MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA E MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA

Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica si possono calcolare per ogni autovalore di una matrice; sebbene siano concetti semplici da capire, sono alla base della teoria sulla diagonalizzabilità, sulla triangolarizzabilità e sulla forma canonica di Jordan, di cui ci occuperemo nelle prossime lezioni, quindi è bene avere ben presente come si definiscono e come si calcolano.

In questo articolo chiariremo ogni possibile dubbio sulla **molteplicità algebrica** e sulla **molteplicità geometrica** di un autovalore, dando le definizioni e spiegando come calcolarle. Come nostra abitudine vedremo qualche esempio e concluderemo con un'interessante proprietà che esprime il legame tra molteplicità algebrica e molteplicità geometrica, talvolta utile per risparmiare qualche conto negli esercizi.

Sia ben inteso: daremo per scontato sappiate cosa siano autovalori e autovettori associati a una matrice. In caso di dubbi, prima di procedere oltre vi consigliamo di dare un'occhiata alla lezione del link.

MENU

- Home
- eBook e dispense di Matematica
- Ripetizioni di Matematica
- Penne con formule
- Libri ed eserciziari
- Prove Invalsi
- Blog
- Sostieni YouMath!

Molteplicità algebrica di un autovalore

Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia λ_0 un suo autovalore. Si dice **molteplicità algebrica dell'autovalore** λ_0, e si indica con $m_a(\lambda_0)$, il numero che esprime quante volte l'autovalore λ_0 annulla il polinomio caratteristico.

Ricordiamo che il polinomio caratteristico associato a una matrice quadrata A è il determinante della matrice $A-\lambda\mathrm{Id}_n$, dove A è la matrice in esame, λ è un'incognita e Id_n è la matrice identità dello stesso ordine di A. In formule:

$$p_A(\lambda) := \det(A-\lambda\mathrm{Id}_n)$$

Esempio sul calcolo della molteplicità algebrica

Calcolare la molteplicità algebrica degli autovalori associati alla seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Svolgimento: il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ è dato da

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}_3) =$$

$$= \det \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \det \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1)$$

In questo caso il calcolo del determinante può essere effettuato con la regola di Laplace (sviluppano i calcoli rispetto alla terza riga o alla terza colonna, che contengono due zeri) oppure con la regola di Sarrus.

Gli zeri del polinomio

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

e quindi gli autovalori della matrice A sono $\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = -1$.

Qual è la loro molteplicità algebrica?

$m_a(1) = 2$ in quanto $\lambda_0 = 1$ annulla due volte il polinomio caratteristico;

$m_a(-1) = 1$, infatti $\lambda_1 = -1$ annulla una sola volta $p_A(\lambda)$.

Osservazione sulla somma delle molteplicità algebriche degli autovalori

La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori associati a una matrice non può mai superare l'ordine della matrice. In particolare:

- se si lavora in un campo algebricamente chiuso (qual è il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi), la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori coincide con l'ordine della matrice, infatti un corollario del teorema fondamentale dell'Algebra assicura che in un campo algebricamente chiuso un polinomio di grado n ammette esattamente n radici contate con la loro molteplicità.

- Se siamo in $\mathbb{R}$, invece, la somma delle molteplicità algebriche è minore o al più uguale all'ordine della matrice.

Molteplicità geometrica di un autovalore

Data una matrice quadrata A di ordine n e detto λ_0 un suo autovalore, si definisce **molteplicità geometrica** di λ_0, e si indica con $m_g(\lambda_0)$, la dimensione dell'autospazio relativo a λ_0, cioè il numero di elementi di una qualsiasi base dell'autospazio relativo a λ_0.

In termini pratici la molteplicità geometrica dell'autovalore λ_0 si calcola con la formula

$$m_g(\lambda_0) = n - \mathrm{rk}(A - \lambda_0 \mathrm{Id}_n)$$

dove:

n è l'ordine della matrice quadrata A;

$\mathrm{rk}(A-\lambda_0 \mathrm{Id}_n)$ indica il rango della matrice $(A-\lambda_0 \mathrm{Id}_n)$ ottenuta sottraendo ad A la matrice $\lambda_0 \mathrm{Id}_n$, data dal prodotto dell'autovalore λ_0 per la matrice identità di ordine n.

Esempio sul calcolo della molteplicità geometrica

Riprendiamo la matrice del precedente esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo già calcolato i suoi autovalori che sono $\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = -1$ e le relative molteplicità algebriche. Calcoliamone ora le molteplicità geometriche.

L'ordine della matrice è $n=3$, dunque

$$m_g(\lambda_0) = n - \mathrm{rk}(A - \lambda_0 \mathrm{Id}_3) =$$

$$= 3 - \mathrm{rk}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= 3 - \mathrm{rk}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= 3 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 - 1 = 2$$

$$m_g(\lambda_1) = n - \mathrm{rk}(A - \lambda_1 \mathrm{Id}_3) =$$

$$= 3 - \mathrm{rk}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= 3 - \mathrm{rk}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= 3 - \mathrm{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 - 2 = 1$$

Legame tra molteplicità algebrica e molteplicità geometrica

La molteplicità geometrica di un autovalore associato a una matrice quadrata di ordine n è minore o al più uguale alla molteplicità algebrica dello stesso, ed è al minimo 1:

$$1 \ \leq\ m_g(\lambda_0)\ \leq\ m_a(\lambda_0)\ \leq\ n$$

Di conseguenza se dobbiamo trovare le molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore calcoliamo dapprima la molteplicità algebrica. Se essa è pari a 1 possiamo concludere immediatamente che anche la relativa molteplicità geometrica è pari a 1.