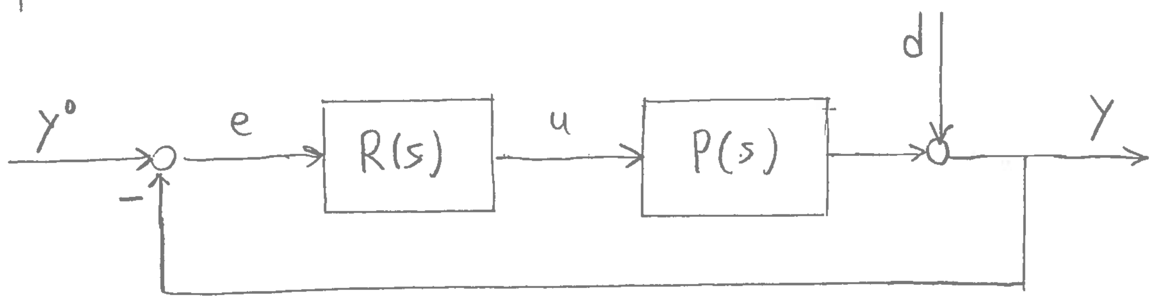
Progetto "in frequenza" di sistemi di controllo (cenni)

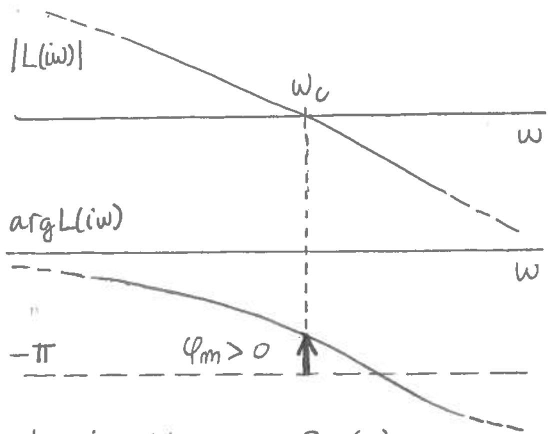
Criterio di stabilità di Bode

Con riferimento allo schema di controllo



con retroazione negativa e anello $L(s) = R(s)\,P(s)$ caratterizzato da poli p con $Re(p) \leq 0$ e dal tipico andamento in figura del modulo della risposta in frequenza ($|L(i\omega)| \gtrless 1$ a basse/alte frequenze)

- si definisce pulsazione critica la pulsazione ω_c a cui $|L(i\omega_c)| = 1$ (e la si supponga unica)
- si definisce margine di fase l'angolo $\varphi_m = \arg L(i\omega_c) + \pi$ da sottrarre a $\arg L(i\omega_c)$ per ottenere $-\pi$.



Nota: tipicamente $\arg L(i\omega_c) < 0$, non essendoci poli p con $Re(p) > 0$

criterio di stabilità: detto di Bode perché comodamente valutabile sul diagramma di Bode, ma dovuto a Nyquist, che elabora un criterio grafico più generale (senza vincoli su $L(s)$) basato sul diagr. polare di $L(i\omega)$.

sistema di controllo esternamente stab. $\iff \begin{cases} \mu = L(0) > 0 \text{ (anche } \infty) \\ \varphi_m > 0 \end{cases}$

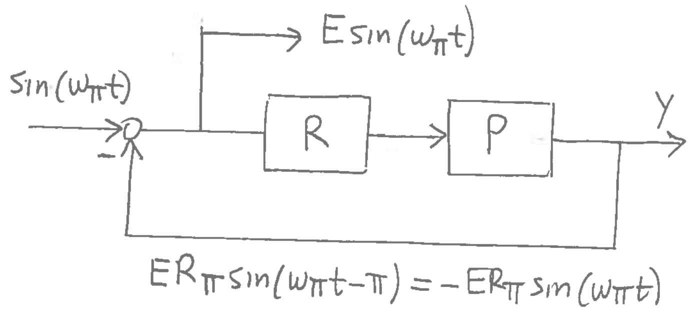
Nota: quando $\varphi_m = 0$, la fdt ad anello chiuso $G_{y^oy}(s) = L(s)/(1+L(s))$ ha due poli immaginari puri in $s = \pm i\omega_c$. Pertanto, se al variare di un parametro, per es. il guadagno del regolatore, φ_m passa da >0 a <0, la parte reale di due poli complessi coniugati di $G_{y^oy}(s)$ passa da <0 a >0.

Giustificazione intuitiva

Sia ω_π la pulsazione a cui $\arg L(i\omega_\pi) = -\pi$ e, se definita, la si supponga unica con $R_\pi = |L(i\omega_\pi)|$.

Nota: la scelta di $-\pi$, e non $+\pi$, è convenzionale, ma per come viene calcolato $\arg L(i\omega)|$ è più tipico che possa raggiungere $-\pi$.

Quando $\omega = \omega_\pi$ al nodo somma si sommano sinusoidi in fase (tenendo conto del segno "−" della retroazione) e quindi si sommano le corrispondenti ampiezze. Supponendo il sistema di controllo est. stab., potremmo scrivere



$$1 + ER_\pi = E$$

$$E = \frac{1}{1 - R_\pi}$$

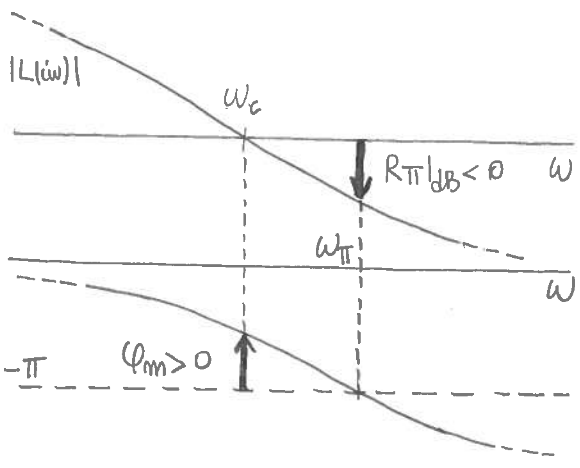
ma come verifichiamo la stab.?

Immaginando l'errore e scomposto in ∞ contributi corrispondenti a 0, 1, 2, ... "giri" della sinusoide in ingresso lungo l'anello, possiamo scrivere $E = 1 + R_\pi + R_\pi^2 + \dots$ e quindi concludere che

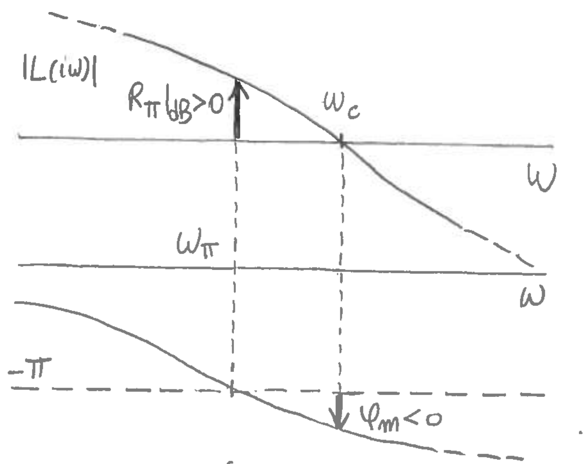
$R_\pi < 1 \Rightarrow$ serie E converge $\Rightarrow$ sistema di controllo est. stab.

$R_\pi > 1 \Rightarrow$ serie E diverge $\Rightarrow$ sistema di controllo instabile

Tenendo conto dell'andamento tipico di $|L(i\omega)|$ e $\arg L(i\omega)$ nell'intorno di ω_c (vedi figura) otteniamo il criterio di stabilità di Bode



$$R_\pi < 1 \Leftrightarrow \mu > 0,\ \varphi_m > 0$$



$$R_\pi > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu > 0,\ \varphi_m < 0 \text{ oppure} \\ \mu = -R_\pi < -1 \text{ e } \omega_\pi = 0 \end{cases}$$

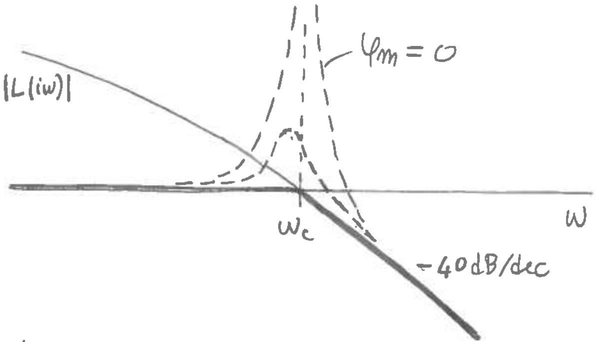
Indici di robustezza

- Si definisce margine di guadagno la quantità $K_m = 1/R_\pi$ di cui si deve moltiplicare $L(s)$ per portare il sistema di controllo al limite di stabilità ($K_m|_{dB} = -R_\pi|_{dB}$).

- φ_m e K_m sono indici di robustezza della stabilità del sistema di controllo. Valori grandi (p.e. 50°–70° e 2–10) garantiscono la stab. anche a fronte di imprecisioni e incertezze modellistiche rilevanti.

F.d.t. del sistema di controllo

$$G_{yoy}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$



Se $\varphi_m > 0$ è piccolo, $G_{yoy}(s)$ ha due poli $p_{1,2}$ complessi coniugati con $Re(p_{1,2}) < 0$ piccola (smorzamento piccolo) e quindi presenta una risonanza nell'intorno di ω_c. Una formula approssimata per valutarne lo smorzamento è $\xi \cong \varphi_m^0/100$ (l'approssimazione è buona per φ_m piccolo!), quindi la risonanza è assente (o trascurabile) per $\varphi_m \geq 70°$.

$\varphi_m \geq 70° \Rightarrow B = [0, \omega_c]$ banda del sistema di controllo
le componenti armoniche del riferimento in banda passano sostanzialmente inalterate sulla variabile controllata. C'è quindi buon "inseguimento" dei desideri con spettro in banda.

$\Rightarrow T_d \cong 1/\omega_c$ misura la velocità del controllo
tempo di transitorio $\cong 5/\omega_c$

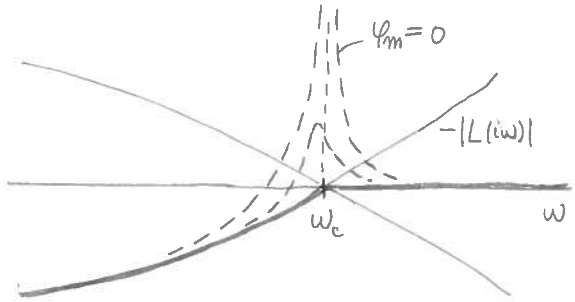
$\Rightarrow$ i transitori non presentano oscillazioni

$\underset{0}{\varphi_m \underset{\vee}{<} 70°} \Rightarrow$ La banda di $G_{yoy}(s)$ non è più di interesse. L'intervallo di pulsaz. in cui $|G_{yoy}(i\omega)| \cong 1$ (per avere buon "inseguimento del riferimento) è ridotto dalla risonanza

$\Rightarrow T_d \cong 1/\xi\omega_c$

$\Rightarrow$ i transitori presentano oscillazioni con smorzamento ξ

– Analoghe considerazioni valgono per



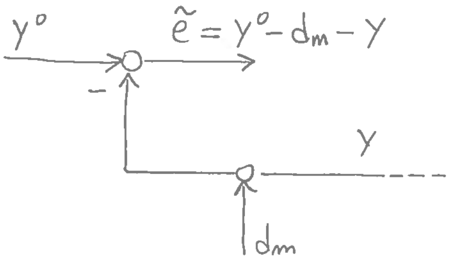
$$G_{dy}(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$

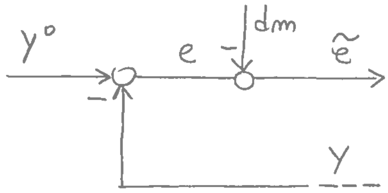
$$G_{y^o e}(s) = -G_{de}(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$

$\varphi_m \geq 70^\circ \Rightarrow$ le componenti armoniche del disturbo sono attenuate solo nella banda $[0, \omega_c]$

$\Rightarrow$ Le componenti armoniche di riferimento e disturbo sono attenuate sull'errore solo nella banda $[0, \omega_c]$

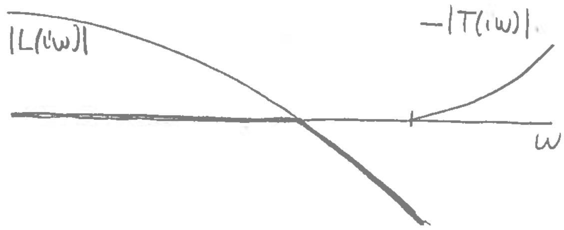
– Un eventuale disturbo sulla misura non è attenuato nella banda $[0, \omega_c]$! (è il solito limite del controllo in anello chiuso)





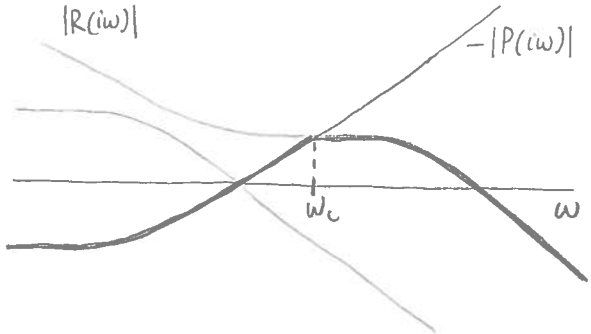
$$G_{d_m e}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

– La presenza di un trasduttore preciso e veloce non altera le considerazioni precedenti.

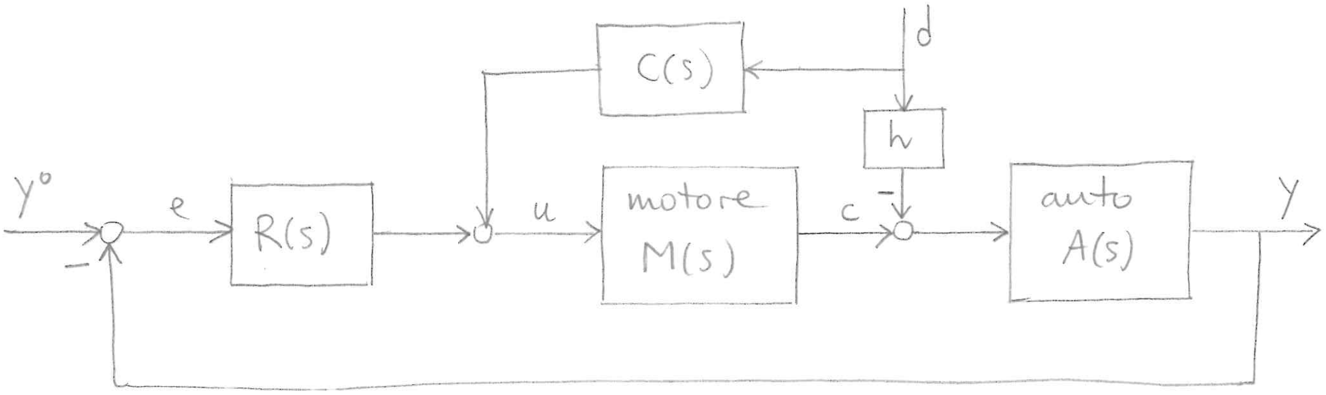


– Le f.d.t $G_{y^o u}(s) = -G_{du}(s) = \dfrac{R(s)}{1+L(s)}$

sono responsabili delle sollecitazioni imposte dal controllo sul processo. È quindi opportuno che il regolatore sia un sistema proprio.



Esempio 1: controllo di velocità di un motore a combustione



t : tempo [min]

$u(t)$: comando di accelerazione / freno (p.e. alimentazione in cm^3/s con freno motore se $u<0$)

$c(t)$: coppia motrice all'albero motore

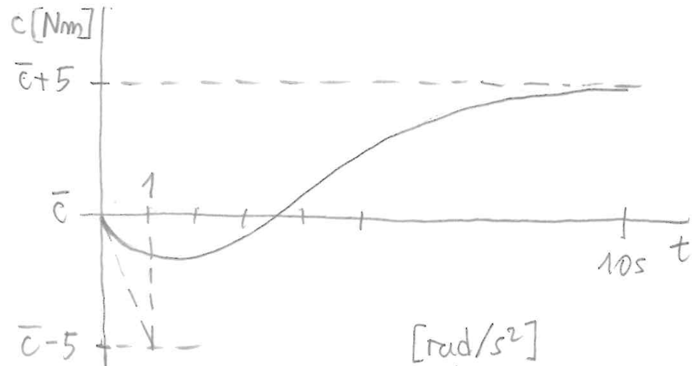
$y(t)$: velocità di rotazione dell'albero [RPM]

$d(t)$: velocità del vento [m/s] in direzione opposta al moto
($h\,d(t)$ è la coppia di attrito all'albero dovuta al vento)

$$M(s) = \underset{\overset{\|}{5}}{\mu_M} \frac{1-s\tau}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

$T_1 \cong \frac{10}{5\cdot 60} \cong 0{,}033 \text{ min}$, $T_2 = 0{,}01$ min

$\dot{c}(0) = -5\cdot 60 \frac{Nm}{min} = -\frac{5\tau}{T_1 T_2} \rightarrow \tau \cong 0{,}02$ min



$$A(s) = \frac{1/(0{,}01h)}{1+\frac{2\pi}{60^2}\frac{J}{0{,}01h}s} \cong \frac{20}{1+0.2s}$$

$h = 5$ Kg m/s , $J = 6$ Kg m^2

$$\dot{y} = \frac{60^2}{2\pi}\overbrace{\frac{1}{J}(c - hd - \underbrace{0{,}01hy}_{})}^{[rad/s^2]}$$

punto di lavoro: vel auto $= 60 Km/h \cong 20 m/s$ a $y = 2000$ RPM $\Rightarrow$ vento apparente di 20 m/s quando $y = 2000$

Precisione statica (più propriamente "a regime")

- con un integratore in $R(s)$ (garantendo poi l'est. stabilità del sistema di controllo), $e(t) \rightarrow 0$ a fronte di riferimento e disturbo costanti.
- altrimenti $\mu_{y^o e} = 1/(1+100\mu_R)$ e $\mu_{de} = (100 - 100\,C(0))/(1+100\mu_R)$ quindi con $C(0)=1$ si elimina (compensa) l'effetto di regime (su e, ma quindi anche su y) di un disturbo costante.

Precisione dinamica

- Con $\varphi_m \geq 70°$, y inseguirà bene riferimenti y^o con spettro nella banda $[0, \omega_c]$. Essendo la cost. di tempo dominante del processo pari a 0.2 min (quella meccanica dell'auto), quindi transitori in anello aperto di circa 1 min, potremmo cercare di ottenere transitori più rapidi ad anello chiuso, cioè $\omega_c > 5$ rad/min
- Attenzione: la presenza di uno zero z con $\tau = -0{,}02 < 0$ ($Re(z) > 0$, processo a sfasamento non minimo) pone un limite a $1/|\tau| = 50$ rad/min alla banda. Se infatti $\omega_c = 1/|\tau|$, e tenendo conto che $|L(i\omega)|$ ha pendenza negativa per $\omega = \omega_c$ e che non si può "cancellare" lo zero con un polo nel regolatore (ciò renderebbe il sistema di controllo instabile anche se est. stab.), si ottiene approssimativamente

$$\arg L(i\omega_c) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{contributo minimo dovuto a} \\ \text{zeri e poli "stabili" a } \omega < \omega_c}}{-90°} \underbrace{- \operatorname{atan}(\omega_c |\tau|)}_{\simeq 45°}$$

e quindi un margine di fase non soddisfacente

Stabilità del sistema di controllo

$$P(s) = 100 \frac{1 - 0.02s}{(1 + 0.2s)(1 + 0{,}033s)(1 + 0{,}01s)} \quad , \quad R(s) = \frac{0.1}{s} \frac{1 + 0.2s}{1 + 0.005}$$

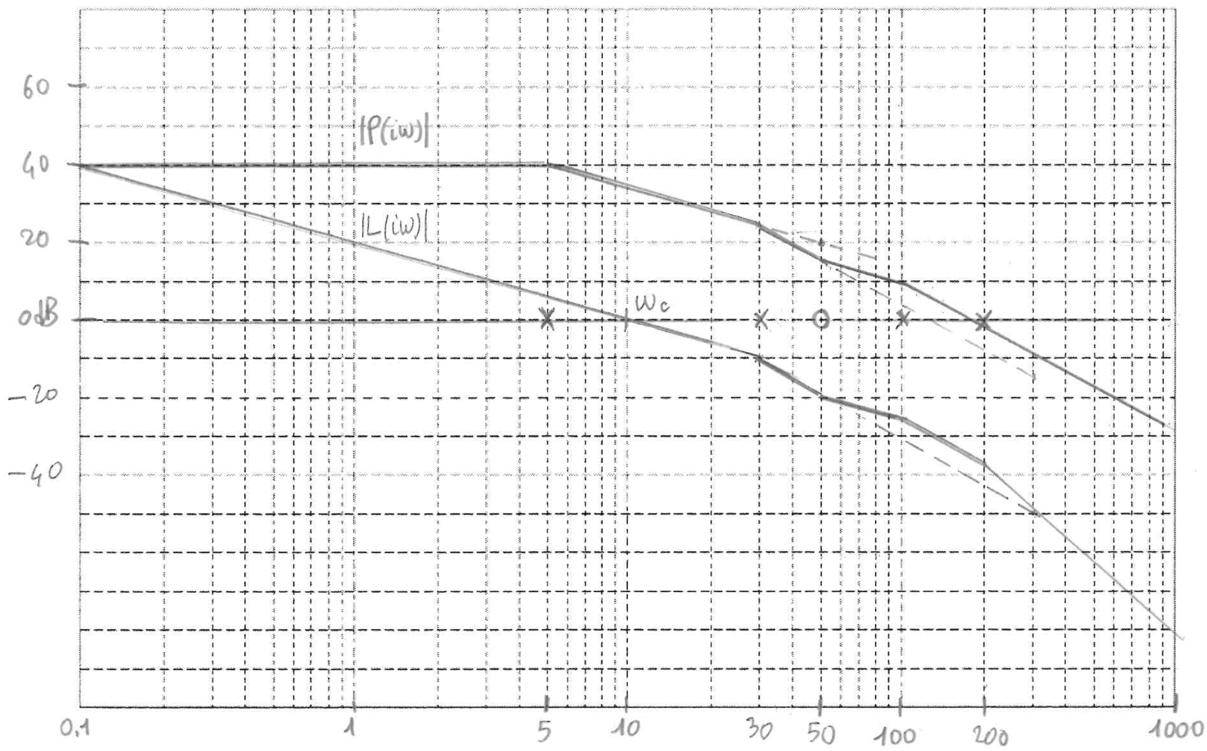
$$L(s) = R(s)\,P(s)$$

- C'è l'integratore in $R(s)$
- $\omega_c = 10$ rad/min $\Rightarrow$ durata transitori $\cong 0{,}5$ min
- È "tipico" cancellare poli stabili del processo con zeri nel regolatore. Ciò rende il sistema di controllo non c.r./c.o. (anche se in pratica la cancellazione non è mai perfetta), ma permette di plasmare $|L(i\omega)|$.
- $\varphi_m = 51{,}7°$

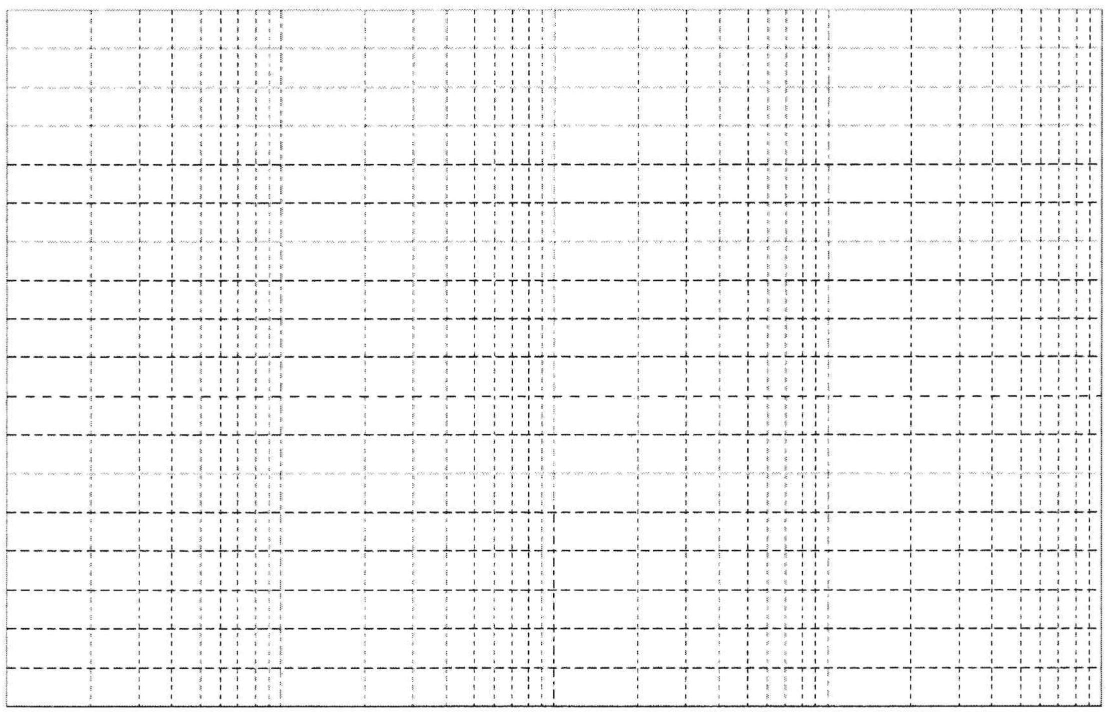
$$\arg L(i10) = -90° \underbrace{-\operatorname{atan}(10 \cdot 0{,}033)}_{18{,}4°} \underbrace{-\operatorname{atan}(10 \cdot 0{,}02)}_{11{,}3°} \underbrace{-\operatorname{atan}(10 \cdot 0{,}01)}_{5{,}7°} \underbrace{-\operatorname{atan}(10 \cdot 0{,}005)}_{2{,}9°} = -128{,}3°$$

- zeri e poli s con $|s| \gg \omega_c$ sfasano poco. Se $|s| \ll \omega_c$ sfasano $\pm 90°$.

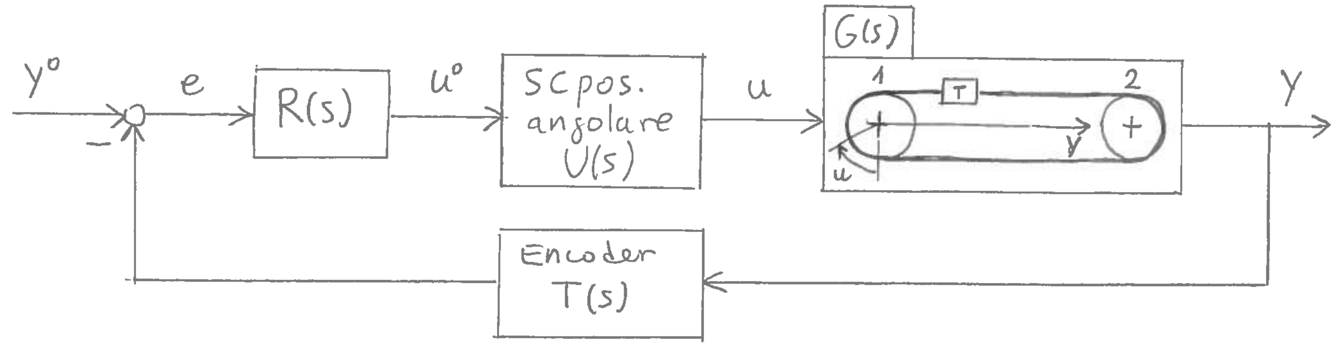
Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione



Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione



Esempio 2 : controllo di posizione di una testina di lettura



t : tempo [ms]

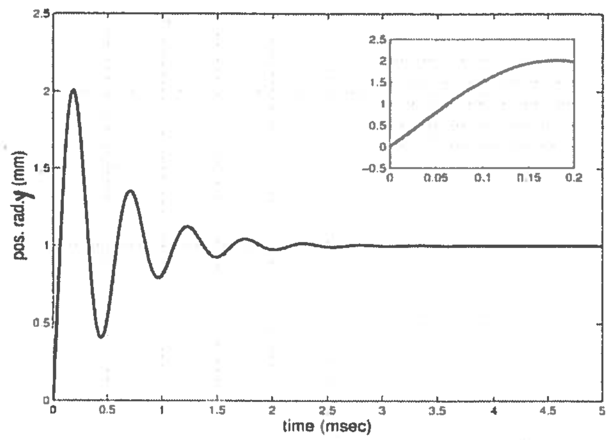
$u^o(t)$: riferimento di posizione angolare per la puleggia 1.

$y(t)$: posizione radiale della testina [mm]

– Il sistema di controllo di posizione ang. della puleggia 1 va a regime (a fronte di riferimento costante) in circa 100 μs con errore e oscillazioni trascurabili

– L'encoder di posizione ha errore trascurabile e cost. di tempo dominante (di natura elettrica) inferiore a 1 μs.

– La risposta ad uno scalino di posizione angolare d'ampiezza 0.1 rad del sistema di pulegge è riportato in figura (assieme ad un ingrandimento dei primi istanti di tempo).



Dai dati sopra riportati si ricava:

$$U(s) = \frac{1}{1+0{,}02\,s}, \quad T(s) = \frac{1}{1+0{,}001\,s}$$

$$G(s) = 10\,\frac{1+s\tau}{1+2\xi\frac{s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

durata transitorio $\cong 2{,}5$ ms $\Rightarrow Re(p_{1,2}) = -2$

periodo di oscillazione $\cong 0{,}5$ ms

$\Rightarrow Im(p_{1,2}) \cong 12$

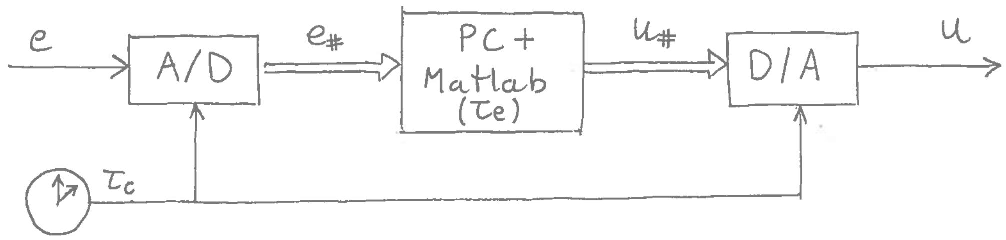
$\Rightarrow \omega_n \cong \sqrt{2^2+12^2} \cong 12$ rad/ms

$\Rightarrow \xi \cong 2/12 \cong 0.167$

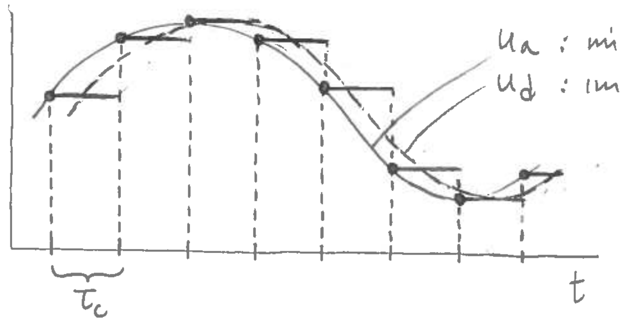
pendenza iniziale $\cong 3.5/0.2 = 17.5$

$\Rightarrow 10\,\tau\,\omega_n^2\,0.1 = 17.5 \Rightarrow \tau \cong 0{,}1$

- La realizzazione digitale del regolatore



introduce un ritardo (spesso trascurabile) dovuto al tempo di calcolo (elaborazione) τ_e e al periodo di campionamento τ_c. Il convertitore D/A è tipicamente un mantenitore (ZOH – zero-order holder) + un filtro passa basso che attenua le alte frequenze dovute alle discontinuità del segnale mantenuto.



u_a : imposta dal regolatore analogico
u_d : imposta dal regolatore digitale

$$u_d(t) \cong u_a(t - \tau_c/2)$$

$\Rightarrow$ ritardo complessivo $\tau = \tau_e + \tau_c/2$

$\Rightarrow$ supponiamo $\tau = 10\,\mu s$ e pertanto $P(s) = U(s)\,G(s)\,e^{-0{,}01 s}$

Precisione statica

- Inseriamo un integratore nel regolatore $\Rightarrow$ $\mu_{y^o y} = 1$, $\mu_{y^o e} = 0$

Precisione dinamica

- Cerchiamo di ottenere $\varphi_m \geq 70°$ (per evitare oscillazioni) e $\omega_c \geq 2$ rad/ms (durata transitori $\leq 2{,}5$ ms)
- Attenzione: la presenza di un ritardo τ nell'anello pone un limite a $1/\tau$ alla banda. Il ritardo non altera il diagramma di $|L(i\omega)|$, ma riduce φ_m, rispetto al valore ottenuto senza considerare il ritardo, di $\omega_c \tau \frac{180°}{\pi}$ se $\omega_c = 1/\tau = 100$ rad/ms tale riduzione risulta di circa 60°!

Stabilità del sistema di controllo

- Senza voler cancellare i poli complessi coniugati del processo (con opportuni zeri nel regolatore), operazione sconsigliata vista la stima spesso non precisa di tali poli, ω_c non può superare 5–10 rad/ms. Cerchiamo di ottenere $\omega_c = 10$ rad/ms, quindi transitori di circa 0,5 ms.

$$P(s) = 10 \frac{1+s\tau}{(1+0.02s)\left(1+2\xi\frac{s}{\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)} \quad , \quad R(s) = \frac{\mu_R}{s} \, , \; \mu_R = 1$$

$$L(s) = R(s)\,P(s)\,T(s)$$

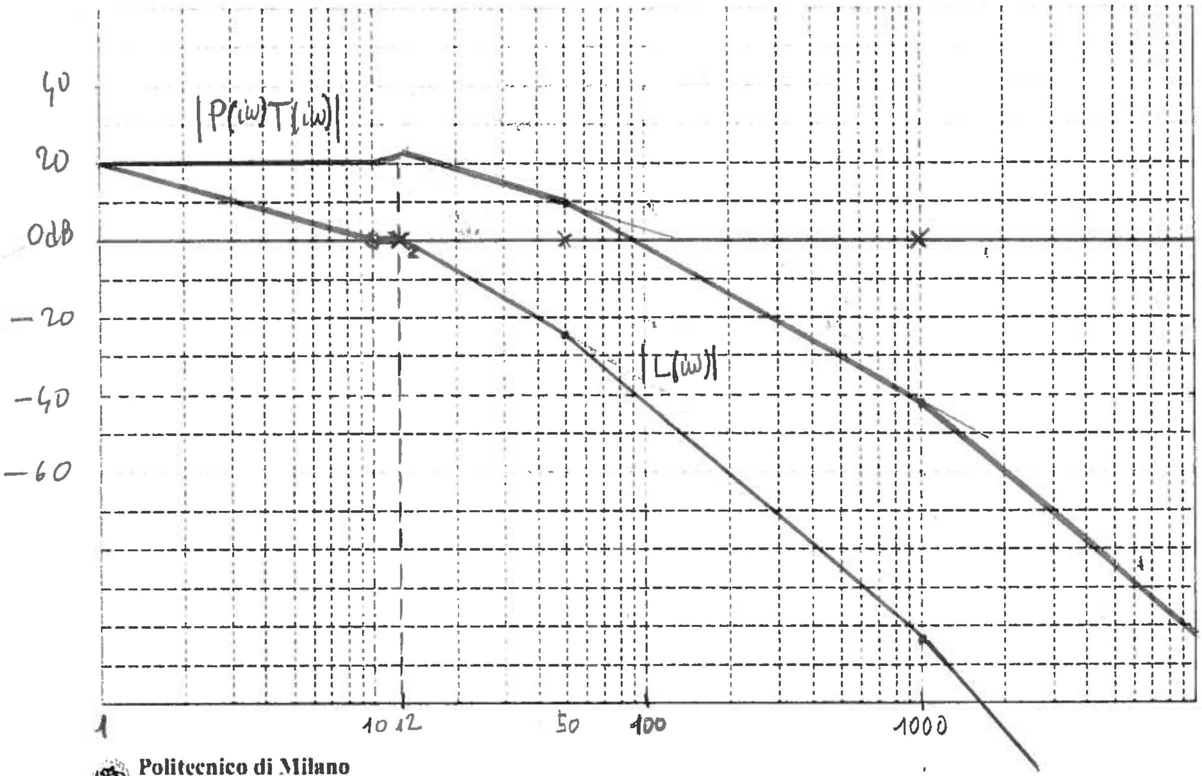
- $\varphi_m = 75{,}1^\circ$

$$\arg L(i5) = -90^\circ - \underbrace{\operatorname{atan}\left(2\xi\frac{10}{\omega_n}\Big/\left(1-\frac{10^2}{\omega_n^2}\right)\right)}_{43{,}3^\circ} + \underbrace{\operatorname{atan}(10\cdot 0{,}1)}_{45^\circ} - \underbrace{\operatorname{atan}(10\cdot 0{,}02)}_{11{,}3^\circ}$$

$$- \underbrace{\operatorname{atan}(10\cdot 0{,}001)}_{0{,}6} - \underbrace{10\cdot 0{,}01\cdot\frac{180}{\pi}}_{5{,}7} = -104{,}9$$

- tenendo conto del diagramma non approssimato di $|L(i\omega)|$ si otterrà ω_c leggermente > 10 rad/ms e quindi $\varphi_m < 75{,}1^\circ$. È quindi consigliabile un valore di μ_R leggermente inferiore a 1 che realizzi, stando al diagramma non approssimato, $\omega_c = 10$ rad/ms o leggermente inferiore

Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione



Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione

Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione

Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione