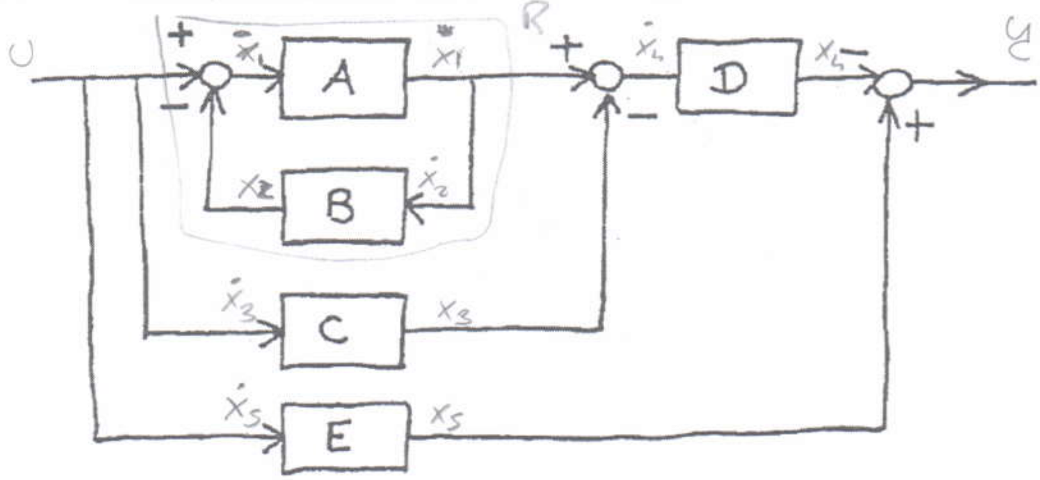
Esercizio 1

Si consideri il sistema *a tempo continuo* rappresentato in figura.



Si calcoli la funzione di trasferimento complessiva del sistema.
Supponendo che la funzione di trasferimento di tutti i sistemi sia $1/s$, si proponga una possibile realizzazione in spazio di stato del sistema.

1

$$\dot{x}_1 = u - x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1$$
$$\dot{x}_3 = u$$
$$\dot{x}_4 = x_1 - x_3$$
$$\dot{x}_5 = u$$
$$y = x_5 - x_4$$

$$G(s) = -\left(\frac{A}{1+AB} - C\right) D + E$$

$$= -\frac{1}{s}\left(\frac{1/s}{1+1/s^2} - \frac{1}{s}\right) + \frac{1}{s} = -\frac{1}{s}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s}\right) + \frac{1}{s} =$$

$$= \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{1}{s} = \frac{s(s^2+1)+1}{s^2(s^2+1)}$$

$$s x_1 = u - x_2$$
$$s^2 x_2 = u - x_2 \Rightarrow (s^2+1) x_2 = u$$

$$\hookrightarrow \; s y = u - (x_1 - x_3)$$
$$s^2 y = su - (\cancel{u} - x_2) \cancel{+ u}$$
$$s^2(s^2+1) y = (s(s^2-1) + 1) u$$

ARMA DI ORDINE 4. PERCHE?

$$(s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n) y = (\beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_n) u$$

FORMA CANONICA DI RICOSTRUZIONE

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_n \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad D = \beta_0$$

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

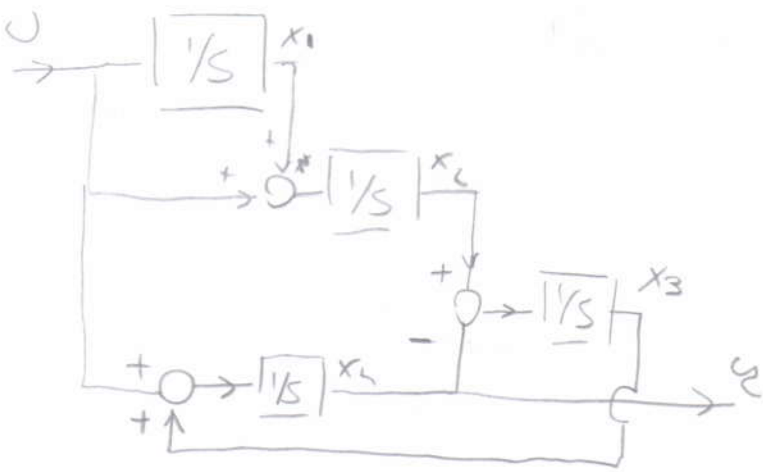
$\dot{x}_1 = u$

$\dot{x}_2 = x_1 + u$

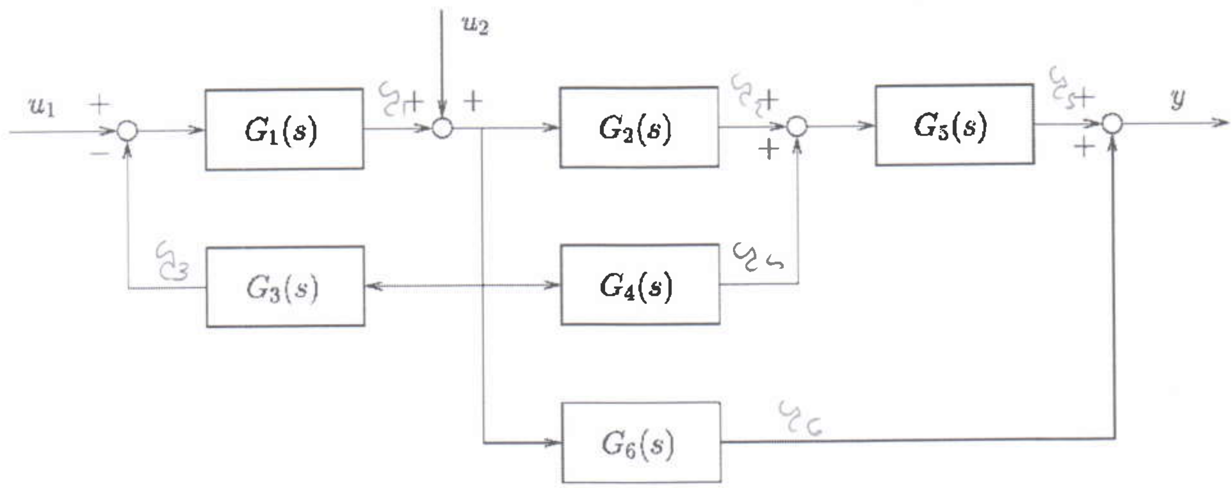
$\dot{x}_3 = \cancel{x}_2 - x_4$

$\dot{x}_4 = x_3 + u$

$y = x_4$

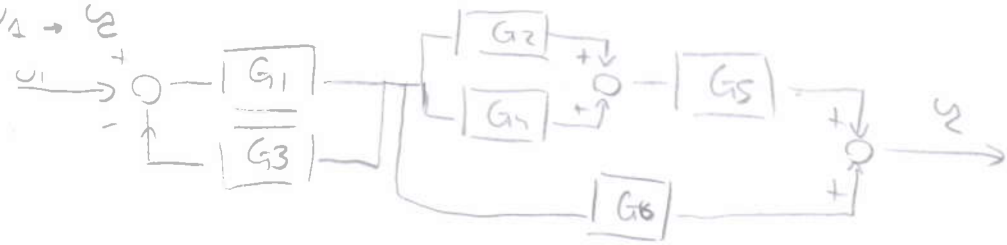


Esercizio 2

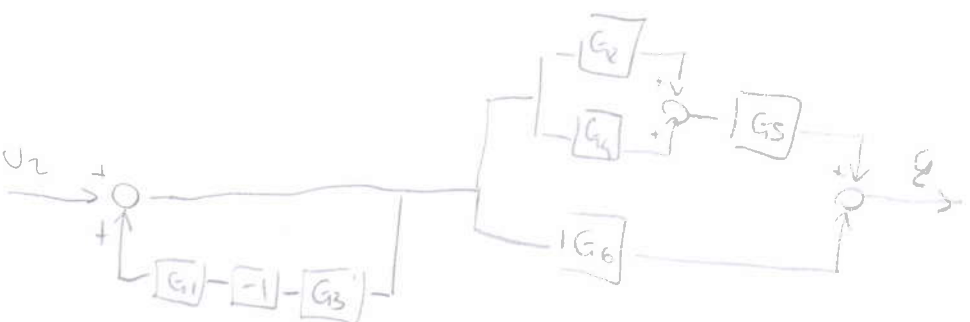


Si calcoli la funzione di trasferimento complessiva del sistema.

$u_1 \to e$



$$\frac{G_1}{1+G_1G_3}\left(G_6+\left(G_2+G_4\right)G_5\right)$$



$$\frac{1}{1+G_1G_3}\left(\left(G_2+G_4\right)G_5+G_6\right)$$

$e = e_5 + e_6$

$e_6 = (e_1 + u_2)\,G_6$

$e_5 = (e_2 + e_4)\,G_5$

$e_2 = G_2\,(u_2 + e_1)$

$e_4 = G_4\,(u_2 + e_1)$

$$\begin{cases} e_1 = G_1(u_1 - e_3) \\ e_3 = G_3(u_2 + e_1) \end{cases} \Rightarrow e_3 = G_3\left(u_2 + G_1(u_1 - e_3)\right)$$

$e_3(1+G_1G_3) = G_3 u_2 + G_1G_3 u_1$

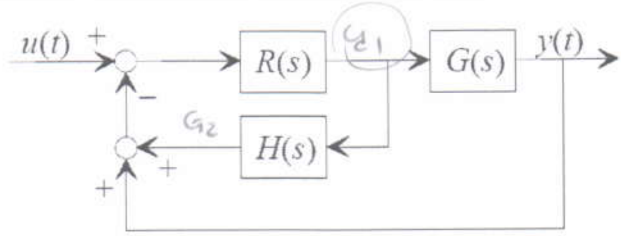
$$e_1 = \frac{G_1}{1+G_1G_3}\left((1+G_1G_3)u_1 - G_3u_2 - G_1G_3u_1\right)$$

...

$$u_2 + e_1 = \frac{G_1}{1+G_1G_3}u_1 + \frac{1+\cancel{G_1G_3-G_1G_3}}{1+G_1G_3}u_2$$

Esercizio 3

Si consideri il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



dove: $R(s) = k$, $H(s) = \dfrac{1}{1+5s}$, $G(s) = \dfrac{1}{1+10s}$

1.1) Determinare la funzione di trasferimento $F(s)$ tra $u(t)$ e $y(t)$. Commentare il risultato ottenuto

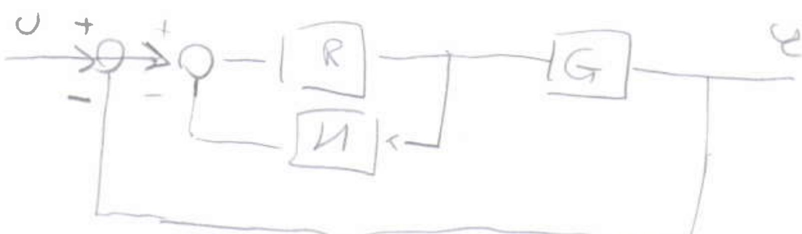
~~1.2) Determinare per quali valori del parametro k il sistema è asintoticamente stabile.~~

1.3) Denotando con $x_1(t)$ l'uscita del blocco $G(s)$ e con $x_2(t)$ l'uscita del blocco $H(s)$ e ponendo $k = 1$, determinare una rappresentazione in forma di stato del sistema.

1.4) Proporre un'altra rappresentazione in forma di stato del sistema

1.1)

Proviamo a ridisegnarlo



$$\frac{\frac{RG}{1+RH}}{1+\frac{RG}{1+RH}} = \frac{RG}{1+RG+RH}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\frac{K}{1+10s}}{1+\frac{K(1+5s)+(1+10s)}{(1+5s)(1+10s)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{K(1+5s)}{(1+5s)(1+10s)+K(2+15s)}$$

$y = G y_1$

$y_1 = R(u - y - y_2)$ $\qquad y_1 = R(u - G y_1 - H y_1)$

$\Downarrow$

$y_2 = H y_1$ $\qquad y_1(1 + RG + RH) = Ru$

$(1+10s)\, x_1 = u - x_1 - x_2$

$(1+5s)\, x_2 = u - x_1 - x_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 + u \\ 5\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u \end{cases}$$

$y = x_1$

$(2+10s)\, x_1 = u - x_2$

$(2+5s)(2+10s)\, x_1 = (2+5s)u - u + x_1$

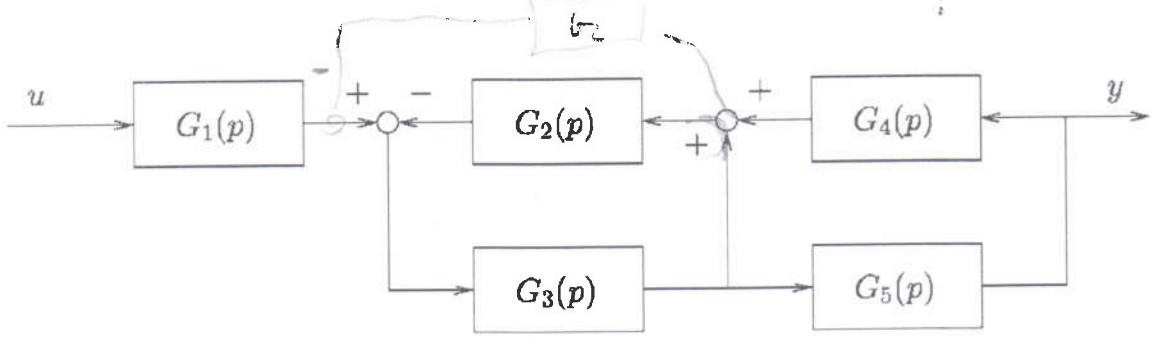
$(50s^2+30s+3)\, y = (1+5s)\, u$

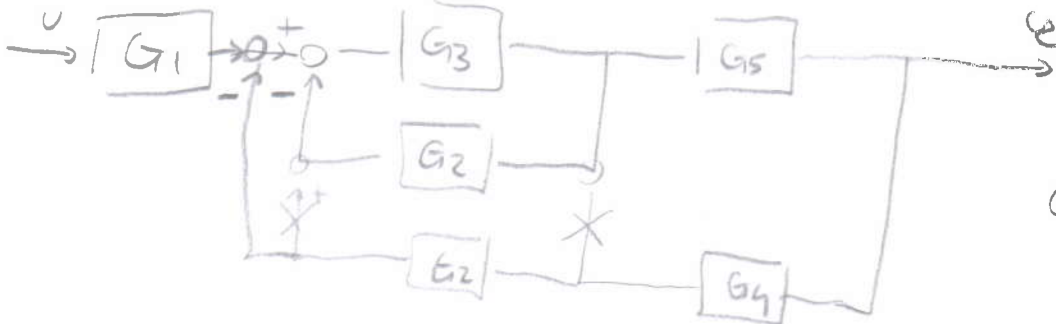
$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & -3/50 \\ 1 & -3/5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/50 \\ 1/10 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Esercizio 4

Si calcoli la funzione di trasferimento del seguente sistema





$$G_1 \cdot \frac{\dfrac{G_3G_5}{1+G_2G_3}}{1+\dfrac{G_2G_3G_4G_5}{1+G_2G_3}} =$$

$$= \frac{G_1G_3G_5}{1+G_2G_3+G_2G_3G_4G_5}$$

$y = y_5$

$y_5 = G_5 y_3$

$y_3 = G_3(y_1 - y_2)$

$y_1 = G_1 u$

$y_2 = G_2(y_4 + y_3)$

$y_4 = G_4 y$

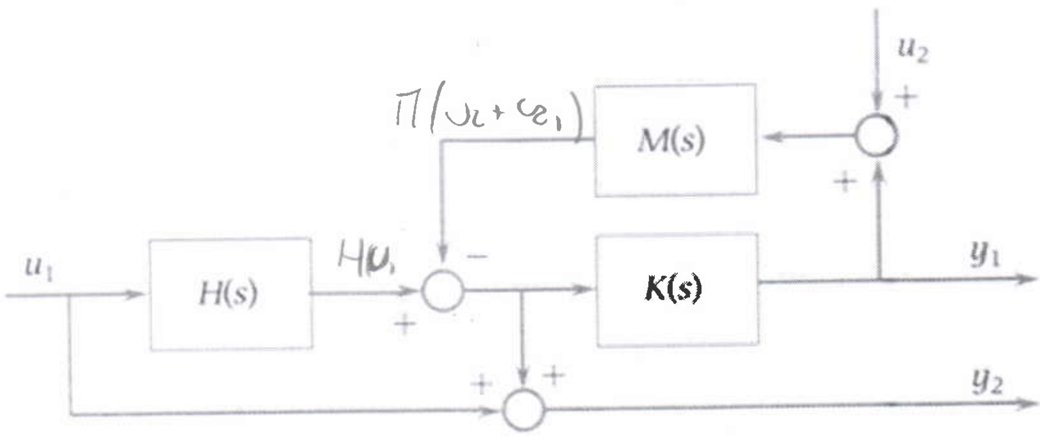
$$y_3 = G_3(G_1 u - G_2G_4 y - G_2 y_3)$$

$$y = y_5 = G_5 \cdot \frac{G_3}{1+G_2G_3}(G_1 u - G_2G_4 y)$$

$$(1+G_2G_3+G_2G_3G_4G_5)\, y = G_1G_3G_5\, u$$

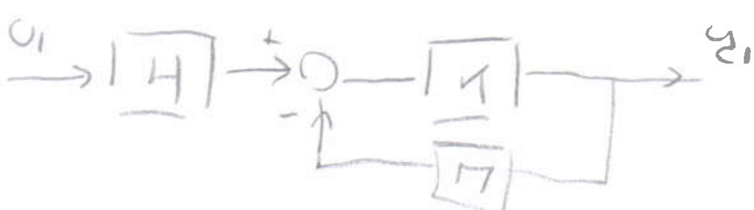
Esercizio 5

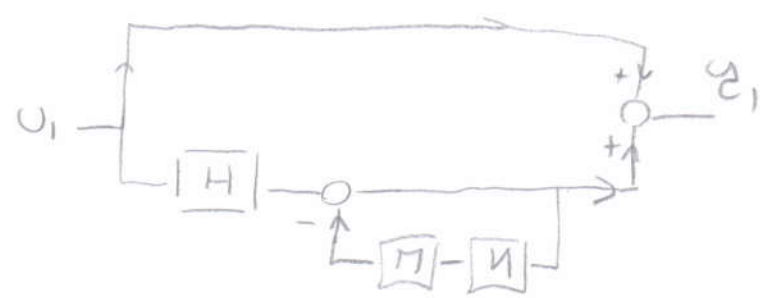
Si calcolino le funzioni di trasferimento del seguente sistema

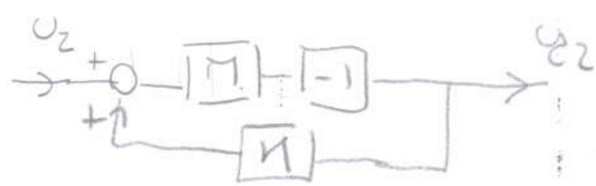


- $y_1 = K\left(Hu_1 - M(u_2 + y_1)\right) \Rightarrow y_1 = \dfrac{HK}{1+MK}\,u_1 - \dfrac{MK}{1+KM}\,u_2$

- $y_2 = u_1 + Hu_1 - M(u_2 + y_1) = \dfrac{1 + MK + H + \cancel{HKM} - \cancel{HKM}}{1+MK}\,u_1 - \dfrac{M(1 + \cancel{MK} - \cancel{MK})}{1+MK}\,u_2$







Un commerciante di vino acquista all'inizio di ogni anno t un certo numero di bottiglie di vino, decidendo di rivenderne il 20% dopo un anno di invecchiamento e di rivendere le restanti bottiglie dopo due anni di invecchiamento. I prezzi (in €) di acquisto e di rivendita di una singola bottiglia di vino sono, rispettivamente, c e p.

a) Descrivere l'attività in esame mediante un sistema lineare a tempo discreto in cui $u(t)$ sia la spesa per l'acquisto, $y(t)$ il ricavo della rivendita e $x_i(t)$ il numero di bottiglie invecchiate di i anni all'inizio dell'anno t ($i = 1, 2$).

b) Calcolare l'equilibrio in funzione di u.

c) Ipotizzando una spesa per l'acquisto pari a 1.000 € e un costo di acquisto della singola bottiglia pari a 1.4 €, determinare il prezzo di rivendita della singola bottiglia affinché all'equilibrio il ricavo annuo sia di 3.000 €.

---

a) $x_1(t+1) = \frac{u(t)}{c}$

$x_2(t+1) = 0{,}8\, x_1(t)$

$y(t) = p \cdot 0{,}2\, x_1(t) + p \cdot x_2(t)$

$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{c} \\ 0 \end{vmatrix} = b$

$c = \begin{vmatrix} 0{,}2p & p \end{vmatrix} \quad d = 0$

b) $\bar{x}_1 = \frac{\bar{u}}{c}$ ← stato di equilibrio (*)

$\bar{x}_2 = 0{,}8\, \bar{x}_1 = 0{,}8 \frac{\bar{u}}{c}$

$\bar{y} = 0{,}2p\bar{x}_1 + p\bar{x}_2 = 0{,}2p\frac{\bar{u}}{c} + 0{,}8p\frac{\bar{u}}{c} = \frac{p}{c}\bar{u}$

<u>NOTA</u>: tutte le bottiglie acquistate $\left(\frac{\bar{u}}{c}\right)$ vengono rivendute al più in 2 anni dando un ricavo della rendita pari a $p\left(\frac{\bar{u}}{c}\right)$

c) $\bar{u} = 1000$ €

$c = 1{,}4$ €/bott

$\bar{y} = 3000$ €

$\Rightarrow \quad p = \frac{\bar{y} \cdot c}{\bar{u}} = \frac{3000 \cdot 1{,}4}{1000} = 4{,}2$ €/bott

(*) Poiché A non ha autovalori in +1 $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0) \Rightarrow \exists (I-A)^{-1}$ ed $\exists !$ equilibrio $\bar{x} = (I-A)^{-1} b\bar{u}$

L'impresa (1) produce detersivo ed è in concorrenza con le imprese (2) e (3). Mediante indagini di mercato l'impresa ha valutato che ogni mese una frazione α_{ij} delle persone che nel mese precedente hanno comprato un fustino dell'impresa i compra un fustino dell'impresa j. Inoltre, una frazione β_i dei nuovi acquirenti compra fustini dall'impresa i. I valori dei coefficienti sono

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad [\beta_i] = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Inoltre, stima che il numero dei nuovi acquirenti sia pari ogni mese a 1500. Avvalendosi di un modello matematico (in cui l'uscita è il numero di fustini venduti dall'impresa (1) e l'ingresso il numero di nuovi acquirenti) l'impresa (1) vuole determinare il numero di clienti di ogni impresa a regime. Inoltre vuole sapere il rapporto tra il numero dei propri clienti e il numero di nuovi acquirenti.

$x_i(t) =$ # di persone che nel mese t hanno acquistato un fustino dell'impresa i $(i = 1, 2, 3)$
(o, equivalentemente, # di fustini venduti dall'impresa i nel mese t)

$$x_1(t+1) = \alpha_{11} x_1(t) + \alpha_{21} x_2(t) + \alpha_{31} x_3(t) + \beta_1 u(t)$$
$$x_2(t+1) = \alpha_{12} x_1(t) + \alpha_{22} x_2(t) + \alpha_{32} x_3(t) + \beta_2 u(t)$$
$$x_3(t+1) = \alpha_{13} x_1(t) + \alpha_{23} x_2(t) + \alpha_{33} x_3(t) + \beta_3 u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

$$\Downarrow$$

$$x_1(t+1) = 0{,}7\, x_1(t) + 0{,}4\, u(t)$$
$$x_2(t+1) = 0{,}2\, x_1(t) + 0{,}5\, x_2(t) + 0{,}4\, u(t)$$
$$x_3(t+1) = 0{,}1\, x_1(t) + 0{,}1\, x_2(t) + 0{,}5\, x_3(t) + 0{,}2\, u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}4 \\ 0{,}2 \end{vmatrix} = b \qquad c = |1 \quad 0 \quad 0| \qquad d = 0$$

<u>Equilibrio</u> ($\exists$ unico poiché A ha autovalori in 0,7 0,5 e 0,5 cioè non ha autovalori in +1)

- $\bar{x}_1 = 0{,}7\,\bar{x}_1 + 0{,}4\,\bar{u} \rightarrow \bar{x}_1 = \frac{4}{3}\bar{u}$

- $\bar{x}_2 = 0{,}2\,\bar{x}_1 + 0{,}5\,\bar{x}_2 + 0{,}4\,\bar{u}$

$$\downarrow$$

$$5\bar{x}_2 = 2\bar{x}_1 + 4\bar{u} = \frac{8}{3}\bar{u} + 4\bar{u} = \frac{20}{3}\bar{u}$$

da cui $\bar{x}_2 = \frac{4}{3}\bar{u}$

- $\bar{x}_3 = 0{,}1\,\bar{x}_1 + 0{,}1\,\bar{x}_2 + 0{,}5\,\bar{x}_3 + 0{,}2\,\bar{u}$

$$\downarrow$$

$$5\bar{x}_3 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 2\bar{u} = \frac{4}{3}\bar{u} + \frac{4}{3}\bar{u} + 2\bar{u} = \frac{14}{3}\bar{u}$$

da cui $\bar{x}_3 = \frac{14}{15}\bar{u}$

clienti impresa (1)

$$\Rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 14/15 \end{vmatrix}\bar{u} \qquad \bar{y} = \bar{x}_1 = \frac{4}{3}\bar{u} \qquad \frac{\bar{x}_1}{\bar{u}} = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \mu = 4/3$$

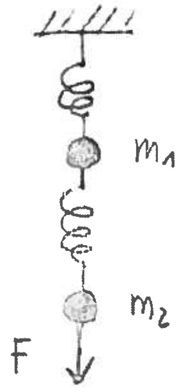
nuovi acquirenti

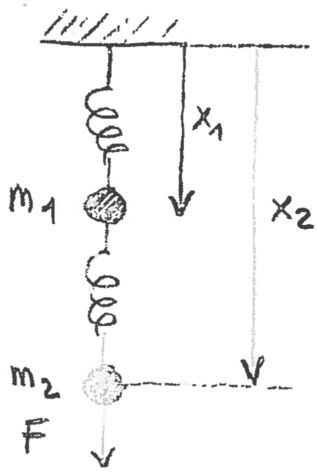
Ponendo $\bar{u} = 1500$ si ha:

$$\bar{x} = \begin{vmatrix} 2000 \\ 2000 \\ 1000 \end{vmatrix} \qquad \bar{y} = 2000 \qquad \mu = 4/3.$$

Si descriva, mediante l'uso di un modello matematico, l'andamento della posizione del baricentro delle due masse del sistema meccanico rappresentato in figura.
Si supponga che
- le molle siano lineari con costante elastica k e con lunghezza a riposo nulla,
- il sistema sia immerso in un fluido con coefficiente di attrito viscoso h.

Si valuti inoltre la posizione di equilibrio delle due masse e del loro baricentro.





$x_1(t)$ = posizione m_1

$x_2(t)$ = posizione m_2

$x_3(t)$ = velocità m_1

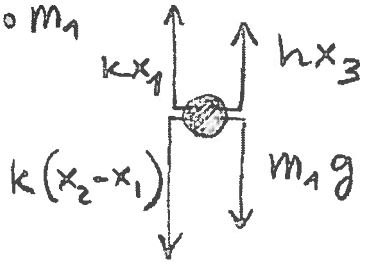
$x_4(t)$ = velocità m_2

$\Rightarrow$ $\dot{x}_1(t) = x_3(t)$

$\dot{x}_2(t) = x_4(t)$

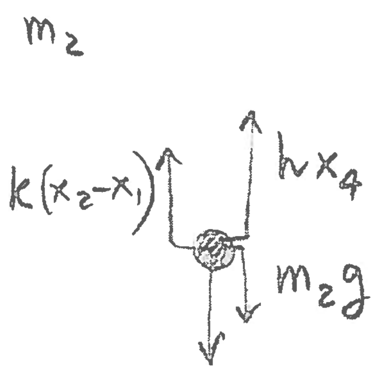
Determino $\dot{x}_3$ e $\dot{x}_4$ (accelerazioni) con la legge m. accel. = $\sum$ (forze applicate) scritta per ogni (singola) massa

∘ m_1



$$\dot{x}_3 = \frac{1}{m_1}\left(k(x_2-x_1) + m_1 g - h x_3 - k x_1\right)$$

∘ m_2



$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2}\left(m_2 g + F - h x_4 - k(x_2-x_1)\right)$$

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{m_1}\left[-2kx_1 + kx_2 - hx_3 + m_1 g\right]$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2}\left[kx_1 - kx_2 - hx_4 + m_2 g + F\right]$$

$$y = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad u = \begin{vmatrix} F \\ g \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{h}{m_1} & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{h}{m_2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{m_2} & 1 \end{vmatrix} = B$$

$$c = \begin{vmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2} & \frac{m_2}{m_1+m_2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad d = \begin{vmatrix} 0 & 0 \end{vmatrix}$$

<u>Equilibrio</u> $\left(\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists!\, \bar{x}\right)$

$\bar{x}_3 = 0$
$\bar{x}_4 = 0$ $\rightarrow$ velocità nulle

$$-2k\bar{x}_1 + k\bar{x}_2 - \cancelto{0}{h\bar{x}_3} + m_1 g = 0 \qquad (1)$$

$$k\bar{x}_1 - k\bar{x}_2 - \cancelto{0}{h\bar{x}_4} + m_2 g + F = 0 \qquad (2)$$

$$(1) + (2) \rightarrow -k\bar{x}_1 + (m_1 + m_2)g + F = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{(m_1 + m_2)g + F}{k}$$

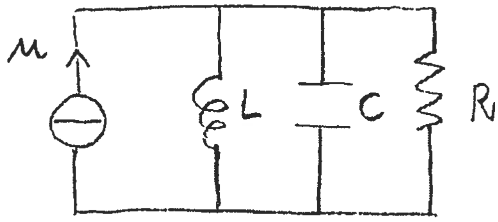
dalla (2) $\rightarrow$ $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \dfrac{m_2 g + F}{k}$ $\Rightarrow$ $\bar{x}_2 = \dfrac{(m_1 + 2m_2)g + 2F}{k}$

$$\bar{x} = \begin{vmatrix} \dfrac{(m_1+m_2)g+F}{k} \\ \\ \dfrac{(m_1+2m_2)g+2F}{k} \\ \\ 0 \\ \\ 0 \end{vmatrix}$$

da cui, per sostituzione si ottiene

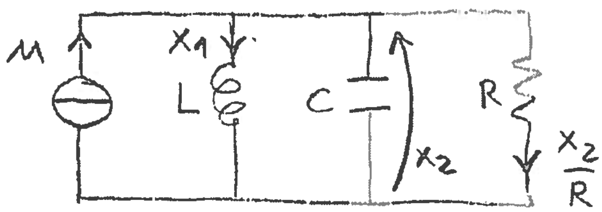
$$\bar{y} = \frac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2}{m_1+m_2}$$

Si descriva, mediante l'uso di un modello matematico, l'intensità di corrente sul condensatore del circuito elettrico in figura al variare della intensità di corrente generata dal bipolo.

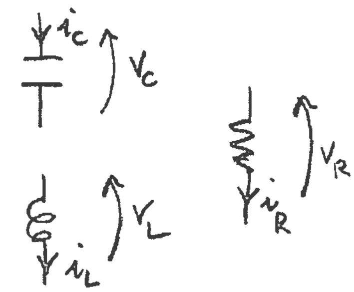


$x_1(t)$ = corrente che attraversa l'induttore

$x_2(t)$ = tensione ai capi del condensatore



$$i_C = C\dot{v}_C$$
$$v_L = L\dot{i}_L$$
$$v_R = R i_R$$



$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L}x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left[u - x_1 - \frac{x_2}{R}\right]$$

$$y = u - x_1 - \frac{x_2}{R}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{R} \end{vmatrix} \qquad d = 1$$

<u>Equilibrio</u> $(\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists!\,\bar{x})$

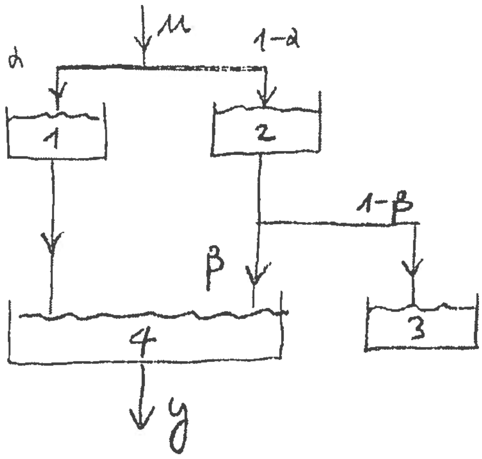
$$\frac{1}{L}\bar{x}_2 = 0 \rightarrow \bar{x}_2 = 0$$

$$\frac{1}{C}\left(\bar{u} - \bar{x}_1 - \frac{\bar{x}_2}{R}\right) = 0 \rightarrow \bar{x}_1 = \bar{u}$$

da cui $\bar{x} = \begin{vmatrix} \bar{u} \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\bar{y} = \bar{u} - \bar{x}_1 - \bar{x}_2/R \rightarrow \bar{y} = 0$$

Si descriva mediante un modello matematico la rete idrica mostrata in figura (si supponga che i serbatoi siano lineari).
Si valutino gli equilibri della rete nel caso in cui la stessa non sia alimentata oppure sia alimentata da un ingresso costante.



$x_i(t)$ = volume di invaso del serbatoio i $(i = 1, 2, 3, 4)$

k_i = costante di deflusso del serbatoio i

$$\dot{x}_1 = \alpha u - k_1 x_1$$

$$\dot{x}_2 = (1-\alpha) u - k_2 x_2$$

$$\dot{x}_3 = (1-\beta) k_2 x_2$$

$$\dot{x}_4 = k_1 x_1 + \beta k_2 x_2 - k_4 x_4$$

$$y = k_4 x_4$$

$$A = \begin{vmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\beta)k_2 & 0 & 0 \\ k_1 & \beta k_2 & 0 & -k_4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = b$$

$$c = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & k_4 \end{vmatrix} \quad d = 0$$

$\{\lambda\}_A = \{-k_1, -k_2, 0, -k_4\} \Rightarrow A$ ha un autovalore nullo

$\Rightarrow \nexists A^{-1}$. Pertanto il sistema può ammettere infiniti equilibri oppure non ne ammette. Ciò dipenderà dalla scelta di u, come vediamo.

- Rete non alimentata $\to \bar{u}=0$

$$\dot{x}_1=0 \to -k_1\bar{x}_1=0 \to \bar{x}_1=0$$

$$\dot{x}_2=0 \to -k_2\bar{x}_2=0 \to \bar{x}_2=0$$

$$\dot{x}_3=0 \to (1-\beta)\,k_2\,\bar{x}_2=0 \to \text{sempre verificata}$$

$$\dot{x}_4=0 \to k\bar{x}_1+\beta k_2\bar{x}_2-k_4\bar{x}_4=0 \to \bar{x}_4=0$$

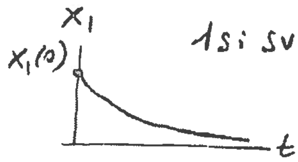
$$\bar{x}=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{x}_3 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{con } \bar{x}_3 \text{ qualsiasi} \Rightarrow \exists\infty \text{ equilibri}$$

(i serbatoi 1, 2 e 4 si svuotano)

$$\bar{y}=0$$

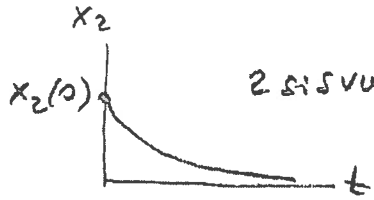
<u>NOTA</u>: $\bar{x}_3$ dipende da $x_2(0)$ e $x_3(0)$

$$\dot{x}_1=-k_1x_1 \to x_1(t)=x_1(0)e^{-k_1t}$$



1 si svuota

$$\dot{x}_2=-k_2x_2 \to x_2(t)=x_2(0)e^{-k_2t}$$



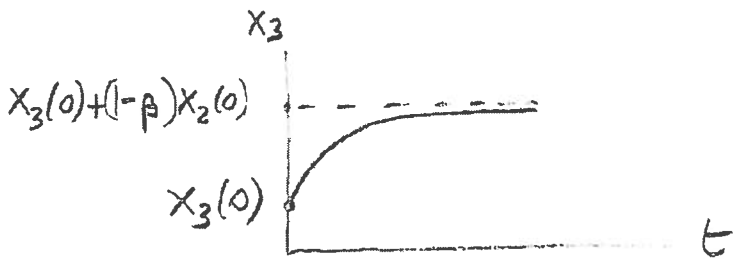
2 si svuota

$$\dot{x}_3=(1-\beta)k_2x_2$$

$$\downarrow$$

$$\int_{x_3(0)}^{x_3(t)} dx_3 = (1-\beta)k_2x_2(0)\int e^{-k_2t}\,dt$$

da cui $x_3(t)=x_3(0)+(1-\beta)x_2(0)\left(1-e^{-k_2t}\right)$



$$x_3(t) \to x_3(0)+(1-\beta)x_2(0)=\bar{x}_3$$

$$\mathring{x}_4 = k_1 x_1 + \beta k_2 x_2 - k_4 x_4 \underset{\substack{x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0}}{\longrightarrow} -k_4 x_4$$

$x_4(t) \to x_4(0) e^{-k_4 t}$ Anche 4 si svuota

- Rete alimentata con $\bar{u}$ $(\neq 0)$

$\mathring{x}_1 = 0 \to \quad \alpha \bar{u} = k_1 \bar{x}_1 \to \bar{x}_1 = \dfrac{\alpha}{k_1} \bar{u}$

$\mathring{x}_2 = 0 \to \quad (1-\alpha)\bar{u} = k_2 \bar{x}_2 \to \bar{x}_2 = \dfrac{1-\alpha}{k_2} \bar{u}$

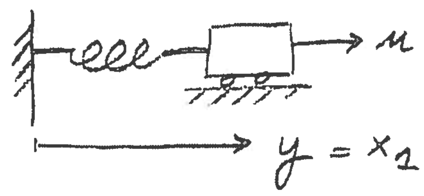
$\mathring{x}_3 = 0 \to (1-\beta) k_2 \bar{x}_2 = 0 \to \bar{x}_2 = 0$ ASSURDO

$\Downarrow$

$\nexists$ equilibri

Infatti il serbatoio 3, non avendo uscita, continua ad accumulare

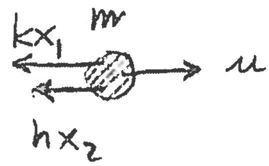
$x_3(t) \to \infty$



Determinare il modello ingresso/uscita del sistema meccanico rappresentato in figura esprimendolo come equazione differenziale e come funzione di trasferimento.
Calcolare infine l'equilibrio, gli zeri, i poli e il guadagno del sistema.

m = massa del carrello
k = costante elastica della molla lineare
h = coefficiente di attrito viscoso

x_1 = posizione
x_2 = velocità
y = posizione



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}\left[u - kx_1 - hx_2\right] \\ y = x_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} sx_1 = x_2 \\ sx_2 = \frac{1}{m}\left[u - kx_1 - hx_2\right] \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$s^2 x_1 = \frac{1}{m}\left[u - kx_1 - shx_1\right]$$

$$(ms^2 + hs + k)\,y = u \qquad N(s) = 1 \quad D(s) = ms^2 + hs + k$$

$$m\ddot{y} + h\dot{y} + ky = u$$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + hs + k}$$

Equilibrio
$$\dot{x}_1 = 0 \rightarrow \bar{x}_2 = 0$$
$$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow \bar{x}_1 = \bar{u}/k$$
$$\bar{y} = \bar{u}/k \implies \bar{y} = G(0)\,\bar{u} = \frac{1}{k}\bar{u}$$

zeri $\nexists$ poli $ms^2 + hs + k = 0 \rightarrow p_{1,2} = \dfrac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4mk}}{2m}$

$\{\text{poli}\} \equiv \{\lambda\}$ essendo il grado $(D) = n = 2$

guadagno $\mu = G(0) = 1/k$

Osservazione 1

Cambiando variabile di uscita cambia il modello I/O.

Se, ad esempio, $y = x_2$ → con calcoli analoghi si ottiene

$$(ms^2 + hs + k)y = su$$

$N(s) = s$
$D(s) = ms^2 + hs + k$

$$m\ddot{y} + h\dot{y} + ky = \dot{u}$$

$$G(s) = \frac{s}{ms^2 + hs + k}$$

zero in $s = 0$ e $\mu = G(0) = 0$

Osservazione 2

In questo esempio è possibile ottenere il modello I/O senza passare attraverso il modello interno del sistema meccanico.

$$m \cdot (\text{accel}) = \sum (\text{forze applicate})$$

y = posizione → $\dot{y}$ = velocità → $\ddot{y}$ = accelerazione

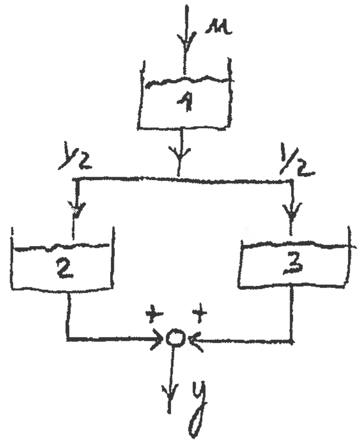
forze applicate:
- u
- forza di attrito $= h(\text{velocità}) = h\dot{y}$
- forza elastica $= k(\text{allungamento}) = ky$

Da cui $m\ddot{y} = u - h\dot{y} - ky$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + h\dot{y} + ky = u$$

Determinare il modello ingresso/uscita della rete idrica rappresentata in figura (k_i = costante di deflusso del serbatoio i-esimo (i =1, 2, 3)) nell'ipotesi che i serbatoi 2 e 3 siano differenti ($k_2 \neq k_3$).
Si esprima tale modello come equazione differenziale e come funzione di trasferimento.

Supponendo ora che i serbatoi 2 e 3 siano identici ($k_2=k_3$), valutare la funzione di trasferimento e commentare.



x_i = volume di invaso del serbatoio i-esimo

$$\dot{x}_1 = u - k_1 x_1$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_2 x_2$$
$$\dot{x}_3 = \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_3 x_3$$
$$y = k_2 x_2 + k_3 x_3$$

$$A = \begin{vmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}k_1 & -k_2 & 0 \\ \frac{1}{2}k_1 & 0 & -k_3 \end{vmatrix}$$

$$\{\lambda\}_A = \{-k_1, -k_2, -k_3\}$$

$\downarrow$

$$s x_1 = u - k_1 x_1$$
$$s x_2 = \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_2 x_2$$
$$s x_3 = \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_3 x_3$$
$$y = k_2 x_2 + k_3 x_3$$

$\rightarrow$

$$(s+k_1) x_1 = u$$
$$(s+k_2) x_2 = \frac{1}{2} k_1 x_1$$
$$(s+k_3) x_3 = \frac{1}{2} k_1 x_1$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2} \frac{k_1}{(s+k_1)(s+k_2)} u \qquad x_3 = \frac{1}{2} \frac{k_1}{(s+k_1)(s+k_3)} u$$

$$y = \frac{1}{2} \left[\frac{k_1 k_2}{(s+k_1)(s+k_2)} + \frac{k_1 k_3}{(s+k_1)(s+k_3)} \right] u$$

$$y = \frac{1}{2} k_1 \frac{(k_2+k_3)s + 2 k_2 k_3}{(s+k_1)(s+k_2)(s+k_3)} u$$

$$\underbrace{(s+k_1)(s+k_2)(s+k_3)}_{D(s)}\, y = \underbrace{\frac{1}{2}k_1\left[(k_2+k_3)s + 2k_2k_3\right]}_{N(s)} u$$

$$\dddot{y} + (k_1+k_2+k_3)\ddot{y} + (k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3)\dot{y} + k_1k_2k_3 y =$$

$$= \frac{1}{2}k_1(k_2+k_3)\dot{u} + k_1k_2k_3 u$$

$$G(s) = \frac{1}{2}k_1 \frac{(k_2+k_3)s + 2k_2k_3}{(s+k_1)(s+k_2)(s+k_3)} \qquad (\square)$$

NOTA poli in $-k_1, -k_2, -k_3 \Rightarrow \{poli\} \equiv \{\lambda\}$

$k_2 = k_3 = k \rightsquigarrow \exists$ simmetria nella rete idrica

Ponendo $k_2 = k_3 = k$ nella $(\square)$ si ottiene:

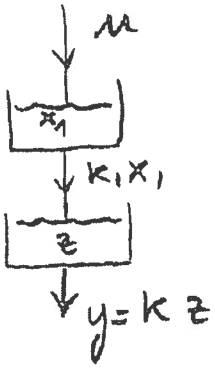
$$G(s) = \frac{1}{2}k_1 \frac{2ks+2k^2}{(s+k_1)(s+k)^2} = \frac{1}{\cancel{2}}k_1\frac{\cancel{2}k\cancel{(s+k)}}{(s+k_1)(s+k)^{\cancel{2}}}$$

$$G(s) = \frac{k_1 k}{(s+k_1)(s+k)}$$

Il grado(denominatore di $G(s)$) $= 2 < n = 3$
a causa della simmetria della rete idrica

Infatti questa è la stessa $G(s)$ che si otterrebbe sostituendo i due serbatoi in parallelo con un unico serbatoio di volume

$$z = x_1 + x_2$$



$$z = x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_1 = u - k_1 x_1$$

$$\dot{z} = k_1 x_1 - kz$$

$$y = kz$$

$$(s+k_1)\,x_1 = u \qquad \longrightarrow \qquad x_1 = \frac{1}{s+k_1}\,u$$

$$(s+k)\,z = k_1 x_1 \qquad\qquad z = \frac{k_1}{(s+k)(s+k_1)}\,u$$

$$y = kz = \frac{k\,k_1}{(s+k)(s+k_1)}\,u$$

da cui $\quad G(s) = \dfrac{k\,k_1}{(s+k)(s+k_1)}$

I finanziamenti concessi da una certa banca alle imprese sono classificati in tre categorie:

1 = elevata affidabilità 2 = media affidabilità 3 = scarsa affidabilità

Ogni anno, in base alle informazioni sulla solidità delle imprese, una frazione α_{ij} dei finanziamenti di categoria i viene classificata in categoria j, mentre un'ulteriore frazione β_i diviene parte delle "sofferenze" (finanziamenti non più riscuotibili). Infine, ogni anno t la banca concede nuovi prestiti per un ammontare $u(t)$, esclusivamente di categoria 1.

I valori dei coefficienti sono i seguenti:

$\alpha_{11} = 0.8$, $\alpha_{12} = 0.1$, $\alpha_{22} = 0.7$, $\alpha_{23} = 0.2$, $\alpha_{33} = 0.9$, $\alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$

$\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0.05$, $\beta_3 = 0.1$

a) Descrivere il fenomeno in esame mediante un sistema dinamico a tempo discreto, in cui $y(t)$ rappresenti l'ammontare delle nuove sofferenze nell'anno t.

b) Determinare il modello I/O del sistema.

c) Determinare (utilizzando il modello I/O) l'ammontare delle nuove sofferenze annue all'equilibrio se $u(t)$ = 100.

a) $x_i(t)$ = ammontare dei prestiti in categoria i nell'anno t

$i = 1, 2, 3$

$$x_1(t+1) = \alpha_{11} x_1(t) + \alpha_{21} x_2(t) + \alpha_{31} x_3(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = \alpha_{12} x_1(t) + \alpha_{22} x_2(t) + \alpha_{32} x_3(t)$$
$$x_3(t+1) = \alpha_{13} x_1(t) + \alpha_{23} x_2(t) + \alpha_{33} x_3(t)$$
$$y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) + \beta_3 x_3(t)$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t+1) = 0{,}8\, x_1(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = 0{,}1\, x_1(t) + 0{,}7\, x_2(t)$$
$$x_3(t+1) = 0{,}2\, x_2(t) + 0{,}9\, x_3(t)$$
$$y(t) = 0{,}05\, x_2(t) + 0{,}1\, x_3(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = b$$

$$c = \begin{vmatrix} 0 & 0{,}05 & 0{,}1 \end{vmatrix} \quad d = 0$$

b) $zx_1 = 0{,}8\, x_1 + u$ $\qquad (z-0{,}8)\, x_1 = u$

$zx_2 = 0{,}1\, x_1 + 0{,}7 x_2 \qquad \rightarrow (z-0{,}7)\, x_2 = 0{,}1\, x_1$

$zx_3 = 0{,}2\, x_2 + 0{,}9\, x_3 \qquad (z-0{,}9)\, x_3 = 0{,}2\, x_2$

$y = 0{,}05\, x_2 + 0{,}1\, x_3$

$$x_1 = \frac{1}{z-0{,}8}\, u$$

$$x_2 = \frac{0{,}1}{z-0{,}7}\, x_1 = \frac{0{,}1}{(z-0{,}8)(z-0{,}7)}\, u$$

$$x_3 = \frac{0{,}2}{z-0{,}9}\, x_2 = \frac{0{,}02}{(z-0{,}7)(z-0{,}8)(z-0{,}9)}\, u$$

$$y = \underbrace{\frac{0{,}005\,(z-0{,}9) + 0{,}002}{(z-0{,}7)(z-0{,}8)(z-0{,}9)}}_{G(z)}\, u$$

c) $\bar{y} = G(1)\, \bar{u}$

$$G(1) = \frac{0{,}005 \cdot 0{,}1 + 0{,}002}{0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1} \simeq 0{,}4167$$

$\bar{u} = 100$

$\Rightarrow \bar{y} \cong 41{,}67$

Una società finanziaria, all'inizio di ogni mese eroga nuovi prestiti di durata quadrimestrale, riscuote l'interesse su prestiti esistenti nella misura dell'1 % dell'ammontare del prestito, incassa il rimborso dei prestiti giunti a scadenza, classifica come "persi" in media il 2% dei prestiti esistenti. Questi non daranno più luogo a interessi e non saranno riscuotibili alla scadenza.
Descrivere tale attività mediante un modello matematico (interno ed esterno), in cui l'ingresso rappresenta l'ammontare dei nuovi prestiti erogati all'inizio del mese e l'uscita l'ammontare degli interessi riscossi.
Se, a partire da t=0, ogni mese i nuovi prestiti erogati ammontano a 100000 €, calcolare l'ammontare mensile degli interessi riscossi a regime.

$x_i(t)$ = ammontare dei prestiti erogati da i mesi all'inizio del mese t $(i = 1, 2, 3, 4)$

$$x_1(t+1) = 0{,}98\, u(t)$$
$$x_2(t+1) = 0{,}98\, x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = 0{,}98\, x_2(t)$$
$$x_4(t+1) = 0{,}98\, x_3(t)$$
$$y(t) = 0{,}01\left[x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)\right]$$

modello interno

$$z x_1 = 0{,}98\, u \qquad z x_2 = 0{,}98\, x_1 \qquad z x_3 = 0{,}98\, x_2 \qquad z x_4 = 0{,}98\, x_3$$

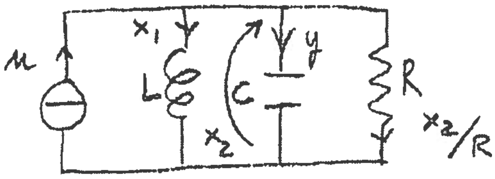
$$\rightarrow \quad x_1 = \frac{0{,}98}{z} u \qquad x_2 = \frac{0{,}98^2}{z^2} u \qquad x_3 = \frac{0{,}98^3}{z^3} u \qquad x_4 = \frac{0{,}98^4}{z^4} u$$

$$y = 0{,}01\left[\frac{0{,}98}{z} + \left(\frac{0{,}98}{z}\right)^2 + \left(\frac{0{,}98}{z}\right)^3 + \left(\frac{0{,}98}{z}\right)^4\right] u$$

$$y = \underbrace{0{,}0098\, \frac{z^3 + 0{,}98 z^2 + 0{,}98^2 z + 0{,}98^3}{z^4}}_{G(z) \text{ modello esterno}}\, u$$

$$\bar{y} = G(1)\,\bar{u} \simeq 3804 \text{ €}$$

Descrivere la rete elettrica in figura mediante un modello interno (vedi prima esercitazione) e un modello esterno.



$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L} x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left[u - x_1 - \frac{x_2}{R}\right]$$

$$y = u - x_1 - \frac{x_2}{R}$$ ⇝ sistema improprio ($d = 1$)

NOTA

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/RC \end{vmatrix}$$

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC}$$

↓

$$s x_1 = \frac{1}{L} x_2 \qquad x_1 = \frac{1}{sL} x_2 = \frac{1}{s^2 LC} y$$

$$s x_2 = \frac{1}{C} y \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{sC} y$$

$$y = u - \frac{1}{s^2 LC} y - \frac{1}{sRC} y$$

$$\left(1 + \frac{1}{s^2 LC} + \frac{1}{sRC}\right) y = u$$

$$\Rightarrow \left(s^2 LRC + sL + R\right) y = s^2 LRC\, u$$

$$N(s) = s^2 LRC$$
$$D(s) = s^2 LRC + sL + R$$

$$\ddot{y} LRC + \dot{y} L + R y = LRC\, \ddot{u}$$

$$G(s) = \frac{s^2 LRC}{s^2 LRC + sL + R} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$ ↳ $\{poli\} \equiv \{\lambda\}$ vedi $\Delta_A(\lambda)$

NOTA Essendo il sistema improprio il grado(N) = grado(D)

Sia dato un sistema dinamico lineare a tempo continuo definito dalle matrici

$$A=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \qquad b=\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad c=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad d=0$$

NOTA

$$\{\lambda\}_A=\{-1,-2,-3\}$$

Determinare la funzione di trasferimento del sistema commentando il risultato ottenuto.
Valutare equilibrio, zeri, poli e guadagno del sistema.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1+x_2+u \\ \dot{x}_2 &= -2x_2+u \\ \dot{x}_3 &= -x_2-3x_3+u \\ y &= x_1-x_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} (s+1)\,x_1 &= +x_2+u \\ (s+2)\,x_2 &= +u \\ (s+3)\,x_3 &= -x_2+u \end{aligned} \quad \rightarrow \quad x_2=+\frac{1}{s+2}u$$

$$x_1= +\frac{1}{s+1}x_2+\frac{1}{s+1}u = +\frac{1}{(s+1)(s+2)}u+\frac{1}{s+1}u$$

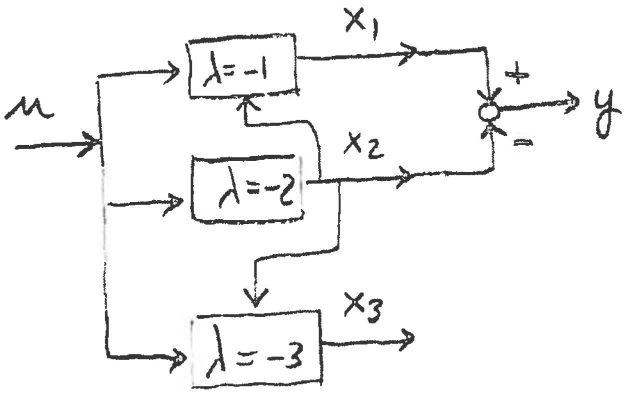
$$x_1=\frac{+1+s+2}{(s+1)(s+2)}u \rightarrow x_1=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}u$$

$$y=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}u-\frac{1}{s+2}u=\frac{s+3-s-1}{(s+1)(s+2)}u=\frac{2}{(s+1)(s+2)}u$$

$$G(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)} \rightarrow \text{poli in } -1 \text{ e } -2$$

$\hookrightarrow$ ha grado $2 < n = 3$

Ciò è dovuto alla "forma" del sistema



La variabile x_3, pur essendo influenzata da u, non influenza né direttamente né indirettamente la variabile di uscita y

$\Rightarrow$ grado $(D) < n = 3$

Tra tutti gli autovalori, si perde quello "relativo" al sottosistema che genera x_3

Equilibrio

$-x_1 + x_2 + u = 0 \qquad x_1 = x_2 + u = \frac{3}{2} u$

$-2x_2 + u = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2} u$

$-x_2 - 3x_3 + u = 0 \qquad x_3 = -\frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{3} u = +\frac{1}{6} u$

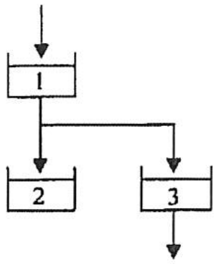
zeri $\nexists$

poli in -1 e -2

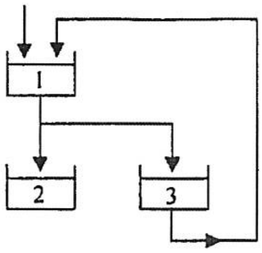
$\mu = G(0) = \frac{2}{2} = 1 \qquad$ guadagno

Si studi la stabilità dei seguenti sistemi idrici specificandone, dove esiste, il tempo di risposta.
(Per semplicità, si supponga che la costante si deflusso di ciascun serbatoio sia pari a 1 e che, ad ogni suddivisione, la portata venga equi-ripartita tra i rami).

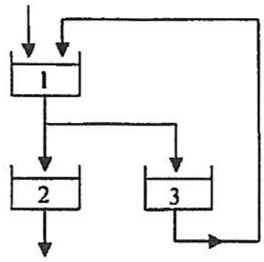
Σ_1



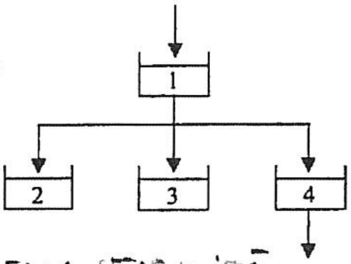
Σ_2



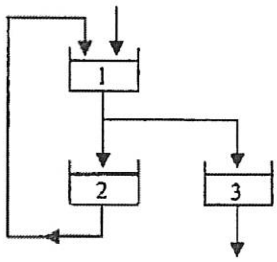
Σ_3



Σ_4



Σ_5



STUDIO DELLA STABILITÀ

x_i = volume di invaso del serbatoio i-esimo

$\boxed{\Sigma_1}$

$$\dot{x}_1 = u - x_1$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2} x_1$$
$$\dot{x}_3 = \frac{1}{2} x_1 - x_3$$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{vmatrix}$$ ⇒ triangolare

$$\{\lambda\}_A = \{-1, 0, -1\}$$

- $\mathrm{Re}(\lambda) \le 0$
- $\lambda = 0$ è radice semplice di $\Delta_A(\lambda) \Rightarrow$ è radice semplice di $\psi_A(\lambda)$

⇒ semplice stabilità

$\boxed{\Sigma_2}$

$$\dot{x}_1 = u - x_1 + x_3$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2} x_1$$
$$\dot{x}_3 = \frac{1}{2} x_1 - x_3$$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ -1/2 & \lambda & 0 \\ -1/2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \Delta_A(\lambda)$$

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2 - \frac{1}{2}\lambda = \lambda\left(\lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{2}\right) = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\{\lambda\}_A = \left\{ \underset{\ominus}{\frac{-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}},\ \underset{\ominus}{\frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}},\ 0 \right\}$$

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \mathrm{Re}(\lambda) \le 0 \\ \bullet\ \lambda = 0 \text{ è radice semplice di } \Delta_A(\lambda) \Rightarrow \\ \quad\ \text{è} \quad '' \quad\quad '' \quad \text{di } \psi_A(\lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow$ semplice stabilità

$\boxed{\Sigma_3}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u - x_1 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2}x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{2}x_1 - x_3 \end{aligned} \qquad A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ -1/2 & \lambda+1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \Delta_A(\lambda)$$

$$\Delta_A(\lambda) = (\lambda+1)^3 - \frac{1}{2}(\lambda+1) = (\lambda+1)\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1/2\right) = 0 \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\{\lambda\}_A = \left\{ -1,\ \frac{-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},\ \frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \right\}$$

$\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow$ asintotica stabilità

$$\boxed{\Sigma_4} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= u - x_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{3} x_1 \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{3} x_1 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{3} x_1 - x_4 \end{aligned} \qquad A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$\{\lambda\}_A = \{-1, 0, 0, -1\} \rightsquigarrow \lambda = 0$ è radice doppia di $\Delta_A(\lambda)$

∘ $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0 \rightarrow$ devo verificare se $\lambda = 0$ è radice semplice o multipla di $\psi_A(\lambda)$ per capire la stabilità

$$\theta(\lambda) = (\lambda+1)^2 \lambda$$

$$\Rightarrow \theta(A) = (A+I)^2 A = \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}^{A+I} \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}^{A+I} \overbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}^{A} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \psi_A(\lambda) = (\lambda+1)^2 \lambda$

↳ $\lambda = 0$ è radice semplice $\Rightarrow$ semplice stabilità

<u>NOTA</u>: Tutte le reti idriche mostrate nel testo, se non alimentate, hanno volumi di invaso che possono o tendere a 0 oppure rimanere su un valore limitato $\Rightarrow$ le reti possono solo essere o asintot. stabili o semplic. stabili (mai instabili (fortemente) o debolmente instabili)

In Σ_4 pertanto, era già noto che $\lambda = 0$ fosse radice semplice di $\psi_A(\lambda)$

$\boxed{\Sigma_5}$

$$\dot{x}_1 = u + x_2 - x_1$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_3 = \frac{1}{2}x_1 - x_3$$

$$\begin{array}{c} \quad A_{11} \\ A = \left|\begin{array}{cc:c} -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ \hdashline 1/2 & 0 & -1 \end{array}\right| \\ \qquad\qquad A_{22} \end{array}$$

A è triangolare a blocchi

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \underbrace{\{\lambda\}_{A_{22}}}_{\to -1}$$

$$\Delta_{A_{11}}(\lambda) = \det(\lambda I - A_{11}) = \det\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ -1/2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 1/2 =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1/2 = 0 \to \lambda = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\{\lambda\}_A = \left\{\frac{-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}, -1\right\} \quad (*)$$

$\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow$ asintotica stabilità

(*) sono gli stessi autovalori di Σ_3
I due sistemi sono infatti equivalenti pur di scambiare tra loro i serbatoi 2 e 3

<u>TEMPI DI RISPOSTA</u> (solo per i sistemi asintot. stabili)
$\Sigma_3 = \Sigma_5$

$$\{\lambda\}_A = \left\{\frac{-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \underbrace{\frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}_{\lambda_D}, -1\right\}$$

$$T_D = -\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_D)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \qquad T_R = 5T_D = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

OSSERVAZIONE

Supponendo che in Σ_S il coefficiente di ripartizione delle portate non sia $\frac{1}{2}$ ma α (ramo destro), si avrebbe

$$\dot{x}_1 = u + x_2 - x_1$$
$$\dot{x}_2 = (1-\alpha)x_1 - x_2$$
$$\dot{x}_3 = \alpha x_1 - x_3$$

A_{11}

$$A = \left|\begin{array}{cc:c} -1 & 1 & 0 \\ 1-\alpha & -1 & 0 \\ \hdashline \alpha & 0 & -1 \end{array}\right|$$

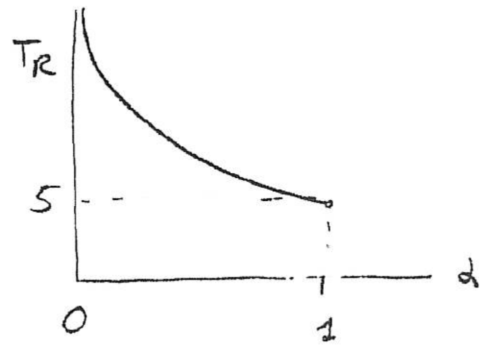
A_{22}

$$\det(\lambda I - A_{11}) = \det\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ \alpha-1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 + (\alpha-1) =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + \alpha = 0 \qquad \lambda = -1 \pm \sqrt{1-\alpha} \qquad \alpha \in [0,1]$$

$$\{\lambda\}_A = \{\underbrace{-1+\sqrt{1-\alpha}}_{\lambda_D},\ -1-\sqrt{1-\alpha},\ -1\}$$

$$T_D = -\frac{1}{|\mathrm{Re}(\lambda_D)|} = \frac{1}{1-\sqrt{1-\alpha}} \qquad T_R = 5T_D = \frac{5}{1-\sqrt{1-\alpha}}$$



$$\Rightarrow \min_{\alpha}(T_R) = 5 \quad \text{per } \alpha = 1$$

(T_R del singolo serbatoio $= 5$)

NOTA: Più in generale, se la costante di deflusso è k si ha:

$$T_R = \frac{5}{k(1-\sqrt{1-\alpha})} \quad \text{e} \quad \min_{\alpha}(T_R) = 5/k \quad \text{per } \alpha=1$$

(T_R del singolo serbatoio $5/k$)

Si studi la stabilità dei seguenti sistemi a tempo continuo specificandone, dove esiste, il tempo di risposta.
(NOTA: per i modelli dati in forma I/O si supponga che {poli} = {autovalori})

Σ_1 $$A=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

A_{11}, A_{22}

Σ_2 $$A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

A_{11}, A_{22}

Σ_3 $$A=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Σ_4 $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + k_1x_2 + k_2x_3 \\ \dot{x}_2 &= k_1x_1 - 2x_2 - k_2x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_1x3 \end{aligned}$$

Σ_5 $$G(s)=\frac{3s+3}{3s^2+7s+2}$$

Σ_6: $\dot{y}+10y=3u$

Σ_7: $\ddot{y}+5\dot{y}+4y=3\dot{u}+u$

Σ_8: $\dddot{y}-7\dot{y}-6y=\ddot{u}+2\dot{u}-15u$

$\boxed{\Sigma_1}$ A è triangolare a blocchi $\Rightarrow \{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$

$$A_{11} \rightarrow \det(\lambda I - A_{11}) = \det\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+2)+\lambda+2 =$$

$$=(\lambda^2+1)(\lambda+2)=0 \begin{cases} \lambda=-2 \\ \lambda=\pm i \end{cases}$$

[In alternativa: A_{11} è in forma canonica di controllo
$\Rightarrow \Delta_{A_{11}}(\lambda)=\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+2=(\lambda+2)\lambda^2+(\lambda+2)=(\lambda+2)(\lambda^2+1)$]

$$A_{22} \rightarrow \det(\lambda I - A_{22}) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 5 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)+5=\lambda^2+4=0 \;\Rightarrow\; \lambda=\pm 2i$$

$$\{\lambda\}_A=\{-2,\ +i,\ -i,\ -2i,\ +2i\}$$

- $\mathrm{Re}(\lambda)\le 0$
- Autovalori a $\mathrm{Re}=0$ sono radici semplici di $\Delta_A(\lambda) \Rightarrow$ lo sono anche di $\psi_A(\lambda)$

$\Rightarrow$ semplice stabilità

$\nexists\, T_R$

$\boxed{\Sigma_2}$ A è triangolare a blocchi $\Rightarrow \{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$

$$A_{11} \rightarrow \quad \det(\lambda I - A_{11}) = \det\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -3 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+2)+3 =$$

$$= \lambda^2+\lambda+1 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{22} \rightarrow \quad \det(\lambda I - A_{22}) = \det\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(\lambda+1)(\lambda+2) - 1 - (\lambda+1) = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2) - (\lambda+2) =$$

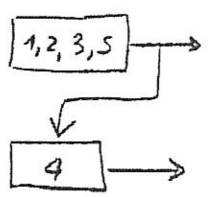
$$= (\lambda+2)(\lambda^2+\lambda-1) = 0 \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\{\lambda\}_A = \left\{ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\ -2,\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

$\mathbb{R}e \ominus$ $\quad$ $\mathbb{R}e \ominus$ $\quad$ $\ominus$ $\quad$ $\ominus$ $\quad$ $\oplus$

Poiché $\exists\, \lambda$ con $\mathbb{R}e > 0$ $\Rightarrow$ Instabilità (forte) del sistema e $\nexists\, T_R$

$\boxed{\Sigma_3}$ x_4 non influenza la dinamica di x_1, x_2, x_3 e x_5 (vedi 4ª colonna) $\Rightarrow$



Pertanto, rinominando le variabili di stato posso ottenere una matrice di stato nella forma

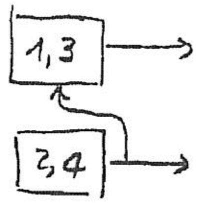
$$\begin{vmatrix} & & 0 \\ 4,4 & & 0 \\ & & 0 \\ & & 0 \\ - & & 1,1 \end{vmatrix}$$

Provo, per esempio, a scambiare x_4 con x_5 (scambio tra loro la 4^a e la 5^a colonne e la 4^a e la 5^a riga) ottenendo

$$A = \left|\begin{array}{cccc:c} 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 3 & 1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right|$$

A_{11} (blocco in alto a sinistra), A_{22} (blocco in basso a destra)

Per quanto riguarda A_{11}, le variabili x_2 e x_4 non sono influenzate da x_1, x_3 (seconda e quarta riga):



Se scambio tra loro x_2 e x_3 ottengo

$$A_{11} = \left|\begin{array}{cc:cc} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|$$

$\tilde{A}_{11}$ (blocco in alto a sinistra), $\tilde{A}_{22}$ (blocco in basso a destra)

$$\Rightarrow \{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{\tilde{A}_{11}} \cup \{\lambda\}_{\tilde{A}_{22}} \cup \overset{\to -1}{\{\lambda\}_{A_{22}}}$$

$\tilde{A}_{11} \to \lambda^2 = 0$, $\lambda_{1,2} = 0 \leadsto$ radice doppia in A

$\tilde{A}_{22} \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, $(\lambda+1)^2 = 0$, $\lambda_{1,2} = -1$

$\{\lambda\}_A = \{0, 0, -1, -1, -1\}$

$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)^3$

- $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$
- $\lambda = 0$ è radice doppia in ψ_A (*)

$\Downarrow$

debolmente instabile

(*) Con l'uso di Matlab si nota che, posto

$\theta(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^3 \Rightarrow \theta(A) \neq 0 \Rightarrow \theta(\lambda) \neq \psi_A(\lambda) = \Delta_A(\lambda)$

$\boxed{\Sigma_4}$ $A = \begin{vmatrix} -1 & k_1 & k_2 \\ k_1 & -2 & -k_2 \\ 0 & 0 & -k_1 \end{vmatrix}$ (A_{11}, A_{22})

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \underbrace{\{\lambda\}_{A_{22}}}_{-k_1}$$

$$A_{11} \rightarrow \det(\lambda I - A_{11}) = \det \begin{vmatrix} \lambda+1 & -k_1 \\ -k_1 & 2+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2) - k_1^2 =$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda + (2-k_1^2) = 0$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4(2-k_1^2)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{4k_1^2+1}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-3-\sqrt{1+4k_1^2}}{2} & \ominus \\ \dfrac{-3+\sqrt{1+4k_1^2}}{2} & \end{cases}$$

$\ominus$ se $1+4k_1^2 < 9 \rightarrow k_1^2 < 2$

$\oplus$ se $1+4k_1^2 > 9 \rightarrow k_1^2 > 2$

Pertanto $\{\lambda\}_A = \left\{ \underbrace{\frac{-3-\sqrt{1+4k_1^2}}{2}}_{\ominus}, -k_1, \frac{-3+\sqrt{1+4k_1^2}}{2} \right\}$

cambia di segno

$$\lambda_1 = \frac{-3-\sqrt{1+4k_1^2}}{2} < 0 \ \forall k_1$$

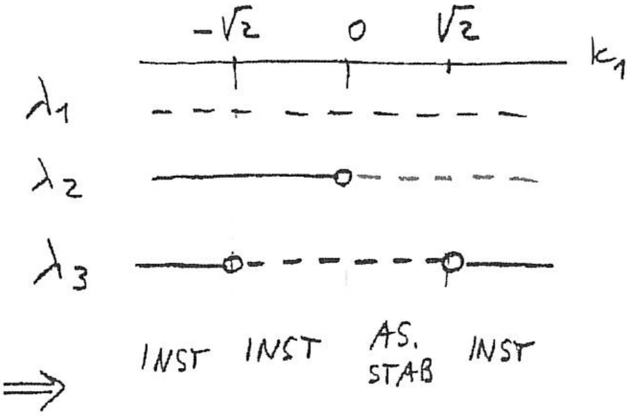
$$\lambda_2 = -k_1 < 0 \text{ se } k_1 > 0$$

$$\lambda_3 = \frac{-3+\sqrt{1+4k_1^2}}{2} < 0 \text{ se } k_1^2 < 2$$

$$\Downarrow$$

$$-\sqrt{2} < k_1 < \sqrt{2}$$

Studio il segno di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ al variare di k_1 e deduco la stabilità del sistema



Legenda

— $\mathbb{R}e(\lambda) > 0$

- - - $\mathbb{R}e(\lambda) < 0$

o $\mathbb{R}e(\lambda) = 0$

$\Rightarrow$ INST (forte) $\mathbb{R}e(\lambda_2) > 0$

semplice stabilità (come $k_1 = 0$)

semplice stabilità perché $\mathbb{R}e(\lambda) \leq 0$ ed $\exists!\ \lambda$ con $\mathbb{R}e$ nulla: $\mathbb{R}e(\lambda_2) = 0$ [λ_2 è radice semplice di Δ e di ψ]

Infine, solo per $0 < k_1 < \sqrt{2}$ (asint stab), si calcola T_R

$\lambda_1 < \lambda_3 \Rightarrow$ devo confrontare λ_2 e λ_3

$$-k_1 = \frac{-3 + \sqrt{1 + 4k_1^2}}{2} \longrightarrow \underset{\oplus}{3 - 2k_1} = \sqrt{1 + 4k_1^2}$$

$$(3 - 2k_1)^2 = 1 + 4k_1^2$$

$$9 + \cancel{4k_1^2} - 12k_1 = 1 + \cancel{4k_1^2} \qquad 12k_1 = 8 \qquad k_1 = \frac{2}{3}$$

$$0 < k_1 < 2/3 \qquad \lambda_D = \lambda_2 = -k_1 \qquad T_D = \frac{1}{k_1} \qquad T_R = \frac{5}{k_1}$$

$$\frac{2}{3} \leq k_1 < \sqrt{2} \qquad \lambda_D = \lambda_3 = \frac{-3 + \sqrt{1 + 4k_1^2}}{2}$$

$$T_D = \frac{2}{3 - \sqrt{1 + 4k_1^2}} \qquad T_R = \frac{10}{3 - \sqrt{1 + 4k_1^2}}$$

$\boxed{\Sigma_5}$ $G(s) = \dfrac{3(s+1)}{3(s+2)(s+\frac{1}{3})}$

$3s^2+7s+2=0$

$s = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \begin{cases} -2 \\ -1/3 \end{cases}$

$\lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ $\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow$ asint. stabilità

$\lambda_D = -\frac{1}{3}$ $T_D = 3$ $T_R = 15$

$\boxed{\Sigma_6}$ $(s+10)y = 3u$

$\downarrow$

$\lambda + 10 = 0$ $\lambda = -10 \rightarrow$ Asint. stabile

$T_D = \frac{1}{10}$ $T_R = 5/10 = 1/2$

$\boxed{\Sigma_7}$ $(s^2+5s+4)y = (3s+1)u$

$\lambda^2+5\lambda+4 = (\lambda+4)(\lambda+1) = 0 \begin{cases} \lambda = -4 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow$ Asint. stab.

$\lambda_D = -1$ $T_D = 1$ $T_R = 5$

$\boxed{\Sigma_8}$ $(s^3-7s-6)y = (s^2+2s-15)u$

$\underbrace{s^2+2s-15}_{(s+5)(s-3)}$

$$\begin{array}{l|l} s^3 - 7s - 6 & s+1 \\ s^3+s^2 & s^2-s-6 \\ \hline -s^2-7s-6 & \\ -s^2-s & \\ \hline -6s-6 & \\ -6s-6 & \\ \hline / & \end{array}$$

$\lambda^3-7\lambda-6 = (\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-6) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \ (+) \\ \frac{1-5}{2} = -2 \ (-) \end{cases} \end{cases}$

$\exists \lambda$ con $\mathrm{Re}(\lambda) > 0 \Rightarrow$ instabile e $\nexists T_R$

Verificare l'asintotica stabilità dei seguenti sistemi. Quale dei due tende più rapidamente a regime? (NOTA: per la funzione di trasferimento si supponga che {poli} ≡ {autovalori}).

A_{11}

$\Sigma_1 \qquad A = \left|\begin{array}{cc:c} -3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & -3 \end{array}\right| \qquad\qquad \Sigma_2 \qquad G(s) = \dfrac{s^2+4s+4}{s^3+14s^2+43s+30}$

A_{22}

$$\Sigma_1: \quad A_{11} \to \det(\lambda I - A_{11}) = \det\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda+1)+2 =$$

$$= \lambda^2+4\lambda+5 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$$

$$\{\lambda\}_A = \{-2-i, -2-i, -3\} \quad \mathrm{Re}(\lambda)<0 \Rightarrow \text{Asint. stab.}$$

$$\lambda_D = -2 \pm i \qquad T_D = -\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_D)} = \frac{1}{2} \qquad T_R = 5T_D = 5/2$$

$$\Sigma_2: \qquad G(s) = \frac{(s+2)^2}{(s+1)(s+3)(s+10)}$$

$$\begin{array}{l|l} s^3+14s^2+43s+30 & s+1 \\ \hline s^3+s^2 & s^2+13s+30 \\ /\quad 13s^2+43s+30 & \\ \quad 13s^2+13s & \\ \quad /\quad 30s+30 & \\ \quad\quad 30s+30 & \\ \quad\quad / & \end{array}$$

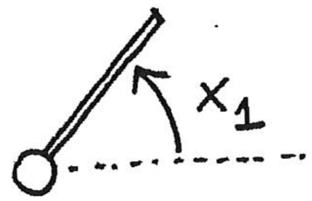
$$\{\lambda\} = \{-1, -3, -10\}$$

$$\mathrm{Re}(\lambda)<0 \Rightarrow \text{Asint. stab.}$$

$$\lambda_D = -1 \qquad T_D = 1 \qquad T_R = 5$$

Σ_1 tende più rapidamente a regime

Un braccio meccanico ruota nel piano orizzontale sotto l'azione di una coppia C proporzionale allo scostamento tra posizione angolare desiderata u ed effettiva x_1:



$$C(t) = k(u(t) - x_1(t))$$

Il braccio ha momento d'inerzia M ed è inoltre soggetto ad attrito viscoso con coefficiente d'attrito h.

a) Scrivere le equazioni di stato e di uscita, considerando come variabile di uscita la posizione angolare del braccio meccanico.

Si pongano, da qui in avanti, $M = 1$, $h = 4$.

b) Discutere la stabilità del sistema per ogni valore di k $(-\infty < k < +\infty)$.

a) x_1 = posizione angolare
x_2 = velocità angolare

$\mathring{x}_1 = x_2$

$\mathring{x}_2 = \frac{1}{M}\left(k(u - x_1) - h x_2\right)$

$y = x_1$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{vmatrix}$$

b) $M = 1 \quad h = 4 \quad \rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -k & -4 \end{vmatrix}$ $\quad tr(A) = -4$, $\; det(A) = k$

$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 + 4\lambda + k = 0$

$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-k}$

- $k > 0 \Rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_{1,2}) < 0 \Rightarrow$ A.S.
- $k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ S.S.
  ↳ Radice semplice di $\Delta_A \Rightarrow$ radice semplice di φ_A
- $k < 0 \Rightarrow \underset{\downarrow \; \lambda_1 \cdot \lambda_2}{det(A)} = k < 0 \Rightarrow \exists \, \lambda_i > 0 \Rightarrow$ INST

Matrici a blocchi

* Diagonale a blocchi

$$\underset{n,n}{A}=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} n_1 & \quad n_2 \end{array} & \\ \left|\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right| & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \end{array}$$

costruisco sulla diagonale principale due matrici quadrate. Le matrici (quadrate o rettangolari) costruite sull'antidiagona hanno tutti elementi nulli

$n_1 + n_2 = n$

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$$

* Triangolare a blocchi

sulla diagonale principale: 2 matrici quadrate
sulla anti-diagonale: almeno una matrice (quadrata o rettangolare) di elementi nulli

$$\underset{n,n}{A}=\begin{array}{cc} \left|\begin{array}{c|c} A_{11} & * \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right| & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} n_1 & \quad n_2 \end{array} & \end{array} \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{cc} \left|\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline * & A_{22} \end{array}\right| & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} n_1 & \quad n_2 \end{array} & \end{array}$$

$n_1 + n_2 = n$

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$$

NOTA il tutto si può iterare

$$A = \left|\begin{array}{c|cc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right|$$

$$\{\lambda\} = \{-3, -2, 4, 1\}$$

Il ciclo di vita delle meduse può essere suddiviso in tre fasi: fase larvoidale, fase polipoidale e fase medusoidale. La riproduzione è possibile solo nella fase medusoidale; tuttavia, per deporre le uova, le meduse sono costrette a lacerare esombrella ed ectoderma, causando così la morte dell'individuo (le meduse sono animali sempelpari).
La probabilità di sopravvivenza alla predazione allo stato larvoidale è del 10% mentre allo stato polipoidale è dell'8%; si stima inoltre che nell'atto riproduttivo la medusa rilasci circa 1000 uova di cui ne vengono fecondate il 10% (sopravvivenza delle uova alla predazione).
Si proponga un modello dinamico per studiare il ciclo di vita delle meduse e si dica se, con i dati forniti, la popolazione di meduse è destinata all'estinzione o all'invasione.
Nel caso di estinzione, si valuti il livello di sopravvivenza delle uova alla predazione che porta all'invasione della specie.

$x_1(t) = \#$ meduse in fase larvoidale

$x_2(t) = \#$ meduse in fase polipoidale

$x_3(t) = \#$ meduse in fase medusoidale

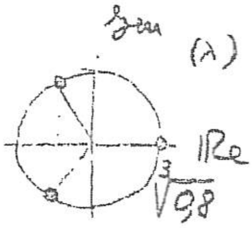
$$x_1(t+1) = 0{,}1 \cdot 1000\, x_3(t) \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}08 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x_2(t+1) = 0{,}1\, x_1(t)$$

$$x_3(t+1) = 0{,}08\, x_2(t)$$

$\hookrightarrow$ solo movimento libero poiché $\nexists\, u(t)$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -100 \\ -0{,}1 & \lambda & 0 \\ 0 & -0{,}08 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 0{,}8 = 0$$



$$\{\lambda\}_A = \left\{ \sqrt[3]{0{,}8}\ ;\ \sqrt[3]{0{,}8}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right];\ \sqrt[3]{0{,}8}\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \right\}$$

$$|\lambda_i| = \sqrt[3]{0{,}8} < 1 \quad \forall i \Rightarrow \text{As. stabilità} \Rightarrow x(t) \to 0 \quad \forall x(0)$$

cioè la specie è destinata all'estinzione

p = sopravvivenza delle uova alla predazione

$$\Rightarrow A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1000p \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}08 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \to \lambda^3 = 8p \to |\lambda| = \sqrt[3]{8p}$$

$$\text{Invasione} \Rightarrow \text{instabilità} \Rightarrow |\lambda| > 1 \Rightarrow 8p > 1 \Rightarrow p > \frac{1}{8}.$$

$\Updownarrow$

$(x(0) \neq 0$ piccolo $\Rightarrow x(t) \to \infty)$

1) Una società di noleggio auto affitta vetture alle aziende con le formule del Noleggio di durata Mensile (NM) o Bimestrale (NB). All'inizio di ciascun mese t vengono date in affitto $u(t)$ vetture, di cui 2/3 con la formula NM e 1/3 con la formula NB. L'importo dell'affitto è riscosso posticipatamente: α euro al termine del noleggio NM, e β euro al termine di ciascun mese del noleggio NB.

a) Si descriva l'evoluzione nel tempo delle auto affittate mediante un sistema dinamico a tempo discreto, definendo come variabile di uscita $y(t)$ l'affitto complessivo riscosso all'istante t.
b) Studiare la stabilità del sistema, discutendo anche il tempo di risposta e l'eventuale presenza di oscillazioni nel movimento libero.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $x_1(t)$ = n. auto in NM da 1 mese
$x_2(t)$ = " " NB da 1 mese
$x_3(t)$ = " " NB da 2 mesi

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \frac{2}{3} u(t) \\ x_2(t+1) = \frac{1}{3} u(t) \\ x_3(t+1) = x_2(t) \end{cases} \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta \end{vmatrix}$$

$$y(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + \beta x_3(t)$$

b) $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, 3$
$|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow$ A asintoticamente stabile
sistema a memoria finita (FIR) : $T_R \leq n = 3$
non vi sono aut. complessi o reali negativi
$\Rightarrow$ no oscillazioni

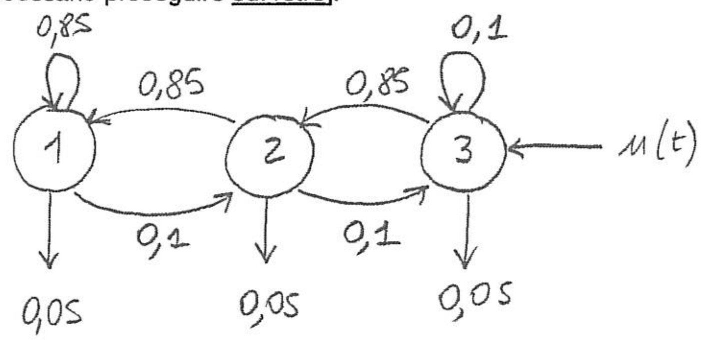
1) Gli abbonati a un servizio di "car sharing" sono suddivisi in tre categorie a cui corrispondono diverse tariffe di abbonamento, crescenti dalla cat. 1 alla cat. 3. Il gestore vuole incentivare l'uso moderato dei veicoli, per cui a fine anno promuove alla categoria inferiore (da 3 a 2, o da 2 a 1) l'utente che nell'anno non abbia superato una certa soglia di utilizzo, mentre declassa alla categoria superiore (da 1 a 2, o da 2 a 3) l'utente sopra soglia. Tutti i nuovi abbonati sono comunque inseriti in cat. 3.

In base alle statistiche di utilizzo degli ultimi anni, è noto che il 10% degli utenti di ogni categoria ha un utilizzo sopra soglia. Inoltre, un ulteriore 5% non rinnova l'abbonamento a fine anno e lascia il servizio.

a) Descrivere il fenomeno in esame mediante un sistema dinamico, nel quale l'ingresso rappresenti il numero di nuovi abbonati e l'uscita il numero di abbonati di cat. 1.
b) Studiare la stabilità del sistema, discutendo anche il tempo di risposta.
c) Determinare lo stato di equilibrio corrispondente a 1000 nuovi abbonati all'anno.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a)



$x_i(t)$ = # abbonati in categoria i $(i=1,2,3)$ nell'anno t

$x_1(t+1) = 0{,}85\, x_1(t) + 0{,}85\, x_2(t)$

$x_2(t+1) = 0{,}1\, x_1(t) + 0{,}85\, x_3(t)$

$x_3(t+1) = 0{,}1\, x_2(t) + 0{,}1\, x_3(t) + u(t)$

$y(t) = x_1(t)$

b) $A = \begin{vmatrix} 0{,}85 & 0{,}85 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}85 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{vmatrix}$ Il sistema è positivo

Tutte le colonne sommano a $0{,}95 \Rightarrow \lambda_D = 0{,}95$ e il sistema è A. S.

$$T_R = -\frac{5}{\ln(0,95)} \simeq 95,5 \text{ anni}$$

c) $x_1 = 0,85\, x_1 + 0,85\, x_2 \rightarrow x_1 = 5,67\, x_2$

$x_2 = 0,1\, x_1 + 0,85\, x_3 \longrightarrow x_2 = 0,567\, x_2 + 0,85\, x_3 \rightarrow x_2 = 1,96\, x_3$

$x_3 = 0,1\, x_2 + 0,1\, x_3 + u \rightarrow x_3 = 0,196\, x_3 + 0,1\, x_3 + u$

$\hookrightarrow x_3 = 1,42\, u$

$\bar{u} = 1000$

$$\bar{X} = \begin{vmatrix} 15781 \\ 2783 \\ 1420 \end{vmatrix}$$

Sul pianeta Terno ogni individuo muore subito dopo avere compiuto tre anni di vita. Nel primo anno di vita ogni individuo lavora e versa un contributo di α euro alla cassa previdenziale; inoltre genera (mediamente) 0.5 figli subito dopo aver compiuto un anno. Nel secondo anno di vita ciascun individuo lavora e versa un contributo di 2α euro alla cassa previdenziale. Infine, nel terzo anno di vita, ogni individuo gode di una pensione di β euro. Ogni anno, inoltre, immigrano su Terno 200 neonati, che vengono quindi messi subito al lavoro.

a) Descrivere con un modello matematico l'evoluzione della popolazione, indicando con $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ il numero di individui che, all'inizio dell'anno t, compiono 1, 2 e 3 anni.

b) Determinare l'equilibrio del sistema dinamico ottenuto al punto a) e studiarne la stabilità.

c) Sia $x_4(t)$ il livello della cassa previdenziale all'inizio dell'anno t. Scrivere l'equazione che regola la dinamica di $x_4(t)$ (cioè $x_4(t+1) = \dots$) ipotizzando che il tasso di interesse sia pari al 10%.

d) Determinare il valore di equilibrio di $x_4(t)$.

a) $x_1(t+1) = 0{,}5\, x_1(t) + \bar{u}$ $\qquad (\bar{u} = 200)$

$x_2(t+1) = x_1(t)$

$x_3(t+1) = x_2(t)$

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = b$$

b) $\bar{x}_1 = 0{,}5\, \bar{x}_1 + \bar{u} \rightarrow \bar{x}_1 = \frac{u}{0{,}5} = 400$

$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2 = 400$ $\qquad \bar{x} = \begin{vmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{vmatrix}$

$\bar{x}_3 = \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_3 = 400$

$\{\lambda\}_A = \{0{,}5;0;0\}$ $\forall i\, |\lambda_i| < 1 \Rightarrow$ As. stabilità

$\lambda_D = 0{,}5 \Rightarrow T_D = -\frac{1}{\ln 0{,}5}$ e $T_R = 5 T_D \simeq 7{,}21$

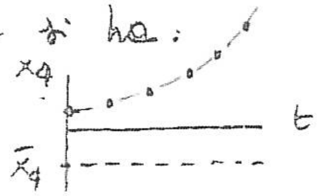
c) $x_4(t+1) = 1{,}1\, x_4(t) + \alpha x_1(t+1) + 2\alpha x_2(t+1) - \beta x_3(t+1)$ $\quad (*)$

$\Rightarrow x_4(t+1) = 1{,}1\, x_4(t) + 2{,}5\alpha\, x_1(t) - \beta x_2(t) + \alpha u(t)$

d) $(*) \rightarrow \bar{x}_4 = 1{,}1\, \bar{x}_4 + \alpha \bar{x}_1 + 2\alpha \bar{x}_2 - \beta \bar{x}_3 \rightarrow \bar{x}_4 = 4000(\beta - 3\alpha)$

NOTA: Per $n = 4$ il sistema è instabile ($\exists\, \lambda = 1{,}1$). In particolare, se x_1, x_2 e x_3 sono all'equilibrio, la cassa x_4 è instabile e si ha:

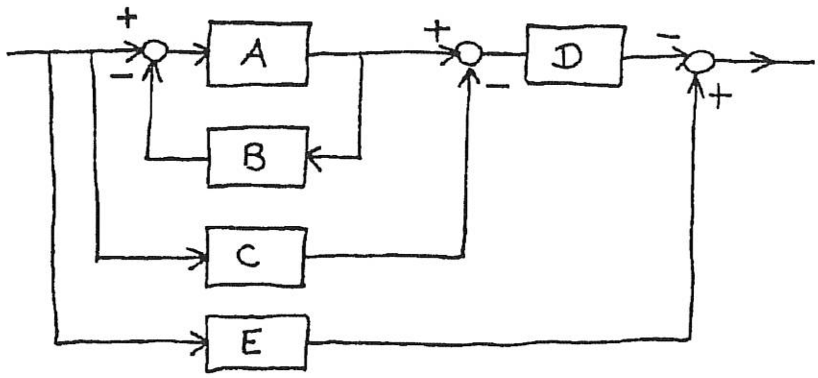
- $\beta < 3\alpha \rightarrow \bar{x}_4 < 0$



- $\beta > 3\alpha \rightarrow \bar{x}_4 > 0$

Pensioni troppo alte $\Rightarrow$ la cassa può fallire

Si consideri il sistema *a tempo continuo* rappresentato in figura.



I blocchi A e B sono descritti dalle funzioni di trasferimento $G_A(s)=\dfrac{10}{s-1}$, $G_B(s)=\dfrac{s}{s-2}$, il blocco C è descritto dal modello ingresso/uscita $\ddot{y}_C+\dot{y}_C+4y_C=-4\dot{u}_C+2u_C$, il blocco E è descritto dal modello di stato

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -2 & -1 & -2\\ 3 & 0 & -1 & 1\\ 4 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\qquad b=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

a) Proporre arbitrariamente un blocco D di ordine 2 tale che il sistema aggregato sia asintoticamente stabile.
b) Utilizzando il blocco D proposto, determinare il tempo di risposta del sistema aggregato, discutendo anche l'eventuale presenza di oscillazioni nelle risposte ad ingresso costante.
c) Utilizzando il blocco D proposto, discutere la stabilità del sistema aggregato nel caso il modello ingresso/uscita del blocco C venga sostituito dal seguente:

$$\dddot{y}_C+\ddot{y}_C+\dot{y}_C+4y_C=-4\dot{u}_C+2u_C$$

NOTA: $\{\text{poli}\}\equiv\{\lambda\}$ qui

a)

F = retroazione A—B

F, C, E, D sono aggregati con connessioni cascata/parallelo

$\Longrightarrow$ il sistema è asint. stabile $\Longleftrightarrow$ F, C, D ed E sono asintoticamente stabili

(F) $\quad G_F=\dfrac{G_A}{1+G_AG_B}=\dfrac{\frac{10}{s-1}}{1+\frac{10}{s-1}\,\frac{s}{s-2}}=\dfrac{10(s-2)}{s^2+7s+2}$

poli in $\dfrac{-7\pm\sqrt{49-8}}{2}=\begin{cases}\dfrac{-7+\sqrt{41}}{2} & \ominus\\[2mm] \dfrac{-7-\sqrt{41}}{2} & \ominus\end{cases}$ $\quad$ F Asint. stab.

Ⓒ $\Delta_C(s) = s^2 + s + 4$

poli in $\dfrac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+i\sqrt{15}}{2} & \mathbb{R}e\,(-) \\ \dfrac{-1-i\sqrt{15}}{2} & \mathbb{R}e\,(-) \end{cases}$ C Asint. stab.

Ⓔ $\{\lambda\}_E = \{-1, -2, -1, -2\}$ E Asint. stabile

partizionata a blocchi

Quindi il sistema è asint. stab. $\Leftrightarrow$ D è asint. stabile

Per esempio $G_D = \dfrac{1}{(s+1)^2}$ ha poli in -1 e -1 ed è asint. stabile.

b) $\{\lambda\}_{\Sigma} = \sigma(\Sigma) = \sigma(F) \cup \sigma(C) \cup \sigma(D) \cup \sigma(E)$

sistema aggregato

$$\sigma(F) = \Big\{ \underbrace{\frac{-7+\sqrt{41}}{2}, \frac{-7-\sqrt{41}}{2}}_{F}, \underbrace{\frac{-1+i\sqrt{15}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{15}}{2}}_{C}, \underbrace{-1, -1}_{D}, \underbrace{-1, -1, -2, -2}_{E} \Big\}$$

$\lambda_D = \dfrac{-7+\sqrt{41}}{2} \longrightarrow T_D = -\dfrac{1}{\mathbb{R}e(\lambda_D)}$ e $T_R = 5T_D \simeq 16,7$

Poiché $\exists\, \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \nexists$ oscillazioni

c) $\Delta_C(s) = s^3 + s^2 + s + 4$ $\quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = 4$

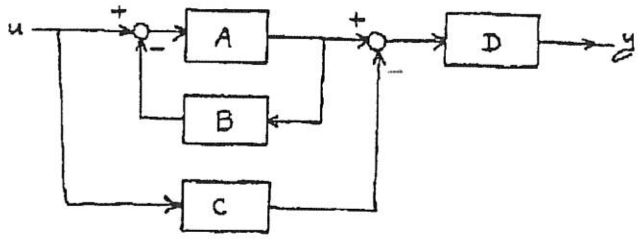
Hurwitz $H = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

$D_1 = 2 > 0$

$D_2 = -3 < 0 \rightarrow$ C non As. stab $\Rightarrow \Sigma$ non è As. stab

(Hurwitz $n=3$: As. stab. $\Leftrightarrow \alpha_i > 0\ \forall i$ e $\alpha_1\alpha_2 > \alpha_3$)

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura.



Il blocco A ha funzione di trasferimento $G_A(s) = \dfrac{1}{s-1}$, il blocco D è descritto dal modello I/O $\dot{y}_D + 2y_D = -\dot{u}_D$, il blocco C dal modello di stato seguente:

$$A_C = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad A_{11},\ A_{22} \qquad b_C = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad c_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) Proporre, per il blocco B, una qualunque funzione di trasferimento di ordine 1 che renda il sistema aggregato asintoticamente stabile (spiegando con cura perché l'aggregato risulta asintoticamente stabile).
c) Con il blocco B prima proposto, determinare TUTTE le costanti di tempo del sistema aggregato e quindi il suo tempo di risposta.

a) R = retroazione A − B

R, C e D sono connessi in cascata/parallelo.

Pertanto Σ è asint. stabile $\Leftrightarrow$ R, C e D sono asint. stab.

(C) $\det(\lambda I - A_{22}) = \det \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$

$\{\lambda\}_{A_c} = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}} = \{-1, -1+i, -1-i\} \Rightarrow$ C è asintot. stabile

(D) $\Delta_D(s) = s+2$ polo in $-2 \Rightarrow$ D è asint. stab.

$B(s) = \dfrac{\alpha}{\beta + s}$ con α e β / R sia asint. stab.

$$G_R(s) = \frac{G_A(s)}{1 + G_A(s)G_B(s)} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1 + \frac{1}{s-1}\,\frac{\alpha}{s+\beta}} = \frac{s+\beta}{s^2 + (\beta-1)s + (\alpha-\beta)}$$

$\Rightarrow$ deve essere $\beta - 1 > 0 \Rightarrow \beta > 1$

$\alpha - \beta > 0 \qquad\ \ \alpha > \beta$

Ad esempio $\begin{array}{l}\alpha = 9 \\ \beta = 5\end{array} \rightarrow G_R(s) = \dfrac{s+5}{s^2+4s+4} = \dfrac{s+5}{(s+2)^2}$

che ha poli in $-2, -2$.

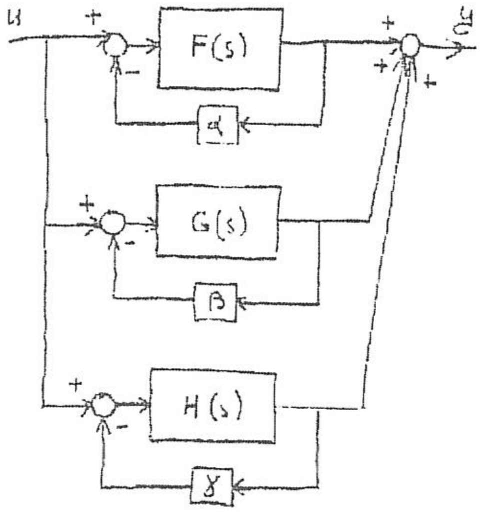
b) $\sigma(\Sigma) = \sigma(R) \cup \sigma(C) \cup \sigma(D)$

$$\sigma(\Sigma) = \{ \underbrace{-2, -2}_{R}, \underbrace{-1, -1+i, -1-i}_{C}, \underset{\downarrow}{-2} \}$$

$$T = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2} \right\}$$

$T_D = 1$ e $T_R = 5T_D = 5$

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui



$$F(s)=\frac{1}{s-1}$$
$$G(s)=\frac{1}{s^2+2s-2}$$
$$H(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+2s-1}$$

mentre α, β, γ sono coefficienti reali.

a) Determinare, motivando adeguatamente la risposta, per quali valori della terna (α, β, γ) il sistema in figura è asintoticamente stabile.

b) Determinare la funzione di trasferimento complessiva del sistema, esprimendola in funzione di F, G, H, α, β, γ.

a) R_F = retroazione $F-\alpha$

R_G = " $G-\beta$

R_H = " $H-\gamma$

R_F, R_G e R_H sono connessi in parallelo

Pertanto Σ è asint. stab. $\Leftrightarrow$ lo sono R_F, R_G e R_H

$$R_F=\frac{F}{1+\alpha F}=\frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{\alpha}{s-1}}=\frac{1}{s-1+\alpha} \qquad \text{as. stab} \Leftrightarrow \alpha>1$$

$$R_G=\frac{G}{1+\beta G}=\frac{1}{s^2+2s-2+\beta} \qquad \text{as. stab} \Leftrightarrow \beta>2$$

$$R_H=\frac{H}{1+\gamma H}=\frac{1}{s^3+2s^2+2s-1+\gamma} \qquad \text{as stab.} \underset{\text{HURWITZ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -1+\gamma>0 \\ 4>-1+\gamma \end{cases}$$

cioè $1<\gamma<5$

Pertanto Σ è as. stab $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha>1 \\ \beta>2 \\ 1<\gamma<5 \end{cases}$

b) $$R_{TOT}=R_F+R_G+R_H=\frac{F}{1+\alpha F}+\frac{G}{1+\beta G}+\frac{H}{1+\gamma H}.$$

Dato il sistema $\dot{x} = Ax$ con $A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ p & -2 \end{vmatrix}$ ($p \in \Re$), discutere, al variare di p

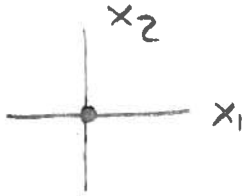
a) equilibrio (esistenza e unicità);
b) stabilità;
c) tempo per andare a regime;
d) esistenza di infinite oscillazioni.

Si determini inoltre il quadro delle traiettorie per i seguenti valori di p: -1; 0; 3.

---

a) $\det(A) = 2 - 2p = 2(1-p)$

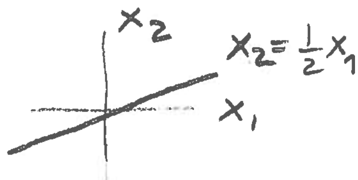
- $p \neq 1 \rightarrow \det(A) \neq 0 \rightarrow \exists!\ \bar{x} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$



- $p = 1 \rightarrow \det(A) = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \bar{x}_1 = 2\bar{x}_2$$

$\exists \infty\ \bar{x} = \begin{vmatrix} 2\bar{x}_2 \\ \bar{x}_2 \end{vmatrix}$ con $\bar{x}_2$ qualsiasi



b) $tr(A) = -3 < 0$

$\det(A) = 2(1-p) \rightarrow$ la stabilità dipende dal segno di $\det(A)$

- $p < 1 \rightarrow \det(A) > 0 \rightarrow$ Asint. stabilità
- $p > 1 \rightarrow \det(A) < 0 \rightarrow$ Instabilità
- $p = 1 \rightarrow \det(A) = 0$ $\quad \lambda_1 + \lambda_2 = tr(A) = -3$

$\lambda_1 \lambda_2 = \det(A) = 0$

da cui $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -3 \rightarrow$ Semplice stabilità

radice semplice di Δ_A e ψ_A

c) $p<1 \rightsquigarrow$ asintotica stabilità

$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2(1-p) = 0$

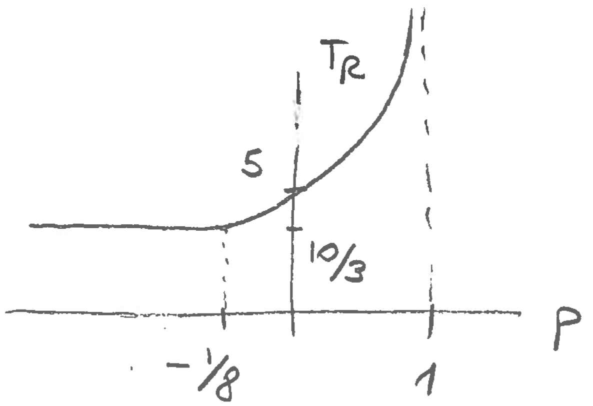
$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8(1-p)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1+8p}}{2}$$

- $\begin{cases} 1+8p<0 \\ p<1 \end{cases} \rightsquigarrow p<-\frac{1}{8} \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ e $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = -3/2$

$T_D = 2/3$ e $T_R = 5T_D = 10/3$

- $\begin{cases} 1+8p \geq 0 \\ p<1 \end{cases} \quad -\frac{1}{8} \leq p < 1 \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

$\lambda_D = \frac{-3+\sqrt{1+8p}}{2}$, $T_D = \frac{2}{3-\sqrt{1+8p}}$ e $T_R = \frac{10}{3-\sqrt{1+8p}}$



$\Downarrow$

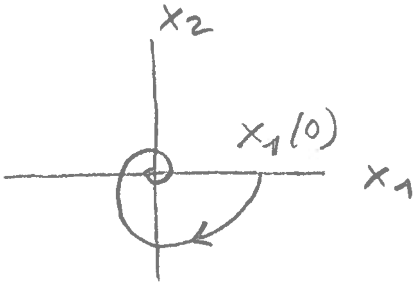
$T_R \xrightarrow[p \to 1]{} +\infty$

d) $\nexists$ oscillazioni $\rightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{C} \rightarrow p<-1/8$

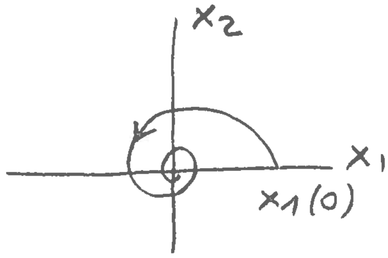
Quadro delle traiettorie

$\boxed{p=-1} \rightsquigarrow \left.\begin{matrix} \lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \\ + \\ \text{asintotica stabilità} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ Fuoco stabile

$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2$
$\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2$



oppure



?

$$x(0) = \begin{vmatrix} x_1(0) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{con} \quad x_1(0) > 0$$

$$\dot{x}(0) = \begin{vmatrix} -x_1(0) \\ -x_1(0) \end{vmatrix} \rightarrow \dot{x}_2(0) < 0 \Rightarrow$$ il quadro esatto è quello di sinistra.

$\boxed{p = 0}$ $\left.\begin{array}{c} \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \\ + \\ \text{asintotica} \\ \text{stabilità} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Nodo stabile $\quad \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{array}$

• $\lambda_1 = -1$ $\quad Aw = \lambda_1 w \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$

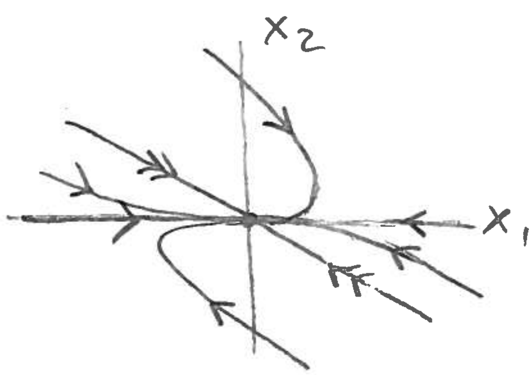
$\downarrow$

λ_D

$$\begin{cases} -w_1 + 2w_2 = -w_1 \\ -2w_2 = -w_2 \end{cases} \rightarrow w_2 = 0 \rightarrow w_D$$

• $\lambda_2 = -2$ $\quad Aw = \lambda_2 w \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} -w_1 + 2w_2 = -2w_1 \\ -2w_2 = -2w_2 \end{cases} \rightarrow w_1 = -2w_2$$



$\boxed{p=3}$ Instabile

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-3\pm 5}{2} = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \text{sella}$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2$$
$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

- $\lambda_1 = -4$

$$Aw = \lambda_1 w \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

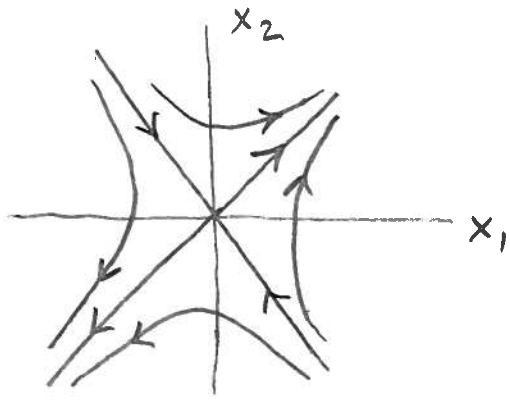
$$\begin{cases} -w_1 + 2w_2 = -4w_1 \\ 3w_1 - 2w_2 = -4w_2 \end{cases} \rightarrow \quad w_2 = -\tfrac{3}{2} w_1$$

- $\lambda_2 = 1$

$$Aw = \lambda_2 w$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

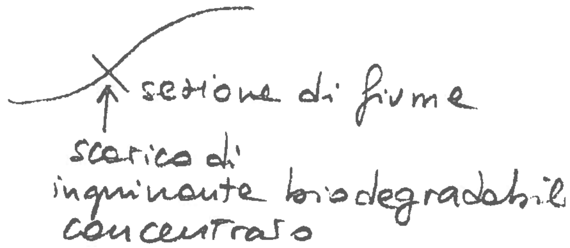
$$\begin{cases} -w_1 + 2w_2 = w_1 \\ 3w_1 - 2w_2 = w_2 \end{cases} \rightarrow \quad w_2 = w_1$$



Si determini, mediante il modello di qualità fluviale di Streeter & Phelps, l'andamento della concentrazione di ossigeno in una sezione di un fiume a seguito di uno scarico di inquinante biodegradabile concentrato in tale sezione.

Modello di Streeter & Phelps

$b(t)$ = concentrazione di inquinante biodegradabile



$c(t)$ = concentrazione di ossigeno disciolto nel fiume

- I batteri degradano l'inquinante proporzionalmente alla quantità di inquinante
- La degradazione comporta un consumo di ossigeno (deossigenazione) da parte dei batteri

<u>NOTA</u>

Supponendo deossigenazione ≡ degradazione
$\Rightarrow$ b viene misurata in unità di ossigeno necessarie per degradare l'inquinante

- Lo scambio di ossigeno aria-acqua genera un termine di riossigenazione proporzionale alla differenza tra la concentrazione max di ossigeno che può trovarsi disciolto nel fiume in assenza di inquinante (c_s = concentrazione di saturazione) e la concentrazione di ossigeno effettivamente disciolto nel fiume (c)

Sotto queste ipotesi si ha:

$\dot{b} = -k_1 b \rightarrow$ degradazione

$\dot{c} = -k_1 b + k_2 (c_s - c)$

deossigenazione $\equiv$ degradazione

$\rightarrow$ riossigenazione

k_1 = costante di degradazione/deossigenazione

k_2 = costante di riossigenazione

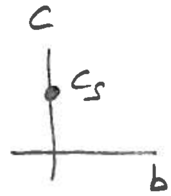
c_s = concentrazione di saturazione dell'ossigeno

<u>Stabilità</u>

$$A = \begin{vmatrix} -k_1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = -k_1 \\ \lambda_2 = -k_2 \end{matrix} \quad \Longrightarrow$$ Asintotica stabilità

<u>Equilibrio</u>

$$\begin{matrix} -k_1 \bar{b} = 0 \\ -k_1 \bar{b} + k_2 (c_s - \bar{c}) = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \bar{b} = 0 \\ \bar{c} = c_s \end{matrix}$$ $\Rightarrow$ fiume pulito



<u>Scarico</u> di inquinante concentrato in una sezione

$$\Rightarrow \begin{matrix} b = b_0 \neq 0 \\ c = c_0 \neq c_s \end{matrix}$$

Come evolvono le traiettorie, a partire da tale condizione iniziale?

<u>Autovettori:</u> $\quad Aw = \lambda w$

$$\begin{vmatrix} -k_1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

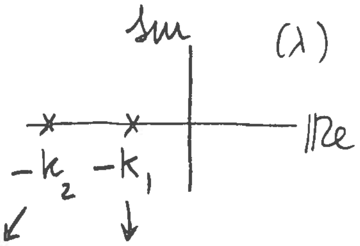
$$\begin{cases} -k_1 w_1 = \lambda w_1 \\ -k_1 w_1 - k_2 w_2 = \lambda w_2 \end{cases}$$

- $\lambda_1 = -k_1 \rightsquigarrow \quad -k_1 w_1 - k_2 w_2 = -k_1 w_2$

$$w_2 = \frac{k_1}{k_1 - k_2} w_1 \rightsquigarrow w^{(1)}$$

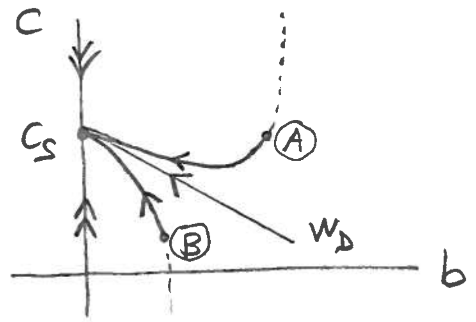
- $\lambda_2 = -k_2 \rightsquigarrow \quad -k_1 w_1 = -k_2 w_1 \longrightarrow w_1 = 0 \rightsquigarrow w^{(2)}$

$\boxed{k_1 < k_2}$



$$\frac{k_1}{k_1 - k_2} < 0$$

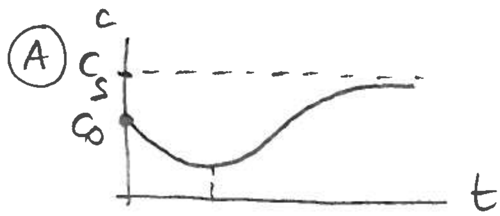
$\lambda_2 \qquad \lambda_1 = \lambda_D \quad e \quad w^{(1)} = w_D$

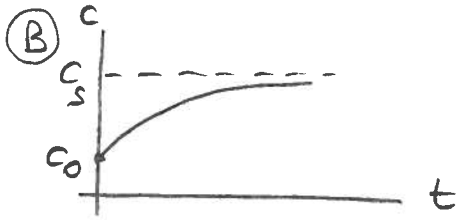


Sia in A che in B

b migliora

Per quanto riguarda c si ha



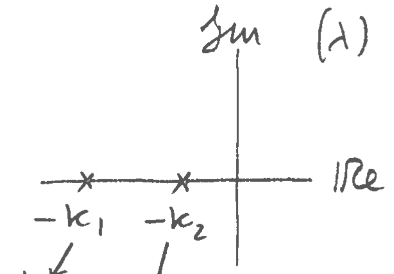


CURVA A SACCO
(possibile anossia)

c migliora

Inizialmente c peggiora
per poi migliorare

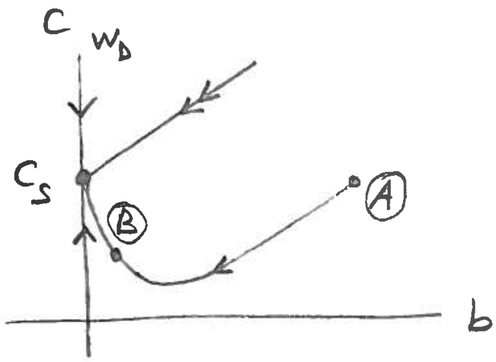
$\boxed{k_1 > k_2}$



$$\frac{k_1}{k_1 - k_2} > 0$$

λ_1

$\lambda_2 = \lambda_D$ e $w^{(2)} = W_D$

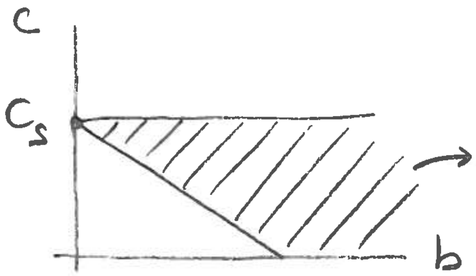


Come prima in A e B sia per b che per c

Sotto quali condizioni $\exists$ la <u>curva a sacco</u>?

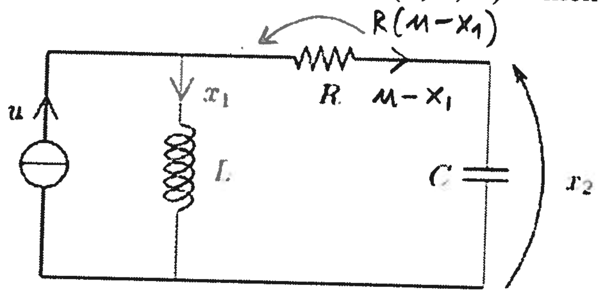
$$(b_0, c_0) \;/\; \dot{c}(0) < 0 \;\Rightarrow\; -k_1 b_0 + k_2 (c_s - c_0) < 0$$

$$c_0 > -\frac{k_1}{k_2} b_0 + c_s \qquad \text{(plausibilmente } c_0 < c_s\text{)}$$



$\rightarrow$ tutte le c.i. $\in$ //// $\Rightarrow$ curva a sacco

Si consideri il circuito elettrico (R, L, C) alimentato in corrente rappresentato in figura.



Qualora al circuito inizialmente a riposo venga applicata una corrente costante $\bar{u}$, si dimostri che la corrente x_1 nell'induttore può tendere verso il suo valore di equilibrio $\bar{u}$ con infinite oscillazioni smorzate oppure con una singola sovraelongazione.

Infine, si mostri che l'andamento caratterizzato da oscillazioni smorzate si verifica quando la resistenza R è minore del valore critico $R^* = 2\sqrt{L/C}$ e che l'andamento caratterizzato da una sovraelongazione, si verifica quando $R > R^*$.

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L}\left(x_2 + R(u - x_1)\right) = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 + \frac{R}{L}u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}(u - x_1) = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}u$$

$$A = \begin{vmatrix} -R/L & 1/L \\ -1/C & 0 \end{vmatrix}$$

Equilibrio $\quad \bar{x}_2 + R\bar{u} - R\bar{x}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{x}_2 = 0 \qquad \bar{x} = \begin{vmatrix} \bar{u} \\ 0 \end{vmatrix}$

$\bar{x}_1 = \bar{u}$

Stabilità

$$\mathrm{tr}(A) = -R/L < 0$$
$$\det(A) = \frac{1}{LC} > 0$$

$\rightarrow$ Asintotica stabilità $\forall R, L, C$

$$\Rightarrow \forall x(0) \quad x(t) \underset{t \to \infty}{\rightarrow} \bar{x}$$

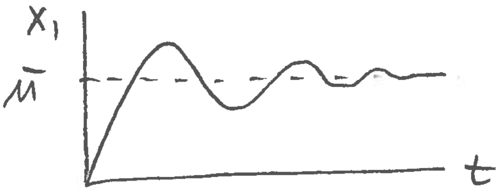
Traiettorie

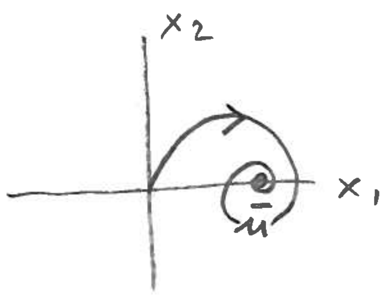
$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R/L \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2}$$

- $\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC} < 0 \rightarrow R^2 < \frac{4L}{C} \rightarrow R < 2\sqrt{L/C} = R^* \Rightarrow$

$\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \Rightarrow$ fuoco stabile con infinite oscillazioni





$$x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \dot{x}(0) = \begin{vmatrix} \frac{R}{L}\bar{u} \\ \frac{1}{C}\bar{u} \end{vmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ \oplus \end{matrix}$$

- $R > R^* = 2\sqrt{L/C} \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ per l'asintotica stabilità

Nodo stabile

$$Aw = \lambda w \qquad \begin{vmatrix} -R/L & 1/L \\ -1/C & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow -\frac{1}{C} w_1 = \lambda w_2 \rightarrow w_1 = -C\lambda w_2 \rightsquigarrow$ pendenza $= -\frac{1}{C\lambda}$

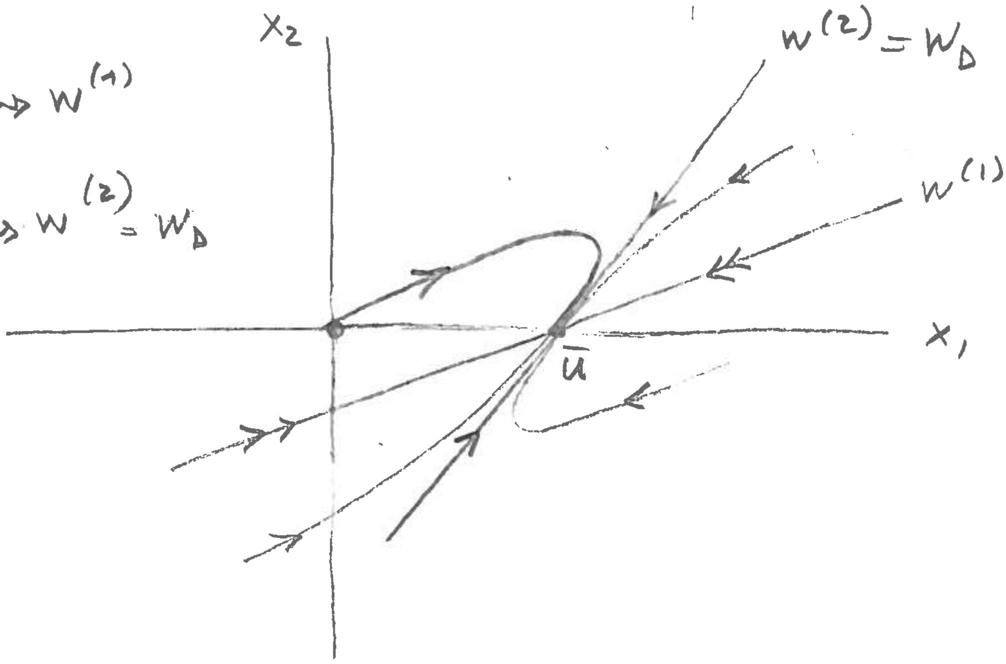
Poiché $\lambda < 0 \Rightarrow w_1$ e w_2 hanno lo stesso segno, cioè gli autovettori hanno pendenza positiva

$$\lambda_1 = \frac{-R/L - \sqrt{}}{2} \rightsquigarrow w^{(1)}$$

$$\lambda_2 = \frac{-R/L + \sqrt{}}{2} \rightsquigarrow w^{(2)} = W_D$$

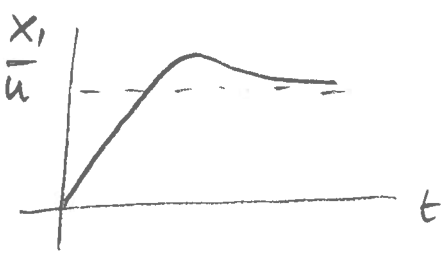
$$\Downarrow$$

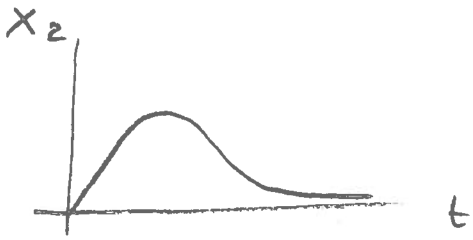
$$\lambda_D$$



$$\text{pendenza } w^{(1)} = \frac{2}{C\left(\frac{R}{L} + \sqrt{}\right)} < \frac{2}{C\left(\frac{R}{L} - \sqrt{}\right)} = \text{pendenza } w^{(2)} = W_D$$

Partendo da $x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ si ha





! sovraelongazione in $x_1(t)$

Dato il sistema $\dot{x} = Ax$ con $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ p & -2 \end{vmatrix}$ ($p \in \Re$), discutere, al variare di p

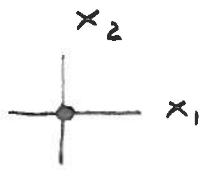
a) Equilibrio (esistenza e unicità).
b) Stabilità.
c) Tempo per andare a regime.
d) Quadro delle traiettorie.
e) Esistenza di infinite oscillazioni.

f) Condizioni su p affinché non esistano sovraelongazioni per x_1 e x_2 con condizione iniziale $x(0) = \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}$

---

a) $\det(A) = -p$

- $\det(A) \neq 0 \rightarrow p \neq 0 \rightarrow \exists! \, \bar{x} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

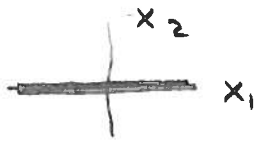


- $\det(A) = 0 \rightarrow p = 0$ si ha

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \bar{x}_2 &= 0 \\ -2\bar{x}_2 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \bar{x} = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

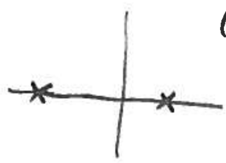
qualsiasi

$\Rightarrow \exists \infty$ equilibri



b) $tr(A) = -2 < 0 \quad \forall p$
$\det(A) = -p$

- $p < 0 \rightarrow \det(A) > 0 \rightarrow$ Asint. stab.
- $p > 0 \rightarrow \det(A) < 0 \rightarrow$ Instab
  $\hookrightarrow \lambda_1 \lambda_2 < 0 \Rightarrow$



(λ) cioè $\exists \lambda$ con $Re >$

- $p = 0 \rightarrow \det(A) = 0$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= -2 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= -2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \text{semplice stabilità}$$

c) T_R è definito solo per $p<0$ (asint. stabilità)

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) = \lambda^2 + 2\lambda - p = 0$$

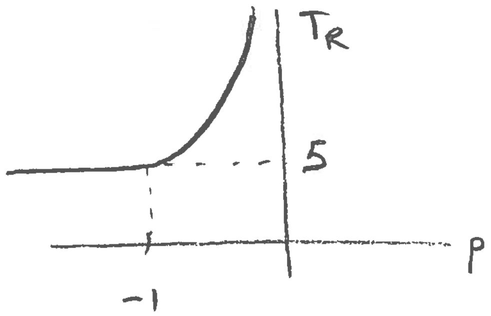
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+p}$$

- $p < -1 \rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$

  $\mathbb{R}e(\lambda_{1,2}) = -1 \quad T_D = 1 \quad T_R = 5$

- $-1 \le p < 0 \rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \qquad \lambda_D = -1 + \sqrt{1+p}$

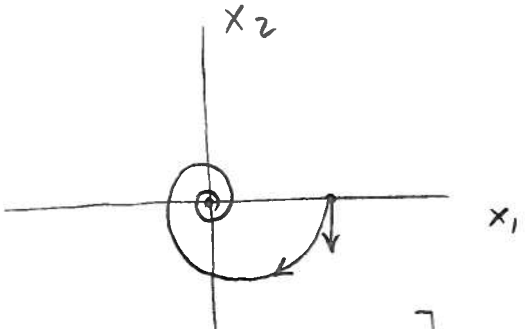
$$T_D = \frac{1}{1-\sqrt{1+p}} \quad e \quad T_R = \frac{5}{1-\sqrt{1+p}}$$



$\min_p T_R = 5$

d) $\boxed{p < -1}$ (As. stabile)

$\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{-1-p} \qquad \in \mathbb{C}$ e $\mathbb{R}e(\lambda_i) < 0 \Rightarrow$ Fuoco stabile in $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$



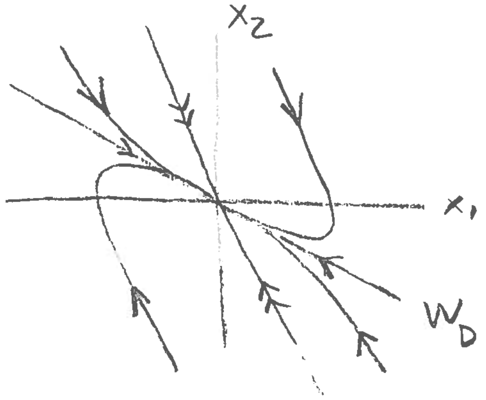
$$\left[\begin{array}{l} x(0) = \begin{vmatrix} x_1^0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \dot{x}(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ p\, x_1^0 \end{vmatrix} \\ \text{e se } x_1^0 > 0 \Rightarrow \dot{x}_2(0) < 0 \end{array} \right]$$

$\boxed{-1 < p < 0}$ (As. stabile)

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+p} \in \mathbb{R}e^- \Rightarrow \text{Nodo stabile in} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Autovettori w / $Aw = \lambda w$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ p & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} \rightarrow w_2 = \overset{\lambda_1 \text{ e } \lambda_2}{\lambda} w_1 \rightsquigarrow w_2 = \left(-1 \pm \sqrt{1+p}\right) w_1$$



I 2 autovettori hanno pendenze negative (meno negativa quello associato all'autovalore dominante $\lambda_D = -1 + \sqrt{1+p}$)

$\boxed{p > 0}$ (instabile)

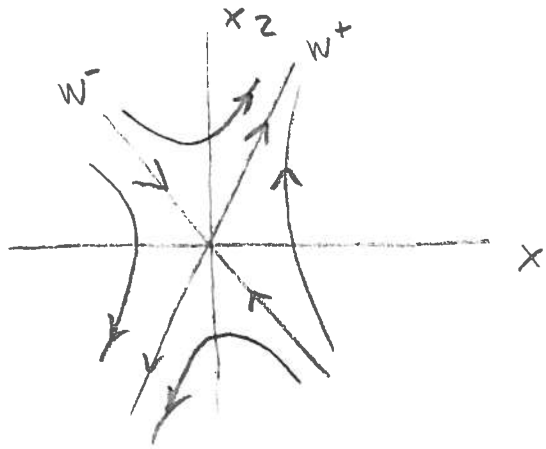
$$\lambda^+ = -1 + \sqrt{1+p} > 0 \qquad \lambda^- = -1 - \sqrt{1-p} < 0 \Rightarrow \text{Sella in} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$w_2 = \lambda w_1$

λ^+ e λ^-

$\lambda^+ \downarrow$ pendenza positiva

$\lambda^- \downarrow$ pendenza negativa



$\boxed{p = 0}$ (Semplice stabilità)

$$\exists\, \infty \text{ equilibri} \begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

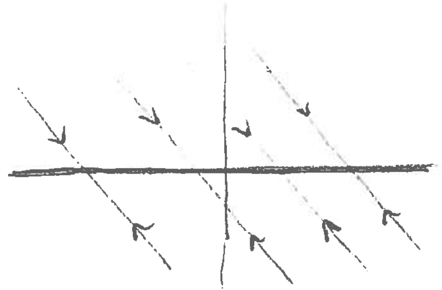
$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -2x_2$

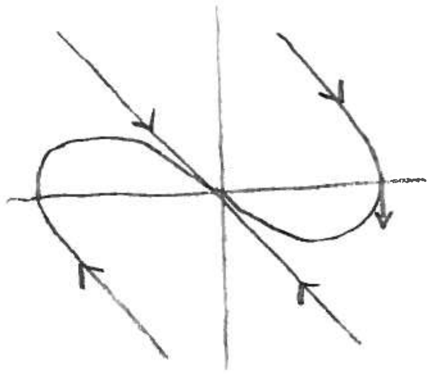
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -2$$

$$\int_{x_2(0)}^{x_2} dx_2 = \int_{x_1(0)}^{x_1} -2\,dx_1 \rightarrow x_2 = x_2(0) - 2(x_1 - x_1(0))$$

le traiettorie sono rette
con pendenza -2
percorse verso uno degli ∞ equilibri



$\boxed{p=-1}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \rightarrow$ 2 autovettori coincidenti in $w_2 = -w_1$



$$\left(x(0) = \begin{vmatrix} x_1^\circ \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow \dot{x}(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ -x_1^\circ \end{vmatrix} \quad x_1^\circ > 0 \Rightarrow \dot{x}_2(0) < 0 \right)$$

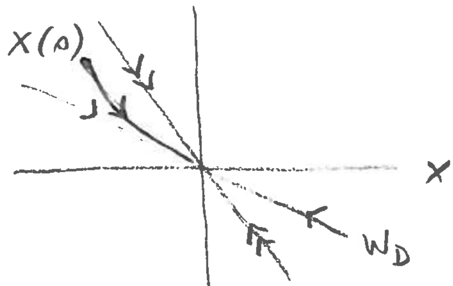
e) $\exists$ oscillazioni $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow p < -1$

f) Devo trovarmi nell'ipotesi

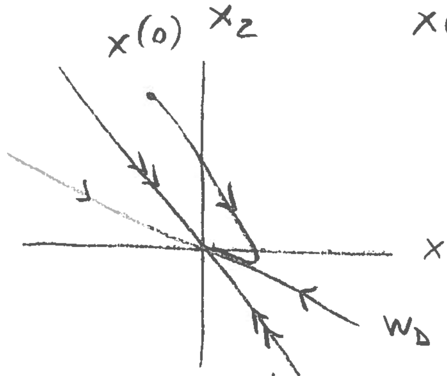
$$\left.\begin{array}{l} \text{asint. stabilità} \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow -1 \leq p < 0$$

e determinare p in tale intervallo in modo tale che si verifichi solo il caso di sinistra

$$x(0) = \begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

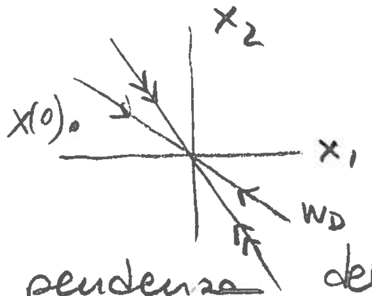


∄ sovraelongazioni



∃ sovraelongazione sia in x_1 che in x_2

NOTA: il caso



non è realizzabile

perché la pendenza dell'autovettore dominante w_D è $-1+\sqrt{1+p} \geq -1$ ⇝ mentre $\dfrac{x_2(0)}{x_1(0)} = -\frac{3}{2}$

Pertanto deve essere (caso di sinistra)

$$\begin{cases} -1-\sqrt{1+p} \leq -\frac{3}{2} \\ \quad \hookrightarrow \text{pendenza dell'autovettore non dominante} \\ -1 \leq p < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{1+p} \leq -\frac{1}{2} \\ -1 \leq p < 0 \end{cases} \qquad \sqrt{1+p} \geq \frac{1}{2} \qquad 1+p \geq \frac{1}{4} \qquad p \geq -\frac{3}{4}$$

da cui $\quad -\frac{3}{4} \leq p < 0.$

Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\dot{x} = 2(x - y)$$
$$\dot{y} = x^2 - 4x - y$$

a) Determinare gli stati di equilibrio.
b) Studiarne la stabilità mediante linearizzazione, classificando inoltre il tipo di equilibrio.
c) Tracciare il quadro locale delle traiettorie nell'intorno degli stati di equilibrio. Proporre infine un quadro globale delle traiettorie coerente con tutti gli elementi fin qui determinati.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\begin{cases} 2(x-y) = 0 \\ y = x^2 - 4x \end{cases} \Rightarrow \bar{x}' = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \bar{x}'' = \begin{vmatrix} 5 \\ 5 \end{vmatrix}$

b) $J = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2x-4 & -1 \end{vmatrix}$

$J(\bar{x}') = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda^2 - \lambda - 10 = 0$

$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{41}}{2} \cong 3.70, \; -2.70$ INSTABILE (sella)

$J(\bar{x}'') = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda^2 - \lambda + 10 = 0$

$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-40}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{39}}{2}$ INSTABILE (fuoco)

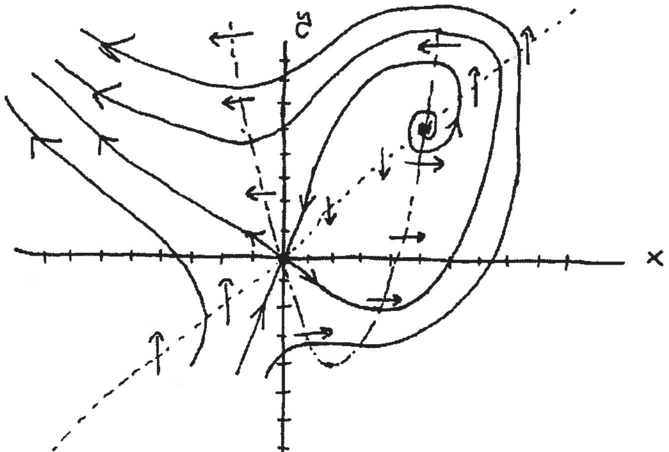
c) calcolo autovettori di $J(\bar{x}')$:

$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = 3.70 \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$ $\quad 2x_1 - 2x_2 = 3.70\, x_1$

$x_2 = -0.85\, x_1$ (varietà instabile)

$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = -2.70 \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$ $\quad 2x_1 - 2x_2 = -2.70\, x_1$

$x_2 = 2.35\, x_1$ (varietà stabile)



Dato il sistema

$$\dot{x} = 2x(1-x)+y = f_1(x,y)$$
$$\dot{y} = -y = f_2(x,y)$$

a) determinarne gli equilibri e studiarne la stabilità con il metodo della linearizzazione;
b) tracciare il quadro delle traiettorie in piccolo;
c) attraverso il metodo delle isocline tracciare il quadro delle traiettorie globali (in grande).

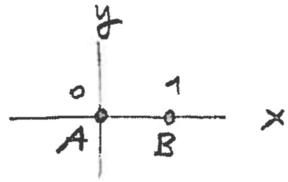
---

a) Equilibri

$$\dot{x}=0 \rightarrow 2x(1-x)+y=0$$
$$\dot{y}=0 \rightarrow -y=0$$

da cui $\bar{y}=0$ e $2\bar{x}(1-\bar{x})=0 \begin{cases} \bar{x}=0 \\ \bar{x}=1 \end{cases}$

$\Rightarrow A(0,0)$ e $B(1,0)$



stabilità

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-4x & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$J_A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix} \Rightarrow \text{INST (sella)}$$

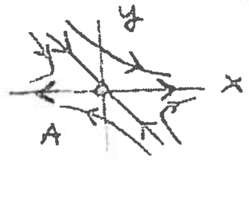
$$J_B = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix} \Rightarrow \text{AS. STAB (nodo stabile)}$$

b) Autovettori in A

$$J_A w = \lambda w \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

$\lambda_1 = 2 \rightarrow w_2 = 0$

$\lambda_1 = -1 \rightarrow w_2 = -3w_1$

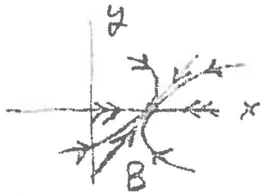


Autovettori in B

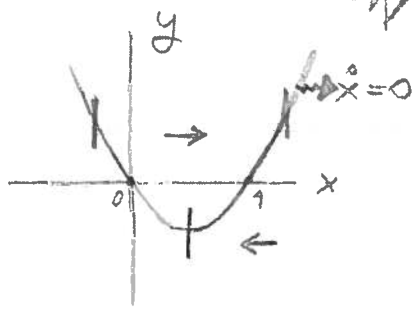
$$J_B\, w = \lambda w \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

$\lambda_1 = -2 \rightarrow w_2 = 0$

$\lambda_2 = -1 \rightarrow w_1 = w_2 \rightarrow w^{(2)}$



c) $\dot{x} \geq 0 \rightarrow y \geq 2x^2 - 2x$

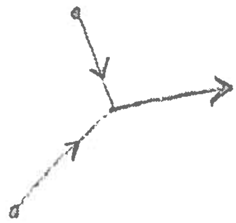


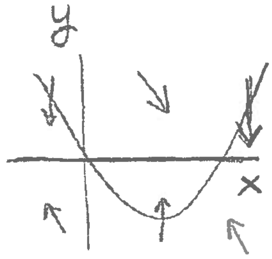
[**NOTA**: pendenza della parabola in $x=0$

$y' = 4x - 2\big|_{x=0} = -2$

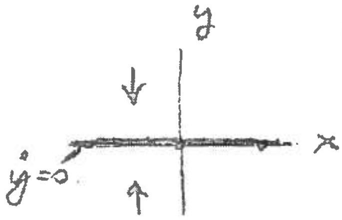
pendenza in $x = 1$

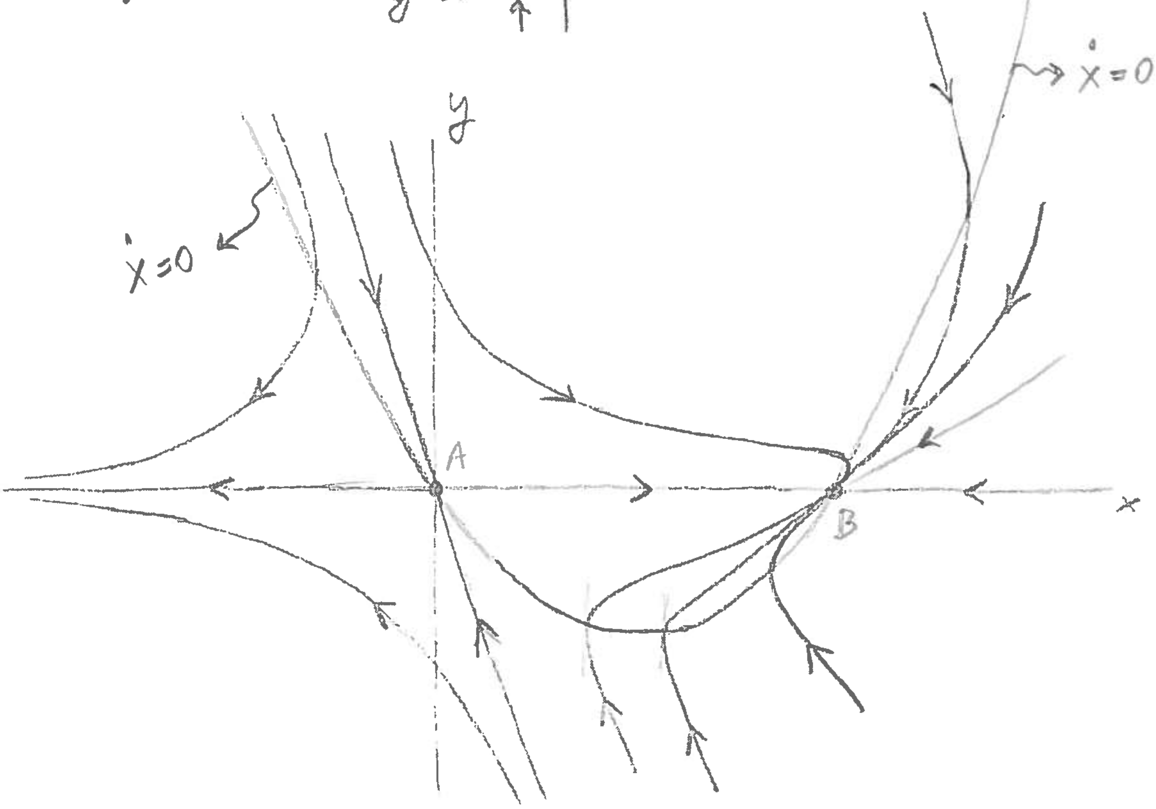
$y' = 4x - 2\big|_{x=1} = 2$]





$\dot{y} \geq 0 \rightarrow y \leq 0$





Studiare il modello di competizione tra specie animali

$$\dot{x}_1 = r_1 x_1\left(1-\frac{x_1}{k_1}\right) - a x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = r_2 x_2\left(1-\frac{x_2}{k_2}\right) - a x_1 x_2$$

x_i = biomassa della i-esima specie ($i = 1, 2$)
r_i = tasso intrinseco di crescita della i-esima specie ($i = 1, 2$)
k_i = capacità portante della i-esima specie ($i = 1, 2$)
a = coefficiente di competizione interspecifica.

per i seguenti valori dei parametri: $r_1 = 1 \quad r_2 = 1 \quad k_1 = 1 \quad k_2 = 1 \quad a = 2$

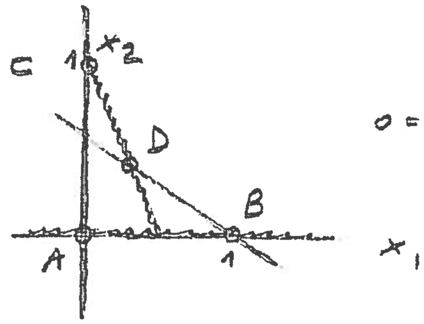
$$\dot{x}_1 = x_1(1-x_1) - 2x_1x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_2(1-x_2) - 2x_1x_2$$

$$J = \begin{vmatrix} 1-2x_1-2x_2 & -2x_1 \\ -2x_2 & 1-2x_2-2x_1 \end{vmatrix}$$

Equilibri → $\cap$ isocline

$$\dot{x}_1 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 \end{cases}$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 = 1 - 2x_1 \end{cases}$$



o = equilibri

$A(0,0) \qquad B(1,0) \qquad C(0,1) \qquad D(1/3, 1/3)$

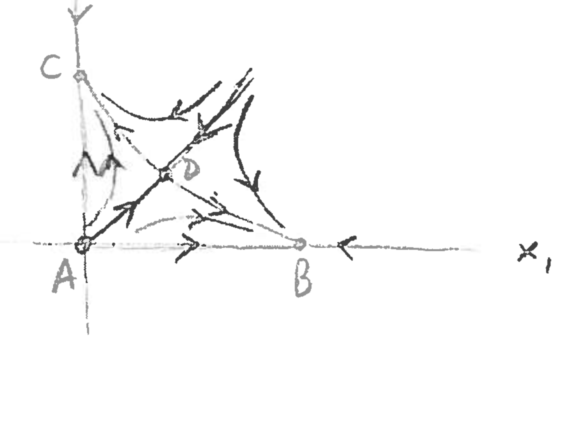
Stabilità

$$J_A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$ Nodo instabile

$$J_B = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$ Nodo stabile

$$J_C = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$ Nodo stabile

$$J_D = \begin{vmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -1/3 \end{vmatrix}$$ tr < 0, det = $-1/3$ → Sella



- sugli assi la dinamica è logistica
- a regime uno dei due competitori scompare (mutua esclusione)
- ruolo dello stato iniziale sull'esito della competizione

Dato il sistema

$$\dot{x} = -y - 2x + x^3$$
$$\dot{y} = y - px$$

determinarne gli equilibri e studiarne la stabilità al variare di p con il metodo della linearizzazione.

Equilibri:

$\dot{x} = 0 \rightarrow -y - 2x + x^3 = 0 \rightarrow -px - 2x + x^3 = 0$

$\dot{y} = 0 \rightarrow y = px$

$$x(-p-2+x^2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2+p} \in \mathbb{R} \iff p \geq -2 \end{cases}$$

- $p \leq -2$ $\quad A(0,0)$
- $p > -2$ $\quad A(0,0) \quad B(\sqrt{2+p},\ p\sqrt{2+p}) \quad C(-\sqrt{2+p},\ -p\sqrt{2+p})$

Stabilità

$$J = \begin{vmatrix} -2+3x^2 & -1 \\ -p & 1 \end{vmatrix}$$

$$J_A = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -p & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} tr = -1 < 0 \\ det = -(2+p) \end{array} \begin{cases} p > -2 & det < 0 & \text{sella (instab.)} \\ p < -2 & det > 0 & \text{stabile} \\ p = -2 & det = 0 & \exists \lambda = 0 \ ? \end{cases}$$

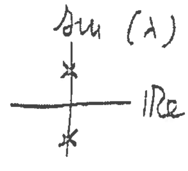
$$J_{B,C} = \begin{vmatrix} 4+3p & -1 \\ -p & 1 \end{vmatrix}$$

$tr = 5+3p$

$det = 2(2+p) > 0$ essendo $p > -2$ in B e C

$-2 < p < -5/3 \rightarrow tr < 0 \rightarrow$ stabile

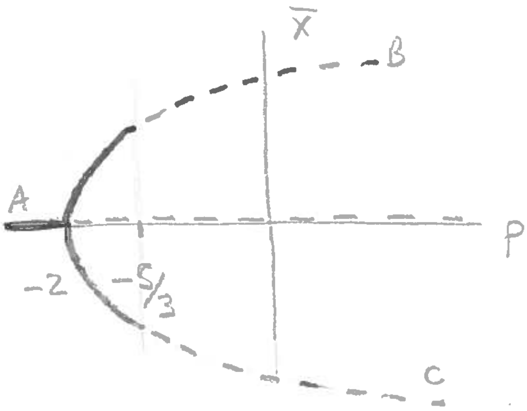
$p > -5/3 \rightarrow tr > 0 \rightarrow$ instabile

$p = -5/3 \rightarrow tr = 0$ e $det > 0 \Rightarrow$ 

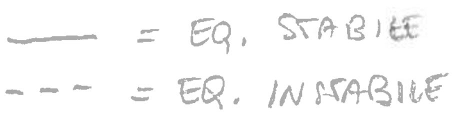
$\mathrm{Re}(\lambda) = 0$?

Complessivamente si ha:

	A	B	C
$p < -2$	Asint. stabile	/	/
$-2 < p < -5/3$	Instab.	Asint. stab.	Asint. stab.
$p > -5/3$	Instab	Instab	Instab



Graficamente

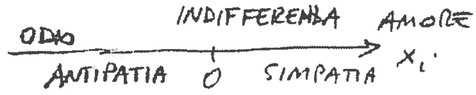


$p = -2$ e $p = -5/3$ sono punti di biforcazione

Coppie di individui sicuri e non sinergici: coppie robuste, coppie fragili, [redacted] rotture di coppia e uso di social networks.

x_i = sentimento partner i per partner j

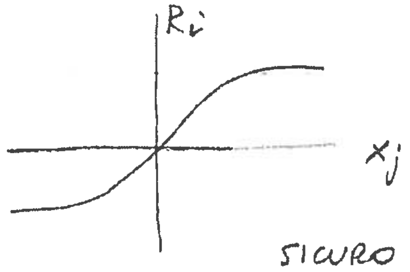
$i, j = 1, 2$ con $i \neq j$



$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + R_1(x_2) + A_2$$

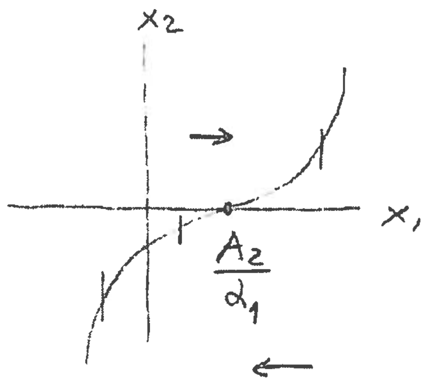
OBLIO RICAMBIO FASCINO

$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + R_2(x_1) + A_1$$

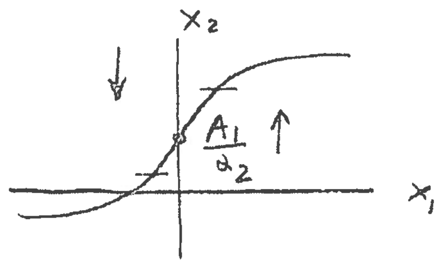


<u>Isocline</u>

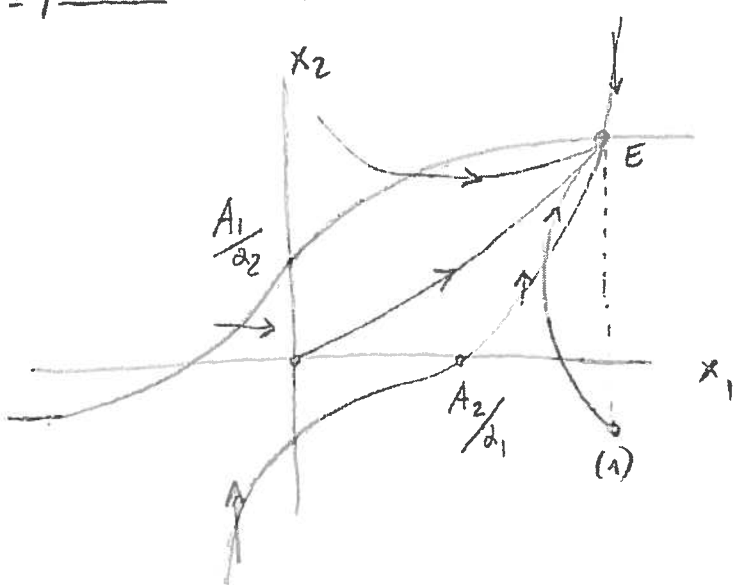
$\dot{x}_1 = 0 \qquad x_1 = \frac{1}{\alpha_1}\left[R_1(x_2) + A_2\right]$



$\dot{x}_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{1}{\alpha_2}\left[R_2(x_1) + A_1\right]$



<u>Equilibri</u> = $\cap$ isocline



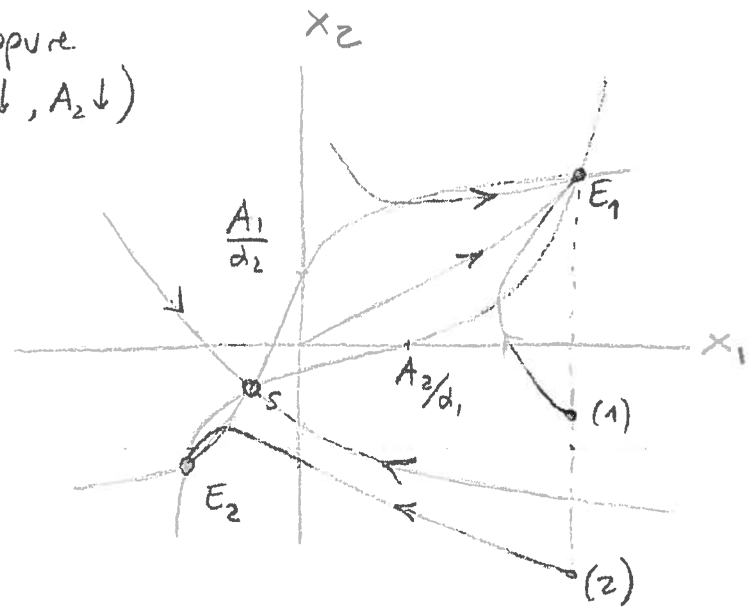
<u>COPPIE ROBUSTE</u>

$\exists!$ equilibrio

$\forall$ perturbazione(*) sullo stato, la coppia tende verso E

(*) p.e. calo di interesse del partner 2: $E \to (1)$

oppure $(A_1\downarrow, A_2\downarrow)$



COPPIE FRAGILI

$\exists$ 2 equilibri localmente asintotic. stabili: E_1, E_2

S = sella

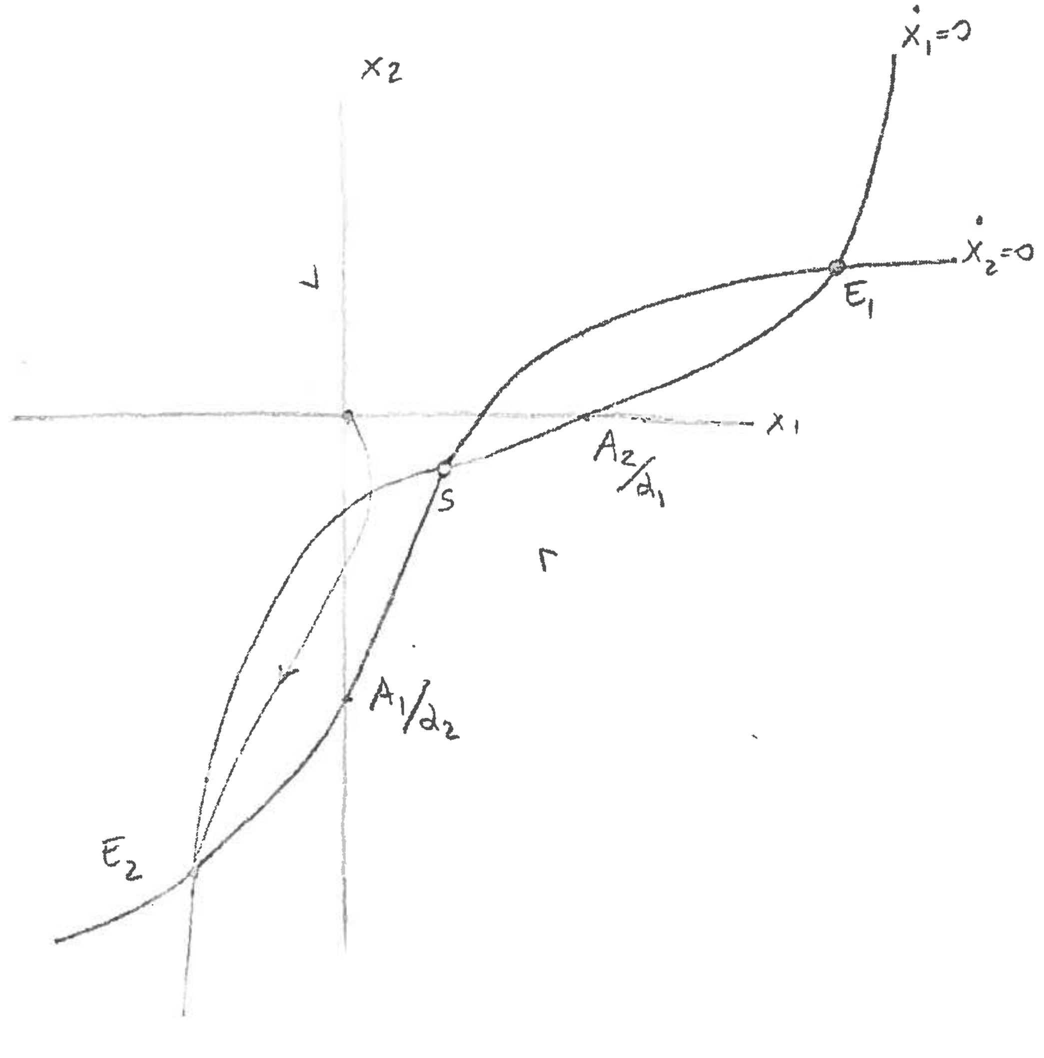
A seconda delle c. i. tendo verso E_1 o E_2

$\Downarrow$

se 2 ha un calo di interesse contenuto (1) si tende verso E_1
se è elevato (2), la coppia tende verso una situazione di antagonismo E_2
con conseguente **ROTTURA DI COPPIA**

NOTA: $(0,0)$ = indifferenza = incontro
Qui $(0,0) \in \mathcal{B}(E_1) \Rightarrow$ partendo da $(0,0)$ la coppia $\to E_1$
↳ bacino di attrazione

USO DI SOCIAL NETWORKS



A_1 non è affascinante
$A_1 < 0$

$(0,0) \in \mathcal{B}(E_2)$

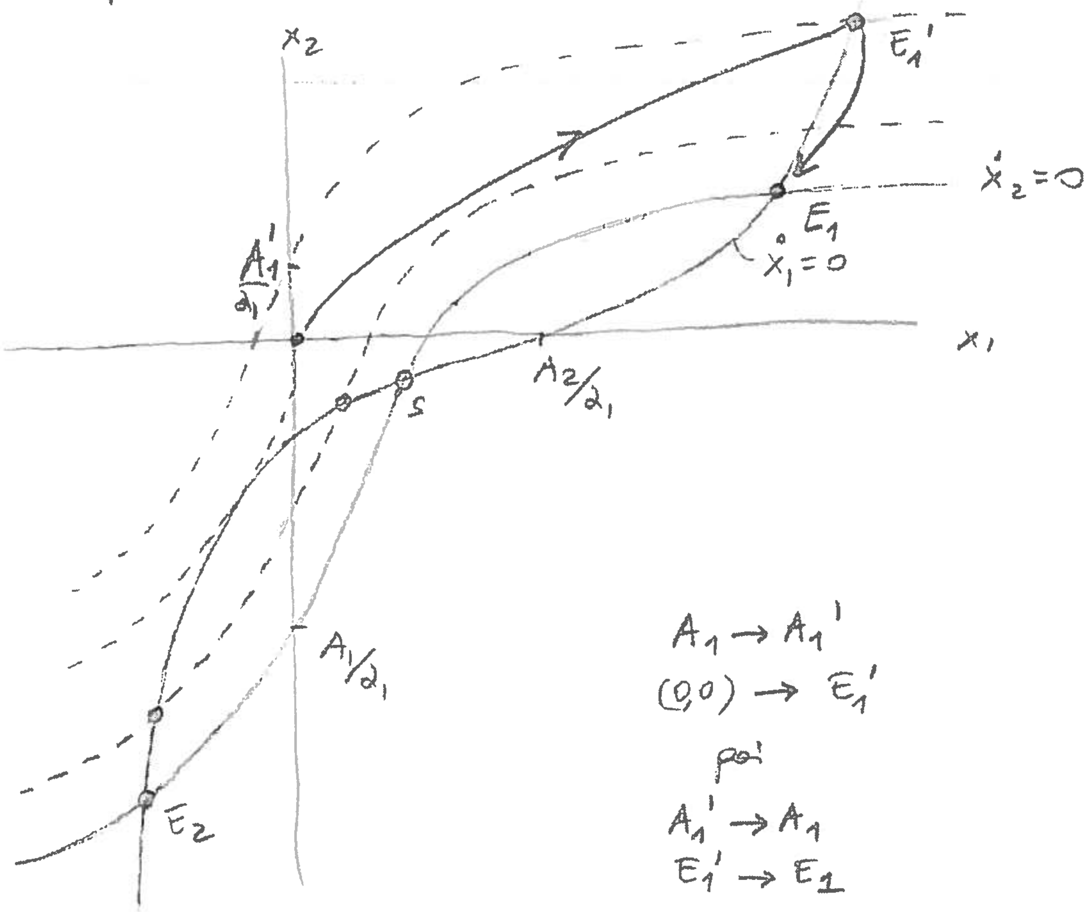
la coppia $\to E_2$
(antagonismo)

Cosa può fare il partner 1

Può "nascondersi" (dietro uso di social networks) per sembrare più bello di quello che è : $A_1 \uparrow$ finché E_2 ed S collidono e scompaiono.

Così facendo $\exists !$ equilibrio : $(0,0) \to E_1$

Ora 1 può mostrarsi ma oramai è in un equilibrio positivo



$A_1 \to A_1'$

$(0,0) \to E_1'$

poi

$A_1' \to A_1$

$E_1' \to E_1$

Dato il sistema $\dot{x} = Ax + bu$ $\quad A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = b$

a) Studiare la stabilità

b) Studiarne la raggiungibilità

c) è possibile con una legge di controllo $u = kx + v$ stabilizzare il sistema?

d) è possibile avere una durata dei transitori inferiore o uguale a 10 unità di tempo? In caso affermativo, determinare una possibile legge di controllo k.

---

a) $tr(A) = 0 \quad det(A) = -1-2 = -3 \Rightarrow \lambda^2 - 3 = 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{3}$ INST.

b) $R = |b \ \ Ab| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad det\, R \neq 0 \Rightarrow CR$

c) sì perché il sistema è CR

$(A,b)\, CR \Leftrightarrow \forall\, \Delta^* \ \exists\, k \,/\, \Delta_{A+bk} = \Delta^* \rightsquigarrow$ asintoticamente stabile in particolare

d) sì perché il sistema è CR

$T = 10 \Rightarrow T_d = 2 \Rightarrow Re(\lambda_d) = -\frac{1}{2}$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{4}$

$$A + bk = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+k_1 & 1+k_2 \\ 2+k_1 & -1+k_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = -1 \\ (1+k_1)(-1+k_2) - (2+k_1)(1+k_2) = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 + k_2 = -1 \\ +2k_1 + k_2 = -\frac{13}{4} \end{cases}$$

$k_1 = -\frac{9}{4} \rightsquigarrow$ (seconda eq. − prima eq.)

$k_2 = 5/4$

Dato il sistema $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = b$$

1) Studiare la stabilità del sistema
2) Dire se è possibile stabilizzare il sistema con una retroazione lineare dello stato
3) Determinare k che annulli i transitori in tempo finito

---

a) $|tr(A)| = |2+3| = 5 > n = 2 \Rightarrow$ INST.

b) $R = |b \ Ab| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\det R \neq 0 \Rightarrow$ ST

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \qquad \Delta_{A+bk} = \lambda^2$

$$A+bk = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} |k_1 \ \ k_2| = \begin{vmatrix} 2+k_1 & -1+k_2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$tr(A+bk) = 5 + k_1 = 0$

$\det(A+bk) = 6 + 3k_1 - 1 + k_2 = 0$

$k = |-5 \quad 10|$

2016 5/12

Dato il sistema a tempo continuo $\Sigma(A, -, c, -)$ dire se è possibile ricostruire asintoticamente il suo stato a partire dalle rilevazioni di u e y. In caso affermativo, si determini un possibile ricostruttore asintotico.

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad c = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Theta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \det\Theta \neq 0 \Rightarrow C.O. \Longrightarrow \text{sì!}$$

$\ell \,/\, A+\ell c$ ha autovalori con $\mathrm{Re}<0$, p.e. $\lambda_{1,2} = -1 \Rightarrow \Delta_{A+\ell c} = (\lambda+1)^2$

$$A + \ell c = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1+\ell_1 & 2+\ell_1 \\ \ell_2 & 1+\ell_2 \end{vmatrix}$$

$\mathrm{tr}(A+\ell c) = \ell_1 + \ell_2$

$\det(A+\ell c) = -1-\ell_2+\ell_1+\cancel{\ell_1\ell_2}-2\ell_2-\cancel{\ell_1\ell_2} = \ell_1 - 3\ell_2 - 1$

$$\Delta_{A+\ell c} = (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \longrightarrow \begin{aligned} \mathrm{tr}(A+\ell c) &= -2 \\ \det(A+\ell c) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell_1 + \ell_2 &= -2 \\ \ell_1 - 3\ell_2 &= 2 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} \ell_2 &= -1 \\ \ell_1 &= -1 \end{aligned} \Longrightarrow \ell = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Dato il sistema $\begin{aligned} x(t+1) &= A\,x(t) \\ y(t) &= c\,x(t) \end{aligned}$, dire se è possibile progettare un ricostruttore asintotico dello stato che esaurisca i transitori in tempo finito. In caso affermativo determinarlo. $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\vartheta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \det \vartheta \neq 0 \Rightarrow \text{os}$$

$$\Delta_{A+lc} = \lambda^2$$

$$A + lc = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1+l_1 \\ -1 & 1+l_2 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A+lc) = 3 + l_2 = 0 \longrightarrow l_2 = -3$$

$$\det(A+lc) = 2 + 2l_2 + 1 + l_1 = 0 \longrightarrow l_1 = 3$$

$$l = \begin{vmatrix} 3 \\ -3 \end{vmatrix}$$

Dato il sistema $\dot{x} = Ax + bu$ $\quad A = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = b$

$y = cx$

$c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}$

Studiarne la stabilità

Dire se esiste un regolatore stabilizzante. In caso affermativo determinare quello che esaurisce i transitori in 5 unità di tempo.

$$tr(A) = -3 < 0$$
$$det(A) = -10 < 0 \Rightarrow \text{INSTAB.}$$

$R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\det R \neq 0 \Rightarrow$ CR. ($\Rightarrow \exists$ legge di controllo stabilizzante)

$\theta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ $\det \theta \neq 0 \Rightarrow$ CO ($\Rightarrow \exists$ ricostruttore asintotico dello stato)

$5T_d = \quad T = 5 \Rightarrow T_d = 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{Re(\lambda_d)} = 1 \Rightarrow Re(\lambda_d) = -1$

Scelgo k, l / $\Delta_{Reg} = \Delta_{A+bk} \cdot \Delta_{A+lc} = (\lambda+1)^2(\lambda+1)^2 = (\lambda+1)^4$

$A+bk = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3+k_1 & 1+k_2 \end{vmatrix}$

$tr = -3 + k_2 = -2$

$det = -4 - 4k_2 + 6 + 2k_1 = 1$

$k = \begin{vmatrix} \frac{15}{2} & 1 \end{vmatrix}$

$A+lc = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2+l_1 \\ -3 & 1+l_2 \end{vmatrix}$

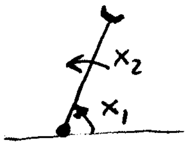
$tr = -3 + l_2 = -2$

$det = -4 - 4l_2 - 6 + 3l_1 = 1$

$l = \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix}$

ES10

Regolazione della posizione dell'antenna

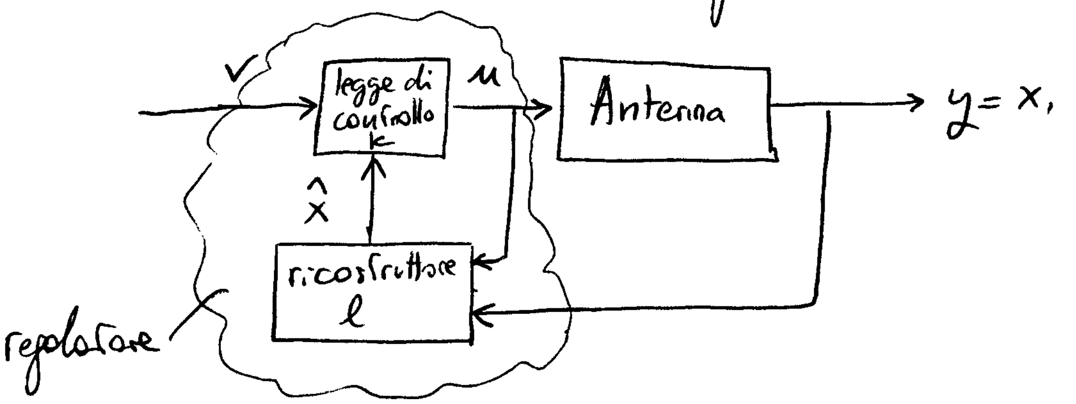


∃ attrito viscoso $\qquad$ x_1 = posizione angolare

J = momento di inerzia $\qquad$ x_2 = velocità angolare

$$y = x_1$$

Misurando solo y voglio progettare un regolatore (legge di controllo k + ricostruttore ℓ), che porti l'antenna in una posizione desiderata $\bar{v}$ e velocità nulla (antenna ferma) in 5 unità di tempo.



Antenna: $\quad \dot{x}_1 = x_2 \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{vmatrix} = b$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{J}\left(u - h x_2\right)$$

$$y = x_1 \qquad c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\theta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \det\theta \neq 0 \Rightarrow CO \Rightarrow$$

a partire dalle misure di u e y posso ricostruire x con dinamica arbitraria

$$R = |b \;\; Ab| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{J} & -\frac{h}{J^2} \end{vmatrix} \quad \det R \neq 0 \Rightarrow CR \Rightarrow$$

posso progettare una legge di controllo con dinamica arbitraria

OSSERVAZIONE

legge di controllo $\quad u = k\hat{x} + v$

$$\mathring{x} = Ax + bu = Ax + bk\hat{x} + bv$$

A regime $\hat{x} = x$ (posso progettare l / $A + lc$ è asintoticam. stabile $\Rightarrow \hat{x} \to x$) e quindi, a regime,

$$\mathring{x} = Ax + bkx + bv = (A + bk)x + bv$$

Potendo progettare k / $A+bk$ sia asint. stab, all'equilibrio sarà $\mathring{x} = 0$ cioè
Noto k, dovrà essere $(A+bk)\begin{vmatrix} \bar{V} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{vmatrix} V = 0$ da cui ricaverò v!

Determiniamo, per esempio nel caso $J = 1$ $h = 1$, un regolatore che esaurisce i transitori in 5 unità di tempo

$$\Delta_{reg} = \Delta_{A+bk} \cdot \Delta_{A+lc} =$$
$$= (\lambda+1)^2 (\lambda+1)^2$$

$$\left(\begin{array}{c} 5T_d = 5 \\ T_d = 1 \\ -\mathrm{Re}(\lambda_d) = -1 \end{array} \right)$$

$$A + bk = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & -1+k_2 \end{vmatrix}$$

$$tr = -1 + k_2 = -2 \qquad k = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}^T$$
$$det = -k_1 = 1$$

$$A + lc = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & 1 \\ l_2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$tr = l_1 - 1 = -2 \qquad l = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$
$$det = -l_1 - l_2 = 1$$

$$(A+bk)\begin{vmatrix} \bar{V} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} v = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{V} \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} v = 0 \Rightarrow -\bar{v} + v = 0$$
$$v = \bar{v}$$

posizione desiderata

$$u = k\hat{x} + v = (\bar{v} - \hat{x}_1) + (0 - \hat{x}_2) \;!$$

Retroazione STATICA dall'uscita

$u = ky$: misuro solo $y = x_1$, ma non ricostruisco x_2.

$\;\;\downarrow$ scalare

Cosa riesco a fare?

$$\dot{x} = Ax + bu = Ax + b(ky) = Ax + bkcx$$

$$= \underbrace{(A + bkc)}x$$

è la matrice di stato del sistema controllato.

Nell'esempio:

$$A + bkc = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1/J \end{vmatrix} k \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ k/J & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k/J & -h/J \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A + bkc) = -\frac{h}{J} < 0$$

$$\det(A + bkc) = -\frac{k}{J}, \quad > 0 \text{ purché } k < 0$$

E' possibile (IN QUESTO ESEMPIO) rendere il sistema controllato asintoticamente stabile; ma NON E' possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori. Infatti:

$$\Delta_{A+bkc}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{h}{J}\lambda - \frac{k}{J} = 0 \implies \lambda = \frac{-\frac{h}{J} \pm \sqrt{\frac{h^2}{J^2} + 4\frac{k}{J}}}{2}$$

Dato il sistema a tempo continuo

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

studiarne la stabilità asintotica e la stabilità esterna.

Stabilità asintotica: A è triangolare a blocchi:

$$A = \left|\begin{array}{c:cc} -2 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right| \qquad \underbrace{}_{A_2}$$

$$\sigma(A) = \{-2\} \cup \sigma(A_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{tr}\, A_2 = -2 < 0 \\ \det A_2 = 2 > 0 \end{array}\right\} A_2 \text{ asint. stab.}$$

$$\Longrightarrow A \text{ asintot. stabile}$$

Ricavo la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} sX_1 &= -2X_1 + X_3 \\ sX_2 &= -X_2 + X_3 \\ sX_3 &= -X_2 - X_3 + u \\ y &= X_1 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad G(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

$\{\text{poli}\} = \{-2, -1 \pm i\}$

$\mathrm{Re}(p_i) < 0 \ \forall i$

$\Downarrow$

sistema esternamente stabile

$\text{grado}[\text{den}[G(s)]] = 3 = n$

$\Updownarrow$

Σ compl. raggiung. & compl. osservabile

$\Updownarrow$

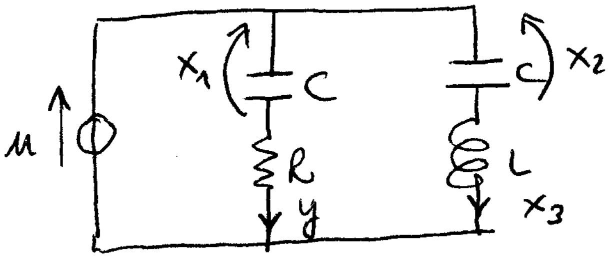
$\{\text{poli}\} = \{\text{autovalori}\} = \sigma(A)$

$\Updownarrow$

Σ ASINT. STAB. $\Longleftrightarrow$ Σ ESTERN. STAB.

Si dimostri che la rete elettrica in figura non è asintoticamente stabile ma è esternamente stabile

$\Updownarrow$



y forz limitata per u limitata

$\Updownarrow$

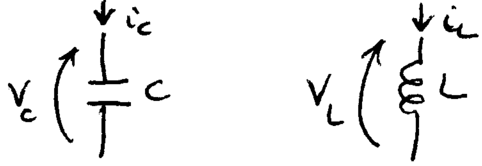
$\mathrm{Re}(\text{poli}) < 0$

$\Downarrow$

$A.S \rightarrow E.S. \quad (\{\lambda\} \supseteq \{\text{poli}\})$

$\nleftarrow$

$i_c = C \dot{V}_c \qquad V_L = L \dot{i}_L$



$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}\left[u - \frac{x_1}{R}\right]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left[x_3\right]$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L}\left[u - x_2\right]$$

$$y = \frac{u - x_1}{R}$$

$\mathrm{Re} < 0$

$$A = \left|\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{RC} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{array}\right|$$

$\hookrightarrow tr = 0$

$det = \frac{1}{LC}$

$\lambda = \pm \frac{i}{\sqrt{LC}}$

$\Longrightarrow$ A è semplicemente stabile

Calcolo f.d.t

$Ry = u - x_1 \longrightarrow Ry = u - \frac{u}{sRC+1}$

$sRCx_1 = u - x_1 \rightarrow x_1 = \frac{u}{sRC+1}$

$R(sRC+1)y = sRCu \Rightarrow G(s) = \frac{s\cancel{R}C}{\cancel{R}(sRC+1)}$

polo in $-\frac{1}{RC} \longrightarrow$ stabilità esterna

(NB) La stabilità esterna dipende dalla scelta di y!

Esempio : $y = x_3$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1 = \frac{1}{C}\left[\frac{u - x_1}{R}\right]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left[x_3\right] \longrightarrow sCx_2 = x_3 \rightarrow x_2 = \frac{x_3}{sC}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L}\left[u - x_2\right] \longrightarrow Lsx_3 = u - x_2 \rightarrow Lsx_3 = u - \frac{x_3}{sC}$$

$$y = x_3$$

$$x_3 = \frac{usC}{s^2LC+1} \Rightarrow y = \frac{sC}{s^2LC+1}u$$

$$\tilde{G}(s) = \frac{sC}{s^2LC+1} \longrightarrow \text{poli in } \pm\frac{i}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \text{non è esternamente stabile}$$

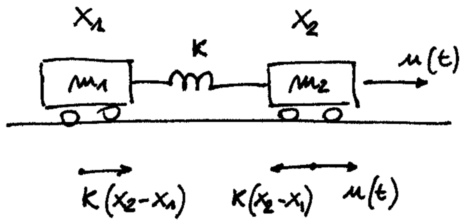
SOLUZIONE PROBLEMA 1

x_1 posizione carrello 1

x_2 posizione carrello 2

$x_3 = \dot{x}_1$ velocità carrello 1

$x_4 = \dot{x}_2$ velocità carrello 2



Applicando la legge di Newton:

$$m_1 \dot{x}_3 = k(x_2 - x_1)$$

$$m_2 \dot{x}_4 = u(t) - k(x_2 - x_1)$$

Perciò le equazioni di stato sono:

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{m_1} k (x_2 - x_1)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2} \left[u(t) - k(x_2 - x_1) \right]$$

e la trasformazione d'uscita:

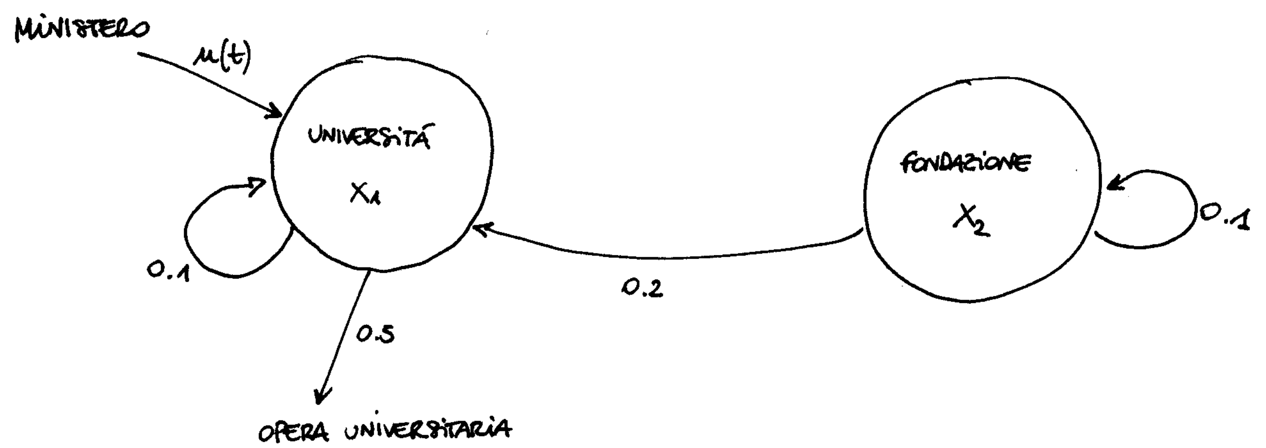
$$y = x_1$$

Quindi si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 2



$$x_1(t+1) = 1.1\left[x_1(t) + 0.2\,x_2(t) + u(t) - 0.5\left[x_1(t) + 0.2\,x_2(t) + u(t)\right]\right] =$$

$$= 0.55\,x_1(t) + 0.11\,x_2(t) + 0.55\,u(t)$$

$$x_2(t+1) = 1.1\left[x_2(t) - 0.2\,x_2(t)\right] =$$

$$= 0.88\,x_2(t)$$

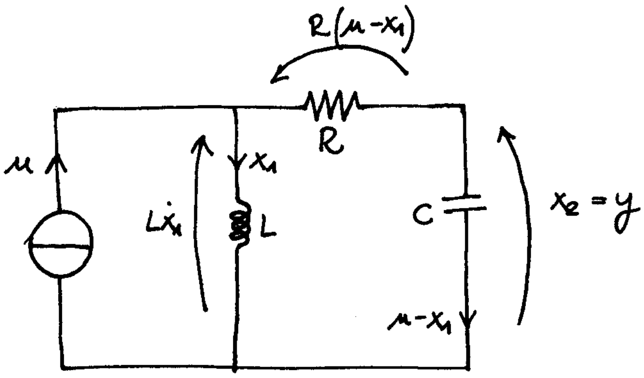
$$y(t) = 0.5\left[x_1(t) + 0.2\,x_2(t) + u(t)\right]$$

Perciò

$$A = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.11 \\ 0 & 0.88 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0.5 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 3

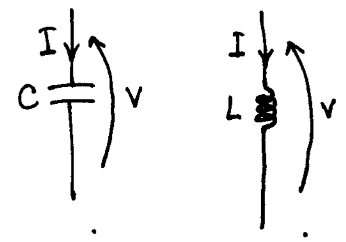


$$L\dot{x}_1 = R(u-x_1)+x_2$$

$$C\dot{x}_2 = u - x_1$$

$$y = x_2$$

Equazioni del condensatore e dell'induttore



$I = C\dot{V}$ $\qquad$ $V = L\dot{I}$

Per cui

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Per trovare il modello ARMA bisogna portare il sistema nella forma:

$$D(p)\, y(t) = N(p)\, u(t)$$

con $D(p) = p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_n$

$N(p) = \beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \dots + \beta_n$

p operatore di anticipo/derivazione

Con un po' di passaggi:

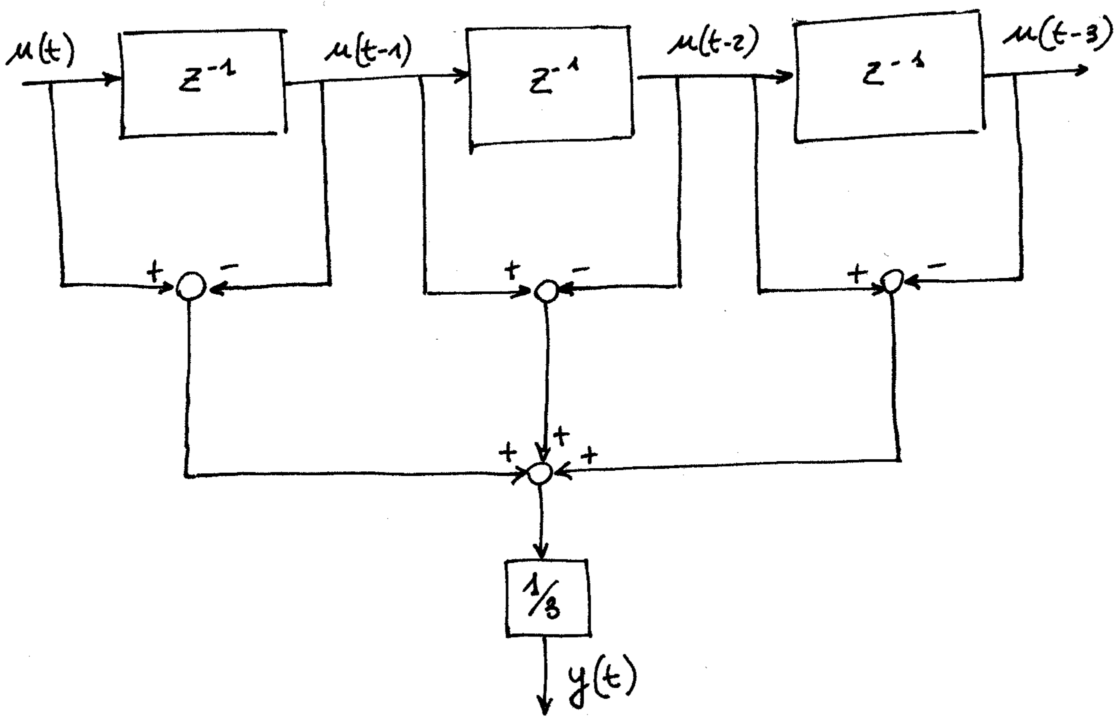
$$C\dot{x}_2 = u - x_1 \Rightarrow C\ddot{x}_2 = \dot{u} - \dot{x}_1 \Rightarrow C\ddot{y} = \dot{u} - \frac{1}{L}\left[R(u-x_1)+x_2\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\ddot{y} = \dot{u} - \frac{R}{L}u + \frac{R}{L}x_1 - \frac{x_2}{L} \Rightarrow C\ddot{y} = \dot{u} - \frac{R}{L}u + \frac{R}{L}(u - C\dot{y}) - \frac{1}{L}y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\ddot{y} + \frac{RC}{L}\dot{y} + \frac{1}{L}y = \dot{u} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{C}\dot{u}$$

$\Rightarrow N(s) = \frac{1}{C}s \qquad D(s) = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \qquad \Rightarrow$ la funzione di trasferimento è $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\frac{1}{C}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$

SOLUZIONE PROBLEMA 7



$$y(t) = \frac{1}{3} u(t) \left[1 - \cancel{z^{-1}} + \cancel{z^{-1}} - \cancel{z^{-2}} + \cancel{z^{-2}} - z^{-3} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - z^{-3} \right) u(t)$$

$$\Downarrow$$

$$G(z) = \frac{1 - z^{-3}}{3} = \frac{z^3 - 1}{3z^3}$$

Soluzione problema 8

$$G^{(1)}(s) = \frac{G_1 G_2 G_5 + G_1 G_4 G_5 + G_1 G_6}{1 + G_1 G_3}$$

$$G^{(2)}(s) = \frac{G_2 G_5 + G_4 G_5 + G_6}{1 + G_1 G_3}$$

Soluzione problema 9

$$G(s) = \frac{G_1 G_3 G_5}{1 + G_2 G_3 + G_2 G_3 G_4 G_5}$$

Soluzione problema 10

$$\frac{G}{1 - GH} = \frac{1}{1 - \frac{s-1}{s}} = s$$

la funzione di trasferimento ottenuta non rispetta il vincolo che il grado del polinomio a numeratore sia $\leq$ del grado del polinomio a denominatore. Questo assurdo è dovuto al fatto di aver collegato in retroazione due sistemi impropri.

SOLUZIONE PROBLEMA 11

$$\dot{x} = Ax + bu \qquad\qquad y = c^T x$$

$$\left[\frac{m^3}{min}\right] = \left[\frac{1}{min}\right]\left[m^3\right] + \left[-\right]\left[\frac{m^3}{min}\right] \qquad\qquad \left[\frac{m^3}{min}\right] = \left[\frac{1}{min}\right]\left[m^3\right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\frac{l}{s}\right] = \left[\frac{1}{s}\right]\left[l\right] + \left[-\right]\left[\frac{l}{s}\right] \qquad\qquad \left[\frac{l}{s}\right] = \left[\frac{1}{s}\right]\left[l\right]$$

Perció

$$A^* = \frac{1}{60} A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad\qquad b^* = b$$

A^* è più comodo di A, ad es. nell'applicazione delle formule di Lagrange.

$$c^{*T} = \frac{1}{60} c^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 12

Formula di Lagrange con $u=0$:

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = c^T e^{At} x(0)$$

dove

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \dots$$ ← somma di funzioni continue

$$\dot{y}(t) = c^T A e^{At} x(0)$$

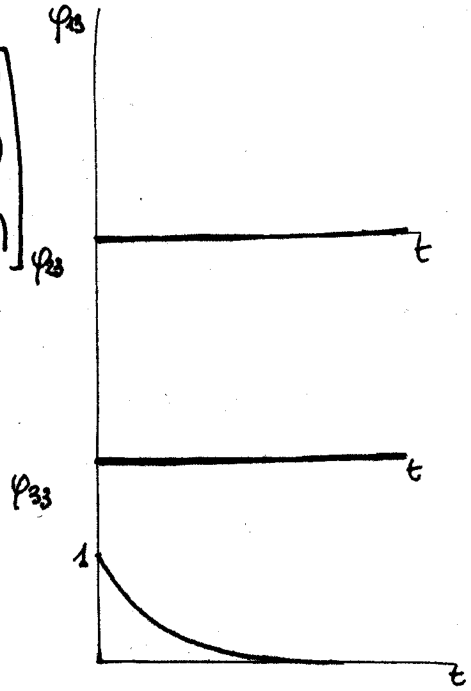
Cioè sia $y(t)$ che $\dot{y}(t)$ sono funzioni continue.

Perciò il diagramma che non può rappresentare il movimento libero di uscita di un sistema a tempo continuo è il terzo, che presenta una discontinuità nella derivata.

SOLUZIONE PROBLEMA 13

$$\underbrace{x(t) = \Phi(t)x(0)}_{\big\downarrow \text{ possiamo supporre che } u(t)=0} + \Psi(t)\, u_{[0,t)}(\cdot)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \varphi_{13}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \varphi_{23}(t) \\ \varphi_{31}(t) & \varphi_{32}(t) & \varphi_{33}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$$

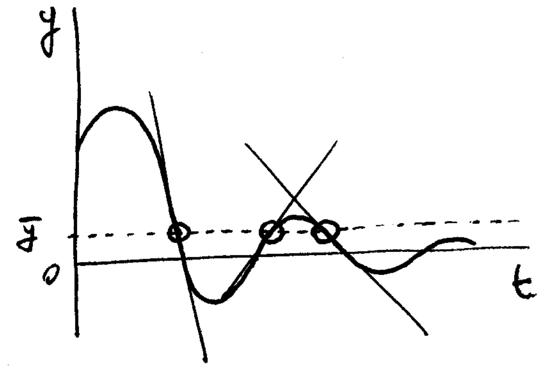


SOLUZIONE PROBLEMA 14

Sì, il doppio bipolo contiene elementi reattivi. Infatti, se così non fosse, la corrente $i_c(t)$ nel condensatore sarebbe una funzione continua (lineare o non lineare) della tensione $y(t)$; per cui avremmo

$$\dot{y} = \frac{1}{c} f(y(t))$$

Ma ciò è in contrasto con la figura:



Per lo stesso valore $y = \bar{y}$ si possono avere 3 diversi valori di $\dot{y}$; perciò $\dot{y}$ non può essere funzione soltanto di $y(t)$.

SOLUZIONE PROBLEMA 15

Se i resistori fossero lineari e invarianti, la corrente i e la tensione v dovrebbero essere le variabili di stato x_1 e x_2 di un sistema lineare del secondo ordine senza ingresso. Ma, in un tale sistema, il movimento libero dovrebbe essere lineare nello stato iniziale $x(0)$, mentre ciò non è vero nella seconda figura.

SOLUZIONE PROBLEMA 16

$$x_1(t+1) = p_1\, x_1(t) + p_2\, x_2(t) + p_3\, x_3(t) + x_4(t)$$

$$x_2(t+1) = (1-p_1)\, x_1(t)$$

$$x_3(t+1) = (1-p_2)\, x_2(t)$$

$$x_4(t+1) = (1-p_3)\, x_3(t+1)$$

Il sistema è, pertanto, del tipo

$$x(t+1) = A\, x(t)$$

con

$$A = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 1 \\ 1-p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-p_3) & 0 \end{vmatrix}$$

Poiché $\det A \neq 0$, il sistema è reversibile.

SOLUZIONE PROBLEMA 17

I sistemi mostrati in figura sono tutti semplicemente stabili, tranne il secondo sistema meccanico che è asintoticamente stabile (si pensi al movimento libero, cioè al movimento per $u \equiv 0$, che è limitato in tutti i casi ma tende a zero per tutti gli stati iniziali solo nel secondo esempio meccanico).

SOLUZIONE PROBLEMA 18

No, perché hanno lo stesso movimento libero dato che per $u \equiv 0$ i due schemi risultano coincidenti.

SOLUZIONE PROBLEMA 19

Poiché

$$x^{(t+1)} = (I - A)\, x^{(t)} + b$$

il metodo converge se e solo se gli autovalori della matrice $(I-A)$ sono minori di 1 in modulo.

SOLUZIONE PROBLEMA 20

Nel primo caso $\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 > 0$

Nel secondo caso $\lambda_1 < 0 \quad \lambda_2 < 0$

Nel terzo caso $\lambda_1 = a + ib \quad \lambda_2 = a - ib$

Poiché $\det A = \lambda_1 \lambda_2$ si ha

Nel primo caso $\det A < 0$

Nel secondo caso $\det A > 0$

Nel terzo caso $\det A = \lambda_1 \lambda_2 = a^2 + b^2 > 0$

SOLUZIONE PROBLEMA 21

Da un bilancio di masse segue che

$$\dot{x}_1 = u - k x_1 + p x_2$$
$$\dot{x}_2 = k x_1 - k x_2 - p x_2 \quad \Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} -k & p \\ k & -k-p \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Gli autovalori di A sono le radici dell'equazione caratteristica

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} \lambda + k & -p \\ -k & (\lambda + k + p) \end{vmatrix} = \lambda^2 + (2k + p)\lambda + k^2 = 0$$

Pertanto,

$$\lambda_{1,2} = -k - \frac{p}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + kp}$$

Gli autovalori sono reali e negativi (nodo stabile) e i corrispondenti autovettori sono dati da

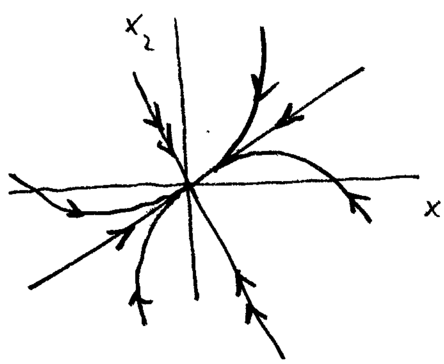
$$\begin{vmatrix} -k & p \\ k & -k-p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \lambda_{1,2} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \Rightarrow -kx_1 + px_2 = \lambda_{1,2}\, x_1$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = \frac{1}{p}(\lambda + k)\, x_1$$

$$\Downarrow$$

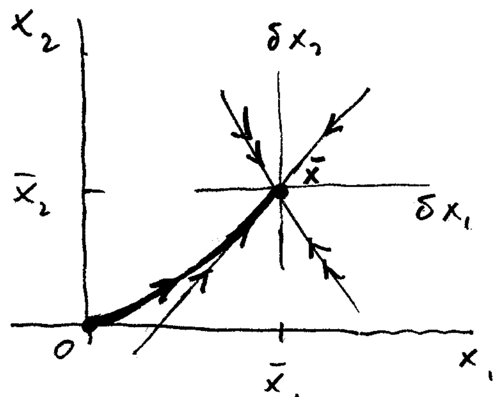
$$\boxed{x_2 = \left(-\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{k}{p}}\right) x_1}$$



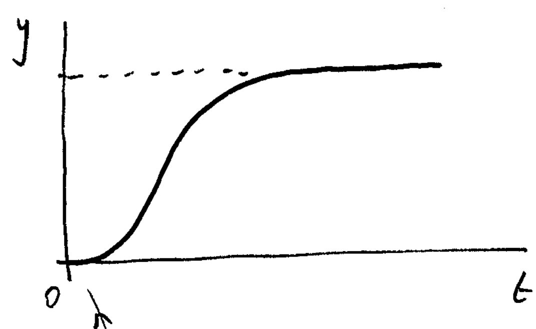
traiettorie per $u \equiv 0$

Poichè il sistema è asintoticamente stabile, per $u = \bar{u}$ abbiamo un solo equilibrio $\bar{x}$ che viene asintoticamente raggiunto a partire da qualsiasi stato iniziale. Posto $\delta x = x(t) - \bar{x}$ e $\delta u(t) = u(t) - \bar{u}$, si ottiene $(\delta u \equiv 0)$

$$\delta \dot{x} = \dot{x} = Ax + b\bar{u} = A\bar{x} + A\delta x + b\bar{u} = A\delta x$$



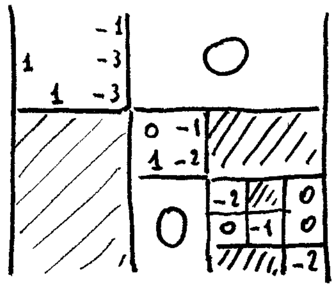
$\Rightarrow$



$\dot{y}(0) = k\dot{x}_2(0) = 0$

SOLUZIONE PROBLEMA 22

La matrice A può essere scomposta nel modo seguente

A =


La prima sottomatrice è in forma canonica di ricostruzione, per cui il suo polinomio caratteristico $\lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3$ ha $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 1$, per cui $\lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 = (\lambda + 1)^3$.

Gli autovalori della prima sottomatrice sono, pertanto, uguali e pari a -1. La seconda sottomatrice è, anch'essa, in forma canonica di ricostruzione e il suo polinomio caratteristico è $\lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$. La seconda sottomatrice ha, pertanto, due autovalori uguali a -1. I rimanenti autovalori sono -2, -1 e -2. Poiché tutti gli autovalori hanno parte reale negativa, il sistema è asintoticamente stabile.

SOLUZIONE PROBLEMA 23

$\boxed{1}$ Dalle leggi dell'elettrotecnica segue che

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C_1} x_3$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C_2} x_3 \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{vmatrix}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L}\left(u - x_1 - R x_3 - x_2\right)$$

$\boxed{2}$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & \lambda & -\frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & \frac{1}{L} & \lambda + \frac{R}{L} \end{vmatrix} = \lambda \left(\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \right)$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}\left(-\frac{R}{L} \mp \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{L}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)} \right)$$

Uno degli autovalori è nullo, mentre gli altri due hanno parte reale negativa. Ciò implica che il sistema è semplicemente stabile.

$\boxed{3}$ I due autovalori $\lambda_{2,3}$ sono complessi coniugati se

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 < \frac{4}{L}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

cioè se

$$R^2 < 4L\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

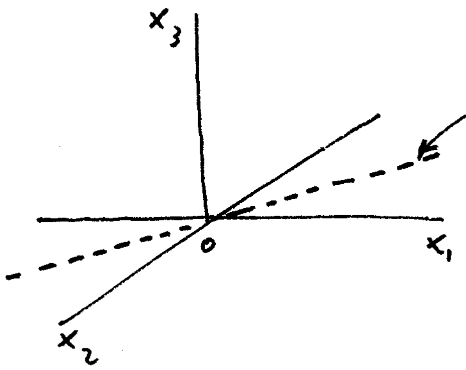
Questo risultato è in linea con l'intuito, che prevede che in un circuito elettrico si abbiano oscillazioni se gli elementi dissipativi non sono importanti (R piccolo).

$\boxed{4}$ Gli stati di equilibrio $\bar{x}$ per $u = 0$ soddisfano l'equazione $\dot{x} = Ax + bu$ con $\dot{x} = 0$ e $u = 0$, cioè

$A\bar{x} = 0$.

Tali stati di equilibrio sono, pertanto, gli autovettori associati all'autovalore $\lambda_1 = 0$.

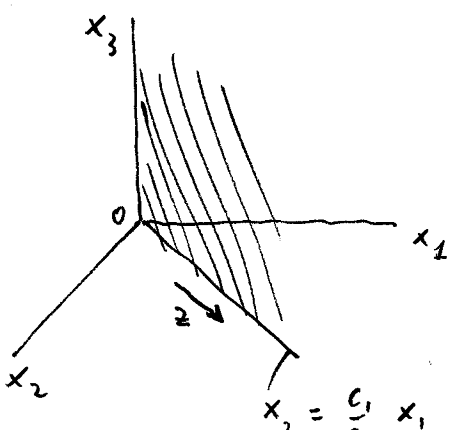
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \frac{1}{C_1} x_3 = 0 \\ \frac{1}{C_2} x_3 = 0 \end{array}\right\} x_3 = 0 \\ -\frac{1}{L}(x_1 + x_2) - \frac{R}{L} x_3 = 0 \end{array}\right\} x_1 + x_2 = 0$$



----- equilibri per $u = 0$

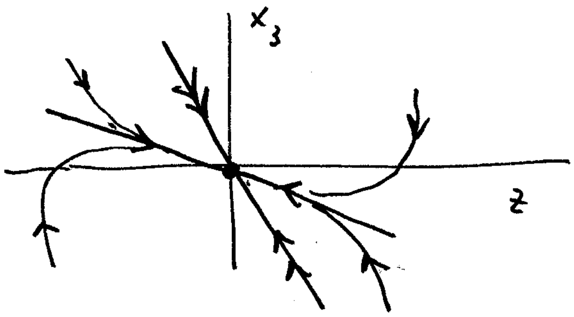
$\boxed{5}$ Nel caso di autovalori reali le traiettorie sono facilmente individuabili determinando gli autovettori associati a $\lambda_{2,3}$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \lambda_{2,3} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{c} \frac{1}{C_1} x_3 = \lambda_{2,3} x_1 \\ \frac{1}{C_2} x_3 = \lambda_{2,3} x_2 \\ \hline \Downarrow \\ x_2 = \frac{C_1}{C_2} x_1 \end{array}$$



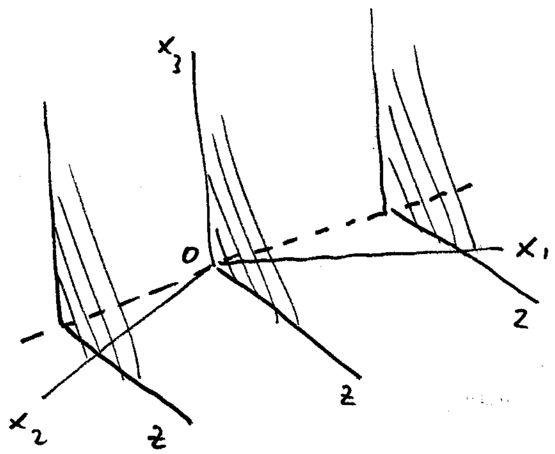
Le traiettorie che iniziano in un punto del piano |||||| restano nel piano (che è un invariante) e tendono verso l'origine perché $\lambda_{2,3} < 0$.

Nel piano (z, x_3) le traiettorie sono quelle di un nodo stabile

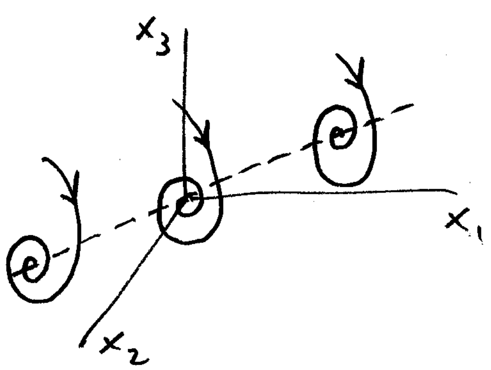


→ autovettore dominante
↠ autovettore subdominante

Poichè $\lambda_1 = 0$, la componente sull'autovettore associato a λ_1 si mantiene costante, per cui, nello spazio a tre dimensioni, le traiettorie sono ottenibili per traslazione delle traiettorie del piano (z, x_3)



Nel caso di autovalori complessi si ottengono invece traiettorie da fuoco stabile nel solito piano (z, x_3)



anche in questo caso la componente sull'autovettore associato a $\lambda_1 = 0$ si mantiene costante

SOLUZIONE PROBLEMA 24

a) Il sistema è semplicemente stabile perchè il movimento libero è limitato ma non tende a zero per tutti gli $x(0)$.

(b) Poichè $x_1 = \text{cost.}$ deve essere $\dot{x}_1 = 0$. Poichè $x_2(t)$ tende a zero per t che tende all'infinito, deve essere $\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2$ con $\lambda_2 < 0$. Pertanto,

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 25

Per avere risposte di tipo oscillatorio smorzato gli autovalori devono essere complessi coniugati con parte reale negativa, cioè

$$\lambda_{1,2} = a \mp i b \qquad \text{con } a < 0$$

Poichè $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$ si deduce che $\det A$ non può essere negativo (si noti che la stessa risposta vale anche nel caso $a > 0$, cioè nel caso di risposte di tipo oscillatorio amplificato).

SOLUZIONE PROBLEMA 26

$$\Sigma_1 : \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda+2 & -3 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)+3 = \lambda^2+\lambda+1$$

$$\lambda^2+\lambda+1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Re(\lambda_{1,2}) = -\frac{1}{2}$$

$$T_d = -\frac{1}{Re(\lambda_d)} = 2$$

$$\Sigma_2 : s^2+3s+2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-3 \mp \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \leftarrow \lambda_d \end{cases}$$

$$T_d = 1$$

<u>Conclusione</u>: Σ_2 tende all'equilibrio più rapidamente

SOLUZIONE PROBLEMA 27

Il tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ è quello per cui l'esponenziale si dimezza, cioè

$$e^{-T_{1/2}/T} = \frac{1}{2}$$

Applicando i logaritmi, si ottiene

$$-\frac{T_{1/2}}{T} = -\log 2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{T_{1/2}}{\log 2}$$

Nel caso specifico, $T_{1/2} = 3$ min. per cui $T \cong 4.2$ ~~min~~.

SOLUZIONE PROBLEMA 28

In tutti i casi, il sistema è costituito da sottosistemi uguali alimentati dallo stesso ingresso. Quindi, partendo da stato nullo, gli stati dei due sottosistemi rimangono uguali tra loro, così che non è possibile raggiungere uno stato qualsiasi (in verità nel primo sistema elettrico x_1 e x_2 non sono uguali ma proporzionali tra loro se $C_1 \neq C_2$, e nel sistema idraulico i due sottosistemi uguali sono parte dell'intero sistema).

SOLUZIONE PROBLEMA 29

Il sistema con ingresso u e variabili di stato x_1 e x_2 è descritto dalle equazioni di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}(\alpha u - h x_2) \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{J} \end{vmatrix} \Rightarrow R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\alpha}{J} \\ \frac{\alpha}{J} & -\frac{\alpha h}{J^2} \end{vmatrix}$$

Il sistema è completamente raggiungibile perché $\det R \neq 0$. Quindi è possibile fissare gli autovalori a piacere scegliendo k_1 e k_2.

SOLUZIONE PROBLEMA 30

$$A_c = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{vmatrix} \qquad b_c = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$R_c = \begin{vmatrix} b_c & A_c b_c & A_c^2 b_c \cdots & A_c^{n-1} b_c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & \cdots & ? & ? \\ 1 & ? & ? & \cdots & ? & ? \end{vmatrix}$$

dove gli elementi indicati con ? non sono stati esplicitamente calcolati perchè inessenziali ai fini della dimostrazione. Infatti, $\det R_c = \mp 1$ qualsiasi siano i valori dei coefficienti del polinomio caratteristico α_i. Pertanto, i sistemi in forma canonica di controllo (o i sistemi ad essi equivalenti) sono completamente raggiungibili.

SOLUZIONE PROBLEMA 31

Se $x(0) = 0$, si ha

$$x(1) = b\,u(0)$$
$$x(2) = A b\,u(0) + b\,u(1)$$
$$x(3) = A^2 b\,u(0) + A b\,u(1) + b\,u(2)$$
$$\vdots$$
$$x(n) = A^{n-1} b\,u(0) + A^{n-2} b\,u(1) + \cdots + b\,u(n-1)$$

L'ultima relazione con $x(n) = x$ (qualsiasi) può essere scritta come

$$x = R \begin{vmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{vmatrix} \qquad \text{dove } R = \begin{vmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1} b \end{vmatrix}$$

Se il sistema è completamente raggiungibile, R è invertibile, per cui si ottiene

$$\begin{vmatrix} u(n-1) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{vmatrix} = R^{-1} x$$

SOLUZIONE PROBLEMA 32

Se nella rete elettrica ci sono solo due induttori e nessun condensatore la rete è un sistema lineare del II ordine

$$\dot{x} = Ax + bu$$

Se la rete non è completamente raggiungibile i vettori b e Ab sono proporzionali e gli stati raggiungibili dall'origine sono tutti gli stati di tipo αb (la dimostrazione è semplicissima nel caso dei sistemi a tempo discreto). Poiché la figura mostra che i due stati i_1 e i_2 non sono tra loro proporzionali, si può concludere che il sistema è completamente raggiungibile.

SOLUZIONE PROBLEMA 33

Il sistema è descritto da

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$c^T = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$O = \begin{vmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \det O \neq 0 \Rightarrow \text{sistema completamente osservabile}$$

Elaborando opportunamente i segnali di ingresso e uscita rilevati sull'intervallo di tempo $[0, T]$ è, pertanto, possibile determinare lo stato iniziale $x(0)$ del sistema.

SOLUZIONE PROBLEMA 34

Il sistema è descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \frac{1.1}{3}\left(x_1(t)+u(t)\right) \\ x_2(t+1) = 0.33\left(x_2(t)+\frac{1}{3}\left(x_1(t)+u(t)\right)\right) \\ x_3(t+1) = 0.33\left(x_3(t)+\frac{1}{3}\left(x_1(t)+u(t)\right)\right) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} \frac{1.1}{3} & 0 & 0 \\ 0.11 & 0.33 & 0 \\ 0.11 & 0 & 0.33 \end{vmatrix}$$

$$y(t) = 0.7\left(x_2(t)+\frac{1}{3}\left(x_1(t)+u(t)\right)\right) - 0.7\left(x_3(t)+\frac{1}{3}\left(x_1(t)+u(t)\right)\right) =$$

$$= 0.7\,x_2(t) - 0.7\,x_3(t) \Rightarrow c^T = \begin{vmatrix} 0 & 0.7 & -0.7 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} 0 & 0.7 & -0.7 \\ 0 & 0.7\cdot 0.33 & -0.7\cdot 0.33 \\ 0 & 0.77\cdot(0.33)^2 & -0.7\cdot(0.33)^2 \end{vmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{O} = 0 \Rightarrow$$ sistema non completamente osservabile

Dai dati disponibili non è, pertanto, possibile determinare lo stato iniziale del sistema, cioè capitale dell'ente e delle due agenzie all'inizio dell'anno 0.

SOLUZIONE PROBLEMA 35

L'uscita $y(t)$ può essere identicamente nulla senza che la rete sia a riposo se e solo se il sistema non è completamente osservabile. Indicata con $x_1(t)$ la corrente nell'induttore e con $x_2(t)$ la tensione sul condensatore, si ha

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{2R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{vmatrix} \qquad c^T = \begin{vmatrix} R & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c^T \\ c^T A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R & 1 \\ \frac{1}{C} - \frac{2R^2}{L} & -\frac{R}{L} \end{vmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{O} = \frac{R^2}{L} - \frac{1}{C}$$

$$\det \mathcal{O} = 0 \Leftrightarrow \frac{R^2}{L} - \frac{1}{C} = 0 \Leftrightarrow RC = \frac{L}{R} \Leftrightarrow$$ costanti di tempo elettriche uguali

SOLUZIONE PROBLEMA 36

$x_1(t)$ = capitale di Marco al mattino del giorno t

$x_2(t)$ = " " Franco " " " " "

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \frac{1}{2} x_1(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = \frac{2}{3} x_2(t) + u(t) \end{cases} \qquad A = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} x_1(t) + \frac{1}{3} x_2(t) \qquad c^T = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c^T \\ c^T A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{9} \end{vmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{O} \neq 0 \Rightarrow$$ sistema completamente osservabile

La risposta è, pertanto, affermativa.

SOLUZIONE PROBLEMA 37

$$\begin{cases} x_1(t+1) = b_1 x_1(t) + u(t) \\ x_2(t+1) = b_2 x_2(t) + (1-b_1) x_1(t) \\ x_3(t+1) = b_3 x_3(t) + (1-b_2) x_2(t) \end{cases} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 1-b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$y(t) = (1-b_3) x_3(t) \qquad c^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-b_3 \\ 0 & (1-b_2)(1-b_3) & ? \\ \bullet & ? & ? \end{vmatrix}$$

$\bullet = (1-b_1)(1-b_2)(1-b_3)$

$$\Downarrow$$

è possibile determinare il numero di allievi frequentanti ogni singola classe $\Leftarrow$ sistema completamente osservabile $\Leftarrow$ $\det \mathcal{O} \neq 0$

SOLUZIONE PROBLEMA 38

Il sistema con ingresso u e uscita y è descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u - \alpha_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$y = \alpha_2 x_2 \qquad c^T = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

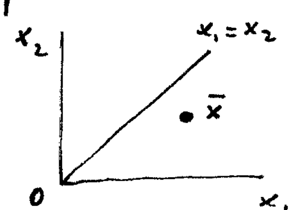
Ovviamente, questo sistema è asintoticamente stabile. Infatti, la matrice A è in forma triangolare e, pertanto, $\lambda_1 = -\alpha_1$ e $\lambda_2 = -\alpha_2$ (il sistema è un nodo stabile). Ogni serbatoio ha una sua costante di tempo $T_i = -\frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{\alpha_i}$ e la costante di tempo dominante è quella del serbatoio con α più piccolo, cioè quella del serbatoio che si scarica meno in fretta.

Poiché il sistema è asintoticamente stabile, a ogni ingresso costante $\bar{u}$ corrisponde uno stato di equilibrio $\bar{x}$.

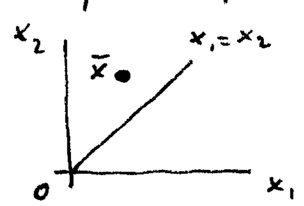
Tale stato di equilibrio è caratterizzato da

$$\bar{x}_1 = \frac{\bar{u}}{\alpha_1} \qquad \bar{x}_2 = \frac{\bar{u}}{\alpha_2}$$

(ottenute ponendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ nelle equazioni di stato) per cui, all'equilibrio, il serbatoio con costante di tempo dominante è più pieno dell'altro.

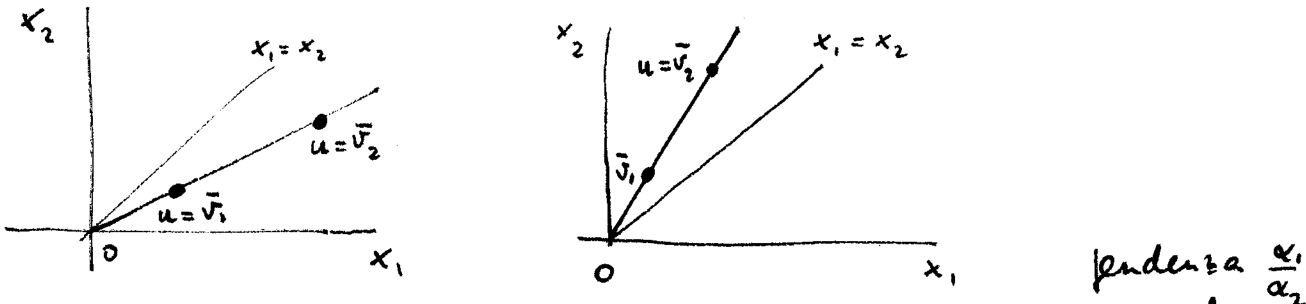


$\alpha_1 < \alpha_2$



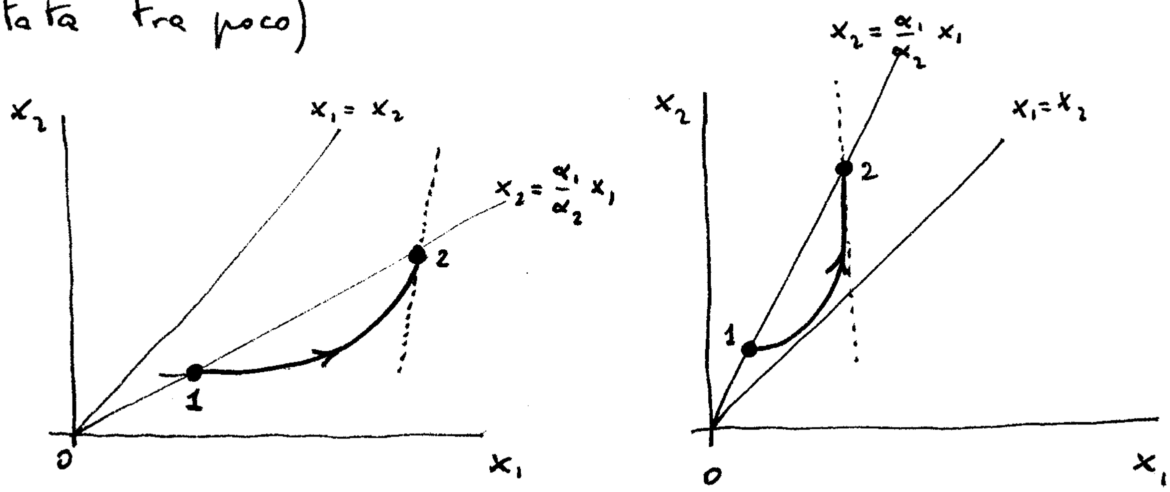
$\alpha_1 > \alpha_2$

Gli stati di equilibrio sono tutti proporzionali a $\bar{u}$, cioè sono tutti allineati su una unica retta (nel disegno che segue si è ipotizzato $\bar{v}_1 < \bar{v}_2$)



$\alpha_1 < \alpha_2$ $\alpha_1 > \alpha_2$

La retta degli stati di equilibrio è la retta $\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2$. Pertanto, tutte le traiettorie attraversano tale retta orizzontalmente perché $\dot{x}_2 = 0$ se $\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2$ (vedi seconda equazione di stato). La transizione dallo stato di equilibrio corrispondente all'ingresso $\bar{v}_1$ a quello corrispondente all'ingresso $\bar{v}_2$ è, quindi, una traiettoria inizialmente orizzontale. Più precisamente le transizioni sono le seguenti (la dimostrazione è riportata tra poco)



$\alpha_1 < \alpha_2$ $\alpha_1 > \alpha_2$

In entrambi i casi, l'uscita y tende in modo monotono dal valore

$\bar{v}_1$ al valore $\bar{v}_2$, con y inizialmente nullo come indicato nel testo con il transitorio denominato (a).

Per dimostrare che le traiettorie tendono verso il secondo equilibrio (punto 2 di figura) dal basso verso l'alto si può procedere in questo modo. Innanzitutto riferiamo lo stato del sistema al punto 2, cioè poniamo

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x}^{(2)}$$

dove $\bar{x}^{(2)}$ è l'equilibrio corrispondente a $\bar{v}_2$. Derivando entrambi i membri, si ottiene

$$\dot{\delta x} = \dot{x} = Ax + b\bar{v}_2 = A(\delta x(t) + \bar{x}^{(2)}) + b\bar{v}_2 = A\,\delta x(t)$$

perché $A\bar{x}^{(2)} + b\bar{v}_2 = 0$. Ciò significa che le traiettorie del sistema, viste dal punto 2, sono quelle del movimento libero del sistema:

$$\dot{\delta x} = A\,\delta x$$

Ciò significa che si tende verso il punto 2 secondo la retta associata all'autovettore dominante della matrice A.

<u>Caso $\alpha_1 < \alpha_2$</u>

L'autovalore dominante è $\lambda_1 = -\alpha_1$, per cui l'autovettore dominante soddisfa le equazioni

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = -\alpha_1 \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

$-\alpha_1 x_1 = -\alpha_1 x_1$ (tautologia)

$\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 = -\alpha_1 x_2$

$\Downarrow$

$x_2 = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} x_1$ retta individuata dall'autovettore dominante

Poiché $0 < \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} < \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$ la geometria della traiettoria è come in figura, in cui la retta tratteggiata è quella corrispondente all'autovettore dominante.

<u>Caso $\alpha_1 > \alpha_2$</u>

L'autovalore dominante è $\lambda_2 = -\alpha_2$ e il corrispondente autovettore soddisfa le equazioni

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = -\alpha_2 \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

$-\alpha_1 x_1 = -\alpha_2 x_1$ $(x_1 = 0)$

$\alpha_1 x_1 - \cancel{\alpha_2} x_2 = -\cancel{\alpha_2} x_2$ $(x_1 = 0)$

Quindi, l'autovettore dominante è verticale $(x_1 = 0)$ e la traiettoria tende verticalmente verso il punto 2.

Per quanto riguarda la seconda parte del problema è sufficiente verificare che il sistema è completamente raggiungibile e osservabile.

$$R = |b \;\; Ab| = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 \\ 0 & \alpha_1 \end{vmatrix} \qquad \mathcal{O} = \begin{vmatrix} c^T \\ c^T A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2 \\ \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_2^2 \end{vmatrix}$$

$\det R \neq 0$ $\qquad$ $\det \mathcal{O} \neq 0$

SOLUZIONE PROBLEMA 39

L'antenna è descritta dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{J}(m - h x_2) \\ y = x_1 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{h}{J} \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{J} \end{vmatrix} \quad c^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$$

La risposta è, pertanto, positiva perchè il sistema è completamente raggiungibile e osservabile. Infatti,

$$R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{1}{J} \\ \dfrac{1}{J} & -\dfrac{h}{J^2} \end{vmatrix} \Rightarrow \det R \neq 0 \Rightarrow \text{completa raggiungibilità}$$

$$O = \begin{vmatrix} c^T \\ c^T A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det O \neq 0 \Rightarrow \text{completa osservabilità}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 40

A causa della presenza di due integratori in parallelo, il sistema non è nè completamente raggiungibile, nè completamente osservabile. Infatti, se lo stato iniziale del sistema è nullo, x_1 e x_2 non potranno essere differenziati e questo è sufficiente per affermare che il sistema non è completamente raggiungibile. D'altra parte, stati iniziali diversi come $x'(0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}^T$ e $x''(0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}^T$ danno luogo alla stessa uscita $y(\cdot)$ e ciò è sufficiente per affermare che il sistema non è completamente osservabile.

SOLUZIONE PROBLEMA 41

Indicando con x_1 e x_2 le tensioni sui due condensatori e con x_3 la corrente nell'induttore (coincidente con y) si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{C_1} x_3 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C_2} x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{L}(u - x_1 - x_2) \end{cases} \qquad y = x_3$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{vmatrix}$$

$$c^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad d = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} b & Ab & A^2 b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{LC_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{LC_2} & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L^2}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) \end{vmatrix} \Rightarrow \det R = 0 \Rightarrow$$ sistema <u>non</u> completamente raggiungibile

$$O = \begin{vmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) \end{vmatrix} \Rightarrow \det O = 0 \Rightarrow$$ sistema <u>non</u> completamente osservabile

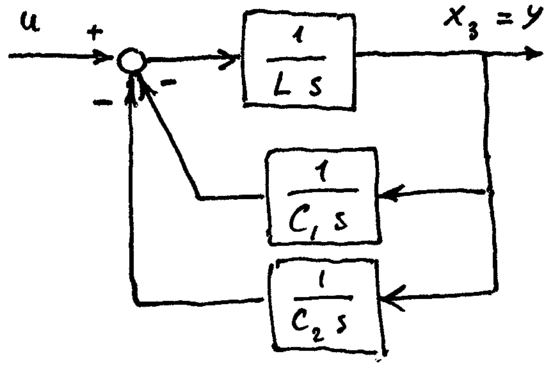
La funzione di trasferimento si può calcolare in vari modi:

- con la formula $G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d$ (o, numericamente, con il metodo di Souriau)
- scrivendo le equazioni di stato per mezzo dell'operatore "s"

$$s x_1 = \frac{x_3}{C_1}$$
$$s x_2 = \frac{x_3}{C_2}$$
$$s x_3 = \frac{1}{L}(u - x_1 - x_2)$$
$$y = x_3$$

  e calcolando $G = \frac{y}{u}$ per sostituzioni successive.
- rappresentando il sistema (equazioni di stato e trasformazione di uscita) con uno schema a blocchi e usando la formula di Mason

Usiamo, a titolo di esempio, il terzo modo



Lo schema contiene un solo cammino diretto ingresso/uscita e due anelli semplici (che si toccano).

$$G(s) = \frac{\frac{1}{Ls}}{1 + \frac{1}{Ls}\frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{Ls}\frac{1}{C_2 s}} = \frac{\frac{1}{L}\, s}{s^2 + \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 42

(a) Indicate con x_1 e x_2 le correnti nei due induttori, si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L_1} u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{L_2} u \end{cases} \Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{vmatrix}$$

$$y = x_1 + x_2 + \frac{1}{R} u \qquad c^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix} \quad d = \begin{vmatrix} \frac{1}{R} \end{vmatrix}$$

(b) Il sistema è improprio perchè $d \neq 0$.

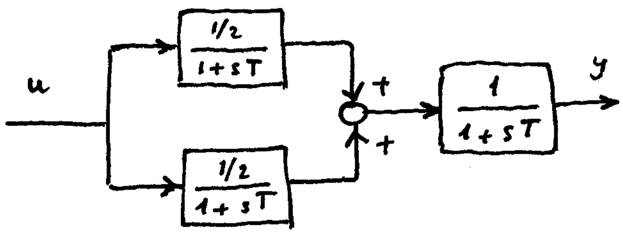
(c) $G = \frac{n}{d} = c^T (sI - A)^{-1} b + d = \frac{1}{s} c^T b + d = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\frac{1}{s} + \frac{1}{R} = \frac{\frac{1}{R} s + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)}{s}$

Il fatto che il polinomio a denominatore della funzione di trasferimento sia di primo grado (anzichè di grado $n = 2$) rivela che il sistema non è completamente raggiungibile e osservabile. In altre parole, il sistema è composto dalla parte raggiungibile e osservabile (b) e da un'altra parte (a, c o d).

(d) Il sistema non è completamente osservabile (perchè $A = 0$) e, quindi, non può essere costituito dalle parti (b) e (d) (come in Fig. 21). Pertanto, il modello ARMA $n u = d y$ descrive tutte le coppie ingresso-uscita.

SOLUZIONE PROBLEMA 43

Per determinare il modello ARMA di trasferimento $dy = nu$ è sufficiente determinare la funzione di trasferimento del sistema $G(s) = \dfrac{n(s)}{d(s)}$. Nel caso specifico, lo schema a blocchi del sistema è il seguente



$$T = \frac{1}{k}$$

e la funzione di trasferimento è, pertanto,

$$G(s) = \frac{1}{(1+sT)^2}$$

Tutte le coppie $(u(\cdot), y(\cdot))$ corrispondenti a serbatoi inizialmente vuoti sono, quindi, ottenibili risolvendo l'equazione differenziale del secondo ordine

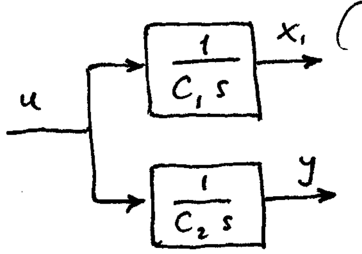
$$(1+sT)^2 y = u$$

cioè

$$T^2 \ddot{y} + 2T\dot{y} + y = u \quad .$$

SOLUZIONE PROBLEMA 44

Lo schema a blocchi corrispondente al circuito è



(tensione sul primo condensatore)

per cui la funzione di trasferimento è $G(s) = \dfrac{1}{C_2 s}$. Il sistema non è, quindi, esternamente stabile perché ha un polo nullo. Esistono molti altri modi di risolvere il problema (per esempio, il sistema ha autovalori nulli e, quindi, non può avere poli stabili).

SOLUZIONE PROBLEMA 45

La funzione di trasferimento è (formula di Mason)

$$G = \frac{G_a (G_c + G_d)}{1 + G_a G_b}$$

I poli della funzione di trasferimento sono, quindi, la riunione dei poli di G_c, G_d e $\frac{G_a}{1+G_a G_b}$ (o parte di essi nel caso, eccezionale, di semplificazioni zeri/poli). Il sistema è, pertanto, esternamente stabile se i poli di G_c, G_d e $\frac{G_a}{1+G_a G_b}$ sono stabili.

Poli di G_c : certamente stabili, perché l'uscita del sistema (c) è limitata per ingresso limitato e stato iniziale nullo.

Poli di G_d : certamente stabili, perché gli autovalori della matrice A sono stabili (la matrice A è in forma triangolare a blocchi ...).

Poli di $\frac{G_a}{1+G_a G_b} = \frac{\frac{\mu_a}{(1+s)}}{1+\frac{\mu_a \mu_b (1+0.1s)}{(1+s)(1+10s)}} = \frac{\mu_a (1+10s)}{(1+s)(1+10s)+\mu_a \mu_b (1+0.1s)}$

Poiché i poli sono gli zeri del polinomio al denominatore, che è un polinomio di secondo grado a coefficienti positivi, per la regola di Cartesio essi sono negativi o hanno parte reale negativa nel caso siano complessi. Quindi, in conclusione, anche i poli di $\frac{G_a}{1+G_a G_b}$ sono stabili.

SOLUZIONE PROBLEMA 46

$$G = \frac{\frac{\mu}{1+sT} \cdot \frac{1}{1+s}}{1+ \frac{\mu}{1+sT} \cdot \frac{1}{(1+s)^2}} = \frac{\mu(1+s)}{(1+sT)(1+s)^2+\mu} = \frac{\mu(1+s)}{Ts^3+(2T+1)s^2+(2+T)s+1+\mu}$$

I poli sono le radici del polinomio a denominatore, cioè le radici del polinomio

$$s^3+\alpha_1 s^2+\alpha_2 s+\alpha_3$$

con

$$\alpha_1 = 2+\frac{1}{T}$$

$$\alpha_2 = 1+\frac{2}{T}$$

$$\alpha_3 = \frac{1+\mu}{T}$$

La condizione necessaria e sufficiente perché i poli siano stabili è, quindi, (si ricordi l'Esempio 6)

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 > 0 \\ \alpha_3 > 0 \end{array}\right\} \text{sempre verificate}$$

$$\alpha_2 > \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \iff 1+\frac{2}{T} > \frac{1+\mu}{\cancel{T}}\,\frac{\cancel{T}}{2T+1} \iff \mu < \mu_{crit} \triangleq \left(1+\frac{2}{T}\right)(2T+1)-1$$

Si noti che nel caso particolare $T = 1$ (tre costanti di tempo uguali in retroazione) si ritrova un risultato già noto ($\mu_{crit} = 8$).

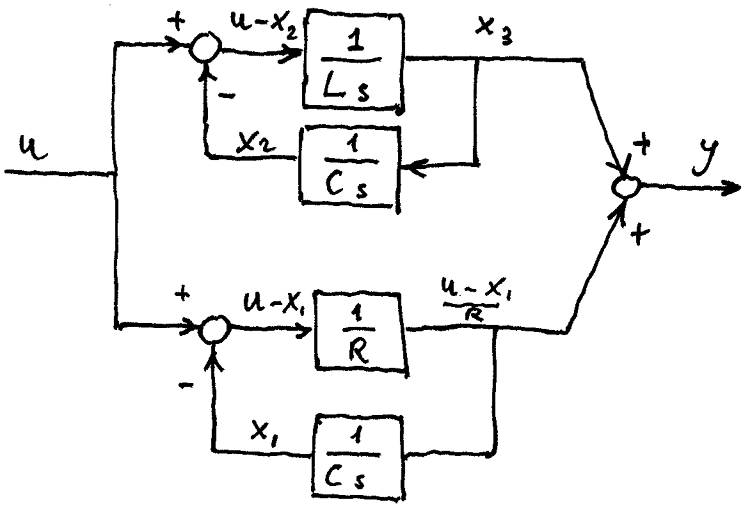
SOLUZIONE PROBLEMA 47

$$G = \frac{\frac{1}{s}\,\frac{\mu}{1+sT_1}}{1+\frac{1}{s}\,\frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}} = \frac{\mu(1+sT_2)}{s(1+sT_1)(1+sT_2)+\mu} = \frac{\mu(1+sT_2)}{T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+\mu}$$

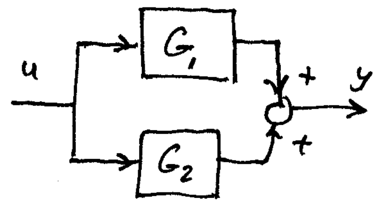
$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \dfrac{T_1+T_2}{T_1T_2} > 0 \\ \alpha_3 = \dfrac{\mu}{T_1T_2} > 0 \\ \alpha_2 > \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1} \iff \dfrac{1}{T_1T_2} > \dfrac{\mu}{T_1+T_2} \end{array}\right\} \text{nel caso } T_1, T_2 > 0 \Rightarrow \boxed{0 < \mu < \frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 48

Lo schema a blocchi corrispondente al circuito è il seguente



$\equiv$



$$G_1 = \frac{\frac{1}{Ls}}{1+\frac{1}{Ls}\frac{1}{Cs}} = \frac{Cs}{1+LCs^2}$$

$$G_2 = \frac{\frac{1}{R}}{1+\frac{1}{R}\frac{1}{Cs}} = \frac{Cs}{1+RCs}$$

Poichè $G = G_1 + G_2$ i poli di G sono i poli di G_1 e i poli di G_2. Poichè i poli di G_1 sono immaginari $\left(\mp i\sqrt{\frac{1}{LC}}\right)$, il sistema non ha poli stabili e, quindi, non è esternamente stabile. Pertanto, l'uscita y non si mantiene limitata per ogni ingresso u limitato e stato iniziale nullo.

SOLUZIONE PROBLEMA 49

$$G(s) = \frac{1}{1+sT_1} - \frac{1}{1+sT_2} = \frac{s(T_2-T_1)}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

Il sistema ha uno zero nullo $(z_1 = 0)$ e, pertanto, non è a sfasamento minimo. Gli ingressi nascosti soddisfano l'equazione $su = 0$, cioè $\dot{u} = 0$ che significa $u = \text{cost.}$

SOLUZIONE PROBLEMA 50

Se Σ_1 e Σ_2 sono di ordine n_1 e n_2, le loro funzioni di trasferimento $G_1 = \frac{N_1}{D_1}$ e $G_2 = \frac{N_2}{D_2}$ hanno polinomi D_1 e D_2 di grado n_1 e n_2 (a causa della completa raggiungibilità e osservabilità di Σ_1 e Σ_2), e polinomi N_1 e N_2 di grado zero (a causa della non esistenza di ingressi nascosti). Ciò implica che nel calcolare la funzione di trasferimento $G = G_1 G_2 = \frac{N_1}{D_1}\frac{N_2}{D_2}$ del sistema, non possono esserci semplificazioni zeri/poli. In altre parole, il polinomio D della funzione di trasferimento $G = \frac{N}{D}$ è di grado $(n_1 + n_2)$ e ciò implica la completa raggiungibilità e osservabilità del sistema.

SOLUZIONE PROBLEMA 51

$$G(s) = \frac{\frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}}{1+\frac{1}{s}\frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}} = \frac{\mu s}{s(1+sT_1)(1+sT_2)+\mu}$$

Il sistema ha, pertanto, tre poli e uno zero. Poichè lo zero è nullo, il sistema non è a sfasamento minimo e i suoi ingressi nascosti soddisfano l'equazione $su=0$ cioè $\dot{u}=0$. Ciò implica che gli ingressi nascosti siano costanti. Si noti che lo stesso risultato è valido, più in generale, per sistemi con funzione di trasferimento in linea di andata del tipo $\frac{\mu}{D(s)}$.

SOLUZIONE PROBLEMA 52

La risposta è negativa perchè il sistema ha uno zero positivo ($z_1 = 1$) che è responsabile di ingressi nascosti illimitati ($u \equiv e^t$).

SOLUZIONE PROBLEMA 53

$$G(z) = \frac{\frac{1}{z+0.5}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\mu}{z-1}\,\frac{1}{z}}{1 + \frac{\mu}{z-1}\,\frac{1}{z}} = \frac{-\frac{z-1}{z+0.5} + \mu}{z(z-1)+\mu} = \frac{-(z-1)+\mu(z+0.5)}{z(z-1)(z+0.5)+\mu(z+0.5)}$$

$$= \frac{(\mu-1)z + (0.5\mu+1)}{z(z-1)(z+0.5)+\mu(z+0.5)}$$

Il sistema ha uno zero z_1 dato da

$$z_1 = -\frac{0.5\mu+1}{\mu-1}$$

Pertanto, è possibile ricostruire gli ingressi se $|z_1| < 1$, cioè se $\mu < 0$ o $\mu > 2$

SOLUZIONE PROBLEMA 58

La trasformata zeta della risposta all'impulso $g(t)$ è la funzione di trasferimento $G(z)$, cioè

$$G(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{g(t)}{z^t}$$

Riconoscendo dalla tabella che $g(t+2) = g(t+1) + g(t)$, si può scrivere

$$G(z) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{g(t)}{z^t} = g(0) + \frac{g(1)}{z} + \sum_{t=2}^{\infty} \frac{g(t)}{z^t} =$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{t=2}^{\infty} \frac{g(t-1)+g(t-2)}{z^t} = \frac{1}{z} + \sum_{t=2}^{\infty} \frac{g(t-1)}{z^t} + \sum_{t=2}^{\infty} \frac{g(t-2)}{z^t} =$$

$$= \frac{1}{z} + z^{-1} \sum_{t=2}^{\infty} \frac{g(t-1)}{z^{t-1}} + z^{-2} \sum_{t=2}^{\infty} \frac{g(t-2)}{z^{t-2}} =$$

$$= \frac{1}{z} + z^{-1} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{g(t)}{z^t} + z^{-2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{g(t)}{z^t} = \frac{1}{z} + z^{-1} G(z) + z^{-2} G(z)$$

da cui si ottiene

$$G(z)\left(1 - z^{-1} - z^{-2}\right) = z^{-1}$$

cioè

$$G(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

Questo risultato può essere utilmente confrontato con quanto affermato nel secondo paragrafo a pg. 7. In particolare ci si può chiedere come mai i numeratori delle due funzioni di trasferimento non coincidano.

SOLUZIONE PROBLEMA 59

a) $G_a(s) = \dfrac{10}{1+10s}$

b) $900 s^2 y_b + 100 s y_b + y_b = \dfrac{16}{9} s u_b$

$G_b = \dfrac{y_b}{u_b} = \dfrac{\frac{16}{9} s}{900 s^2 + 100 s + 1}$

c) $G_c = \dfrac{1}{s}$

d) $s y_d = u_d \Rightarrow G_d = \dfrac{y_d}{u_d} = \dfrac{1}{s}$

Dalla formula di Mason segue allora

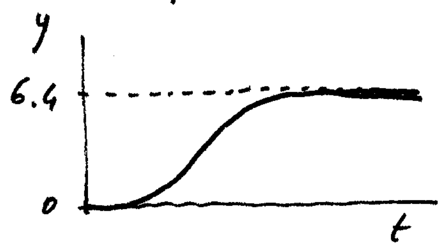
$$G = \frac{G_a G_b G_c}{1 + G_b G_d} = \frac{10}{1+10s} \, \frac{1}{s} \, \frac{G_b}{1 + G_b \frac{1}{s}} = \frac{10}{1+10s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\frac{1}{G_b} + \frac{1}{s}} =$$

$$= \frac{10}{1+10s} \, \frac{1}{s} \, \frac{1}{\frac{900 s^2 + 100 s + 1}{\frac{16}{9} s} + \frac{1}{s}} = \frac{10}{1+10s} \, \cancel{\frac{1}{s}} \, \frac{\frac{16}{9} \cancel{s}}{900 s^2 + 100 s + 1 + \frac{16}{9}} =$$

$$= \frac{160}{9} \, \frac{1}{1+10s} \, \frac{1}{900 s^2 + 100 s + \frac{25}{9}} = \frac{160}{9} \, \frac{1}{1+10s} \, \frac{1}{\left(30 s + \frac{5}{3}\right)^2} =$$

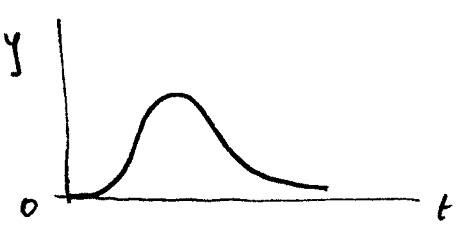
$$= \frac{160}{9} \left(\frac{3}{5}\right)^2 \frac{1}{1+10s} \, \frac{1}{(1+18s)^2} = \frac{6.4}{(1+10s)(1+18s)^2}$$

La risposta allo scalino è, quindi, la seguente



$\ddot{y}(0) = 0 \qquad \dddot{y}(0) > 0$

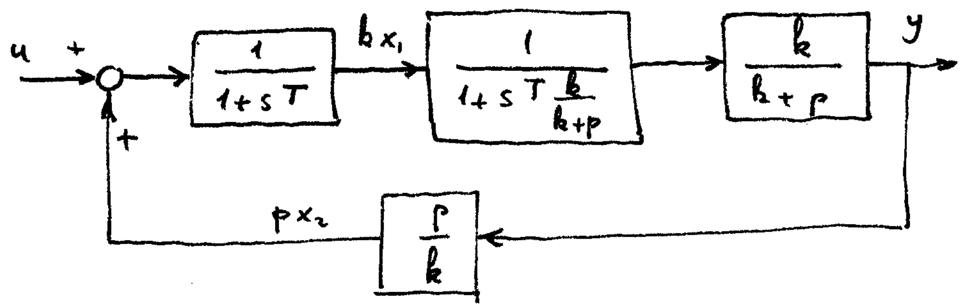
per cui la risposta all'impulso, che è la derivata di quella allo scalino, è



$\dot{y}(0) = 0 \qquad \ddot{y}(0) > 0$

SOLUZIONE PROBLEMA 60

Lo schema a blocchi è il seguente



$T = \frac{1}{k}$

per cui delle formule di Mason segue che

$$G(s) = \frac{\frac{1}{1+sT}\;\frac{1}{1+sT\frac{k}{k+p}}\;\frac{k}{k+p}}{1 - \frac{p}{k}\,\frac{k}{k+p}\,\frac{1}{1+sT}\,\frac{1}{1+sT\frac{k}{k+p}}} = \cdots = \frac{1}{1+sT\left(1+\frac{2p}{k}\right)+s^2T^2}$$

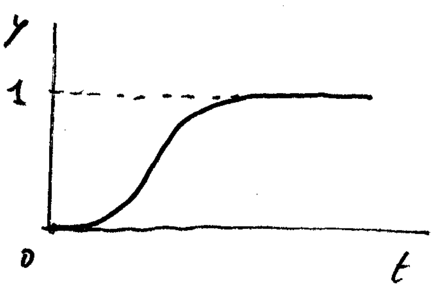
retroazione positiva

La funzione di trasferimento è, quindi, quella di due serbatoi in cascata con costanti di tempo T_1 e T_2

$$G(s) = \frac{1}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

Poiché deve essere $T_1 T_2 = T^2$, segue che una delle due costanti di tempo (diciamo T_1) è più piccola di T e l'altra (diciamo T_2) è più grande di T.

La risposta allo scalino è, comunque, di questo tipo



con $\dot{y}(0) = 0$ e $\ddot{y}(0) = \frac{1}{T_1 T_2} = \frac{1}{T^2} = k^2 > 0$

(Teorema 19)

SOLUZIONE PROBLEMA 61

Il sistema (a) e il sistema (b) perchè la risposta allo scalino è l'integrale della risposta all'impulso e l'area sottesa dalle curve di figura (a) e (b) è crescente con t.

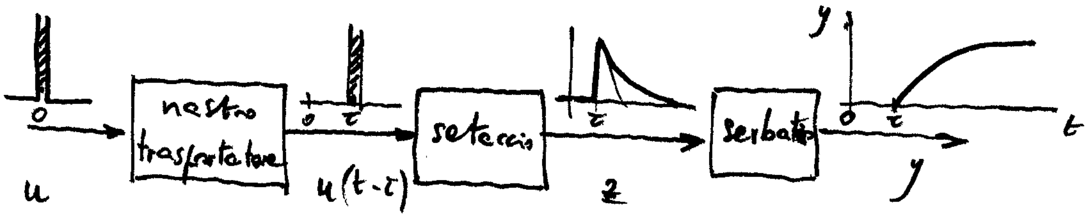
SOLUZIONE PROBLEMA 62

Il sistema è la cascata di tre sottosistemi. Il primo è un ritardatore puro con funzione di trasferimento $e^{-\tau s}$. Il secondo è un sistema del primo ordine con guadagno unitario (conservazione della massa) e con funzione di trasferimento $1/(1+sT)$ (ovviamente, $T = 1/k$). Il terzo sottosistema è un integratore $(1/s)$ perchè nel serbatoio si accumula tutta la sabbia che esce dal setaccio.

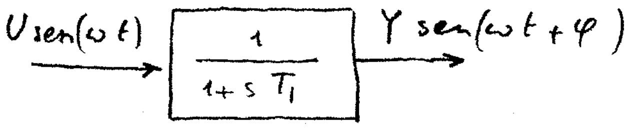
Pertanto,

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s(1+sT)}$$

La risposta all'impulso si può ottenere antitrasformando (secondo Laplace) la funzione $G(s)$. Ma molto più semplicemente si può procedere con l'intuito nel modo seguente



SOLUZIONE PROBLEMA 63



con $T_1 = 2\,[g]$ e $\omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \left[\frac{rad}{g}\right]$

$$Y = R(\omega)\, U = |G(i\omega)|\, U$$

per cui

$$\frac{Y}{U} = |G(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(4\pi)^2}} \cong \frac{1}{4\pi}$$

Nel caso di due blocchi in cascata abbiamo

$$\frac{Y}{U} = |G_1(i\omega)\, G_2(i\omega)| = |G_1(i\omega)| \cdot |G_2(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(4\pi)^2}\,\sqrt{1+(6\pi)^2}} \cong \frac{1}{24 \cdot \pi^2}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 64

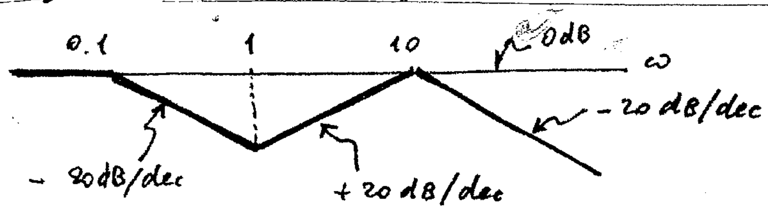
$$G(s) = \frac{0.1\,(1+10s)}{s(1+s)(1+0.1 \cdot s)}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 65

$$G(s) = \frac{-1 \cdot (1+s)(1-s)}{(1+10s)(1+0.1s)^2}$$

← due zeri (di cui uno instabile)
← tre poli

Il guadagno è pari a -1 per cui alle basse frequenze $G_{dB} = 0$. Il diagramma di Bode approssimato è, quindi,



Il sistema ha un massimo di $|G|$ (cioè una risonanza) per $\omega = 10$.

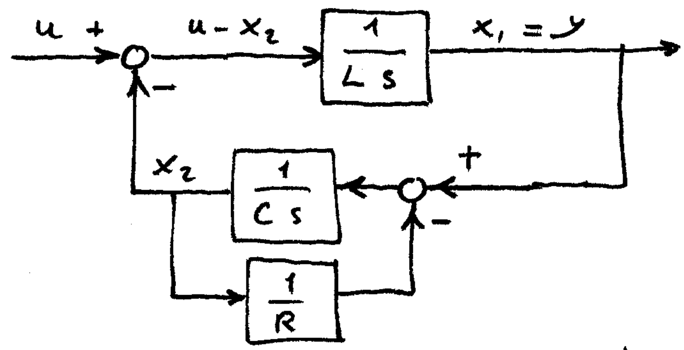
SOLUZIONE PROBLEMA 66

La risposta allo scalino ha $\dot{y}(0) \neq 0$; quindi, c'è un surplus di poli pari a 1. La risposta in frequenza (cioè il diagramma di Bode) evidenzia, infatti, due poli e uno zero. I due poli sono stabili perché la risposta allo scalino è limitata. Lo zero è, invece, instabile perché $\dot{y}(0) < 0$ e $y(\infty) > 0$ (tipica risposta dei sistemi a sfasamento non minimo). In conclusione,

$$G(s) = \frac{10(1-s)}{(1+0.1s)(1+10s)}$$

SOLUZIONE PROBLEMA 67

Lo schema a blocchi corrispondente al circuito è

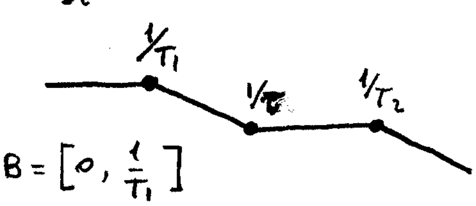


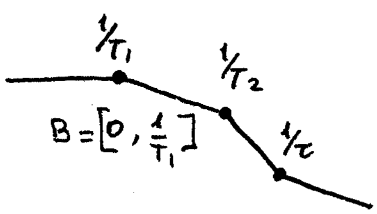
lo schema contiene due anelli che si toccano e un cammino diretto

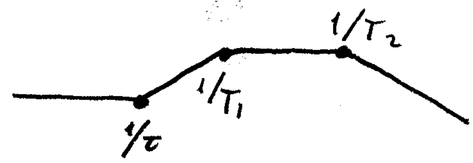
Per la formula di Mason si ha

$$G(s) = \frac{\frac{1}{Ls}\left(1+\frac{1}{RCs}\right)}{1+\frac{1}{LCs^2}+\frac{1}{RCs}} = \frac{1}{R}\,\frac{1+RCs}{1+\frac{L}{R}s+LCs^2} = \frac{1}{R}\,\frac{1+s\tau}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

con $\tau = RC$, $T_{1,2} = \frac{L}{2R}\left(1 \mp \alpha^2\right)$ con $\alpha < 1$. Virtualmente si hanno tre casi possibili (supponiamo $T_1 > T_2$)







ma il terzo caso può essere escluso perché $\frac{1}{\tau} < \frac{1}{T_1} \Rightarrow \tau > T_1 \Rightarrow RC > \frac{L}{2R}(1+\alpha_2)$ che è in conflitto con l'ipotesi $4R^2C/L < 1$.

SOLUZIONE PROBLEMA 68

$$\dot z = -z + u \Rightarrow sz + z = u \Rightarrow (1+s)z = u \Rightarrow G_1(s) = \frac{1}{1+s}$$

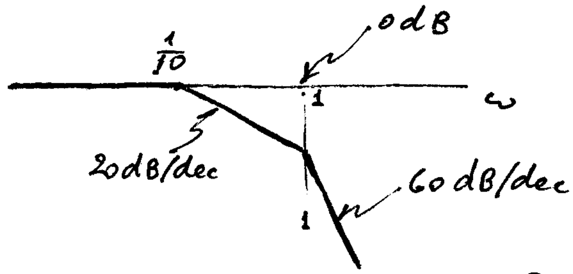
$$G_2(s) = \frac{1}{1+10s}$$

$$G_3(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} = \frac{1}{1+s}$$

$G = G_1 G_2 G_3$ (perché i tre sottosistemi sono in cascata)

Pertanto,

$$G = \frac{1}{(1+10s)(1+s)^2} \Rightarrow$$

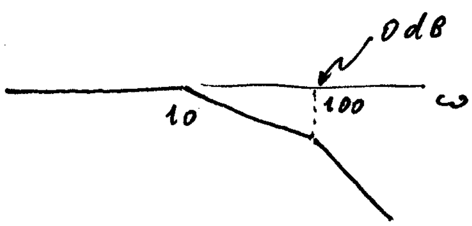


Il sistema è un passa basso e la sua banda è $B = \left[0, \frac{1}{10}\right]$

Si noti che l'estremo superiore della banda è l'inverso della costante di tempo dominante.

SOLUZIONE PROBLEMA 69

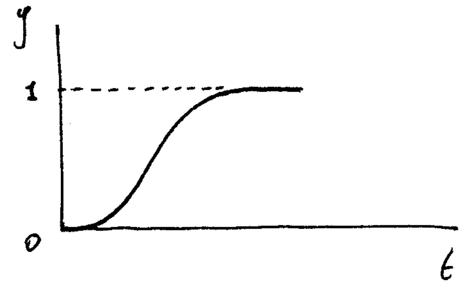
La risposta in frequenza del sistema in anello chiuso è ricavabile banalmente dalla risposta in frequenza del sistema in anello aperto ed è



Quindi, il sistema ad anello chiuso ha funzione di trasferimento approssimabile con

$$G_{ac}(s) = \frac{1}{(1+0.1s)(1+0.01s)}$$

La risposta allo scalino del sistema ad anello chiuso è, pertanto,



- $y \to 1$ perché il guadagno è unitario
- $\dot{y}(0) = 0$ e $\ddot{y}(0) > 1$ perché c'è un surplus di poli pari a 2
- non c'è sovraelongazione perché non ci sono zeri

In verità, la soluzione qui presentata è valida sotto l'ipotesi che il sistema ad anello chiuso sia stabile. Questa ipotesi andrebbe, quindi, verificata, cosa che si può fare sfruttando le ulteriori informazioni presenti nel testo. Tali informazioni permettono di dedurre che la funzione di trasferimento G_s del sistema ad anello aperto è

$$G_s = \frac{100\,(1+10\,s)}{(1+100s)(1+s)(1+0.01s)}$$

per cui la funzione di trasferimento esatta del sistema ad anello chiuso è

$$G(s) = \frac{G_s(s)}{1+G_s(s)} = \frac{\dfrac{100(1+10\,s)}{(1+100\,s)(1+s)(1+0.01s)}}{1+\dfrac{100(1+10s)}{(1+100\,s)(1+s)(1+0.01s)}} = \frac{100(1+10\,s)}{(1+100\,s)(1+s)(1+0.01s)+100(1+10s)}$$

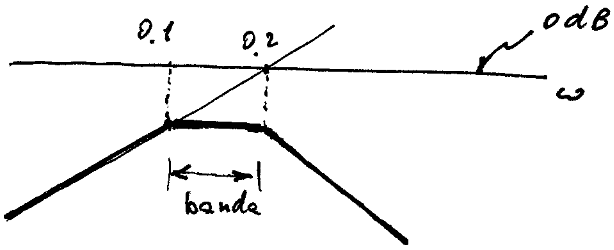
Si può allora sviluppare il denominatore di $G(s)$ e scriverlo nella forma

$$\alpha_0\left[\,s^3+\alpha_1 s^2+\alpha_2 s+\alpha_3\,\right]$$

e, quindi, applicare il metodo di Hurwitz per verificare la stabilità.

SOLUZIONE PROBLEMA 70

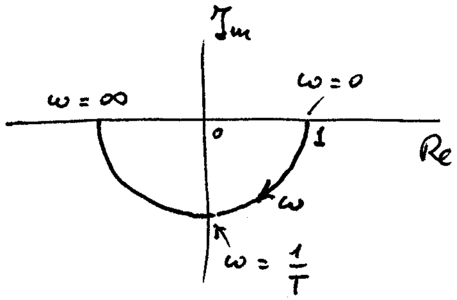
$$G(s) = \frac{1}{1+5s} - \frac{1}{1+10s} = \frac{1+10s-1-5s}{(1+5s)(1+10s)} = \frac{5s}{(1+5s)(1+10s)}$$

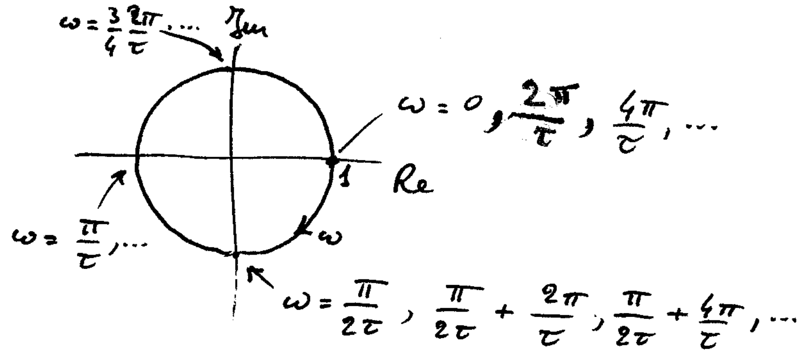


Il sistema è, quindi, un passa-banda

$B = [0.1,\ 0.2]$

SOLUZIONE PROBLEMA 71





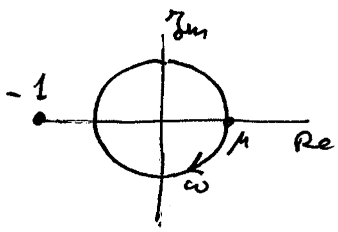
SOLUZIONE PROBLEMA 72

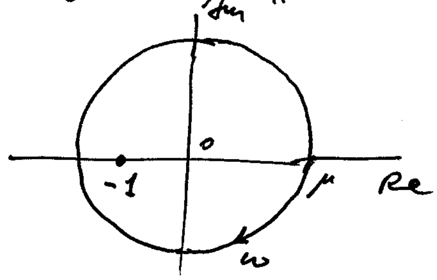
La condizione di stabilità è

$$\#\,Poli^{+}_{GH} = \#\,\overset{\curvearrowleft}{Giri}_{GH/-1}$$

cioè "numero poli positivi di GH" = "numero giri in senso antiorario di GH intorno al punto −1"

Nel caso in esame abbiamo $\#\,Poli^{+}_{GH} = 0$ e, quindi,





$\mu < 1$

$\#\,\overset{\curvearrowleft}{Giri}_{GH/-1} = 0$ $\Rightarrow$ $\mu_{crit} = 1$ $\Leftarrow$ $\mu > 1$

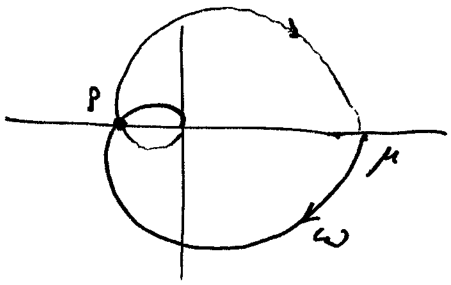
stabilità

$\#\,\overset{\curvearrowleft}{Giri}_{GH/-1} = -1$

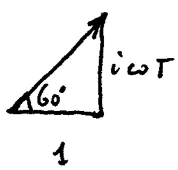
instabilità

SOLUZIONE PROBLEMA 73

Si noti che $\#\,\text{Poli}^{+}_{GH} = 0$ per cui la condizione di stabilità è $\#\,\overleftarrow{\text{Giri}}_{GH/-1} = 0$. Nel caso specifico, il diagramma di Nyquist è



per cui si ha stabilità del sistema ad anello chiuso se e solo se il punto P è alla destra del punto -1.
La pulsazione ω che corrisponde al punto P deve essere tale che il vettore $(1 + i\omega T)$ sia come in figura (perchè $60° \times 3 = 180°$)



Ciò implica che $|1 + i\omega T| = 2$, per cui

$$|GH|_P = \frac{\mu}{2^3} = \frac{\mu}{8}$$

La condizione di stabilità è, allora, $\mu < \mu_{crit} = 8$.

Alla stessa conclusione si perviene (più in fretta) applicando il criterio di Hurwitz al denominatore della funzione di trasferimento del sistema ad anello chiuso

$$\frac{G}{1 + GH} = \cdots = \frac{\cdots}{\mu(1+sT)^3 + 1}$$

Questa osservazione vale anche per il problema precedente.