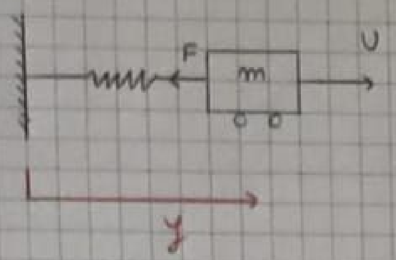
<u>Fondamenti di Automatica</u>

Esercitazione 1



convenzione

Che tipo di modello dobbiamo usare?

se la forza fosse costante:

$U = F = K\Delta x = Ky$ $\qquad U = Ky$ (basta un modello algebrico)

Se la forza non è costante sono interessato alla dinamica del sistema, un metodo algebrico non basta più. (serve un <u>modello dinamico</u>)

Per descrivere quale sarà il movimento del carrellino, ho bisogno di conoscere altri dati:

$$\begin{cases} x_1 = \text{posizione carrello (lunghezza molla)} \\ x_2 = \text{velocità carrello} \end{cases}$$

↳ stato del sistema

Modello dinamico, di che tipo? $\begin{cases} \text{t.c. (tempo continuo)} \\ \text{t.d. (tempo discreto)} \end{cases}$

<u>Newton</u>:

$$\boxed{\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a}}$$

poiché $a = \ddot{x}(t)$, il modello da usare deve essere un modello dinamico a tempo continuo.

Rapporto del modello con var. di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}\left(U - Kx_1 - \underbrace{\alpha x_2}_{\text{attrito viscoso}}\right) \end{cases}$$

y (uscita) $= x_1$

Modello t.c. in cui le funzioni in gioco sono lineari.

$\underline{x} \in R^2$

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{b}u$$
$$y = \underline{c}^T x + du$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{\alpha}{m} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

$$c^T = [1 \ \ 0] \qquad d = 0$$

Rappresentazione in spazio di stato

Modello ARMA (ingresso/uscita)

$$Sx_1 = x_2$$
$$Sx_2 = \frac{1}{m}(u - Kx_1 - \alpha x_2)$$
$$y = x_1 \longrightarrow Sy = Sx_1 = x_2 \longrightarrow S^2y = Sx_2 = \frac{1}{m}(u - Kx_1 - \alpha x_2)$$

$$mS^2y = u - Ky - \alpha Sy$$

$$\boxed{\underbrace{(mS^2 + \alpha S + K)}\, y = 1}$$

(Rappr. ingresso/uscita) **Mod. ARMA**

- $D(S)$ ha grado 2 $\Rightarrow$ il modello I/O è equivalente al modello in spazio di stato
- $N(S)$ ha grado 0

equivalente ? significa che ha lo stesso grado del modello interno ? (ordine di A)

$r = 2 > 0 \rightarrow$ modello proprio

- zeri : $\{\ \}$
- poli : $\dfrac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - K \cdot m}}{2m}$ (I poli sono radici di Δ_A, ovvero autovalori di A)

Guadagno : $G(0) = \dfrac{1}{K} = \dfrac{\bar{y}}{\bar{u}}$ $\dfrac{\text{(uscita cost.)}}{\text{(ingresso cost.)}}$

Funzione di trasferimento

$$G(S) = \frac{N(S)}{D(S)} = \frac{1}{mS^2 + \alpha S + K} = \frac{y}{u}$$

Ese. 2

$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array}\right\}$ finanziamenti in essere al tempo t
Stato del sistema

1. Elevata affidabilità
2. Media
3. Scarsa affidabilità

Modello dinamico (lineare, a tempo discreto)

$x_1(t+1) = 0{,}8\ x_1(t) + u(t)$

↳ finanz. ad elevata affidabilità l'anno prossimo

$x_2(t) = 0{,}7\ x_2(t) + 0{,}1\ x_1(t)$

$x_3(t) = 0{,}9\ x_3(t) + 0{,}2\ x_2(t)$

$y(t)$ (sofferenze, uscita) $= 0{,}05\ x_2(t) + 0{,}1\ x_3(t)$ $(\cdot)$

$$\underline{x}(t+1) = A\underline{x}(t) + \underline{B}u(t)$$
$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) + d\,u(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T = [0,\ 0{,}05\ \ 0{,}1] \qquad d = 0$$

Modello ARMA (I/O) (uso operatore z)

$z x_1 = 0{,}8 x_1 + 0 \longrightarrow (z-0{,}8)x_1 = 0$

$z x_2 = 0{,}1 x_1 + 0{,}7 x_2 \longrightarrow (z-0{,}7)x_2 = 0{,}1 x_1$

$z x_3 = 0{,}2 x_2 + 0{,}9 x_3 \longrightarrow (z-0{,}9)x_3 = 0{,}2 x_2$

$y = 0{,}05\ x_2$

obiettivo: eliminare dall'uscita le variabili di stato

$(\cdot)\ (z-0{,}9)(z-0{,}7)(z-0{,}8)\,y = 0{,}05(z-0{,}9)(z-0{,}8)(z-0{,}7)x_2 + 0{,}1(z-0{,}8)(z-0{,}7)\underbrace{(z-0{,}9)x_3}$

$= 0{,}05(z-0{,}9)\,0{,}1\,u + 0{,}1\cdot 0{,}1 + 0{,}2u = (0{,}005z - 0{,}0045 + 0{,}002)\,u$

$= (0{,}005z - 0{,}0025)\,u$

Riscrivo:

$$\underbrace{(z-0{,}9)(z-0{,}7)(z-0{,}8)}_{D(z)\text{ ha grado 3}}\, y = \underbrace{0{,}005\,(z-0{,}5)}_{N(z)\text{ ha grado 1}}\, u$$

Modello proprio
$r = 2 > 0$

(non ci sono parti del sist. che non influenzano l'uscita)
↳ Non sono osservabili dall'uscita

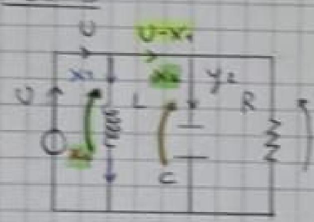
Non ci sono radici in comune tra N e D.

$$G(z) = \frac{0{,}005(z-0{,}5)}{(z-0{,}9)(z-0{,}7)(z-0{,}8)} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Guadagno per sist. t.d: $G(1) = \dfrac{0{,}005 \cdot 0{,}5}{(0{,}1)(0{,}3)(0{,}2)} = 0{,}41\bar{6}$

$u(t) = 100$ M€ $\Rightarrow$ $y(t) = 41{,}6$ M€

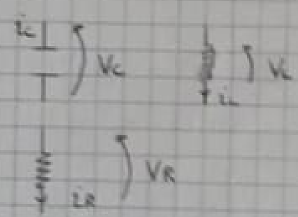
Es. 3



$y_1 = x_2$

Nota bene:

- $i_C = C\dot{V}_C$
- $V_L = L\dot{i}_L$
- $V_R = R\, i_R$



$$\begin{cases} V = i R \\ L\dot{i} = V \\ C\dot{V} = i \end{cases}$$

Poiché:

$$\begin{cases} Q = CV \Rightarrow dQ/dt = i_C = C\dot{V}_C \\ f_{em} = -L\dot{i}_L \Rightarrow V_L = -f_{em} = L\dot{i}_L \\ V = R\, i_R \quad \text{(Legge di Ohm)} \end{cases}$$

$x_1(t)$: corrente che attraversa l'induttore
$x_2(t)$: tensione ai capi del condensatore

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{1}{L} x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}\left(u - x_1 - \dfrac{x_2}{R}\right) = \dfrac{1}{C} y_2 \end{cases}$$

$y_1 = x_2$ (i 3 elementi circuitali sono in parallelo)

$y_2 = u - x_1 - \dfrac{x_2}{R}$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ Vettore di stato $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$\underline{x} \in R^2$ $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + BU$

$y = c^T\underline{x} + DU$

<u>Modello in spazio di Stato</u>

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/C \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$D \neq 0 \Rightarrow$ sistema improprio (l'ingresso influenza direttamente l'uscita)

<u>Modello ARMA</u>

- <u>Uscita 1</u>

$y_1 = x_1$ (tentiamo di eliminare var di stato)

$\dot{x}_1 = Sx_1 = \frac{1}{L}x_2$

moltiplico per S

$\dot{x}_2 = Sx_2 = \frac{1}{C}\left(U - x_1 - \frac{x_2}{R}\right) \longrightarrow S\left(S + \frac{1}{RC}\right)x_2 = S\frac{1}{C}(U - x_1)$

$y_1 = x_2$ $\boxed{\underbrace{\left(S^2 + \frac{S}{RC} + \frac{1}{LC}\right)}_{D(S)} y_1 = \underbrace{\frac{1}{C}S}_{N(S)} U}$ 1° <u>ARMA</u>

$\left.\begin{array}{l} D(S) \text{ grado } 2 \\ N(S) \text{ grado } 1 \end{array}\right\} r = 1 > 0$

$G_1(S) = \dfrac{S}{CS^2 + \frac{S}{R} + \frac{1}{L}}$ Modello di trasf.

Non vi sono parti del sist. osservabili ma non raggiungibili

$y_2 = U - x_1 - \frac{x_2}{R} \longrightarrow Sy_2 = SU - Sx_1 - \frac{Sx_2}{R} \Rightarrow Sy_2 = SU - \frac{x_2}{L} - \frac{y_2}{RC}$

$Sx_2 = \frac{1}{C}y_2$ $\Rightarrow S^2y_2 = S^2U - \frac{x_2 S}{L} - \frac{y_2 S}{RC}$

$S^2y_2 = S^2U - \frac{y_2}{LC} - \frac{Sy_2}{RC}$

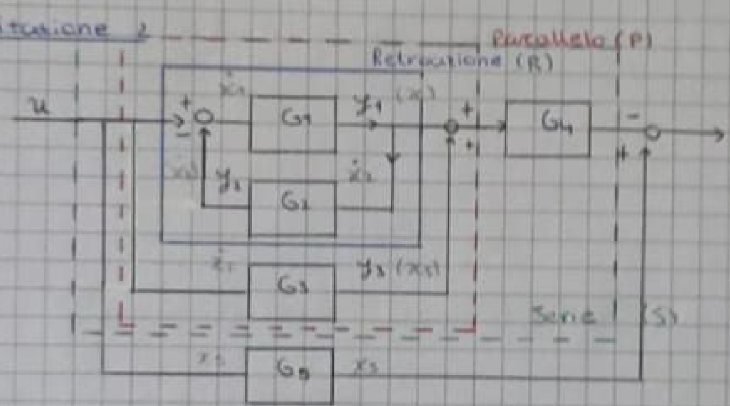
$$\left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right) y_2 = s^2 u$$

$D(s)$ grado 2
$N(s)$ grado 2 $\Big\}$ $r = 0$ improprio

Funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

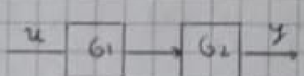
Esercitazione 2



N.B.

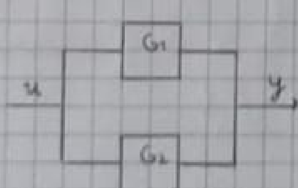
$$G = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{y}{u}$$

Serie:



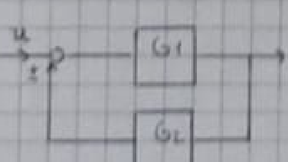
$G = G_1 G_2$

Parallelo



$G = G_1 + G_2$

Retroazione



$$G = \frac{G_1}{1 \mp G_1 G_2}$$

$G = -S + G_5$
$S = P\, G_4$
$P = R + G_3$
$R = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$

Funzione di trasferimento complessiva:

$$G = G_5 - G_4 \cdot \left(\frac{G_1}{1 + G_1 G_2} + G_3 \right) = \frac{G_5 + G_1 G_2 G_5 - G_1 G_4 - G_3 G_4 - G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_1 G_2}$$

con:

G = funzione di trasferimento complessiva

S, P, R : funzioni di trasf. dei vari aggregati di sistemi in serie, parallelo, retroazione.

$$
\begin{cases}
y_1 = G_1(u - y_2) \longrightarrow y_1 = G_1(u - G_2 y_1) \Rightarrow y_1 = \dfrac{G_1 u}{1 + G_1 G_2} \\
y_2 = G_2 y_1 \\
y_3 = G_3 u \\
y_4 = G_4 (y_1 + y_3) \longrightarrow y_4 = G_4 \left(\dfrac{G_1}{1 + G_1 G_2} + G_3 \right) u \\
y_5 = G_5 u \\
y = y_5 - y_4 \longrightarrow y = \left[G_5 - G_4 \left(\dfrac{G_1}{1 + G_1 G_2} + G_3 \right) \right] u
\end{cases}
$$

$$u \longrightarrow \boxed{1/s} \longrightarrow y \qquad \text{con } \frac{1}{s} = \text{f.d.t}$$

$$y = \frac{1}{s} u$$

$$s y = u$$

$$\dot{y} = u$$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = 0 - x_2 \\
\dot{x}_2 = x_1 \\
\dot{x}_3 = u \\
\dot{x}_4 = x_1 + x_3 \\
\dot{x}_5 = u \\
y = x_5 - x_4
\end{cases}
\Rightarrow \underline{\text{formulazione interna}}
$$

Ricostruzione in forma canonica, funt. di trasferimento:

$$G = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\left(\frac{1/s}{1 + \frac{1}{s^2}} + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\left(\frac{s^2 + s^2 + 1}{(s^2+1)s} \right) = \frac{s(s^2+1) - (2s^2+1)}{s^2(s^2+1)} = \frac{s^3 - 2s^2 + s - 1}{s^4 + s^2}$$

funzione di trasf. di ordine 4

$$\left.\begin{aligned} sx_1 &= u - x_2 \\ sx_2 &= x_1 \end{aligned}\right\} \quad s^2 x_1 = su - s x_2 = su - x_1 \;\Rightarrow\; (s^2+1)\,x_1 = su$$

$$sx_3 = u$$

$$sx_4 = x_1 - x_3$$

$$sx_5 = u$$

$$y = x_5 - x_4 \;\Rightarrow\; sy = sx_5 - sx_4 = u - x_1 - x_3$$

$$\Rightarrow s^2(s^2+1)\,y = s(s^2+1)u - s\underbrace{(s^2+1)x_1}_{}{}^{su} - \underline{s}\,\underline{(s^2+1)x_3}^{\,u}$$

$$\Rightarrow s^2(s^2+1)\,y = s(s^2+1)u - s^2 u - (s^2+1)u \qquad \text{(ordine 4)}$$

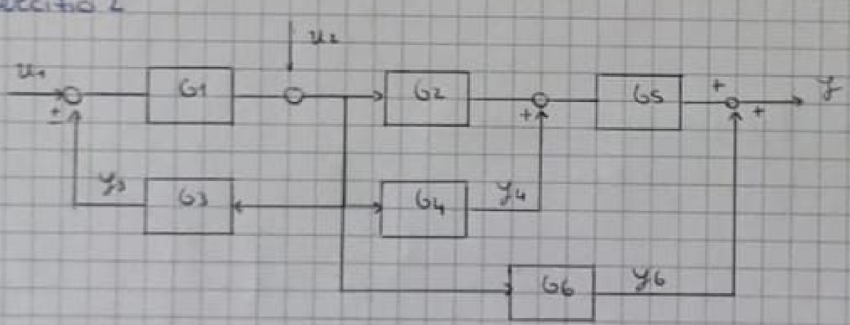
<u>Forma canonica di ricostruzione</u>

$$G(s) = \frac{s^3 - 2s^2 + s - 1}{s^2(s^2+1)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = [\,0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1\,] \qquad D = [0]$$

Esercizio 2



$y = y_5 + y_6$

$y_5 = G_5(y_2 + y_4)$

$y_2 = G_6(u_2 + y_1)$

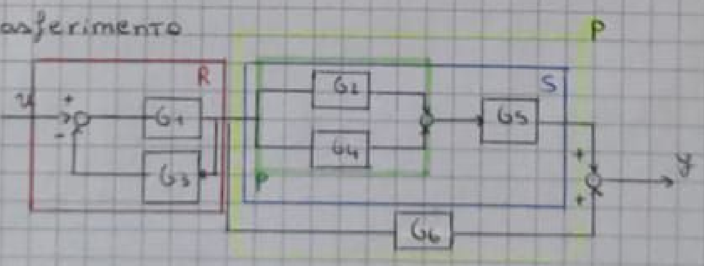
$y_4 = G_2(u_2 + y_1)$

$y = G_4(u_2 + y_1)$

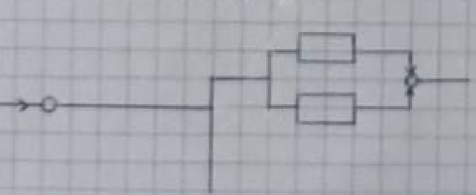
$y_1 = G_1(u_1 - y_3)$

$y = G_3(u_2 + y_1)$

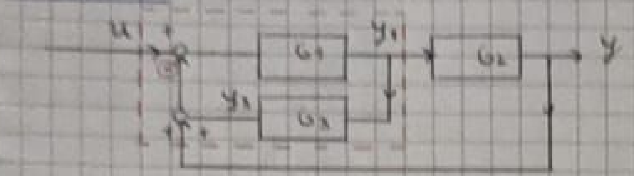
Funzione di trasferimento

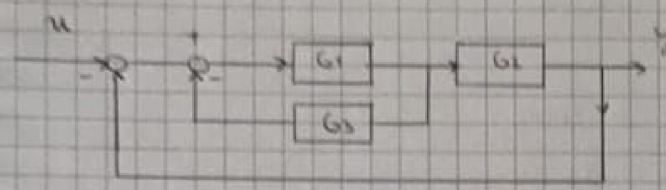


$$G_{1\to y} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_3}\Big((G_2 + G_4)\,G_5 + G_6\Big)$$



Esercizio 3





$$G = \frac{\frac{G_1}{1+G_1G_3}\,G_2}{1+\frac{G_1G_2}{1+G_1G_3}} = \frac{G_1G_2}{1+G_1G_3+G_1G_2}$$

$$\begin{cases} y_1 = G_1(u - y - y_3) \\ y_3 = G_3(y_1) \\ y = G_2(y_1) \end{cases}$$

$$y_1 = G_1(u - y - G_3 y_1) \Rightarrow (1 + G_1G_3)y_1 = G_1u - G_1y$$

$$y = \frac{G_2(G_1u - G_1y)}{1 + G_2G_3}$$

$$(1 + G_2G_3 + G_1G_2)\,y = G_1G_2u$$

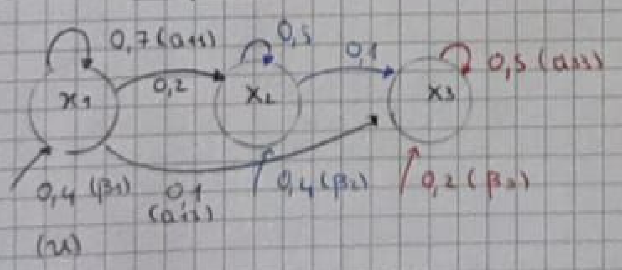
Esercitazione 3

Esercizio 1

Modello dinamico

$x_i(t)$ = # clienti impresa i al tempo $\underline{t}$ (mese)

Modello a tempo discreto in cui t è il mese



$x_1(t+1) = 0{,}7\,x_1(t) + 0{,}4\,u(t)$

$x_2(t+1) = 0{,}2\,x_1(t) + 0{,}5\,x_2(t) + 0{,}4\,u(t)$

$x_3(t+1) = 0{,}1\,x_1(t) + 0{,}2\,x_2(t) + 0{,}5\,x_3(t) + 0{,}2\,u(t)$

$y(t) = x_1(t)$ (dato del problema)

Siccome $u(t) = \bar{u} = 1500$ (al mese)

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}4 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$$

$$c = [1 \; 0 \; 0] \qquad d = [0]$$

$x(t+1) = x(t) = \bar{x}$ (traiettoria d'equilibrio) $\longrightarrow$ $\exists$ unico equilibrio poiché A ha autovalori in 0,7, 0,5 e 0,5, cioè non ha autoval. in +1)

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \bar{x}_1 = 0{,}7\,\bar{x}_1 + 0{,}4\,\bar{u} \\ x_2(t+1) = \bar{x}_2 = 0{,}2\,\bar{x}_1 + 0{,}5\,\bar{x}_2 + 0{,}4\,\bar{u} \\ x_3(t+1) = \bar{x}_3 = 0{,}1\,\bar{x}_1 + 0{,}1\,\bar{x}_2 + 0{,}5\,\bar{x}_3 + 0{,}2\,\bar{u} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $0{,}3\,\bar{x}_1 = 0{,}4\,\bar{u} \longrightarrow \bar{x}_1 = 4/3\,\bar{u} = 2000$

$0{,}5\,\bar{x}_2 = \frac{4}{15}\bar{u} + \frac{2}{3}\bar{u} \rightarrow \bar{x}_2 = \frac{4}{3}\bar{u} = 2000$

$0{,}5\,\bar{x}_3 = 0{,}1\,\bar{x}_1 + 0{,}2\,\bar{x}_2 + 0{,}2\,\bar{u}$

$= \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}\bar{u} + \frac{1}{5}\bar{u} \longrightarrow \bar{x}_3 = \frac{14}{15}\bar{u} = 1400$

$= \frac{7}{15}\bar{u}$

$\frac{\bar{x}_1}{\bar{u}} = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{4}{3}$ guadagno del sistema

Esercizio 2

$u(t)$ = spesa al tempo t

$y(t)$ = ricavo al tempo t

$x_1, x_2(t)$ = # bottiglie invecchiate 1 o 2 anni al tempo t

c = costo di acquisto di ogni bottiglia

p_1, p_2 = prezzo di rivendita dopo 1/2 anni

- $x_1(t+1) = u(t)/c$
- $x_2(t+1) = 0{,}8\,x_1(t)$

↳ bottiglie che hanno un anno quest'anno.

Hp: dopo anno t venderò tutte le bott. che mi ero prefissato

- $y(t) = p_1\,0{,}2\,x_1(t) + p_2\,x_2(t)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1/c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$c^T = [\,p_1\,0{,}1 \quad p_2\,]$ $d = [0]$ modello improprio

Calcolo equilibrio (in funzione di u)

$x(t+1) = \bar{x} = x(t)$ con "$\bar{\ }$" intendo all'equilibrio

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{u} \quad \text{(cost, affinché il sistema possa convergere all'eq.)} \\ \bar{x}_2 = 0{,}8\,\bar{x}_1 = 0{,}8\,\frac{\bar{u}}{c} \\ \bar{x}_3 = \left(\frac{p_1}{c}\cdot 0{,}2 + \frac{p_2}{c}\cdot 0{,}8\right)\bar{u} \end{cases}$$

Sistema che definisce l'equilibrio:

$$x(t+1) = \bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u}$$

$$(I-A)\bar{x} = B\bar{u} \implies \bar{x} = (I-A)B\bar{u}$$

$I-A$ deve essere invertibile (non deve avere autovalori $=1$)

$\bar{u} = 1000$ €

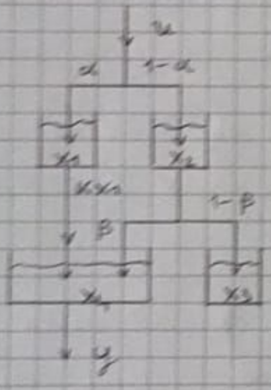
$C = 1{,}4$ €

$p_2 = 0{,}5\,p_1 + p_1 = 1{,}5\,p_1$

Determinare p_1, p_2 affinché $y = 3000$ €

$$3\cancel{000} = \left(\frac{p_1 \cdot 0{,}2}{1{,}4} + \frac{1{,}5\,p_1 \cdot 0{,}8}{1{,}4}\right)1\cancel{000} \implies 3 = \left(\frac{0{,}2+1{,}2}{1{,}4}\right)p_1 \implies \begin{cases} p_1 = 3 \\ p_2 = 4{,}5 \end{cases}$$

Tempo continuo



Se parto da un determinato stato $\underline{x}(0)$:

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{bmatrix} \implies \text{se } \bar{u} = 0$$

Valori di acqua nei 4 serbatoi

(Rete non alimentata)

↳ (valori di H_2O presenti al $t=0$ in ciascun serbatoio)

$$\implies \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3(0) + (1-\beta)x_2(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

↳ si svuoteranno tutti tranne il 3

Supponiamo di partire dallo stato nullo:

$\underline{x}(0) = \underline{0}$

$u = \bar{u}$

$$\dot{x} = Kx_1 + U \overset{\text{(All'eq.)}}{\implies} \bar{x} = \frac{U}{K}$$

$$\implies \bar{x} = \begin{bmatrix} \alpha U/K \\ (1-\alpha)\frac{U}{K} \\ +\infty \\ u(1-(1-\alpha))(1-\beta))/K \end{bmatrix}$$

(x_3 non si svuota, a regime straborderà)

Quanti eq. possibili?

$\begin{cases} u = 0 \implies \infty \text{ equilibri} \\ u \neq 0 \implies \text{non vi sono equilibri} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha u - Kx_1 \\ \dot{x}_2 = (1-\alpha)u - Kx_2 \quad \text{acqua che esce} \\ \dot{x}_3 = (1-\beta)x_2 - 0 \quad \text{(non esce } H_2O\text{)} \\ \dot{x}_4 = Kx_1 + Kx_2\beta - Kx_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} -K_1 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & -K_2 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & K_2(1-\beta) & \boxed{0} & 0 \\ K & \beta K_2 & \boxed{0} & -K_4 \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \{\lambda_A\} = \{-K_1, -K_2, 0, -K_4\}$$

$$C^T = [\,0 \quad 0 \quad 0 \quad K_4\,] \qquad d = 0$$

$\dot{x} = 0 \qquad \bar{x} = A^{-1} B \bar{u}$ (Equilibrio) si legge: "$\dot{x}_i$ all'equilibrio"

A non invertibile (ha una colonna di 0) $\Rightarrow \begin{cases} \infty \text{ equilibri se } u = 0 \\ 0 \text{ o } \infty \text{ eq. se } u \neq 0 \end{cases}$

Rete viene alimentata $\longrightarrow \bar{u} \neq 0$

$\dot{x}_1 = 0 = \alpha\bar{u} - K\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{\alpha\bar{u}}{K}$

$\dot{x}_2 = 0 = (1-\alpha)\bar{u} - K\bar{x}_2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_2 = \frac{(1-\alpha)\bar{u}}{K}$

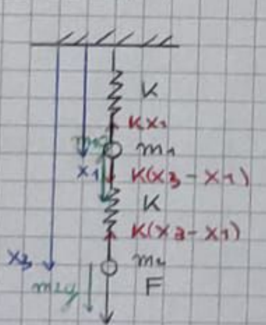
$\dot{x}_3 = 0 = (1-\beta)K\bar{x}_2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_2 = 0$

$\exists$ eq. solo se: $\alpha = 1 \vee \bar{u} = 0 \vee \beta = 1$

$\dot{x}_4 = 0 = K(\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2 - \bar{x}_4) = 0 \Rightarrow x$

— Assurdo $\Rightarrow \nexists$ equilibri, infatti il serbatoio 3, non avendo uscita, continua ad accumulare $x_3(t) \longrightarrow \infty$

Esercizio 4



Modello - uso newton (Hp: lungh. 0 della molla)

$\sum_i F_i = ma$

Var. di stato — Solitamente posizione e velocità dell'i-esimo corpo

x_1 = pos. massa 1

x_2 = velocità massa 1

x_3 = pos. massa 2

x_4 = velocità massa 2

$y_1 = x_1$

$y_2 = x_2$

Convenzione: $\downarrow \oplus$

$\forall$ massa: bilancio forze

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ m_1\dot{x}_2 = -Kx_1 + K(x_3 - x_1) + m_1 g - \alpha x_2 \quad \text{(attrito)} \quad \text{(Legge di Newton)} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ m_2\dot{x}_4 = -K(x_3 - x_1) + F + m_2 g - \alpha x_4 \end{cases}$$

Sistema lineare, proprio a 2 uscite e 2 ingressi (F_g e F)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2K}{m_1} & -\frac{\alpha}{m_1} & \frac{K}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{m_2} & 0 & -\frac{K}{m_2} & -\frac{\alpha}{m_2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1/m_2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{u} = \begin{bmatrix} F \\ g \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinare le pos. di equilibrio in funzione di F

<u>All' equilibrio</u>: $\quad (\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists!\ \bar{x})$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0 \Rightarrow \bar{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_2 &= 0 \Rightarrow -2K\bar{x}_1 + K\bar{x}_3 + m_1 g - \overset{(=0)}{\cancel{\alpha \bar{x}_2}} = 0 \\ \dot{x}_3 &= 0 \Rightarrow \bar{x}_4 = 0 \\ \dot{x}_4 &= 0 \Rightarrow K\bar{x}_1 - K\bar{x}_3 + F + m_2 g = 0 \end{aligned}\right\}$$

Sommo (2) e (4):

$$-K\bar{x}_1 + (m_1+m_2)g + F = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = 1 \cdot \frac{F}{K} + \frac{(m_1+m_2)}{K}g \\ \bar{x}_3 = \bar{x}_1 + \frac{F}{K} + \frac{m_2 g}{K} = \frac{2F}{K} + \frac{(m_1+2m_2)}{K}g \end{cases}$$

- tali coeff. sono i guadagni

Risolvo il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (-2Kx_1 - \alpha x_2 + Kx_3 + m_1 g) \cdot \frac{1}{m_1} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{m_2}(Kx_1 - \alpha x_4 - Kx_3 + m_2 g + F) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2K}{m_1} & -\frac{\alpha}{m_1} & \frac{K}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{m_2} & 0 & -\frac{K}{m_2} & -\frac{\alpha}{m_2} \end{bmatrix} \qquad B =$$

Esercitazione 4

Es. 1

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} p & 1 & 2 \\ \hline 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

a) stabilità

b) T_R

c) oscillazioni

$p \in \mathbb{R}$

Le info sul funzionamento del sistema sono contenute in A

Calcolo gli autovalori di A, che è una matrice a blocchi

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - p & -1 & -2 \\ 0 & \lambda+2 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{bmatrix} = (\lambda - p)((\lambda+2)^2+1) = (\lambda-p)(\lambda^2+4\lambda+5)$$

$\lambda_1 = p$

$\lambda_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$

c) Esistono oscillazioni? Sì, ci sono 2 valori che sono complessi coniug.

Modi di funzionare: $e^{-2t}\,[\cos(1t) + i\sin(1t)]$

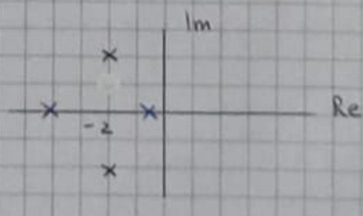
a) Stabilità?

$$\text{Se } p \begin{cases} < 0 & \text{as. stab} \\ > 0 & \text{instabile} \\ = 0 & e^{0t} = 1 \quad \text{semplice. stab.} \end{cases}$$

$\lambda = 0$ ha $m.a = 1 = m.g \Rightarrow$

b) T_R (tempo di risposta) : tempo che devo aspettare perché il transitorio si esaurisca

↳ definito per $p \leq 0$

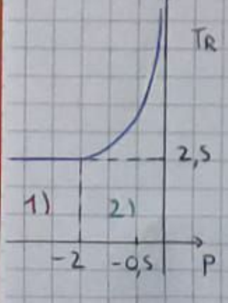


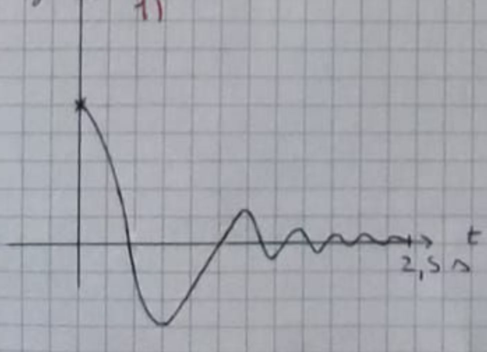
$$T_R := 5\,T_D = 5\left(-\frac{1}{Re(\lambda_D)}\right)$$

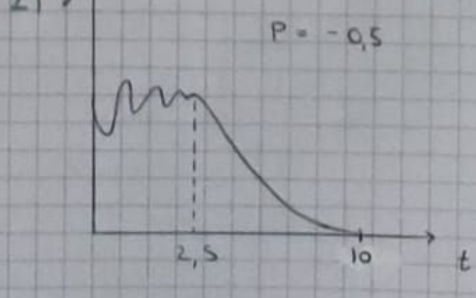
1) se $p < -2 \Rightarrow T_D = +\frac{1}{2} \Rightarrow T_R = 2{,}5\,s$

2) se $-2 < p < 0 \Rightarrow T_D = -\frac{1}{p} \Rightarrow T_R = -\frac{5}{p}$

• Arriveremo a regime vedendo le oscillazioni, poiché il modo oscill. è il più lento (dominante). Prima sparirà il modo legato all'exp e poi le oscillazioni. (e viceversa)







Esercitazione 5

Es 1

matrice a blocchi

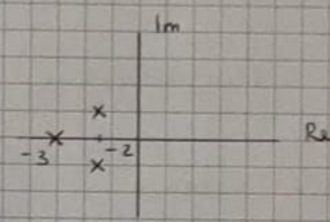
Σ_1 $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ (B = blocco in alto a sinistra)

sottomatrice stabile

La var. di stato x_3 è influenzata da x_1 ma non influenza x_1 e x_2. x_3 è a valle rispetto al sistema x_1 e x_2. (?)

Σ_2 $G(s) = \dfrac{s^2+4s+4}{s^3+14s^2+43s+30} \rightarrow (p)$ =

$$\underbrace{s^3}_{a_0} + \underbrace{14s^2}_{a_1} + \underbrace{43s}_{a_2} + \underbrace{30}_{a_3}$$



$\lambda_1 = -3$

$(\lambda+3)(\lambda+1)+2 = 0 \longrightarrow \lambda^2+4\lambda+5 = 0 \longrightarrow \lambda_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$

$\downarrow$

$\det(\lambda I - B)$

Oss: tendenzialmente i poli sono un sottoinsieme degli autovalori

$T_D = -\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2}$ $T_R = 2{,}5\ s$

Σ_2) Chi sono i poli del sistema? Le radici del denominatore della f.d.t
(modi di funz.)

Criterio di Routh per verificare che p è stabile (4 righe e 4 col.)

$$R = \begin{array}{|c|c|c} 1 & 43 & 0 \\ 14 & 30 & 0 \\ r_{31} & 0 & \\ r_{41} & & \end{array}$$

$r_{31} = -\dfrac{1}{14} \det \begin{bmatrix} 1 & 43 \\ 14 & 30 \end{bmatrix} = 40{,}86$

$r_{41} = -\dfrac{1}{40{,}86} \det \begin{bmatrix} 14 & 30 \\ 40{,}86 & 0 \end{bmatrix} = 30$

Analizzo la 1ª colonna => tutti coeff > 0 => Σ_2 è as. stab.

Risolvo p: -1 è radice di $p(s)$: $p(1) = 0$

=> Divisione tra polinomi

$$\begin{array}{l|l} s^3+14s^2+43s+30 & s+1 \\ \underline{s^3+s^2} & \overline{s^2+13s+30} \\ \quad 13s^2+43s+30 & \\ \quad \underline{13s^2+13s} & \\ \qquad 30s+30 & \\ \qquad \underline{30s+30} & \\ \qquad\quad // & \end{array}$$

=> $p(s) = (s+1)(s^2+13s+30)$

Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & +14 & 43 & 30 \\ -1 & & -1 & -13 & -30 \\ \hline & 1 & 13 & 30 & 0 \end{array}$$

=> $p(s) = (s+1)(s^2+13s+30)$

caso $p = 0 \Rightarrow \infty$ equilibri

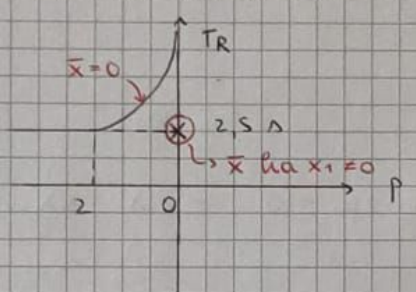
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

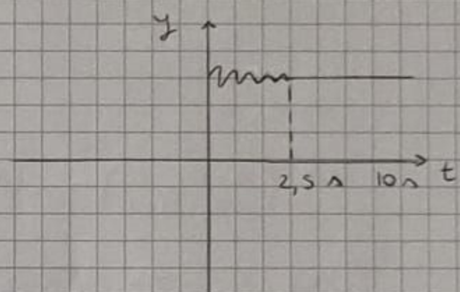
A è singolare (ha un autov. nullo)

Lo spazio nullo di A mi dice dove sono gli ∞ equilibri

$$\begin{matrix} \dot{x}_1 = 0 \longrightarrow \\ \dot{x}_2 = 0 \longrightarrow \\ \dot{x}_3 = 0 \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} \bar{x}_2 + 2\bar{x}_3 = 0 \\ -2\bar{x}_2 + \bar{x}_3 = 0 \\ -\bar{x}_2 + 2\bar{x}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = ? \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

(può assumere qualsiasi valore)





Es 2

$\dot{x} = Ax \qquad y = x_1$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ p & -2 \end{bmatrix} \qquad p \in \mathbb{R}$$

a) Equilibri
b) stabilità
c) T_R
d) oscillazioni
e) spazio di stato $\quad p = \{-1, 0, 1, 2\}$

a) $\det(A) = 2 - 2p$

se $p \neq 1 \quad \exists!$ equilibrio : $\bar{x} = 0$

se $p = 1 \quad \exists \; \infty$ equilibri

$$\begin{matrix} \dot{x}_1 = 0 \longrightarrow \\ \dot{x}_2 = 0 \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} -\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\bar{x}_2 = \bar{x}_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Gli equilibri staran- no sulla retta:

$x_2 = \frac{1}{2} x_1$

b) as. stab se $\begin{cases} \det(A) > 0 \Rightarrow 2 - 2p > 0 \Rightarrow p < 1 \\ tr(A) < 0 \Rightarrow -3 < 0 \quad \text{verificata } \forall p \end{cases}$

$\downarrow$

metodo traccia - det.

- $p < 1$ $\quad x = 0 \quad$ as. stab.
- $p > 1$ $\quad x = 0 \quad$ instabile
- $p = 1$ $\quad \infty$ equilibri $\quad$ semp. stab ?

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -p & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

c) T_R $\downarrow$ $p \le 1$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -p & \lambda+2 \end{pmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2) - 2p = 0 \implies \lambda^2 + 3\lambda + (2-2p) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2-2p)}}{2}$$

se $9 - 8 + 8p < 0 \implies$ autovalori complessi coniug.

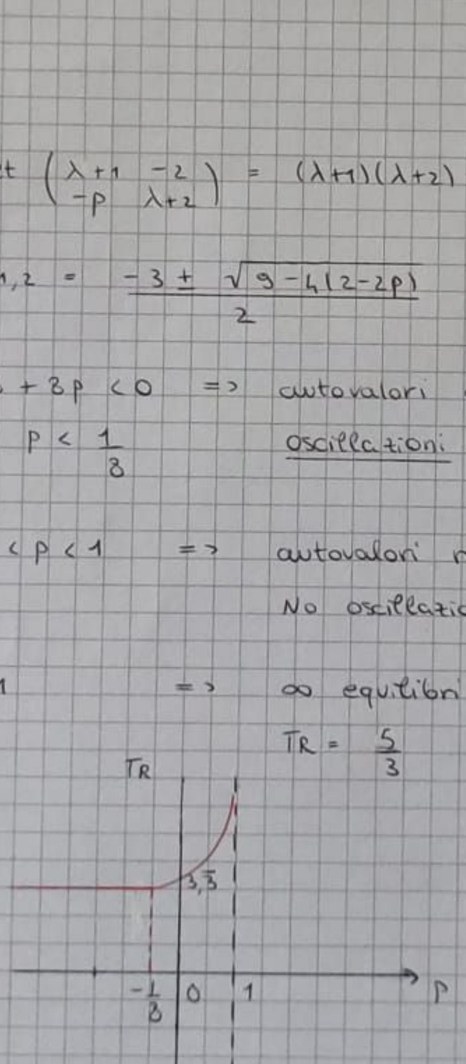
$\implies p < \frac{1}{8}$ $\quad$ oscillazioni e $T_R = \frac{10}{3} = 3,\overline{3}$

se $-\frac{1}{8} < p < 1 \implies$ autovalori reali

No oscillazioni e $T_R = \frac{10}{3 - \sqrt{1+8p}}$

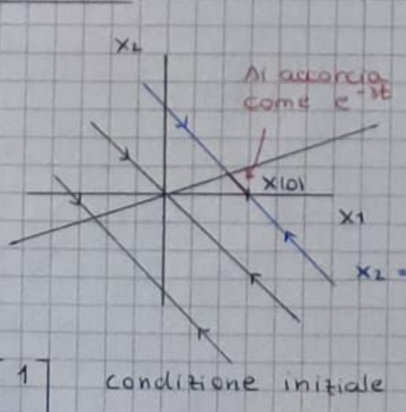
se $p = 1 \implies \infty$ equilibri

$T_R = \frac{5}{3}$



Spazi di stato

$p = 1$



∞ eq. sulla retta $x_2 = \frac{1}{2} x_1$

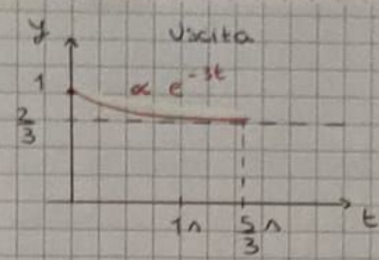
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \underline{v} = \lambda \underline{v}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{v} = 3\underline{v}$$

$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ condizione iniziale

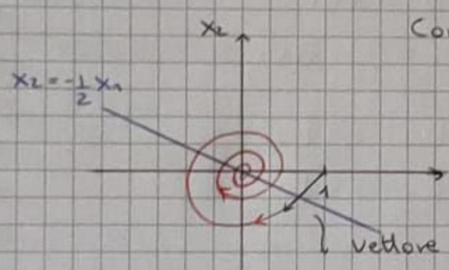
$$\begin{cases} -v_1 + 2v_2 = 3v_1 \rightarrow v_2 = -v_1 \\ v_1 - 2v_2 = 3v_2 \rightarrow v_1 = -v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \frac{1}{2} x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2/3 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$



P = -1

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i \qquad \text{(complessi coniug.)}$$



Come capisco in che verso ruoto?

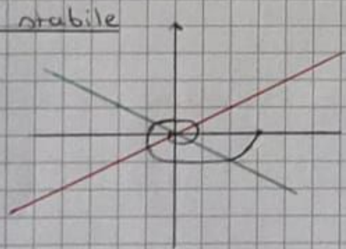
$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow -x_1 = 2x_2$

$x_2 = -\frac{1}{2} x_1$

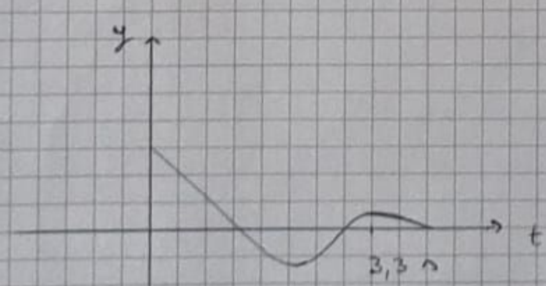
$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2$

$x_2 = \frac{1}{2} x_1$

Fuoco stabile



$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = 4{,}75 \text{ s}$$

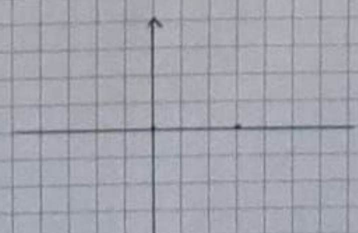


P = 0

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -2 \longrightarrow v^{(1)} = [2 \ -1]$

$\lambda_2 = -1 \longrightarrow v^{(2)} = [1 \ 0]$ autovett.

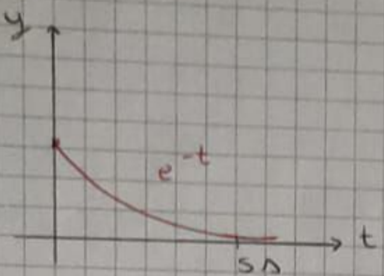


calcolo gli autovettori

$A\underline{v} = \lambda \underline{v}$

$-v_1 + 2v_2 = \lambda v_1$

$\Rightarrow 2v_2 = (\lambda + 1) v_1$



$P =$ $\quad -3 \pm \sqrt{9 - 4(2 \cdot 20)}$

$\lambda_1 = -\frac{7}{2}$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}$

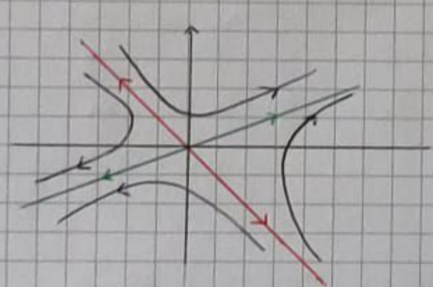
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \frac{15}{8} & -2 \end{bmatrix}$$

$-v_1 + 2v_2 = \lambda v_1$

$\Rightarrow 2v_2 = (\lambda + 1) v_1$

$\underline{v_1} = [2 \ -2{,}5]$

$\underline{v_2} = [2 \ \ 1{,}5]$



Rivedere registrazione x es online

$P(S) = (S+1)(S^2 + 13S + 30) = (S+1)(S+10)(S+3)$

$\lambda_D = -1 \implies T_D = 1\,s \quad , T_R = 5\,s$

Il sistema che converge più velocemente a 0 è il 1°.

Es 2

$z = \frac{S+1}{S-1}$ Trasformazione

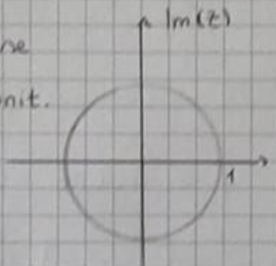
Sistema t.d. ordine 2 : Verificare che il crit. di stabilità è: $\begin{cases} \det(A) < 1 \\ |tr(A)| < 1 + \det(A) \end{cases}$

$x(t+1) = A\,x(t)$

Nota: la trasformazione z è invertibile e ben def. se $s \neq 1$

$z(S-1) = S+1 \longrightarrow zS - S = z+1 \longrightarrow S = \frac{z+1}{z-1}$

Sistema a t.d. è stabile se tutti i poli (gli z) sono all'interno del cerchio unit.



Un sist. a t.d. è stabile se tutti i poli sono all'interno del cerchio unitario

se:

$|z| < 1$, come è fatta s? Come il cerchio unit. è mappato da questa trasf.

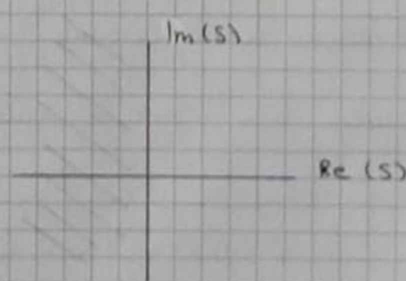
$\hookrightarrow \left|\frac{S+1}{S-1}\right| < 1 \longrightarrow \left|\frac{Re(s)+1+Im(s)}{Re(s)-1+Im(s)}\right| = \sqrt{\frac{(Re(s)+1)^2 + Im(s)^2}{(Re(s)-1)^2 + Im(s)^2}} < 1$

prendiamo come parte reale + immagin.

$\implies (Re(s)+1)^2 + \cancel{Im(s)^2} < (Re(s)-1)^2 + \cancel{Im(s)^2}$

$\cancel{Re(s)^2} + 2Re(s) + \cancel{1} < \cancel{Re(s)^2} - 2Re(s) + \cancel{1}$

$4Re(s) < 0$



$\implies$ i punti all'interno del cerchio vengono mappati nel semipiano $Re(s) < 0$

Polinomio caratteristico: $z^2 - tr(A)z + \det A = 0$ autoval. sistema

$\implies \frac{(S+1)^2}{(S-1)^2} - tr(A)\frac{S+1}{S-1} + \det A = 0$ trovo dove vengono mappati i poli del sist.

$(S+1)^2 - tr(A)(S+1)(S-1) + \det(A)(S-1)^2 = 0$

$S^2 + 2S + 1 - tr(A)(S^2-1) + \det(A)(S^2-2S+1) = 0$

$S^2(1 - tr(A) + \det(A)) + S(2 - 2\det(A)) + 1 + tr(A) + \det(A) = 0$

Criterio di stabilità: Imponiamo che i coeff. abbiamo tutti stesso segno

- $1 + \det(A) - tr(A) > 0$
- $1 + \det(A) + tr(A) > 0$
- $2(1 + \det(A)) > 0$

$$\rightarrow \begin{cases} 1 + \det(A) > |tr(A)| \\ \det(A) < 1 \end{cases}$$

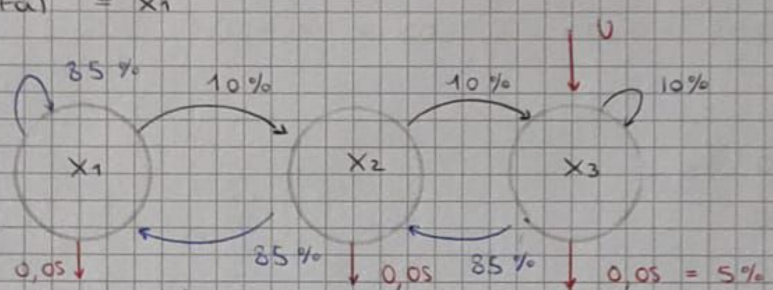
<u>Es 3</u>

Diagramma di flusso - t.d. Abbiamo informazioni che hanno cadenta annuale

x_i (var stato) # n° abbonati di categoria i

u (ingresso) : # n° nuovi abbonati

y (uscita) $= x_1$



- Utilizzo sovrasoglia
- Utilizzo sottosoglia

$x_1(t+1) = 0,85\, x_1 + 0,85\, x_2(t)$

$x_2(t+1) = 0,1\, x_1(t) + 0,85\, x_3(t)$

$x_3(t+1) = 0,1\, x_2(t) + 0,1\, x_3(t) + U$

$y(t) = x_1(t)$

$$A = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,85 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,85 \\ 0 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = [1 \quad 0 \quad 0] \qquad d = 0$$

2) $$\det(zI - A) = \det \begin{bmatrix} z - 0,85 & -0,85 & 0 \\ -0,1 & z & -0,85 \\ 0 & -0,1 & z - 0,1 \end{bmatrix}$$

$$= (z - 0,85)(z(z - 0,1) - 0,085) + (-1)(-0,1)(-0,85(z - 0,1) - 0)$$

$$= (z^3 - 0,85)(z^2 - 0,1z - 0,085) + (-0,085)(z - 0,1)$$

$$= z^3 + z^2(-0,85 - 0,1) + z(-\cancel{0,085} + \cancel{0,085} - 0,085) + 0,0723 + 0,0085$$

$$= z^3 - 0,95 z^2 - 0,085 z + 0,0808$$

Utilizzo la trasformazione:

$$z = \frac{s+1}{s-1}$$

$$\Rightarrow (s+1)^3 - 0{,}95(s+1)^2(s+1) - 0{,}025(s-1)^2(s+1) + 0{,}0202(s-1)^3$$

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 - 0{,}95(s^3 + s^2 - s - 1) - 0{,}025(s^3 - s^2 - s + 1) + 0{,}0202(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)$$

$$\Rightarrow \alpha_0 s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3$$

con:

$$\alpha_0 = 1 - 0{,}95 - 0{,}025 + 0{,}0202 = 0{,}0452$$

$$\alpha_1 = 3 - 0{,}95 + 0{,}025 - 3\,0{,}0202 = 1{,}232$$

$$\alpha_2 = 3 + 0{,}95 + 0{,}025 + 3\,0{,}0202 = 4{,}272$$

$$\alpha_3 = 1 + 0{,}95 - 0{,}025 - 0{,}0202 = 1{,}724$$

Criterio di Routh

$$R \quad \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_3 & 0 \\ \frac{-1}{\alpha_1}(\alpha_0\alpha_3 - \alpha_2\alpha_1) & 0 & 0 \\ \alpha_3 & & \end{bmatrix}$$

$\alpha_0 > 0$

$\alpha_1 > 0$ $\Rightarrow$ il sistema a t.d. è as. stab.

$\alpha_3 > 0$

$\alpha_2\alpha_1 > \alpha_0\alpha_3$ poiché essendo $\alpha_1 > 0$, $\alpha_0\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2$ deve essere < 0

$\Rightarrow \alpha_0\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 < 0 \Rightarrow \alpha_0\alpha_3 < \alpha_1\alpha_2$

$\Rightarrow \alpha_2 > \dfrac{\alpha_1\alpha_3}{\alpha_0}$

Sistemi as. stab $\rightarrow$ se tolgo l'ingresso tali sistemi vanno a 0

$$x_1(t+1) = 0{,}25\, x_1(t) + 0{,}25\, x_2(t)$$

$$x_2(t+1) = 0{,}1\, x_1(t) + 0{,}25\, x_3(t)$$

$$x_3(t+1) = 0{,}1\, x_3(t) + 0{,}1\, x_3(t)$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3)(t+1) = 0{,}95\, x_1(t) + 0{,}95\, x_2(t) + 0{,}95\, x_3(t)$$

$$= 0{,}95(x_1 + x_2 + x_3)(t)$$

$$T_D = -\frac{1}{\log(|\lambda_D|)} = -\frac{1}{\log(0{,}95)} = 19{,}1$$

$$T_R = 5\,T_D = 95{,}5 \text{ anni}$$

Esercitazione 6

Sistemi non lineari

$\dot{x}_1 = 2(x_1 - x_2) = f_1(x_1, x_2)$

$\dot{x}_2 = x_1^2 - 4x_1 - x_2 = f_2(x_1, x_2)$

calcolare: $\begin{cases} \text{eq. e loro stabilità} \\ \text{quadro traiettorie} \end{cases}$

Nei sistemi lineari: $\begin{cases} \text{1 equilibrio V} \\ \text{infiniti equilibri} \end{cases}$, per i sistemi non lineari possono esservi più equil. isolati.

Come trovare gli equilibri? => Definizione:

$\dot{x}_1 = 0 = 2x_1 - 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = 0 = x_1^2 - 4x_1 - x_2 \Rightarrow x_1^2 - 5x_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 5 \end{cases}$

2 eq. distinti : $E_0 = [0, 0]$; $E_1 = [5, 5]$

Come funziona il sistema nell'intorno di questi eq.?

Sistema non lineare (in generale):

$\dot{x} = f(x)$, $\bar{x} = f(\bar{x}) = 0$ ← equilibrio $\Rightarrow \dot{x} = \underbrace{\cancel{f(\bar{x})}}_{\text{Siamo nell' intorno di un equilibrio}}^{(=0)} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x}) + \dots$

Per studiare cosa succede nell'intorno degli equilibri, calcoliamo:

$\frac{\partial f}{\partial x}$ Jacobiana del sistema

La dinamica nell'intorno di un eq. è ben descritta da:

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}$ linearizzazione del sistema

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2x_1 - 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Lo Jacobiano (linearizzazione) del sistema varia a seconda del punto in cui mi trovo. Valutiamolo quindi nell' equilibrio.

$E_0 = [0, 0]$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x = E_0} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

tr = 1 > 0

E_0 eq. instabile

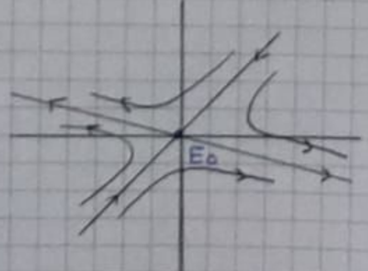
Calcolo gli autovalori associati all' equilibrio:

$(\lambda - 2)(\lambda + 1) - 8 = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 10 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$ $\begin{cases} \lambda_1 \simeq 3{,}25 \\ \lambda_2 \simeq -2{,}25 \end{cases}$

Sella



Calcolo gli autovettori:

1a eq: $2v_1 - 2v_2 = \lambda v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{(2-\lambda)v_1}{2}$

$E_1 = [5,5]$

$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=E_1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$ $tr = 1 > 0$

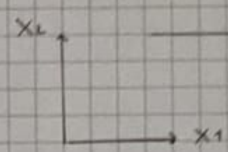
E_1 eq. instabile

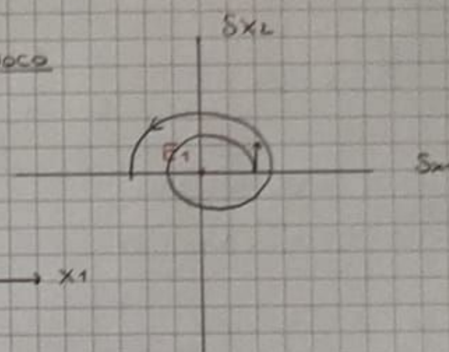
$(\lambda-2)(\lambda+1)+12 = 0$

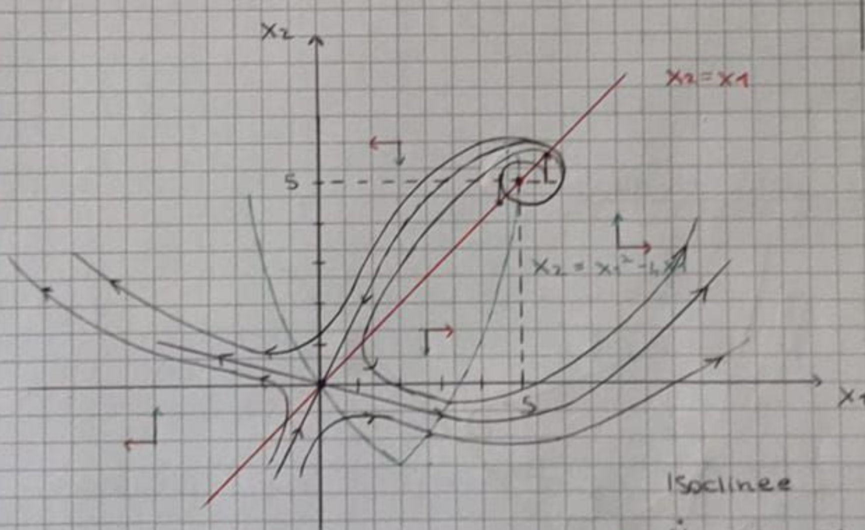
$\lambda^2 - \lambda + 10 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-40}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-39}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{39}}{2}$

fuoco







Isoclinee

- $\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$
- $\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = x_1^2 - 4x_1$

Esercizio 2

$\dot{x}_1 = 2x_1(1-x_1) + x_2$

$\dot{x}_2 = -x_2$

$\dot{x}_1 = 0 = 2x_1(1-x_1) + x_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2(1-x_1) = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$\dot{x}_2 = 0 = -x_2$

Ottengo 2 eq: $E_0 = [0,0]$; $E_1 = [1,0]$

Studio la stabilità:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 2-4x_1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=E_0} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $tr = 1 > 0$

Instabile

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = -1$

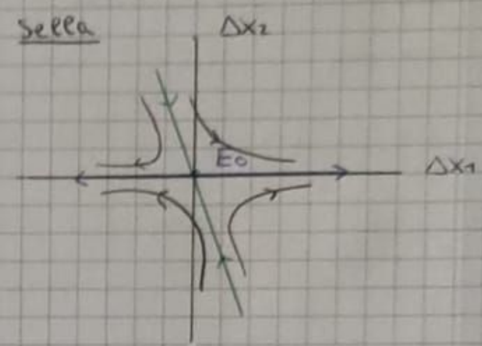
Autovettori:

$2v_1 + v_2 = \lambda v_1$

$v_2 = (\lambda - 2) v_1$

- se $\lambda = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- se $\lambda = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

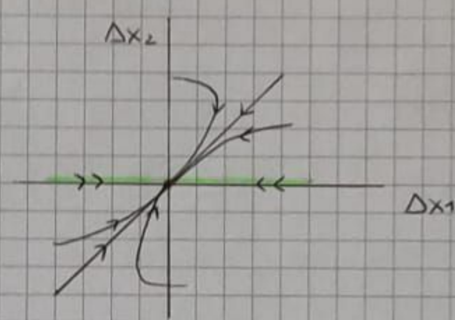
Sella



$E_1 = [1, 0]$

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x = E_1} = \begin{matrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}$

E_1 è un nodo stab.

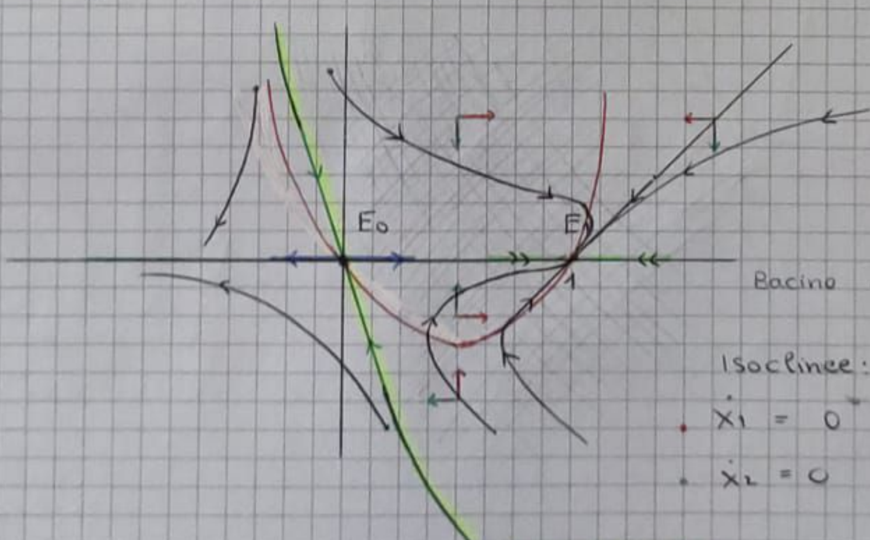


$-2v_1 + v_2 = \lambda v_1$

$v_2 = (\lambda + 2) v_1$

- se $\lambda = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- se $\lambda = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Quadro globale delle traiettorie



Bacino di attrazione di E_1

Isocline:

- $\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1(x_1 - 1)$
- $\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

Varietà stabile di E_0

Richiedo: dove vado verso dx?

ovvero: dove $\dot{x}_1 > 0$? $\Rightarrow$ $2x_1(1 - x_1) + x_2 > 0$

$x_2 > 2x_1(x_1 - 1)$ (parabola)

famiglie di sistemi non lineari che dipendono da un parametro.

$\dot{x}_1 = -x_2 - 2x_1 + x_1^3$

$\dot{x}_2 = x_2 - p x_1$

Determinare equilibri + discutere la stabilità $\forall p$.

Equilibrio:

$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow -p x_1 - 2x_1 + x_1^3 = 0 \Rightarrow x_1 (x_1^2 - (p+2)) = 0$

$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2 = p x_1$

$E_0 = [0,0] \quad \forall p$

se $p+2 > 0 \Rightarrow p > -2 \Rightarrow E_{1,2} = [\pm \sqrt{p+2}, \pm p\sqrt{p+2}]$

Stabilità degli eq.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 2 & -1 \\ -p & 1 \end{bmatrix}$$

$E_0 = [0,0]$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=E_0} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -p & 1 \end{bmatrix}$$

$tr = 1 < 0$

$det = -2-p > 0$ se $p < -2$

$\Rightarrow$ Eq. $\begin{cases} \text{stabile} & \text{se } p < -2 \\ \text{sella} & \text{se } p > -2 \end{cases}$

$E_{1,2} = \pm [\sqrt{p+2}, p\sqrt{p+2}]$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{E_1} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{E_2} = \begin{bmatrix} 3p+4 & -1 \\ -p & 1 \end{bmatrix}$$

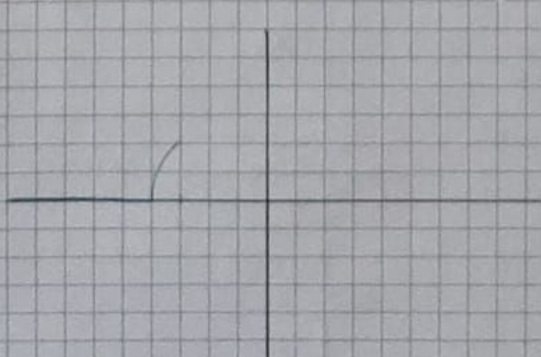
$tr = 3p+5 < 0 \Rightarrow p < -\frac{5}{3}$

$det \; 3p+4-p > 0$

$\downarrow$

$2p > -4 \Rightarrow p > -2$

Equilibri	$p < -2$	$-2 < p < -\frac{5}{3}$	$p > -\frac{5}{3}$
E_0	A.S.	sella	sella
$E_{1,2}$	X	A. stab.	inst



$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\}$ biomassa specie $i = \{1, 2\}$

$$\dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - a_1 x_1 x_2$$

$$\dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2}\right) - a_2 x_1 x_2$$

caso $\begin{cases} r_1 = r_2 = 1 \\ k_1 = k_2 = 1 \\ a_1 = a_2 = 2 \end{cases}$

Equilibri

$\dot{x}_1 = 0 \quad = \quad x_1(1 - x_1) - 2x_1x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1(1 - x_1 - 2x_2) = 0$

$\dot{x}_2 = 0 \quad = \quad x_2(1 - x_2) - 2x_1x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2(1 - x_2 - 2x_1) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_0 = [0, 0]$

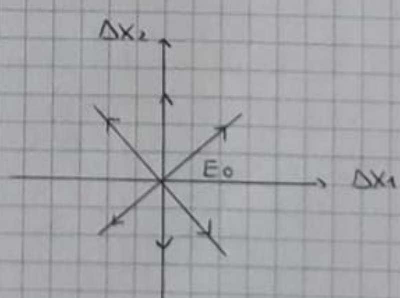
$E_2 = [0, 1]$

$x_2 = 0 \qquad x_1 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad E_1 = [1, 0]$

Stabilità equilibri

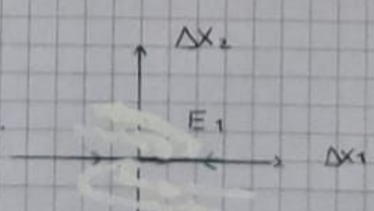
$$\frac{\partial h}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 - 2x_1 - 2x_2 & -2x_1 \\ -2x_2 & 1 - 2x_2 - 2x_1 \end{bmatrix}$$

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{E_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Eq instabile



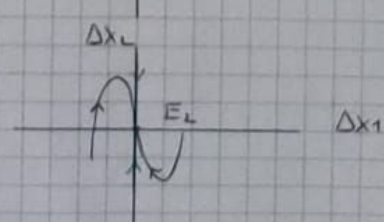
$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{E_1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad tr = -2 \quad det = 1$ $\quad E_1$ nodo stabile

$-v_1 - 2v_2 = \lambda v_1 \qquad v_2 = 0$

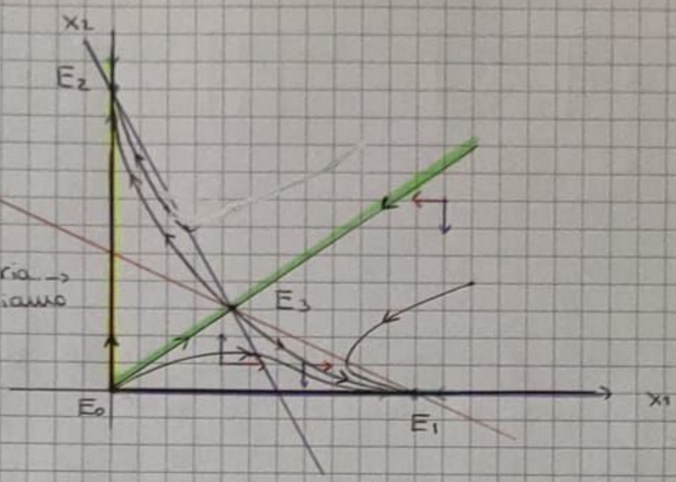


$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{E_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ E_2 nodo stab.

$-2v_1 - v_2 = \lambda v_2 \qquad v_1 = 0$



questa traiettoria → non varia, siamo lungo una isoclina



isocline

$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_1(1 - x_1 - 2x_2) = 0$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{x_1}{2} \end{cases}$

$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow x_2(1 - x_2 - 2x_1) = 0$

$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 = 1 - 2x_1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 \\ 1 - x_2 - 2(1 - 2x_2) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 \\ 1 - x_2 - 2 + 4x_2 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 = 1/3 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$

$E_3 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{E_3} = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $\quad tr = -2/3$

$det = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{3} < 0$

<u>sella</u>