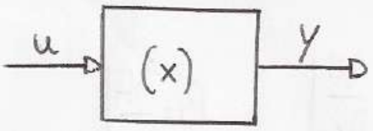
ANDREADD.IT Appunti, esercizi, temi d'esame

AUTOMATICA

SISTEMA DINAMICO: MODELLO STANDARD



VETTORE DI STATO $\underline{x} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$ dove $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le VARIABILI DI STATO

MATRICE DINAMICA

EQUAZIONE DI STATO

EQUAZIONE DI USCITA

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}}$$

Dove u è l'INGRESSO

MATRICE DEGLI INGRESSI

MATRICE DELLE USCITE

$y(\cdot)$, l'andamento dell'uscita in un dato intervallo $t_0 \to t$ dipende da $u(\cdot)$ in $t_0 \to t$ e dallo stato iniziale $x(t_0)$.

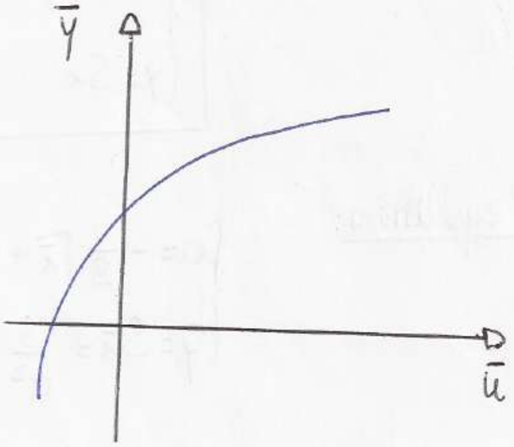
PUNTO DI EQUILIBRIO

$$\dot{x} = 0$$

Tutte le variabili sono costanti

$$\begin{cases} x(t) = \bar{x} \\ y(t) = \bar{y} \\ u(t) = \bar{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases} \xrightarrow{\text{EQUILIBRIO}} \begin{cases} 0 = f(\bar{x},\bar{u}) \to \bar{x} = h(\bar{u}) \\ \bar{y} = g(\bar{x},\bar{u}) \to \bar{y} = g(h(\bar{u}),\bar{u}) \end{cases}$$



CARATTERISTICA STATICA: curva che descrive la relazione ingresso-uscita all'equilibrio

LINEARIZZAZIONE (✱)

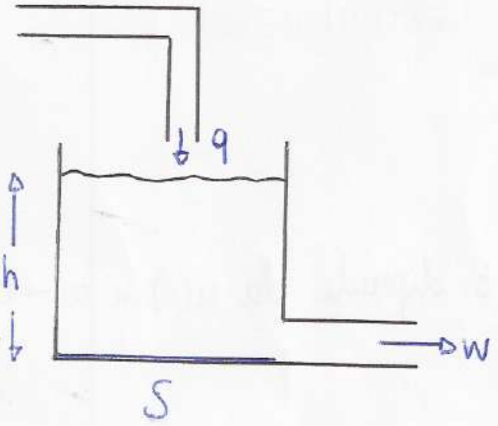
Dato un sistema lineare e un suo punto di equilibrio $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$ $\begin{cases} 0 = f(\bar{x},\bar{u}) \\ \bar{y} = g(\bar{x},\bar{u}) \end{cases}$ possiamo supporre che le variabili oscillino poco attorno al punto di equilibrio e, dunque, linearizzare il sistema attorno al punto stesso.

$$\boxed{\dot{\Delta x} = A\Delta x + B\Delta u} \qquad \boxed{\Delta y = C\Delta x + D\Delta u}$$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \quad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \qquad C = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \quad D = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}}$$

→ esercizio: Scrittura modello, punti di equilibrio, linearizzazione

Variazione di volume del liquido in un serbatoio



$$\Delta V = S\Delta h = q\Delta t - w\Delta t = q\Delta t - \alpha\sqrt{h}\,\Delta t$$

$$S\frac{\Delta h}{\Delta t} = q - \alpha\sqrt{h}$$

$$\Big\downarrow \lim_{\Delta t \to 0}$$

$$\boxed{S\dot{h} = -\alpha\sqrt{h} + q}$$

$$\begin{cases} q = u & \text{CAUSA} \\ h = x & \text{STATO} \\ V = y & \text{USCITA} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\alpha}{S}\sqrt{x} + \frac{1}{S}u \\ y = Sx \end{cases}}$$

Sistema dinamico

All'equilibrio:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\alpha}{\cancel{S}}\sqrt{\bar{x}} + \frac{1}{\cancel{S}}\bar{u} \longrightarrow \bar{x} = \frac{1}{\alpha^2}\bar{u}^2 \\ \bar{y} = S\bar{x} = \frac{S}{\alpha^2}\bar{u}^2 \end{cases}$$

Linearizzazione

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = -\frac{\alpha}{S}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\bar{x}}} = -\frac{\alpha}{S}\cdot\frac{\alpha}{2\bar{u}} = -\frac{\alpha^2}{2S\bar{u}}$$

$$B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = \frac{1}{S}$$

$$C = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = S \qquad D = 0$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\Delta x} = -\frac{\alpha^2}{2S}\cdot\frac{1}{\bar{u}}\Delta x + \frac{1}{S}\Delta u \\ \Delta y = S\Delta x \end{cases}}$$

ANDREADD.IT Appunti, esercizi, temi d'esame

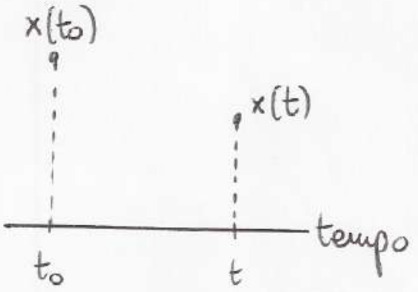
→ STUDIO DEI SISTEMI LINEARI

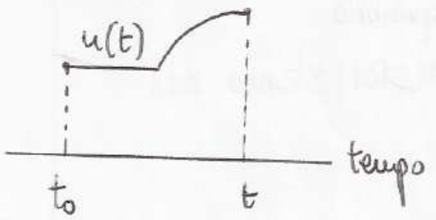
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Gli autovalori del sistema sono gli autovalori di A

$$\boxed{\det[sI - A] = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \ldots + \alpha_n = 0}$$ Equazione caratteristica associata ad A

Gli AUTOVALORI sono le soluzioni del polinomio caratteristico.





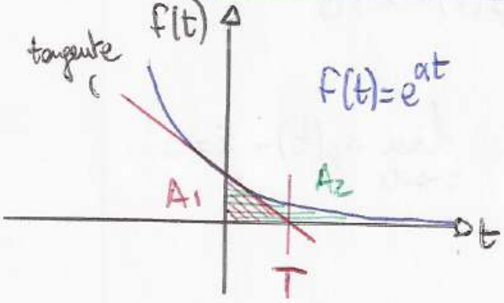
$x(t)$ dipende da
- $x(t_0)$
- $u(\cdot)$ in $t_0 \to t$

Chiamiamo:

- MOVIMENTO LIBERO $x_L(\cdot)$ la soluzione dell'equazione di stato tra t_0 e t quando $u(\cdot) = 0$
- MOVIMENTO FORZATO $x_F(\cdot)$ la soluzione dell'equazione di stato tra t_0 e t quando $x(t_0) = 0$

L'ESPONENZIALE è soluzione di un sistema lineare senza forzante

$$\dot{x} = Ax \rightarrow \boxed{x_L(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)}$$



SVILUPPO IN SERIE: $f(t) = e^{at}$ e $\bar{t} = 0$

$$f(t) = 1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3 + \frac{1}{4!}a^4t^4 + \ldots$$

ESPONENZIALE DI UNA MATRICE:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \ldots$$

T è chiamata COSTANTE DI TEMPO; $A_1 = \frac{1}{2}A_2$

MOVIMENTO FORZATO:

$$\boxed{x_F(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau}$$

→ FORMULA DI LAGRANGE: $$\boxed{x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau}$$ *

ANDREADD.IT
Appunti, esercizi, temi d'esame

→ STABILITÀ

Parliamo di MOVIMENTO PERTURBATO per intendere l'andamento del sistema quando perturbiamo lo stato iniziale ma manteniamo la u uguale.

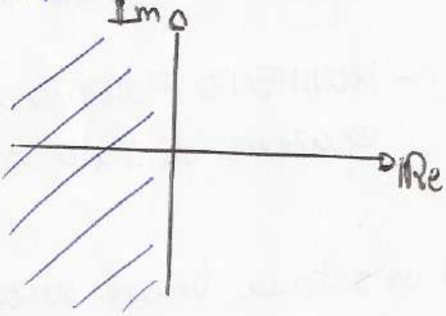
$$\boxed{x_p(t) = e^{A(t-t_0)} x_p(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau}$$

SISTEMA STABILE: $e^{A(t-t_0)}(x_p(t_0) - x(t_0)) \rightarrow 0$

$\forall\, x_p(t_0) - x(t_0)$

Per un SIST. LINEARE Se: $\boxed{\mathrm{Re}\{\lambda_i[A]\} < 0}$ → Vale anche per un SIST. LINEARIZZATO attorn al p. equilibrio

La discrepanza tende a zero quando gli AUTOVALORI stanno nel SEMIPIANO DI STABILITÀ:



Un punto di equilibrio si dice STABILE se: $\lim_{t \to n} x_p(t) - \bar{x} = 0$

" STABILE IN GRANDE (ASINTOTICAMENTE STABILE) se: $\lim_{t \to \infty} x_p(t) - \bar{x} = 0$

CONDIZIONE DI STODOLA: (solo necessaria)

Sia $\det(sI - A) = \alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$

termini di secondo grado!

$\boxed{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ devono avere lo STESSO SEGNO}}$

CRITERIO DI ROUTH-HURWITZ (necessaria e sufficiente):

Sia $\det(sI - A) = \alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$

$$\begin{array}{|c|ccc} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_4 & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \dots \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots \end{array}$$

TUTTI DELLO STESSO SEGNO ← k_1

Dove $h_1 = -\frac{1}{\alpha_1} \det\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{bmatrix}$ $k_2 = -\frac{1}{h_1} \det\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_5 \\ h_1 & h_3 \end{bmatrix}$

$h_2 = -\frac{1}{\alpha_1} \det\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_5 \end{bmatrix}$

$k_1 = -\frac{1}{h_1} \det\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$

ANDREAD.IT Appunti, esercizi, temi d'esame

→ TRASFORMATA DI LAPLACE *

Si passa dal dominio del tempo al dominio della variabile complessa

$$f(t) \longrightarrow F(s)$$

$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ TRASFORMATA DI LAPLACE

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)$

$$\boxed{F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt}$$

Trasformata dell'impulso

$imp(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(t) \longrightarrow F(s) = 1$

Trasformata dello scalino

$f(t) = sca(t) \longrightarrow F(s) = \frac{1}{s}$

Trasformata della rampa

$$ramp(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\overbrace{ramp(t)}^{g(t)} = t \cdot \overbrace{sca(t)}^{f(t)}$$

$$G(s) = -\frac{dF(s)}{ds} = \frac{1}{s^2}$$

Altre funzioni

$e^{\alpha t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-\alpha}$

$\cos \omega t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+\omega^2}$

PROPRIETÀ

- *Linearità:*

$f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s)$

$f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_2(s)$

$f(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$

$F(s) = \alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t)$

- Traslazione in s:

$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$

$g(t) = e^{\alpha t} f(t)$

$g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s) = F(s-\alpha)$

- Derivata in s

$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$

$g(t) = t f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(s) = -\frac{dF(s)}{ds}$

- Derivata in t

$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$

$$\boxed{g(t) = \frac{df(t)}{dt} \longrightarrow G(s) = sF(s) - f(0^+)}$$

$$\boxed{F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{N(s)}{D(s)}}$$

[o]
$N(s) \longrightarrow$ ZERI: $N(s) = 0$
$D(s) \longrightarrow$ POLI: $D(s) = 0$
[x]
} DI UN SEGNALE

In generale Grado $D(s) \geq$ grado $N(s)$

Grado relativo = grado $D(s)$ - grado $N(s)$

ANDREADD.IT Appunti, esercizi, temi d'esame

→ ANTITRASFORMATA $\mathcal{L}^{-1}$ $F(s) \to f(t)$

Teorema valore iniziale: $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \boxed{Y(s)}$

$$\boxed{f(0^+) = \lim_{s \to \infty} sF(s)}$$

$$\boxed{\dot{y}(0) = \lim_{s \to \infty} s(sY(s) - y(0))}$$

Teorema valore finale: $\boxed{f(\infty) = \lim_{s \to 0} sF(s)}$ $\boxed{Y(s)}$ se $\exists f(\infty)$ (poli nel semipiano sn)

→ FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Si applichi la $\mathcal{L}$-TRASF ad un sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} X(s) = (sI-A)^{-1}B\,U(s) + (sI-A)^{-1}x(0^+) \\ Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s) \end{cases}$$

$$\boxed{G(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{x(0)=0} = C(sI-A)^{-1}B + D}$$

Le radici del denominatore di $G(s)$ sono gli autovalori di A.

Guadagno di un sistema

$$\boxed{\mu = CA^{-1}B + D = G(s)|_{s=0}}$$

è la pendenza della CARATTERISTICA STATICA

In generale: $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

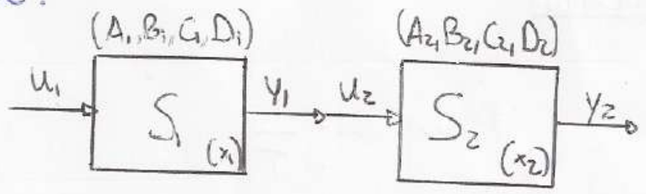
$D(s) = \det(sI - A)$
- $= 0$ grado $N(s) <$ grado $D(s)$ SISTEMA PROPRIO
- $\neq 0$ grado $N(s) =$ grado $D(s)$ SISTEMA IMPROPRIO

ZERI (o): radici $N(s)$ } DI UN SISTEMA
POLI (x): radici $D(s)$ }

ANDREADD.IT Appunti, esercizi, temi d'esame

→ SISTEMI INTERCONNESSI

- Serie:



$$\boxed{y_1 = u_2}$$

$$S_1 \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$$

$$S = S_1 + S_2 \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 + B_2 D_1 u \\ y = C_2 x_2 + D_2 (C_1 x_1 + D_1 u) \end{cases}$$

S è asintoticamente stabile se lo sono sia S_1 che S_2

$$\boxed{G(s) = G_1(s) G_2(s)} = \frac{N_1(s) N_2(s)}{D_1(s) D_2(s)}$$

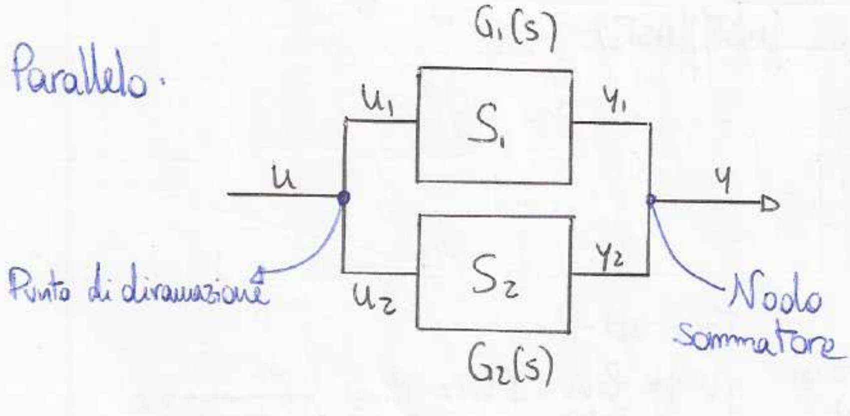
/ ZERI: $N_1(s) N_2(s) = 0$ riunione dei poli

\ POLI: $D_1(s) D_2(s) = 0$ riunione degli zeri

$$\downarrow s=0$$

$$\boxed{\mu = \mu_1 \mu_2}$$

- Parallelo.



$$\begin{cases} u_1(t) = u_2(t) = u(t) \\ y(t) = y_1(t) + y_2(t) \end{cases}$$

$$\boxed{G(s) = G_1(s) + G_2(s)} = \frac{N_1(s) D_2(s) + N_2(s) D_1(s)}{D_1(s) D_2(s)}$$

/ ZERI: $N_1 D_2 + N_2 D_1 = 0$ zeri e poli dei sottosistemi

\ POLI: $D_1 D_2 = 0$ riunione dei poli

S è stabile se e solo se S_1 e S_2 sono stabili

ANDREADD.IT appunti, esercizi, temi d'esame

→ Risposta impulsiva

Consideriamo un sistema del I ORDINE:

$$G(s) = \frac{\mu}{1+sT} \qquad \text{Polo: } s = -\frac{1}{T}$$

Vogliamo trovare $y(\cdot)$ quando $u(t) = imp(t)$

$$\mathcal{L}[imp(t)] = 1 \Rightarrow U(s) = 1$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{1+sT} \longrightarrow y(t) = ?$$

Teo. val. iniz.

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s\mu}{1+sT} = \frac{\mu}{T}$$

Teo. val. fin.

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{\mu}{1+sT} = 0$$

$$Y(s) = \frac{\mu}{1+sT} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{y(t) = \frac{\mu}{T} e^{-1/T}}$$

Sistema II ORDINE : $G(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$

$$u(t) = imp(t) \Rightarrow U(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

Teo. val. iniz.

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{\mu s}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = 0$$

Teo. val. fin.

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\mu s}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = 0$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mu\left[\alpha e^{-t/T_1} + \beta e^{-t/T_2}\right]$$

$$\alpha = -\frac{1}{T_2-T_1} \qquad \beta = \frac{1}{T_2-T_1}$$

ANDREADD.IT
Appunti, esercizi, temi d'esame

→ Risposta a scalino

$G(s) = \frac{\mu}{1+sT}$ (I ORDINE)

$u(t) = sca(t) \longrightarrow U(s) = \frac{1}{s}$

$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{\mu}{1+sT} \cdot \frac{1}{s}$

Val. in: $y(0) = \lim_{s\to\infty} s\,Y(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{\cancel{s}} \frac{\mu}{1+sT} \cdot \cancel{s} = 0$

Val. fin: $y(\infty) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\mu}{1+sT} = \mu$

$$\frac{\mu}{1+sT} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{1+sT} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} k_2 e^{-1/T} \quad = \frac{k_1(1+sT)+k_2 s}{s(1+sT)} = \frac{s(k_1T+k_2)+k_1}{s(1+sT)} \quad \begin{cases} k_2 = -\mu T \\ k_1 = \mu \end{cases}$$

$\frac{k_1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} k_1 sca(t)$

$$\boxed{Y(s) = \frac{\mu}{s} - \frac{\mu T}{1+sT}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \mu sca(t) - \mu T e^{-1/T}$$

esercizio Laplace e risposta a scalino *

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2u \\ y = x \end{cases} \qquad x(0) = 5 \qquad u(t) = sca(t) = \begin{cases} 2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \boxed{y(\cdot) = ?}$$

Applichiamo la $\mathcal{L}$-TRASF:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = -2X(s) + 2U(s) \\ Y(s) = X(s) \end{cases}$$

$X(s)[s+2] = 5 + 2U(s)$

$X(s) = \frac{5}{s+2} + \frac{2}{s+2}U(s) = \frac{5}{s+2} + \frac{2}{s+2} \cdot \frac{2}{s} = Y(s)$

$Y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$

$y(t) = 5e^{-2t} sca(t) + 2e^{-2t} sca(t) - 2sca(t)$

$5e^{-2t} sca(t) + 2e^{-2t} sca(t) - 2sca(t)$

$\tau = \frac{1}{2} \rightarrow$ a regime in 5τ (2,5s)

ANDREADD.IT
Appunti, esercizi, temi d'esame

esercizio Funzione di Trasferimento

$$G(s) = \mu \frac{(1+s\tau)}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \qquad T_2 < T_1 \qquad \text{POLI} \begin{cases} s_1 = -\frac{1}{T_1} \\ s_2 = -\frac{1}{T_2} \end{cases} \qquad s_3 = -\frac{1}{\tau} \qquad U(s) = \frac{U}{s}$$

Valore iniziale

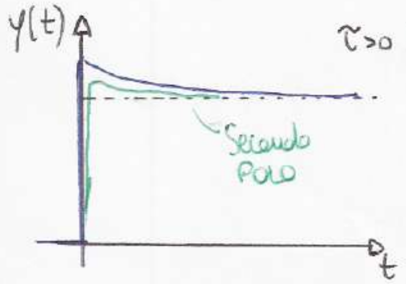
$$y(0) = \lim_{s \to \infty} \cancel{s}\mu \frac{(1+s\tau)}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \cdot \frac{U}{\cancel{s}} = 0$$

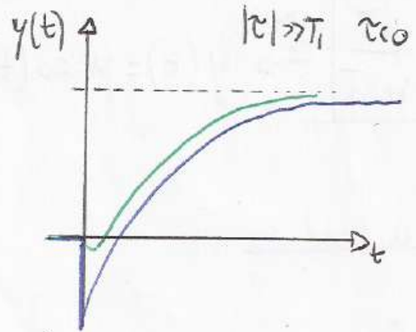
Derivata nell'origine

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \to \infty} s^{\cancel{2}}\mu \frac{(1+s\tau)}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \cdot \frac{U}{\cancel{s}} = \frac{\mu U \tau}{T_1 T_2}$$

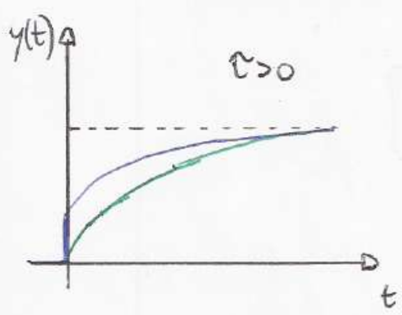
Valore finale

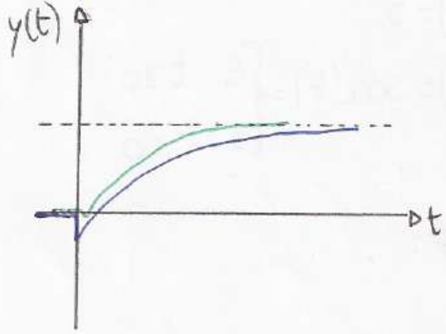
$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot G(s) U(s) = \mu U$$





Il secondo polo addolcisce le risposte polo-zero perchè fa filtraggio passabasso





Ricavo y(t)

$$Y(s) = \mu U \left[\frac{A}{1+sT_1} + \frac{B}{1+sT_2} + \frac{C}{s} \right]$$

$$As + As^2T_2 + Bs + Bs^2T_1 + C + C(T_1+T_2)s + Cs^2T_1T_2 \equiv 1 + s\tau$$

[...]

$$A = \frac{(\tau - T_1)T_1}{(T_1 - T_2)} \qquad B = \frac{(T_2 - \tau)T_2}{T_1 - T_2}$$

$$Y(s) = \mu U \left[\frac{(\tau - T_1)\cancel{T_1}}{T_1 - T_2} \cdot \frac{1}{\cancel{T_1}} \cdot \frac{1}{(s + \frac{1}{T_1})} + \frac{(T_2 - \tau)\cancel{T_2}}{T_1 - T_2} \cdot \frac{1}{\cancel{T_2}} \frac{1}{(s + \frac{1}{T_2})} + \frac{1}{s} \right]$$

ANDREADD.IT
Appunti, esercizi, temi d'esame

$$y(t)=\mu U\left[1+\frac{(\tau-T_1)}{T_1-T_2}e^{-t/T_1}-\frac{\tau-T_2}{T_1-T_2}e^{-t/T_2}\right]sca(t)$$

Se ad esempio:

$\tau=10s$

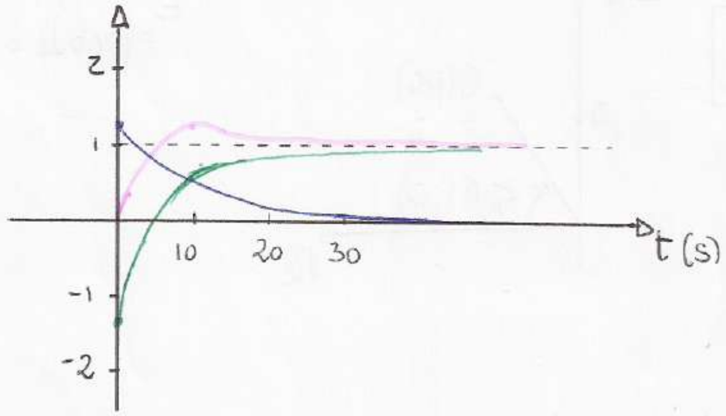
$T_1=5s$

$T_2=1s$

$\mu U=1$

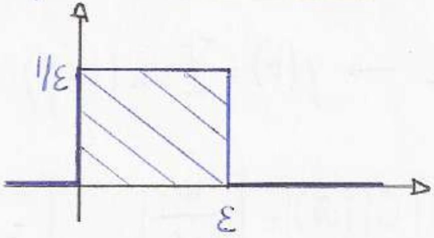
$$y(t)=\Big(1+\underbrace{\frac{5}{4}e^{-t/s}}_{\text{lento}}-\underbrace{\frac{9}{4}e^{-t}}_{\text{veloce}}\Big)sca(t)$$

lento ↓ Tempo di assestamento



esercizio: La risposta all'impulso è la derivata della risposta allo scalino

$$\begin{cases}\dot{x}=-2x+2u\\ y=x\end{cases}\quad x(0)=0 \qquad u(t)=\begin{cases}1/\varepsilon & 0<t<\varepsilon\\ 0 & t<0 \vee t>\varepsilon\end{cases}$$



$$x(t)=\int_0^t e^{-2(t-\tau)}\cdot 2\frac{1}{\varepsilon}d\tau=2\frac{1}{\varepsilon}e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau=\cancel{2}\frac{1}{\varepsilon}e^{-2t}\left[\frac{e^{2\tau}}{\cancel{2}}\right]_0^t=(1-e^{-2t})\frac{1}{\varepsilon}\qquad 0<t<\varepsilon$$

Riducendo sempre di più il valore di ε $\left(t>\varepsilon:\ x(t)=\frac{1}{\varepsilon}(1-e^{-2\varepsilon})e^{-2t}\right)$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}(1-e^{-2\varepsilon})e^{-2t}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{H}{=}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-e^{-2t}(e^{-2\varepsilon})(-2)}{1}=2e^{-2t}$$

$$\boxed{x(t)=2e^{-2t}}$$

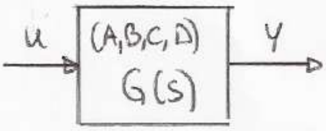
$$x(t)=(1-e^{-2t})sca(t)\xrightarrow{\frac{d}{dt}}\frac{dx(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(sca(t)-e^{-2t}sca(t)\right)=imp(t)-e^{-2t}\cdot(-2)sca(t)-e^{-2t}\cdot imp(t)=$$

$$=(1-e^{-2t})imp(t)+2e^{-2t}sca(t)$$

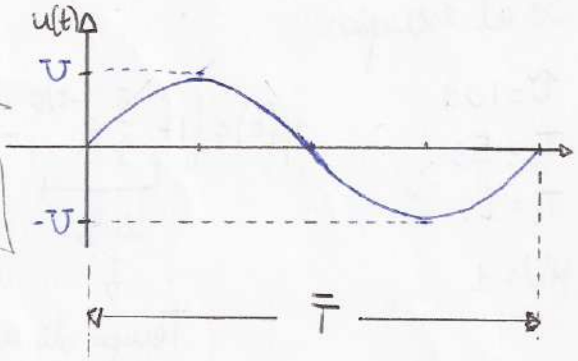
In $t=0$ si applica l'impulso:

$$\frac{dx(t)}{dt}=2e^{-2t}sca(t)$$

→ Risposta sinusoidale *



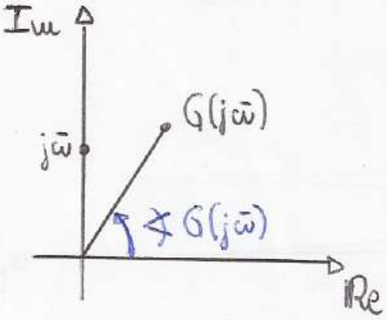
$u(t) = U \sin(\bar{\omega} t) \longrightarrow \boxed{y(t) = \underbrace{Y}_{\text{ampiezza}} \sin(\bar{\omega} t + \underbrace{\beta}_{\text{fase}})}$



$\bar{T}$ = periodo = $\frac{1}{\bar{f}}$ $\boxed{\bar{\omega} = 2\pi \bar{f}}$

AMPIEZZA: $\boxed{Y = |G(j\bar{\omega})|\, U}$

FASE: $\boxed{\beta = \measuredangle G(j\bar{\omega})}$



esempio

$G(s) = \frac{100}{1+s}$ $u(t) = 5\sin(t)$

$\bar{\omega} = 1 \rightarrow y(t) = Y \sin(t + \beta)$

$Y = |G(j\bar{\omega})| = \left| \frac{100}{1+s} \Big|_{s=j\bar{\omega}} \right| = \left| \frac{100}{1+j\bar{\omega}} \right| = \frac{100}{\sqrt{1+\bar{\omega}^2}} = \frac{100}{\sqrt{2}}$

$\beta = \measuredangle G(j1) = \measuredangle \frac{100}{1+j1} = \measuredangle 100 - (1+j1) = 0 - 45°$

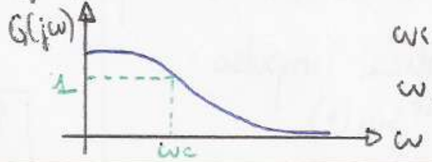
Considerando invece $u(t) = 5\sin(\omega(t))$ vogliamo trovare come cambia $y(\cdot)$ al variare di ω.

$G(j\omega) = \frac{100}{\boxed{1+j\omega}}$ Per $\omega = 0$ $G = 100$

↳ Al crescere di ω il denom cresce in modo monotono → ∞

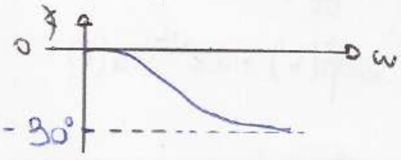
$|G(j\omega)|$ È MONOTONO DECRESCENTE

$\measuredangle G(j\omega) = -\measuredangle(1+j\omega)$ per ω crescente passa da 0° a -90°



$\omega < \omega_c$ $Y > U$

$\omega > \omega_c$ $Y < U$



ANDREADD.IT
Appunti, esercizi, temi d'esame

→ Rappresentazioni della risposta in frequenza

DIAGRAMMI DI BODE DEL MODULO

$$G(s) = \frac{M(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)\ldots}{(1+sT_1)(1+sT_2)\ldots}$$

ASCISSE: scala in decadi $x = \Delta \log_{10} \omega$

ORDINATE: $|G(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)|$

1) Si disegnano le pulsazioni di taglio (ω_i)

2) In corrispondenza di una ω_i associata ad un POLO di molteplicità K la pendenza SCENDE di $-20k$ dB/decade

3) In corrispondenza di una ω_i associata ad uno ZERO di molteplicità k la pendenza SALE di $+20k$ dB/decade

4) Nel caso di POLI/ZERI nell'origine si considera una $G'(s) = \frac{M}{s}$ $\left(= \frac{s}{M'}\right)$ e, trascurando le alte frequenze, si individua un punto da cui iniziare a tracciare la pendenza data da POLO/ZERO

esempio (diagramma asintotico)

$$G(s) = \frac{10}{s} \cdot \frac{(1+s)}{(1+s \cdot 0{,}01)}$$

$\omega_{P_1} = 0$ rad/s $\quad \omega_{P_2} = \frac{1}{0{,}01} = 100$ rad/s $\quad \omega_z = 1$ rad/s

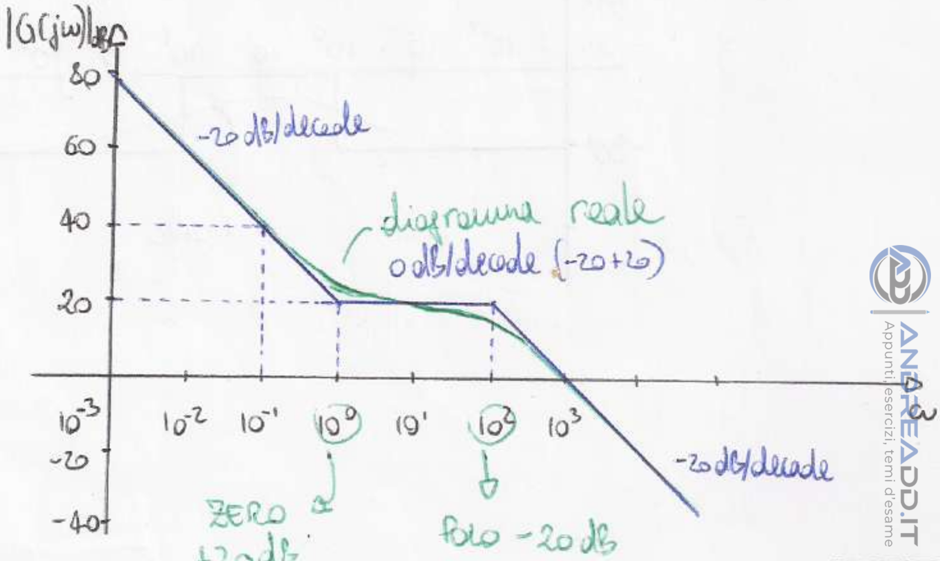
$$|G(j\omega)|_{\omega=0} = \infty$$

Consideriamo $G'(s) = \frac{10}{s}$

(trascuriamo le alte frequenze) e il punto $\omega = 1$

$$|G'(j\omega)|_{\omega=1} = 10 \Rightarrow 20 \text{ dB}$$

$\omega_{P_1} = 0$ rad/s → Nell'origine pendenza -20 dB/decade



ANDREADD.IT Appunti, esercizi, temi d'esame

DIAGRAMMI DI BODE DELLA FASE

$$G(s)=\frac{\mu(1\pm s\tau_1)(1\pm s\tau_2)\dots}{(1\pm sT_1)(1\pm sT_2)\dots}$$ ✳

ASCISSE: scala in decadi $x=\Delta\log_{10}\omega$

ORDINATE: $\measuredangle G(j\omega)$

Se $\mu<0$ aggiungere sfasamento di ±180° (-180° se dobbiamo usare il criterio di Bode)

1) Si disegnano le PULSAZIONI DI TAGLIO ω_i

2) In corrispondenza di una ω_i associata ad un POLO STABILE $(1+sT_i)$ (semipiano sx) di molteplicità k, la FASE SCENDE di $-k90°$

2b) In corrispondenza di una ω_i associata ad un POLO INSTABILE $(1-sT_i)$ (semipiano dx) di molteplicità k, la FASE SALE di $+k90°$

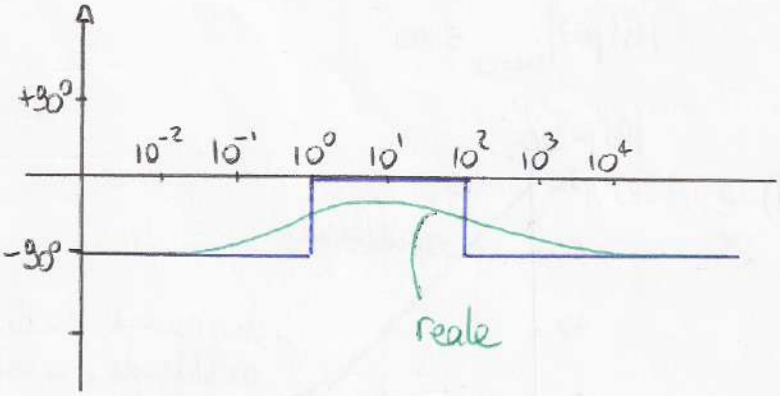
3) In corrispondenza di una ω_i associata ad uno ZERO STABILE $(1+s\tau_i)$ (semipiano sx) di molteplicità k, la FASE SALE di $+k90°$

3b) In corrispondenza di una ω_i associata ad uno ZERO INSTABILE $(1-s\tau_i)$ (semipiano dx) di molteplicità k, la FASE SCENDE di $-k90°$

4) Se si ha un POLO o uno ZERO nell'origine la fase parte già con uno sfasamento di $\pm k90°$

esempio

$$G(s)=\frac{10}{s}\cdot\frac{(1+s)}{(1+s\cdot 0{,}01)}$$



ANDREADD.IT Appunti, esercizi, temi d'esame

DIAGRAMMI POLARI E DI NYQUIST

$\{ |G(j\omega)| \text{ per } \omega \text{ da } 0 \text{ a } +\infty \}$ Diagramma polare

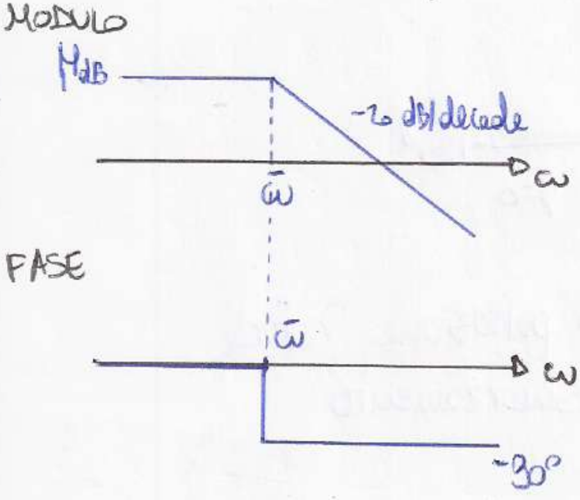
Il diagramma polare è l'immagine dell'asse immaginario positivo attraverso la $G(j\omega)$

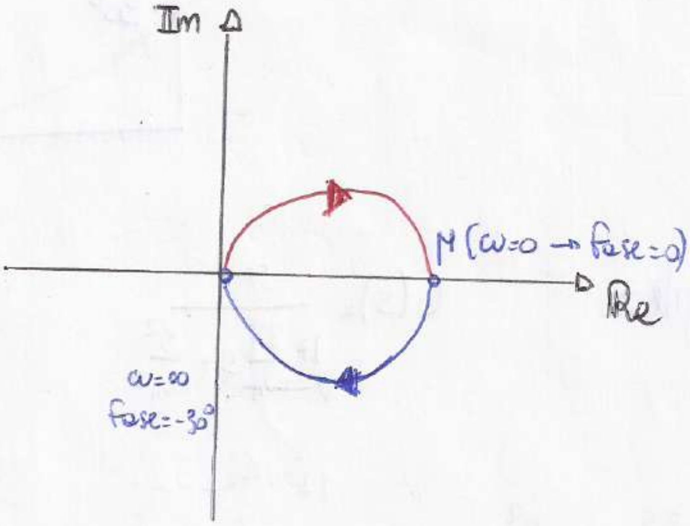
Il diagramma di Nyquist e l'unione del diagramma polere col suo simmetrico rispetto all'asse delle ascisse

esempio

$G(s)=\frac{\mu}{1+sT}$ $\mu>0, T>0$

$\bar{\omega}=\frac{1}{T}$





Per i diagrammi polari possiamo scrivere la FUNZIONE DI TRASFERIMENTO COME:

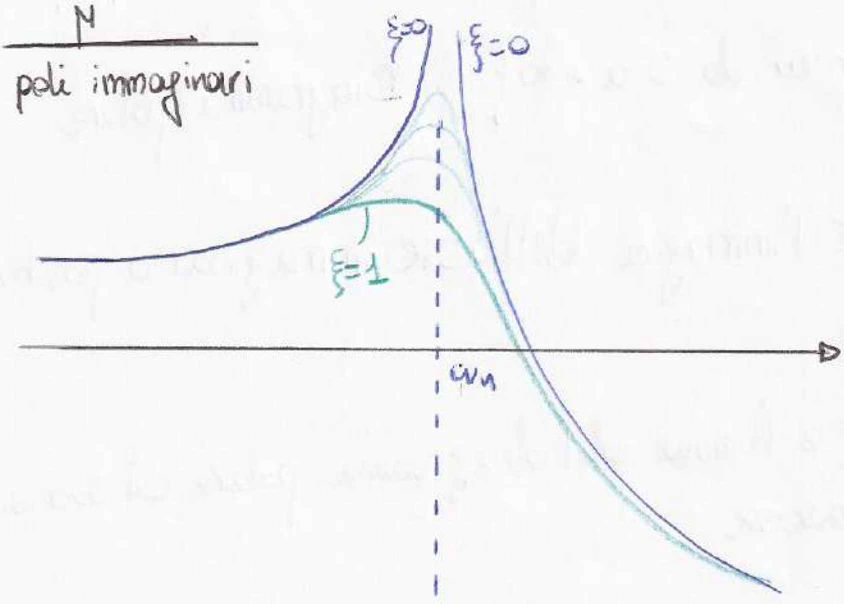
$$\boxed{G(s)=\rho\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots}{(s-p_1)(s-p_2)\dots}}$$

Quando abbiamo un polo sull'asse immaginario consideriamo un percorso deviato lungo una circonferenza di raggio infinitesimo.

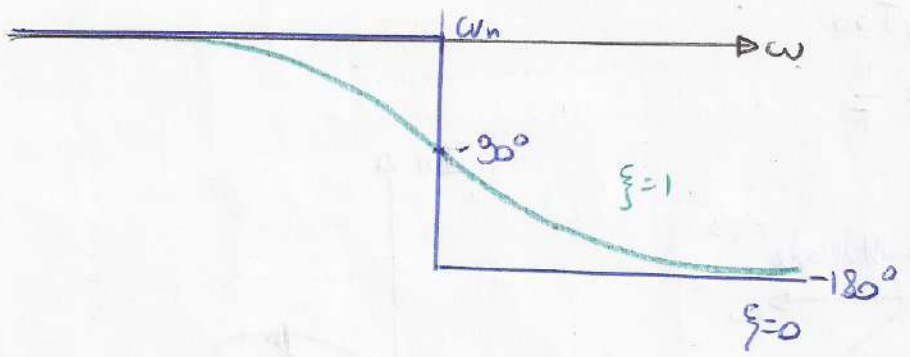
ANDREADD.IT Appunti, esercizi, temi d'esame

POLI IMMAGINARI E COMPLESSI CONIUGATI

$$G(s) = \frac{M}{\text{poli immaginari}}$$



Fenomeno della RISONANZA



Poli complessi

$$G(s) = \frac{M}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

ω_n = pulsazione naturale

ξ = smorzamento

$$1 + \frac{4}{3}s + \frac{s^2}{4} \qquad \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{4}{3} \qquad \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{1}{4} \qquad \omega_n = 2 \qquad \frac{2\xi}{2} = \frac{4}{3} \quad \xi = \frac{4}{3}$$

$$p_{1,2} = 1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2} = 0$$

$$p_{1,2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_n$$

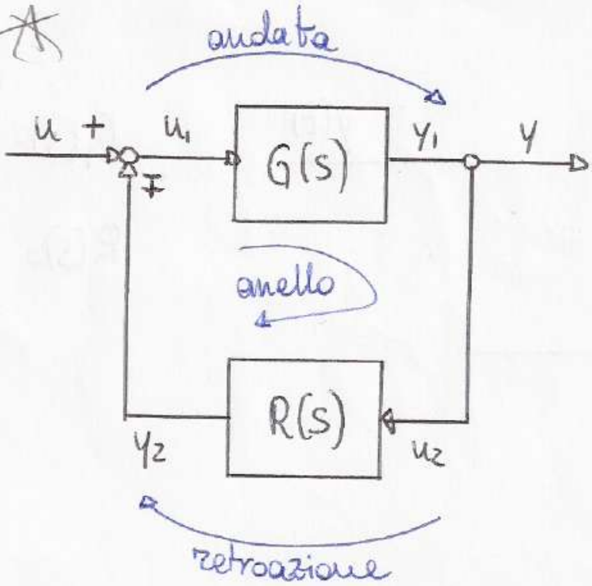
I poli sono COMPLESSI CONIUGATI se $0 < \xi < 1$

Nella risposta allo scalino: $$Y_{MAX} = M\left(1 + e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi}}}\right)$$

$$\bar{t} = \frac{\tau T}{\tau - T}$$

ANDREADD.IT Appunti, esercizi, temi d'esame

→ Retroazione ✱



RETROAZIONE NEGATIVA: $Y(s) = Y_1(s) = G(s)U_1(s) = G(s)[U(s) - Y_2(s)] =$

$$= G(s)U(s) - G(s)R(s)U_2(s)$$

$$[1 + G(s)R(s)]Y(s) = G(s)U(s)$$

$$\boxed{F(s) = \frac{\overset{\text{LINEA ANDATA}}{G(s)}}{1 + \underbrace{G(s)R(s)}_{\text{ANELLO}}}}$$

Funzione di trasferimento complessiva (anello chiuso)

$$\boxed{\mathcal{L}(s) = G(s)R(s)}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO AD ANELLO (aperto)

$$G(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad R(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \quad F(s) = \frac{\frac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1 + \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

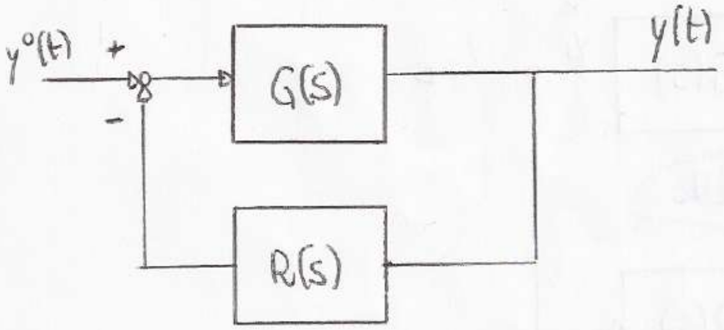
POLI: $D_1D_2 + N_1N_2 = 0$ (STABILIZZARE SISTEMA INSTABILE)

ZERI: $N_1D_2 = 0$

RETROAZIONE POSITIVA $F(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)R(s)}$

ANDREADD.IT
Appunti, esercizi, temi d'esame

esercizio retroazione



$G(s) = \frac{10^4}{1+s}$

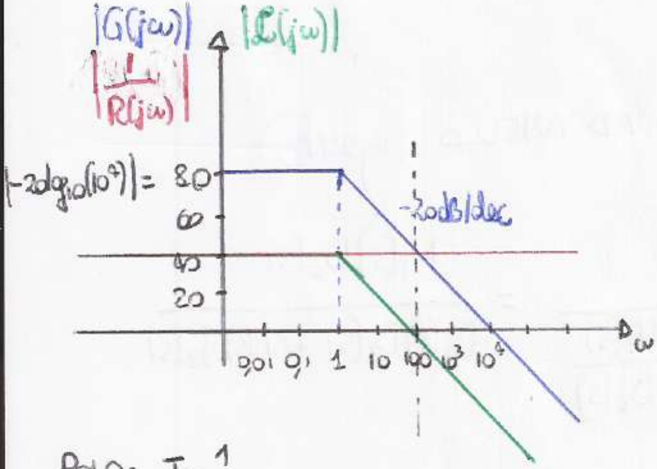
$R(s) = \frac{1}{10^2}$

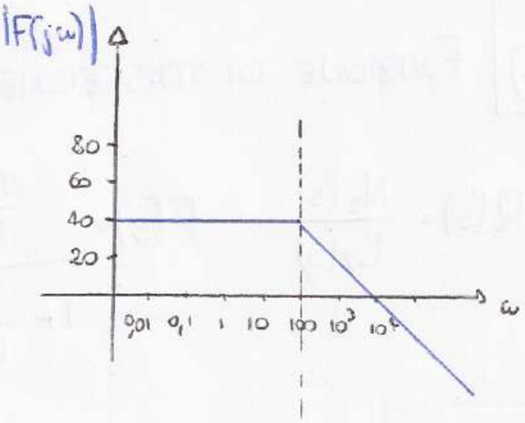
FdT da $y^\circ(t)$ a $y(t)$

$$y(s) = G(s)\left[y^\circ(s) - R(s)y(s)\right] = G(s)y^\circ(s) - G(s)R(s)y(s)$$

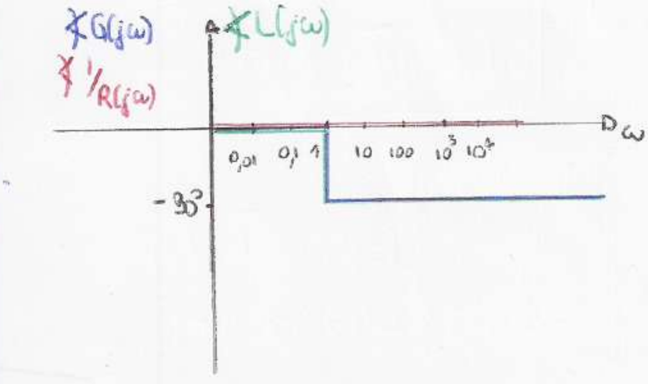
$$y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)R(s)}\,y^\circ(s) \qquad \mathcal{L}(s) = G(s)R(s) = \frac{10^2}{1+s}$$

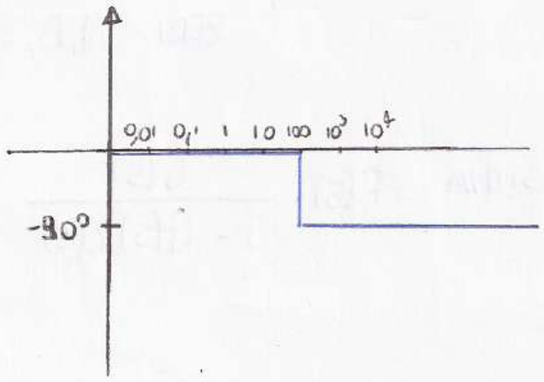
$$F(s) = \frac{R(s)}{R(s)} \cdot \frac{G(s)}{1+G(s)R(s)} = \frac{1}{R(s)} \cdot \frac{L(s)}{1+L(s)} \quad \begin{cases} \overset{|L(j\omega)|_{dB}>0}{\overset{\shortparallel}{|L(j\omega)|>1}} \Rightarrow \hat{F}(s) = \frac{1}{R(s)} = 100 \\ |L(j\omega)|<1 \Rightarrow \hat{F}(s) = \frac{L(s)}{R(s)} = G(s) \end{cases}$$





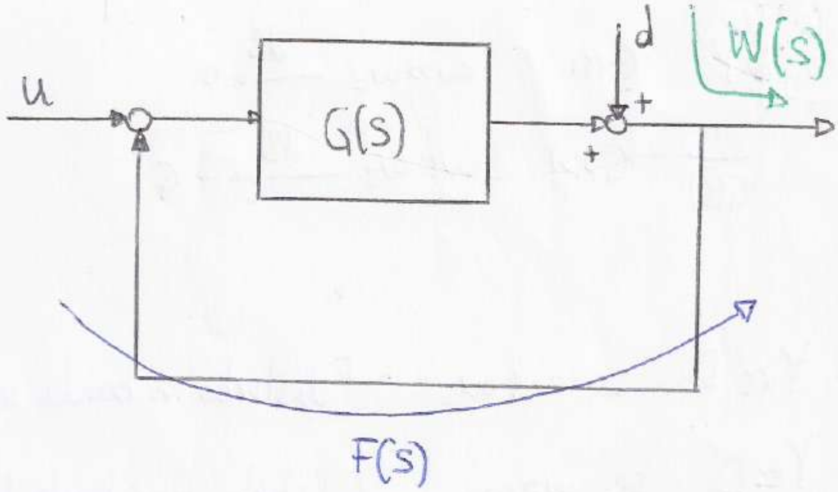
Polo: $T = \frac{1}{1}$





ANDREADD.IT
Appunti, esercizi, temi d'esame

→Risposta in frequenza di un sistema a retroazione



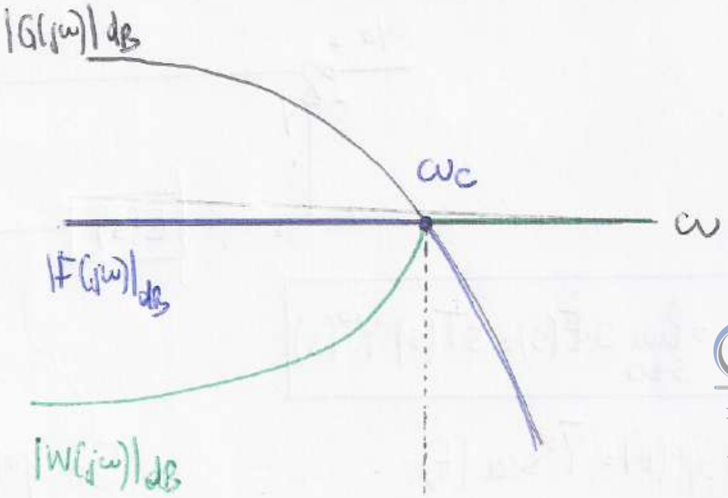
FdT da u a y: $F(s) = \frac{\text{linea andata}}{1 + \text{Fdt anello}} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$

$$F(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} = \begin{cases} 1 & G \gg 1 \\ G(j\omega) & G \ll 1 \end{cases}$$

Andiamo dunque a vedere, tramite i diagrammi di Bode, quando $G(j\omega) \geq 1$

$G(j\omega) \geq 1 \iff |G(j\omega)|_{dB} \geq 0$

$G(j\omega) \leq 1 \iff |G(j\omega)|_{dB} \leq 0$



In anello aperto

$\begin{cases} B > A & \text{se } \omega < \omega_c \\ B < A & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases}$

In anello chiuso

$\begin{cases} B = A & \text{se } \omega < \omega_c \\ B < A & \text{se } \omega < \omega_c \end{cases}$

ANDREADD.IT
Appunti, esercizi, temi d'esame

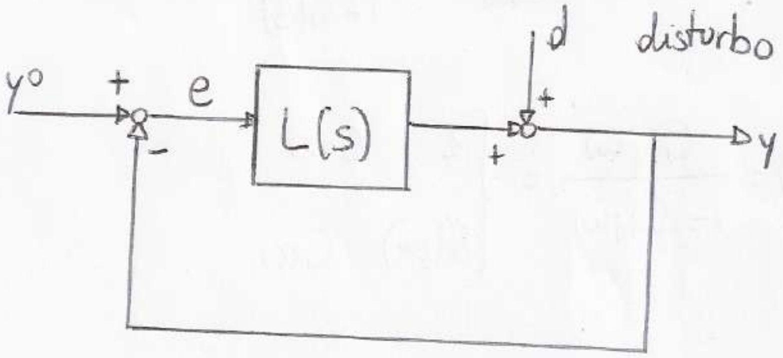
FdT da d a y

$$W(s)=\frac{1}{1+G(s)}=\begin{cases}1 & G\ll 1 \quad \omega\gg\omega_c \xrightarrow{dB} 0\\ \frac{1}{G(s)} & G\gg 1 \quad \omega\ll\omega_c \xrightarrow{dB} -G\end{cases}$$

$d = D \sin at$ $\qquad Y \ll D$ se $\omega < \omega_c$ [disturbo in banda attenuato]

$y = Y \sin(\omega t + \varphi)$ $\qquad Y \simeq D$ se $\omega > \omega_c$ [disturbo fuori banda lo troviamo in y]

→ Sistemi di controllo a retroazione

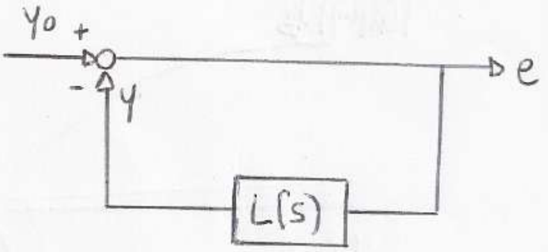


Sistema stabile

y° segnale di riferimento

$\boxed{e = y - y^o}$ più piccolo possibile! (a regime)

Consideriamo il sistema a regime e con $d=0$



$$T(s)=\frac{1}{1+L(s)}$$

$$E(s)=T(s)Y^o(s)$$

$$\boxed{e_\infty=\lim_{s\to 0} s\cdot E(s)=sT(s)Y^o(s)}$$

Se $y^o(t)=\bar{Y}^o \operatorname{sca}(t)$

L(s) TIPO > ZERO $\therefore e_\infty=0$

↳ DIFFICILE DA STABILIZZARE

Se $y^o(t)=\bar{Y}^o \operatorname{ramp}(t)$

L(s) TIPO > 1 $\quad e_\infty=0$

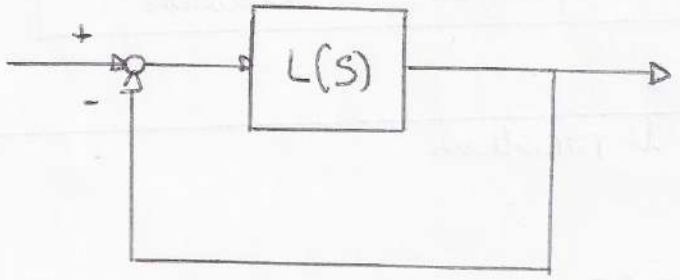
Più il segnale è veloce più è maggiore il tipo di sistema per avere e finito

ANDREADD.IT Appunti, esercizi, temi d'esame

STABILITÁ SISTEMA RETROAZIONATO *

Vogliamo caratterizzare R(S) affinché il sistema retroazionato sia stabile

Criterio di Nyquist



∄ AUTOVALORI NASCOSTI

Sia $L(S)=R(s)G(s)$

Chiamiamo p_D il NUMERO DEI POLI di $L(s)$ nel semipiano destro

Indichiamo con $\overset{\circlearrowleft}{N}$ il NUMERO DELLE ROTAZIONI compiute dal DIAGRAMMA DI NYQUIST attorno al PUNTO -1 (+1 se la retroazione è positiva)

Il sistema in ANELLO CHIUSO è stabile quando

$$\boxed{\overset{\circlearrowleft}{N} = p_D}$$

Criterio di Bode

- L(s) ∄ poli Re>0
- ∄ AUTOVALORI NASCOSTI del sistema in ANELLO APERTO
- ω_c definita

Chiamata φ_c la FASE CORRISPONDENTE al punto in cui il diagramma di Bode del modulo TOCCA LO ZERO

$$\varphi_N = 180° - |\varphi_c°| - k\tan^{-1}\left(\frac{\frac{\omega_c}{\omega_{p/z}}}{1}\right)$$

$\omega_{p/z}$ è la ω del polo/zero più vicino a ω_c

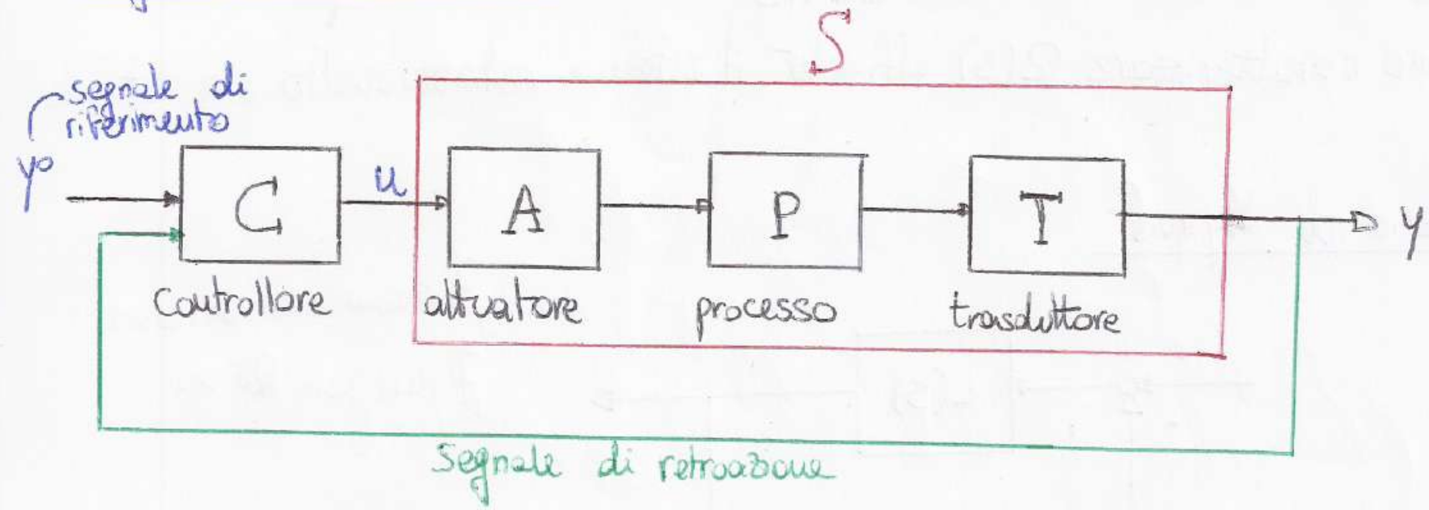
$$\boxed{\varphi_N > 0° \Rightarrow \text{Sistema in ANELLO CHIUSO STABILE}}$$

$\varphi_N > 75°$ POLI REALI

$\varphi_N < 75°$ POLI COMPLESSI CONIUGATI (più piccolo è φ_N più ampie sono le sovraelongazioni)

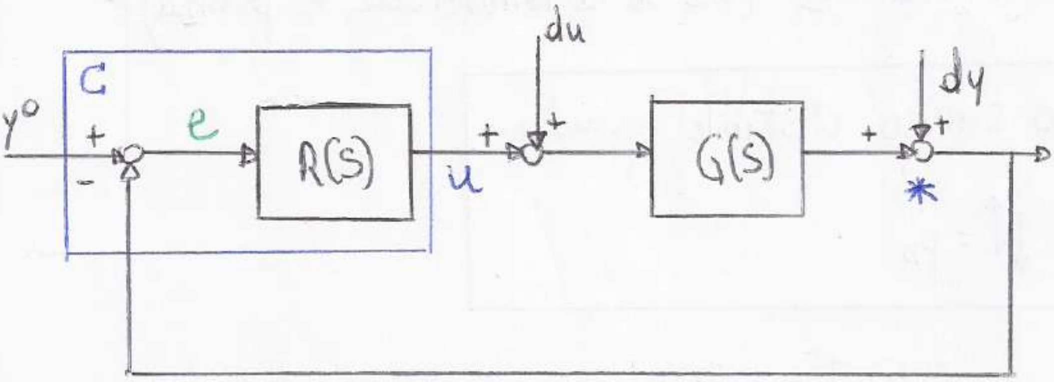
ANDREADD.IT
Appunti, esercizi, temi d'esame

→ Progetto di controllore

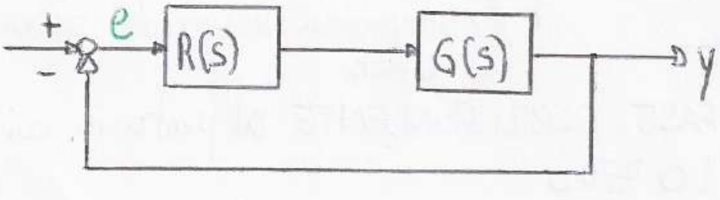


SPECIFICHE PER IL CONTROLLORE

- STABILITÁ ← in contrasto
- SPOSTAMENTO A REGIME $e=y^o-y$ "PICCOLO"
- "BREVE" DURATA DEI TRANSITORI
- FORMA DEI TRANSITORI "REGOLARE" (senza sovra/sotto elongazioni elevate)



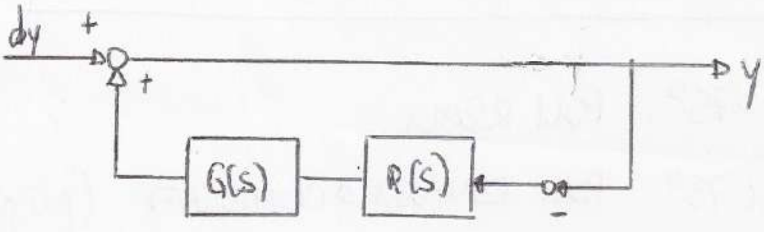
Legame $y^o \rightarrow y$



fdT anello: $L(s)=R(s)G(s)$

fdT $y^o \rightarrow y$: $\boxed{F(s)=\frac{L(s)}{1+L(s)}} \longrightarrow 1$

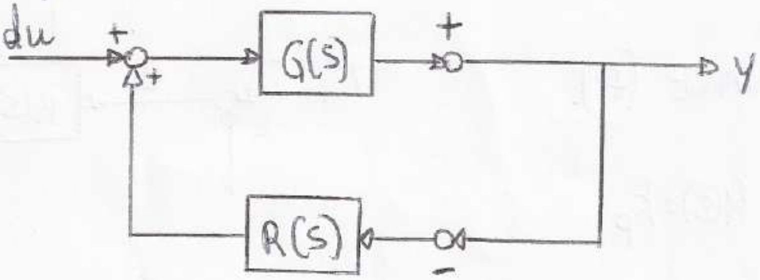
Legame $dy \rightarrow y$ (legame $y^o \rightarrow e$)



$\boxed{T(s)=\frac{1}{1+L(s)}}$

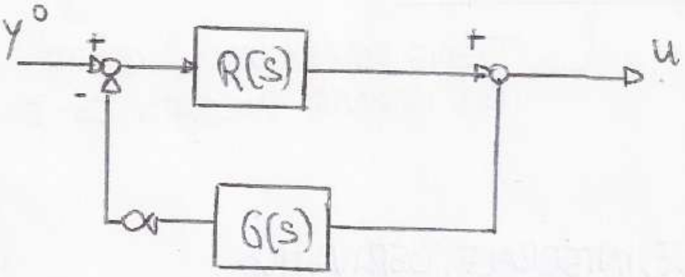
ANDREADD.IT
Appunti, esercizi, temi d'esame

Legame du → y



$$\boxed{W(s) = \frac{\text{fdT andata}}{1 + \text{fdT anello}} = \frac{G(s)}{1 + L(s)}}$$

Legame y° → u



$$\boxed{S(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)}}$$

LA BANDA DEI QUATTRO

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \longrightarrow 1 \qquad S(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)}$$

$$T(s) = \frac{1}{1+L(s)} \longrightarrow 0 \qquad W(s) = \frac{G(s)}{1+L(s)}$$

VELOCITÁ DI RISPOSTA $\quad F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{1}{1+sT_c}$

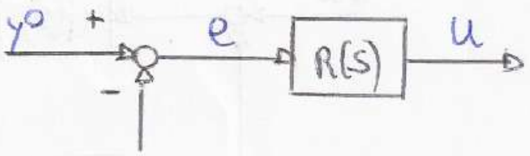
La risposta in ANELLO CHIUSO é tanto più rapida quanto più T_c é piccola, ovvero quanto più ampia è la banda passante ($y = u$).

Più riduciamo la banda passante più il sistema è stabile ma meno rapido.

ANDREADD.IT Appunti, esercizi, temi d'esame

→ Controllori standard

- CONTROLLORE PROPORZIONALE (P)



$$\boxed{u(t) = k_p e(t)} \qquad R(s) = k_p$$

- CONTROLLORE PROPORZIONALE INTEGRALE (PI)

$$\boxed{u(t) = \underbrace{k_p e(t)}_{\text{VALORE ISTANTANEO}} + k_I \underbrace{\int_{t_0}^{t} e(\tau) d\tau}_{}} \qquad R(s) = k_p + \frac{k_I}{s} = \frac{k_p s + k_I}{s}$$

↳ TIENE PRESENTE L'ERRORE NELL'ISTANTE PASSATO $t_0 - t$

- CONTROLLORE PROPORZIONALE, INTEGRALE, DERIVATIVO

$$\boxed{u(t) = k_p e(t) + k_I \int_{t_0}^{t} e(\tau) d\tau + k_D \frac{de}{dt}} \qquad R(s) = k_p + \frac{k_I}{s} + \cancel{k_D \cdot s = \frac{k_D s^2 + k_p s + k_I}{s}}$$

Non fisicamente possibile

ANDREADD.IT Appunti, esercizi, temi d'esame

→ Luogo delle radici

Consideriamo un sistema RETROAZIONATO e la sua fdT d'anello

$$L(s) = \rho \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots}{(s-p_1)(s-p_2)\dots}$$

Consideriamo l'anello chiuso $F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\dots}{\boxed{D^*(s)+\rho N^*(s)}}$ poli in anello chiuso

Definiamo LUOGO DELLE RADICI l'insieme dei punti del piano che soddisfano la seguente equazione al variare di ρ.

$$\rho N^*(s) + D^*(s) = 0$$

$$\begin{cases} \rho > 0 & \text{LUOGO DIRETTO} \\ \rho < 0 & \text{LUOGO INVERSO} \end{cases}$$

REGOLE

1) Il luogo è simmetrico rispetto all'asse Reale
2) Fanno parte del luogo diretto i punti dell'asse Reale a sinistra di un numero dispari di singolarità.
   Fanno parte del luogo inverso i punti restanti
3) Il numero di rami del luogo è pari al numero di poli di $L(s)$
4) Dai poli di $L(s)$ partono i rami del luogo
5) Se $M_{poli} = N_{zeri}$ di $L(s)$ i rami per $\rho \to \infty$ tendono agli zeri di $L(s)$, che non cambiano posizione da anello aperto o chiuso.
   Se $M_{poli} < N_{zeri}$ vi sono N-M rami $\to \infty$ per $\rho \to \infty$
   I rami che tendono a ∞ hanno asintoti che si incontrano in
   $x = \frac{-\Sigma z_i + \Sigma p_i}{n-m}$ Angolo formato: $\theta_{k+1} = \frac{180° + k360°}{n-m}$ θ_1 per $k=0$, θ_2 per $k=1$...

ANDREADD.IT Appunti, esercizi, temi d'esame

6) I punti di incrocio dei rami sull'asse Reale si possono determinare trovando i MINIMI e i MASSIMI RELATIVI della funzione

$$\mu(x) = -\frac{D(x)}{N^*(x)}$$

$\begin{cases} \text{Sia } \bar{x} \text{ un MINIMO e } s=\bar{x} \in \text{luogo diretto allora i due rami CONFLUISCONO in } \bar{x} \\ \text{Se } \bar{x} \text{ è un MASSIMO e } s=\bar{x} \in \text{luogo diretto allora i rami, dopo essersi incontrati in } \bar{x}, \text{ si separano diventando complessi} \end{cases}$

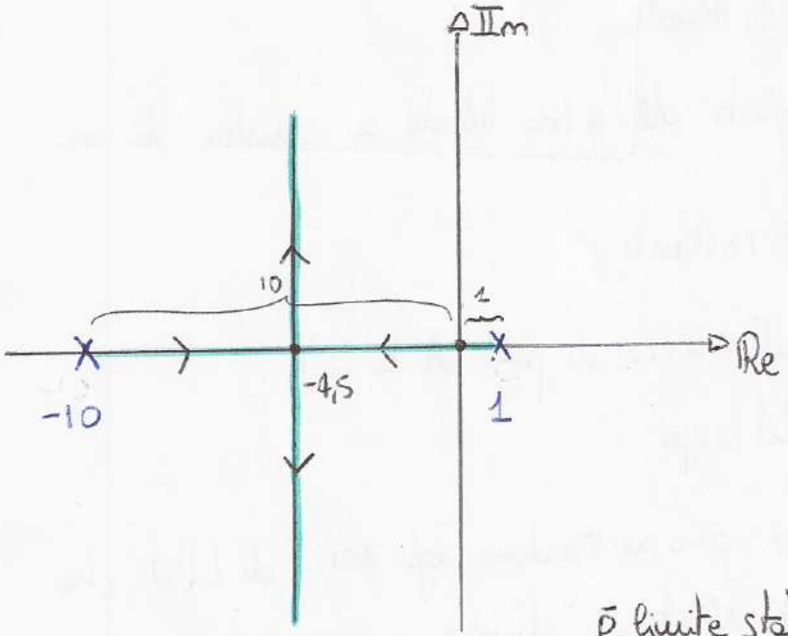
7) Si può PUNTEGGIARE in ρ il luogo dopo che è stato tracciato

$$|\bar{\rho}| = \frac{\text{prodotto distanze punto-poli } L(s)}{\text{prodotto distanze punto-zeri } L(s)}$$

esempio

$$L(s) = \rho \frac{1}{(s-1)(s+10)}$$

$\left.\begin{array}{l} 2 \text{ POLI REALI} \\ \nexists \text{ ZERI} \end{array}\right\} 2 \text{ RAMI} \to \infty$



🟩 LUOGO

$$\theta_1 = \frac{180° + k360°}{2} = \frac{180° + 0°}{2} = 90°$$

$$\theta_2 = \frac{180° + 360°}{2} = 270°$$

$$\mu = -\frac{D(x)}{N^*(x)} = -\frac{(x-1)(x+10)}{1}$$

$$\frac{d\mu}{dx} = -2x - 9 = 0 \quad \boxed{x = -4,5 \text{ MASSIMO}}$$

$\bar{\rho}_1$ limite stabilità anello chiuso (punto. ORIGINE)

$$|\bar{\rho}_1| = \frac{1 \cdot 10}{1} = 10 \quad \begin{array}{l} \rho \geq 10 \text{ s. stabile} \\ \rho < 10 \text{ instabile} \end{array}$$

$\bar{\rho}_2$ limite per poli complessi coniugati $(-4,5\,;0)$ $|\bar{\rho}_2| = \frac{(10-4,5)(4,5+1)}{1} = 30,25 \begin{cases} \rho > 30,25 \text{ C.C} \\ \rho < 30,25 \text{ Re} \end{cases}$

ANDREADD.IT Appunti, esercizi, temi d'esame

→ Sistemi con anticipo/ritardo

Con la rete anticipatrice a correggere possiamo ottenere un sistema stabile a partire da uno instabile in anello chiuso.

$\Delta\varphi > 0$ se la rete è anticipatrice

Molte volte, invece, ci sono dei RITARDI dell'attuatore rispetto al controllore

$$y(t) = u(t-\tau)$$
$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$$
$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$$

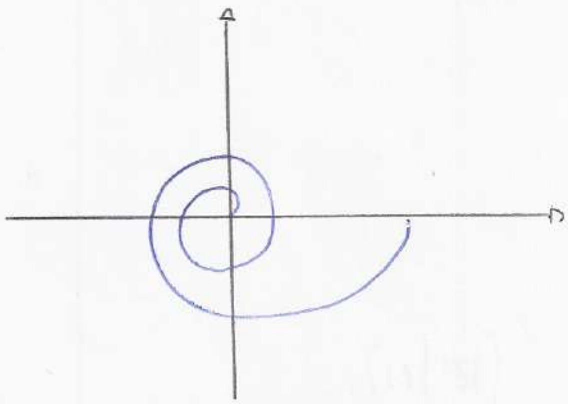
τ è il RITARDO

$$\mathcal{L}[y(t)] = \int_0^{+\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} u(t-\tau)e^{-st}dt \underset{\uparrow}{=} \int_{\tau}^{+\infty} u(x)e^{-s(x+\tau)}dx = e^{-s\tau}\int_{\tau}^{+\infty} u(x)e^{-sx}dx$$

$$\begin{array}{|l|} x = t-\tau \\ t = x+\tau \\ dx = dt \end{array}$$

$$Y(s) = e^{-s\tau}\,U(s)$$

Diagramma di Nyquist d'esempio



Le SPIRALI sono dovute al RITARDO

$\begin{cases} \text{FASE RIDOTTA} \rightarrow \text{ANTICIPO} \\ \text{FASE AUMENTATA} \rightarrow \text{RITARDO} \end{cases}$

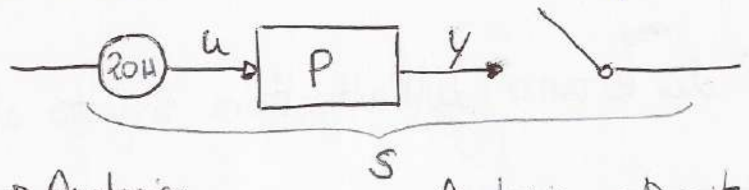
ANDREADD.IT
Appunti, esercizi, temi d'esame

→ Sistemi a tempo discreto *

Il passaggio da un sistema a tempo continuo ad uno a tempo discreto, per poter avere quindi un controllo digitale, avviene CAMPIONANDO i segnali

Mantenitore di ordine zero

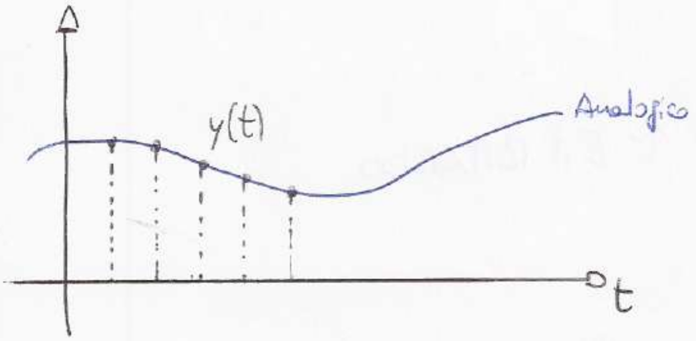
Campionatore



Digitale → Analogico

Analogico → Digitale

Se P è STABILE
$\Downarrow$
Anche S è STABILE



$$P: \begin{cases} \dot{x} = Fx + Gu \\ y = Hx + Ku \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$f: \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

TRASFORMATA A TEMPO DISCRETO

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{Z}[f(t)] = F(z) \\ F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} \end{array}}$$

IMPULSO: $imp(t) = \begin{cases} 1 & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \longrightarrow F(z) = 1$

SCALINO: $sca(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \longrightarrow F(z) = \frac{z}{z-1} \qquad (|z^{-1}| < 1)$

ESPONENZIALE: $exp(t) = \begin{cases} a^t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \longrightarrow F(z) = \frac{z}{z-a}$

RAMPA: $ramp(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = t\,sca(t) \longrightarrow F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$

ANDREADD.IT
Appunti, esercizi, temi d'esame

OPERATORE z (ANTICIPO UNITARIO) *

$$
\begin{tikzcd}
f(t); \arrow[d] & g(t)=f(t+1) \arrow[d] \\
F(z) & G(z)
\end{tikzcd}
$$

$$\boxed{G(z)=z\left(F(z)-f(0)\right)}$$

Analogamente considerando $g(t)=f(t+2)$

$f(0)=f(1)=0$

$G(z)=z^2F(z)$

OPERATORE z^{-1} (RITARDO UNITARIO)

$f(t);\ g(t)=f(t-1)$

$$\boxed{G(z)=z^{-1}F(z)}$$

Z TRASF DI VETTORI

$$f(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \xrightarrow{Z_{TRASF}} F(z)=\begin{bmatrix} F_1(z) \\ \vdots \\ F_n(z) \end{bmatrix}$$

ANTITRASFORMATA: Metodo della lunga divisione

es.

$$y(z)=\frac{5}{z^3-1{,}3z^2+0{,}3z}$$

$$
\begin{array}{l|l}
5 & z^3-1{,}3z^2+0{,}3z \\
\hline
\underline{5-6{,}5z^{-1}+1{,}5z^{-2}} & 5z^3+6{,}5z^{\boxed{-4}} \to \text{RITARDO} \\
/\ 6{,}5z^{-1}+1{,}5z^{-2} & \quad\uparrow \\
\underline{6{,}5z^{-1}-8{,}45z^{-2}+1{,}95z^{-3}} & \text{VALORE} \\
/\ 6{,}95z^{-2}-1{,}95z^{-3} &
\end{array}
$$

$t=0 \quad y(0)=0$

$t=1 \quad y(1)=0$

$t=2 \quad y(2)=0$

$t=3 \quad y(3)=5$

$t=4 \quad y(4)=6{,}5$

$t=5 \quad y(5)=6{,}95$

$t=6 \quad y(6)=7{,}09$

$t=7 \quad y(7)=7{,}13$

$t=8 \quad y(8)=7{,}14$

ANDREADD.IT
Appunti, esercizi, temi d'esame

FORMULA DI LAGRANGE A t DISCRETO

MOTO LIBERO:

$u(\cdot)=0$

$x(0)$ stato iniziale

$$\boxed{x_L(t)=A^{t-t_0}\,x(t_0)}$$

MOTO FORZATO

$x(0)=0$

$x(1)=Bu(0)$

$x(2)=Ax(1)+Bu(1)=Bu(1)+ABu(0)$

$$\boxed{x_F(t)=Bu(t-1)+AB(t-2)+\ldots+A^{t-1}Bu(0)}$$

MOTO COMPLETO

$$\boxed{\begin{gathered} x(t)=\overbrace{A^{t}x(0)}^{x_L}+\overbrace{\sum_{0}^{t-1}{}_{k}\,A^{k}Bu(t-k)}^{x_F} \\ y(t)=C\left[x_L(t)+x_F(t)\right]+Du(t) \end{gathered}}$$

EQUILIBRIO E STABILITÀ

$$\begin{cases} x(t+1)=Ax(t)+Bu(t) \\ y(t)=Cx(t)+Du(t) \end{cases}$$

$$G(z)=C\left[zI-A\right]^{-1}B+D$$

$$\boxed{\mu=G(z)\big|_{z=1}}$$

$u(t)=\text{cost}=\bar{u}$

$x(t+1)=x(t)=x$

$x=Ax+B\bar{u}\qquad \bar{x}=(I-A)^{-1}B\bar{u}$

$$\bar{y}=\underbrace{\left[C(I-A)^{-1}B+D\right]}_{\mu}\bar{u}$$

discrepanza $x_p(t)-x(t)=A^{t-t_0}\delta_{xp}$

$x_p(t)\rightarrow x(t)$ se $A^{t-t_0}\rightarrow 0$ per $t\rightarrow\infty$

REGIONE DI STABILITÀ

$$\boxed{\begin{gathered} \text{Il sistema è ASINTOTICAMENTE STABILE se} \\ \forall\,\lambda_i \text{ AUTOVALORE di } A:\ |\lambda_i|<1 \end{gathered}}$$

ANDREADD.IT
Appunti, esercizi, temi d'esame

→ Risposte dei sistemi a tempo discreto *

RISPOSTA IMPULSIVA

$$u(t) = imp(t) = \begin{cases} 1 & t=0 \\ 0 & t\neq 0 \end{cases}$$

$$x(0)=0$$

$$y(0)=D$$

$$x(1) = Ax(0)+Bu(0) = 0+B\cdot 1 = B \Rightarrow y(1)=CB$$

$$\Rightarrow x(2) = Ax(1)+Bu(1) = AB+0 = AB \Rightarrow y(2)=CAB$$

$$x(3) = Ax(2)+Bu(2) = A^2B+0 = A^2B \Rightarrow y(3)=CA^2B$$

PARAMETRI DI MARKOV

$$Y(z) = G(z)\underset{U=1}{U(z)} = G(z) \underset{z^{-1}}{\rightsquigarrow} y(t)$$

esempio $G(z) = \frac{z}{z-a}$ $U(z)=1$

$$Y(z) = \frac{z}{z-a} \xrightarrow{L.D.} \boxed{y(k)=a^k}$$

RISPOSTA A SCALINO

$$u(t) = sca(t) = \begin{cases} 1 & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$x(0)=0$$

$$G(z) = \frac{z}{z-a}$$

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\Rightarrow Y(z) = G(z)U(z) = G(z)\frac{z}{z-1} \overset{z^{-1}}{\rightsquigarrow} y(t)$$

$\lim_{t\to\infty} y(t)$ $\exists$ finito se $|a|<1$

$$\bar{y}_\infty = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{z}Y(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{z}\frac{z}{z-a}\frac{z}{z-1} = G(1)=\mu$$

RISPOSTA IN FREQUENZA

$$u(t) = U\sin(\bar{\omega}t+\alpha)$$

$$Y = G(z)|_{z=e^{j\bar{\omega}}}\, U \qquad \beta = \alpha + \angle G(z)|_{z=e^{j\bar{\omega}}} \Rightarrow y(t) = Y\sin(\bar{\omega}t+\beta)$$

ANDREADD.IT
Appunti, esercizi, temi d'esame