FONDAMENTI DI CONTROLLI AUTOMATICI

SISTEMI DINAMICI A TEMPO CONTINUO

by Chiara Moreschini
prof. S. Formentin

Sistema dinamico	Un sistema è dinamico se l'uscita y(t) dipende sia dall'ingresso u(t) sia dai valori passati di y e u, dunque non è sufficiente conoscere lo stato del sistema in un unico istante, ma bisogna conoscere anche le condizioni nell'istante iniziale t_0
Sist. strettamente proprio	L'uscita y(t) <u>*non*</u> dipende esplicitamente dall'ingresso u(t). Viceversa il sistema è ***proprio*** (non strettamente)
Sistema SISO	Ingresso e uscita sono scalari
Sistemi tempo-varianti	Le variabili di stato e/o l'uscita dipendono esplicitamente da t. In caso contrario si dicono ***tempo-invarianti*** o stazionari
Rappresentazione di stato	Il sistema è rappresentato da n equazioni di stato (eq. differenziali del primo ordine) e da un'eq. di uscita (algebrica) $$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \\ y(t) = g(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \end{cases}, \quad x(t_0) = x_0$$ × n è l'<u>*ordine del sistema*</u> e coincide con il numero di eq. di stato (o al numero di ingressi, se ce n'è più di uno) × A, B, C, D matrici dei coefficienti × Per ricavare le rappresentazioni di stato si può utilizzare il <u>*criterio matematico*</u> (assegnare una variabile di stato ad ogni derivata di y) o quello <u>*fisico*</u> (energia potenziale associata al sistema)
	Rappresentazione di stato di un sistema ***LTI SISO*** di ***ordine n***: $$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

MOVIMENTO DI EQUILIBRIO

Movimento del sistema	Significa conoscere le configurazioni del sistema in ogni sitante successivo a quello iniziale t_0 $$x(t), t > t_0 \quad movimento\ dello\ stato$$ $$y(t), t > t_0 \quad movimento\ dell'uscita$$ × Il movimento dello stato si ottiene integrando mentre quello dell'uscita sostituendo
Movimento di equilibrio	Un movimento è uno stato di equilibrio se in corrispondenza di un ingresso costante si ottengono uno stato e un'uscita costanti $$u(t) = \bar{u} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = \bar{x} \\ y(t) = \bar{y} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \end{cases}$$ × Un sistema LTI ammette un solo equilibrio, mentre uno non lineare ne ammette n
Formule di Lagrange	Il movimento di un sistema lineare tempo invariante è dato dalla somma di un movimento libero e un movimento forzato, che compaiono sia nel movimento dello stato che di uscita (sistemi <u>SISO</u>) <u>*Ingresso:*</u> $$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\,u(\tau)\,d\tau$$ <u>*Uscita:*</u> $$y(t) = C\,e^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\,u(\tau)\,d\tau + Du(t)$$ × Se il sistema è di <u>*ordine 1*</u> compaiono solo i coefficienti scalari si hanno a, b, c, d. se invece è di <u>*ordine n>1*</u> compaiono le matrici dei coefficienti A, B, C, D (che si ricavano dalla rappresentazione di stato) × Il ***movimento libero*** dello stato e dell'uscita dipendono solo dallo <u>*stato iniziale*</u> × Il ***movimento forzato*** dello stato e dell'uscita dipendono solo dall'<u>*ingresso*</u> × Se il sistema è lineare ma det(A)=0, il sistema può avere infinite o nessuna soluzione × Poiché si considerano sistemi lineari, vale il <u>*principio di sovrapposizione degli effetti*</u>
Guadagno statico	Rapporto tra uscita di equilibrio e ingresso di equilibrio; è costante solo per i sistemi lineari $$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = cost$$
Sistemi equivalenti ed equilibrio	Sia T una matrice non singolare $$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \rightarrow \quad \tilde{x}(t) = Tx(t) \quad \rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}u(t) \end{cases}$$ $$Equilibrio\text{:} \quad \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u} \quad \rightarrow \quad \bar{\tilde{x}} = -TA^{-1}B\bar{u}$$ × Cambiano le matrici dei coefficienti ma viene rappresentato sempre lo stesso sistema dinamico × <u>*L'equilibrio però rimane invariato*</u>, a patto che A sia non singolare, quindi invertibile

LINEARIZZAZIONE

Formule di Lagrange	Al sistema non lineare si può sostituire un ***approssimante tangente lineare*** nell'intorno del punto di equilibrio $$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{u})\,\delta x(t) + \dfrac{\partial f}{\partial u}(\bar{x},\bar{u})\,\delta u(t) \\ \delta y(t) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{u})\,\delta x(t) + \dfrac{\partial g}{\partial u}(\bar{x},\bar{u})\,\delta u(t) \end{cases}$$ × Linearizzazione valida solo per piccoli spostamenti δ ($u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$, $x(0) = \bar{x} + \delta\bar{x}$, $x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$) × Per linearizzare il sistema bisogna prima trovare tutti i punti di equilibrio e poi applicare le formule di Lagrange per ogni punto trovato × I valori di $\bar{x}, \bar{u}$ vanno sostituiti *dopo* aver derivato
Sistema approssimato	

STABILITÀ

Teoria di Lyapunov	La stabilità è una proprietà *locale* tale per cui un sistema dopo una perturbazione tende a tornare nella condizione iniziale stabile. $$se \begin{cases} u(t) = \bar{u} \;\; \forall t \geq 0 \\ x(o) = \bar{x} \end{cases} e\ il\ sistema\ è\ stabile \implies x(t) = \bar{x} \;\; \forall t \geq 0$$ × L'equilibrio può essere riferito ad un movimento o a un equilibrio × Solo nel caso dei sistemi lineari può essere riferito al sistema (poiché i sistemi lineari ammettono un unico punto di equilibrio)	
Tipi di equilibrio	Definiamo le seguenti quantità: $$\begin{cases} u(t) = \bar{u} \;\; \forall t \geq 0 \\ x(o) = \bar{x} \end{cases} \implies x(t) = \bar{x} \qquad movimento\ nominale$$ $$\begin{cases} u(t) = \bar{u} \;\; \forall t \geq 0 \\ x(o) = \bar{x} + \delta\bar{x} \end{cases} \implies x(t) = \bar{x} + \delta x(t) \qquad movimento\ perturbato$$ $$\delta x(t) \qquad perturbazione$$	
	Stabilità semplice:	$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\!: \forall \delta\bar{x}\!: se\ \Vert \delta\bar{x} \Vert < \delta_\varepsilon\ allora\ \Vert \delta x(t) \Vert < \varepsilon$
	Asintotica stabilità:	$$\lim_{t\to\infty} \Vert \delta x(t) \Vert = 0$$ × La perturbazione del movimento $\delta x(t)$ è nulla all'infinito
	Instabilità:	un equilibrio è instabile se non è stabile

Stabilità dei sistemi LTI:

Studio della stabilità	Per studiare la stabilità di un sistema LTI è sufficiente studiare come si comporta la perturbazione del movimento $\delta x(t)$ all'infinito *Movimento perturbato:* $x(t) = e^{At}(\bar{x} + \delta\bar{x}) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\,\bar{u}\,d\tau = \bar{x} + \delta x(t)$ $\rightarrow \quad \delta x(t) = x(t) - \bar{x} = e^{At}\delta\bar{x}$ $A.S. \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} e^{At} = 0$ $STABILIT\grave{A} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} e^{At} \;\; converge$ $INSTABILIT\grave{A} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} e^{At} \;\; diverge$ × Non dipende dal particolare equilibrio dunque si può parlare di stabilità del sistema	
Analisi delle matrici di transizione (A)	***A scalare:***	$A.S. \quad \Leftrightarrow \quad a < 0$ $STABILIT\grave{A} \quad \Leftrightarrow \quad a \leq 0$ $INSTABILIT\grave{A} \quad \Leftrightarrow \quad a > 0$
	A diagonale:	$A.S. \quad \Leftrightarrow \quad s_i < 0\,, \forall i$ $STABILIT\grave{A} \quad \Leftrightarrow \quad s_i \leq 0\,, \forall i$ $INSTABILIT\grave{A} \quad \Leftrightarrow \quad \exists s_i > 0$
	A con autovalori reali distinti:	$A.S. \quad \Leftrightarrow \quad s_i < 0\,, \forall i$ $STABILIT\grave{A} \quad \Leftrightarrow \quad s_i \leq 0\,, \forall i$ $INSTABILIT\grave{A} \quad \Leftrightarrow \quad \exists s_i > 0$
	A con autovalori complessi:	$A.S. \quad \Leftrightarrow \quad Re(s_i) < 0\,, \forall i$ $STABILIT\grave{A} \quad \Leftrightarrow \quad Re(s_i) \leq 0\,, \forall i$ $INSTABILIT\grave{A} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, Re(s_i) > 0$
	A con autovalori reali multipli:	- *A diagonalizzabile*: si ricade nel caso 2 - *A non diagonalizzabile*: sia s_m l'autovalore multiplo $A.S. \quad \Leftrightarrow \quad s_m < 0$ $INSTABILIT\grave{A} \quad \Leftrightarrow \quad s_m \geq 0$ *Se esiste piò di un autovalore con parte reale nulla l'equilibrio è instabile se tali autovalori hanno molteplicità geometrica < alla molteplicità algebrica; viceversa è stabile.*
	IN GENERALE:	$A.S. \quad \Leftrightarrow \quad Re(s_i) < 0\,, \forall i$ $STABILIT\grave{A} \quad \Leftarrow \quad Re(s_i) \leq 0\,, \forall i$ $\exists!\, Re(s_i) = 0$ $INSTABILIT\grave{A} \quad \Leftarrow \quad \exists\, Re(s_i) > 0$ × Solo la prima è una CNS, le altre sono solo CS × Una coppia di complessi coniugati conta come un solo autovalore

Autovalori (s_i)	$\det(SI - A) = 0$
Polinomio caratteristico	$\varphi(s) = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \varphi_2 s^{n-2} + \cdots + \varphi_n$
Numeri complessi coniugati	$\boldsymbol{s_1 = \sigma + j\omega \quad , \quad s_2 = \sigma - j\omega}$ j: *unità immaginaria* , $Re(s_1) = Re(s_2) = \sigma$, $Im(s_1) = Im(s_2) = \omega$ ***Forma esponenziale***: $s_1 = e^{\sigma + j\omega} \quad , \quad s_2 = e^{\sigma - j\omega}$ ***Formula di Eulero***: $s_1 = e^{\sigma}(cos\omega + jsen\omega)\,, s_2 = e^{\sigma}(cos\omega - jsen\omega)$

Proprietà dei sistemi LTI stabili	1. Un sistema LTI A.S. spostato dall'equilibrio tende a tornare spontaneamente all'equilibrio * 2. Fissando $u(t) = \bar{u}\ \ \forall t \geq 0$, $\bar{x}$ è unico se $detA \neq 0$ 3. Se il sistema è AS, il movimento dello stato x(t) dipende asintoticamente unicamente da u(t) * 4. Se u(t)=0 e il sistema è AS, allora il movimento dello stato tende asintoticamente a zero 5. Se $u(t) = \bar{u}$ e il sistema è AS, y(t) tende asintoticamente al valore di regime $\bar{y} = \mu\bar{u}$ 6. *Stabilità esterna*: se u(t) è limitato e il sistema è AS, anche x(t) e y(t) sono limitati * Modificando la condizione iniziale si modifica solo il movimento libero, che però nei sistemi AS si annulla asintoticamente [$e^{At}x_0 \to 0$]

Criteri di verifica della stabilità	Servono a determinare la stabilità di un sistema senza calcolare esplicitamente gli autovalori di A	
	A triangolare:	$A.S. \quad \Leftarrow \quad a_{ii} < 0\,, \forall i$ (CS)
	Traccia:	$A.S. \quad \Rightarrow \quad trA < 0$ (CN) $INSTABILIT\grave{A} \quad \Leftarrow \quad trA > 0$ (CS) × La traccia è la somma di tutti gli elementi sulla diagonale principale e corrisponde anche alla somma della parte reale di tutti gli autovalori
	Determinante:	$A.S. \quad \Rightarrow \quad detA \neq 0\ ,\ (-1)^n detA > 0$ (CN)
	Polinomio caratteristico (n=2):	$A.S. \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \neq 0\ e\ concordi$ (CNS)
	Polinomio caratteristico (n>2):	$A.S. \quad \Rightarrow \quad \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \neq 0\ e\ concordi$ (CN) × Per ordini n>2 questo criterio è solo necessario e non più necessario e sufficiente, come nel caso n=2
	Criterio di Routh:	$A.S. \quad \Leftrightarrow \quad coeff.della\ 1°\ colonna\ della\ tabella\ di\ Routh\ \neq 0\ e\ concordi$ (CNS) × Criterio più generale possibile per sistemi LTI

Tabella di Routh

$$\begin{array}{|ccccc|} \varphi_0 & \varphi_2 & \varphi_4 & \ldots & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 & & 0 \\ & \ldots & & & \ldots \\ h_1 & h_2 & h_3 & \ldots & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 & \ldots & 0 \end{array}$$

$elemento\ generico$:

$$l_j = -\frac{1}{k_1} det \begin{bmatrix} h_1 & h_{j+1} \\ k_1 & k_{j+1} \end{bmatrix}$$

× Nella prima riga coefficienti pari del polinomio caratteristico, nella seconda quelli dispari
× Ultima colonna di zeri poiché il determinante non è più calcolabile
× J colonne e (n+1) righe

Stabilità dei sistemi non lineari:

Studio della stabilità	Si linearizzano nell'intorno dell'equilibrio e si studiano come sistemi LTI × La stabilità è sempre legata all'equilibrio e non è una proprietà del sistema × L'unica eccezione è che se c'è anche un solo autovalore nullo non si può dire nulla sulla stabilità dell'equilibrio $s_i < 0 \quad \Rightarrow \quad ?$

TRASFORMATA E ANTI-TRASFORMATA DI LAPLACE

Trasformata $\mathcal{L}$:

Dominio di Laplace	$u(t) \qquad U(s)$ $y(t) \qquad Y(s)$ × Il dominio di Laplace permette di calcolare le uscite tramite equazioni algebriche, invece di quelle differenziali nel dominio del tempo × Per ottenere le uscite nel dominio del tempo si applica poi l'antitrasformata × Il dominio di Laplace non ha un'interpretazione fisica come quello del tempo ma ha un vantaggio computazionale	
Trasformata (def)	$f(t): R \to C \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad F(s): C \to C$ $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$ × Per ottenere la trasformata di una funzione non si applica quasi mai la definizione ma si risale ad essa utilizzando le trasformate note dei segnali canonici e le proprietà delle trasformate (linearità, traslazione, derivazione, …) × s: numero complesso	
Linearità	$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)]$	
Segnali canonici	1. $sca(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$ 2. $imp(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{cases} 0 & t < 0 \cup t > \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 < t < \varepsilon \end{cases}$ 3. $ram(t) = t \quad t \geq 0$	
Legame tra i segnali canonici	$imp(t) = \frac{d}{dt} sca(t) \qquad ram(t) = t\, sca(t)$ × Tutte le funzioni possono essere viste come fattori che moltiplicano sca(t), poiché esso vale 1 per t>0	
Trasformate notevoli	***Scalino:***	$\mathcal{L}[sca(t)] = \frac{1}{s}$
	Impulso:	$\mathcal{L}[imp(t)] = 1$
	Rampa:	$\mathcal{L}[ram(t)] = \frac{1}{s^2}$
	Seno:	$\mathcal{L}[sen(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
	Coseno:	$\mathcal{L}[cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

	Traslazione:	$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s)$

Dominio del tempo		× Traslare nel dominio del tempo equivale a moltiplicare per una quantità $e^{-s\tau}$ × τ >0 è detto <u>*ritardo*</u>
	Derivazione:	$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\,f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$ × Derivare nel dominio del tempo equivale a moltiplicare per s × Bisogna sottrarre anche il valore iniziale nel dominio del tempo! f(t=0) × La proprietà si estende anche alla derivata n-esima $\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}\,f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\,f(t)\Big\rvert_{t\,=\,0}$
	Integrazione:	$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$$ × Derivare nel dominio del tempo equivale a dividere per s
Dominio di Laplace	***Traslazione:***	$$F(s-a) = \mathcal{L}[e^{at}f(t)]$$ × Traslare nel dominio dei Laplace equivale a moltiplicare per una quantità e^{at} × C'è simmetria tra i due domini perché l'operazione di traslazione è analoga in entrambi
	Derivazione:	$$-\frac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}[t\,f(t)]$$ × Derivare nel dominio di Laplace equivale a moltiplicare per t e cambiare di segno
Poli e zeri di G(s)	Quasi tutte le trasformate di Laplace solo fratte, tranne una che è esponenziale. Si dicono zeri le radici del numeratore di G(s) e poli le radici del denominatore $$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad \begin{aligned} Zeri&:\ N(s) = 0 \\ Poli&:\ D(s) = 0 \end{aligned}$$	

<u>*Antitrasformata $\mathcal{L}^{-1}$:*</u>

Antitrasformata	$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$ × Non si calcola mai esplicitamente ma si ricorre a dei teoremi (valore iniziale, finale, Heaviside)
Th. del valore iniziale	$$\lim_{s\to\infty} s\,F(s) = f(0)$$ × Si può applicare anche alla derivata per trovare la *pendenza iniziale* del grafico $\lim_{s\to\infty} s\,\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\,f(t)\right] \lim_{s\to\infty} s\,[s\,F(s) - f(0)] = \frac{d}{dt}f(0)$
Th. del valore finale	<u>*Ipotesi*</u>*: F(s) ha solo poli con parte reale negativa o poli nulli* $$\lim_{s\to 0} s\,F(s) = f(\infty)$$ × Se F(s) ha poli del tipo $\pm j\omega$ il teorema non è applicabile

Sviluppo di Heaviside	*Ipotesi*: *Grado denominatore (n) > grado numeratore (m)* $$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$ × Scomponiamo F(s) in frazioni più semplici la cui trasformata è nota	
	Poli reali distinti:	$D(s) = a_0(s + p_1)(s + p_2) \ldots$ $$F(s) = \frac{\alpha}{s + p_1} + \frac{\beta}{s + p_2} + \cdots$$ $$\rightarrow \quad f(t) = \alpha e^{-p_1 t} + \beta e^{-p_2 t} + \cdots$$ × Poli: $-p_1$, $-p_2$, … se p=0, $f(t) = \alpha\, sca(t)$
	Poli reali multipli:	$D(s) = \cdots (s + p)^k \ldots$ $$F(s) = \cdots + \frac{\beta_1}{s + p} + \frac{\beta_2}{(s + p)^2} + \cdots + \frac{\beta_k}{(s + p)^k} + \cdots$$ $$\rightarrow \quad f(t) = \cdots + \beta_1 e^{-p\,t} + \beta_2 ram(t) e^{-p\,t} + \cdots$$ × Si aggiungono tanti fattori quanto è il grado del polo (k) × $\beta_2 ram(t) e^{-p\,t} = \beta_2 t e^{-p\,t}$
	Poli complessi coniugati:	$D(s) = \cdots (s - \sigma - j\omega)(s - \sigma + j\omega) \ldots$ $$F(s) = \cdots + \frac{\beta s + \gamma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \cdots =$$ $$= \cdots + \beta \frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{\gamma + \beta\sigma}{\omega} \frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \cdots$$ $$\rightarrow f(t) = \cdots + \beta \cos(\omega t) e^{\sigma t} + \frac{\gamma + \beta\sigma}{\omega} sen(\omega t) e^{\sigma t} + \cdots$$ × N. complessi: $(s - \sigma - j\omega)(s - \sigma + j\omega) = (s - \sigma)^2 + \omega^2$ × Si riduce la trasformata ad una somma delle trasformate di seno e coseno moltiplicate per una costante
	Grado m=n:	$F(s) = \cdots + \alpha_0$ $$\rightarrow \quad f(t) = \cdots + \alpha_0 imp(t)$$ × Se il grado di numeratore e denominatore sono uguali bisogna aggiungere una costante alla scomposizione in frazioni semplici e quindi anche all'antitrasformata × Ma $\alpha_0 imp(t) = \alpha_0$ poiché $imp(t) = 1$

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO

Definizione	La FdT G(s) di un sistema è il rapporto tra le trasformate di Laplace di uscita ed ingresso $\begin{cases} X(s) = (sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C(sI-A)^{-1}x(0) + C(sI-A)^{-1}BU(s) + DU(s) \end{cases} \cup \quad x(0)=0$ $Y(s) = [C(sI-A)^{-1}B + D]\, U(s) \quad \Longrightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B + D$ × A partire dalla rappresentazione di stato (dominio del tempo) ricaviamo ingresso e uscita nel dominio di Laplace × La FdT si può interpretare come l'uscita nel dominio di Laplace quando l'ingresso è uno scalino, quindi come la <u>*risposta del sistema allo scalino*</u> ($u(t) = sca(t) \rightarrow U(s) = 1 \rightarrow G(s) = Y(s) \cdot 1$) × Tale definizione vale solo le si considera la <u>*condizione iniziale nulla!*</u>
Stabilità (poli e zeri)	$C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{1}{\det(sI-A)} CK(s)B + D \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{\varphi(s)}$ $ASINTOTICA\ STABILIT\grave{A} \quad \Longleftrightarrow \quad Re(poli) < 0$ × $\varphi(s)$ è il polinomio caratteristico di A e coincide con il denominatore della FdT × La stabilità del sistema nel dominio del tempo dipende dagli autovalori di A (Re<0), ma poiché essi coincidono con i poli della FdT, nel dominio di Laplace la stabilità sarà data dal segno dei poli di G(s) × Valgono le stesse considerazioni fatte sul segno degli autovalori × Per costruzione il grado di N(s) non può mai essere superiore a quello di $\varphi(s)$
Cancellazioni illecite	Se ci sono delle cancellazioni tra numeratore e denominatore della FdT si possono avere delle ***dinamiche nascoste***, ovvero la FdT non rappresenta correttamente tutte le variabili di stato, ma alcune rimangono nascoste × La rappresentazione di stato è detta <u>*rappresentazione interna*</u> perché ci dice sempre tutto sul sistema × La FdT è detta <u>*rappresentazione esterna*</u> poiché ci dice tutto sul sistema solo se non ci sono cancellazioni
Parametrizzazioni della FdT	1. $G(s) = \frac{\beta_m s^m + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$ 2. $G(s) = \rho \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$ 3. $G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^{m}(1 + sT_i)}{\prod_{i=1}^{n}(1 + \tau_i)}$ × La rappresentazione 2 è utile per individuare subito zeri e poli (ρ costante di trasferimento, z zeri, p poli) × La rappresentazione 3 è utile nel tracciamento dei diagrammi di Bode (μ guadagno della FdT, τ e T costanti di tempo, g tipo) × La rappresentazione 3 si ricava dalla 2 raccogliendo zeri e poli in modo da ottenere un fattore del tipo (1+… s)
Guadagno statico e generalizzato	$g = 0 \quad \rightarrow \quad guadagno\ statico\ \ \mu = G(0) = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$ $g \neq 0 \quad \rightarrow \quad guadagno\ generalizzato\ \ \mu = \lim_{s \to 0} s^g G(s)$ × Se non ci sono poli in zero il guadagno della FdT è uguale al guadagno statico ottenuto come rapporto tra uscita e ingresso constanti × Se ci sono poli in zero di parla di guadagno generalizzato *della FdT* e on ha alcuna relazione con il guadagno statico del sistema!

SCHEMI A BLOCCHI

Blocco	Un blocco in generale è una relazione tra la variabile di ingresso e quella di uscita × Per convenzione i segnali si indicano nel dominio del tempo mentre i blocchi nel dominio di Laplace	
Algebra dei blocchi	***Blocco:***	$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$
	Nodo sommatore:	$Y(s) = U(s) \pm V(s)$
	Punto di diramazione:	$Y(s) = U(s) = V(s)$
	× Le frecce non indicano le direzioni dei segnali ma solo se sono in ingresso o in uscita al blocco!	
Blocchi in serie	$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s)$	
Blocchi in parallelo	$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s)$ × Due blocchi uniti a monte da una diramazione (medesima u per entrambi i blocchi) e a valle da un nodo sommatore	
Blocchi in retroazione	$G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}$ $G(s) = \dfrac{FdT\ in\ andata}{1 \mp FdT\ d'anello}$ × La retroazione può essere sia positiva sia negativa; Il segno del segnale in retroazione viene cambiato al denominatore × La FdT in andata è il prodotto di tutte le FdT dei blocchi del *ramo di andata* × La FdT d'anello è il prodotto di tutte le FdT dei blocchi sia sul ramo di andata sia sul *ramo di ritorno;* la FdT di anello è anche detta loop function $L(s) = G_1(s)G_2(s)$ × Se nel ramo di andata ci sono dei nodi sommatori si può applicare il ***principio di sovrapposizione degli effetti*** (grazie alla linearità del problema) e considerare il contributo totale come somma dei casi in cui uno solo dei rami rimane acceso	

Stabilità	***Serie e parallelo:***	$$poli\ di\ G(s) = poli\ di\ G_1(s) + poli\ di\ G_2(s)$$ $$G(s)\ \ AS.STABILE \quad \Leftrightarrow \quad G_1(s), G_2(s)\ \ AS.STABILI$$ × Il sistema è stabile solo se lo sono tutti i suoi sottosistemi poiché il denominatore della FdT finale è semplicemente il prodotto dei denominatori delle singole FdT, quindi i poli finali sono la somma di tutti i singoli poli di partenza × Considerazioni valide in assenza di cancellazioni illecite, poiché se avvengono delle cancellazioni potrebbero esserci delle dinamiche nascoste che rendono il sistema instabile (se vengono cancellati poli con Re≥0)
	Retroazione:	$$poli\ di\ G(s) \neq poli\ di\ G_1(s) + poli\ di\ G_2(s)$$ $$G(s)\ \ AS.STABILE \quad \not\Leftrightarrow \quad G_1(s), G_2(s)\ \ AS.STABILI$$ × I poli della FdT finale non coincidono più con quelli dei singoli blocchi dunque la stabilità dei singoli blocchi *non* influenza quella finale × Il motivo per cui i sistemi in anello chiuso sono molto usati è proprio che a partire da blocchi instabili si può ottenere un sistema complessivamente stabile

ANALISI DELLE PRESTAZIONI: RISPOSTA ALLO SCALINO

Analisi delle prestazioni

Ci sono vari <u>*indicatori di performance*</u> di un sistema:

- Studio della risposta del sistema ad ingressi canonici (quanto velocemente e in che modo il sistema risponde all'ingresso)
- Stabilità del sistema
- Studio della risposta in frequenza
- Ecc…

Relazione tra scalino e ingressi canonici

	$\boldsymbol{imp(t)}$	$\boldsymbol{sca(t)}$	$\boldsymbol{ram(t)}$
Relazione con lo scalino	$\frac{d}{dt} sca(t)$	$sca(t)$	$\int_0^t sca(\tau)\,dt$
Trasformata di Laplace	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$
Relazione con la risposta	$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} risposta\ allo \\ scalino \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} risposta\ allo \\ scalino \end{matrix}$	$\int_0^t \begin{bmatrix} risposta\ allo \\ scalino \end{bmatrix}$

Risposta allo scalino

La risposta allo scalino è uno degli indicatori di performance del sistema ed è molto utile perché grazie alle relazioni con gli altri segnali canonici si possono ricavare i comportamenti dei sistemi in risposta ai vari segnali a partire solo dalla risposta allo scalino

× La risposta allo scalino da informazioni su come il sistema risponde a *variazioni repentine* dell'ingresso

Parametri caratteristici

t_p: *tempo di picco*
t_a: *tempo di assestamento*
t_r: *tempo di ritardo*
t_s: *tempo di salita*
y_p: *valore di picco*
y_∞: *valore di regime*
A: *sovraelongazione massima*
Δ: *sovraelongazione massima relativa*

$$A = y_p - y_\infty \qquad \Delta = \frac{A}{y_\infty} \qquad t_a \cong 5\tau$$

Analizziamo ora il comportamento dei vari sistemi quando l'ingresso è lo scalino, considerando sistemi che sono già asintoticamente stabili:

Sistemi del primo ordine strettamente propri

$$G(s) = \frac{\mu}{(1 + s\tau)}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{s(1 + s\tau)}$$

$$\rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mu(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

× Dallo <u>*studio di funzione*</u> su y(t) troviamo che il grafico parte da 0 con pendenza μ/τ (ricavata dal teorema del valore finale per le derivate) e tende asintoticamente al valore di regime μ

× La posizione del polo influenza la velocità della risposta: più il polo è vicino all'asse immaginario, più è grande la costante di tempo e più è lenta la risposta (tempo di assestamento più grande)

× Il numero di poli della FdT coincide con l'ordine del sistema poiché il denominatore coincide con il polinomio caratteristico di A

<table>
<tr><td colspan="1">Sistemi del primo ordine non strettamente propri</td><td colspan="2">

$$G(s) = \frac{\mu(1+sT)}{(1+s\tau)}$$
$$Y(s) = \frac{\mu(1+sT)}{s(1+s\tau)}, \quad T = \alpha\tau$$
$$\rightarrow \quad y(t) = \mu\left[1 + (\alpha - 1) - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

× A seconda del valore di α il grafico si trova sopra o sotto il valore di regime
× Se la costante di tempo dello zero T è molto più piccola in valore assoluto della costante τ allora il comportamento è molto simile alla risposta del solo polo</td></tr>
<tr><td>Sistemi del secondo ordine con poli reali distinti</td><td colspan="2">

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$
$$Y(s) = \frac{\mu}{s(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$
$$y(t) = \mu\left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]$$

× La costante di tempo più grande, dunque il polo più lento, è la più importante nel determinare l'andamento della risposta</td></tr>
<tr><td>Sistemi del secondo ordine con poli reali distinti e uno zero</td><td colspan="2">

$$G(s) = \frac{\mu(1+sT)}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$
$$Y(s) = \frac{\mu(1+sT)}{s(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$
$$y(t) = \mu\left[1 - \frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right]$$

× In questo caso si ha una <u>sovraelongazione</u> se T>0 (zero negativo) e una <u>sottoelongazione</u> se T<0 (zero positivo) poiché cambia il segno della derivata nel punto iniziale, ovvero la pendenza iniziale della tangente
× La sottoelongazione è tanto più grande quanto più è piccolo lo zero rispetto al polo dominante in modulo
× La sovraelongazione si ha solo se lo zero è piccolo rispetto al polo dominante</td></tr>
<tr><td>Sistemi del secondo ordine con poli complessi coniugati</td><td colspan="2">

$$G(s) = \frac{\rho}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)}$$
$$Y(s) = \frac{\rho}{s(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)}$$
$$y(t) = \mu\left[1 - \cos(\omega t)e^{\sigma t} + \frac{\sigma}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t)e^{\sigma t}\right]$$

× In questo caso la risposta è ancora esponenziale ma presenta delle oscillazioni, che possono essere molto evidenti oppure quasi nulle
× Si può descrivere anche attraverso due nuove quantità dette <u>pulsazione</u> naturale ω_n e <u>smorzamento</u> ξ
× La pulsazione naturale rappresenta (al quadrato) il modulo del vettore nel piano di Gauss, lo smorzamento rappresenta la proiezione del vettore sull'asse reale</td></tr>
<tr><td></td><td>Pulsazione naturale e smorzamento:</td><td>

$$G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\omega_n\xi s + \omega_n^2} = \frac{\mu}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$
$$\xi \rightarrow 1 \quad non\ ci\ sono\ oscillazioni$$
$$\xi \rightarrow 0 \quad oscillazioni\ importanti$$

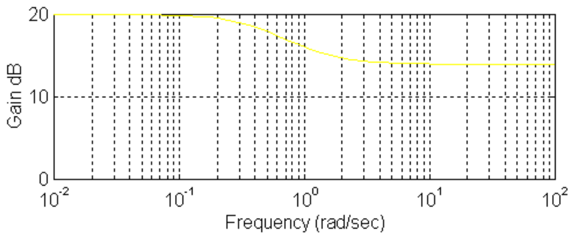
× ρ costante di trasferimento (forma 2 della FdT) e μ guadagno generalizzato (forma 3)
× $-1 < \xi < 1$ ma consideriamo solo i casi con $\xi > 0$</td></tr>
</table>

Sistemi di ordine superiore al secondo	Per sistemi di ordine superiore al secondo si ricorre ad un'approssimazione a poli dominanti, ovvero si considera solo il polo più lento, ovvero quello con la costante di tempo più grande, e si ottiene così un sistema del primo ordine × I poli dominanti (lenti) sono quelli più vicini all'asse immaginario × Se il polo dominante è reale ce n'è solo uno, se sono complessi coniugati si devono considerare entrambi

RISPOSTA IN FREQUENZA E RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

<table>
<tr><td>Risposta alla sinusoide</td><td>Studiamo la risposta del sistema ad un segnale armonico
$$u(t)=Asin(\omega t)\ \rightarrow\ U(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}\ \rightarrow\ Y(s)=G(s)U(s)$$ $$=\frac{\mu}{s^g}\frac{\prod_{i=1}^{m}(1+sT_i)}{\prod_{i=1}^{n}(1+\tau_i)}\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$ $$\rightarrow\ Heaviside\ e\ antitrasformata$$ $$y(t)=A\,|G(j\omega)|\ sen\big(\omega t+\measuredangle G(j\omega)\big)$$
× Se u(t) è una sinusoide, la risposta y(t) esauriti i transitori sarà ancora una sinusoide con la stessa frequenza ω ma modulo e fase diversi che dipendono dalla risposta in frequenza G(jω)
× G(jω) è la FdT del blocco (dunque G(s)) con la trasformazione s=jω
× Studiare le risposte alle armoniche è importante perché tramite le serie di Fourier si possono ricostruire tutti i segnali a partire da sinusoidi
× Per t→∞ sopravvive solo il termine che dipende dalla sinusoide poiché U(s) è asintoticamente stabile e →0 per t→∞</td></tr>
<tr><td>Teorema della risposta in frequenza</td><td>$$Se\ \begin{cases}G(s)\ è\ A.S.\\ u(t)=Asen(\omega t)\end{cases}$$ $$\Rightarrow\qquad y(t)=A\,|G(j\omega)|\ sen\big(\omega t+\measuredangle G(j\omega)\big)$$ $$indipendentemente\ dalle\ condizioni\ iniziali$$
× La risposta in frequenza non è y(t) ma è G(jω)!</td></tr>
<tr><td>Rappresentazione grafica</td><td>La risposta in frequenza G(jω) si può rappresentare tramite:
- Diagrammi di Bode di modulo e fase in funzione della frequenza ω
- Diagrammi polari nel piano di Gauss</td></tr>
</table>

<u>Diagrammi di Bode:</u>

<table>
<tr><td rowspan="2">Diagramma di Bode del modulo</td><td colspan="2">

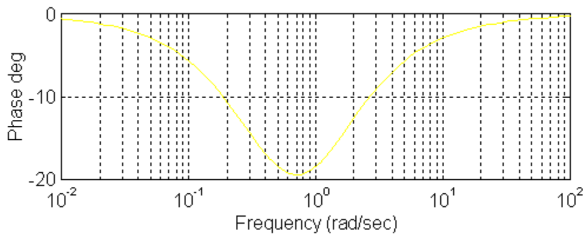
$$|G(j\omega)|_{dB}=20\log_{10}|G(j\omega)|$$
× Sull'asse delle ordinate modulo di G(jω) in <u>decibel</u>
× Sull'asse delle ascisse ω in rad/s suddivise in <u>decadi</u> equidistanziate (scala logaritmica)</td></tr>
<tr><td>Tracciamento diagramma asintotico:</td><td>1. Scrivere G(s) nella forma 2 con guadagno e tipo e passare a G(jω)
$$G(s)=\frac{\mu}{s^g}\frac{\prod_{i=1}^{m}(1+sT_i)}{\prod_{i=1}^{n}(1+\tau_i)}\ \xrightarrow{s=j\omega}\ G(j\omega)$$
2. a) Se il tipo <u>g=0</u>: retta iniziale costante alla quota $\mu_{dB}=20\log_{10}|\mu|$
b) Se il tipo <u>g≠0</u>: retta iniziale con pendenza $-g\left(20\frac{dB}{dec}\right)$ che interseca l'asse a 0 dB in $\overline{\omega}=\mu^{1/g}$
3. In corrispondenza di uno <u>zero</u>: $+20\frac{dB}{dec}$ (pendenza +1)
In corrispondenza di un <u>polo</u>: $-20\frac{dB}{dec}$ (pendenza -1)
<hr>
× L'errore massimo tra diagramma asintotico e reale è di 3 dB in corrispondenza delle singolarità (poli e zeri)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td>

× Se ci sono più singolarità nello stesso punto si sommano i contributi di ciascuna
× Zeri complessi coniugati hanno la stessa parte reale dunque contano come due singolarità reali in $\omega = \omega_n$ (contributo di +20 o -20 dB/dec); errore massimo di 6 dB
× Per singolarità complesse lo smorzamento ξ modifica solo l'andamento reale e non quello asintotico (sovra- o sottoelongazioni)
× Caso particolare: per ξ=0 il diagramma reale va bruscamente a zero se è uno zero e va a infinito se è un polo (il diagramma asintotico rimane uguale)

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">Diagrammi di Bode della fase</td><td colspan="2">



× Sull'asse delle ordinate fase di G(jω) in <u>gradi centigradi</u>
× Sull'asse delle ascisse ω in rad/s suddivise in <u>decadi</u> equidistanziate (scala logaritmica)

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tracciamento diagramma asintotico:</td><td>

1. Retta orizzontale iniziale con valore $Vi = \measuredangle\mu - 90°g$
con $\measuredangle\mu = 0°$ se $\mu > 0$ e $\measuredangle\mu = -180°$ se $< 0\mu$
2.
<table>
<tr><td></td><td>sx</td><td>dx</td></tr>
<tr><td>Poli</td><td>$-90°$</td><td>$+90°$</td></tr>
<tr><td>Zeri</td><td>$+90°$</td><td>$-90°$</td></tr>
</table>

</td></tr>
<tr><td>

× Il contributo delle singolarità per il diagramma della fase dipende dal segno della loro <u>parte reale</u> (sx o dx)
× Come per il modulo i complessi coniugati danno un contributo doppio
× Dopo aver tracciato il diagramma lo si riporta sempre nell'intervallo (-180°,+180°) per convenzione

</td></tr>
</table>

<u>Caso particolare: sistemi a fase minima:</u>

<table>
<tr><td>Definizione</td><td>

I sistemi a fase minima sono sistemi con:

$$\begin{cases} \mu > 0 \\ poli\ e\ zeri\ con\ Re \leq 0 \end{cases}$$

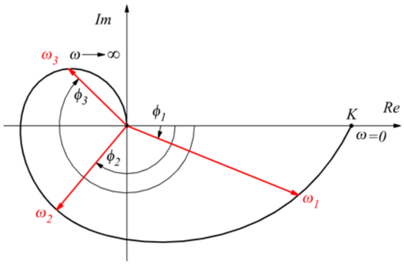
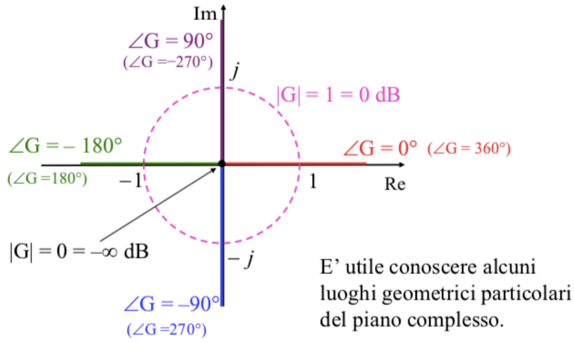
</td></tr>
<tr><td>Diagrammi</td><td>

Una volta tracciato il diagramma del modulo è possibile dedurre univocamente quello della fase (in generale impossibile senza conoscere G(s))

<table>
<tr><td><u>Diagramma del modulo</u></td><td></td><td><u>Diagramma della fase</u></td></tr>
<tr><td>Polo (pendenza -1)</td><td>$\rightarrow$</td><td>$-90°$</td></tr>
<tr><td>Zero (pendenza +1)</td><td>$\rightarrow$</td><td>$+90°$</td></tr>
</table>

</td></tr>
</table>

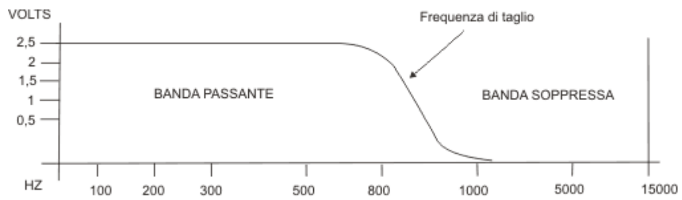
Diagrammi polari:

Diagramma polare	 × Il diagramma del modulo è in decibel (scala log), dunque: $\lvert G(j\omega)\rvert = 1 = 0dB$ $\lvert G(j\omega)\rvert = 0 = -\infty dB$	G(jω) rappresentato nel piano di Gauss. Il diagramma polare si può tracciare a partire dai diagrammi di Bode e rappresenta l'andamento di modulo e fase della risposta in frequenza G(jω) *al crescere di ω tra [0,+∞]* 
	× Studio di funzione nel piano complesso × Il diagramma della fase su cui ci si basa va riportato nell'intervallo (-180°,+180°) solo DOPO aver tracciato il diagramma polare per non sbagliare × Per ottenere i valori iniziali e finali si sostituisce $\omega = 0$ e $\omega = \infty$ nella formula analitica di G(jω) (limite) × I diagrammi polari sono utili nell'analisi della stabilità dei retroazionati (Nyquist, ecc..) e saranno quindi meglio analizzati in seguito	

AZIONE FILTRANTE DEI SISTEMI DINAMICI

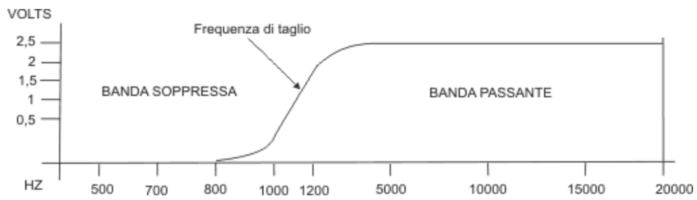
<table>
<tr>
<td>Azione filtrante</td>
<td>
Un sistema dinamico, lineare e stazionario ha un’azione filtrante sul segnale in ingresso. Il sistema non può generare armoniche in uscita assenti nello spettro del segnale di ingresso, ma può amplificare o attenuare e sfasare quelle presenti

- La risposta in frequenza consente di calcolare la risposta a qualsiasi ingresso, poiché determina come si modificano le componenti armoniche dell’ingresso. In questo senso un sistema dinamico asintoticamente stabile si può vedere sempre come un filtro
- In presenza di un ingresso sinusoidale del tipo $u(t) = A_u sin(\varpi\, t + \varphi_u)$, per il teorema della risposta in frequenza si ha una risposta del tipo $y(t) = A_y\, sen(\varpi\, t + \varphi_y)$. Conoscendo A_u, φ_u e sapendo i valori desiderati per A_y, φ_y si possono progettare le caratteristiche del canale G(jω)
</td>
</tr>
<tr>
<td>Filtri passa-basso</td>
<td>
Lascia passare inalterate o al più amplificate di un valore costante le armoniche del segnale in ingresso con pulsazione inferiore od uguale a ϖ ed elimina le armoniche con pulsazione superiore. L’intervallo [0, ϖ] è detto <u>banda passante</u>



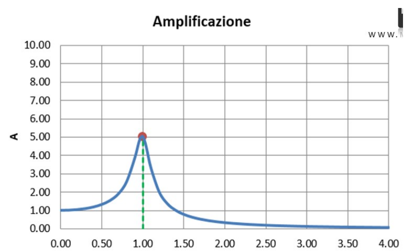
$$Banda\ passante: \quad -3dB \leq |G(j\omega)|_{dB} - |G(j0)|_{dB} \leq +3dB$$

- Passano solo le frequenze iniziali fino a ϖ
- Come si è già visto 3dB è l’errore massimo tra il digramma asintotico e quello reale dei diagrammi di Bode
</td>
</tr>
<tr>
<td>Filtro passa-alto</td>
<td>
Lascia passare inalterate o al più amplificate di un valore costante le armoniche del segnale in ingresso con pulsazione superiore od uguale a ϖ ed elimina le armoniche con pulsazione inferiore. L’intervallo [ϖ, ∞] è detto <u>banda passante</u>



$$Banda\ passante: \quad -3dB \leq |G(j\omega)|_{dB} - |G(j\infty)|_{dB} \leq +3dB$$

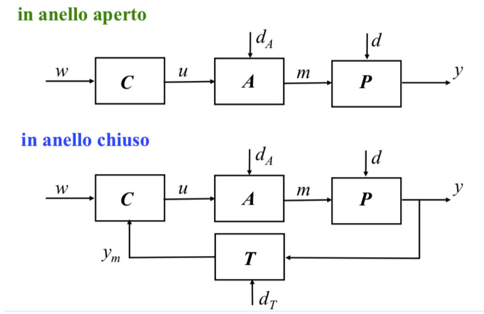
- In generale sono sistemi non strettamente propri
- Passano solo le frequenze da una certa ϖ in poi
</td>
</tr>
<tr>
<td>Risonanza</td>
<td>
Per valori bassi dello smorzamento ξ le componenti armoniche del segnale in ingresso con pulsazione vicina a ω_n vengono amplificate in modulo (amplificazione selettiva)

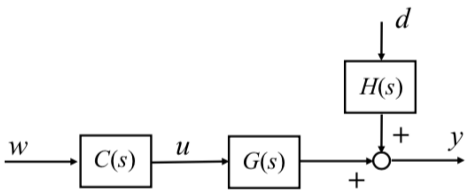


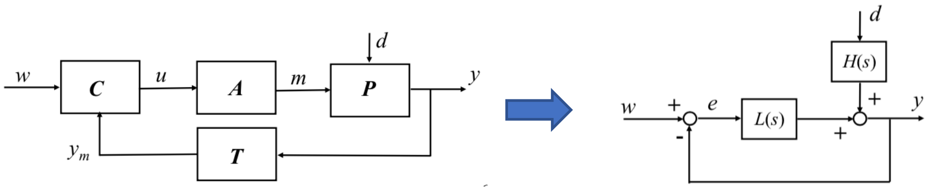
Per ξ >0.4 si ha un filtro passa-basso
Per ξ <0.4 si ha amplificazione selettiva

- Questo fenomeno può essere pericoloso ad esempio per i ponti, poiché per frequenze vicine a ω_n gli impulsi vengono amplificati molto e potrebbero avere effetti dannosi sulla struttura
</td>
</tr>
</table>

SISTEMI DI CONTROLLO

<table>
<tr>
<td rowspan="1">Problema di controllo</td>
<td colspan="2">È necessario progettare il controllore C in modo che l'uscita y abbia il valore desiderato


A: attuatore
C: controllore
w: ingresso del controllore
u: uscita del controllore
(ingresso per il sistema)
y: uscita del sistema
d: disturbo
× Si ipotizza che tutti i blocchi siano lineari (eventualmente linearizzati)</td>
</tr>
<tr>
<td>Requisiti</td>
<td colspan="2">Il sistema di controllo deve avere le seguenti proprietà:
a) <u>Stabilità</u>
b) <u>Precisione statica</u> (y≈w in condizioni di equilibrio)
c) <u>Precisione dinamica</u> (y≈w durante i transitori)
d) <u>Attenuazione dei disturbi</u> (y≈w anche con disturbi)
e) <u>Moderazione</u> (u piccola in situazioni di interesse)
f) <u>Robustezza</u> (garanzia delle precedenti proprietà anche in presenza di imprecisioni sul modello)</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">Sistemi in anello aperto</td>
<td colspan="2">
</td>
</tr>
<tr>
<td>Prestazioni ideali:</td>
<td>Vogliamo che l'uscita sia asintoticamente uguale all'ingresso e che il disturbo abbia il minor impatto possibile
$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C(s)G(s)\sim 1 \quad \text{"passa-tutto"}$$
$$\frac{Y(s)}{D(s)} = H(s)\sim 0 \qquad \text{"passa-niente"}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Limitazioni:</td>
<td>In anello aperto non è possibile costruire un controllore ideale poiché:
1. Possono esserci dinamiche nascoste (cancellazioni di poli o zeri con Re>0)
2. Problema di realizzabilità (n. poli ≥ n. zeri affinché sia realizzabile)
3. Scarsa robustezza (se c'è incertezza non si può mai ottenere prestazioni ideali)
4. Non si può agire sul disturbo per azzerarne gli effetti poiché H(s) non si può controllare</td>
</tr>
</table>

Sistemi in anello chiuso (retroazionati)	 Funzione d'anello (*loop function*): $L(s) = T(s)C(s)A(s)P(s)$ Errore di inseguimento: $e = w - y$	
	Prestazioni ideali:	Vogliamo che l'uscita sia asintoticamente uguale all'ingresso e che il disturbo abbia il minor impatto possibile $$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} \sim 1 \quad \text{"passa-tutto"}$$ $$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{H(s)}{1+L(s)} \sim 0 \quad \text{"passa-niente"}$$
	Vantaggi:	I sistemi in anello chiuso sono migliori perché: 1. La *stabilità* si ottiene dalla stabilità di H(s) e quella di L(s)/(1+L(s)) *2. Robustezza* 3. L'azione del *disturbo* si può controllare, infatti Y/D dipende da L(s) e dunque da C(s)

STABILITÀ DI SISTEMI RETROAZIONATI

<table>
<tr>
<td>Stabilità</td>
<td colspan="2">
Affinchè il sistema sia stabile deve essere stabile la sua FdT, ovvero

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{N(s)}{D(s)+N(s)} \; stabile \iff Re\{radici\ D(s)+N(s)\} < 0$$

× N(s) numeratore di L(s), D(s) denominatore di L(s)
× Per studiare la stabilità del sistema però non si analizza quasi mai il segno delle radici si D(s)+N(s), eventualmente con la tabella di Routh, ma si usano metodi grafici, come ad esempio il criterio di Nyquist
</td>
</tr>
<tr>
<td>Diagramma di Nyquist</td>
<td colspan="2">
<u>Curva chiusa orientata</u> nel piano di Gauss che si ottiene ribaltando il diagramma polare rispetto all'asse reale

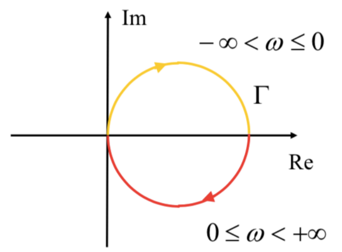
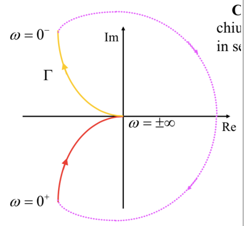


diagramma polare
+
simmetrico rispetto all'asse reale

$$L(-j\omega) = \overline{L(j\omega)}$$

× Mentre il diagramma polare rappresenta G(jω) per ω compreso tra [0,+∞] quello di Nyquist è per ω compreso tra [-∞,+∞]; la parte per ω compreso tra [-∞,0] si ottiene semplicemente ribaltando i diagramma polare
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Casi particolari:</td>
<td>
1. Se il <u>diagramma polare va a ±∞</u> il diagramma di Nyquist si chiude all'infinito in senso orario



2. Se il sistema ha un <u>polo nell'origine</u> è necessario deformare l'asse Im con una circonferenza infinitesima di raggio ε con centro nell'origine in modo da ottenere un diagramma di Nyquist chiuso
</td>
</tr>
<tr>
<td>Criterio di Nyquist</td>
<td colspan="2">
In caso di <u>retroazione negativa</u>, detto N il numero di giri antiorari del diagramma di Nyquist attorno al punto -1 e P il numero di poli di L(s) con Re>0 si ha che:

$$Retroazionato\ A.S. \iff \begin{cases} N\ ben\ definito \\ N = P \end{cases}$$

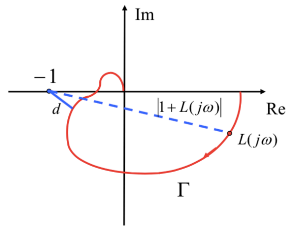
× È una CNS
× Fa riferimento all'intera funzione ad anello del sistema, quindi a L(s) (non C(s)!)
× Se i giri sono antiorari N>0, se i giri sono orari N<0
× P invece può essere solo un numero positivo
× Se N<0 il criterio è sicuramente non verificato (ciò significa che il sistema non è AS, non che è instabile, quindi potrebbe essere comunque stabile semplicemente)
× Anche se N non è ben definito il criterio non è verificato dunque il sistema non è AS, ad esempio se il diagramma di Nyquist passa per il punto -1
× Se P=0 il sistema è AS solo nel caso in cui il diagramma sia molto distante da -1, in modo che anche N=0
× In caso di <u>retroazione positiva</u> si devono guardare i giri attorno al punto +1, mentre tutto il resto rimane invariato
× Il criterio di Nyquist è valido in condizioni nominali, ovvero ideali; quando siamo in condizioni reali bisogna fare riferimento alla stabilità robusta
</td>
</tr>
</table>

Stabilità robusta:

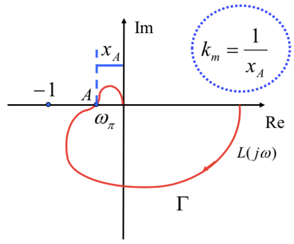
<table>
<tr><td>Incertezze</td><td colspan="2">La stabilità robusta è la garanzia di stabilità anche quando sono presenti delle incertezze nel modello. L'incertezza può essere rappresentata da diversi tipi di modello, ad esempio:
- Incertezza additiva limitata al modulo (modello vero=modello nominale±incertezza)
- Incertezza sul guadagno della funzione (modello vero=k modello nominale)</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Indicatori di stabilità robusta</td><td colspan="2">Quantità che permettono di definire le condizioni di stabilità robusta.

Consideriamo un sistema con P=N=0: trovare gli indicatori di stabilità significa valutare di quanto può variare il diagramma di Nyquist affinché le ipotesi del criterio di Nyquist non vengano violate. Si prende come riferimento il punto critico (-1;0)

× L'indicatore di robustezza può essere rispetto a incertezze sul guadagno (margine di guadagno k_m) oppure incertezze sul ritardo dell'anello (margine di fase φ_m)
× Non è sempre possibile calcolare il margine di guadagno o di fase analiticamente
× Sono indicatori approssimati e non sempre valgono come criteri di tsabilità</td></tr>
<tr><td>Margine di stabilità vettoriale (d):</td><td>Indica qual è la distanza minima del diagramma dal punto (-1;0), che deve essere massimizzata per rimanere in condizioni di stabilità

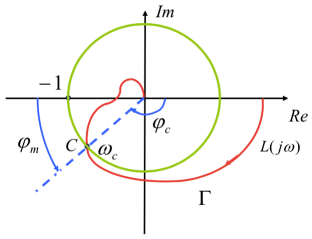


$$d = min|1 + L(s)|$$</td></tr>
<tr><td>Margine di guadagno (k_m):</td><td>Definisce la massima perturbazione tollerabile sul modulo della L(s) a parità di fase prima che il sistema diventi instabile, ovvero prima che il diagramma incontri il punto (-1;0) lungo l'asse reale



$$k_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$$

$$Instabile\ se\ k_m < 1$$
$$A.S.\ se\ k_m > 1$$</td></tr>
<tr><td>Margine di fase (φ_m):</td><td>Definisce la massima perturbazione tollerabile sulla fase della L(s) a parità di modulo prima che il sistema diventi instabile, ovvero prima che il diagramma incontri il punto (-1;0) lungo la circonferenza di raggio unitario



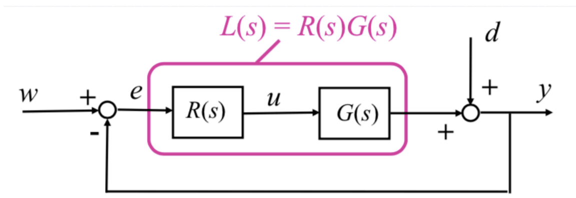
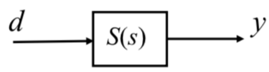
$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c|$$

$$Instabile\ se\ \varphi_m < 0$$
$$A.S.\ se\ \varphi_m > 0$$

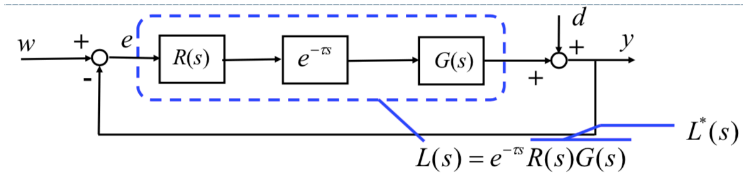
× φ_c fase critica, ovvero angolo in corrispondenza del quale il diagramma interseca la circonferenza di raggio unitario
$$\varphi_c = \arg \mathrm{L}(j\omega_c)\ \ ,\ \ \omega_c\text{: } |\mathrm{L}(j\omega_c)| = 1$$
× A parità di incertezza una fase critica più piccola garantisce maggiore robustezza</td></tr>
<tr><td colspan="2">k_m e φ_m si possono valutare anche dai diagrammi di Bode di modulo e fase rispettivamente come differenze verticali o orizzontali tra ω_c e ω_π</td></tr>
</table>

Criterio di Bode	Criterio per la stabilità dei retroazionati $Ipotesi$: 1. $P = 0$ 2. $Il\ diaramma\ di\ Bode\ del\ modulo\ di\ L(s)$ $attraversa\ una\ sola\ volta\ l'assea\ 0dB$ $Allora\ se \quad \begin{cases} \mu > 0 \\ \varphi_m > 0° \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad Sistema\ A.S$ × μ guadagno della L(s), φ_m margine di fase × È come il criterio di Nyquist ma le sue condizioni di applicabilità sono molto più ristrette × La seconda ipotesi equivale a dire che la L(jω) attraversa una sola volta la circonferenza di raggio unitario nel piano di Gauss

ANALISI DELLE PRESTAZIONI DEI SISTEMI RETROAZIONATI

Funzioni di sensitività	Sono particolari FdT che danno informazioni sulle ***performance*** del sistema in retroazione  $F(s)=\frac{Y(s)}{W(s)}=\frac{L(s)}{1+L(s)}$ $S(s)=\frac{E(s)}{W(s)}=\frac{1}{1+L(s)}$ $Q(s)=\frac{U(s)}{W(s)}=\frac{R(s)}{1+L(s)}$ × R(s) è detto regolatore × Tutte le funzioni di sensitività hanno lo stesso denominatore (infatti poiché descrivono lo stesso sistema devono avere gli stessi poli) × Errore di inseguimento *e=w-y* ***Prestazioni ideali:*** $F(s)\to 1$ $S(s)\to 0$ $Q(s)\to 0$
Funzione di sensitività complementare F(s)	$F(s)=\frac{Y(s)}{W(s)}=\frac{L(s)}{1+L(s)}\xrightarrow{prestazioin\ ideali}\sim 1$ × È il complementare a 1 della funzione di sensitività S(s) × Dallo studio delle prestazioni statiche (risposta allo scalino) si trova che il suo guadagno è $\mu_F\cong 1$ × Dallo studio della sua risposta in frequenza F(jω) si trova che F(s) è un ***filtro passa-basso*** × I suoi poli dominanti cadono in corrispondenza della frequenza critica ω_c
Funzione di sensitività S(s)	Da informazioni sulla risposta del sistema ai disturbi $S(s)=\frac{E(s)}{W(s)}=\frac{1}{1+L(s)}\xrightarrow{prestazioin\ ideali}\sim 0$  × Dallo studio delle prestazioni statiche (risposta allo scalino e alla rampa) si evince che la capacità del sistema di reiettare un disturbo dipende dal <u>*tipo di disturbo*</u> × Dallo studio della sua risposta in frequenza S(jω) si trova che S(s) è un ***filtro passa-alto*** e il disturbo viene attenuato solo in [0; ω_c] ***<u>Principio del modello interno:</u>*** Per poter reiettare un disturbo la funzione ad anello L(s) deve contenere il modello del disturbo. Ad esempio se il disturbo è uno scalino D(s)=1/s, la funzione ad anello L(s) deve contenere il termine 1/s per poter elidere il disturbo.
Funzione di sensitività del controllo Q(s)	Esprime l'aggressività dell'ingresso: il regolatore deve fare in modo che sia debole, in modo tale da non danneggiare il sistema $Q(s)=\frac{U(s)}{W(s)}=\frac{R(s)}{1+L(s)}\xrightarrow{prestazioin\ ideali}\sim 0$ × Dallo studio della risposta in frequenza si evince che Q(jω) segue inizialmente l'andamento di $-\lvert G(j\omega)\rvert$ in[0; ω_c] e poi quello di $\lvert R(j\omega)\rvert$ in [ω_c; +∞]

EFFETTO DELLE NON- IDEALITÀ

Effetto di un ritardo	 × Il ritardo può influenzare la stabilità (infatti potrebbe sfasare il diagramma di Nyquist e fargli fare un giro attorno a -1) × Non modifica le prestazioni statiche ne ω_c × Fa diminuire φ_m poiché fa aumentare φ_c
Effetto dei disturbi	(Disturbo sull'uscita, sull'attuatore, sul trasduttore)

TEORIA:

INTRODUZIONE AL PROGETTO

Specifiche di progetto	Il controllore deve essere progettato in modo tale da soddisfare alcune caratteristiche: - Stabilità in condizioni nominali (criterio di Bode) - Stabilità robusta (margini di fase e modulo elevati) - Precisione statica e dinamica - Attenuazione dei disturbi, sia in andata sia in retroazione - Moderazione del controllo - Realizzabilità del regolatore
Progetto in "loop-shaping"	Metodo di progettazione che consiste nel tradurre le specifiche di progetto in vincoli su L(s), scegliere una R(s) inizialmente semplice e poi modificarla per *tentativi* successivi in modo tale che rispetti le specifiche di progetto (ad ogni tentativo verificarne poi il corretto funzionamento). × I progetti per ***sistemi a fase minima*** si fanno generalmente in loop shaping

CONTROLLORI PID

PID	Controllore *standard* usato prevalentemente in passato che si tarava direttamente sui sistemi). PID è un acronimo e sta per: P → proporzionale → valuta l'entità dell'errore (più errore, più controllo) I → integrale → valuta il valor medio dell'errore D → derivata → valuta la tendenza dell'errore