \quad \Rightarrow \quad Q = 3\sqrt{3}qk \doteq -0,630q.$$

### Úloha 37 ... FTL

6 bodů

Mějme prázdnou nádobu tvaru zrotované funkce  $y = x^{-3}$  okolo osy  $x = 0$  v kladných hodnotách  $y$  v jednotkách metrů. Nádoba je zespodu uzavřena zrotovanou osou  $x$ . Do nádoby přítéká voda rychlostí  $Q = 2001 \cdot s^{-1}$ . Pokud bychom uvažovali, že voda okamžitě utvoří hladinu, za jak dlouho by se hladina zvyšovala nadsvětelnou rychlostí? Marek chtěl být bójkou.

Spočtěme objem vody  $V$  v nádobě, pokud je plná do výšky  $h$ . Protože je úloha rotačně symetrická, nejjednodušší bude objem získat integrací ve válcových souřadnicích. Pokud je hladina ve výšce  $y = h$ , musí být ze zadání poloměr nádoby v té výšce  $r = h^{-1/3}$ . Nakonec tedy pro souřadnice  $(r, \varphi, z)$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{z^{-1/3}} r \, dr \, dz \, d\varphi = 2\pi \int_0^h \int_0^{z^{-1/3}} r \, dr \, dz = 2\pi \int_0^h \frac{z^{-2/3}}{2} \, dz = 3\pi h^{1/3}.$$

To můžeme přepsat jako

$$h = \left( \frac{V}{3\pi} \right)^{3/2}.$$

Nyní zderivujme obě strany rovnice podle času, dostaneme

$$\frac{3V^2}{(3\pi)^3} \frac{dV}{dt} = \frac{dh}{dt}.$$

Jak se mění objem vody s časem známe – je to rychlosť  $Q$ . V moment, který nás zajímá, známe i rychlosť změny výšky hladiny, je to rychlosť světla  $c$ . Úpravou dostaneme

$$V^2 = \frac{9\pi^3 c}{Q},$$

$$V = 3\sqrt{\frac{\pi^3 c}{Q}}.$$

To je tedy objem vody v čase, kdy je rychlosť hladiny právě rovna rychlosti světla. Za jak dlouho to nastane? Přítok vody je konstantní a proto je hledaný čas  $t$

$$t = \frac{V}{Q} = 3\sqrt{\frac{\pi^3 c}{Q^3}} \approx 3,23 \cdot 10^6 \text{ s}.$$

**Úloha 38 ... rychlosť stínu**

6 bodů

Jarda hrála tenis na slunci, ktoré zrovna bolo  $32^\circ$  nad obzorem. Podával míček svému soupeři tak, že jej odpálil z výšky 70 cm pod úhlem  $38^\circ$  vzhľadom k zemi, pričomž míček dopadol na druhé strane kurtu vo vzdálenosti 25 m od Jardy. Jaké najvyššie rýchlosť dosáhl stín, ktorý míček vrhá na zem? Rovina letu míčku je v každém okamžiku natočená o  $23^\circ$  vzhľadom k svislej rovině, ve ktorej sa míček dopadají sluneční paprsky.

*Když Jardovi přestal fungovat forehand, vytáhl na soupeře fyziku.*

Nejprve ze zadanych hodnot dopočteme, jak závisely  $x$ -ová a  $y$ -ová souřadnice míčku na čase a jaká byla jeho původní rychlosť. Z rovnic pro šikmý vrh dostaváme

$$\begin{aligned}x &= v_0 \cos \alpha t, \\y &= h + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2,\end{aligned}$$

kde  $v_0$  je počáteční rychlosť míčku,  $\alpha$  je úhel odpalu vzhľadom k zemi a  $h$  je počáteční výška míčku. Z první rovnice vyjádříme  $t$ , dosadíme je do druhé a započítáme podmíinku, že pro  $y = 0$  m musela být horizontální vzdálenost míčku od Jardy  $x_{\max} = 25$  m, dostaneme tak pro  $v_0$

$$\begin{aligned}0 &= h + x_{\max} \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x_{\max}^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}, \\v_0^2 &= \frac{g x_{\max}^2}{2(h + x_{\max} \operatorname{tg} \alpha) \cos^2 \alpha}.\end{aligned}$$

Nyní uvážíme, jak se při daném pohybu míčku pohybuje po zemi jeho stín. V každém okamžiku dopadají na míček paprsky pod úhlem  $\beta = 32^\circ$ , stín míčku tak bude mít vzhľadom k zemi vždy úhel  $\beta$ . Oproti směru pohybu míčku však bude tento stín odkloněn o úhel  $\gamma = 23^\circ$ . Z těchto údajů můžeme dopočítat, že vzdálenost stínu míčku od bodu, který se nachází přímo pod ním, je

$$d = \frac{y}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Polohu stínu popisují dvě souřadnice. Osu  $x$  orientujeme ve směru letu míčku, vzdálenost stínu v této ose tedy je

$$x_s = x - d \cos \gamma.$$

Osu  $z$  orientujeme kolmo na osy  $x$  a  $y$  (kladný směr volíme tak, aby  $z$ -ová složka polohy byla kladná) a  $z$ -ová složka souřadnic stínu míčku je

$$z_s = d \sin \gamma.$$

Odtud dostaváme časovou závislost složek souřadnic stínu

$$\begin{aligned}x_s &= v_0 \cos \alpha t - \frac{h + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2}{\operatorname{tg} \beta} \cos \gamma, \\z_s &= \frac{h + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2}{\operatorname{tg} \beta} \sin \gamma,\end{aligned}$$

Dále obě rovnice derivujeme podle času pro určení složek rychlosti stínu

$$\begin{aligned}\frac{dx_s}{dt} &= v_0 \cos \alpha - \frac{\cos \gamma}{\operatorname{tg} \beta} (v_0 \sin \alpha - gt) , \\ \frac{dz_s}{dt} &= \frac{\sin \gamma}{\operatorname{tg} \beta} (v_0 \sin \alpha - gt) .\end{aligned}$$

Pro určení celkové rychlosti míčku obě rovnice umocníme na druhou a sečteme. Tím dostaneme kvadrát rychlosti míčku, který budeme maximalizovat

$$v^2 = \left( \frac{\sin \gamma}{\operatorname{tg} \beta} (v_0 \sin \alpha - gt) \right)^2 + \left( v_0 \cos \alpha - \frac{\cos \gamma}{\operatorname{tg} \beta} (v_0 \sin \alpha - gt) \right)^2 .$$

Kvadrát rychlosti derivujeme podle času a derivace pak položíme rovnou 0 pro nalezení maxima

$$0 = 2 \left( \frac{\sin \gamma}{\operatorname{tg} \beta} (v_0 \sin \alpha - gt) \right) \left( -\frac{\sin \gamma}{\operatorname{tg} \beta} g \right) + 2 \left( v_0 \cos \alpha - \frac{\cos \gamma}{\operatorname{tg} \beta} (v_0 \sin \alpha - gt) \right) \left( \frac{\cos \gamma}{\operatorname{tg} \beta} g \right) ,$$

odkud dostaneme

$$t_{\max} = \frac{v_0 (\sin \alpha - \operatorname{tg} \beta \cos \alpha \cos \gamma)}{g} .$$

Pro ověření, že jsme skutečně našli čas, při kterém bude rychlosť stínu maximální provedeme druhou derivaci předchozí rovnice podle času. Dostaneme

$$\frac{d^2 v^2}{dt^2} = 2 \frac{g^2}{\operatorname{tg}^2 \beta} (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) = 2 \frac{g^2}{\operatorname{tg}^2 \beta} ,$$

což je ale kvůli druhé mocnině určitě větší než nula, tedy jsme nenašli maximum, nýbrž minimum rychlosti. Odtud plyne, že maximální rychlosť bude stín míčku nabývat těsně před dopadem, nebo po odpalu.

Z rovnice pro závislost výšky míčku na čase si po dosazení  $y = 0$  m (situace při dopadu) vyjádříme čas dopadu  $t_d$

$$t_d = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g} .$$

Po dosazení zadaných hodnot do této rovnice a rovnice pro počáteční rychlosť  $v_0$  dostáváme hodnoty  $v_0 = 15,62 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $t_d = 2,03 \text{ s}$ . Nyní můžeme upravit rovnici pro rychlosť stínu dosazením  $t = 0 \text{ s}$  pro rychlosť při odpadlu  $v_1$  na

$$v_1 = v_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \beta} - 2 \frac{\cos \alpha \cos \gamma \sin \alpha}{\operatorname{tg} \beta}} = 6,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} ,$$

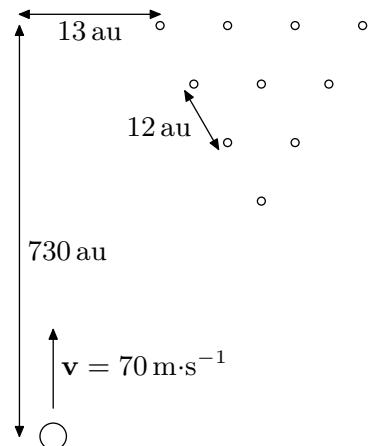
a dosazením  $t = t_d$  pro rychlosť stínu při dopadu  $v_2$

$$v_2 = \sqrt{\left( \frac{\sin \gamma}{\operatorname{tg} \beta} (v_0 \sin \alpha - gt_d) \right)^2 + \left( v_0 \cos \alpha - \frac{\cos \gamma}{\operatorname{tg} \beta} (v_0 \sin \alpha - gt_d) \right)^2} \doteq 28 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} .$$

Odtud vidíme, že  $v_2 > v_1$  a maximální rychlosť stínu tedy je  $28 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

### Úloha 39 ... nebeský bowling

Už je tomu nějakou dobu, co Bůh stvořil svět, a protože občas nemá co na práci, zahraje si bowling s planetami. Na Mléčnou dráhu rozmístí do klasického rovnostranného trojúhelníku deset malých planet tak, že vzájemná vzdálenost dvou vedlejších planet na okraji je 12 au. Bůh si vybral jako kouli hvězdu o velikosti našeho Slunce, kterou vrhl v rovině „kuželek“ ze vzdálenosti 730 au od zadní řady planet směrem k nim. Ačkoliv dal své kouli potřebnou rotaci, zapomněl, že ve vesmíru není tření. Hvězda se tak nestočila k planetám, nýbrž proletěla rovnoběžně s osou původního trojúhelníku ve vzdálenosti 13 au od jednoho z jeho rohů rychlostí  $70 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Přesto se však hvězda některých planetek dotkla. Kolik planetek takto Bůh „shodil“? Planety jsou tak malé, že je jejich vzájemné gravitační působení zanedbatelné. Také neuvažujte, že ovlivňují dráhu hvězdy.



Jarda by chtěl házet jako bůh.

Hvězda sice proletí kolem místa, kde byly planetky rozmištěné, vlivem vzájemné gravitační interakce se však planetky začnou pohybovat směrem ke hvězdě a je tedy možné, že do ní narazí. Toto se pak započítá jako dotek planetky a hvězdy. Protože planety jsou malé, zanedbáme jejich vzájemné gravitační působení, stejně jako ovlivnění dráhy hvězdy jejich přítomností, jak nás k tomu vede zadání.

Nalezneme tedy podmínu, kdy se planetka, která byla původně v klidu, srazí s hvězdou, která letí okolo. Kvůli tomu se ale přesuňme do inerciální soustavy, kde je v klidu hvězda a planetka má počáteční rychlosť  $-v$  a impaktní parametr  $b$  je určený postavením v trojúhelníku. I v tomto systému platí zákon zachování energie a zákon zachování momentu hybnosti.

Energie planetky vztažená na jeden její kilogram je

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{M_{\odot}G}{\sqrt{L^2 + b^2}},$$

kde  $M_{\odot}$  je hmotnost hvězdy a  $L$  je původní vzdálenost mezi planetkou a sluncem ve směru vrchu.

Moment hybnosti vztažený na jeden kilogram planetky je

$$l = bv.$$

Označme  $r$  nejmenší vzdálenost planetky od hvězdy a  $u$  její rychlosť v tomto bodě. Ze zákonů zachování platí

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{M_{\odot}G}{\sqrt{L^2 + b^2}} = \frac{1}{2}u^2 - \frac{M_{\odot}G}{r}$$

a

$$bv = ru,$$

neboť rychlosť a průvodič jsou v perihelu kolmé. Z těchto dvou rovnic vyjádříme  $r$  jako

$$r = \frac{-M_{\odot}G \pm \sqrt{M_{\odot}^2G^2 + b^2v^2 \left( v^2 - \frac{2M_{\odot}G}{\sqrt{L^2+b^2}} \right)}}{v^2 - \frac{2M_{\odot}G}{\sqrt{L^2+b^2}}}.$$

Pokud je tato vzdálenost menší než  $R$ , došlo ke srážce planetky a hvězdy. Nyní už jen dosadíme za vzdálenosti a zjistíme, kolik planetek se dotklo hvězdy. Protože

$$v^2 < \frac{2M_{\odot}G}{\sqrt{L^2+b^2}},$$

je výsledek vždy kladný (nezávisle na znaménku v rovnici). Z dosazování ale zjištujeme, že je potřeba vybrat kladný kořen, aby výsledek nebyl příliš velký.

Postupně musíme dosadit za různé hodnoty  $b$ . Pro kuželku nejbližše dráze hvězdy je to  $b_1 = 13$  au. Pro další je to  $b_2 = 13$  au + 6 au = 19 au, kde 6 au je polovina rozestupu mezi kuželkami v zadní řadě. Pak pro dvě kuželky je to  $b_3 = 25$  au, pro další dvě  $b_4 = 31$  au, pro dvě další  $b_5 = 37$  au, následuje jedna s  $b_6 = 43$  au a poslední s  $b_7 = 49$  au.

Podobně je tomu pro  $L$ . Zadní řada má  $L_1 = 730$  au a řady před ní o něco méně. Toto ale již zkusíme zanedbat, protože  $L \gg b$  platí pro všechny případy.

V závislosti na indexu u  $b$  tedy postupně dostáváme hodnoty  $p_i = r_i/R_{\odot}$  jako  $p_1 \doteq 0,10$ ,  $p_2 \doteq 0,21$ ,  $p_3 \doteq 0,37$ ,  $p_4 \doteq 0,57$  a  $p_5 \doteq 0,81$ . Jediné kuželky, které Bůh neshodil, jsou dvě nejvzdálenější od dráhy hvězdy s  $p_6 \doteq 1,1$  a  $p_7 \doteq 1,4$ . Počet „shozených“ planetek je tedy  $n = 8$ .

## Úloha 40 ... vytékající kapaliny

6 bodů

Máme válcovou nádobu s vnitřním průřezem podstavy  $S = 42,0 \text{ cm}^2$ . Na dně je nalitá voda do výšky  $h = 5,0 \text{ cm}$ , nadní je olivový olej s hustotou  $\rho_{\text{olej}} = 910 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  o stejně tloušťce vrstvy  $h$  a nad ním je ethanol s hustotou  $\rho_{\text{ethanol}} = 789 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  se stejnou tloušťkou vrstvy  $h$ . Pokud otevřeme v podstavě dírku o průřezu  $s = 4,2 \text{ mm}^2$ , za jak dlouho vytče voda s olejem a v nádobě zůstane pouze ethanol? Zanedbejte povrchové napětí a kohezi kapalin. Doporučujeme využít numerickou simulaci.

Karel varioval a komplikoval úlohy.

Rýchlosť výtoku vody vieme vypočítať podľa Bernoulliho rovnice, kde zanedbáme všetky členy okrem toho kinetického. Vieme si z tohto vzťahu určiť rýchlosť výtoku v závislosti od tlaku, ktorý na kvapalinu pôsobí ako

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot p}{\rho}}.$$

Tlak  $p$ , ktorý na kvapalinu pôsobí po vykrátení atmosférického tlaku vieme vypočítať ako

$$p = \sum \rho \cdot g \cdot h.$$

Vieme, že sa s časom bude meniť výška vrstiev kvapalín podľa vzťahu

$$\delta h = \frac{v \cdot s}{S} \cdot \delta t.$$

Vznikne nám teda sústava diferenciálnych rovníc, ktorú vieme vypočítať analyticky alebo pomocou numerickej simulácie. Ukážeme si obe riešenia. Odtekanie vrstiev si vieme rozdeliť na dva oddelené procesy a ich časy scítame.

Pre vytiekanie vody platí

$$\delta p = g \cdot h \cdot (\rho_{olej} + \rho_{etanol}) + g \cdot h(t) \cdot \rho_{voda} ;$$

pre vytiekanie oleja platí

$$\delta p = g \cdot h \cdot \rho_{etanol} + g \cdot h(t) \cdot \rho_{voda} .$$

Pri numerickej simulácii  $\delta p$  dosadíme do rovnice pre rýchlosť, ktorej výsledok následne dosadíme do rovnice pre zmenu výšky kvapalín a takto rekurentne sa zmena výšky opäť dosadí do rovnice s  $\delta p$ . Proces zastavíme, keď vytiečie celá vrstva a vypočítame časy pre vytiečenie vody a oleja, ktoré scítame.

Rozhodli sme sa numerickú simuláciu vytvorit v jazyku Python a mala nasledovný tvar:

```
import math

Ro_1 = 997
Ro_2 = 910
Ro_3 = 789
S = 0.0042
s = 0.00000042
h = 0.05
g = 9.81
dt = 0.0001
dh=0
t = 0

while dh<h:
    dp = g*h*(Ro_2+Ro_3)+g*Ro_1*(h-dh)
    v = math.sqrt(2*dp/Ro_1)
    dh = dh + v*s*dt/S
    t = t+dt

dh = 0

while dh<h:
    dp = g*h*Ro_3+g*Ro_2*(h-dh)
    v = math.sqrt(2*dp/Ro_2)
    dh = dh + v*s*dt/S
    t = t+dt

print(t)
```

Pre analytické riešenie vytiečenia vrstvy vody si pre jednoduchšie počítanie zadefinujeme konštanty

$$C_0 = g \cdot h \cdot (\rho_{ethanol} + \rho_{olej} + \rho_{voda}) ,$$

$$C_1 = g \cdot \rho_{voda} ,$$

ktoré použijeme na prepísanie vzťahu s  $\delta p$  do tvaru

$$\delta p = C_0 - C_1 \cdot \delta h(t) .$$

Diferenciálna rovnica je teda separovateľná a má tvar

$$\frac{dh}{dt} = K \cdot \sqrt{C_0 - C_1 \cdot h} ,$$

kde  $K = (s/S) \cdot \sqrt{2/\rho_{\text{voda}}}$ .

Vyriešením tejto rovnice pre  $\delta h(t)$  dostaneme rovnicu

$$\delta h(t) = \frac{C_0 - (\sqrt{C_0} - \frac{C_1 \cdot K}{2} \cdot t)^2}{C_1}.$$

Jej vyriešením dostaneme pre čas  $t$  finálny vzťah na vytiečenie vrstvy vody

$$t_1 = \frac{2}{C_1 \cdot K} \cdot (\sqrt{C_0} - \sqrt{C_0 - C_1 \cdot h}).$$

Miernou úpravou konštánt vieme vypočítať čas na vytiečenie vrstvy oleja a tieto dva časy sčítame

$$C_2 = g \cdot h \cdot (\rho_{\text{ethanol}} + \rho_{\text{olej}}),$$

$$C_3 = g \cdot \rho_{\text{olej}},$$

$$K_1 = \frac{s}{S} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho_{\text{olej}}}},$$

$$t_2 = \frac{2}{C_3 \cdot K_1} \cdot (\sqrt{C_2} - \sqrt{C_2 - C_3 \cdot h}),$$

$$t = t_1 + t_2 = 78s.$$

## Úloha 41 ... vzdalujúci se vesmír

7 bodů

Jak by mely býť vzdálené hviezdy a galaxie, ktoré by jinak vüči nám byly relativně v klidu, ale kvüli rozpínaniu vesmíru je pozorujeme s takovým červeným posunom, že vlnové délky záření jsou dvojnásobné oproti okamžiku, kdy byly vyzářeny? Ptáme se na „dnešní“ vzdáenosť a ne na vzdáenosť, ktorou mely v dobë vyslání signálu. Uvažujte, že vesmír je homogenní a izotropní, platí Einsteinovy rovnice a standardní  $\Lambda$ CDM kozmologický model, a vesmír se rozpíná v čase konstantnej Hubbleovou konstantou o hodnote  $H_0 = 68 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$ .

*Karel přemýšlel o vzdálené oblasti.*

V uvažovanom  $\Lambda$ CDM kozmologickom modeli platia Friedmanove rovnice, podla ktorých pre Hubblevu konštantu platí

$$H(t) = H_0 \sqrt{\Omega_{\text{r},0} a^{-4} + \Omega_{\text{m},0} a^{-3} + \Omega_{\text{k},0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0}}, \quad (8)$$

kde  $a \equiv a(t)$  je škálovací faktor popisujúci rozpínanie vesmíru a bezrozmerné veličiny  $\Omega_{\text{x},0}$  popisujú zastúpenie radiácie ( $\Omega_{\text{r},0}$ ), hmoty ( $\Omega_{\text{m},0}$ ), krivosti ( $\Omega_{\text{k},0}$ ), a temnej energie ( $\Omega_{\Lambda,0}$ ) v súčasnom vesmíre. Z predpokladu v čase konštantnej Hubblovej „konštanty“ vyplýva, že všetky členy, ktoré sa v čase menia musia byť nulové, preto musí byť uvažovaný kozmologický model vesmíru plochý ( $\Omega_{\text{k},0} = 0$ ) a obsahujúci len temnú energiu ( $\Omega_{\text{r},0} = 0, \Omega_{\text{m},0} = 0, \Omega_{\Lambda,0} = 1$ ).

### Riešenie cez škálovací faktor

Vplyvom rozpínania vesmíru sa zväčšujú fyzické vzdialenosť, čo vieme popísat pomocou škálovacieho parametra  $a(t)$  ako

$$d(t) = a(t)\chi, \quad (9)$$

kde  $d(t)$  je fyzická vzdialenosť od pozorovateľa a  $\chi$  je bezrozmerná konštantá, ktorá sa nazýva *comoving distance* a súvisí s fyzickou vzdialenosťou v čase  $t_0$ . Škálovací parameter v súčasnosti (čas  $t_0$ ) je podľa bežnej konvencie  $a(t_0) = 1\text{ m}$ . Vplyvom rozpínania vesmíru sa zväčšujú aj vlnové dĺžky, čo sa popisuje pomocou červeného posunu  $z$  (anglicky *redshift*), pre ktorý podľa jeho definície platí

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{2\lambda_e - \lambda_e}{\lambda_e} = 1,$$

kde  $\lambda_e$  je pôvodná vlnová dĺžka a  $\lambda_{\text{obs}} = 2\lambda_e$  je pozorovaná vlnová dĺžka. Vplyv rozpínania vesmíru na zmenu vlnovej dĺžky vieme odvodiť zo vzťahu (9)

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_e}{a(t_e)} &= \frac{\lambda_{\text{obs}}}{a(t_0)} \\ a(t_e) &= \frac{\lambda_e}{\lambda_{\text{obs}}} a(t_0) = \frac{a(t_0)}{1+z}. \end{aligned}$$

Časovú závislosť škálovacieho faktoru  $a(t)$  odvodíme z definície Hubblovej konštanty  $H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ , kde avšak budeme uvažovať podľa zadania  $H(t) = H_0$ , čím dostávame

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{\frac{da}{dt}}{a} \rightarrow \frac{da}{a} = H_0 dt \\ \int_{a(t_0)}^{a(t)} \frac{da}{a} &= H_0 \int_{t_0}^t dt \\ a(t) &= a(t_0) e^{H_0(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Podľa FLRW metriky, ktorá sa vzťahuje na nami uvažovaný kozmologický model vesmíru, pre *comoving distance* platí

$$\chi = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}, \quad (10)$$

z čoho po dosadení a úpravách

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{c}{a(t_0)} \int_{t_e}^{t_0} e^{-H_0(t-t_0)} dt = \frac{c}{a(t_0)H_0} (e^{-H_0(t_e-t_0)} - 1) \\ &= \frac{c}{a(t_0)H_0} \left( \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1 \right) = \frac{cz}{a(t_0)H_0}. \end{aligned}$$

Pre fyzickú vzdialenosť v súčasnosti napokon dostávame

$$d(t_0) = a(t_0)\chi = \frac{cz}{H_0} = \frac{c}{H_0} \doteq 4,4 \cdot 10^3 \text{ Mpc}.$$

*Riešenie cez červený posun*

Z rovnice (8) plynie pre plochý vesmír obsahujúci len temnú energiu  $H(z) = H_0$ . Integrál z rovnice (10) vieme ekvivalentne prepísat na

$$\chi = \frac{c}{a(t_0)} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} = \frac{c}{a(t_0)H_0} \int_0^z dz = \frac{cz}{a(t_0)H_0},$$

kedy dostávame totožný výsledok bez potreby počítania závislosti škálovacieho faktoru v čase.

**Úloha 42 ... svetlo pod vodou**

7 bodů

Mějme bodový zdroj nepolarizovaného světla zářícího do všech směrů. Zdroj je ponořený v hloubce  $h = 1,00\text{ m}$  pod (dostatečně rozlehrou) klidnou vodní plochou; dno pod ní je dokonale temné. Kolik procent zářivého výkonu se přenese nad hladinu? Index lomu vody je  $n_i = 1,33$ ; index lomu vzduchu je  $n_t = 1,00$ . Předpokládejte, že voda žádnou část světla neabsorbuje. Intenzitní koeficient transmise approximujte jeho hodnotou při kolmém dopadu všude, kde světlo projde.

Petr vzpomínal na optiku.

K řešení budeme potřebovat transmisní Fresnelovy koeficienty

$$t_{\parallel} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t},$$

$$t_{\perp} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t},$$

kde  $n$  je index lomu prostředí a  $\theta$  je úhel od kolmice na rozhraní, pod kterým se světlo šíří; dolní indexy vyjadřují, jestli jde o danou veličinu v prostředí, ze kterého světlo vychází ( $i$ ), nebo do kterého prochází ( $t$ ). Koeficienty budeme potřebovat i ve verzi pro intenzity

$$T_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} |t_{\parallel}|^2,$$

$$T_{\perp} = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} |t_{\perp}|^2.$$

Pro prošlou intenzitu pak platí

$$I_t = T_{\parallel} I_{\parallel} + T_{\perp} I_{\perp}.$$

Dopadá-li však světlo na rozmezí kolmo (tedy platí-li  $\theta_i = \theta_t = 0$ ), oba koeficienty nám splývají v jeden koeficient

$$T = \frac{4n_i n_t}{(n_i + n_t)^2}$$

a platí jednoduše

$$I_t = T I.$$

My tímto vztahem approximujeme prošlou intenzitu všude nad rozhraním, kde světlo projde. Ovšem, intenzita nebude v každém bodě pod rozhraním stejná – intenzita je světelný výkon

na jednotku plochy, a protože se nám výkon (energie) zachovává, platí pro intenzitu, respektive velikost Poyntingova vektoru<sup>3</sup>  $|\vec{S}|$  ve vzdálenosti  $r$  od zdroje

$$I = |\vec{S}| = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Ovšem fakt, že se jedná o velikost vektoru je podstatný – pokud se ptáme na energii prošlou rovinou, je potřeba uvážit pouze komponentu Poyntingova vektoru kolmou na rozhraní  $S_{\perp}$ . Pak platí

$$S_{\perp} = \frac{P}{4\pi r^2} \cos \vartheta,$$

kde  $\vartheta$  je úhel mezi Poyntingovým vektorem a normálou na něj.

Dáme-li všechny výsledky výše dohromady, můžeme pro diferenciál prošlého výkonu  $dP_t$  psát

$$dP_t = \frac{n_i n_t}{(n_i + n_t)^2} \frac{P}{\pi r^2} \cos \vartheta dS.$$

Popišme si hladinu polárními souřadnicemi s počátkem v průniku hladiny s osou procházející zdrojem. Pro vzdálenost od zdroje  $r$ , respektive pro kosinus úhlu mezi Poyntingovým vektorem a normálou k rovině  $\cos \vartheta$  pak platí

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2 + h^2}, \\ \cos \vartheta &= \frac{h}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}, \end{aligned}$$

kde  $\rho$  je vzdálenost od počátku. Kvůli přechodu do polárních souřadnic musíme také výsledek přenásobit jejich jakobiánem, který je roven  $\rho$ . Všimněme si také, že výsledek nezávisí na souřadnici  $\varphi$ , můžeme ho tedy rovnou částečně vyintegrovat přenásobením  $2\pi$ . Celkem po úpravě máme

$$dP_t(\rho) = \frac{2n_i n_t P}{(n_i + n_t)^2} \frac{\rho h}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} d\rho.$$

Nyní bychom prošlý výkon rádi integrovali. Uvědomíme si, že při nějakém maximálním  $\rho$ , které si označíme  $R$ , bude dosaženo mezního úhlu lomu a pro jakékoli  $\rho > R$  bude prošlý výkon nulový.

Integrováním  $dP_t$  máme

$$P_t = \frac{2n_i n_t Ph}{(n_i + n_t)^2} \int_0^R \frac{1}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} \rho d\rho \implies P_t = \frac{2n_i n_t P}{(n_i + n_t)^2} \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right).$$

Bystré oko si povšimne, že druhý člen v závorce není ničím jiným, než kosinem mezního úhlu  $\theta_m$ . Pro mezní úhel platí vztah

$$\sin \theta_m = \frac{n_t}{n_i} \implies \cos \theta_m = \sqrt{1 - \frac{n_t^2}{n_i^2}}.$$

---

<sup>3</sup>Pro úplnost doplňme, že tzv. *Poyntingův vektor* reprezentuje velikost a směr toku energie přenášené elektromagnetickým polem (kterým světlo je). Platí  $\vec{S} = I \vec{e}$ , kde  $I$  je intenzita a  $\vec{e}$  je směr šíření světelné vlny.

Dosazením do vztahu pro  $P_t$  máme

$$P_t = \frac{2n_t P}{(n_i + n_t)^2} \left( n_i - \sqrt{n_i^2 - n_t^2} \right).$$

Takto dostáváme velmi dobrý approximativní výsledek

$$\frac{P_t}{P} \doteq 16,7\%,$$

což je, jak bychom zjistili při přesném výpočtu o asi jen 0,9% více, než je skutečná hodnota.

### *Poznámka k odvození intenzitních transmisních a reflexních koeficientů*

Ještě zmíníme, jak bychom se mohli dobrat k tvaru transmisních a reflexních koeficientů, které jsme v řešení použili. „Klasické“ koeficienty pro elektrickou intenzitu  $E$  lze odvodit z podmínky spojitosti elektrického a magnetického pole na rozhraní dvou prostředí, což plyne z teorie elektromagnetismu. Konkrétním postupem se zabývat nebudeme; budeme předpokládat, že tvar koeficientů  $t_{\parallel}$  a  $t_{\perp}$  známe a s jejich pomocí odvodíme koeficienty  $T_{\parallel}$  a  $T_{\perp}$ .

Uvažujme Poyntingův vektor  $\vec{S}$  pod rozhraním a Poytingův vektor  $\vec{S}'$  nad rozhraním. Pro světelný výkon  $P$  na elementu plochy  $dS$  platí

$$P = \vec{S} \cdot d\vec{S},$$

$$P' = \vec{S}' \cdot d\vec{S},$$

kde  $d\vec{S}$  je velikost elementu plochy  $dS$  vynásobená jeho normálou  $\vec{n}$ .  $P$  je tedy výkon dopadajícího světla a  $P'$  je výkon světla prošlého. Definujme si poměr výkonu prošlého a dopadajícího výkonu jako  $T$ , tedy

$$T \equiv \frac{P'}{P} = \frac{\vec{S}' \cdot d\vec{S}}{\vec{S} \cdot d\vec{S}} = \frac{|\vec{S}'| |d\vec{S}| \cos \theta_t}{|\vec{S}| |d\vec{S}| \cos \theta_i} = \frac{|\vec{S}'| \cos \theta_t}{|\vec{S}| \cos \theta_i} = \frac{I_t \cos \theta_t}{I \cos \theta_i}.$$

Pro intenzitu monochromatické rovinné vlny v prostředí o indexu lomu  $n_j$  platí

$$I_j \propto n_j |\vec{E}|^2,$$

kde  $\vec{E}$  je vektor elektrické intenzity. Platí-li pod rozhraním  $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ , platí nad rozhraním po průchodu

$$\vec{E}_{\parallel}^t = t_{\parallel} \vec{E}_{\parallel},$$

$$\vec{E}_{\perp}^t = t_{\parallel} \vec{E}_{\parallel}.$$

Dosazením do rovnice pro  $T$  máme

$$T = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \frac{|t_{\parallel} \vec{E}_{\parallel} + t_{\perp} \vec{E}_{\perp}|^2}{|\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}|^2} = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \frac{|t_{\parallel}|^2 |\vec{E}_{\parallel}|^2 + |t_{\perp}|^2 |\vec{E}_{\perp}|^2}{|\vec{E}_{\parallel}|^2 + |\vec{E}_{\perp}|^2}.$$

Rovnost  $|\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}|^2 = |\vec{E}_{\parallel}|^2 + |\vec{E}_{\perp}|^2$ , resp.  $|t_{\parallel} \vec{E}_{\parallel} + t_{\perp} \vec{E}_{\perp}|^2 = |t_{\parallel}|^2 |\vec{E}_{\parallel}|^2 + |t_{\perp}|^2 |\vec{E}_{\perp}|^2$  jsme získali z Pythagorovy věty díky tomu, že sčítané vektory jsou kolmé.

No a protože typicky pracujeme s jednotlivými složkami intenzity  $\vec{E}_{\parallel}$  a  $\vec{E}_{\perp}$ , zavedeme si koeficienty  $T_{\parallel}$  a  $T_{\perp}$  tak, aby platilo

$$I_t = TI = T_{\parallel} I_{\parallel} + T_{\perp} I_{\perp}.$$

Takto dostáváme přesně

$$\begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} |t_{\parallel}|^2, \\ T_{\perp} &= \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} |t_{\perp}|^2. \end{aligned}$$

### Úloha 43 ... kam jsem to jenom dal?

8 bodů

Určitě jste si ve svém pokoji všimli nárůstu entropie, případně toho, že věci difundují (hlavně když je spolu bydlící pryč). Takto si Lego nedávno uložil svou oblíbenou Brownovskou částici do minima 2D potenciálu tvaru  $U(x, y) = C(x^2 + y^2)$ , kde  $C = 1,0 \cdot 10^{-20} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$ . Po velmi dlouhé době se ji tam vydal hledat. Jaká je pravděpodobnost, že ji najde ve vzdálenosti menší než  $d = 50 \text{ cm}$  od místa, kde ji odložil? Tento úkol byl vymyšlen v létě, čili teplota v pokoji na kolejí je  $T = 40^\circ\text{C}$ .

*Lego je jako teoretik rád, když má jeho fyzika nějakou souvislost s realitou.*

Nakoľko medzi odložením a hľadaním častice ubehla veľmi dlhá doba, jej poloha bude určená z Bolzmanovho rozdelenia daného potenciálom a teplotou. Pravdepodobnosť, že častica je v bode  $(x, y)$  bude úmerná  $\exp(-U(x, y)/(k_B T))$ .

Normalizačnej konštanté sa v tomto kontexte zvykne hovoriť stavová suma, označenie  $Z$ . Dostaneme ju z podmienky, že integrál pravdepodobnostnej hustoty cez celý priestor sa musí rovnať 1

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-C(x^2 + y^2)}{k_B T}\right) dx dy.$$

Pre zjednodušenie prejdeme do polárnych súradníčí, inými slovami zavedieme si substitúciu  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , čo zároveň znamená, že od obdlžníčkov so stranami  $dx, dy$  prejdeme k obdlžníčkom so stranami  $r d\varphi, dr$ . Dosadíme túto substitúciu a zintegrujeme využitím ďalšej substitúcie, kedy si exponent substitujeme ako  $u$

$$Z = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{-Cr^2}{k_B T}\right) r d\varphi dr = \pi \frac{k_B T}{C} \int_0^{\infty} \exp(-u) du = \pi \frac{k_B T}{C} [-e^{-u}]_0^{\infty} = \pi \frac{k_B T}{C}.$$

Podobným spôsobom zintegrujeme oblasť, pre ktorú  $r < d$ , len tentokrát je potrebné pri substitúcii k  $u$  dať pozor na zmenu hornej medze

$$\begin{aligned} P(r < d) &= \int_0^d \int_0^{2\pi} p(r, \varphi) r d\varphi dr = 2\pi \int_0^d \frac{1}{Z} \exp\left(\frac{-Cr^2}{k_B T}\right) r dr \\ &= [-e^{-u}]_0^{\frac{Cd^2}{k_B T}} = 1 - e^{-\frac{Cd^2}{k_B T}} = 0,44. \end{aligned}$$

**Úloha 44 ... s kapkami o závod**

6 bodů

David s Terkou si rádi hází míčem. Když bylo léto, dohodili maximálně 5,0 m. Míč má poloměr  $r = 15 \text{ cm}$  a hmotnost  $m = 300 \text{ g}$ . O kolik centimetrů se bude v absolutní hodnotě lišit vzdáenosť, kterou dohodí v zimě? Hustota vzduchu vně míče je v létě  $\rho_1 = 1,12 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a v zimě  $\rho_2 = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Atmosféra nemá vliv na atletické schopnosti Davida, Terky ani na vlastnosti míče.

*David přemýšlel, s kým si bude házet v dešti.*

Pri rýchlosťach, potrebných na dohodenie lopty do 5 metrov, už vzduch okolo nej určite nebude prúdiť laminárne. Z tohto dôvodu použijeme Newtonov vzťah pre odpor prostredia

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 C_D S,$$

kde  $\rho$  je hustota vzduchu,  $v$  je rýchlosť lopty,  $C_D$  je činiteľ odporu, ktorého hodnota pre guľu je  $C_D = 0,47$  a  $S$  je prierez, teda  $S = \pi r^2$ . Sila pôsobí proti smeru pohybu.

Potrebujeme si rozložiť pohyb do smerov  $x$  a  $y$ , tým pádom potrebujeme aj silu rozložiť do týchto smerov. Sila je úmerná  $v^2$ , potom jej  $x$ -ová zložka je úmerná  $vv_x$  a  $y$ -ová je úmerná  $vv_y$ . Z Pytagorovej vety vyplýva, že rozklad zachováva velkosť sily a je intuitívne, že aj smer bude zachovaný. Potom diferenciálne rovnice pre zložky rýchlosťi budú

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= -\frac{1}{2m} \rho C_D S v v_x \\ \dot{v}_y &= -\frac{1}{2m} \rho C_D S v v_y - g + \frac{V \rho g}{m},\end{aligned}$$

kde posledný člen je kvôli vztlakovej sile a  $V = 4/3\pi r^3$  je objem lopty. Táto sila je súčasťou zanebatelná v porovnaní s tiážou, ale už nie v porovnaní s odporom. Odporúčaný postup je vyriešiť dané diferenciálne rovnice numericky.

Konkrétnie najprv binárne vyhľadáme rýchlosť, ktorou hádžu, potom postupne odmeriame obe vzdialenosť a odčítame. Tento kód predpokladá, že hádžu pod uhlom 45 stupňov. Taktiež sme vytvorili kód, ktorý postupne prechádza rôzne uhly okolo a vyberá tú najdlhšiu vzdialosť, výsledok sa líšil len o milimetre.

```
dt=0.0001
g=9.81
m=0.3
S=pi*0.15^2
V=4/3*pi*0.15^3
Cd=0.47
rho=1.12

vpod=0
vnad=10

for i=1:20 # binarne vyhľadame pociatocnu rychlosť, pre ktoru lopta preleti 5m
    vx=(vpod+vnad)/2
    vy=vx
    x=0
    y=0
```

```

while y>=0 # lopta leti, kym je nad zemou
    v=sqrt(vx*vx+vy*vy) # velkosť aktuálnej rýchlosťi
    vy-=g*dt + 1/2*rho*vy*v*S*Cd*dt/m - V*rho*g*dt/m # zmena rýchlosťi v smere
        y
    vx-= 1/2*rho*vx*v*S*Cd*dt/m # a v smere x

    x+=vx*dt # posuny v priestore
    y+=vy*dt
end

if x>5
    vnad=(vpod+vnad)/2
else
    vpod=(vpod+vnad)/2
end
end

rho=1.29 # zmenime hustotu

vx=(vpod+vnad)/2 # nastavime pociatocnu rychlosť ako priemer intervalu,
vy=(vpod+vnad)/2 # ktory sme dostali polenim
x=0
y=0

while y>=0 # a zas ten isty hod
    v=sqrt(vx*vx+vy*vy)
    vy-=g*dt + 1/2*rho*vy*v*S*Cd*dt/m - V*rho*g*dt/m
    vx-= 1/2*rho*vx*v*S*Cd*dt/m

    x+=vx*dt
    y+=vy*dt
end
x1=x

rho=1.12 # a s rovnakou rychlosťou to hodime pre istotu este raz v povodnej hustote,
# lebo to doleti trocha inak, nez 5m, tak nech sa nam prilis nekopia zaokruhlenia

vx=(vpod+vnad)/2
vy=(vpod+vnad)/2
x=0
y=0

while y>=0
    v=sqrt(vx*vx+vy*vy)
    vy-=g*dt + 1/2*rho*vy*v*S*Cd*dt/m - V*rho*g*dt/m
    vx-= 1/2*rho*vx*v*S*Cd*dt/m

    x+=vx*dt
    y+=vy*dt
end
x2=x
x2-x1 # odcitame vysledne vzdialenosť

```

Kód vráti 0.128, čiže sa musia posunúť bližšie o 13 cm.

**Úloha 45 ... nafukujeme balónek reloaded**

7 bodů

Při nafukování balónku můžeme od jistého poloměru s dobrou přesností předpokládat, že energie pružnosti roste přímo úměrně s přibývající plochou povrchu balónku. V této oblasti rozměrů našel Jirka svůj dříve nafouknutý balónek, který se za tu dobu vyfouknul na poloměr 5,0 cm (balónek má přibližně kulový tvar). Jelikož je balónek poměrně malý, rozhodl se dofouknout jej do původních rozměrů. Takové nafukování balónku je ovšem fyzicky náročné. Jirku by zajímalo, jakou práci vykonají jeho svaly, když dofoukne balónek maximálním možným výdechem. Uvažujte, že po nádechu má Jirka v plicích 5,51 vzdachu a po maximálním výdechu mu v plicích zbude 1,51 vzdachu. Předpokládejte, že tlak i teplota vzdachu v plicích je po celou dobu stejná jako v balónku a nafukování approximujte izotermickým dějem (tedy plíce a balónek chápeme jako jednu propojenou nádobu, kde probíhá rovnovážný děj). Teplota vzdachu v balónku je 25 °C a počáteční tlak 107 kPa. Tato hodnota tlaku je pro situaci před začátkem nafukování (tedy pro izolovaný balónek), ale i na jeho začátku. Tlak v Jirkových plicích se ustálí tak, aby byl stejný jako počáteční tlak v balónku. Práci Jirkových plic počítejte až od začátku nafukování. Předpokládejte, že je práce dána pouze změnou objemu plic a rozdílem tlaku plynu oproti atmosférickému tlaku (okolní atmosférický tlak pomáhá plicím při stlačování plynu).

*Jirka ozivil dva roky starou úlohu.*

Platí stavová rovnice ideálního plynu

$$pV = nRT,$$

kterou uvažujeme pro celou „nádobu“, tedy spojený balónek s Jirkovými plícemi o celkovém objemu

$$V = V_1 + \frac{4}{3}\pi r^3,$$

kde  $V_1$  je objem plic a  $r$  je poloměr balónku. Při nafukování předpokládáme izotermický děj, pravá strana rovnice bude konstantní. Práci podle návodu v zadání počítáme jako

$$dW = -(p - p_a) dV_1.$$

Dodejme, že nejde o nefyzikální přístup. Svalům při stahování „pomáhá“ okolní atmosférický tlak. A když si rovnovážný děj, při kterém probíhá nafukování, představíme tak, že plíce nejprve zmenší objem  $V_1$  (čímž vykonají práci  $-(p - p_a) dV_1$ ) a poté se nafoukne balónek. Při nafukování balónku koná práci naopak plyn a vyrovná se teplota.

Abychom získali práci, musíme předchozí vztah integrovat. Zatím neznáme přesný vztah mezi  $p$  a  $V_1$ . Jeden způsob řešení je uvážit, že  $V = V_1 + (4/3)\pi r^3$ , tedy

$$dV_1 = dV - 4\pi r^2 dr.$$

Dosazením získáváme

$$dW = -p dV + 4\pi r^2 p dr + p_a dV_1.$$

První člen vede na práci při izotermickém ději, druhý člen můžeme přepsat jako závislost  $p(r)$  a třetí člen lze integrovat rovnou jako

$$\int p_a dV_1 = p_a(V_{1f} - V_{1i}) = -p_a \Delta V_1,$$

kde  $\Delta V_1 = 4l$  je změna objemu plic, index  $i$  označuje počáteční stav a index  $f$  stav konečný.

Práce v izotermickém ději je určena jako

$$W = nRT \ln \frac{p_f}{p_i} = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i}.$$

V této rovnici člen  $nRT$  spočítáme z počáteční podmínky, neboť známe počáteční tlak i objem

$$nRT = p_i V_i \doteq 645 \text{ J}.$$

K výpočtu práce potom zbývá určit konečný stav. K tomu využijeme stavovou rovnici. V ní však máme dvě neznámé  $p$  a  $V$  (známe konečný objem plic, ale ne poloměr balónku). Musíme tedy přidat další rovnici. Tou bude závislost tlaku na poloměru, kterou odvodíme ze zadáного pružného chování balónku.

Víme, že zvětšení plochy balónku o  $dS^4$  vyžaduje vykonání práce  $dW_2$  proti silám v balónku, proto platí

$$dW_2 = \sigma dS = 8\pi\sigma r^2 dr,$$

dodaná energie musí být úměrná změně plochy, jak je napsáno v zadání.

Stejně tak lze práci vyjádřit pomocí tlaku. Balónek má kulový tvar, výslednice sil v balónku proto působí směrem ke středu balónku (balónek se snaží zmenšit). Při zvětšení balónku o malý poloměr  $dr$  je vykonána práce

$$dW_2 = F \cdot dr = p_2 \cdot S \cdot dr = p_2 \cdot 4\pi r^2 dr,$$

kde  $p_2$  je tlak způsobený balónkem při poloměru  $r$ . Při úpravách jsme využili toho, že  $dr$  je malé, takže se při nafouknutí o  $\Delta r$  síla  $F$  a plocha  $S$  změní zanedbatelně málo, tj. můžeme zanedbat členy  $\mathcal{O}(dr^2)$ .

Porovnáním obou rovnic dostaneme

$$p_2 \cdot 4\pi r^2 dr = \sigma \cdot 8\pi r^2 dr,$$

odkud máme závislost tlaku na poloměru

$$p_2 = \frac{2\sigma}{r}.$$

Je třeba uvědomit si, že předchozí rovnice ještě nevyjadřuje tlak vzduchu uvnitř balónku. Na vzduch totiž kromě balónku působí ještě atmosférický tlak  $p_a = 101\,325 \text{ Pa}$ . Celkový tlak vzduchu je potom  $p_2 + p_a$ .

Zadání známe počáteční tlak  $p_i$  a poloměr  $r_i$ . Odtud určíme konstantu  $2\sigma$  jako  $2\sigma = (p_i - p_a)r_i$ . Nyní tedy můžeme integrovat i zbývající člen v rovnici pro  $dW$

$$\int 4\pi r^2 \left( p_a + (p_i - p_a) \frac{r_i}{r} \right) dr = \frac{4}{3}\pi(r_f^3 - r_i^3)p_a + 2\pi r_i(r_f^2 - r_i^2)(p_i - p_a),$$

díky čemuž vyjádříme práci

$$W = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i} + \frac{4}{3}\pi(r_f^3 - r_i^3)p_a + 2\pi r_i(r_f^2 - r_i^2)(p_i - p_a) - p_a \Delta V_1.$$

<sup>4</sup>Plocha  $dS$  je infinitesimálně malá, i když by vztah pro práci platil i pro konečnou  $\Delta S$

Zbývá tak určit poloměr balónku na konci. K tomu využijeme stavovou rovnici pro finální stav

$$\left( p_a + (p_i - p_a) \frac{r_i}{r_f} \right) \left( V_{1f} + \frac{4}{3} \pi r_f^3 \right) = nRT,$$

kde  $V_{1f} = 1,5\text{ l}$  je finální objem plic. Tuto rovnici nyní musíme vyřešit numericky pro poloměr  $r_f$ , čímž získáme dvě řešení. Nás zajímá jen to, které je větší než počáteční poloměr, tj.  $r_f = 10,4\text{ cm}$ . Poznámějme, že efekt pružnosti balónku je zde ve skutečnosti poměrně malý, pokud bychom klíčový člen v rovnici zanedbali, vyšlo by  $10,5\text{ cm}$ . Zbývá dosadit do rovnice pro práci, čímž získáme výsledek  $W \doteq 14\text{ J}$ .

### Úloha 46 ... pružina s magnetem

8 bodů

Mějme pružinu o tuhosti  $k = 50,0\text{ mN}\cdot\text{cm}^{-1}$  visící ve vertikální poloze, na pružině je připevněn magnet o hmotnosti  $M = 110\text{ g}$  a magnetickém momentu  $m_1 = 2,00\text{ A}\cdot\text{m}^2$ , který zároveň funguje jako závaží. Na desce pod magnetickým závažím se nachází jiný magnet o magnetickém momentu  $m_2 = 10,0\text{ A}\cdot\text{m}^2$ . Spočtěte periodu malých kmitů za předpokladu, že magnety jsou zanedbatelné velikosti, a tudíž je můžeme považovat za magnetické dipoly a pohybují se dostatečně pomalu, takže můžeme veškeré ztráty zanedbat. Magnety jsou orientovány takovým směrem, že se vzájemně odpuzují, a magnet, který plní roli závaží, je přesně takový, že se vychýlení pružiny nezmění po jeho zavěšení.

*Magnety se přitahují a vztah mezi nimi může být i harmonický.*

Začneme tak, že problém zasadíme do souřadného systému. Nechť  $x$  značí vertikální souřadnici a počátek soustavy uvažujme v klidové poloze závaží. Znaménkovou orientaci  $x$  zadáme tak, aby kladná část osy směřovala směrem dolů, tedy tíhová síla měla kladné znaménko. Pak  $h_0$  je počáteční poloha závaží nad brzdným magnetem. Pro magnetickou sílu dvou magnetů v závislosti na vychýlení  $x$  platí

$$F_m(x) = \frac{3\mu_0}{2\pi} \frac{m_1 m_2}{(h_0 - x)^4}. \quad (11)$$

Nyní sestavíme pohybovou rovnici. Výslednice sil je síla  $M\ddot{x}$ , která bude mít při stlačení dolů stejně znaménko jako tíhová síla, tedy dostaneme

$$M\ddot{x} = Mg - F_m(x) - kx \Rightarrow M\ddot{x} + F_m + kx = Mg. \quad (12)$$

Ještě před tím, než začneme sestavovat rovnici harmonického oscilátoru, spočteme velikost počáteční polohy  $h_0$ . To uděláme tak, že v rovnici (12) jenom položíme  $M\ddot{x} = 0$  a  $x = 0$  a dosadíme vztah pro magnetickou sílu (11), čímž dostaneme

$$0 = Mg - F_m(0) \Rightarrow Mg = \frac{3\mu_0}{2\pi} \frac{m_1 m_2}{h_0^4} \Rightarrow h_0 = \sqrt[4]{\frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi Mg}} \quad (13)$$

Nyní vyjádříme rovnici harmonického oscilátoru. Začneme tak, že dosadíme výraz pro  $F_m$ , který je uveden ve vztahu (11), do vztahu (12) a podělíme hmotností. Tím dostaneme vztah

$$\ddot{x} + \frac{3\mu_0}{2\pi M} \frac{m_1 m_2}{(h_0 - x)^4} + \frac{k}{M} x = g \quad (14)$$

Protože počátek souřadného systému je v rovnovážné poloze závaží a jedná se o malé knity, platí, že  $|x| \ll h_0$ . Proto, abychom rovnici (14) dostali do tvaru rovnice harmonického oscilátoru, musíme provést aproximaci výrazu  $(h_0 - x)^{-4}$ . Tuto aproximaci provedeme pomocí Taylorova polynomu. Definujme  $f(x) := (h_0 - x)^{-4}$ . Vidíme, že 0 naleží definičnímu oboru funkce  $f(x)$ , tedy můžeme Taylorův polynom ukotvit v bodě 0. Máme tedy, že

$$f(x) = \frac{1}{(h_0 - x)^4} \approx T_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f(0)^{(k)}}{k!} x^k \approx \frac{f(0)}{0!} x^0 + \frac{f(0)'}{1!} x.$$

Díky aproximaci budou všechny členy polynomu s exponentem větším než 2 zanedbatelné. Tuďž stačí spočítat derivaci  $f'(0)$ .

$$\frac{1}{(h_0 - x)^4} \approx \frac{1}{h_0^4} + (-4(h_0 - x)^{-5}(-1))|_0 x = \frac{1}{h_0^4} + \frac{4x}{h_0^5}.$$

Toto dosadíme do vztahu (14).

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi M} \left( \frac{1}{h_0^4} + \frac{4x}{h_0^5} \right) + \frac{k}{M} x &= g \quad \Rightarrow \\ \ddot{x} + \left( \frac{6\mu_0 m_1 m_2}{\pi M h_0^5} + \frac{k}{M} \right) x &= g - \frac{3\mu_0 m_1 m_2}{2\pi M h_0^4} \end{aligned}$$

Nyní dosadíme za  $h_0$  ze vztahu (13), čímž dostaneme rovnici

$$\ddot{x} + \left( 4g \sqrt[4]{\frac{2\pi M g}{3\mu_0 m_1 m_2}} + \frac{k}{M} \right) x = 0 \quad (15)$$

Když rovnici (15) porovnáme s rovnicí harmonického oscilátoru, která je  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  dostaneme, že

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \left( 4g \sqrt[4]{\frac{2\pi M g}{3\mu_0 m_1 m_2}} + \frac{k}{M} \right) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{4g \sqrt[4]{\frac{2\pi M g}{3\mu_0 m_1 m_2}} + \frac{k}{M}}} \quad (16)$$

Nyní už zbývá jenom do vztahu (16) dosadit a zjistíme, že

$$T \doteq 0,233 \text{ s}$$

Tímto jsme hotovi.

### Úloha 47 ... světlo pod vodou reloaded

9 bodů

Mějme bodový zdroj nepolarizovaného světla zářícího do všech směrů. Zdroj je ponořený v hloubce  $h = 1,00 \text{ m}$  pod (dostatečně rozlehrou) klidnou vodní plochou. Kolik procent zářivého výkonu se přenese nad hladinu? Index lomu vody je  $n_i = 1,33$ ; index lomu vzduchu je  $n_t = 1,00$ . Předpokládejte, že voda žádnou část světla neabsorbuje a uvažujte přesnou hodnotu transmisních koeficientů.

Petrovi se líbil graf.

Stejně jako v approximativní verzi úlohy budeme potřebovat Fresnelovy koeficienty, a to v amplitudních i intenzitních verzích

$$\begin{aligned} t_{\parallel} &= \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t}, \\ t_{\perp} &= \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}, \\ T_{\parallel} &= \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} |t_{\parallel}|^2, \\ T_{\perp} &= \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} |t_{\perp}|^2. \end{aligned}$$

Protože pracujeme s nepolarizovaným zdrojem, pro který platí  $I_{\parallel} = I_{\perp} = \frac{1}{2}I$ , můžeme psát

$$I_t = \frac{1}{2} (T_{\parallel} + T_{\perp}) I.$$

Intenzita je světelnyý výkon vztažený na jednotku plochy. Protože se nám výkon (resp. energie) zachovává, platí pro intenzitu (resp. pro velikost Poyntingova vektoru  $|\vec{S}|$ ) ve vzdálenosti  $r$  od zdroje

$$I = |\vec{S}| = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

Pro průchod světla rovinou navíc musíme uvážit pouze velikost Poyntingova vektoru kolmou na ní, tedy

$$S_{\perp} = \frac{P}{4\pi r^2} \cos \vartheta,$$

kde  $\vartheta$  je úhel mezi Poyntingovým vektorem a normálou na rovinu.

Dáme-li všechny výsledky výše dohromady, můžeme pro diferenciál prošlého výkonu  $dP_t$  psát

$$dP_t = \frac{P \cos \vartheta}{2\pi r^2} n_i n_t \cos \theta_t \cos \theta_i \left( \frac{1}{(n_t \cos \theta_i + n_i \cos \theta_t)^2} + \frac{1}{(n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t)^2} \right) dS.$$

Popišme si hladinu polárními souřadnicemi s počátkem v průniku hladiny s osou procházející zdrojem. Platí

$$\cos \vartheta = \frac{h}{\sqrt{\rho^2 + h^2}},$$

kde  $\rho$  je polární souřadnice daná vzdáleností od osy. Pro kosinus úhlu dopadu platí

$$\cos \theta_i = \frac{h}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}.$$

Ze Snellova zákona ( $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$ ) máme pro kosinus úhlu průchodu

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \frac{n_i^2}{n_t^2} \frac{\rho^2}{\rho^2 + h^2}}.$$

Vše můžeme nyní dosadit do vztahu pro  $dP_t$ . Po přenásobení jakobiánem polárních souřadnic  $\rho$  a integrování v souřadnici  $\varphi$  (tedy po vynásobení  $2\pi$ ) máme

$$dP_t(\rho) = \frac{P n_i n_t}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} h^2 \rho \sqrt{h^2 + \rho^2 \left(1 - \frac{n_i^2}{n_t^2}\right)} \left( \frac{1}{\left(n_t h + n_i \sqrt{h^2 + \rho^2 \left(1 - \frac{n_i^2}{n_t^2}\right)}\right)^2} + \frac{1}{\left(n_i h + n_t \sqrt{h^2 + \rho^2 \left(1 - \frac{n_i^2}{n_t^2}\right)}\right)^2} \right) d\rho.$$

Nyní bychom prošly výkon rádi integrovali. Analyticky příliš nemáme šanci, zvolíme proto cestu numerické integrace. Opět využijeme toho, že nemusíme integrovat až po  $\rho$  jdoucí do nekonečna ale jen po  $\rho_{\max} = R$ , při kterém je dosaženo mezního úhlu. To stejně jako v approximativní verzi úlohy spočítáme ze vztahu pro mezní úhel a máme

$$R = \frac{h n_t}{\sqrt{n_i^2 - n_t^2}}, \\ \rho \in \left(0, \frac{h n_t}{\sqrt{n_i^2 - n_t^2}}\right).$$

My budeme vztah pro prošly výkon  $P_t$  integrovat v Pythonu s použitím následujícího kódu:

```
N = 100_000

def sqrt(x):
    return x ** 0.5

def support_function(h, ni, nt, rho):
    return( sqrt( h**2 + rho**2*(1-(ni/nt)**2) ) )

def dPt(h, ni, nt, P, rho):
    return( (P*ni*nt)/(rho**2+h**2)**(3/2)*h**2*rho*
        support_function(h, ni, nt, rho)*( 1/(nt*h+ni*
        support_function(h, ni, nt, rho))**2 +
        1/(ni*h+nt*support_function(h, ni, nt, rho))**2 ) )

rho_min = 0
rho_max = (h*nt)/sqrt(ni**2 - nt**2)

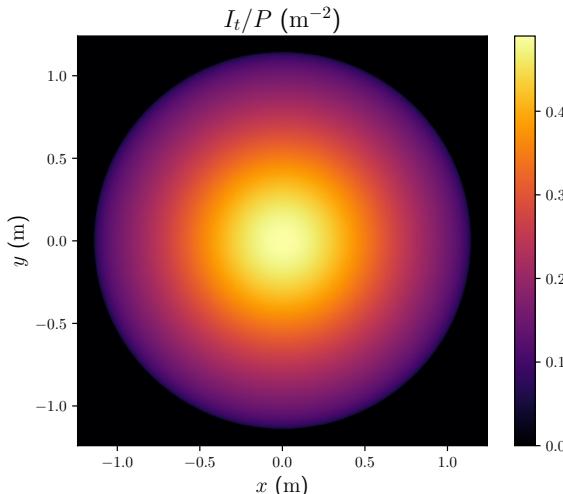
def integrate(h, ni, nt, P, rho_min, rho_max, n):
    delta_rho = (rho_max - rho_min) / n
    total = 0
    for i in range(n):
        rho = rho_min + (i + 0.5) * delta_rho
        total += dPt(h, ni, nt, P, rho) * delta_rho
    return total

result = integrate(h, ni, nt, P, rho_min, rho_max, N)
print(result)
```

Takto získáme celkový výsledek

$$\frac{P_t}{P} \doteq 15,8\% .$$

Na závěr ještě podotkneme možnost všimnout si, že  $P_t$  nezávisí na hloubce  $h$ , ve které je zdroj ponořen. To si můžeme ověřit tím, že parametr  $h$  lze z integrálu, kterým počítáme  $P_t$ , vyloučit substitucí  $\rho \rightarrow \rho/h$ .



Obrázek 4: Graf transmitované intenzity  $I_t$  v závislosti na poloze na hladině.

#### Úloha 48 ... termodynamická loterie

8 bodů

Dva Maxwelllovi démoni, Elenka a Tomáš, pracují v korporaci s názvem „Ensembles Ltd.“. Jejich úlohou je najít určité mikrostavy. Oba mají rovnovážný izolovaný systém sestávající z ideálního plynu s počtem jednoatomových částic  $N = 1,00 \cdot 10^7$ , který je uzavřený v krabici o objemu  $V$ .

Oba nahlédnou do své krabice a zkонтrolují, zda je systém v požadovaném intervalu mikrostavů. Pokud ano, jsou tyto krabice rychle zasláné zákazníkům. Zaměstnanec s vyšším počtem odeslaných zakázků dostane povýšení. Elenka už dané povýšení chce dlouho, a tak o trošku za hřála Tomášovu krabici (přeci jen je démon).

Předpokládejme, že hledaný interval mikrostavů je pro oba stejný a že každý mikrostav kompatibilní s danými makroskopickými veličinami je stejně pravděpodobný. Dále, Elenčina krabice má teplotu  $T_e = T$  a Tomášova krabice má teplotu  $T_t = 1,000\,01T$ . Jakou hodnotu má poměr pravděpodobnosti, že se Elenka podívá a najde požadovaný mikrostav, ku pravděpodobnosti, že se podívá Tomáš a najde hledaný mikrostav? Uvažujte klasický případ ( $T$  a  $N$  jsou dostatečně velké).

*Marek J. chce být Maxwellovým démonem.*

Kľúčová schopnosť Maxwellovho démona je vnímať svet na dvoch úrovniach – mikroskopickej a makroskopickej. Makroskopická úroveň je známa aj nám, ľudským bytosťiam. Makrostav je v tomto prípade súbor fyzikálnych veličín vynárajúcich sa z množstva častíc pokope (respektívne v krabici), ktorý nejakým spôsobom charakterizuje stav nášho systému. Sú to tlak, teplota, objem, hustota... Zamyslite sa nad tým ako tieto veličiny strácajú zmysel, keď sa na krabici s plynom pozerať bližšie a bližšie a vo veľmi krátkych okamihoch, skrátka z pohľadu častice. Bodovú časticu vieme charakterizovať jej polohou a hybnosťou (dve trojice čísel), potom sme v rámci klasickej mechaniky (napríklad v reči Newtonových zákonov) plne popísali jej stav (máme všetky potrebné informácie na popis vývoja tejto častice). Mikrostav je teda súbor polôh a hybností všetkých častíc (inými slovami bod v  $6N$  dimenzionálnom priestore). Koľko mikrostavov je dostupných systémom/krabiciam plynu zo zadania?

Každá častica sa môže nachádzať len v objeme krabice a podobné obmedzenie máme aj na hybnosti častíc, pretože plynu prislúcha určitá konštantná hodnota energie  $E = \sum_{i=1}^N (p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2)/2m$  (hodnota určená s nejakou presnosťou). Po chvílik premýšľania v  $6N$  dimenzionálnom priestore si uvedomíme, že sme práve popísali hypertrubku/hypervalec, ktorý má v sebe dutinu. Možné mikrostavy, ktoré potrebujeme uvažovať majú teda nejaký konečný objem v priestore stavov. Tento objem však stále predstavuje spojite/nekonečne veľa mikrostavov. S týmto sa fyzici vyrovnali tak, že tento objem diskretizovali – nakrájali na malé kocky a počet možných mikrostavov predstavuje počet týchto kociek.<sup>5</sup> My sa ale nad týmto nebudem moc trápiť, pretože v zadaní hovoríme o požadovanom intervale mikrostavov  $\mu$ , a či je tento interval spojity alebo diskrétny v našom prípade nehrá až takú rolu. Pravdepodobnosť nájdenia mikrostavu z daného intervalu a za predpokladov zo zadania je tak pomer medzi týmto intervalom a celkovým počtom/objemom mikrostavov, ktoré môže systém nadobudnúť  $\Omega$ :

$$P(\mu_s \in \mu) = \frac{\mu}{\Omega}. \quad (17)$$

Nás zaujíma pomer pravdepodobností kto nájde daný mikrostav

$$\frac{P(\text{Elenka})}{P(\text{Tomas})} = \frac{\Omega_t}{\Omega_e}, \quad (18)$$

kde sa interval mikrostavov vykrátil (takisto ako diskretizácia objemu v stavovom priestore).

Hľadaný pomer objemov môžeme vypočítať priamo (integrovaním v  $6N$  dimenzionálnom priestore) alebo použiť termodynamiku (makroskopické zákony) a jej prekladový slovník z (a do) mikroskopických zákonov: štatistickú fyziku (mimochodom tak trocha kombinácia oboch prístupov je k dispozícii napríklad tu: [https://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs\\_paradox#Calculating\\_the\\_entropy\\_of\\_ideal\\_gas,\\_and\\_making\\_it\\_extensive](https://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_paradox#Calculating_the_entropy_of_ideal_gas,_and_making_it_extensive)). Zo štatistickej fyziky nám bude treba Boltzmannov vzťah pre entropiu:

$$S(N, V, U) = k \ln(\Omega(N, V, U(T))), \quad (19)$$

kde  $k$  je Boltzmannova konštanta a  $U$  je vnútorná energia plynu, pričom v našom prípade platí  $U = 3NkT/2$ . Ďalší klúčový vzťah je rovnica pre entropiu ideálneho plynu<sup>6</sup>:

$$S = Nk \left( \ln \left( \frac{V}{N} \left( \frac{2\pi mk T}{h^2} \right)^{3/2} \right) + \frac{5}{2} \right). \quad (20)$$

<sup>5</sup>Keď začneme s kvantovo-mechanickým popisom tak v klasickej limite zistíme, že objem týchto kociek je Planckova konštantá na tretiu.

Je to dôsledok Heisenbergovho princípu neurčitosti, nakoľko v rámci tohto objemu už nie sме schopní hovoriť o rôznych stavoch.

<sup>6</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Sackur-Tetrode\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Sackur-Tetrode_equation)

Pre termodynamické odvodenie (20) pozrite napríklad klasickú učebnicu Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics od H. B. Callena a kapitolu „3.4 The Simple Ideal Gas and Multicomponent Simple Ideal Gases“ (my ale vieme že stále ide o logaritmus objemu kompatibilných mikrostavov).

Kombináciou vzťahov (17), (18), (19) dostávame pre hľadaný pomer výraz:

$$\frac{\Omega_t}{\Omega_e} = e^{(S_t - S_e)/k}.$$

Potrebujeme teda už len vyjadriť rozdiel entropií, pričom dva systémy sa líšia len teplotou:

$$S_t - S_e = \frac{3}{2} N k \ln \left( \frac{T_t}{T_e} \right).$$

Pre hľadaný pomer pravdepodobností tak dostaneme

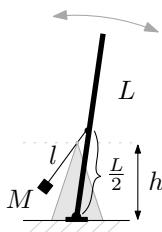
$$\frac{P(\text{Elenka})}{P(\text{Tomas})} = \left( \frac{T_t}{T_e} \right)^{3N/2} = (1,000\,01)^{3N/2} \doteq 1,39 \cdot 10^{65}.$$

Vidíme, že aj keď Elenka zmenila teplotu Tomášovho systému len o trochu, a častic je pomerne málo (v porovnaní s  $10^{23}$ ), tak táto zmena viedla k obrovskému množstvu nových mikrostavov v Tomášovom systéme, a Elenka takmer určite získa dané povýšenie.

### Úloha 49 ... veľký metronom

9 bodů

Méjme metronom tvořený dvěma tyčemi. Delší je homogenní a má délku  $L = 25,0\text{ m}$  a délkovou hustotu  $\lambda = 100\text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$  a je na jednom svém konci upevněná v bodě, okolo kterého se může volně otáčet. Kratší s délkou  $l = 10,0\text{ m}$  je nehmotná a připevněná svým horním koncem uprostřed delší tyče tak, že se okolo bodu spojení může volně otáčet. Vždy však prochází bodem, který se nachází ve výšce  $h = 11,0\text{ m}$  nad bodem, kde je uchycený spodní konec delší tyče (může se tedy okolo tohoto bodu nejen otáčet, ale i klouzat). Na druhém konci kratší tyče je závaží s hmotností  $M = 2,00\text{ t}$ . Jaká je perioda malých kmitů?



Obrázek 5: Schéma metronomu.

*Lego byl u pražského metronomu.*

Počítajte túto úlohu cez sily by bolo zbytočne náročné kvôli bodu, kde je kratšia tyč podopretá. Príst na to, akou silou pôsobí a kam, by bolo sice zaujímavé, ale komplikované. Nehovoriač o bodoch, okolo ktorých sa tyče otáčajú. Neostáva nám teda nič iné, ako to spočítať cez energie.

Označíme si uhol, o ktorý je vychýlená dlhšia tyč oproti zvislému smeru, ako  $\varphi$ . Jej hmotnosť je  $m_1 = L\lambda$  a nachádza sa v jej tažisku, čiže na kružnicovom oblúku vo vzdialenosťi  $L/2$  od bodu, okolo ktorého sa tyč otáča. Jej potenciálna energia potom bude  $E_{p1} = (g/2)L^2\lambda \cos \varphi$ .

Jej moment zotrvačnosti dostaneme z momentu zotrvačnosti homogénnej tyče okolo jej krajného bodu ako

$$I = \frac{1}{3}m_1L^2 = \frac{1}{3}\lambda L^3.$$

Potom jej kinetická energia bude

$$E_{k1} = \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{1}{6}\lambda L^3 \dot{\varphi}^2.$$

Zložitejší je pohyb kratšej tyče. Popísal ho všeobecne by bolo naozaj náročné, lenže nám sa stačí zameriť iba na malé kmity. Pre malé výchylky  $\varphi \ll 1$  môžeme rozvinúť sínus a kosínus ako  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$ . Následne súradnice stredu dlhej tyče sú

$$x_1 \approx \frac{L}{2}\varphi, y_1 \approx \frac{L}{2} \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right).$$

Spočítajme vzdialosť medzi stredom dlhej tyče a bodom, ktorým je kratšia tyč podopretá. Klasicky použijeme Pythagorovu vetu, akurát so zanedbaním viacerých faktorov. Súradnice bodu, ktorý podopiera kratšiu tyč, sú  $[0, h]$

$$\begin{aligned} l_1^2 &= (y_1 - h)^2 + x_1^2 = \left(\frac{L}{2} - h - \frac{L}{2}\frac{\varphi^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\varphi\right)^2, \\ &= \left(\frac{L}{2} - h\right)^2 - \left(\frac{L}{2} - h\right)\frac{L}{2}\varphi^2 + \frac{L^2\varphi^2}{4} = \left(\frac{L}{2} - h\right)^2 + h\frac{L}{2}\varphi^2, \end{aligned}$$

teda

$$l_1 = \sqrt{\left(\frac{L}{2} - h\right)^2 + h\frac{L}{2}\varphi^2} = \left(\frac{L}{2} - h\right) \sqrt{1 + \frac{h\frac{L}{2}}{\left(\frac{L}{2} - h\right)^2}\varphi^2} = \left(\frac{L}{2} - h\right) + \frac{hL}{4\left(\frac{L}{2} - h\right)}\varphi^2.$$

Označme ešte

$$l_0 = l_1|_{\varphi=0} = \frac{L}{2} - h.$$

Teraz si môžeme spočítať výšku závažia, ktoré je na konci tyče, v závislosti od  $\varphi$ . Konkrétnie si označíme  $\Delta y$  výškový rozdiel, o ktorý je závažie nižšie voči bodu, o ktorý je tyč podopretá. Potom jeho  $y$ -ová súradnica bude  $y_2 = h - \Delta y$ . Nakoľko je tyč rovná, využitím podobnosti trojuholníkov môžeme dať do rovnosti pomer dĺžky tyče nad týmto bodom k vzdialosti horného konca nad týmto bodom ( $y_1 - h$ ), a pomer dĺžky pod týmto bodom k  $\Delta y$

$$\begin{aligned} \frac{l_1}{l_0 - \frac{L}{2}\frac{\varphi^2}{2}} &= \frac{l - l_1}{\Delta y} \\ \Delta y &= \left(l_0 - \frac{L}{2}\frac{\varphi^2}{2}\right) \frac{l - l_1}{l_1}. \end{aligned}$$

Venujme sa ďalej poslednému zlomku

$$\begin{aligned} \frac{l - l_0 - \frac{hL}{4l_0}\varphi^2}{l_0 + \frac{hL}{4l_0}\varphi^2} &= \frac{1}{l_0} \frac{l - l_0 - \frac{hL}{4l_0}\varphi^2}{1 + \frac{hL}{4l_0^2}\varphi^2} \approx \\ &\approx \frac{l - l_0}{l_0} - \frac{hL}{4l_0^2}\varphi^2 \left(1 + \frac{l - l_0}{l_0}\right) = \frac{l - l_0}{l_0} - \frac{hLl}{4l_0^3}\varphi^2. \end{aligned}$$

Dosadíme späť

$$\begin{aligned} \Delta y &= \left(l_0 - \frac{L}{2}\varphi^2\right) \frac{l - l_0}{l_0} - \frac{hLl}{4l_0^3}\varphi^2 \\ &\approx l - l_0 - \frac{hLl}{4l_0^2}\varphi^2 - L\frac{l - l_0}{4l_0}\varphi^2 \end{aligned}$$

a výsledok dosadíme do našej substitúcie pre výšku závažia  $y_2 = h - \Delta y$ .

$$y_2 = \frac{L}{2} - l + \frac{hLl}{4l_0^2}\varphi^2 + L\frac{l - l_0}{4l_0}\varphi^2$$

Vidíme, že pre  $\varphi = 0$  dostávame výšku  $L/2 - l$ , čo sedí. Zo zvyšku môžeme spočítať príspevok k zmene potenciálnej energie od závažia na konci

$$E_{p2} = Mg\Delta y_2(\varphi) = \frac{1}{2}Mg \left( \frac{hLl}{2l_0^2} + L\frac{l - l_0}{2l_0} \right) \varphi^2.$$

Čo sa kinetickej energie závažia týka, je tento smer zanedbateľný, pretože oveľa viac sa bude hýbať v smere osi  $x$ . Z podobnosti trojuholníkov si vyjadríme  $x_2$

$$\begin{aligned} \frac{l_1}{x_1} &= \frac{l - l_1}{-x_2}, \\ -x_2 &= \frac{L}{2}\varphi \frac{l - l_1}{l_1}. \end{aligned}$$

Za daný zlomok môžeme dosadiť výraz z predchádzajúcej časti. Dokonca vieme, že nás nemusí zaujímať člen s  $\varphi^3$ , takže nám stačí dosadiť nultý rád

$$-x_2 = \frac{L}{2} \frac{l - l_0}{l_0} \varphi,$$

kde znamienko mínus hovorí len o tom, že daná výchylka je v opačnom smere. To nás však nemusí trápiť, nakoľko je pre nás dôležitý štvorec rýchlosťi v závislosti od časovej derivácie  $\dot{\varphi}$

$$v_2^2 = \frac{L^2}{4} \frac{(l - l_0)^2}{l_0^2} \dot{\varphi}^2.$$

Z toho ďalej dostaneme kinetickú energiu závažia ako

$$E_{k2} = \frac{1}{2}Mv_2^2 = \frac{1}{2}M \frac{L^2}{4} \frac{(l - l_0)^2}{l_0^2} \dot{\varphi}^2.$$

Potrebujeme ešte dostať  $E_{\text{p}1}$  do analogického tvaru. Zaujíma nás iba zmena potenciálnej energie v porovnaní so stavom  $\varphi = 0$ , a konkrétnie iba druhý člen jej Taylorovho rozvoja, čiže rozvinieme kosínus a máme:

$$\Delta E_{\text{p}1} = E_{\text{p}1}(\varphi) - E_{\text{p}1}(0) = \frac{1}{2}gL^2\lambda \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) - \frac{1}{2}gL^2\lambda = -\frac{1}{4}gL^2\lambda\varphi^2.$$

Znamienko mínus vo výraze je opäť dôležité a zároveň pochopiteľné:  $\varphi = 0$  by bola pre samotnú tyč labilná poloha.

Spočítame celkovú potenciálnu energiu

$$E_{\text{p}} = \Delta E_{\text{p}1} + E_{\text{p}2} = \frac{1}{2}g \left( M \frac{hLl}{2l_0^2} + ML \frac{l - l_0}{2l_0} - \frac{1}{2}L^2\lambda \right) \varphi^2,$$

čiže dostávame „efektívnu tuhost“

$$k_{\text{ef}} = g \left( M \frac{hLl}{2l_0^2} + ML \frac{l - l_0}{2l_0} - \frac{1}{2}L^2\lambda \right)$$

ako tuhost pre premennú  $\varphi$ , takže ju dostávame v iných jednotkách ako klasickú tuhost.

Obdobne z kinetickej energie získame efektívnu hmotnosť

$$E_{\text{k}} = E_{\text{k}1} + E_{\text{k}2} = \frac{1}{2} \left( M \frac{L^2}{4} \frac{(l - l_0)^2}{l_0^2} + \frac{1}{3}\lambda L^3 \right) \varphi^2$$

$$m_{\text{ef}} = M \frac{L^2}{4} \frac{(l - l_0)^2}{l_0^2} + \frac{1}{3}\lambda L^3.$$

Tá rovnako nebude v kilogramoch, dôležité je len to, že „efektívna tuhost a hmotnosť“ prislúchajú špecifickým premenným, čiže v našom prípade  $\varphi$  a  $\dot{\varphi}$ .

Výsledky dosadíme do vzorca pre periódu oscilátora

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_{\text{ef}}}{k_{\text{ef}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{M \frac{L^2}{4} \frac{(l - l_0)^2}{l_0^2} + \frac{1}{3}\lambda L^3}{M \frac{hLl}{2l_0^2} + ML \frac{l - l_0}{2l_0} - \frac{1}{2}L^2\lambda}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g} \sqrt{\frac{\frac{M}{4} \frac{(l - l_0)^2}{l_0^2} + \frac{1}{3}\lambda L}{M \frac{hLl}{2l_0^2} + ML \frac{l - l_0}{2l_0} - \frac{1}{2}L^2\lambda}}} = 5,65 \text{ s}.$$

### Úloha 50 ... nabité obruč v kouli

9 bodů

Mějme dutou ideálně vodivou kouli o poloměru  $R = 9,0 \text{ m}$ . Do jejího středu umístíme bodový náboj  $Q = 6,0 \text{ nC}$ . Dále do koule umístíme kruhovou obruč o poloměru  $\rho = 7,0 \text{ m}$  tak, aby její osa procházela středem koule a aby vzdálenost středu koule a středu obruče byla  $r = 5,0 \text{ m}$ . Obruč je rovnoměrně nabité lineárním nábojem  $\lambda = 3,0 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$ . Na úsečku spojující střed obruče a střed koule umístíme testovací náboj s poměrem náboje ku hmotnosti  $q/m = 0,30 \text{ C}\cdot\text{kg}^{-1}$  (uvažujeme, že neovlivní rozložení náboje na kouli) a necháme ho ustálit v rovnovážné poloze

uvnitř koule. Testovací náboj nyní nepatrne vychýlíme – jaká bude perioda malých kmitů  $T$ ? Petr varioval úlohu z Fyziklání.

Abychom mohli úlohu začít řešit, musíme si nejdříve uvědomit, co znamená, že je koule (ideálně) vodivá – umístíme-li dovnitř koule externí náboj, veškeré náboje na ní se přemístí tak, aby byl celkový potenciál na ní konstantní. To ovšem znamená, že se na kouli vytvoří nábojová hustota, která bude mít vlastní elektrické pole. Klasickým trikem elektrostatiky pak je, že u jednoduchých objektů, jako je rovina nebo koule si účinky tohoto pole můžeme „simulovat“ vložením fiktivního náboje jisté velikosti do jistého místa. U koule můžeme fiktivní náboj nalézt *kulovou inverzí*. Máme-li uvnitř vodivé koule o poloměru  $R$  ve vzdálenosti  $l$  od středu náboj  $q$ , je správným fiktivním nábojem náboj o velikosti

$$q' = -\frac{R}{l}q,$$

nacházející se ve vzdálenosti

$$l' = \frac{R^2}{l}$$

od středu koule na ose spojující střed koule a náboj  $q$ . Elektrickou intenzitu v libovolném bodě koule pak určíme pouze započtením příspěvků od všech skutečných a fiktivních nábojů.<sup>7</sup>

Náboj uprostřed koule je vůči jejímu povrchu symetricky umístěný, tedy na něm budí konstantní nábojovou hustotu automaticky (a jelikož koule není uzemněná, tato konstanta musí být 0) – máme tedy štěstí a trik s fiktivním nábojem pro tento případ nepotřebujeme.

U obruče se již bez fiktivních nábojů neobejdeme – kulovou inverzí nalezneme fiktivní obrouč. Představme si, že je obruč složena z nekonečně malých nábojů  $dq = \lambda dl$  umístěných ve vzdálenosti  $l = \sqrt{r^2 + \rho^2}$  od středu koule. Ty můžeme invertovat, ale zároveň musíme brát v úvahu, že se obruč natáhne, čímž se zmenší nábojová hustota

$$\lambda' = \frac{dq'}{dl'} = \frac{-\frac{R}{\sqrt{r^2 + \rho^2}} dq}{\frac{P}{\rho} dl} = -\frac{R\rho}{P\sqrt{r^2 + \rho^2}} \lambda,$$

kde  $P$  jsme si označili poloměr fiktivní obrouče. Vzdálenost jejích bodů od středu je

$$L = \frac{R^2}{\sqrt{r^2 + \rho^2}}.$$

Napišme si nyní elektrické intenzity na ose obruče procházející středem koule. Pro náboj  $Q$  ve středu intenzitu získáme jednoduše použitím Coulombova zákona

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2},$$

kde  $z$  je vzdálenost od středu na ose. Intenzita buzená na ose obruče bude malinko komplikovanější. Coulombův zákon můžeme použít pro jednotlivé náboje  $dq$ ,

$$dE_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{\rho^2 + (r-z)^2} dl.$$

---

<sup>7</sup>Tyto dva vztahy můžeme odvodit pouze požadavkem na konstantní potenciál na povrchu koule.

Celkovou intenzitu pak získáme přeintegrováním přes celou obruč. Ovšem, integraci si můžeme zjednodušit dvěma faktory. Zaprvé, že symetrie na ose plyne, že veškeré příspěvky k intenzitě buzené obručí kromě toho ve směru osy se navzájem vyruší. Tedy stačí brát intenzitu ve směru  $z$

$$dE_{2,z} = dE_2 \cos \vartheta ,$$

kde

$$\cos \vartheta = \frac{r - z}{\sqrt{\rho^2 + (r - z)^2}} .$$

Zadruhé, příspěvek od každého dq je až na směr stejný, což nám integraci ve směru  $z$  zjednoduší na prosté násobení faktorem  $2\pi\rho$ . Celkem tedy

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{\rho(r - z)}{(\rho^2 + (r - z)^2)^{3/2}} .$$

Analogicky můžeme určit příspěvek k celkové intenzitě od fiktivní obruče. Předtím, než napíšeme výslednou intenzitu, poznamenejme si vzdálenost fiktivní obruče od  $z$ , kterou označíme  $d$  a poloměr fiktivní obruče  $P$ :

$$d = \frac{R^2 r}{r^2 + \rho^2} - z ,$$

$$P = \frac{R^2 \rho}{r^2 + \rho^2} .$$

Výše uvedené vztahy jsme odvodili s využitím podobnosti trojúhelníků tvořených plochou skutečné obruče a osou a plochou fiktivní obruče a osou. Celkový příspěvek k intenzitě od fiktivní obruče je pak

$$E_3 = -\frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{R\rho}{(r^2 + \rho^2)^{3/2}} \frac{R^2 r - z(r^2 + \rho^2)}{\left( \left( \frac{R^2 r}{r^2 + \rho^2} - z \right)^2 + \frac{R^4 \rho^2}{(r^2 + \rho^2)^2} \right)^{3/2}}$$

$$= -\frac{\lambda R \rho (r^2 + \rho^2)^{3/2}}{2\varepsilon_0} \frac{R^2 r - z(r^2 + \rho^2)}{\left( (R^2 r - z(r^2 + \rho^2))^2 + R^4 \rho^2 \right)^{3/2}} .$$

Celková intenzita na ose je pak

$$E = E_1 + E_2 + E_3 ,$$

rovnovážnou polohu  $z_0$  nalezneme řešením rovnice  $E(z_0) = 0$ . Výsledné algebraické peklíčko doporučujeme řešit numericky, např. v Pythonu – my jsme například použili funkci *bisect* z modulu *optimize* z knihovny *scipy*. Takto získáváme kořen

$$z_0 \doteq 3,383 \text{ m} ,$$

tedy rovnovážná poloha testovacího náboje se nachází něco přes tři metry nad středem koule na ose obruče.

Jak nyní nalézt periodu kmitů? V první řadě si napišeme pohybovou rovnici testovacího náboje v poloze  $z$ :

$$m\ddot{\xi} = qE(\xi) .$$

Zde jsme si pro zjednodušení zápisu zavedli novou proměnnou  $\xi = (z - z_0)$  (povšimněme si, že libovolná derivace  $\xi$  se rovná příslušné derivaci  $z$ , neboť  $z_0$  je konstanta). Pokud bychom měli linearitu, tj.  $E(\xi) = -\varepsilon\xi$ , kde  $\varepsilon$  je nějaká kladná konstanta s jednotkou  $\text{V}\cdot\text{m}^{-2}$ , máme vyhráno, neboť bychom mohli pohybou rovnici upravit do tvaru

$$\ddot{\xi} + \frac{q}{m}\varepsilon\xi = 0,$$

což je shodné s rovnicí harmonických kmitů

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Periodu  $T$  pak získáme z kruhové rychlosti  $\omega$  známým vztahem  $T = 2\pi/\omega$ . Intenzita  $E$  sama o sobě lineární není, ovšem, pro malé výchylky jí můžeme rozvést do Taylorovy řady a vzít první dva členy. Nejjednodušší je udělat numerickou derivaci, ale můžeme si to spočítat i analyticky. Řada má tvar

$$E(z) = E(z_0) + \frac{\partial E}{\partial z} \Big|_{z_0} (z - z_0) + o((z - z_0)^2) = \frac{\partial E}{\partial z} \Big|_{z_0} (z - z_0) + o((z - z_0)^2),$$

kde první člen je nulový, protože rozvíjíme okolo rovnovážné polohy. Derivaci intenzity podle  $z$  spočítáme jako součet derivací dlíček intenzit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial z} &= -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{z^3}, \\ \frac{\partial E_2}{\partial z} &= \frac{\lambda\rho}{2\varepsilon_0} \left( \frac{2(r-z)^2 - \rho^2}{(\rho^2 + (r-z)^2)^{5/2}} \right), \\ \frac{\partial E_3}{\partial z} &= -\frac{\lambda}{2\varepsilon_0} \frac{R\rho}{(r^2 + \rho^2)^{5/2}} \left( \frac{2(R^2r - z(r^2 + \rho^2))^2 - R^4\rho^2}{\left( \left( \frac{R^2r}{r^2 + \rho^2} - z \right)^2 + \frac{R^4\rho^2}{(r^2 + \rho^2)^2} \right)^{5/2}} \right), \\ \frac{\partial E}{\partial z} &= \frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{\partial E_3}{\partial z}. \end{aligned}$$

Pro vyčíslení derivace v bodě  $z_0$  můžeme opět použít Python. Získáváme mezivýsledek

$$\frac{\partial E}{\partial z} \Big|_{z_0} \doteq -753 \text{ V}\cdot\text{m}^{-2} \quad \text{respektive} \quad \varepsilon \doteq 753 \text{ V}\cdot\text{m}^{-2}.$$

Periodu  $T$  pak spočítáme jako

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{q}{m}\varepsilon}} \doteq 0,42 \text{ s}.$$

**Úloha 51 ... velikonoční**

8 bodů

Kuba byl o Velikonocích úspěšný, a tak se na konci jeho pomlážky se nacházel těžký shluk maší. Jak těžký byl tento shluk? Pomlážku považujeme za dokonale tenký nehmotný homogenní prut délky  $l = 1,0 \text{ m}$  (s konci  $A$  a  $B$ ) a tuhostí v ohybu  $K = 0,80 \text{ N}\cdot\text{m}^2$ ; pomlážka se při jejím svislému držení za konec  $A$  (přičemž maše jsou přivázány ke konci  $B$ ) od vertikální osy odklonila o úhel  $\theta_0 = 45^\circ$  a tečna na konci pomlážky  $B$  svírala s vertikálou úhel  $\theta_0$ , přičemž tečna na konci pomlážky  $A$  byla svislá. Tuhost v ohybu (angl. bending stiffness) je definována vztahem  $\tau = K \kappa$ , kde  $\tau$  je vnější moment síly a  $\kappa$  zakřivení prutu.

*Kubu inspirovalo tradiční týráni žen.*

Nechť je pomlážka v klidu umístěna tak, že se její upevněný konec nachází v počátku sourůdnicového systému  $A = (0, 0)$  a její volný konec v bodě  $B = (0, l)$ . Pomlážku si můžeme rozdělit na infinitezimální délkové elementy konstantní délky  $ds$  ohraničené body  $A_k$  a  $A_{k+1}$ , které se budou chovat jako nehmotné tuhé tyče. Index  $k$  roste od upevněného konce k volnému, tedy  $A_0 = A$ .

Při deformaci se body  $A_k$  zobrazí do bodů  $A'_k$ , čímž mezi elementy vznikne nenulový úhel. Označíme si  $d\mathbf{r}_k = A'_{k+1} - A'_k$ . Element  $E_k$  (tedy element s vektorem  $d\mathbf{r}_k$ ) zřejmě působí na element  $E_{k+1}$  nějakou reakční silou  $\mathbf{R}_{k+1}$ . Mimo tyto reakční síly však na elementy působí už jen čistý moment síly způsobený elastickou odezvou nenulového úhlu mezi elementy. Na element  $E_k$  tak působí síla  $\mathbf{R}_k$  v bodě  $A_k$  od elementu  $E_{k-1}$  a zároveň na něj působí síla  $-\mathbf{R}_{k+1}$  od elementu  $E_{k+1}$ . Z první impulsové věty tedy pro element  $E_k$  plyne

$$\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_{k+1} = 0. \quad (21)$$

Zároveň víme, že na volný konec žádná reakční síla nepůsobí, naopak tam působí externí síla  $\mathbf{F}$ . Zde tedy platí

$$\mathbf{R}_n + \mathbf{F} = 0, \quad (22)$$

kde  $n$  je index posledního elementu. Kombinací vztahů (21) a (22) dostáváme, že  $\mathbf{R}_k = -\mathbf{F}$  pro všechna  $k$ .

Nyní uvažme momenty sil působící na element  $E_k$  vzhledem k ose otáčení v bodě  $A_k$ . Na element působí moment síly  $\boldsymbol{\tau}_k$  způsobený elastickým ohybem v bodě  $A_k$  a také moment síly  $-\boldsymbol{\tau}_{k+1}$  způsobený elastickým ohybem v bodě  $A_{k+1}$ . Jelikož oba momenty jsou čisté (tedy jejich účinek nepůsobí na element žádnou celkovou vnější silou), jsou vektory  $\boldsymbol{\tau}_k$  stejně vzhledem k libovolné ose otáčení.

Dále na element působí moment síly vyvolaný reakčními silami  $\mathbf{R}_k$  a  $-\mathbf{R}_{k+1}$ . První z nich má ale k ose v bodě  $A_k$  nulové rameno a nijak tedy nepřispívá. Druhá věta impulsová tak celkem říká

$$\boldsymbol{\tau}_k - \boldsymbol{\tau}_{k+1} - d\mathbf{r}_k \times \mathbf{R}_{k+1} = 0.$$

Elementární vektory  $d\mathbf{r}_k$  musí mít všechny stejnou velikost  $ds$ , která odpovídá délce jednoho elementu na klidové pomlážce (elementy se nedeformují, pouze natáčí, neboť zanedbáváme pružnost v tahu). Můžeme tedy psát  $d\mathbf{r}_k = \mathbf{t}_k ds$ , kde  $\mathbf{t}_k$  je jednotkový vektor ve směru  $d\mathbf{r}_k$ . Zároveň přepíšeme-li  $\mathbf{R}_{k+1} = -\mathbf{F}$ , dostáváme

$$-d\boldsymbol{\tau}_k + ds \mathbf{t}_k \times \mathbf{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \mathbf{t} \times \mathbf{F}, \quad (23)$$

kde  $\mathbf{t}_k$  přešel na tečný vektor  $\mathbf{t}$ . Nechť  $\varphi(s)$  je úhel, který svírá vektor  $\mathbf{t}(s)$  s vektorem  $\mathbf{e}_x$  ve smyslu

$$\mathbf{t} = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y.$$

Zakřivení pomlážky v bodě  $s$  je definováno jako

$$\begin{aligned}\kappa &= \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d}{ds} (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y) \right\| = \left\| -\sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{e}_x + \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{e}_y \right\| \\ &= \left[ \sin^2 \varphi \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \cos^2 \varphi \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right]^{1/2} = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|.\end{aligned}$$

Zároveň máme zadánu tuhost v ohybu  $K$  vztahem

$$\tau = K\kappa \quad \Rightarrow \quad \tau = -K \frac{d\varphi}{ds} \mathbf{e}_z, \quad (24)$$

což jednoduše nahlédneme úvahou o směru působícího momentu síly při změně úhlu  $d\varphi$ . Součin na pravé straně (23) můžeme přepsat na

$$\mathbf{t} \times \mathbf{F} = (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y) \times (-mg \mathbf{e}_y) = -mg \cos \varphi \mathbf{e}_z.$$

Dosazením (24) do (23) tedy dostáváme

$$-K \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -mg \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{mg}{K} \cos \varphi.$$

Označíme-li nyní  $\theta = (\pi/2) - \varphi$ , což je pro naši úlohu přirozenější, neboť  $\theta$  odpovídá odklonu doprava od vertikální osy, dostáváme

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{mg}{K} \sin \theta. \quad (25)$$

Tato rovnice je nám ale povědomá! Analogický tvar má také pohybová rovnice kyvadla

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta = -\alpha \sin \theta,$$

kde  $\theta$  je odklon od vertikální osy,  $L$  je délka kyvadla a podíl jsme označili  $\alpha$ .

Řešení nyní můžeme diskutovat s pomocí rychlostního fázového prostoru kyvadla. Pro fixní hmotnost stužek  $m$  a tuhost  $K$  máme konstantní parametr  $\alpha$ . Okrajové podmínky ze zadání říkají, že trajektorie v rychlostním fázovém prostoru musí začínat na ose  $\theta = 0$  a musejí končit na ose  $\dot{\theta} = 0$ . To mimo jiné znamená, že nesmíme opustit oblast uzavřených trajektorií, která připomíná *oko* se středem v  $\theta = \dot{\theta} = 0$ . Délka pomlážky tedy odpovídá čtvrtině periody pomyslného kyvadla, kterou je možné vyjádřit jako

$$T = \frac{4}{\sqrt{\alpha}} K \left( \sin \frac{\theta_0}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad l = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} K \left( \sin \frac{\theta_0}{2} \right), \quad (26)$$

kde  $\theta_0 = \theta(l)$  (což odpovídá maximální výchylce kyvadla) a  $K(k)$  je úplný eliptický integrál prvního druhu, což lze bud odvodit řešením diferenciální rovnice (25), nebo jednoduše dohledat.

Funkce  $K(k) \rightarrow \pi/2$  pro  $k \rightarrow 0$ . Pro malá  $\theta$  tak dostáváme periodu

$$T \approx 2\pi \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}},$$

což odpovídá lineární approximaci. Naopak  $K(k) \rightarrow \infty$  pro  $k \rightarrow 1$ , což zřejmě nastane pro  $\theta_0 = \pi$ . Vypadá to, že přípustné hodnoty délky pomlázky  $l$  tedy leží v intervalu

$$l \in \left[ \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}, \infty \right) = \left[ \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{K}{mg}}, \infty \right) =: [l_c, \infty).$$

Co se ale stane pro  $l < l_c$ ? Nezapomeňme, že funkce  $\theta(s) \equiv 0$  je vždy přípustným řešením splňujícím okrajové podmínky. Pro  $l > l_c$  je takové řešení nestabilní, a navíc nás zajímá řešení, při kterém je pomlázka skutečně ohnutá. Pro  $l < l_c$  je toto triviální řešení ale **jediné řešení**. Pro velmi krátkou pomlázku, nebo ekvivalentně velmi malou sílu, tak pomlázka zůstane nedeformovaná. Pro  $l > l_c$  jsme vždy schopni najít odpovídající deformované řešení. Úloha se ptá na hmotnost stúžek. S využitím (26) snadno dopočteme

$$l = \sqrt{\frac{K}{mg}} K \left( \sin \frac{\theta_0}{2} \right) \Rightarrow m = \frac{K}{gl^2} K^2 \left( \sin \frac{\theta_0}{2} \right) \doteq 0,22 \text{ kg}.$$

## Úloha 52 ... termální neutryny

9 bodů

Jindra by ze všeho nejvíce na světě chtěl detektovat termální neutryny. Proto si pořídil polovodičový pixelový detektor částic a fluorid lithný LiF. Jindrův detektor je polovodičová destička s vrstvou fluoridu lithného na vrchní ploše. Termální neutryny dopadají na vrstvu fluoridu lithného kolmo.

Izotop lithia  ${}^6\text{Li}$  reaguje s termálními neutryny za vzniku alfa částice a jádra tritia



Účinný průřez reakce je  $\sigma = 940 \text{ b}$ . Jádro tritia je emitováno s kinetickou energií  $2,73 \text{ MeV}$  a alfa částice je emitována s kinetickou energií  $2,05 \text{ MeV}$ . Jindrův detektor hledá neutryny nepřímo skrz detekce alfa částic a jader tritia. Množství přímých interakcí neutronů v polovodiči je zanedbatelné. Můžete předpokládat, že každá alfa částice nebo jádro tritia, které vstoupí do polovodičového detektoru, jsou detekovány. Dolet alfa částice s energií  $2,05 \text{ MeV}$  ve fluoridu lithném je  $l_\alpha = 5,94 \mu\text{m}$ . Dolet jádra tritia s energií  $2,73 \text{ MeV}$  ve fluoridu lithném je  $l_H = 32,9 \mu\text{m}$ . Dráhy částic jsou přímé, nezakřivují se.

Jindra chce najít takovou tloušťku vrstvy LiF, aby dosáhl co nejvyšší účinnosti detekce neutronů (tzn. počet detekovaných neutronů dělený počtem dopadajících neutronů), ale zároveň nechce použít více LiF, než je nutné. Jaká je nejvyšší dosažitelná účinnost detekce?

Hustota fluoridu lithného je  $\rho = 2635 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Lithium obsahuje  $p = 7,50\%$  atomů izotopu  ${}^6\text{Li}$ . Zbytek jsou atomy izotopu  ${}^7\text{Li}$ , který s neutryny nereaguje.

*Jindra zatím nemá detektor termálních neutronů, pouze jej namodeloval v Geant4.*

Nejdříve si povíme pár faktů o dynamice reakce izotopu  ${}^6\text{Li}$  s termálním neutronem



Atom lithia je uvězněný v krystalické mřížce fluoridu lithného a v důsledku ekvipartičního teóru má kinetickou energii rádu  $10^{-2} \text{ eV}$ , stejně jako termální neutron. Kinetické energie alfa částice a jádra tritia jsou o mnoho rádů vyšší. Jejich kinetická energie pochází z přeměněné

vazebné energie jádra lithia. Těžiště soustavy  ${}^6\text{Li}$  s neutronem se v laboratorní soustavě pohybuje o mnoho řádů pomaleji, než je rychlosť vyletující alfa částice a jádra tritia, můžeme jej tedy považovat za stacionární. Jelikož se jedná o dvoučasticový rozpad systému s nulovou počáteční rychlostí, mají produkty  ${}^4\text{He}$  a  ${}^3\text{H}$  v laboratorní vztažné soustavě vždy stejnou kinetickou energii. Rozpad taktéž nepreferuje žádný směr, alfa částice vyletují izotropně a jádro tritia vždy letí opačným směrem než alfa částice. Alfa částice a jádro tritia jsou nabité, takže ve fluoridu lithném ztrácejí energii převážně elektromagnetickou interakcí s elektrony. Zároveň jsou řádově těžší než elektrony, tudíž při interakcích mění směr jen velmi málo a letí přímo. Díky stejné počáteční energii při každé reakci neutronu s jádrem  ${}^6\text{Li}$  mají i alfa částice i jádra tritia ve fluoridu lithném konstantní doletové vzdálenosti  $l_\alpha = 5,94 \mu\text{m}$  a  $l_H = 32,9 \mu\text{m}$ .

Hustota pravděpodobnosti toho, že alfa částice poletí do prostorového úhlu  $d\Omega$ , je

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi}.$$

Pokud vyjádříme infinitezimální prostorový úhel  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  pomocí azimutálního úhlu  $\varphi$  a zenitového úhlu  $\theta$ , dostaneme hustotu pravděpodobnosti pro úhly  $\varphi$  a  $\theta$

$$f(\theta, \varphi) = \frac{d^2 P}{d\theta d\varphi} = \frac{1}{4\pi} \sin \theta.$$

Abychom vůbec měli šanci detektovat alfa částici, musí neutron interagovat s izotopem lithia nejvýše ve vzdálenosti  $l_\alpha$  nad povrchem polovodičového detektoru. Podobně, abychom byli schopní detektovat jádro tritia, musí neutron interagovat ve vzdálenosti nejvýše  $l_H$  nad povrchem polovodiče. Vzhledem k tomu, že tritium a alfa částice vždy letí opačnými směry, neexistuje situace, kdy bychom detekovali obě částice současně. Pravděpodobnost detekce obou produktů rozpadu  $P(\alpha \wedge {}^3\text{H}) = 0$  je nulová. Bud zachytíme alfa částici, nebo zachytíme jádro tritia, nebo nedetekujeme nic. Tím pádem pravděpodobnost  $P(\alpha \vee {}^3\text{H})$  detekce alfa částice nebo tritia je prostým součtem

$$P(\alpha \vee {}^3\text{H}) = P(\alpha) + P({}^3\text{H}) - P(\alpha \wedge {}^3\text{H}) = P(\alpha) + P({}^3\text{H}).$$

Vzhledem ke stejnemu charakteru situace nám stačí odvodit pouze pravděpodobnost detekce alfa částice  $P(\alpha)$ . Pravděpodobnost detekce tritia  $P({}^3\text{H})$  pak získáme pouhou záměnou  $l_\alpha \rightarrow l_H$ .

Nech termální neutron reaguje s jádrem lithia ve výšce  $x$  nad povrchem polovodiče. Dosah alfa částice ve fluoridu lithném je omezen kulovou plochou o poloměru  $l_\alpha$ . V případě  $x > l_\alpha$  je pravděpodobnost detekce alfa částice v detektoru nulová –  $P(\alpha | x) = 0$ . V případě  $x \leq l_\alpha$  získáme podmíněnou pravděpodobnost detekce alfa částice integrací přes prostorový úhel na kulové ploše, kde alfa částice projde povrchem polovodiče. Orientujme kartézskou souřadnicovou osu  $z$  od bodu interakce směrem k detektoru kolmo na povrch polovodiče. Zenitový úhel  $\theta$  měříme od této osy. Alfa částice zasáhne detektor, pokud z místa interakce vyletí se zenitovým úhlem od 0 do  $\theta_{\max} = \arccos(x/l_\alpha)$ . Integrál pro podmíněnou pravděpodobnost je

$$P(\alpha | x) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_{\max}} f(\theta, \varphi) d\theta = 2\pi \int_0^{\theta_{\max}} \frac{1}{4\pi} \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} [-\cos \theta]_0^{\arccos(x/l_\alpha)},$$

$$P(\alpha | x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x}{l_\alpha} \right).$$

Celkový vztah pro podmíněnou pravděpodobnost detekce v závislosti na  $x$  je

$$P(\alpha \mid x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_\alpha}\right), & 0 \leq x \leq l_\alpha, \\ 0, & x > l_\alpha. \end{cases}$$

Pravděpodobnost, že neutron bude interagovat výše než  $x$  nad povrchem polovodiče, je

$$I(x) = 1 - \exp(-(D - x)/D_0) \approx (D - x)/D_0, \quad 0 \leq x \leq D,$$

kde  $D$  je celková tloušťka vrstvy fluoridu lithného a  $D_0$  je střední dráha neutronů. Udělali jsme předpoklad  $D_0 \gg D$  a použili jsme approximaci  $1 - \exp(-y) \approx y$  pro  $|y| \ll 1$ . Až později vyčíslíme  $D$  a  $D_0$ , ověříme si, že nás předpoklad byl správný. Hustota pravděpodobnosti, že neutron zinteraguje ve výšce  $x$ , je

$$g(x) = \left| \frac{dI}{dx} \right| = \frac{1}{D_0}.$$

Celkovou pravděpodobnost detekce alfa částice zjistíme pomocí integrálu

$$P(\alpha) = \int_0^\infty P(\alpha \mid x) g(x) dx = \int_0^{l_\alpha} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{l_\alpha}\right) \frac{1}{D_0} dx = \frac{1}{2D_0} \left[ x - \frac{x^2}{2l_\alpha} \right]_0^{l_\alpha} = \frac{l_\alpha}{4D_0}.$$

Vrstva fluoridu lithného musí mít minimálně tloušťku  $l_\alpha$ . Pravděpodobnost detekce jádra tritia je potom analogická

$$P(^3\text{H}) = \frac{l_\text{H}}{4D_0},$$

a vrstva fluoridu lithného musí mít minimální tloušťku  $l_\text{H}$ .

Pravděpodobnost detekce termálního neutronu skrze jeho reakci s izotopem lithia  ${}^6\text{Li}$  je tedy

$$P(\alpha \vee {}^3\text{H}) = P(\alpha) + P({}^3\text{H}) = \frac{l_\alpha + l_\text{H}}{4D_0},$$

a to v případě, že vrstva fluoridu lithného je tlustší než maximální z délek  $l_\alpha$ ,  $l_\text{H}$ . Abychom tedy dosáhli nejvyšší účinnosti detekce a zároveň nepoužili více LiF, než je nutné, vrstva LiF bude mít tloušťku  $D = l_\text{H} = 32,9 \mu\text{m}$ .

Nyní zbývá poslední úkol. Abychom mohli vyčíslit pravděpodobnost  $P(\alpha \vee {}^3\text{H})$ , musíme spočítat střední dráhu neutronů  $D_0$  ve fluoridu lithném. Molární hmotnost fluoru je  $M_F = 19,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Molární hmotnosti izotopů  ${}^6\text{Li}$  a  ${}^7\text{Li}$  jsou  $M_6 = 6,00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  a  $M_7 = 7,00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Molární hmotnost fluoridu lithného LiF je

$$M_{\text{LiF}} = M_F + (pM_6 + (1-p)M_7) = 25,9 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

V každé molekule LiF je jeden atom lithia. Objemová hustota izotopu  ${}^6\text{Li}$  ve fluoridu lithném je

$$n_6 = p \frac{\rho N_A}{M_{\text{LiF}}} = 4,59 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3},$$

kde  $N_A$  je Avogadrova konstanta. Střední dráha neutronů ve fluoridu lithném je

$$D_0 = \frac{1}{\sigma n_6} = 2,32 \text{ mm} \gg D,$$

čili náš původní předpoklad  $D_0 \gg D$  byl správný. Pravděpodobnost detekce termálních neutronů v Jindrově detektoru je

$$P(\alpha \vee {}^3\text{H}) = \frac{l_\alpha + l_{\text{H}}}{4D_0} = 0,419\%.$$

### Úloha 53 ... přitažlivý Petr

8 bodů

Jak dobře víme, David odpuzuje ženy silou, která působí radiálně ve směru od něj a závisí pouze na vzdálenosti s konstantou úměrnosti  $120 \text{ N}\cdot\text{m}^2$ . Kolem Petra naopak vždy vzniká hlouček žen. David chtěl změřit, jakým způsobem Petr ženy přitahuje, a zjistil, že Petrovo kouzlo spočívá v radiální přitažlivé síle s konstantou úměrnosti  $30,0 \text{ N}\cdot\text{m}^3$ .

V okamžiku, kdy David stojí na rovině ve vzdálenosti 1,00 m od Petra, se na rovině v jejich blízkosti objeví žena. Určete plochu oblasti, v níž se mohla objevit, aby byla přitahována k Petrovi, tj. aby výsledná síla, která na ni působí, svírala se spojení jí a Petra úhel menší než pravý. Jiné než zmíněné síly neuvažujte.

*David přemýšlel, jak navázat na úlohu z Fyziklání.*

Pred výpočtom je dobré zamyslieť sa nad zadaním kvalitatívne. Môžeme si všimnúť, že Petrova prítažlivá sila klesá s rastúcou vzdialenosťou rýchlejšie ako Davidova odpudivá sila. Z pohľadu Petra v každom smere existuje hranica, za ktorou dominuje interakcia s Davidom, a dievča bude od tohto „dipólu“ odpudzované. Z podobnej úvahy pre malé vzdialenosť vyplýva, že existuje nejaké nenulové okolie Petra, kde prevláda jeho prítažlivá sila. Hľadaná oblasť je preto určite konečná a nenulová. Za povšimnutie stojí symetria úlohy voči osi súmernosti, ktorá prechádza Davidom a Petrom. Preto budeme hľadať riešenie iba v jednej polovine.

Najprv sa pokúsime úlohu vyriešiť analyticky. Zaujíma nás uhol medzi výslednou silou pôsobiacou na dievča a spojnicou dievčata a Petra. Prirodzene sa ponúka popísovať problém pomocou polárnych súradníc  $(r_P, \theta_P)$ , pričom Petra umiestnime do počiatku a os, od ktorej budeme merať uhol  $\theta_P$ , bude smerovať k Davidovi. Petrova prítažlivá sila má potom jednoduchý tvar

$$\mathbf{F}_P = -\frac{k_P}{r_P^3} \hat{\mathbf{e}}_{r_P}.$$

Uvažujme trojuholník, ktorý tvoria Peter, David a dievča. Kvadrát vzdialenosť medzi Davidom a dievčatom môžeme určiť pomocou kosínusovej vety

$$r_D^2 = r_P^2 + d^2 - 2dr_P \cos \theta_P.$$

Využitím sínusovej vety vieme analogicky určiť uhol pri vrchole, kde sa nachádza dievča

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{d}{r_D} \sin \theta_P \right).$$

Davidovu odpudivú silu potom môžeme rozložiť na zložky

$$\mathbf{F}_D = \frac{k_D}{r_D^2} (\cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_{r_P} + \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_{\theta_P}).$$

Riešenie úlohy spočíva v hľadaní oblasti, kde výsledná sila pritahuje dievča bližšie k Petrovi, teda platí

$$(\mathbf{F}_P + \mathbf{F}_D) \cdot \hat{\mathbf{e}}_{r_P} < 0.$$

Z tvaru síl a geometrického náčrtu situácie vidíme, že na nájdenie hranice  $b(\theta)$  by sme museli vyriešiť kubickú rovnici pre všetky  $\theta \in (0, \pi)$ . Aj keby sa nám to podarilo, stále by sme potrebovali výsledný tvar zintegrovať. Analyticky sa ďalej nedostaneme, ostáva nám riešiť úlohu experimentálne alebo prostredníctvom simulácie. Z časového a etického hľadiska volíme druhú možnosť.

Jedným zo spôsobov, ako numericky určiť hľadanú plochu, je spočítať silové pôsobenie poľa na mriežke a určiť počet bodov, v ktorých je splnená zadaná podmienka. V takom prípade sa oplatí prejsť ku karteziánskym súradniciam

$$x = r_P \cos \theta_P \quad \text{a} \quad y = r_P \sin \theta_P,$$

kde pre vzdialenosť dievča od Petra a Davida platí

$$\begin{aligned} r_P^2 &= x^2 + y^2, \\ r_D^2 &= (x - d)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Uhly medzi osou  $x$  a jednotlivými spojnicami sú

$$\begin{aligned} \theta_P &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \\ \theta_D &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x - d}. \end{aligned}$$

Z rozkladu síl

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_P &= -\frac{k_P}{r_P^3} (\cos \theta_P \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \theta_P \hat{\mathbf{e}}_y), \\ \mathbf{F}_D &= \frac{k_D}{r_D^3} (\cos \theta_D \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \theta_D \hat{\mathbf{e}}_y), \end{aligned}$$

dostávame prvú časť simulácie, a to funkciu, ktorá každému bodu na mriežke priradí silu, ktorá v ňom pôsobí na dievča. Výsledok vidíme na obrázku 6.

```
def F(x: float, y:float) -> (float, float):
    phi_P = atan2(y, x)
    phi_D = atan2(y, x - d)

    F_P = k_P / (x ** 2 + y ** 2) ** (3/2)
    F_D = k_D / ((x - d) ** 2 + y ** 2)

    F_x = F_D * cos(phi_D) - F_P * cos(phi_P)
    F_y = F_D * sin(phi_D) - F_P * sin(phi_P)

    return F_x, F_y
```

Pre vhodnú voľbu mriežky prejdeme všetkými jej bodmi a určíme, v koľkých z nich je splnená podmienka

$$(\mathbf{F}_P + \mathbf{F}_D) \cdot (x \hat{\mathbf{e}}_x + y \hat{\mathbf{e}}_y) < 0.$$

Tá len inak vyjadruje požiadavku, aby výsledná sila mala kladnú zložku v smere k Petrovi, nakoľko  $x \hat{\mathbf{e}}_x + y \hat{\mathbf{e}}_y$  predstavuje polohový vektor od Petra k dievčaťu.

```

N = 0
for i in range(grid_height):
    for j in range(grid_width):
        x = dx * (j - grid_width // 2) + d / 2 # origin in the middle of the grid
        y = dx * i
        try:
            F_x, F_y = F(x, y)
            if x * F_x + y * F_y < 0:
                N += 1
        except ZeroDivisionError:
            N += 1

```

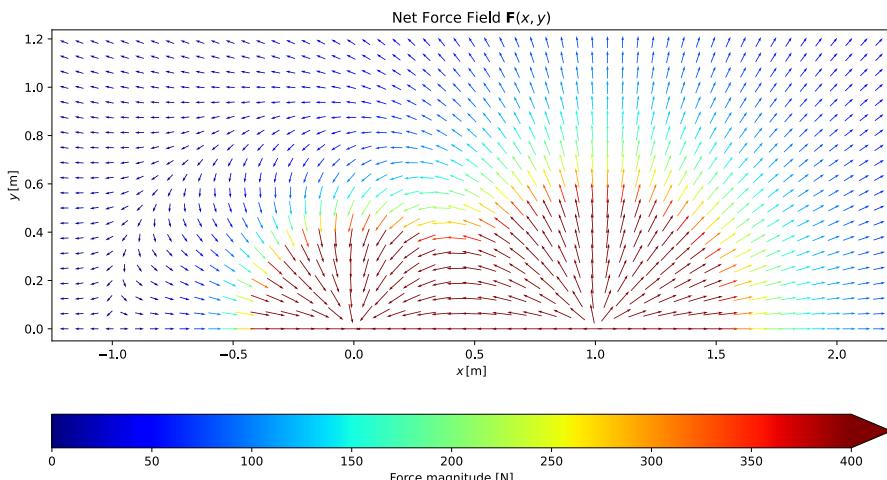
Za pomocí tejto simulácie s výsledkom na obrázku 7 získavame hľadaný počet bodov  $N$ , z ktorého určíme neznámu plochu ako

$$S = 2N(dx)^2.$$

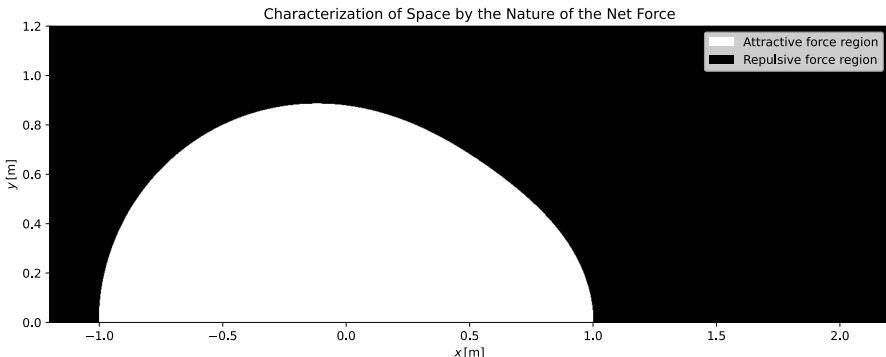
Otázkou zostáva, ako zvoliť vhodný tvar mriežky. Najvýraznejšia interakcia s Petrom bude práve na  $x$ -ovej osi v zápornom smere. Ak určíme bod, v ktorom začne prevažovať odpudivá sila Davida, dostaneme odhad vhodného rozmeru mriežky. Pri hľadaní vhodnej velkosti kroku  $dx$  na mriežke môžeme postupovať tak, že ho budeme postupne zmenšovať, dokým sa výsledná plocha bude meniť nad požadovanou presnosťou.

Z grafu na obrázku 8 vidíme, že už pre relatívne veľký krok voči výpočtovej sile dostávame celkom dobrý odhad

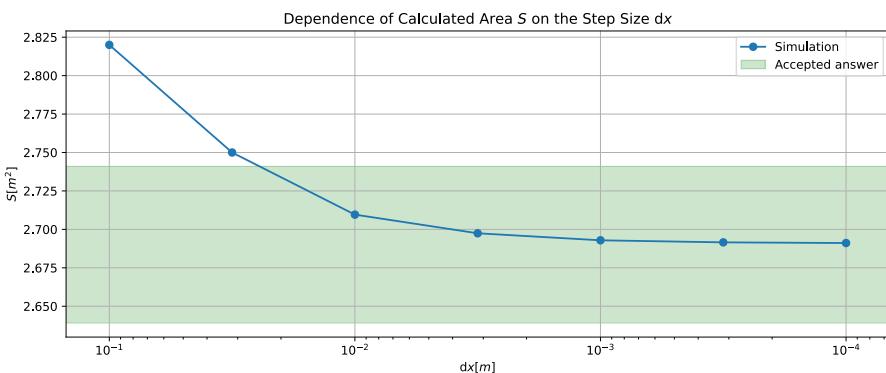
$$S = 2,69 \text{ m}^2.$$



Obrázek 6: Výsledok prvej simulácie: silové pole na mriežke.



Obrázek 7: Výsledok druhej simulácie: oblasti s výslednou prítažlivou a odpudivou silou.

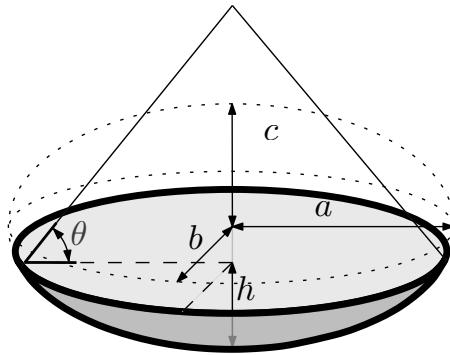


Obrázek 8: Graf závislosti vypočítanej plochy od zvolenej veľkosti kroku.

**Úloha 54 ... nejvrchovatější lžíce**

9 bodů

Vnitřní objem lžíce má tvar úseče elipsoidu o poloosách  $a = 4,0 \text{ cm}$ ,  $b = 3,0 \text{ cm}$  a  $c = (2,0 + \sqrt{3}) \text{ cm}$  a hloubce  $h = 5,0 \text{ mm}$  (viz obrázek). Nasypeme na ni sůl, která má sypný úhel  $\theta = 40^\circ$ . Jaký maximální objem soli můžeme na lžici udržet?



Obrázek 9: Schéma lžíce.

*Jarda si dává do čaje vždy jen jednu lžičku cukru.*

Řešení úlohy si rozdělíme na dvě části, kdy nejprve spočítáme objem lžíce a následně se zaměříme na objem nasypané látky. Podívejme se tedy na integraci objemu úseče elipsoidu. Rovnice elipsoidu má podobu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ze které jednoduchou úpravou vyjádříme rovnici elipsy na řezu ve výšce  $z$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2},$$

$$\frac{x^2}{a^2(1 - \frac{z^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 - \frac{z^2}{c^2})} = 1.$$

S využitím obsahu elipsy  $S = \pi ab$  o poloosách  $a$  a  $b$  můžeme vyjádřit objem úseče elipsoidu jako:

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{c-h}^c \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) dz = \pi ab \left[z - \frac{z^3}{3c^2}\right]_{c-h}^c = \pi ab \left(c - (c-h) - \frac{c^3 - (c-h)^3}{3c^2}\right) = \\ &= \pi ab \left(h - \frac{3c^2h - 3ch^2 + h^3}{3c^2}\right) = \pi ab \left(\frac{3ch^2 - h^3}{3c^2}\right) = \pi ab \left(\frac{h^2}{c} - \frac{h^3}{3c^2}\right) = \\ &= \frac{\pi}{2} (5 - 2\sqrt{3}) \text{ cm}^3 \doteq 2,4 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Nyní se zaměříme na „kopec“ nasypaný na lžici. Maximální výška každého bodu se určí pomocí vzdálenosti  $s_{\min}$  k nejbližšímu bodu okrajové elipsy jako

$$h_{\max} = s_{\min} \operatorname{tg} \theta.$$

Horní hranice lžíce má podobu elipsy s poloosami  $a' = a\sqrt{1 - (c-h)^2/c^2} = 2\text{ cm}$  a  $b' = b\sqrt{1 - (c-h)^2/c^2} = 1,5\text{ cm}$ . Pokud bychom se z rovnice této elipsy pokusili vyjádřit vzdálenost  $s$  bodu  $x_0$  a  $y_0$  od elipsy, dostaneme výraz

$$s^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (x - x_0)^2 + \left(b' \sqrt{1 - \frac{x^2}{(a')^2}} - y_0\right)^2,$$

jehož derivací a jejím položení rovnou nule bychom dostali  $x$ -ovou souřadnici bodu na elipse ve vzdálenosti  $s_{\min}$ . Provedením této derivace se však dostaváme na rovnici čtvrtého rádu, kterou neumíme jednoduše řešit.

Uchýlíme se tedy k numerickému řešení. Elipsu o rozměrech  $a'$  a  $b'$  rozdělíme čtvercovou síť a u každého bodu nejprve rozhodneme, zda se nachází uvnitř elipsy, a pokud ano, tak spočítáme minimum jeho vzdálenosti k elipse a přičteme element objemu  $\Delta V = \Delta x \Delta y s_{\min} \operatorname{tg} \theta$ . Tímto postupem pro elipsu s poloosami  $a' = 2\text{ cm}$  a  $b' = 1,5\text{ cm}$  dostaneme objem  $V_2 = 4,4\text{ cm}^3$ ; vizte kód simulace v jazyce Julia níže.

```

a=2
b=1.5 # zoberiem stvrtku lyzice

Mi=601
Mj=801 # je to nastavene tak, ze dx=dy, zvysok kodu to celkom prepoklada
pole=zeros(Mi,Mj)

dx=a/(Mj-1)
dy=b/(Mi-1)

for i=1:Mi
y=(i-1)*dy
y2b2=y^2/b^2
for j=1:Mj
x=(j-1)*dx
x2a2=x^2/a^2
pole[i,j]=1-y2b2-x2a2 # toto je kladne ak je policko vnutri lyzice a inak zaporne
end
end

hjs=zeros(Int64,Mi)
for i=1:Mi
j=1
while pole[i,j]>0 # pre kazde i najdem najvacsie j, ktore patri lyzici
j+=1
end
hjs[i]=j
end

for i=1:Mi
# print(".")
for j=1:Mj
if pole[i,j]>0 # ide sa hladat najblizsi bod kraja lyzice
minvz=Mj
di=0
while hjs[i+di]>j # hladam ho len v stvrtrovine
vz=sqrt(di^2+(hjs[i+di]-j)^2 )
if vz<minvz
minvz=vz
end
di+=1
end
end

```

```

end
pole[i,j]=minvz
else
pole[i,j]=0 # mimo lyzice "nulova vyska"
end
end
end
sum(pole)*dx*dy*dx*tan(40/180*pi)*4 # dx^3 je objem jedneho stvrceka vedla kraja * tan
(40) * 4 lebo sme pozerali na 1/4 lyzice

```

Výsledkom je pak součet těchto objemů, tedy

$$V_1 + V_2 = 2,4 \text{ cm}^3 + 4,4 \text{ cm}^3 = 6,8 \text{ cm}^3.$$

### Úloha 55 ... Faradayův kolektor

8 bodů

Uvažujme vodivý kruhový terč o poloměru  $r = 5,00 \text{ mm}$ , na který kolmo dopadají kladně nabité ionty s plošným tokem  $j = 2,00 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$  a velikostí náboje rovnou elementárnímu náboji. Po dopadu jednoho iontu se ovšem v průměru uvolní  $\sigma = 0,230$  sekundárních elektronů, které opouští povrch s rozdelením popsaným hustotou pravděpodobnosti  $f = (1/\pi) \sin \alpha$  na jednotku prostorového úhlu vzhledem ke sférickým souřadnicím se středem v bodě dopadu. Úhel  $\alpha$  zde měříme od povrchu disku směrem k normále. Jaký proud naměříme v uzemněném lineárním vodiči, jenž je k disku připojen, jestliže kolem terče uděláme ještě ohrádku o výšce  $h = 2,00 \text{ mm}$ , která je vodivě propojena s diskem a dokáže tyto elektrony zachytávat? Uvažujte, že pohyby částic nejsou ovlivněny žádným elektrickým polem.

*Jarda se znova snaží obejít energetickou krizi.*

Nejprve spočteme celkový proud, který by vyvolal dopad kladně nabitých iontů, kdyby nedocházelo k uvolnění sekundárních elektronů. Z jejich plošného toku a rozměru terčíku jednoduše dostaváme

$$I_+ = qj\pi r^2,$$

kde  $q$  je velikost elementárního náboje. K tomuto proudu je ovšem potřeba přičíst vliv sekundárních elektronů, protože terčík ztrácí záporný náboj všech elektronů, které nedopadnou na ohrádku, výsledný proud bude proto vyšší. Zbývá dopočítat, kolik sekundárních elektronů za sekundu mine ohrádku.

Sekundární elektrony se z každého bodu plochy uvolňují do polokoule nad rovinou dopadu. Pravděpodobnost, že elektrony vyletí pod úhlem  $\alpha$  – úhel  $\alpha$  je sklon vůči rovině terčíku – v rozmezí  $(0; \pi/2)$  a ve směru  $\varphi$  je popsána hustotou pravděpodobnosti  $f = (1/\pi) \sin \alpha$ . Proto pravděpodobnost, že vyletí do elementu prostorového úhlu  $d\Omega = \cos \alpha d\varphi d\alpha$ , je rovna

$$dP = \frac{1}{\pi} \cos \alpha \sin \alpha d\varphi d\alpha.$$

Z každého bodu terčíku o obsahu  $dS$  vylétá v průměru  $\sigma j dS$  elektronů za sekundu. Vybereme si tedy pro další úvahy infinitesimální plošku o obsahu  $dS$  ve vzdálenosti  $R$  od středu terčíku a vyjádříme, kolik elektronů, které z této oblasti vyletí, mine ohrádku kolem terčíku. Nejprve uvažme pouze množství elektronů, které vyletí v úzkém pruhu vymezeném úhlem  $d\varphi$  ve směru  $\varphi$ , měřeném od polopřímky s počátkem v uvažované infinitesimální ploše procházející středem terčíku. Zkusme vyjádřit minimální úhel  $\alpha$ , pod kterým mohou vyletět, aby právě

minuly ohrádku (úhel k horní hranici ohrádky). Pomocí kosinové věty si vyjádříme závislost vzdálenosti  $d$  ohrádky v daném směru od uvažované plošky na úhlu  $\varphi$  jako

$$r^2 = R^2 + d^2 - 2Rd \cos \varphi,$$

odkud řešením kvadratické rovnice dostaváme

$$d = R \cos \varphi + \sqrt{r^2 - R^2 (1 - \cos^2 \varphi)}.$$

Zde budeme uvažovat pouze kladné řešení, záporné nemá fyzikální význam. Minimální úhel, pod kterým mohou elektronu opustit v daném směru plochu, aby už nedopadly na ohrádku, je proto roven

$$\alpha_{\min} = \arctg \frac{h}{d}.$$

Abychom nyní dostali celkový počet elektronů, které v tomto směru minou ohrádku, musíme integrovat hustotu pravděpodobnosti v rozmezí  $(\alpha_{\min}; \pi/2)$  a výsledek přenásobit celkovým počtem elektronů, které vylétnou z této plošky. Dále provedeme integraci přes všechny směry, tj. od 0 do  $2\pi$  podle  $\varphi$ . Tím získáme celkový příspěvek od této plošky. Nakonec musíme sečít příspěvky od všech těchto plošek přes celý terčík. Můžeme uvážit, že všechny infinitesimální plošky, které jsou ve stejné vzdálenosti, budou mít stejný příspěvek, proto za  $dS$  můžeme dosadit  $2\pi R dR$ , což je plocha obruče konstantní vzdálenosti od středu terčíku. Integrujeme podle  $R$ . Výsledný integrál, který potřebujeme vypočítat pro zjištění sekundárního proudu daného ztrátou sekundárních elektronů, má tvar

$$I_s = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_{\min}}^{\frac{\pi}{2}} e \sigma j 2\pi R \frac{1}{\pi} \cos \alpha \sin \alpha d\alpha d\varphi dR,$$

kde jsme ještě množství ztracených elektronů přenásobili jejich nábojem pro určení proudu. První integrál řešíme substitucí  $t := \sin \alpha$ , což nám po vyřešení dává

$$I_s = \int_0^r \int_0^{2\pi} e \sigma j 2\pi R \frac{1}{2\pi} (1 - \sin^2 \alpha_{\min}) d\varphi dR.$$

Dále využijeme goniometrické identity

$$\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

díky čemuž můžeme předchozí integrál upravit na

$$I_s = \int_0^r \int_0^{2\pi} e \sigma \frac{2\pi}{2\pi} j R \left( 1 - \frac{h^2}{h^2 + (R \cos \varphi + \sqrt{r^2 - R^2 (\sin^2 \varphi)})^2} \right) d\varphi dR.$$

Tento integrál řešíme numericky pomocí funkce `dblquad` knihovny `scipy.integrate` v programovacím jazyku Python. Výsledná hodnota je  $I_s = 3,89 \cdot 10^{-12}$  A. Celkový proud  $I$  pak je dán součtem proudů vyvolaných dopadem kladných iontů a ztrátou sekundárních elektronů

$$I = I_+ + I_s = qj\pi r^2 + I_s = 2,91 \cdot 10^{-11} \text{ A}.$$

Níže příkládáme program pro numerický výpočet integrálu.

```

import numpy as np
from scipy.integrate import dblquad

r = 0.5
h = 0.2
j = 2.0e8
sigma = 0.23
e = 1.602176634e-19

def integrand(phi, R):
    arg = r**2 - R**2 * np.sin(phi)**2
    sqrt_term = np.sqrt(arg)
    A = R * np.cos(phi) + sqrt_term
    return R * (1 - (h**2) / (h**2 + A**2))

result, error = dblquad(integrand, 0, r, lambda R: 0, lambda R: 2*np.pi)
I_s = e * sigma * j * result

print(f"I_s = {I_s:.3e} A")
print(f"Odhad chyby integrace: {e*sigma*j*error:.2e}")

```

### Úloha 56 ... útěk přes zamrzlou přehradu

9 bodů

Turista se pokoušel v zimě prchnout před hladovým vlkem a jeho cesta vedla kolem upuštěné zamrzlé přehradky. Zvíře mu bylo v patách, proto musel svou trasu plánovat co nejefektivněji. Chystal se vylézt na betonovou hráz, na které už by byl v bezpečí. Všude na břehu bylo husté rákosí, ale najednou uviděl volnou ledovou plochu. Na zamrzlou hladinu vběhl rychlosť  $u = 6,00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  směrem rovnoběžně s hrází, od které byl vzdálen  $d = 150 \text{ m}$ . Za jakou nejkratší dobu se dostane do bezpečí, pokud je koeficient tření mezi ledem a jeho botami  $f = 0,220$  a u hráze se musí zastavit, aby na ni mohl vylézt, což mu zabere dalších  $10,0 \text{ s}$ ?

Jarda řešil Physics Cup.

Na zamrzlé hladině se turista může pohybovat maximálně se zrychlením  $a = fg$ , kde  $g$  je tříkové zrychlení. Pokud by chtěl měnit svou rychlosť rychleji, začaly by mu boty prokluzovat. Výslednice sil ale může působit libovolným směrem.

Definujme si kartézskou souřadnou soustavu, kde se turista nachází při vstupu na jezero v bodě  $(0, 0)$  a jeho rychlosť míří ve směru osy  $x$ , tedy  $v_x = u$ , zatímco  $v_y = 0$ . Hráz nechtě se nachází na souřadnicích  $y = d$ . Je potřeba, aby u hráze byla jeho rychlosť nulová. Ze všech možných trajektorií je potřeba vybrat tu, po které se dostane ke hrázi nejrychleji.

Zabývejme se jeho pohybem v prostoru rychlosťí  $v_x, v_y$ . Počáteční rychlosťi jsou  $(u, 0)$ , koncové pak  $(0, 0)$ . Pro turistu je nejvýhodnější pohybovat se s co největším zrychlením, tedy nechtě  $\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 = f^2 g^2$ . Nechtě navíc  $v_y$  je zde funkce  $v_x$ , pak element rychlosťi v tomto diagramu bude  $\sqrt{1 + \left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)^2} dv_x$ . S pomocí předešlé rovnice dostáváme

$$-\sqrt{1 + (v'_y)^2} dv_x = fg dt,$$

kde čárka nad  $v_y$  značí derivaci podle  $v_x$ . Záporným znaménkem zde rozumíme to, že  $v_x$  s rostoucím časem klesá. Pokud by rostla, pak by se stejně musela dostat na nulu, tím pádem by turista ztratil chvíliku času.

Nyní již můžeme vyjádřit čas, který stráví pohybem na ledové ploše, jako

$$T = -\frac{1}{fg} \int_u^0 \sqrt{1 + (v'_y)^2} dv_x .$$

Pořád nám ale zbývá najít funkci  $v'_y$ . Ze zadání ovšem známe ještě souřadnice hráze. Cestu k ní vyjádříme pomocí rovnice

$$d = \int_0^T v_y dt = -\frac{1}{fg} \int_u^0 v_y \sqrt{1 + (v'_y)^2} dv_x ,$$

kam jsme dosadili za  $dt$  z rovnice výše.

Nyní bychom mohli použít variační počet a řešit Euler-Lagrangeho rovnice. Když se ale na oba integrály podíváme pořádně, mohou nám připomínat jinou fyzikální úlohu – řetězovku. Když zavěšíme oba konce provázku do stejné výšky v tělovém poli, hledáme tvar provázku. Řešení můžeme nalézt pomocí minimalizace potenciální energie, ovšem za podmínky, že známe délku provázku, kterou zachováváme. Zde je integrál pro  $T$  shodný s podmínkou zachování délky provázku, zatímco integrál pro  $d$  je ekvivalentní s minimalizací energie pomocí nalezení polohy těžiště.

Protože integrály jsou ekvivalentní s hledáním řetězovky, můžeme využít její dobře známé řešení. Funkce  $v_y$  tak má tvar

$$v_y = A \cosh \frac{v_x - C}{A} + B ,$$

kde  $A$  a  $B$  jsou konstanty určené okrajovými podmínkami.

První takovou podmínkou je průchod bodem  $(0, 0)$ , který odpovídá zastavení se u hráze přehradny. Odsud  $B = -A \cosh(C/A)$ . Dále pak  $A \cosh((u - C)/A) - A \cosh(C/A) = 0$ , což zase určuje, s jakými složkami rychlosti turista na ledovou plochu vběhl. To odpovídá dvěma možným řešením, bud  $u - C = -C$ , odkud by ale  $u = 0$ , což podle zadání není pravda, nebo pak  $u - C = C$ , což vede na  $C = u/2$ .

Dosazením do poslední z podmínek dostáváme

$$-\sqrt{1 + (v'_y)^2} dv_x = -\sqrt{1 + \left( \sinh \frac{2v_x - u}{2A} \right)^2} dv_x = -\cosh \frac{2v_x - u}{2A} dv_x = fg dt .$$

Potom máme

$$\begin{aligned} d &= \int_0^T v_y dt = -\frac{1}{fg} \int_u^0 \left( A \cosh \frac{2v_x - u}{2A} - A \cosh \frac{u}{2A} \right) \cosh \frac{2v_x - u}{2A} dv_x \\ &= \frac{A}{2fg} \left( A \sinh \frac{u}{A} - u \right) , \end{aligned}$$

odkud vyjádříme  $A = 0,7830 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Hledaný čas pohybu po ledě je

$$T = -\frac{1}{fg} \int_u^0 \cosh \frac{2v_x - u}{2A} dv_x = \frac{2A}{fg} \sinh \frac{u}{2A} .$$

Po dosazení  $A$  přičteme ještě deset sekund a máme výsledek  $T_f = T + 10,0\text{s} = 26,7\text{s}$ .

### Úloha B.1 ... mocná powerbanka v akci

3 body

Kupujeme  $30\,000\text{ mA}\cdot\text{h}$  powerbanku za  $30\text{ USD}$ . Minimálně jakou část ceny tvoří lithium, jehož cena na trhu je  $11,4\text{ USD}\cdot\text{kg}^{-1}$ ? Powerbanka funguje na principu Li-ion baterie.

*Jardu vystrašily zprávy o nárůstu ceny lithia na burzách.*

Kapacita baterie nebo powerbanky udává, jaký celkový náboj je schopna přenést. Můžeme tuto hodnotu převést na coulomby jako jednotku SI, tj.  $Q = 30\,000\text{ mA}\cdot\text{h} = 108\text{ kC}$ , přičemž jsme vynásobili proud a dobu trvání jedné hodiny v sekundách.

V Li-ion baterii se mezi elektrodami přenáší ionty lithia. Lithium je jednomocný prvek, takže se v elektrolytu přenáší jako jednou ionizované, tedy v chemickém stavu  $\text{Li}^+$ . Na jeden přenesený atom lithia tedy připadá elementární náboj jednoho elektronu  $e$ . Vydělením celkového náboje  $Q$  touto hodnotou dostaneme počet atomů lithia, které jsou potřeba, aby powerbanka měla minimálně deklarovanou kapacitu.

Protože pracovat s tak velkými čísly, jako je počet atomů, je nepraktické, budeme dále počítat v jednotkách mol. Jeden mol je synonymum pro  $N_A \doteq 6,022 \cdot 10^{23}$  atomů nebo jiných častic, kde  $N_A$  je Avogadrova konstanta. Počet molů lithia v powerbance je tedy minimálně

$$n = \frac{Q}{eN_A} = \frac{Q}{F} \doteq 1,12 \text{ mol},$$

kde jsme zavedli Faradayovu konstantu  $F = eN_A$ .

Ještě nám zbývá převést látkové množství na hmotnost, abychom mohli stanovit cenu použitého lithia. Na to potřebujeme znát molární hmotnost lithia  $M_{\text{Li}} \doteq 6,941\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ , kterou jednoduše najdeme na internetu. V powerbance tedy máme minimálně

$$m = nM_{\text{Li}} \doteq 7,77 \text{ g}$$

lithia, jehož cena  $P$  tak je

$$P = mp \doteq 0,0886 \text{ USD},$$

pro cenu za kilogram  $p = 11,4\text{ USD}\cdot\text{kg}^{-1}$ ; což tvoří

$$\frac{0,0886 \text{ USD}}{30 \text{ USD}} \doteq 0,30 \%$$

z celkové ceny powerbanky.

### Úloha B.2 ... těžké nabíjení

3 body

Výrobcům by se mohlo zdát, že je lithium pořád hodně drahé, a tak začnou vyrábět powerbanky se sodíkem. O kolik ale vzroste hmotnost powerbanky, která by měla stejnou kapacitu  $30\,000\text{ mA}\cdot\text{h}$ ? Ostatní části zařízení zůstávají stejně.

*Jarda přemýšlel, jestli si všechno nakonec neodnesou jeho záda.*

Z minulé části již víme, jakou minimálně má lithium v powerbance hmotnost, protože známe jeho látkové množství  $n$ . Sodíkové atomy jsou v porovnání s lithiovými těžší, musíme ale určit,

kolik jich bude. Sodík je stejně jako lithium prvkem první skupiny periodické tabulky, takže by se v baterii vyskytoval také jako jedenkrát ionizovaný. Na stejný náboj  $Q$  tak potřebujeme stejný počet molů  $n$  atomů sodíku jako atomů lithia.

Jediný rozdíl tak je v molární hmotnosti. Celková hmotnost proto vzroste o

$$\Delta m = n(M_{\text{Na}} - M_{\text{Li}}) = \frac{Q}{F} (M_{\text{Na}} - M_{\text{Li}}) \doteq 18 \text{ g},$$

kde jsme si pro změnu museli vyhledat molární hmotnost sodíku  $M_{\text{Na}} \doteq 22,99 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

### Úloha B.3 ... nemám na to kapacitu

4 body

Naši 30 000 mA·h powerbanku připojíme kabelem dlouhým 1,5 m do zdroje o stejnosměrném napětí 5,0 V. Z nuly na 50 % kapacity se nabije za 6,5 h. Jaký je délkový odpor tohoto USB kabelu? Předpokládejte, že samotné procesy v powerbance potřebují 4,1 V nezávisle na proudu.

*Jardovi se po náročném týdnu vybily baterky.*

Powerbanka uvnitř funguje na principu elektrochemických procesů, které zahrnují transport iontů mezi elektrodami. Při nabíjení je podle zadání potřeba napětí  $U_p = 4,1 \text{ V}$ , aby tyto procesy mohly probíhat. Ze zdroje napětí ovšem dostáváme  $U_z = 5,0 \text{ V}$ . Přebytek napětí se totiž spotřebuje na překonání ohmického odporu našeho přívodního kabelu.

Napětí na celou délku kabelu (tam i zpět) je

$$U_z - U_p = R_1 I_1,$$

kde jsme využili Ohmův zákon a označili celkový odpor kabelu  $R_1$  a proud, který jím prochází, jako  $I_1$ . Tento proud můžeme najít z doby nabíjení a prošlého náboje

$$I_1 = \frac{0,5Q}{t} = \frac{0,5 \cdot 30 \text{ A}\cdot\text{h}}{6,5 \text{ h}} = 2,3 \text{ A},$$

kde koeficient 0,5 představuje padesát procent z celkové kapacity powerbanky.

Nyní už můžeme získat hodnotu celkového odporu kabelu jako

$$R_1 = \frac{U_z - U_p}{I_1} \doteq 0,39 \Omega.$$

Na jednotku délky USB kabelu tak dostáváme

$$\lambda = \frac{R_1}{d} \doteq 0,26 \Omega\cdot\text{m}^{-1},$$

kde  $d$  je délka kabelu. Přestože reálně náboj musí skrze kabel urazit dvojnásobnou vzdálenost (tam i zpět), tak se zadání ptá na délkový odpor celého USB kabelu. Hodnota vychází poměrně vysoká, protože předpoklad o neměnnosti napětí potřebného pro samotnou powerbanku není úplně fyzikální, se zvětšujícím se proudem je potřebné vyšší a vyšší napětí.

**Úloha B.4 ... (ne)efektivní powerbanka**

4 body

Elektrochemické reakce v naší 30 000 mA·h powerbance poskytují napětí 3,80 V. Na výstupu se ale generuje USB napětí 5,00 V. Jestliže jsou energetické ztráty při této konverzi 15,0 %, jaká je efektivní kapacita powerbanky pro nabíjení mobilního telefonu?

Jarda nenabil.

Kapacita naší powerbanky je  $Q = 30,0 \text{ A}\cdot\text{h}$ , což je náboj, který je v ní uchovaný. Vynásobením nápětím elektrochemické reakce  $U_p = 3,80 \text{ V}$  dostáváme energii, která je v powerbance uchovaná

$$E = QU_p .$$

Tato energie může být poskytnuta na výstupu, kde je ale napětí  $U_v = 5,00 \text{ V}$ . Protože je zde ale vyšší napětí, tak je efektivní kapacita, která může být poskytnuta, nižší. Navíc se část energie při konverzi na vyšší napětí disipuje, takže efektivní kapacita je

$$Q_{\text{ef}} = 0,850 \frac{U_p}{U_v} Q \doteq 1,94 \cdot 10^4 \text{ mA}\cdot\text{h} ,$$

kde 0,850 je účinnost konverze na vyšší napětí.

**Úloha P.1 ... odrážíme soupeřovu kouli**

4 body

Jirka hraje s Jardou pétanque. Bohužel Jarda aktuálně vyhrává, tedy jedna z jeho koulí je velmi blízko k té malé dřevěné kuličce (k tzv. košonku). Jediný způsob, jak může Jirka obrátit hru ve svůj prospěch je odrazit zmíněnou Jardovou kouli tak, aby se od košonku dostala co nejdále. Proto hodí svoji kouli tak, že narazí to té Jardovy rychlostí  $40 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$  ve vodorovném směru. Jak daleko se Jardova koule odkutálí, jestliže na ni po srážce působí konstantní odporová síla o velikosti  $F = \alpha mg$ , kde  $m = 700 \text{ g}$  je hmotnost koule,  $g$  je tříkové zrychlení a  $\alpha = 0,010$ ? Obě koule jsou identické, srážka je dokonale pružná a koule se po srážce pohybují po stejně přímce jako Jirkova koule před srážkou (srážku tedy počítejte jako pružnou srážku hmotných bodů v přímce).

Jirka s Jardou pétanque nikdy nehrál.

Řešení myšlenkově rozdělíme na dvě části. Nejprve vypočítáme výsledek srážky a poté z rychlosti Jardovy koule po srážce dopočítáme, jak daleko se dokutálí.

Při pružné srážce musíme splnit zachování hybnosti i kinetické energie. V našem případě mají koule stejnou hmotnost, a proto lze poměrně snadno uhádnout, že po srážce se Jirkova koule zastaví a předá veškerou svoji hybnost Jardově kouli (snadno si rozmyslíme, že toto řešení skutečně splňuje oba zákony zachování). Pokud bychom se k tomuto výsledku chtěli dostat výpočtem, museli bychom obecně řešit soustavu dvou rovnic danou zákony zachování. V obecném případě má rovnice pro zachování hybnosti tvar

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 ,$$

kde  $m_1, m_2$  jsou hmotnosti koulí,  $v_1, v_2$  rychlosti před srážkou a  $v'_1, v'_2$  rychlosti po srážce (srážka je v přímce, tedy směr rychlostí určuje znaménko). Podobně pro zachování energie máme

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v'_2{}^2 .$$

Při řešení naší úlohy bychom potom do této rovnice dosadili stejnou hmotnost obou koulí a nulovou počáteční rychlosť druhé koule, odkud by po chvíli počítání skutečně vyšlo, že rychlosť druhé koule po srážce je stejná jako rychlosť první koule před srážkou.

Zmíníme ještě další způsob, jak pružnou srážku řešit, protože tento způsob bude zvláště důležitý pro následující úlohy v této hurry-up sérii. Jedná se o řešení pomocí přechodu do těžištové soustavy. Těžiště, neboli hmotný střed, se pro stejně hmotné koule nachází uprostřed mezi nimi. Pokud tedy označíme  $v$  rychlosť Jirkovy koule před srážkou, pak je rychlosť těžiště vůči zemi rovna  $v/2$ . Ze zákona zachování hybnosti plyne, že rychlosť těžiště po srážce je stejná jako před srážkou. Tedy pokud vypočítáme výsledek srážky z pohledu těžiště, tak snadno dopočítáme rychlosti vzhledem k původní souřadnicové soustavě.

V soustavě spojené s těžištěm se koule pohybují proti sobě rychlosť  $v/2$ . Situace je symetrická, proto se po srážce koule rozletí od sebe navzájem stejnou rychlosťí o velikost  $v'$ . Ze zachování kinetické energie pak plyne, že musí být velikost této rychlosťi rovna opět  $v' = v/2$ . Po přechodu zpět do původní soustavy tedy skutečně vyjde, že se Jirkova koule zastaví a Jardova se pohybuje rychlosť  $v$ .

Zbývá dořešit druhou část úlohy. Zde je Jardova koule brzděna odporovou silou o konstantí velikosti  $\alpha mg$ . Její zrychlení tedy má velikost

$$a = \alpha g .$$

Spočítáme dráhu tohoto zpomaleného pohybu jako

$$x = \frac{1}{2}at^2 ,$$

kde  $t = \frac{v}{a}$  je doba, za kterou se koule zastaví. Celkem tedy

$$x = \frac{v^2}{2\alpha g} \doteq 82 \text{ cm} .$$

## Úloha P.2 ... zpomalujeme naši kouli

5 bodů

Po Jirkově geniálním hodu v rozehráté partii pétanque Jarda ztratil svoji převahu. Teď je ovšem na tahu a vymýslí riskantní plán. Jedna z Jirkových koulí se nachází pouhých 5,0 cm od košonku. Jarda ví, že srážka koulí není dokonale pružná, proto se jeho koule bude i po případné srážce malou rychlosťí pohybovat. Jarda zamýšlí svoji kouli hodit tak, aby odrazila tu Jirkovu a ještě se dokutálela ke košonku (Jarda věří, že Jirkova odražená koule neodrází košonek pryč). Jaká musí být rychlosť Jardovy koule těsně před srážkou, aby po srážce urazila vzdálenost 5,0 cm? Srážku počítejte jako srážku identických hmotných bodů v přímce. Na kutálející se kouli působí odporová síla o velikosti  $F = \alpha mg$ , kde  $\alpha = 0,010$  tak jako v předchozí úloze. Jarda si před hrou změřil, že dvě identické koule na pétanque při srážce v přímce vždy ztratí kinetickou energii o velikosti  $\Delta E = 0,25 \Delta E_{\max}$ , kde  $\Delta E_{\max}$  je maximální množství kinetické energie, kterou by při srážce mohly identické koule ztratit tak, aby nebyl porušen zákon zachování hybnosti.

*Pokud by Jirka hrál s Jardou petanque, jistě by vyhrál.*

Úloha je zadána poněkud netypickým způsobem. Máme v ní uvedeno tvrzení o ztrátě kinetické energie při obecné srážce. Protože toto tvrzení nemusíme dokazovat, můžeme ho využít k vyřešení úlohy chytrým způsobem. Stačí si uvědomit, že srážku můžeme pozorovat z libovolné souřadnicové soustavy a tvrzení o kinetické energii bude platit i v této nové soustavě.<sup>8</sup>

Jakou soustavu zvolit? Je výhodné zvolit téžišťovou soustavu, protože v ní rovnou známe maximální možnou ztrátu energie  $\Delta E_{\max}$ . V téžišťové soustavě je totiž možné, aby se koule úplně zastavily, proto je zde  $\Delta E_{\max} = E_k$ .

Označme neznámou rychlosť Jardovy koule  $v$ . V téžišťové soustavě se obě koule pohybují proti sobě rychlosťí  $\frac{v}{2}$ . Celková kinetická energie je tedy

$$E_{k,0} = \frac{1}{4}mv^2.$$

Po srážce jim zůstane energie  $(1 - k)E_{k,0}$ , kde  $k = 0,25$ . V důsledku stejné hmotnosti koulí a zachování hybnosti si koule rozdělí kinetickou energii rovným dílem, energie jedné koule tedy je

$$E_k = \frac{1-k}{8}mv^2,$$

odkud snadno rychlosť  $u' = \frac{v\sqrt{1-k}}{2}$ . Toto je tedy rychlosť Jardovy koule v téžišťové soustavě. Po přepočtení do klidové soustavy máme

$$v' = \frac{v}{2}(1 - \sqrt{1 - k}).$$

Nyní využijeme vztah pro dráhu zpomaleného pohybu, který jsme odvodili v předchozí úloze z této hurry-up série

$$x = \frac{v'^2}{2\alpha g},$$

kde  $x = 5\text{ cm}$ . Nakonec z této rovnice vyjádříme neznámou počáteční rychlosť Jardovy koule

$$v = \frac{\sqrt{8\alpha gx}}{1 - \sqrt{1 - k}} = 1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

### Poznámka

Pro zajímavost doplníme komentář a předpoklady k tvrzení ze zadání, tedy že dvě dané koule o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$  při libovolné srážce vždy ztrátí stejný zlomek energie vůči maximální možné ztrátě energie.

Uvažme nejprve, že kinetickou energii soustavy hmotných bodů lze rozdělit na dvě části

$$E_k = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}Mv_T^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i(v_i - v_T)^2.$$

Vztah platí v libovolné dimenzi (rychlosti tedy mohou být i vektory). Důkaz se provede jednoduše dosazením celkové hmotnosti  $M = \sum_{i=1}^N m_i$  a rychlosti téžiště  $v_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i v_i$ .

<sup>8</sup>Samozřejmě bychom úlohu mohli vyřešit i v původní soustavě, ale to by vedlo na složitější rovnice.

Tento zápis je užitečný, neboť první člen přesně odpovídá kinetické energii, kterou hmotné body nemohou ztratit. Tedy máme

$$\Delta E_{\max} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (v_i - v_T)^2.$$

Předpokládejme, že hmotné body mají zadané rychlosti  $u_1$  a  $u_2$  tak, že je celková hybnost nulová (tedy jsou to rychlosti v těžišťové soustavě). Po srážce se tyto rychlosti v důsledku zachování hybnosti změní na  $Cu_1$  a  $Cu_2$ , kde  $0 \leq C \leq 1$ . Ztráta energie potom je

$$\Delta E = (1 - C^2) \Delta E_{\max} = \frac{1}{2} (m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2) (1 - C^2).$$

Nyní přejdeme do souřadnicové soustavy, která se vůči těžišťové soustavě pohybuje rychlosťí  $v_T$ . Zde jsou rychlosti před srážkou  $u_1 - v_T$  a  $u_2 + v_T$  a po srážce musí být (kvůli principu relativity)  $-Cu_1 - v_T$  a  $-Cu_2 + v_T$ . Pak stačí rozepsat kinetickou energii pomocí předchozího vztahu na dvě části a vidíme, že ztráta energie je opět  $\Delta E = (1 - C^2) \Delta E_{\max}$ .

Tím máme tvrzení dokázané pro počáteční rychlosti  $v_1 = u_1 - v_T$  a  $v_2 = u_2 + v_T$ , kde  $\hat{v}$  je libovolné, máme tedy důkaz pro pevný rozdíl rychlostí. Na to, abychom tvrzení dokázali pro skutečně libovolné rychlosti, musíme doplnit předpoklad, že koeficient  $C$  nezávisí na rozdílu rychlostí. Tedy že pokud se rychlosti  $u_1$ ,  $u_2$  vůči těžišti změní na  $Cu_1$ ,  $Cu_2$ , pak se rychlosti  $\alpha u_1$ ,  $\alpha u_2$  změní na  $C\alpha u_1$ ,  $C\alpha u_2$  pro  $\alpha$  libovolné. Za tohoto předpokladu dostaneme opět ztrátu energie  $\Delta E = (1 - C^2) \Delta E_{\max}$  a to pro rychlosti  $v_1 = \alpha u_1 - v_T$  a  $v_2 = \alpha u_2 + v_T$ . Zde už snadno domyslíme, že se jedná dvojici libovolných rychlostí.

### Úloha P.3 ... koule se rozletěly

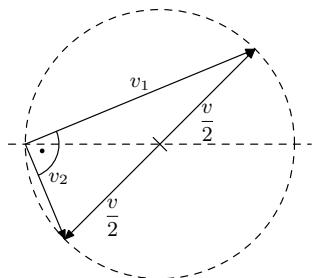
3 body

Napětí mezi Jirkou a Jardou roste. V jejich rozehráté hře pétanque totiž zbývá posledních několik hodů a Jarda se díky svému triku s polopružnou srážkou dostal do vedení. Aby Jirka ztrátu dorovnal, musí rovněž využít komplexnějšího fyzikálního chování při srážkách koulí. Svoji další kouli proto hodí tak, že se s Jardovou koulí nesrazí v přímce, ale „v rovině“. Jaký maximální úhel mohou svírat přímky trajektorií koulí po srážce? Jinými slovy, jaký maximální úhel mohou svírat vektorové přímky rychlostí koulí po srážce, pokud ji chápeme jako srážku identických hmotných bodů v rovině, kde předpokládáme pouze zákon zachování energie a hybnosti? Uvažujte pouze situace, kdyj jsou po srážce rychlosti obou koulí nemulové.

Jirka slibil, že řešení úlohy bude mnohem hezčí než její zadání.

Uvedeme dva způsoby řešení. První způsob je geometrický a využívá vlastností těžišťové soustavy. Druhý je více matematický a je pravděpodobně obecnější (ve smyslu využití na podobné úlohy se složitějšími předpoklady). Jeho nevýhodou ovšem je, že nezískáme tak dobrou fyzikální intuici jako při použití prvního postupu.

Začneme tedy tím geometrickým postupem. Přejdeme do těžišťové soustavy. Ta se pohybuje rychlosťí  $v/2$  vůči klidové soustavě, tedy v ní letí obě koule proti sobě rychlosťí  $v/2$ . Výsledek takovéto pružné srážky známe: koule se rozletí od sebe



opět rychlostí  $v/2$ . Jedná se ovšem o srážku v rovině, tedy přímka, po které se koule pohybují po srážce, může s původním směrem pohybu koulí svírat libovolný úhel.

Zbývá se vrátit do klidové soustavy přičtením rychlosti těžiště  $v/2$ . To je graficky znázorněno na obrázku. Nyní provedeme trik: uvážme, že pro libovolný směr rychlosti v těžišťové soustavě po srážce budou konce vektorů těchto rychlostí ležet na kružnici (viz obrázek). Tato kružnice je Thaletova kružnice, a proto rychlosti v klidové soustavě budou vždy svírat úhel  $90^\circ$  nezávisle na výsledku srážky v těžišťové soustavě.

Nyní druhý postup. Označme hmotnost obou koulí  $m$ , počáteční rychlosť Jirkovy koule  $\mathbf{v}$  a rychlosť po srážce  $\mathbf{v}'_1$  (Jirkova) a  $\mathbf{v}'_2$  (Jardova). Napíšeme si zákon zachování hybnosti ve vektorovém tvaru

$$m\mathbf{v} = m\mathbf{v}'_1 + m\mathbf{v}'_2,$$

což po zkrácení hmotností dá

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2.$$

Dále zákon zachování energie

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m{v'_2}^2$$

opět vyjádříme jako

$$v^2 = {v'_1}^2 + {v'_2}^2.$$

Nyní přichází na řadu trik: na rovnici pro zachování hybnosti uděláme skalární součin se sebou

$$v^2 = \|\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2\|^2 = {v'_1}^2 + {v'_2}^2 + 2\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2$$

a dosadíme ze zachování energie

$$\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2 = 0.$$

Skalární součin je nulový, takže pro úhel  $\alpha$  mezi rychlostmi platí

$$\cos \alpha = 0.$$

Výsledkem je  $90^\circ$ , což se shoduje s předchozím postupem.

## Úloha P.4 ... koule se rozletěly reloaded

5 bodů

Jirka si svůj poslední hod v rozebrané partii pétanque naplánoval tak, aby se po srážce jeho koule s Jardovou rozletěly tak, že obě trajektorie budou s původním směrem Jirkovy koule svírat úhel  $45^\circ$  (v předchozí úloze jste se přesvědčili, že toto je skutečně možné pro srážku dvou hmotných bodů v rovině). Při svém plánování ovšem Jirka zapomněl, že koule na pétanque nejsou hmotné body, ale tuhá tělesa, což v případě nenulového tření ovlivní výsledek.

Uvažujte tedy následující situaci: Jirka svoji koulí hodí tak, že se její střed pohybuje po přímce, jejíž vzdálenost od středu Jardovy koule je  $\sqrt{2}R$ , kde  $R = 4\text{ cm}$  je poloměr koulí. Rychlosť Jirkovy koule těsně před srážkou je  $1\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Koule jsou identické a srážka koulí je pružná v kolmém směru (vzhledem k bodu dotyku obou koulí). V tečném směru působí velké tření, těsně po srážce je proto vzájemná rychlosť bodů dotyku v tečném směru nulová. Pod jakým úhlem se za těchto předpokladů koule rozletí?

Předpokládejte, že Jirkova koule těsně před srážkou nerotuje kolem svislé osy; možná rotace v jiném směru (např. kvůli kutálení) výsledek neovlivní, efektivně tedy lze považovat úhlovou rychlosť Jirkovy koule těsně před srážkou za nulovou.

Jirka potřeboval ještě nějakou těžkou úlohu.

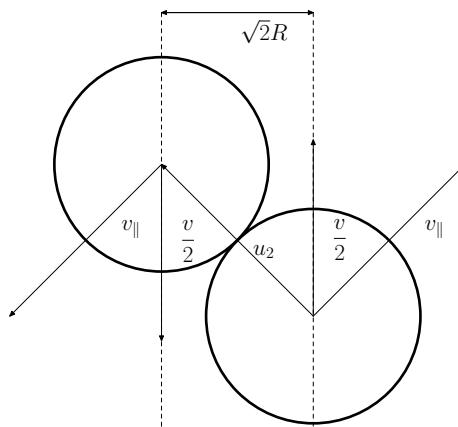
Přejdeme do těžišťové soustavy, čímž máme situaci jako na obrázku 10. Rychlosti koulí jsou tedy  $v/2$ , přičemž míří proti sobě. Rozložíme na kolmý a tečný směr jako

$$u_{\parallel} = u_{\perp} = \frac{v}{2\sqrt{2}}.$$

V kolmém směru jde o pružnou srážku, rozletí se opět

$$u'_{\perp} = u_{\perp} = \frac{v}{2\sqrt{2}},$$

což platí pro obě koule.



Obrázek 10

Pro tečný směr postupujeme s následující úvahou: Víme, že po srážce je nulová vzájemná rychlosť bodů dotyku, v tomto směru musíme splnit zachování hybnosti a momentu hybnosti (energie se nezachová).

Celková hybnost v rovnoběžném směru před srážkou je rovna nule (neb jsme v těžišťové soustavě). Po srážce tedy máme rychlosť

$$u'_{1\parallel} = u'_{2\parallel} = u'_{\parallel}.$$

Moment hybnosti spočítáme vůči bodu dotyku. Celkový moment hybnosti je před srážkou nenulový a nabývá tvaru

$$L = 2L_1 = 2mu_{\parallel}R,$$

kde  $L_1 = mu_{\parallel}R$  je moment hybnosti jedné koule. Toto platí intuitivně díky tomu, že se koule neotáčí. Je možné to i snadno ověrit výpočtem

$$\mathbf{L} = \int dm \mathbf{r} \times \mathbf{v},$$

kde je nenulový jen  $L_z$  a rychlosť má směr  $x$ , tedy  $v_x = \frac{v}{2}$

$$L_z = \frac{v}{2} \int dm y = my_T \frac{v}{2} = mu_{\parallel} R.$$

Pro vyjádření momentu hybnosti po srážce můžeme využít poznatku o nulové rychlosti bodu dotyku. Úhlová rychlosť vůči tomuto bodu je rovna

$$\omega = \frac{u'_{\parallel}}{R},$$

a moment setrvačnosti vyjádříme ze Steinerovy věty

$$J = mR^2 + \frac{2}{5}mR^2 = \frac{7}{5}mR^2.$$

Přesněji bychom měli psát, že se zachovává součet momentů hybnosti, ale díky  $u'_{1\parallel} = u'_{2\parallel} = u'_{\parallel}$  to lze zapsat jako zachování  $L_1 = L'_1$ . Proto platí, že

$$mu_{\parallel} R = J\omega = \frac{7}{5}mRu'_{\parallel},$$

což dá

$$u'_{\parallel} = \frac{5}{7}u_{\parallel} = \frac{5}{7}\frac{v}{2\sqrt{2}}.$$

Nyní přistoupíme ke geometrické části úlohy (obr. 11). Formulujeme složky  $x$  a  $y$  konečné rychlosti pro obě koule. Nejprve pro kouli první

$$u'_{1x} = u'_{\parallel} \cos 45^\circ - u'_{\perp} \cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{7}u_{\parallel} = -\frac{1}{14}v$$

a pro kouli druhou

$$u'_{2x} = -u'_{\parallel} \cos 45^\circ + u'_{\perp} \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{7}u_{\parallel} = \frac{1}{14}v.$$

Složku v ose  $y$  můžeme zapsat jako

$$u'_{1y} = -u'_{2y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{12}{7}u_{\parallel} = \frac{6}{14}v.$$

Nyní se vrátíme zpět do klidové soustavy přičtením  $\frac{v}{2}$  ke složce  $x$ , címž získáme tvar

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{v}{14}(6, 6) = \frac{3}{7}v(1, 1),$$

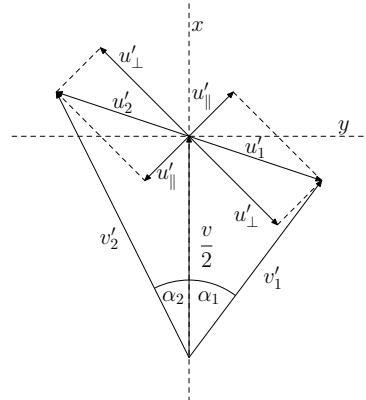
Obrázek 11

kde zápis pomocí závorky symbolizuje složky vektoru. Podobně rychlosť druhé koule

$$\mathbf{v}'_2 = \frac{v}{14}(8, -6) = \frac{3}{7}v\left(\frac{4}{3}, -1\right).$$

Zbývá vypočítat úhel, který svírají tyto dva vektory. Pravděpodobně nejjednodušším způsobem je spočítat pro každou rychlosť úhel odklonu od původního směru. Pro první kouli máme  $45^\circ$  – zajímavé může být, že jde o týž výsledek, který získáme v případě bez uvažování tření –, pro druhou kouli  $\alpha_2 = \arctg 3/4 \doteq 37^\circ$ .

Úhel mezi rychlosťmi je roven  $82^\circ$ .



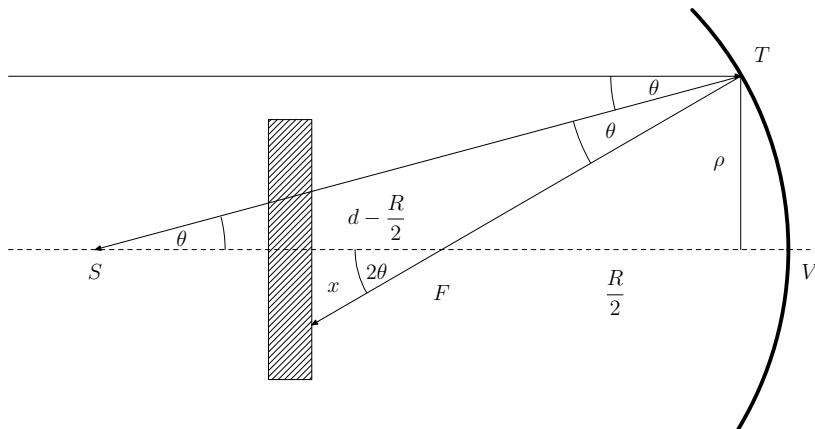
**Úloha R.1 ... osvícení teleskopu**

4 body

Uvažujme časť (vrchlík) dutého kulového zrcadla s poloměrem  $R = 200\text{ cm}$  a poloměrem kulového vrchlíku zrcadla  $r = 150\text{ mm}$ . Před toto zrcadlo dáme do vzdálenosti  $d = 135\text{ cm}$  od vrcholu zrcadla kruhové **neprůsvitné** stínítko o poloměru  $\delta = 80\text{ mm}$  tak, aby střed stínítka byl na optické ose kulového zrcadla. Vypočítejte poměr osvětlené a neosvětlené plochy na té části stínítka, která směřuje ke zrcadlu. Předpokládejte, že světlo svítí rovnoběžně s optickou osou zrcadla a při řešení tohoto úkolu se nebojte využít zjednodušení platná pro  $r \ll R$ .

*Vlado přemýšlel nad teleskopem typu Cassegrain.*

Uvažujme lúč, ktorý dopadá na tienidlo v bode, v ktorom dotyčnica ku guľovej ploche zrkadla s dopadajúcim lúčom zviera uhol  $\theta$ . Vďaka radiálnej symetrii stačí uvažovať túto situáciu už len v rovine, v ktorej leží stred krivosti zrkadla a tiež celý dopadajúci aj odrazený lúč. Vtedy vieme, že uhol  $\theta$  tiež zviera dopadajúci lúč a priamka, ktorá spája stred krivosti zrkadla s bodom dopadu lúča. Táto priamka je kolmicou odrazu, lebo je kolmá na dotykovú rovinu k zrkadlu v bode odrazu.



Obrázek 12: Odraz jedného lúča od zrkadla.

Pre lúč, ktorý je od osi zrkadla vzdialený  $\rho$ , na základe obr. 12 dostávame

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\rho}{R}\right).$$

Vidíme, že pre  $\rho < R$  s rastúcim  $\rho$  spojito rastie aj  $\theta$ . Na zrkadlo pritom pre  $\delta \leq r$  dopadnú lúče vo vzdialenosťi  $\rho$  od osi zrkadla pre všetky  $\delta \leq \rho \leq r$ , takže prislúchajúce uhly  $\theta$  pre tieto lúče budú nadobúdať všetky hodnoty od  $\theta_{\min} = \arcsin(\delta/R) \approx 2,29^\circ$  po  $\theta_{\max} = \arcsin(r/R) \approx 4,30^\circ$ .

Odrazený lúč sa potom bude šíriť po priamke. Táto priamka je obrazom pôvodnej priamky, po ktorej sa šíril dopadajúci lúč. Obraz vzniká v osovej súmernosti podľa polomeru, ktorý prechádza bodom dopadu lúča. Tento odrazený lúč potom bude s dopadajúcim lúčom zvierat uhol  $2\theta$ . Za predpokladu  $r \ll R$  môžeme tiež uvažovať, že odrazený lúč prejde približne ohniskom zrkadla, takže nám ďalej stačí uvažovať polpriamku, ktorá vychádza z ohniska poduhľom  $2\theta$  voči osi zrkadla, keďže dopadajúci lúč bol rovnoběžný s osou zrkadla.

Ohnisko guľového zrkadla má pritom od vrcholu zrkadla vzdialenosť  $R/2$ , takže od stredu tienidla má ohnisko vzdialenosť  $d - R/2$ . Vzdialenosť bodu, v ktorom odrazený lúč dopadne na tienidlo, od stredu tienidla je potom z pravouhlého trojuholníka

$$x = \left(d - \frac{R}{2}\right) \operatorname{tg}(2\theta) .$$

Kedže  $\theta$  nadobúda v našom prípade maximálnu hodnotu  $\theta_{\max} = \arcsin(r/R) < \pi/2$ , tak s rastúcou hodnotou  $\theta$  narastá spojite aj  $x$ , teda  $x$  bude pre lúče, ktoré dopadnú na zrkadlo, nadobúdať všetky hodnoty od

$$x_{\min} = \left(d - \frac{R}{2}\right) \operatorname{tg}(2\theta_{\min}) \approx 28,1 \text{ mm}$$

po

$$x_{\max} = \left(d - \frac{R}{2}\right) \operatorname{tg}(2\theta_{\max}) \approx 52,9 \text{ mm} .$$

Osvetlená časť tienidla tak bude tvoriť medzikružie s vnútorným polomerom  $x_{\min}$  a vonkajším polomerom  $x_{\max}$ , čiže s obsahom

$$S_{\text{osv}} = \pi(x_{\max}^2 - x_{\min}^2) .$$

Celá plocha časti tienidla smerujúcej ku zrkadlu je  $S_{\text{celk}} = \pi\delta^2$ , takže pomer obsahov osvetlenej a neosvetlenej časti tienidla je

$$\frac{S_{\text{osv}}}{S_{\text{celk}} - S_{\text{osv}}} = \frac{x_{\max}^2 - x_{\min}^2}{\delta^2 - x_{\max}^2 + x_{\min}^2} \doteq 0,460 .$$

Vnútorný a vonkajší polomer osvetleného medzikružia sme mohli o niečo menej presne vypočítať aj cez jednoduchú podobnosť trojuholníkov. Predpokladali by sme pritom, že vzdialenosť bodu, v ktorom sa lúč odráža od zrkadla, od ohniska je v smere optickej osi približne  $R/2$ . Potom by sme dostali pre dopadajúci lúč vo všeobecnej vzdialosti  $\rho$  od optickej osi

$$x \approx \rho \cdot \frac{d - \frac{R}{2}}{\frac{R}{2}} = \rho \left(\frac{2d}{R} - 1\right) ,$$

odkiaľ by sme potom pre vnútorný a vonkajší polomer osvetleného medzikružia dostali  $x_{\min} \approx \approx 28,0 \text{ mm}$  a  $x_{\max} \approx 52,5 \text{ mm}$ . Pomer obsahov osvetlenej a neosvetlenej časti tienidla by potom vyšiel na

$$\frac{S_{\text{osv}}}{S_{\text{celk}} - S_{\text{osv}}} = \frac{x_{\max}^2 - x_{\min}^2}{\delta^2 - x_{\max}^2 + x_{\min}^2} \doteq 0,445 .$$

Priamym odsimulovaním odrazu krajných lúčov od zrkadla (napr. v programe GeoGebra) vieme zistiť, že skutočný výsledok vychádza okolo 0,474. Druhé riešenie, ktoré obsahuje ešte jedno zanedbanie, je teda menej presné než prvé. Avšak aj prvé riešenie nie je úplne presné, keďže odrazené lúče v skutočnosti neprechádzajú presne ohniskom. Uznávané však boli všetky 3 riešenia.

**Úloha R.2 ... svícení na lžičku**

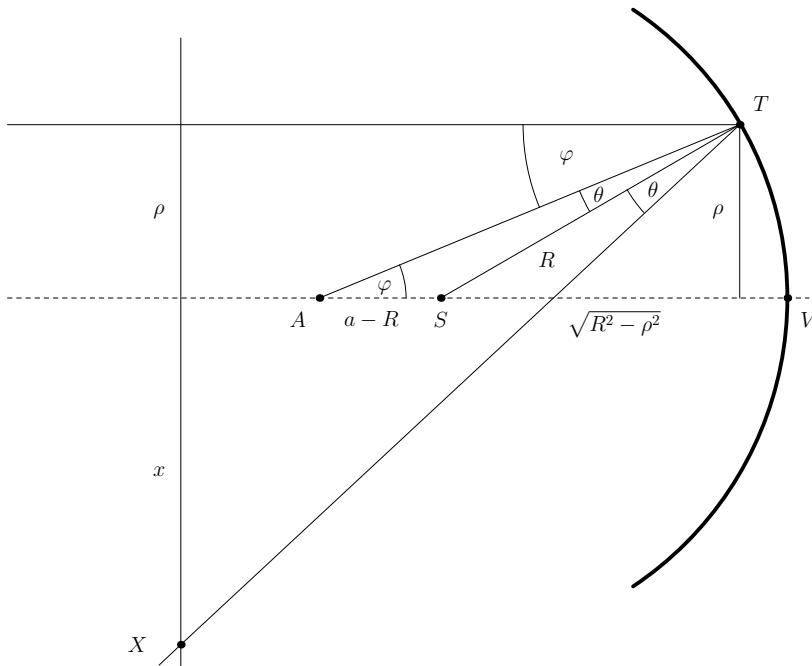
4 body

Uvažujme časť (vrchlík) dutého kulového zrcadla s poloměrem  $R = 5,5\text{ cm}$  a poloměrem kulového vrchlíku  $r = 4,0\text{ cm}$ . Mějme bodový zdroj světla, který svítí do „poloviny“, ve které se nachází toto zrcadlo, ve vzdálenosti  $a = 7,0\text{ cm}$  od vrcholu zrcadla. Do vzdálenosti  $d = 10\text{ cm}$  od vrcholu zrcadla umístíme stínítko. Vypočítejte velikost poloměru obrazu vytvořeného na stínítku. Předpokládejte, že stínítko je dostatečně velké, aby se na něj vešel obraz a že je umístěno kolmo na optickou osu.

*Vladovi se kupí nádobí a on si hraje se lžíčkou.*

Na rozdiel od predošej úlohy, v tejto úlohe už neuvažujeme zrkadlo ako malý výsek celej guľovej plochy s polomerom  $R$ . Z tohto dôvodu už nemôžeme použiť approximácie, ktoré sme použili v predošej úlohe, pretože musíme dostať exaktný výsledok.

Uvažujme lúč, ktorý vychádza zo zdroja pod uhlom  $\varphi$  voči osi zrkadla. Označme ďalej  $\theta$  uhol, ktorý zviera dopadajúci lúč so spojnicou stredu krivosti zrkadla a bodu, v ktorom lúč dopadne na zrkadlo.



Obrázek 13: Odraz jedného lúča od zrkadla

Potom z trojuholníka na obr. 13 vieme tieto uhly dať do vzťahu cez sínusovú vetu

$$\frac{R}{\sin \varphi} = \frac{a - R}{\sin \theta}.$$

Odrazený lúč bude potom s dopadajúcim lúčom zvierať uhol  $2\theta$ . Kedže dopadajúci lúč zviera s osou zrkadla uhol  $\varphi$  a  $a > R$ , odrazený lúč bude s osou zrkadla zvierať uhol  $\varphi + 2\theta$ .

Vzdialenosť bodu odrazu od vrcholu pozdĺž osi zrkadla je  $R - \sqrt{R^2 - \rho^2}$ , kde  $\rho$  je vzdialenosť bodu odrazu od osi zrkadla. Odrazený lúč tak v smere osi zrkadla prejde k tienidlu vzdialenosť  $d - R + \sqrt{R^2 - \rho^2}$  pod uhlom  $\varphi + 2\theta$  voči tejto osi. V smere kolmom na os prejde vzdialenosť  $(d - R + \sqrt{R^2 - \rho^2}) \operatorname{tg}(\varphi + 2\theta)$ , pričom lúč sa odráža smerom ku osi zrkadla. Vo výsledku dopadne do vzdialenosťi

$$x = \left( d - R + \sqrt{R^2 - \rho^2} \right) \operatorname{tg}(\varphi + 2\theta) - \rho$$

od osi zrkadla, a teda aj od stredu tienidla.

Ostáva určiť, aké maximálne  $x$  bude dosiahnuté pre uvažované lúče, ktoré dopadnú na zrkadlo. Intuitívne by sme vedeli odhadnúť, že maximálne  $x$  nastane pre lúče, ktoré dopadnú presne na okraj zrkadla, čo bude v tomto prípade skutočne platit. Ak by sme sa o tom chceli bližšie presvedčiť, mohli by sme do vzťahu pre  $x$  dosadiť vyjadrenie uhla  $\theta$  cez uhol  $\varphi$ , tento vzťah potom priamo zderivovať podľa  $\varphi$  a overiť, že táto derivácia bude vždy kladná. Podobne by sme si vedeli nechať vykresliť graf  $x$  v závislosti od  $\varphi$  (napríklad v programe Desmos), čím by sme túto našu intuiciu vedeli overiť pravdepodobne o niečo jednoduchšie.

Kedže nás zaujíma polomer obrazu vytvoreného na tienidle, stačí nám uvažovať lúč s najväčším uhlom  $\varphi$ , teda lúč dopadajúci na kraj zrkadla. Pre ten z geometrie platí

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{r}{a - R + \sqrt{R^2 - r^2}} \right) \approx 37,2^\circ,$$

a zo vzťahu medzi  $\varphi$  a  $\theta$  potom vieme uhol  $\theta$  dopočítať ako

$$\theta = \arcsin \left( \frac{a - R}{R} \sin \varphi \right) \approx 9,48^\circ.$$

Polomer obrazu na tienidle je potom

$$x = \left( d - R + \sqrt{R^2 - r^2} \right) \operatorname{tg}(\varphi + 2\theta) - r \doteq 8,3 \text{ cm}.$$

### Úloha R.3 ... reflektor mimo ohnisko

7 bodů

Reflektor v automobilu se skládá z parabolického zrcadla vzniklého rotací paraboly  $z = v(r/r_0)^2$ ,  $r < r_0$ , kde  $r_0 = 7,0 \text{ cm}$  a  $v = 5,0 \text{ cm}$  v jehož ohnisku se nachází zanedbatelně malý nekoherentní zdroj světla. Předpokládejme, že ve vzdálenosti  $d = 1,0 \text{ m}$  od horního okraje reflektoru (roviny  $z = v$ ) je kolmo na osu paraboloidu umístěno stínítko. Žárovka však nebyla umístěna přesně do ohniska, ale na osu paraboloidu ve vzdálenosti  $dh = -0,1 \text{ cm}$  od něj (tedy blíže k vrcholu paraboloidu). O kolik se v takovém případě zvětší poloměr světlého kruhu uprostřed stínítka, do kterého dopadá jak světlo přímo ze zdroje, tak světlo odražené paraboloidem?

*Kuba řídil a neviděl na silnici.*

Úlohu postačí řešit ve dvou rozměrech, neboť je cylindricky symetrická. Nechť je parabola popsána rovnicí  $z = ar^2$ , kde  $a = v/r_0^2$ , a nechť se konec paraboloidu nachází v pozici  $A = [r_0, ar_0^2]$  a zdroj je umístěn v bodě  $S = [0, h]$ . Stačí zkoumat, kam dopadne paprsek, ktorý se odrazí od kraje paraboloidu, tedy v bodě  $A$ . Tam se bude nacházať okraj vnútorného světlého

kruhu na stínítku, neboť dovnitř dopadají jak paprsky odražené paraboloidem, tak paprsky přímo ze zdroje.

Paprsek dopadající do bodu  $A$  je popsán vektorem

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{SA} = r_0 \mathbf{e}_r + (ar_0^2 - h) \mathbf{e}_z .$$

Tento paprsek se bude odražet od tečny paraboly v bodě  $A$ , kterou nalezneme zderivováním předpisu  $z = ar^2$ . Směrový vektor tečny tedy bude mít tvar

$$\mathbf{t} = \mathbf{e}_r + 2ar_0 \mathbf{e}_z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_t = \frac{\mathbf{e}_r + 2ar_0 \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + 4a^2 r_0^2}} ,$$

kde jsme navíc vektor znormovali na jedničku.

Nalezneme-li nyní průmět vektoru  $\mathbf{v}$  do směru  $\mathbf{e}_t$ , můžeme tento průmět dvakrát odečíst, čímž dostaneme vektor  $\mathbf{v}'$  popisující odražený paprsek (v opačném směru)

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_t = \frac{r_0 + 2ar_0(ar_0^2 - h)}{\sqrt{1 + 4a^2 r_0^2}} ,$$

tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - 2 \frac{r_0 + 2ar_0(ar_0^2 - h)}{\sqrt{1 + 4a^2 r_0^2}} \mathbf{e}_t = r_0 \mathbf{e}_r + (ar_0^2 - h) \mathbf{e}_z - 2 \frac{r_0 + 2ar_0(ar_0^2 - h)}{\sqrt{1 + 4a^2 r_0^2}} \frac{\mathbf{e}_r + 2ar_0 \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + 4a^2 r_0^2}} = \\ &= \left( r_0 - 2 \frac{r_0 + 2ar_0(ar_0^2 - h)}{1 + 4a^2 r_0^2} \right) \mathbf{e}_r + \left( (ar_0^2 - h) - 4ar_0 \frac{r_0 + 2ar_0(ar_0^2 - h)}{1 + 4a^2 r_0^2} \right) \mathbf{e}_z = \\ &= \frac{r_0(4ah - 1)}{1 + 4a^2 r_0^2} \mathbf{e}_r + \frac{-ar_0^2(3 + 4a^2 r_0^2) + h(4a^2 r_0^2 - 1)}{1 + 4a^2 r_0^2} \mathbf{e}_z . \end{aligned}$$

Rovnice odraženého paprsku je tak tvaru  $r = A + \lambda \mathbf{v}'$  a tedy

$$r = r_0 + \lambda \frac{r_0(4ah - 1)}{1 + 4a^2 r_0^2} \quad z = ar_0^2 + \lambda \frac{-ar_0^2(3 + 4a^2 r_0^2) + h(4a^2 r_0^2 - 1)}{1 + 4a^2 r_0^2} . \quad (27)$$

Tato přímka musí protnout přímku  $z = ar_0^2 + d$ , čímž dostáváme podmínu pro  $\lambda$

$$ar_0^2 + d = ar_0^2 + \lambda \frac{-ar_0^2(3 + 4a^2 r_0^2) + h(4a^2 r_0^2 - 1)}{1 + 4a^2 r_0^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{d(1 + 4a^2 r_0^2)}{-ar_0^2(3 + 4a^2 r_0^2) + h(4a^2 r_0^2 - 1)} .$$

Když nyní dosadíme do vztahu pro  $r$  v (27), dostáváme hledaný poloměr  $r$  kruhu na stínítku

$$r = r_0 + \frac{dr_0(4ah - 1)}{-ar_0^2(3 + 4a^2 r_0^2) + h(4a^2 r_0^2 - 1)} . \quad (28)$$

Ze tvaru vektoru  $\mathbf{v}'$  můžeme také snadno určit, pro jakou hodnotu parametru  $h$  se budeme nacházet v ohnísku paraboly. V takovém případě totiž musí být odražený paprsek vertikální a  $r$ -ová složka tak bude nulová

$$\frac{r_0(4ah - 1)}{1 + 4a^2 r_0^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4ah - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{1}{4a} .$$

V takovém případě se také zřejmě  $r = r_0$ , což odpovídá (28). Nás ale zajímá závislost na posunu  $dh = h - h_0$ . Dosadme za  $h$  do (28)

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \frac{4adr_0 dh}{-ar_0^2(3+4a^2r_0^2) + \left(\frac{1}{4a} + dh\right)(4a^2r_0^2 - 1)} = \\ &= r_0 + \frac{4adr_0 dh}{-ar_0^2(3+4a^2r_0^2) + \frac{1}{4a}(4a^2r_0^2 - 1)} + \mathcal{O}(dh^2) \end{aligned}$$

a dostáváme

$$dr = -\frac{16a^2r_0d}{1+8a^2r_0^2(1+2a^2r_0^2)} dh = -\frac{16v^2r_0d}{r_0^4+8v^2(r_0^2+2v^2)} dh = 1,3 \text{ cm}.$$

### Úloha R.4 ... reflektor při vší síle

7 bodů

Reflektor v automobilu se skládá z parabolického zrcadla vzniklého rotací paraboly  $z = v(r/r_0)^2$ ,  $r < r_0 = 7,0 \text{ cm}$ , kde  $v = 5,0 \text{ cm}$ , v jehož ohnisku se nachází zanedbatelně malý nekoherentní zdroj světla se zářivostí  $I_\Omega = 0,4 \text{ W}\cdot\text{sr}^{-1}$  ve viditelném spektru. Předpokládejme, že ve vzdálenosti  $d = 1,0 \text{ m}$  od horního okraje reflektoru (roviny  $z = v$ ) je kolmo na osu paraboloidu umístěno stínítko. Na stínítku je patrný světlý kruh, do kterého dopadají jak paprsky odražené paraboloidem, tak paprsky přímo ze zdroje. Určete velikost skoku v intenzitě na hranici tohoto kruhu.

Kuba řídil a přemýšlel o fyzice.

Na stínítko budou dopadat jak paprsky přímo ze zdroje, tak paprsky odražené paraboloidem. Jelikož je světlo nekoherentní, budou se příslušné intenzity na stínítku jednoduše sčítat. Skok, který na kraji kruhu pozorujeme, je tak způsobený pouze intenzitou odraženého záření.

Uvažme sférické souřadnice  $(r, \theta, \varphi)$  se středem v ohnisku, pro které jsme odvodili, že se nachází v bodě  $F = [0, 1/(4a)]$ , kde  $a = v/r_0$ . Na stínítku uvažme polární souřadnice  $(R, \varphi)$ ,  $\varphi$  se zřejmě v obou systémech shoduje.

Budeme potřebovat znát polomér  $R$  na stínítku, do kterého se zobrazí paprsek vyzářený pod úhlem  $\theta$  měřeným od osy paraboloidu. Nejprve nalezněme bod paraboly, ve kterém se takový paprsek odrazí. Směrnice paprsku před odrazem je zřejmě

$$\mathbf{v} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \mathbf{e}_x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \mathbf{e}_y = \sin\theta \mathbf{e}_x + \cos\theta \mathbf{e}_y$$

a parametrická rovnice paprsku nabývá tvar

$$\begin{aligned} r &= \lambda \sin \theta \\ z &= \frac{1}{4a} + \lambda \cos \theta. \end{aligned}$$

Tato přímka musí protnout parabolu  $z = v(r/r_0)^2 = ar^2$ , tedy

$$\begin{aligned} ar^2 &= \frac{1}{4a} + \lambda \cos \theta \\ a\lambda^2 \sin^2 \theta &= \frac{1}{4a} + \lambda \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \lambda \\ &= \frac{\cos \theta \pm 1}{2a \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

Jelikož hledáme  $\lambda \geq 0$ , budeme uvažovat kladné řešení. Paprsek se tedy odrazí při poloměru

$$R = \frac{\cos \theta + 1}{2a \sin^2 \theta} \sin \theta = \frac{1 + \cos \theta}{2a \sin \theta}. \quad (29)$$

Protože se odrazí jako paprsek vertikální, v tomto poloměru také dopadne na stínítko.

Nyní nás zajímá, jak velký plošný element  $dS = R dR d\varphi$  na stínítku bude ozářen při vyzáření paprsků z žárovky v prostorovém úhlu  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ . Ze vztahu (29) máme

$$dR = d\left(\frac{1 + \cos \theta}{2a \sin \theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1 + \cos \theta}{2a \sin \theta}\right)d\theta = -\frac{1 + \cos \theta}{2a \sin^2 \theta}d\theta,$$

díky čemuž určím velikost ozářeného elementu jako

$$dS = R dR d\varphi = \frac{1 + \cos \theta}{2a \sin^2 \theta} R d\theta d\varphi = \frac{1 + \cos \theta}{2a \sin^3 \theta} R d\Omega,$$

odkud dále uvažujeme kladnou hodnotu  $dS$ , neboť paprsky se při zvyšujícím se  $\theta$  při odrazu zkříží. Nás však zajímá absolutní plošný element. Ze zadání známe zářivost žárovky  $I_\Omega = dP/d\Omega$ . Můžeme tedy vypočítat výkon dopadající na plochu  $dS$  jako

$$dP = I_\Omega d\Omega = I_\Omega \frac{2a \sin^3 \theta}{1 + \cos \theta} \frac{dS}{R} \Rightarrow I = \frac{dP}{dS} = I_\Omega \frac{4a^2 \sin^4 \theta}{(1 + \cos \theta)^2}, \quad (30)$$

kde jsme dopočetli výslednou intenzitu  $I$ .

Zbývá najít úhel  $\theta$  odpovídající poloměru  $R = r_0$ . K tomu potřebujeme invertovat vztah (29). Zkusme vyjádřit goniometrické funkce pomocí úhlu  $\theta/2$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) \\ \sin \theta &= 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2). \end{aligned}$$

Po dosazení dostaváme

$$R = \frac{1 + \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)}{4a \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} = \frac{2 \cos^2(\theta/2)}{4a \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)} = \frac{1}{2a} \cotg(\theta/2).$$

Její inverze má na intervalu  $(0, 2\pi)$  tvar

$$\theta = 2 \operatorname{arccotg}(2a R).$$

Obdobně můžeme přepsat zlomek ve výrazu (30)

$$\frac{4a^2 \sin^4 \theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{64a^2 \sin^4(\theta/2) \cos^4(\theta/2)}{(1 + \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2))^2} = \frac{64a^2 \sin^4(\theta/2) \cos^4(\theta/2)}{4 \cos^4(\theta/2)} = 16a^2 \sin^4(\theta/2)$$

Výsledek tak přejde na výraz

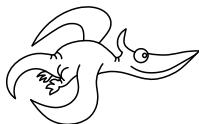
$$I = 16a^2 I_\Omega \sin^4 \operatorname{arccotg}(2aR).$$

S využitím vztahů

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{arccotg} x &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \\ \cos \operatorname{arccotg} x &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \end{aligned}$$

nakonec můžeme pro výsledek v bodě  $R = r_0$  psát

$$I = 16a^2 I_\Omega \frac{1}{(1 + 4a^2 r_0^2)^2} = \frac{16v^2 I_\Omega}{(r_0^2 + 4v^2)^2} \doteq 7,2 \text{ mW}\cdot\text{cm}^{-2}.$$

**FYKOS**

UK, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <https://fykos.cz>

e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)

/FYKOS @fykosak

---

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.