

# Lezione 1. Introduzione

# Schema

1. Che cos'è l'Automatica? A cosa serve?

- *Il problema del controllo*
- *Modellistica del sistema (relazioni causa-effetto)*
- *Controllo in anello chiuso e in anello aperto*
- *Disturbi e incertezza*

2. Dov'è l'Automatica?

# 1. Che cos'è l'Automatica? A cosa serve?

Insieme di discipline che forniscono strumenti (matematici e tecnologici) per la *specifica*, l'*analisi*, il *progetto* e la *gestione* di

## sistemi automatici di controllo

L'Automatica si occupa di (definire e) risolvere i

## problemi di controllo

- 1) Quali discipline?
- 2) Quali strumenti?
- 3) Cos'è un problema di controllo?

## problema di controllo

Si ha un problema di controllo ogni volta che si desidera **imporre** ad un **sistema** un **comportamento desiderato**.

- 1) Che cosa intendi per sistema?
- 2) E cos'è un "comportamento desiderato"?

## Esempio

### Controllo della velocità di un autovettura

Si desidera **imporre** ad un'auto (è un sistema!) un'andatura a **velocità costante** (il comportamento desiderato!).



Un autoveicolo è un esempio di **sistema**.

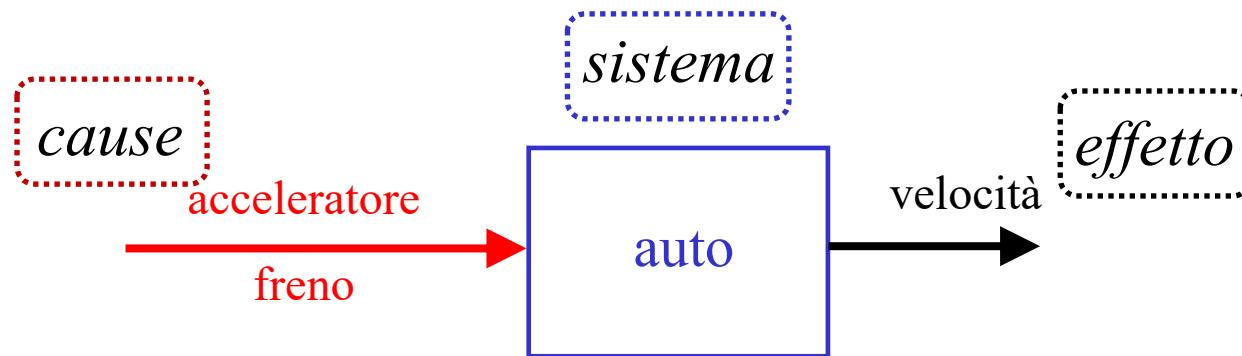
Mantenere una velocità costante è un esempio di **comportamento desiderato** (che si vuole imporre al sistema).

Più specificamente il comportamento desiderato del sistema viene “trasformato/tradotto” in un **andamento desiderato per una (o più) variabile** (quella che rappresenta tale comportamento), detta **variabile di riferimento**.

Per mantenere una velocità costante possiamo agire sui pedali di freno ed acceleratore.

Ho individuato una **relazione causa-effetto**.

Dove è possibile individuare una relazione causa-effetto, lì c'è un **sistema** (nel senso dell'Automatica).



E' una rappresentazione schematica.

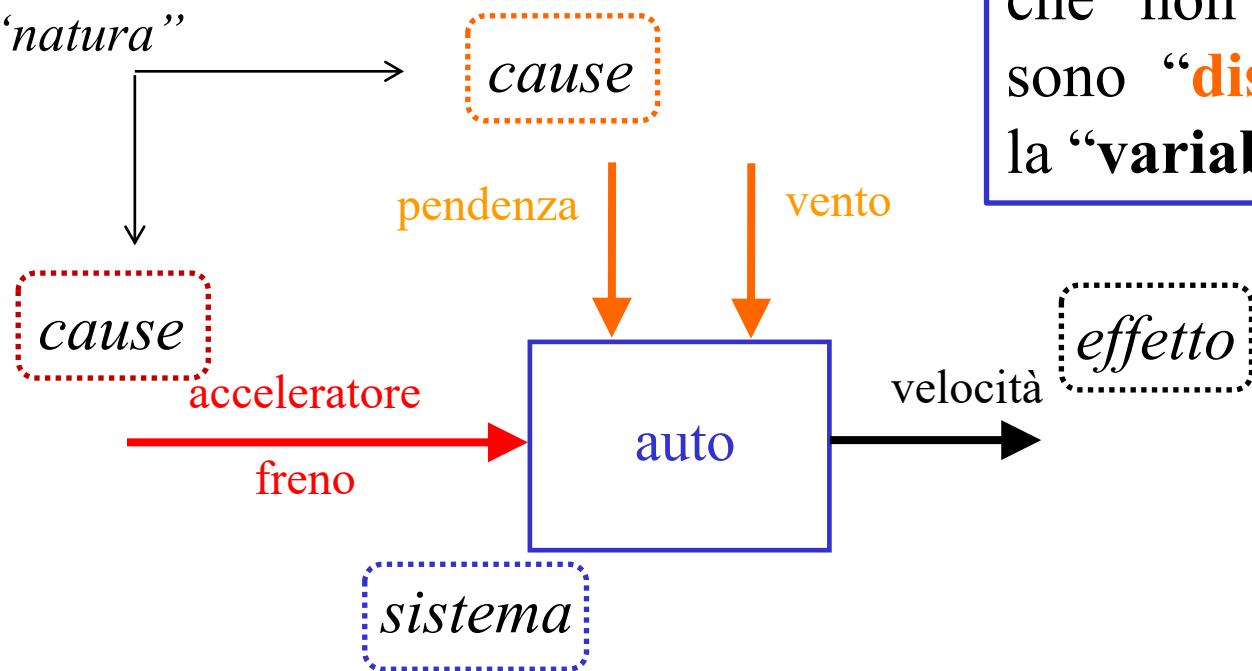
Il sistema e' un "blocco", le cause frecce entranti (ingressi), gli effetti frecce uscenti (uscite).

Formalizzeremo più avanti questo strumento [schema a blocchi]

E' facile individuare le cause giuste? Non sempre...

Inoltre: acceleratore e freno non sono le uniche cause di variazione di velocità. Per es. anche la pendenza della strada, il vento,...

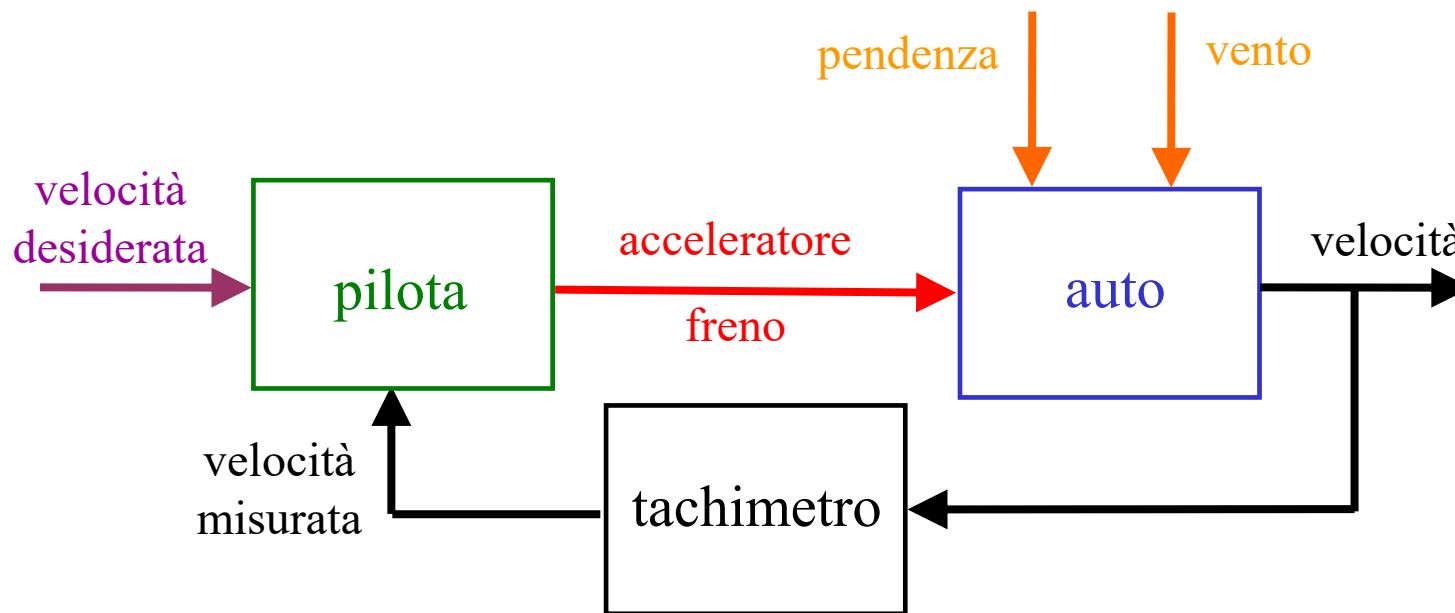
*Cause di diversa  
“natura”*



Le cause che è possibile utilizzare per risolvere il problema di controllo sono “**azioni di controllo**”; quelle che non sono manipolabili sono “**disturbi**”. L’effetto è la “**variabile controllata**”.

Mantenere costante la velocità del veicolo a 75 mph  
(circa 130 km/h) **guardando** il tachimetro non è difficile...





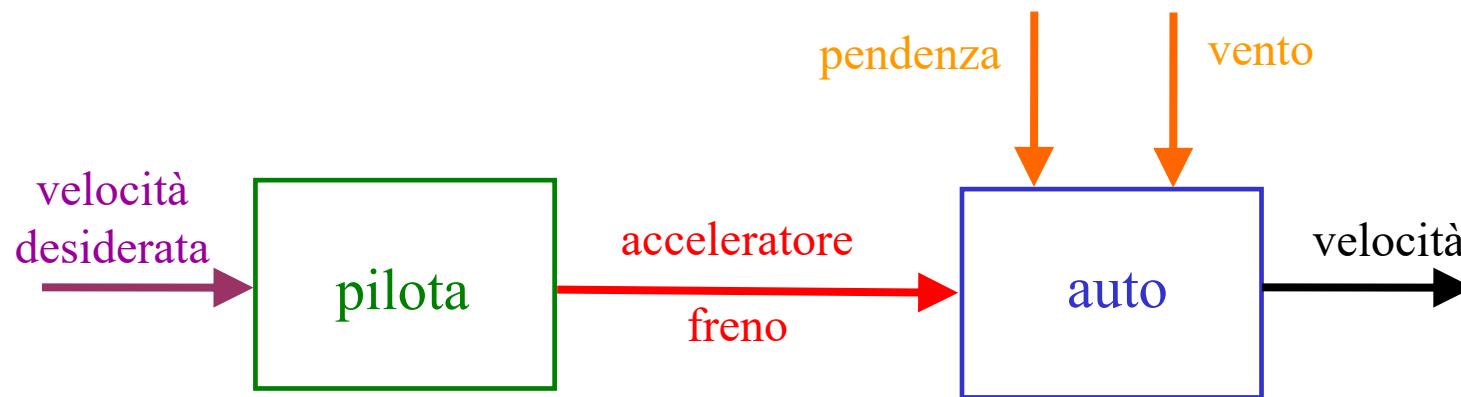
Mantenere costante la velocità a 75 mph è l'**andamento desiderato**, il **requisito** del problema di controllo.

Per risolvere il problema di controllo è sufficiente decidere una **strategia di controllo**, per es. basata sul **confronto tra velocità desiderata e velocità misurata**: se la velocità è bassa, schiaccio l'acceleratore; se è alta rilascio l'acceleratore o freno.

E' anche possibile compensare l'effetto di eventuali **disturbi** (ne conosco gli effetti sulla velocità, perchè la misuro).

Mantenere costante la velocità senza guardare il tachimetro è decisamente più difficile ...





L'**azione di controllo** è funzione solo della **velocità desiderata**, non si dispone più della misura.

E' necessario conoscere il legame tra l'azione sui pedali e la velocità del veicolo (è indispensabile un **modello (matematico) del sistema**).

Infatti il **pilota** deve invertire il modello, cioè dalla relazione causa-effetto tra pedali e velocità, ottenere la relazione inversa effetto(desiderato)-causa.

E' molto più difficile compensare l'effetto dei **disturbi** (bisognerebbe misurare anche loro...)

Prima lezione imparata dall'esempio. ...

Un **problema di controllo** si pone quando si desidera imporre un **comportamento desiderato ad un sistema**.

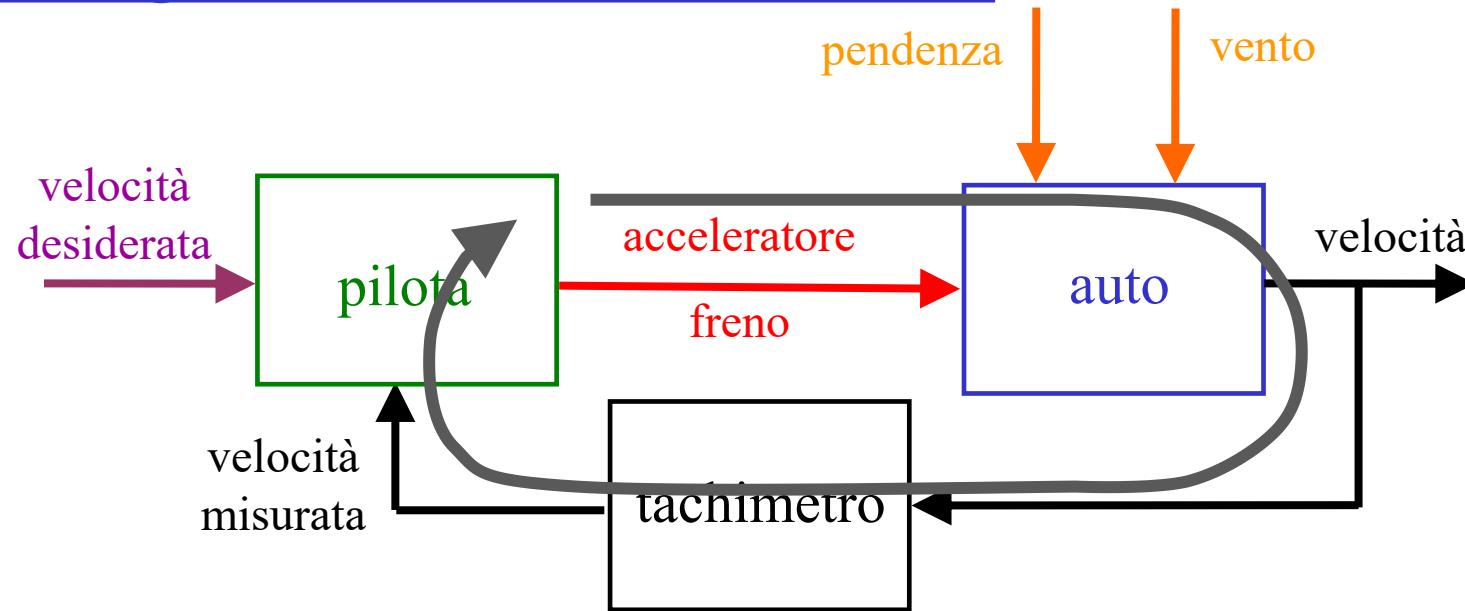
Concretamente ciò si ottiene facendo in modo che alcune **variabili** (dette **variabili controllate**) **abbiano un determinato andamento** (nel tempo) definito dall'andamento (nel tempo) di **variabili di riferimento**.

*Seconda lezione imparata dall'esempio. ...*

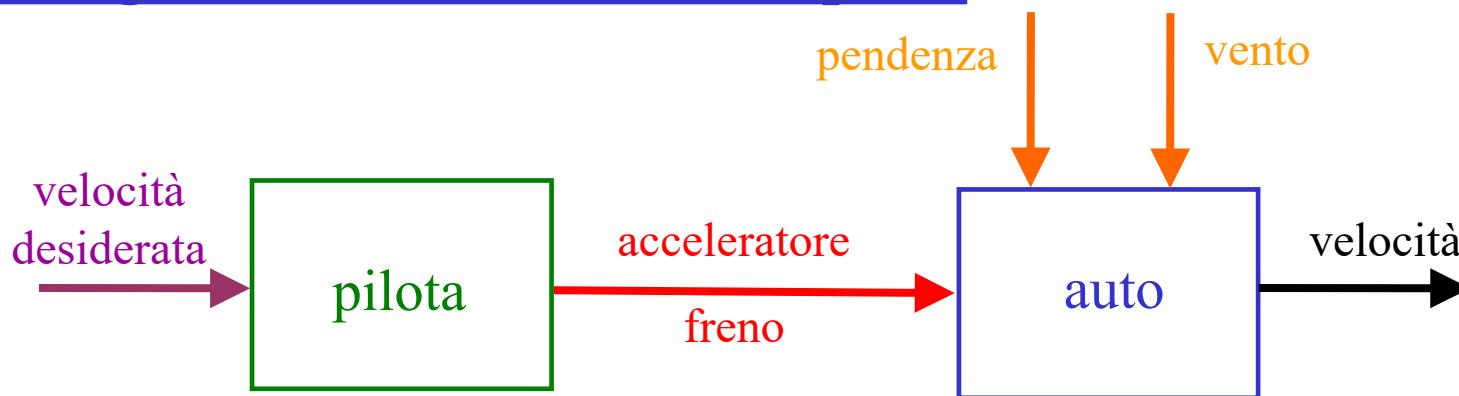
Esistono due principali strategie di controllo,  
una delle quali sfrutta le **misure**.

Disponendo della **misura** delle variabili  
controllate è possibile utilizzare una **strategia**  
**di controllo in anello chiuso** (in **retroazione**,  
in **feedback**).

## Strategia di controllo in anello chiuso



## Strategia di controllo in anello aperto



Terza lezione imparata dall'esempio. ..

Per risolvere il problema di controllo è necessario individuare delle variabili (**azioni di controllo**) su cui agire per ottenere l'andamento desiderato delle **variabili controllate** (serve una **relazione causa-effetto**).

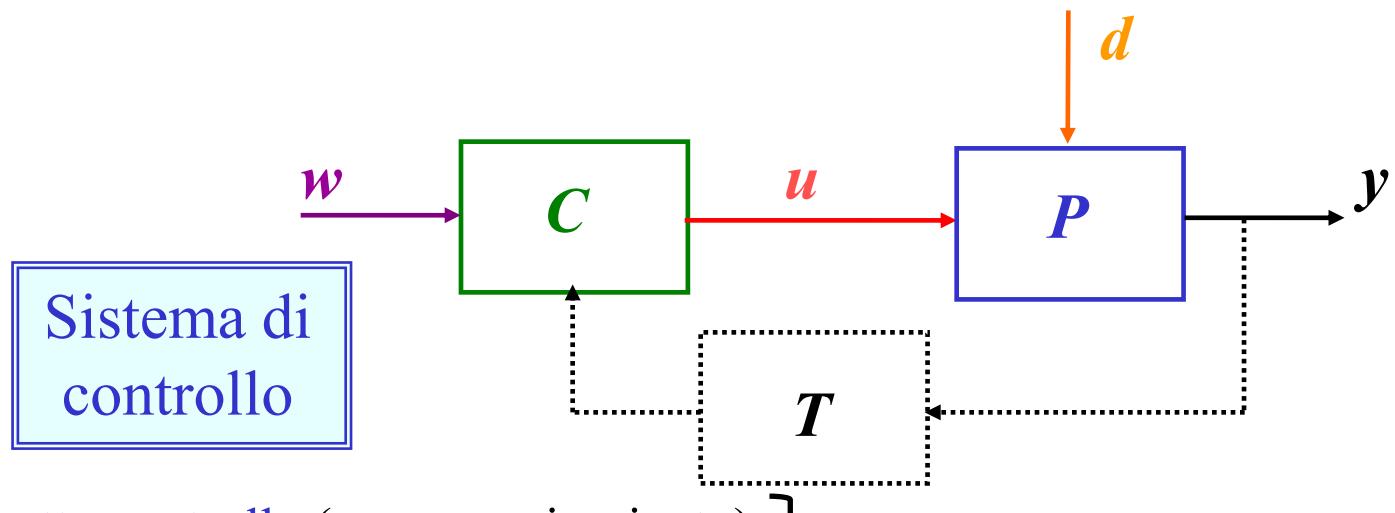
Concretamente, è necessario disporre di un **modello (matematico) del sistema da controllare**, una descrizione matematica della relazione causa-effetto.

*Quarta lezione imparata dall'esempio...*

Sul sistema possono agire **disturbi**.

La strategia di controllo in anello chiuso è (intrinsecamente) in grado di tenere conto della presenza di disturbi e, se opportunamente congegnata, è in grado di compensarne/ridurne gli effetti.

Riordiniamo (almeno un poco...) la terminologia...



- SISTEMI**
- $P$  sistema sotto controllo (processo, impianto)
  - $C$  controllore (regolatore)
  - $T$  trasduttore (misuratore, sensore)
- SEGNALI**
- $y$  variabile controllata (uscita)
  - $u$  azione di controllo (ingresso manipolabile)
  - $d$  disturbo (ingresso non manipolabile)
  - $w$  variabile di riferimento (andamento desiderato)

Il pilota è un controllore, ma non certo automatico!!

Il **controllore** deve essere dotato di **intelligenza**.

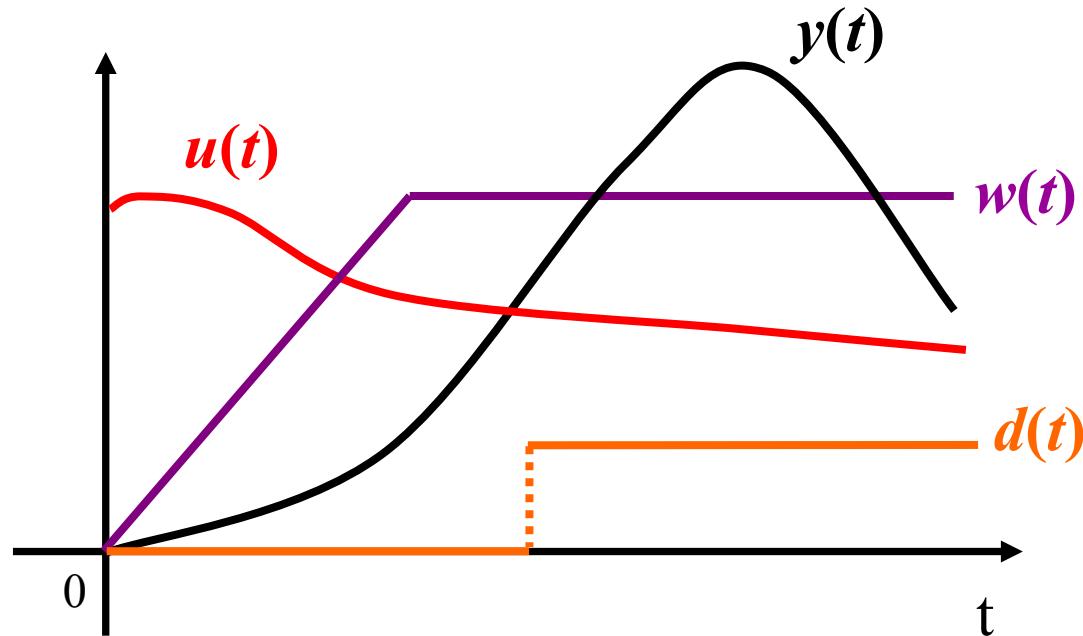
Ripensando all'esempio, il pilota deve decidere:

- 1) se aumentare o diminuire la velocità;
- 2) quanto spingere sul pedale dell'acceleratore per aumentare la velocità (e viceversa per diminuirla);
- 3) se usare anche il pedale del freno per diminuirla.

E' possibile scrivere un **algoritmo** che esegua queste operazioni in modo corretto ed adeguato a seconda della situazione. Tale algoritmo si dice **legge di controllo** ed è il cuore del **controllore automatico**.

Cosa sono i segnali, le variabili in gioco ?

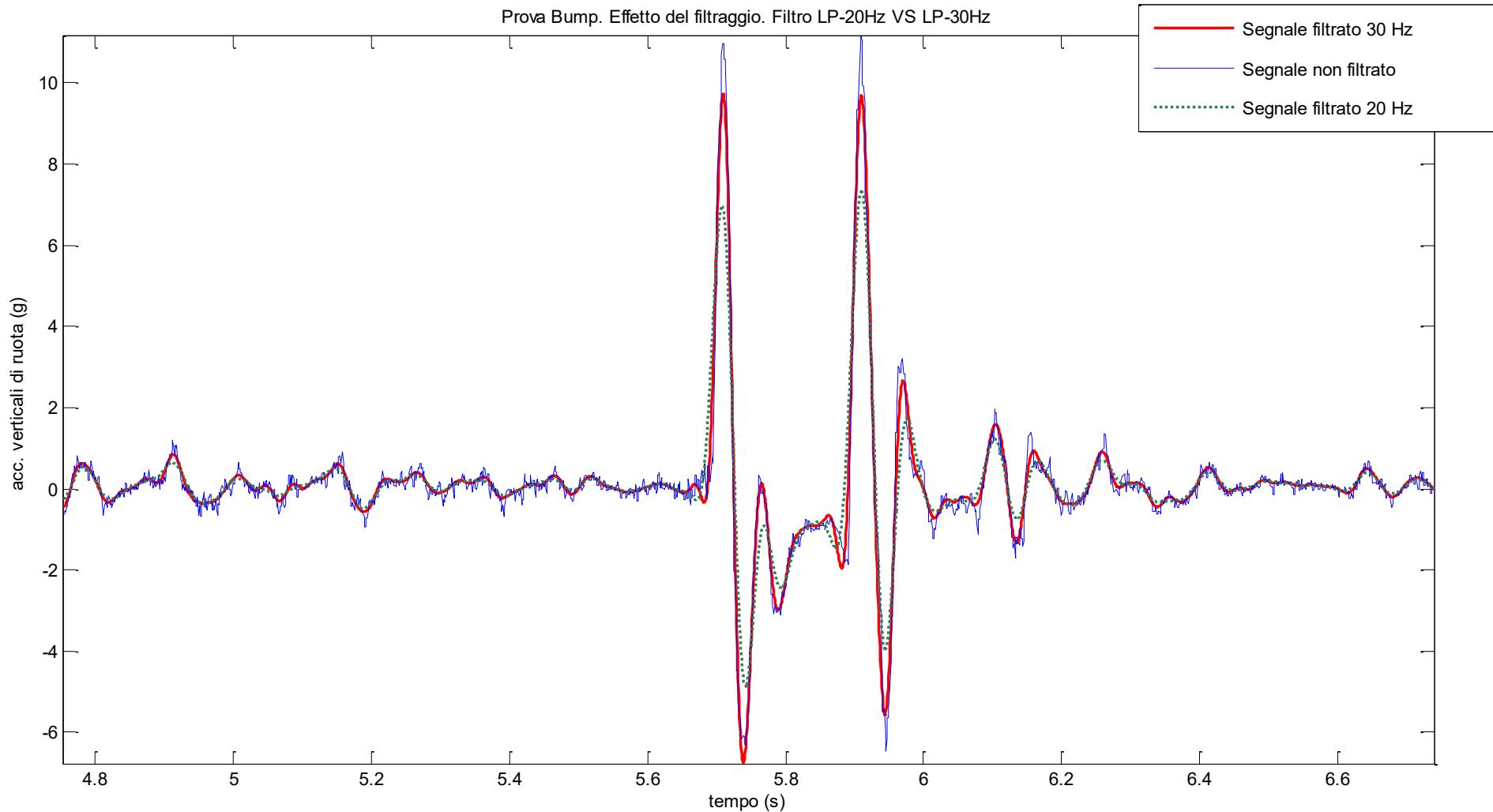
Le variabili  $y$ ,  $u$ ,  $d$ ,  $w$  sono descritte da  
**funzioni reali della variabile reale  $t$**  (indice temporale)



Un **segnale** descrive l'**andamento temporale** di una variabile (in generale misurabile).

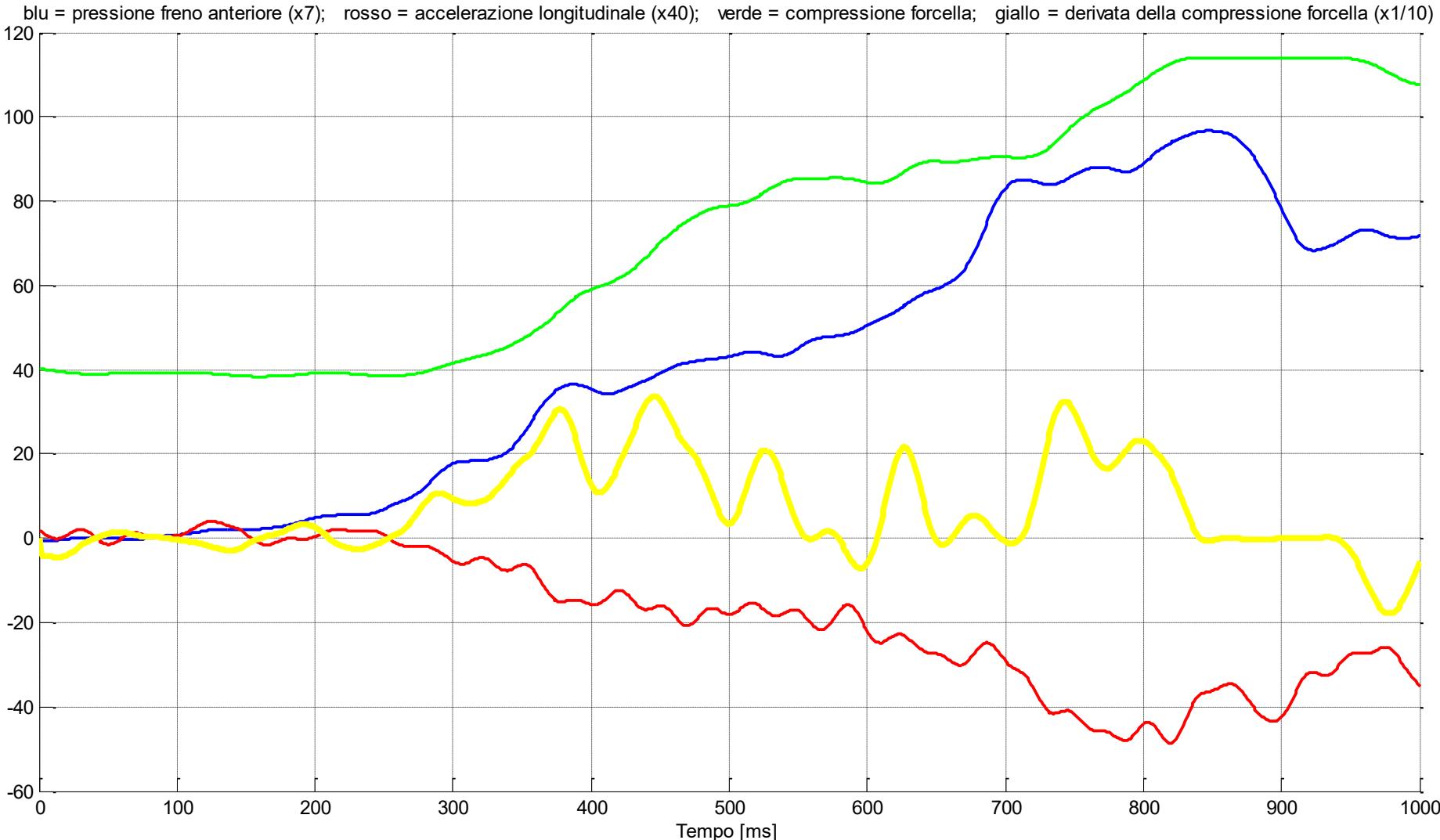
# Esempi di segnali

## ACCELEROMETRO [g]

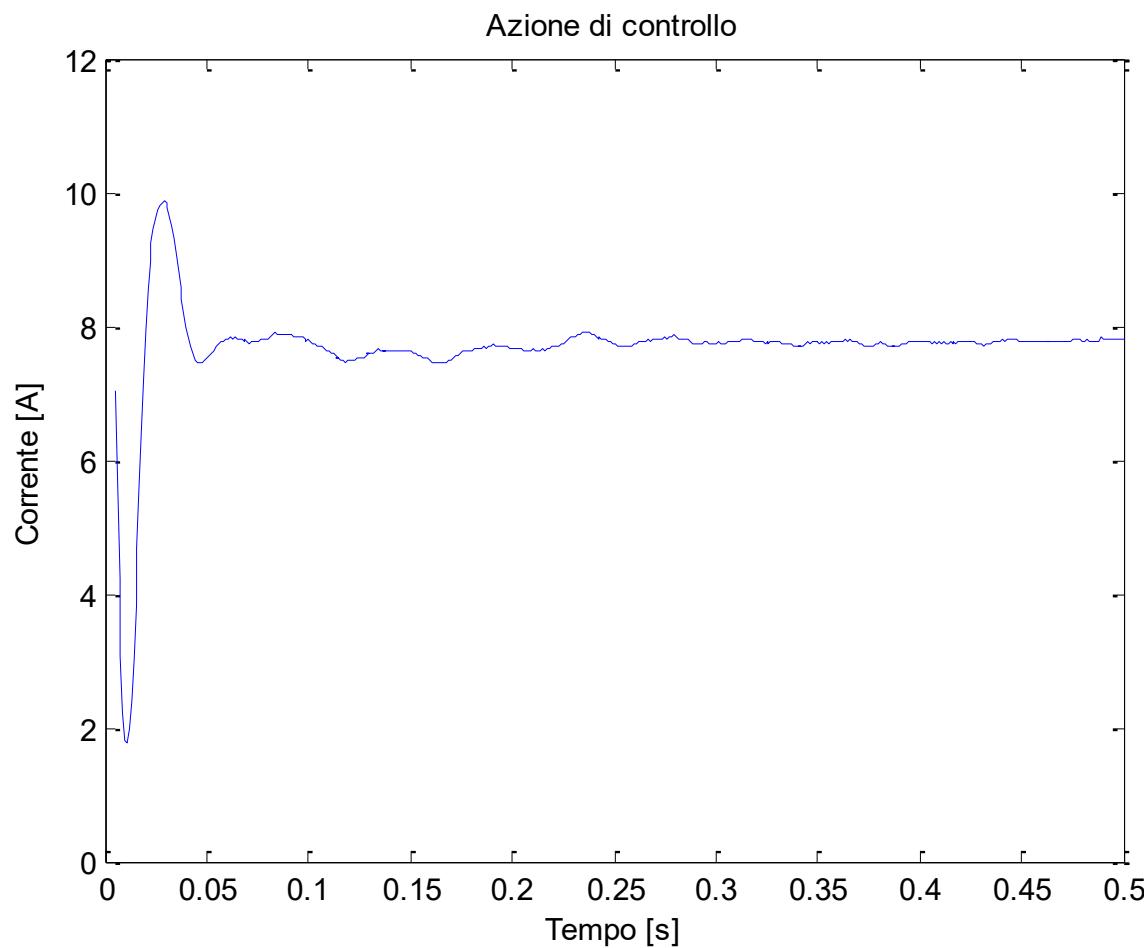


# SENSORE DI PRESSIONE [bar] – ACCELEROMETRO [g] – ESTENSIMETRO [mm]

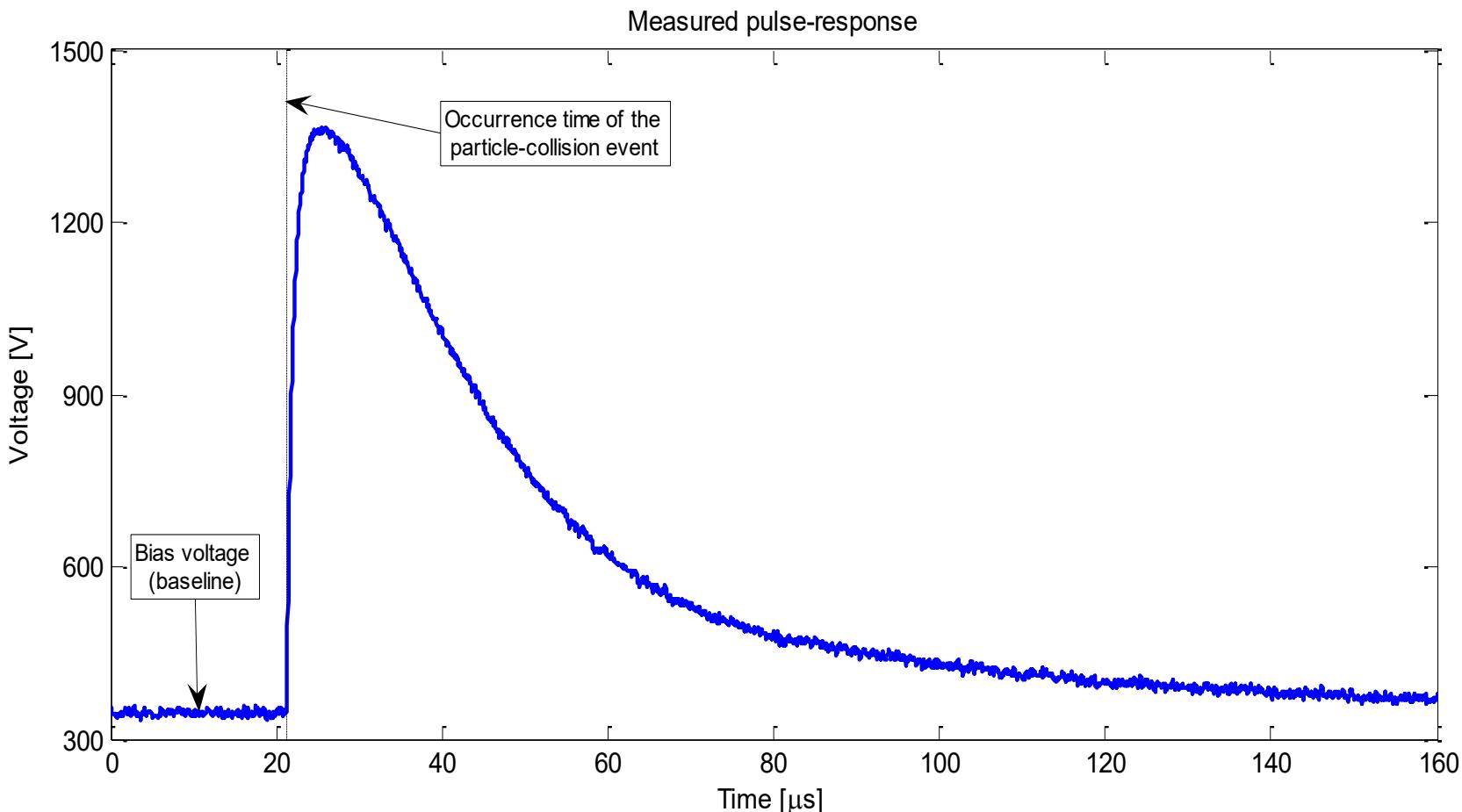
ANALISI TEMPORALE NELLA FRENATA DA 70 km/h:



# CORRENTE [A]

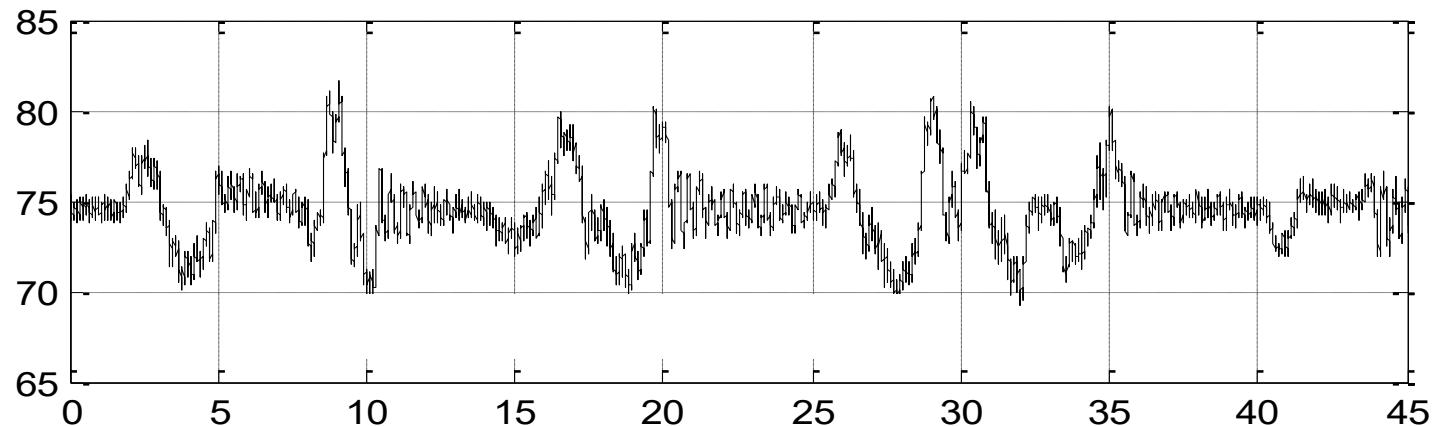


# TENSIONE [V]

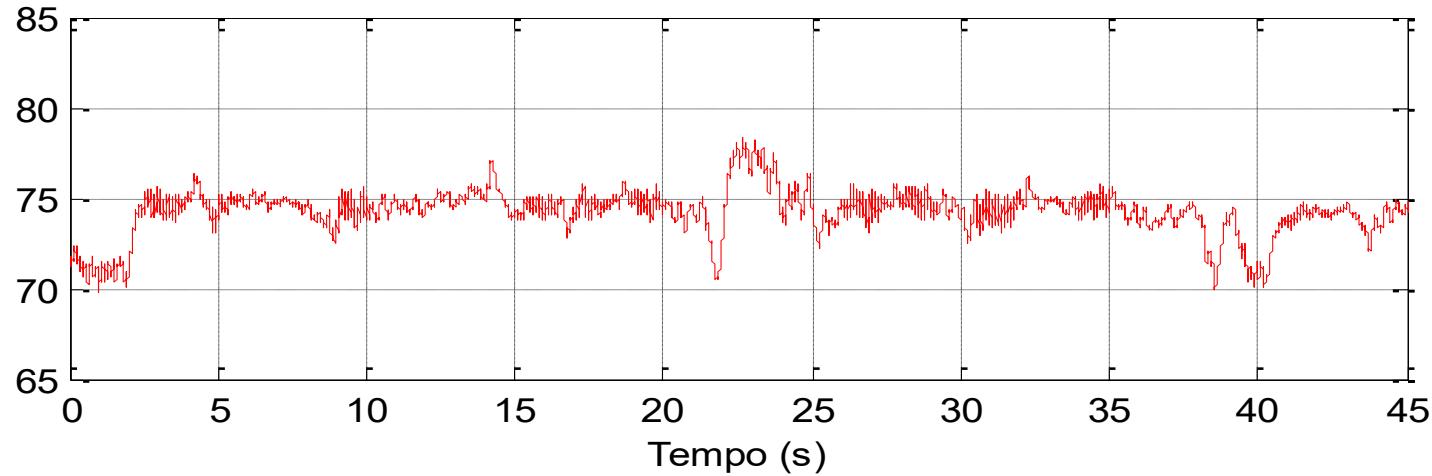


# FORZA [kgp] (Cella di carico)

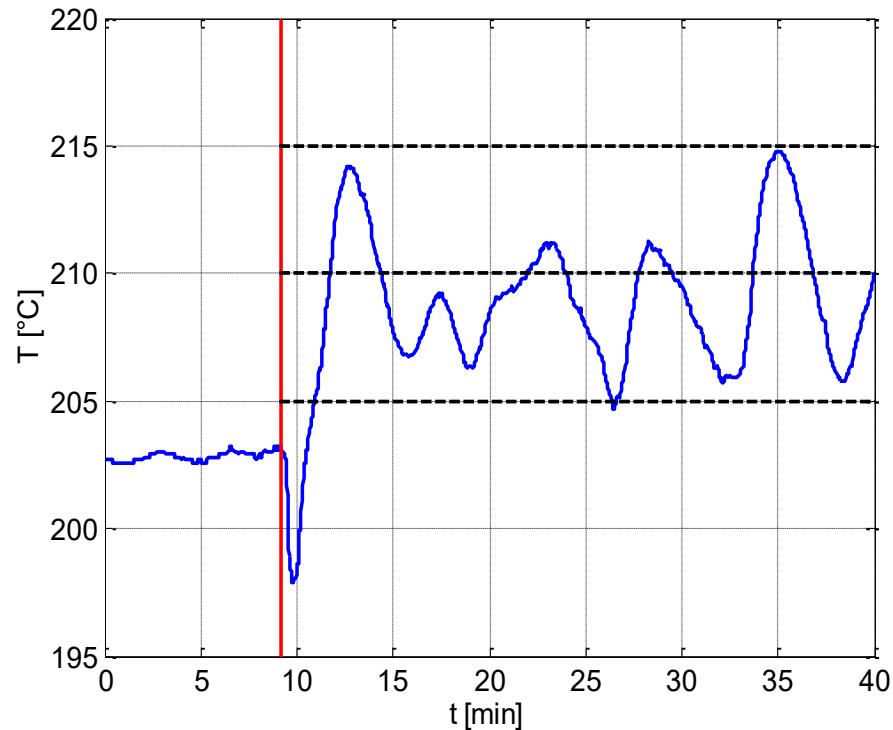
Misura



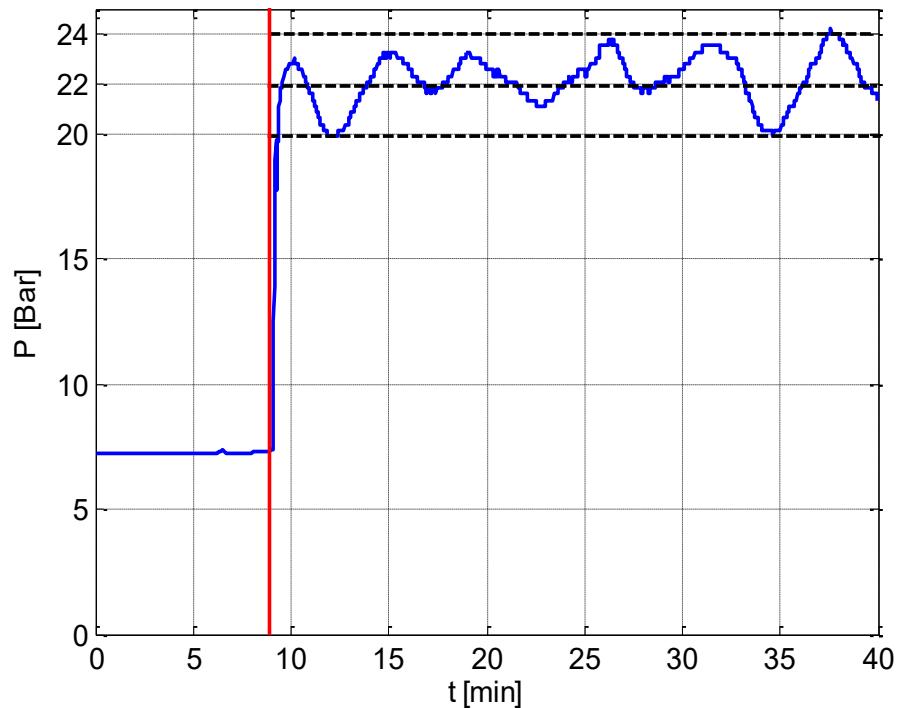
Stima



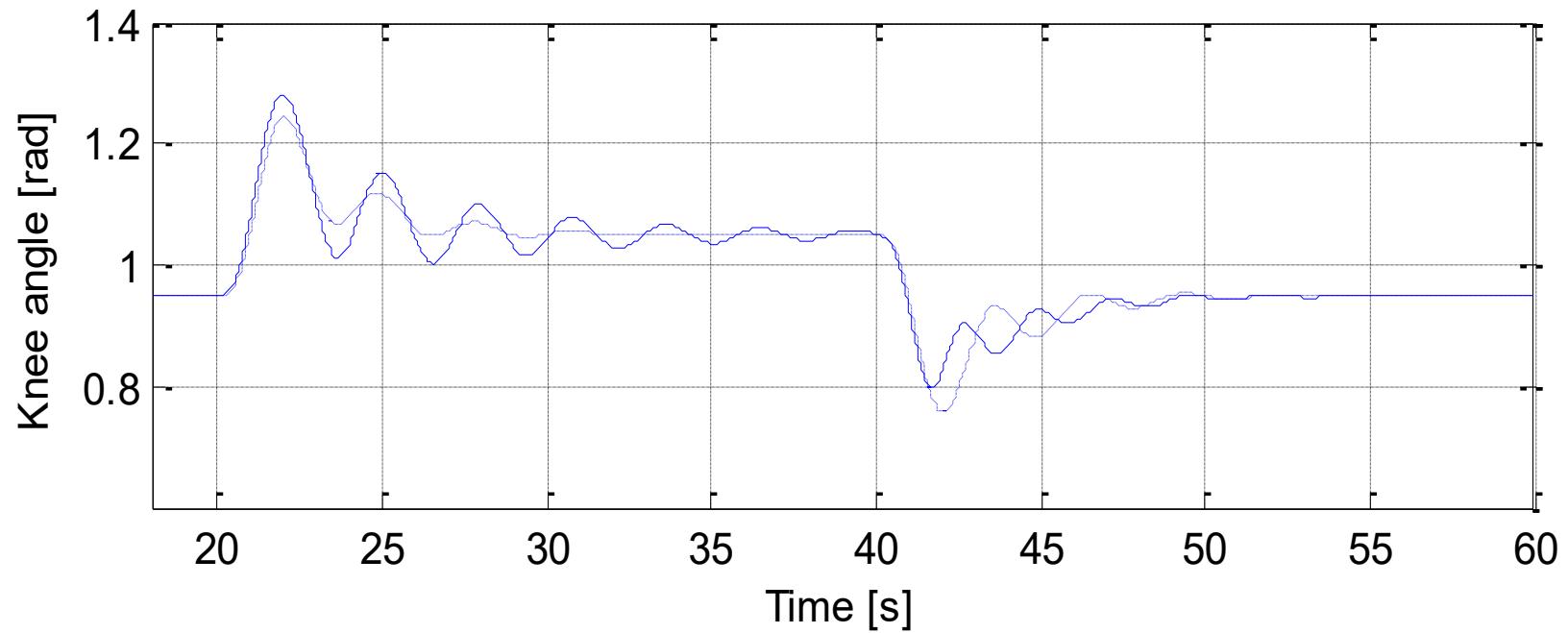
## TEMPERATURA [°C]



## PRESSIONE [bar]



## ANGOLO [rad]



L'Automatica è un insieme di discipline  
(e non una sola) ...

Per risolvere il problema del controllo può essere necessario risolvere altri problemi, ciascuno dei quali è oggetto di una specifica disciplina, perché fa riferimento a contesti e strumenti anche molto diversi tra loro.

Il denominatore comune è la possibilità di impostare un problema di controllo (o una sua parte).

Un approccio comune a problemi differenti...

# Di cosa si occupa l'automatica?

**Control system design** – progettazione degli algoritmi di controllo

**System theory** – modellistica, simulazione e analisi dei sistemi

**System Identification** – modellistica dai dati dei sistemi da controllare e stima; sensori sw

**Mechatronics** – modellistica e controllo di sistemi meccanici

**Robotics** – robotica, controllo dei manipolatori industriali e dei sistemi autonomi/intelligenti.

**Fault diagnosis & supervision** – diagnostica ed isolamento dei guasti; supervisione di sistemi complessi

**Automation, manufacturing and logistics** – controllo e coordinamento di macchine in impianti manifatturieri; logistica

**Process control** – controllo di particolari processi produttivi industriali (chimici, petroliferi, minerari, farmaceutici,...)

## 2. Dov'è l'Automatica?

L'automatica è stata definita la “**hidden technology**”.

Difficile da vedere, ma (veramente) onnipresente.

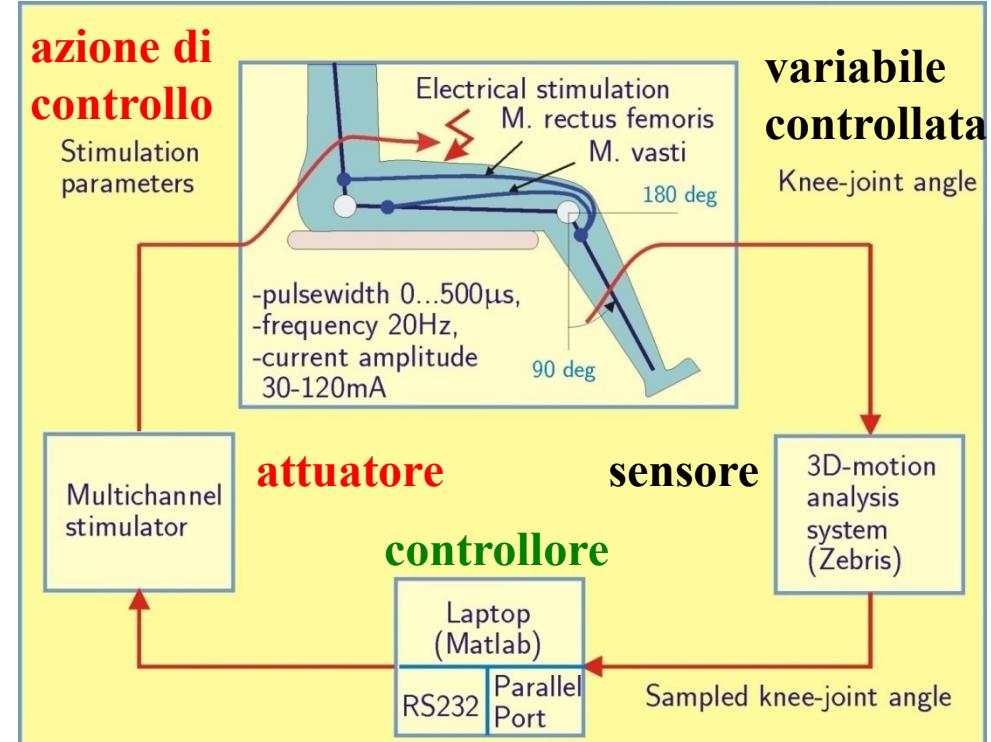
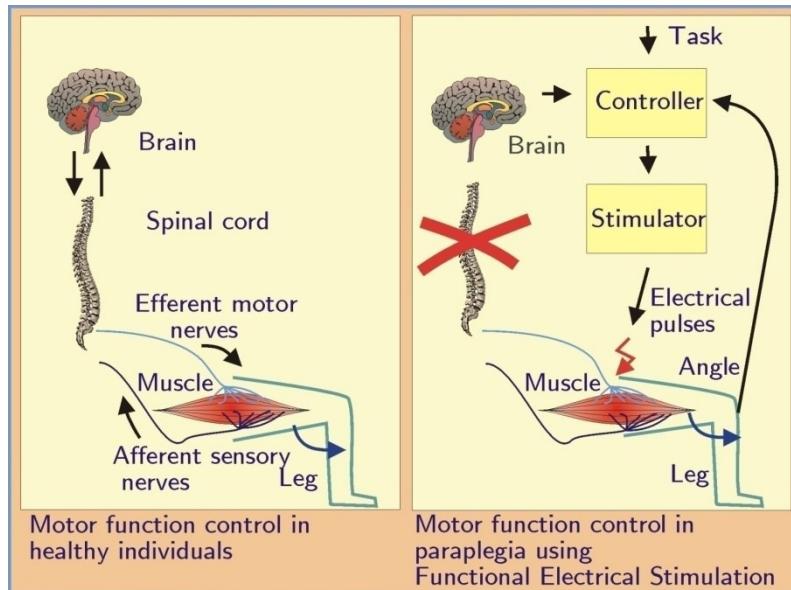
Si trovano soluzioni “automatiche” a problemi nei settori scientifici ed industriali più vari (oltre che nella vita quotidiana):

- Automotive (sospensioni elettroniche, trasmissioni)
- Biomedicale (riabilitazione)
- Fisica Nucleare
- Industria di processo (lavorazione della plastica)
- Industria alimentare (lavorazione dello zucchero)
- Logistica industriale (AGV)
- Finanza (mercato del credito)
- Materiali biologici (caratterizzazione meccanica)
- Industria tessile (telai)
- ...

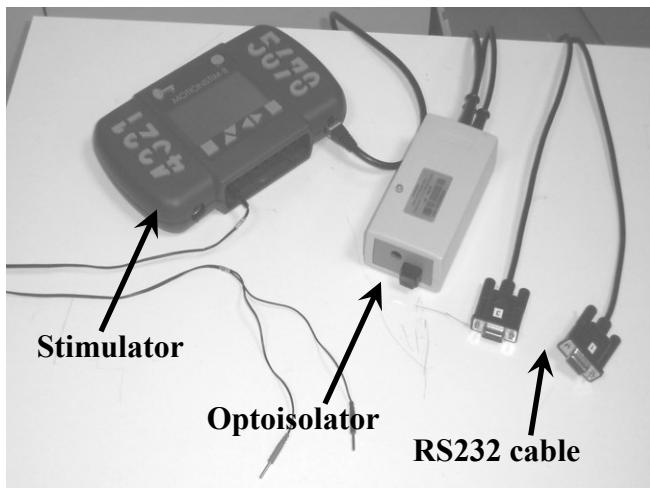
# Controllo della Stimolazione Elettrica Funzionale - esempio

Riabilitazione di soggetti paraplegici

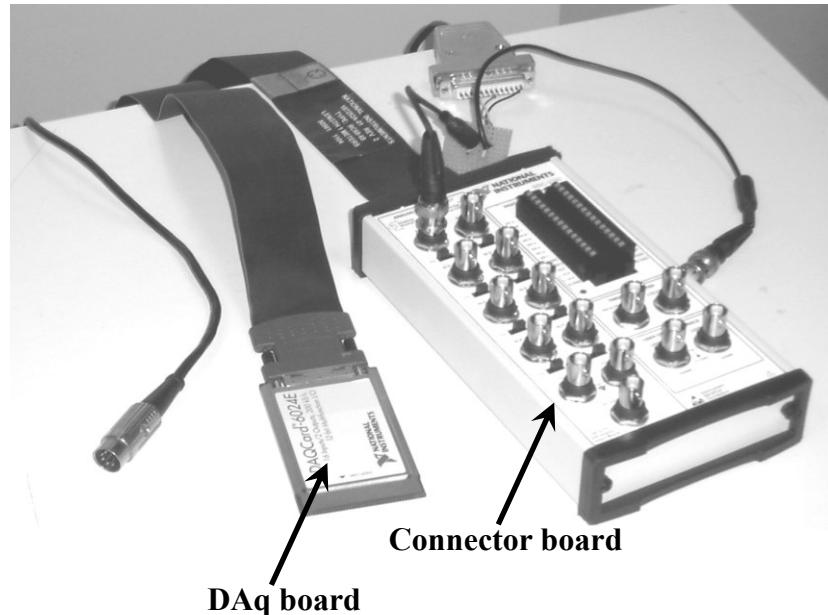
**Problema di controllo:** sviluppare il sistema di controllo della posizione del ginocchio



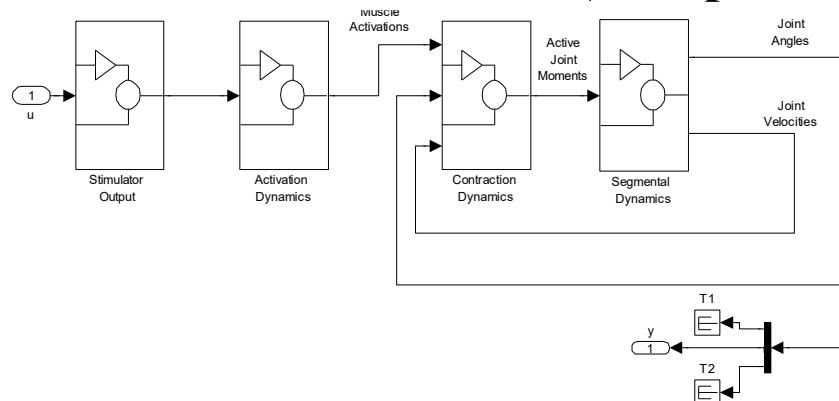
## Attuatore Elettrostimolatore programmabile



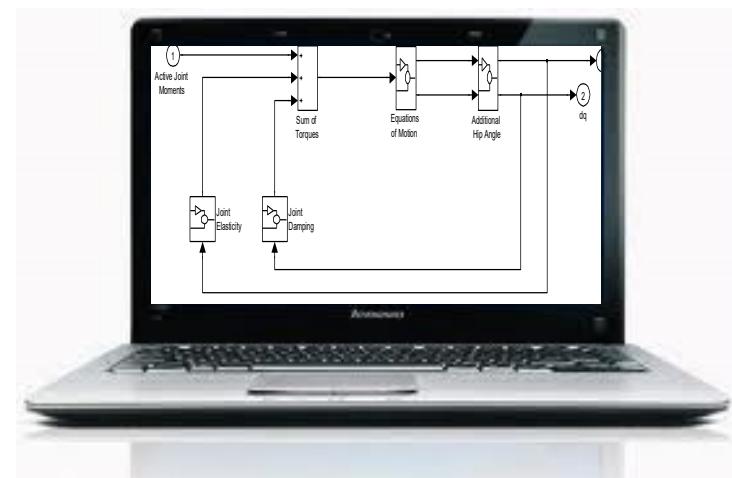
## Sistema di acquisizione del sensore



## Codice SW di controllo (esemplificativo)



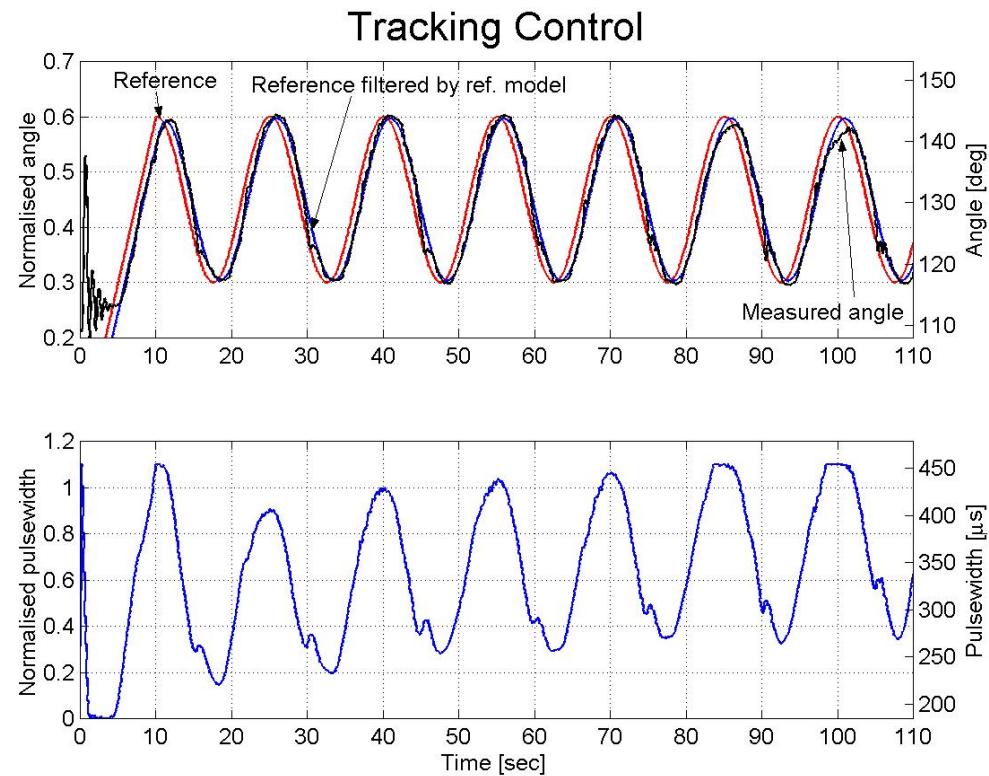
## Controllore



... dov'è l'Automatica?...



Tracking di una sinusoide



Si noti l'effetto della fatica (compensato dal controllore)

### 3. Conclusioni (?)

<http://www.ieeecss.org>

## Control systems are ubiquitous

Control systems are ubiquitous, essential, and largely invisible to the general public. Products ranging from the paper that we use, the beer, wine, or water that we drink, the newspapers that we read, to the drugs that treat our diseases depend on automatic controllers for their uniformity and consistency.

Our homes are full of automatic control systems. There are thermostats to regulate the temperature of the house, the refrigerator, the dishwasher, the clothes washer and dryer, the oven, and the hot water heater. Many household controllers are less obvious. These include the automatic controllers that regulate the flow of fuel to the furnace, those inside the TV, radio, CD and DVD players and any other electronic devices in the house and those that insure that our coffee maker and microwave oven work properly.

The modern automobile is full of automatic controllers. Pollution is reduced, fuel is saved, and comfort is enhanced by automatic controllers in the car. Stability and control augmentation systems make nearly every modern vehicle easier for the human to control and safer. These systems work with the human operator to make him or her perform better. An excellent example is ABS brakes.

The members of the animal kingdom are also full of automatic controllers. The temperature of our body, the movements of our limbs, our heart rate and blood pressure, the amount of glucose in our blood, and our weight are all regulated by feedback controllers within our bodies. There are serious diseases that result from improper operation of these controllers. Automatically controlled insulin pumps and more and more sophisticated controlled prostheses are helping to mitigate these problems. **Improvements in many aspects of our lives will depend on improved control systems.**

<https://www.youtube.com/watch?v=XJLMW61303g>



# Lezione 2.

# Sistemi dinamici a tempo continuo

# Schema della lezione

1. Cos'è un sistema dinamico ?
2. Modelli di sistemi dinamici
3. Il concetto di dinamica
4. Variabili di stato
5. Rappresentazione in variabili di stato di un sistema dinamico
6. Classificazione dei sistemi dinamici
7. Scelta delle variabili di stato

# 1. Cos'è un sistema dinamico?

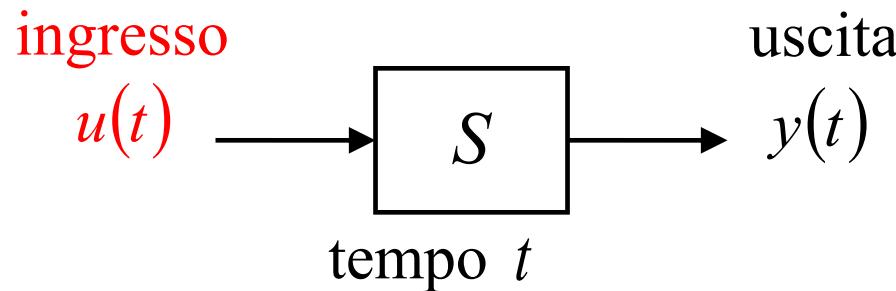


Un **sistema dinamico** è un oggetto (o insieme di oggetti tra loro interconnessi) che interagisce col mondo circostante mediante:

- **ingressi** (azioni compiute sul sistema da agenti esterni)
- **uscite** (descrivono la risposta del sistema agli stimoli)

E' indispensabile disporre di modelli matematici dei sistemi dinamici per descrivere il loro comportamento

## 2. Modelli di sistemi dinamici



**Sistemi a tempo continuo**  
*tempo variabile reale*

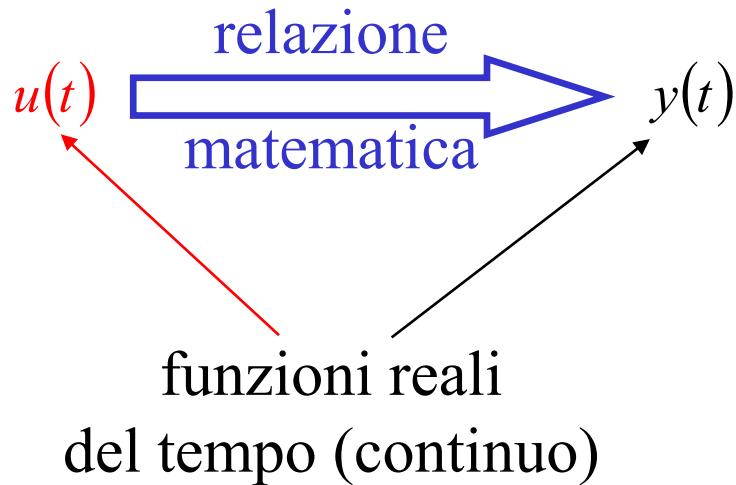
**Sistemi digitali (o a tempo discreto)**  
*tempo variabile intera relativa*

Sistemi a eventi discreti  
*non c'è il tempo*

**IMAD+Controlli Aut**  
12 cfu (I sem – I anno LS)

**Ing Sistemi di Controllo**  
6 cfu

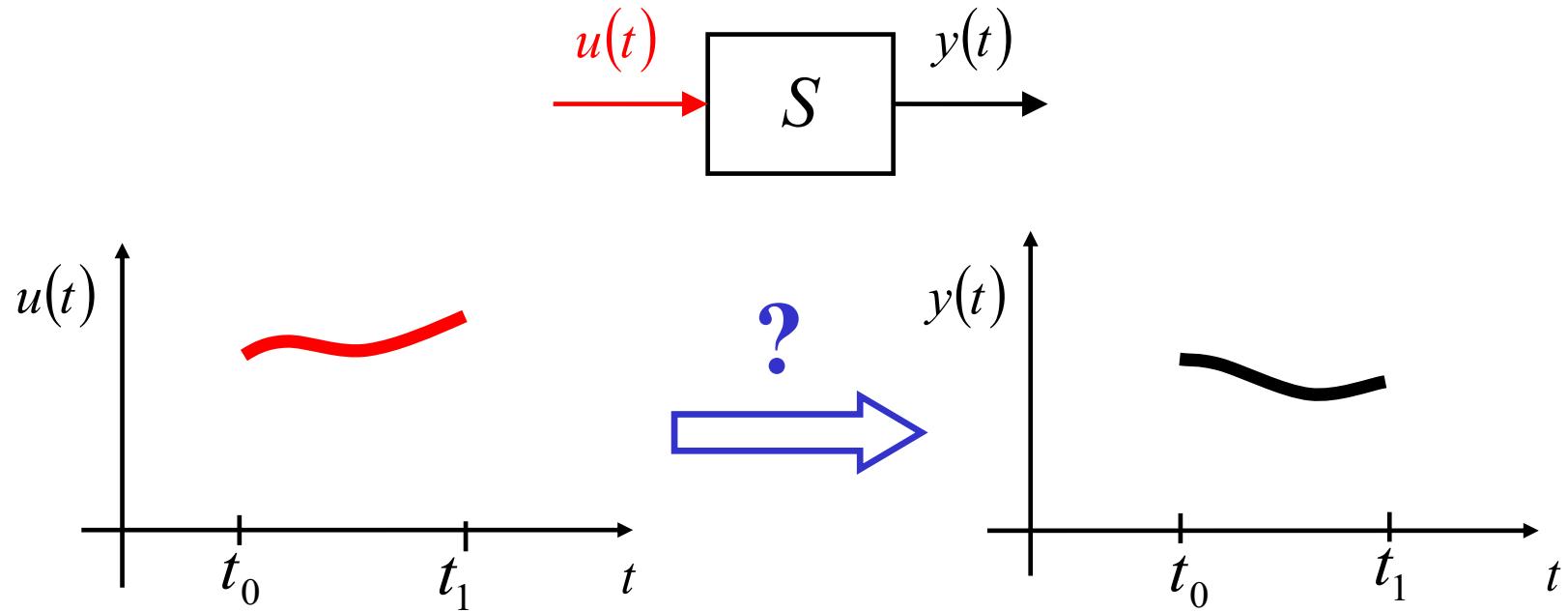
**Automazione Industriale**  
6 cfu (I sem – III anno)



Che tipo di relazioni matematiche servono ?

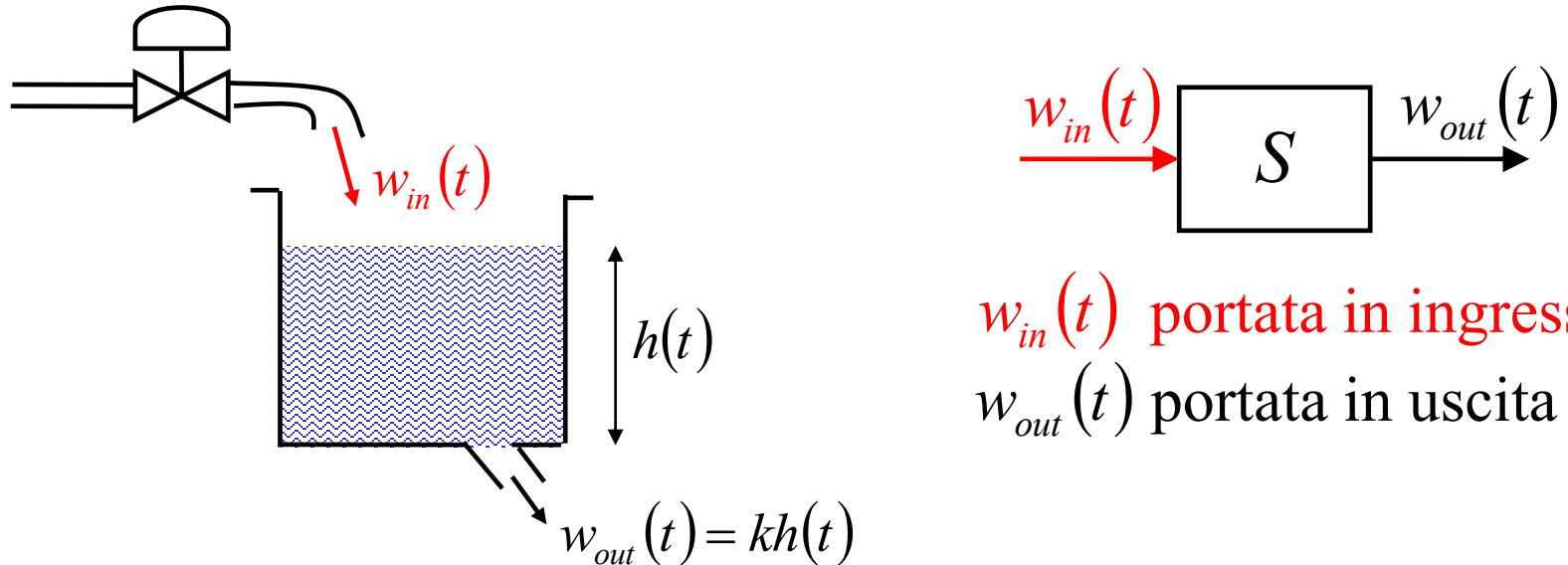
### 3. Il concetto di dinamica

Cosa significa l'aggettivo “**dinamico**” ?



La conoscenza del valore delle variabili di ingresso al tempo  $t$  non è sufficiente a determinare univocamente il valore delle variabili di uscita al medesimo tempo  $t$

# Esempio



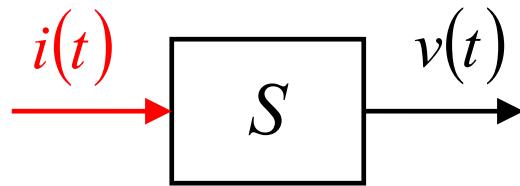
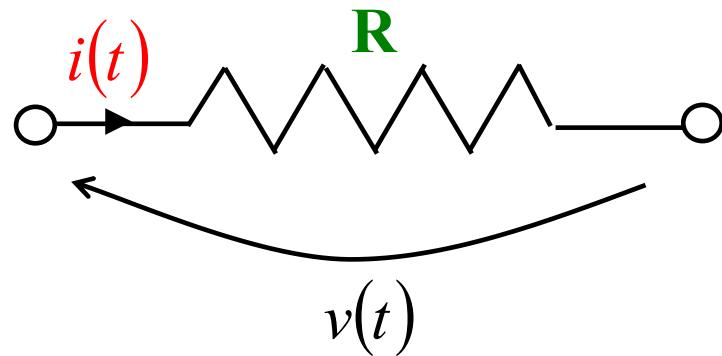
$w_{in}(t)$  portata in ingresso  
 $w_{out}(t)$  portata in uscita

Per determinare  $w_{out}$  bisogna conoscere (oltre a  $w_{in}$ ) il  
**livello iniziale del serbatoio**

$$\left. \begin{array}{l} w_{in}(t), \quad t \in [t_0, t_1] \\ (h(t_0)) \end{array} \right\} \longrightarrow w_{out}(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

**E' un sistema dinamico**

# Esempio



$i(t)$  corrente nella resistenza

$v(t)$  tensione ai capi della resistenza

Legge di Ohm       $v(t) = Ri(t)$

Basta conoscere  $i(t)$  per determinare univocamente  $v(t)$

**E' un sistema NON dinamico**

- ✿ Bisogna conoscere **qualcosa di più** oltre al semplice andamento delle variabili di ingresso  
(condizioni iniziali a t.c.)
- ✿ Serve “**memoria**” per sapere in che condizioni, **in che stato si trova il sistema** nell’istante in cui si comincia ad applicare l’ingresso
- ✿ La ragione non è puramente matematica  
(Se uso eq.differenziali devo conoscere le condizioni iniziali)

## 4. Variabili di stato

Variabili **interne** del sistema la cui conoscenza al tempo  $t_0$  costituisce la minima informazione necessaria per determinare  $y(t)$ , per tutti i  $t \geq t_0$ , in conseguenza di  $u(t)$ , per tutti i  $t \geq t_0$

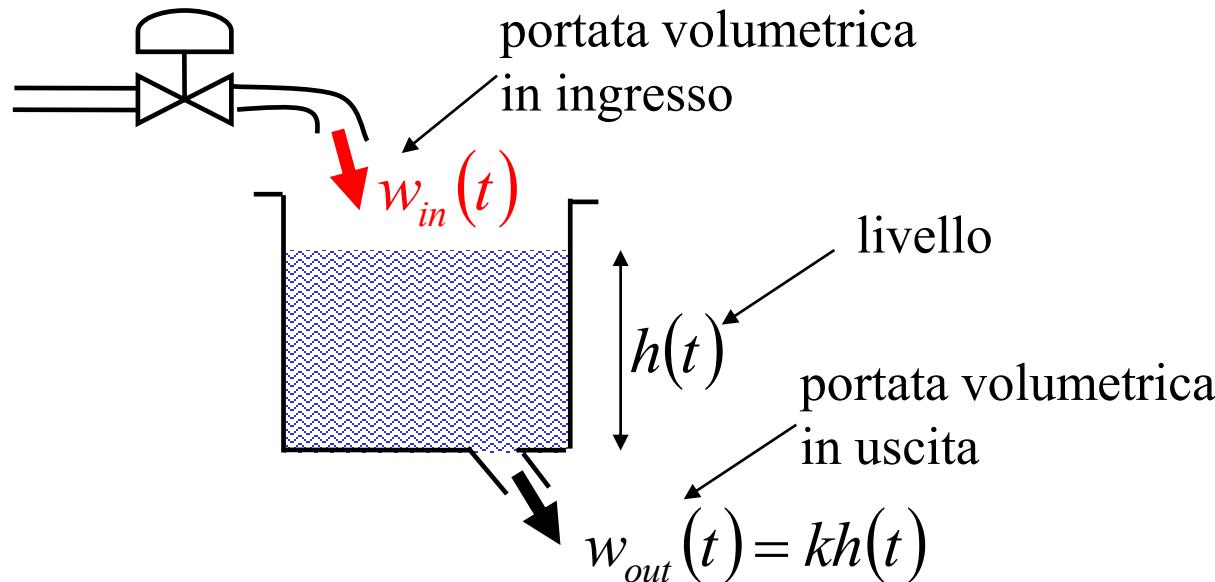
$$x_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

**$n$  è l'ordine del sistema**

**vettore di stato**

$$\left. \begin{array}{l} u(t), t \geq t_0 \\ \mathbf{x}(t_0) \end{array} \right\} \quad \longrightarrow \quad y(t), t \geq t_0$$

# Esempio



L'area di base è  $A$ , quindi il volume è

$$V(t) = Ah(t)$$

## Conservazione del volume

$$\frac{dV(t)}{dt} = w_{in}(t) - w_{out}(t) \longrightarrow A\dot{h}(t) = w_{in}(t) - w_{out}(t)$$

Equazione differenziale del 1° ordine,  
lineare, a coefficienti costanti

$w_{in}(t) \rightarrow u(t)$  ingresso (causa)

$h(t) \rightarrow x(t)$  stato

$w_{out}(t) \rightarrow y(t) = kx(t)$  uscita (effetto)

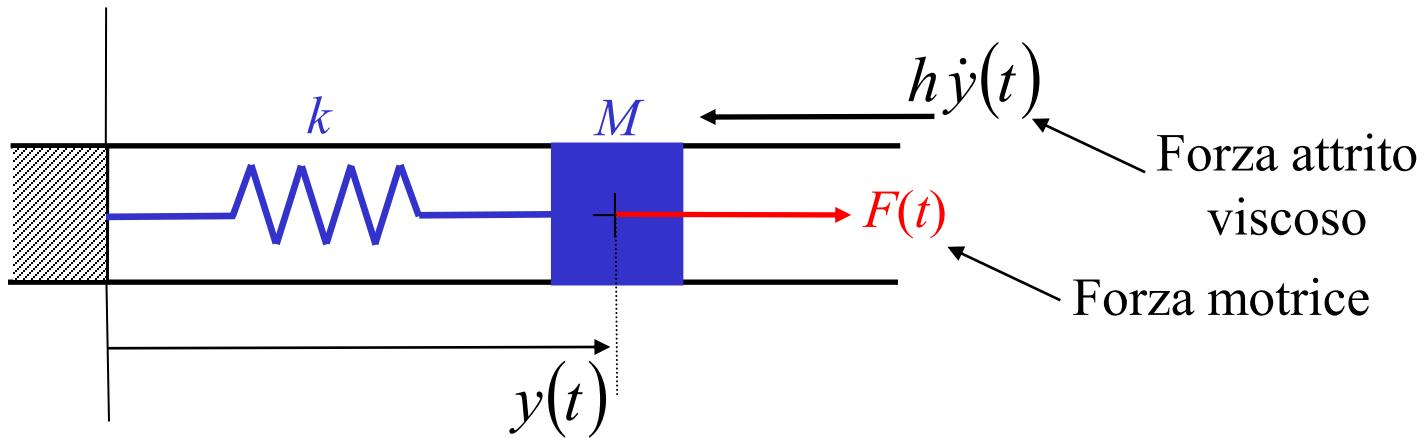
$$A\dot{h}(t) = w_{in}(t) - w_{out}(t) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} A\dot{x}(t) = u(t) - kx(t) \\ y(t) = kx(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{k}{A}x(t) + \frac{1}{A}u(t) \\ y(t) = kx(t) \end{cases}$$

*Equazione differenziale del 1° ordine,  
lineare, a coefficienti costanti*

*Equazione d'uscita*

# Esempio



Forza apparente

**Bilancio forze**

Forza di richiamo  
della molla

$$M \ddot{y}(t) = F(t) - k y(t) - h \dot{y}(t)$$

$F(t) \rightarrow u(t)$  ingresso (causa)

$y(t) \rightarrow x_1(t)$   
 $\dot{y}(t) \rightarrow x_2(t)$  stato (due variabili)

$y(t) \rightarrow y(t)$  uscita (effetto)

Equazione differenziale  
del 2° ordine, lineare,  
a coefficienti costanti

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = \frac{1}{M}(u(t) - kx_1(t) - hx_2(t)) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) - \frac{h}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

*Sistema di 2 equazioni differenziali del 1° ordine,  
lineari, a coefficienti costanti  
Equazione d'uscita*

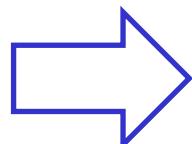
Il sistema di equazioni differenziali può essere scritto anche in forma vettoriale/matriciale

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

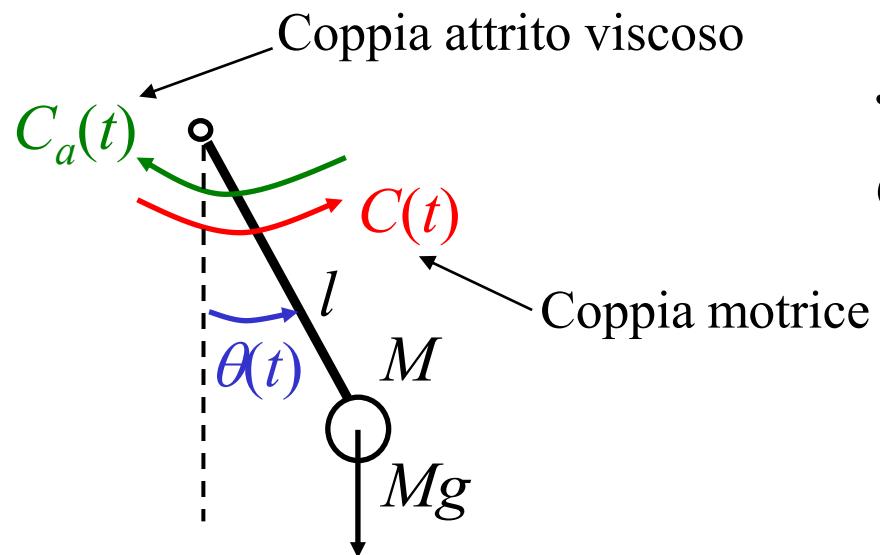
Definendo

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

# Esempio



$$J = Ml^2 \quad \text{Momento di inerzia}$$

$$C_a(t) = h\dot{\theta}(t) \quad \text{Coppia attrito viscoso}$$

Coppia apparente

## Bilancio coppe

$$J\ddot{\theta}(t) = C(t) - Mgl \sin(\theta(t)) - C_a(t)$$

Coppia di gravità

$$Ml^2\ddot{\theta}(t) = -Mgl \sin(\theta(t)) - h\dot{\theta}(t) + C(t)$$

$C(t) \rightarrow u(t)$  ingresso (causa)

$\theta(t) \rightarrow x_1(t)$  stato (due variabili)  
 $\dot{\theta}(t) \rightarrow x_2(t)$

$\theta(t) \rightarrow y(t)$  uscita (effetto)

$$Ml^2\ddot{\theta}(t) = -Mgl \sin(\theta(t)) - h\dot{\theta}(t) + C(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) \equiv \dot{\theta}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \equiv \ddot{\theta}(t) = -\frac{Mgl}{Ml^2} \sin(x_1(t)) - \frac{h}{Ml^2} x_2(t) + \frac{1}{Ml^2} u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

*Sistema di 2 equazioni differenziali  
del 1° ordine, **NON lineari**, a  
coefficienti costanti*

N.B. Non si può mettere in  
forma matriciale.

## 5. Rappresentazione di stato (sistemi SISO stazionari)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

**equazione di stato**

**trasformazione di uscita**

**stato iniziale**

$\mathbf{x}(t) \in \Re^n$   
vettore

$u(t) \in \Re$   
scalare

$y(t) \in \Re$   
scalare

$\mathbf{f}(\cdot)$  è una funzione vettoriale a valori in  $\Re^n$

$g(\cdot)$  è una funzione scalare a valori in  $\Re$

# Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ y(t) = 2x(t) - u(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$f(x(t), u(t))$

$g(x(t), u(t))$

$\uparrow$

$t_0 = 0$

$$x(t) \in \mathbb{R}$$

$u(t) \in \mathbb{R}$  sono tutti scalari

$$y(t) \in \mathbb{R}$$

$f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  sono funzioni (scalari) lineari di  $u$  ed  $x$

L'ordine del sistema è  $n=1$

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) & f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t) & f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ y(t) = 3x_1(t) & g(x_1(t), x_2(t), u(t)) \end{cases}$$
$$x_1(0) = 1; \quad x_2(0) = 2$$

$t_0 = 0$

La trasformazione d'uscita non dipende esplicitamente da  $u(t)$

$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow$  L'ordine del sistema è  $n=2$

$u(t) \in \mathbb{R}$  sono scalari  
 $y(t) \in \mathbb{R}$

# 6. Classificazione dei sistemi dinamici

## Sistema strettamente proprio

Non c'è dipendenza esplicita dell'uscita  $y(t)$  dall'ingresso  $u(t)$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) \in g(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Non compare  $u(t)$

Altrimenti, si dice proprio (non strettamente)

## Sistema SISO (Single Input Single Output)

Ingresso ed uscita sono scalari, cioè  $u(t) \in \mathbb{R}$   $y(t) \in \mathbb{R}$

In questo corso non saranno trattati i sistemi  
**MIMO (Multiple Input Multiple Output)**

## Sistema lineare

$f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  sono funzioni lineari di  $u$  e di  $x$

Altrimenti, si dice non lineare

Esistono anche **sistemi tempo-varianti**

C'è presenza esplicita della variabile tempo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), t) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t), t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Compare  
esplicitamente  $t$

In questo corso si useranno solo sistemi  
**tempo-invarianti** (o stazionari)

# Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + u(t) \\ y(t) = 2x(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- ★ Ingresso ed uscita sono scalari,  
cioè  $u(t) \in \mathbb{R}$   $y(t) \in \mathbb{R}$   **SISO**
- ★ Non c'è dipendenza esplicita  
dell'uscita  $y(t)$  dall'ingresso  $u(t)$   **Strettamente  
proprio**
- ★ Non c'è presenza esplicita  
della variabile tempo  **Tempo  
invariante**
- ★  $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  sono funzioni lineari  
di  $u$  e di  $x$   **Lineare**

# Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x^2(t) + \sin(t)u(t) \\ y(t) = 2x(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- ★ Ingresso ed uscita sono scalari,  
cioè  $u(t) \in \mathbb{R}$   $y(t) \in \mathbb{R}$   **SISO**
- ★ Non c'è dipendenza esplicita  
dell'uscita  $y(t)$  dall'ingresso  $u(t)$   **Strettamente  
proprio**
- ★ C'è presenza esplicita  
della variabile tempo  **Tempo  
variante**
- ★  $f(\cdot)$  non è funzione lineare  
di  $u$  e di  $x$   **Non lineare**

# Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + u_1(t) - 3u_2(t) \\ y(t) = 2x(t) + u_1(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- ★ L'ingresso non è uno scalare,  
infatti  $u(t) \in \mathbb{R}^2$  MIMO
- ★ C'è dipendenza esplicita  
dell'uscita  $y(t)$  dall'ingresso  $u(t)$  Proprio
- ★ Non c'è presenza esplicita  
della variabile tempo Tempo  
invariante
- ★  $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  sono funzioni lineari  
di  $u$  e di  $x$  Lineare

## 7. Scelta delle variabili di stato

Come si scelgono  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  ?

- ★ Esistono criteri generali per la scelta delle variabili di stato? **SI**
- ★ La scelta è univoca? **NO**
- ★ L'ordine del sistema è fissato? **SI**

## Criterio matematico

Sistema descritto da un'equazione differenziale di ordine  $n$  nell'incognita  $y(t)$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \varphi\left(\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dy(t)}{dt}, y(t), u(t)\right)$$

Scegliere come variabili di stato l'incognita  
e le sue prime  $n-1$  derivate

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$\vdots$

$$x_n(t) = \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = \varphi(x_n(t), \dots, x_2(t), x_1(t), u(t)) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

# Esempio

$$\ddot{y}(t) = \sqrt{2y(t)\dot{y}(t)} + \frac{5u(t)}{1 + \dot{y}(t)^2}$$

Scegliere

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t)$$

$$x_3(t) = \ddot{y}(t)$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = \sqrt{2x_1(t)x_2(t)} + \frac{5u(t)}{1 + x_3(t)^2} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

## Criterio fisico

Variabili  
di stato

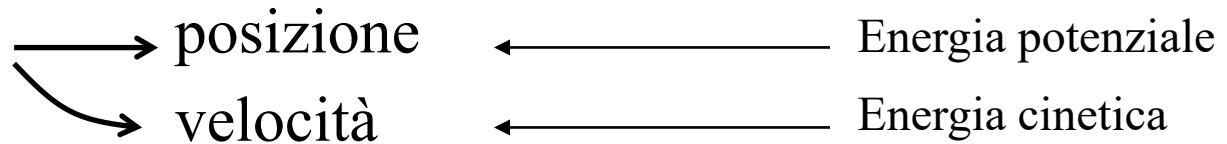


Grandezze associate ad  
accumuli di energia, massa,...

Sistemi elettrici



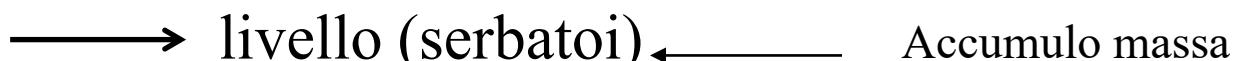
Sistemi meccanici



Sistemi termici



Sistemi idraulici



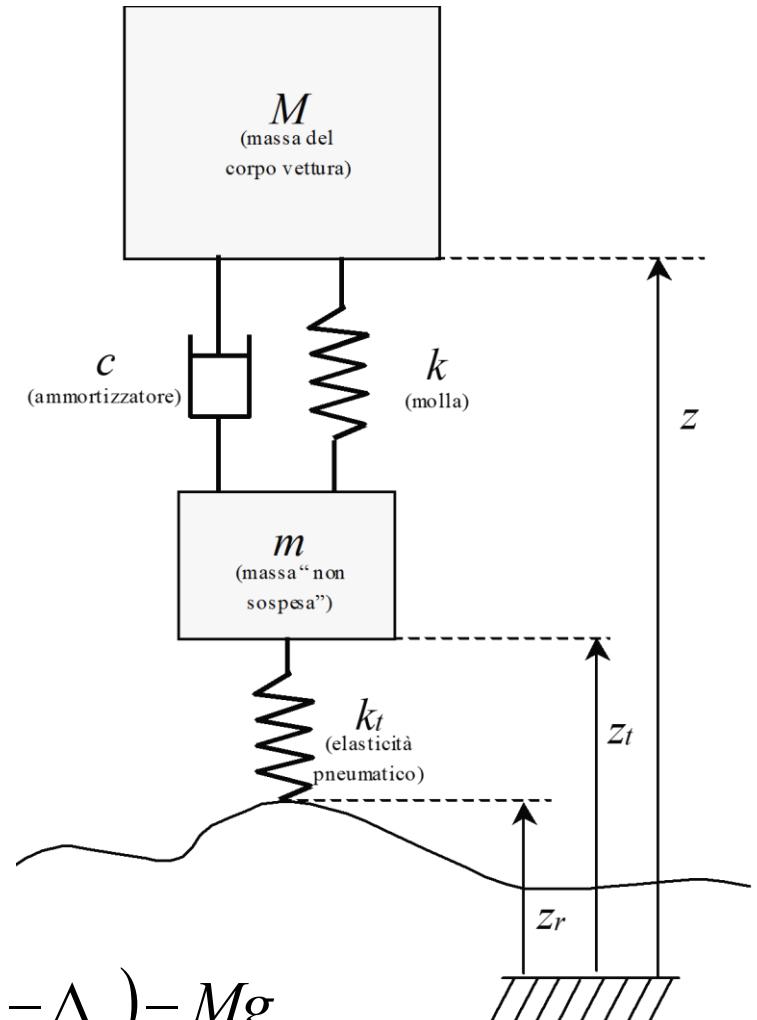
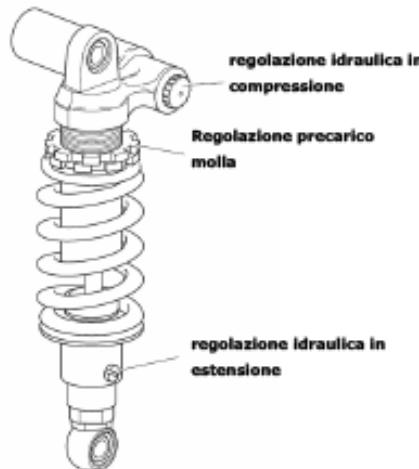
## La scelta delle variabili di stato non è univoca

- ★ Non è obbligatorio scegliere le variabili di stato affidandosi ai criteri visti
- ★ Fare scelte “originali” può essere svantaggioso (o **vantaggioso!**) in termini di complessità della rappresentazione matematica (anche se il sistema è lo stesso!)
- ★ Mediante trasformazione lineare è comunque possibile passare da una rappresentazione all’altra.

## L'ordine del sistema è univocamente fissato

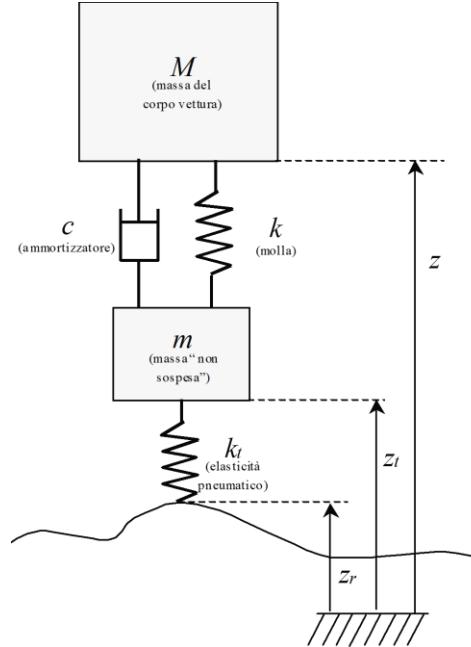
- ✿ L'ordine del sistema è fissato a parità di complessità e accuratezza usate nel descrivere i fenomeni modellizzati
- ✿ Maggiore è l'accuratezza con cui desidero descrivere i fenomeni, maggiore sarà il numero di variabili di stato da usare

# Esempio – Modellistica di una sospensione a smorzamento controllato



$$\begin{cases} M\ddot{z}(t) = -c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) - k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - Mg \\ m\ddot{z}_t(t) = +c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) + k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - k_t(z_t(t) - z_r(t) - \Delta_t) - mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} M\ddot{z}(t) = -c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) - k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - Mg \\ m\ddot{z}_t(t) = +c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) + k(z(t) - z_t(t)) - \Delta_s - k_t(z_t(t) - z_r(t) - \Delta_t) - mg \end{cases}$$

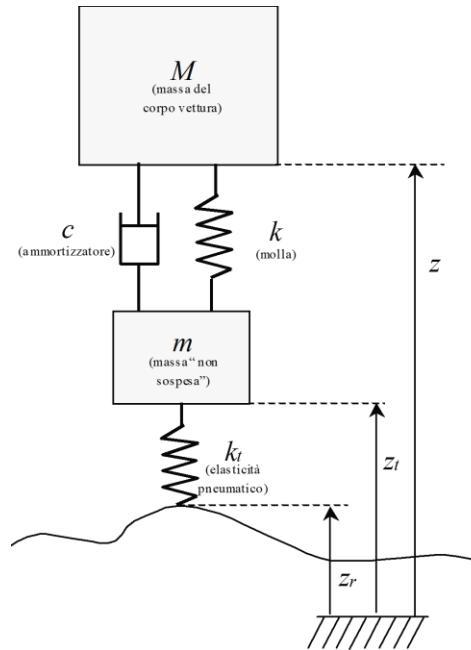


$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ z_t \\ \dot{z}_t \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} z_r \\ c \end{bmatrix} \quad y = [z]$$

Sistema MIMO, del 4° ordine ( $n=4$ ), non-lineare, tempo-invariante, strettamente proprio.

N.B.  $z_r$  è un disturbo

$$\begin{cases} M\ddot{z}(t) = -c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) - k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - Mg \\ m\ddot{z}_t(t) = +c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) + k(z(t) - z_t(t)) - \Delta_s - k_t(z_t(t) - z_r(t) - \Delta_t) - mg \end{cases}$$

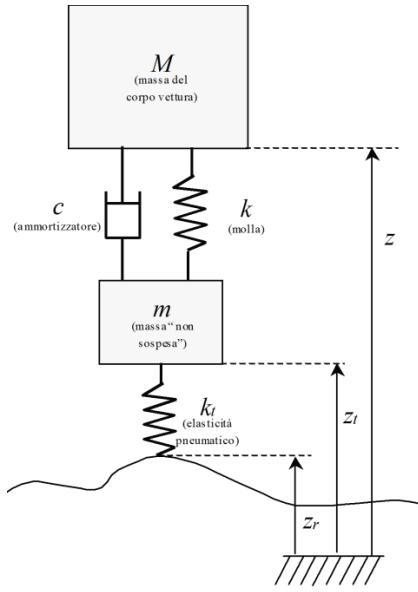


$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ z_t \\ \dot{z}_t \end{bmatrix} \quad u = [z_r] \quad y = [z]$$

Sistema **SISO**, del 4° ordine ( $n=4$ ), **lineare, tempo-variante**, strettamente proprio.

E' lo stesso sistema di prima! Le stesse equazioni!

Posso descrivere anche la dinamica  
dello smorzamento (dinamica dell'attuatore) ...

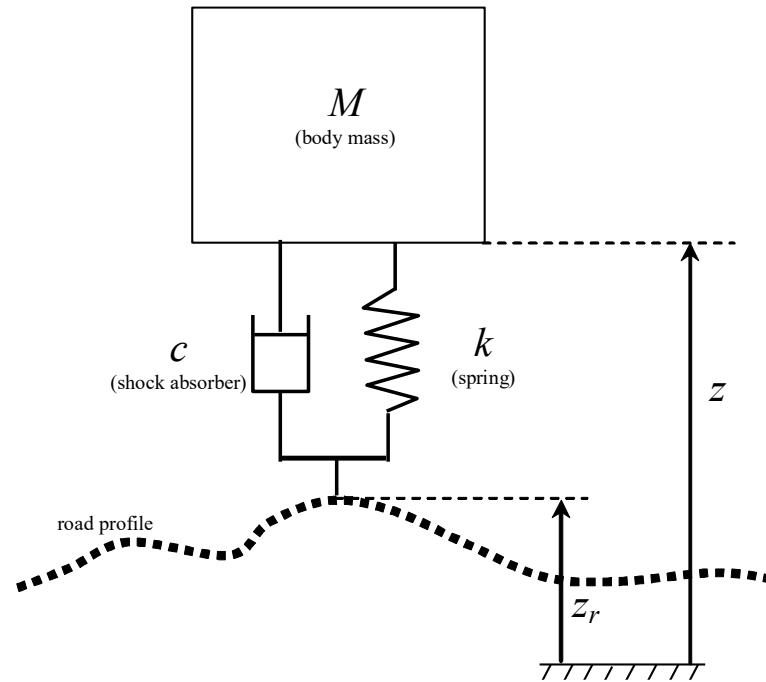


$$\begin{cases} M\ddot{z}(t) = -c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) - k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - Mg \\ m\ddot{z}_t(t) = +c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_t(t)) + k(z(t) - z_t(t) - \Delta_s) - k_t(z_t(t) - z_r(t) - \Delta_t) - mg \\ \dot{c}(t) = -\beta c(t) + \beta c_{in}(t) \quad c_{\min} \leq c_{in}(t) \leq c_{\max} \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ z_t \\ \dot{z}_t \\ c \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} z_r \\ c_{in} \end{bmatrix} \quad y = [z]$$

Sistema MIMO, del **5° ordine ( $n=5$ )**, non-lineare, tempo-invariante, strettamente proprio

... ma anche alternativamente NON descrivere la dinamica  
dello pneumatico!



$$M\ddot{z}(t) = -c(t)(\dot{z}(t) - \dot{z}_r(t)) - k(z(t) - z_r(t) - \Delta_s) - Mg$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

**equazione di stato**

**trasformazione di uscita**

**stato iniziale**

$$\mathbf{x}(t) \in \Re^n$$

$$\mathbf{u}(t) \in \Re^m$$

$$\mathbf{y}(t) \in \Re^p$$

$\mathbf{f}(\cdot)$  è una funzione vettoriale a valori in  $\Re^n$

$\mathbf{g}(\cdot)$  è una funzione vettoriale a valori in  $\Re^p$

$\mathbf{f}(\cdot)$  e  $\mathbf{g}(\cdot)$  possono dipendere esplicitamente dal tempo

# Lezione 3.

# Movimento ed Equilibrio

# Schema della lezione

1. Movimento dello stato e dell'uscita (generale)
2. (Movimento di) Equilibrio (generale)
3. Sistemi LTI
4. Equilibrio di sistemi LTI
5. Movimento di sistemi LTI
6. Movimento libero e movimento forzato di sistemi LTI
7. Matlab

# 1. Movimento dello stato e dell'uscita

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  stato iniziale

Sia assegnato l'ingresso  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$

## Problema fondamentale della teoria dei sistemi

Integrando l'equazione  
di stato si ottiene

Sostituendo il risultato nella  
trasformazione d'uscita si ha

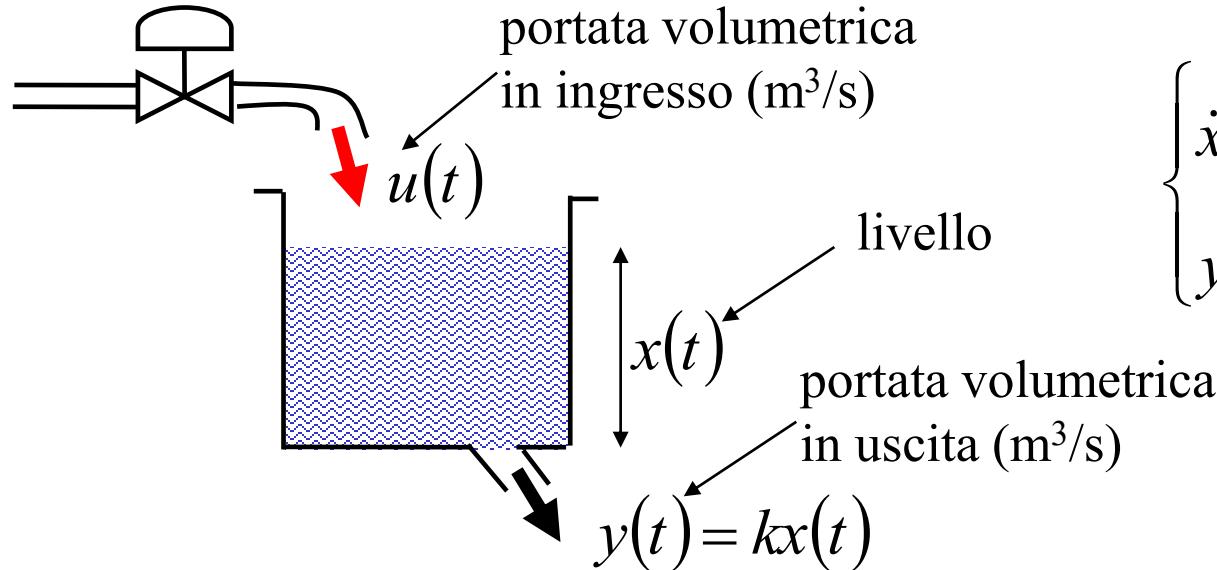
$\mathbf{x}(t)$  ,  $t \geq t_0$

**movimento dello stato**

$y(t)$  ,  $t \geq t_0$

**movimento dell'uscita**

# Esempio



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{k}{A}x(t) + \frac{1}{A}u(t) \\ y(t) = kx(t) \end{cases}$$

$$A = 1 \text{ m}^2$$
$$k = 1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

Sia assegnato l'ingresso  $u(t) = 2$ ,  $t \geq 0$  con livello iniziale  $x(0) = 5$

Per trovare il **movimento dello stato**, cioè l'andamento nel tempo del livello, partendo da 5 m ed erogando una portata costante di  $2 \text{ m}^3/\text{s}$ , bisogna risolvere l'equazione differenziale lineare del primo ordine (cfr Analisi Matematica)

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 2$$

con la condizione iniziale  $x(0) = 5$

Innanzitutto si ricordi che:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau} [e^\tau x(\tau)] d\tau = e^t x(t) - x(0)$$

Quindi, si moltiplichino entrambi i membri dell'equazione per  $e^t \neq 0$

$$e^t \dot{x}(t) = -e^t x(t) + 2e^t \quad \Rightarrow \quad e^t \dot{x}(t) + e^t x(t) = 2e^t \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} (e^t x(t)) = 2e^t$$

$$e^t x(t) - x(0) = \int_0^t 2e^\tau d\tau \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-t} x(0) + \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} d\tau$$

Sfruttando la condizione iniziale:  $x(0) = 5$

$$\begin{aligned} x(t) &= 5e^{-t} + \int_0^t 2e^{-(t-\tau)} d\tau = 5e^{-t} + 2e^{-t} \int_0^t e^\tau d\tau = \\ &= 5e^{-t} + 2e^{-t} [e^\tau]_0^t = 5e^{-t} + 2e^{-t} (e^t - 1) = 5e^{-t} + 2 - 2e^{-t} = 3e^{-t} + 2 \end{aligned}$$

Il **movimento dello stato** è  $x(t) = 3e^{-t} + 2, t \geq 0$

Il **movimento dell'uscita** è  $y(t) = x(t) = 3e^{-t} + 2, t \geq 0$

## 2. (Movimento di) Equilibrio

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \bar{\mathbf{x}} \quad \text{stato iniziale} \\ u(t) = \bar{u}, \quad t \geq t_0 \end{cases}$$

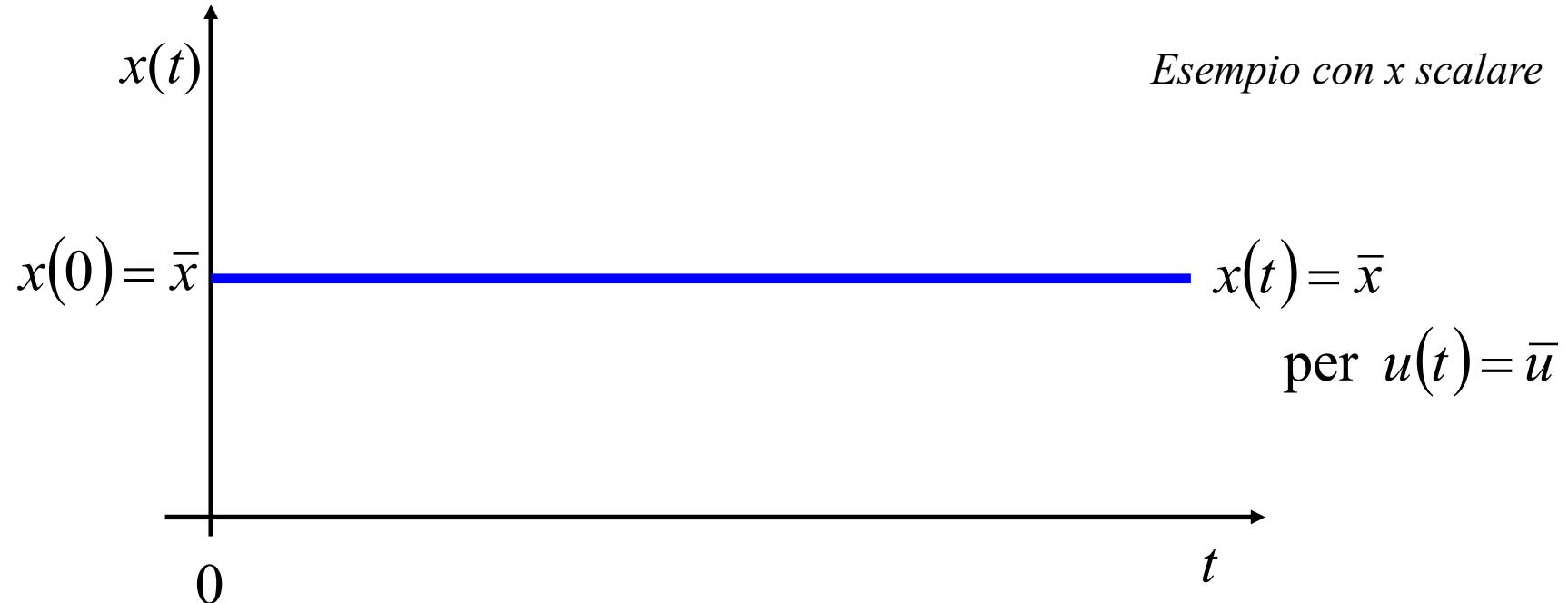
**ingresso costante**

### Stato di equilibrio

Movimento dello stato  $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$  costante nel tempo  
in corrispondenza di  $u(t) = \bar{u}$

### Uscita di equilibrio

Movimento dell'uscita  $y(t) = \bar{y}$  costante nel tempo  
in corrispondenza di  $u(t) = \bar{u}$



Calcolo dell'equilibrio (per sistemi a tempo continuo)

$$\dot{x}(t) = 0 \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}} \quad \begin{cases} 0 = f(\bar{x}, \bar{u}) & \text{Eq. algebrica} \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \end{cases}$$

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2x(t) + 3u(t) \\ y(t) = 2x(t) - u(t) \end{cases}$$

Calcolare stato ed uscita di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante  $u(t) = 2, t \geq 0$

Bisogna risolvere l'equazione algebrica

$$0 = -2\bar{x} + 3 \cdot 2 \quad \longrightarrow \quad \bar{x} = 3 \quad \text{Stato di equilibrio} \\ (\text{per } u(t) = \bar{u} = 2)$$

Se si applica l'ingresso costante  $\bar{u} = 2$  con condizione iniziale  $x(0) = \bar{x} = 3$ , il movimento dello stato è

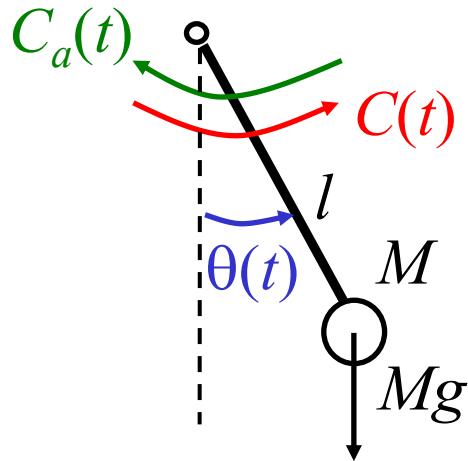
$$x(t) = \bar{x} = 3, \quad t \geq 0$$

L'uscita di equilibrio è

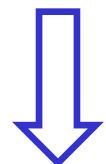
$$\bar{y} = 2\bar{x} - \bar{u} = 4$$

# Esempio

Sistema NON lineare!!



$$\begin{array}{ll} C(t) \rightarrow u(t) & \theta(t) \rightarrow x_1(t) \\ \theta(t) \rightarrow y(t) & \dot{\theta}(t) \rightarrow x_2(t) \end{array}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{h}{Ml^2} x_2(t) + \frac{u(t)}{Ml^2} \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Calcolare l'equilibrio in corrispondenza di  $u(t) = \bar{u}$

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = -\frac{g}{l} \sin(\bar{x}_1) - \frac{h}{Ml^2} \bar{x}_2 + \frac{\bar{u}}{Ml^2} \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \begin{cases} \bar{x}_1 = \arcsin\left(\frac{\bar{u}}{Mgl}\right) \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases}$$

Stato ed uscita  
di equilibrio  
(per  $\bar{u}$  costante)

Per esempio:

Se  $\bar{u} = 0$

$$\bar{\mathbf{x}}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_A = 0$$

pendolo verticale con  
massa in basso

$$\bar{\mathbf{x}}_B = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_B = \pi$$

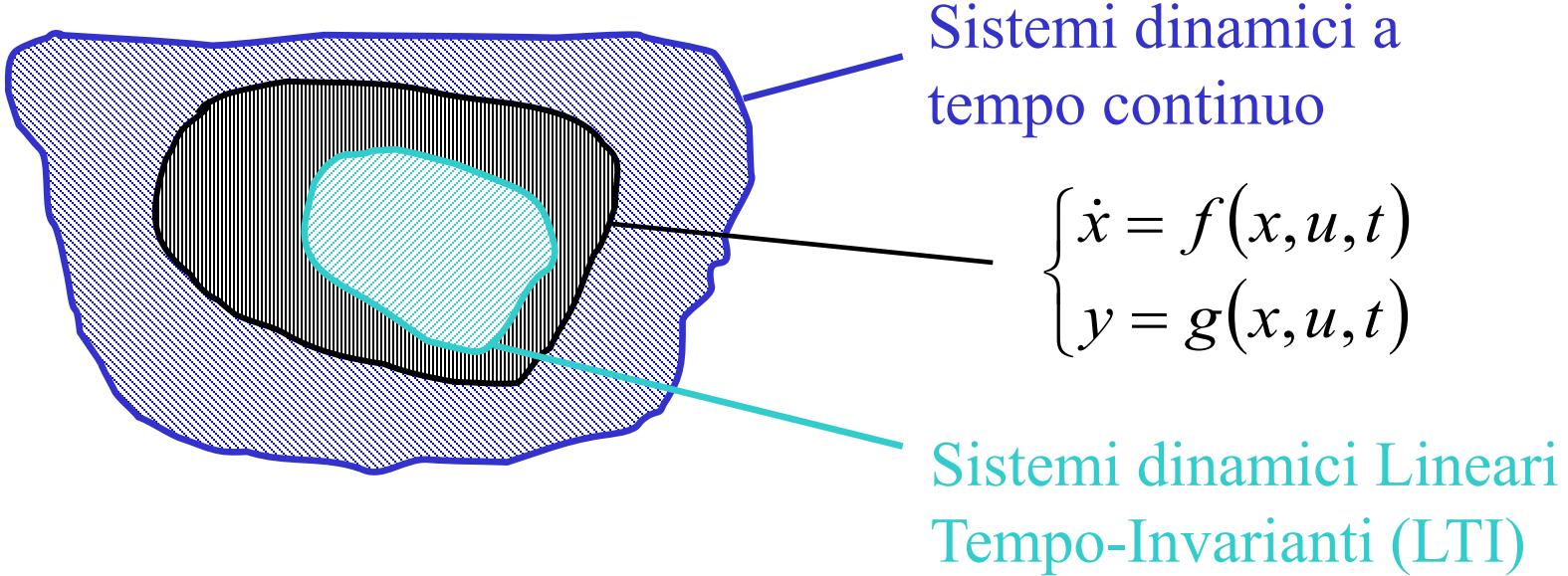
pendolo verticale con  
massa in alto

Se  $\bar{u} = Mgl$

$$\bar{\mathbf{x}}_C = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_C = \frac{\pi}{2}$$

pendolo orizzontale  
con massa a destra

### 3. Sistemi dinamici Lineari Tempo-Invarianti (LTI)



I sistemi LTI hanno una struttura semplice e sono disponibili molti risultati teorici per il loro studio (e per il progetto di controllori)

Inoltre, molti sistemi dinamici sono descrivibili mediante sistemi LTI (almeno in prima approssimazione)

## Sistemi LTI: notazione matriciale (caso SISO)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t)) \end{cases} \quad \text{con } \mathbf{f}(\cdot, \cdot), g(\cdot, \cdot) \text{ lineari}$$

Ricordando che  $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$

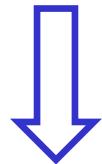
è possibile scrivere esplicitamente le relazioni in forma lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \\ y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) + du(t) \end{cases}$$

Raggruppando i coefficienti in matrici e vettori

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]_{1 \times n} \quad D = [d]_{1 \times 1}$$



$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) - 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + 4x_2(t) + 3u(t) \\ y(t) = 2x_1(t) - 3x_2(t) + 2u(t) \end{cases} \quad \mathbf{f}(\cdot, \cdot), g(\cdot, \cdot) \text{ sono lineari}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{il sistema è di ordine 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = [2 \quad -3] \quad D = 2$$

## 4. Equilibrio di sistemi LTI SISO

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

In corrispondenza di  $u(t) = \bar{u}$  si imponga  $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$

$$0 = A\bar{\mathbf{x}} + B\bar{u}$$



$$A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$$

**Se**  $\det A \neq 0$

$$\bar{\mathbf{x}} = -A^{-1}B\bar{u}$$

$$\bar{y} = C\bar{\mathbf{x}} + D\bar{u} = \underbrace{(-CA^{-1}B + D)}_{\mu} \bar{u}$$

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$$

**guadagno statico**

**Se**  $\det A = 0$

Il sistema  $A\bar{\mathbf{x}} = -B\bar{u}$  può avere infinite o nessuna soluzione.

Un sistema LTI può avere (in corrispondenza di un dato  $\bar{u}$  ):

- un solo stato di equilibrio (Se  $\det A \neq 0$ )
- infiniti stati di equilibrio (Se  $\det A = 0$  e  $A\bar{x} = -B\bar{u}$  ha infinite soluzioni)
- nessuno stato di equilibrio (Se  $\det A = 0$  e  $A\bar{x} = -B\bar{u}$  non ha nessuna soluzione)

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

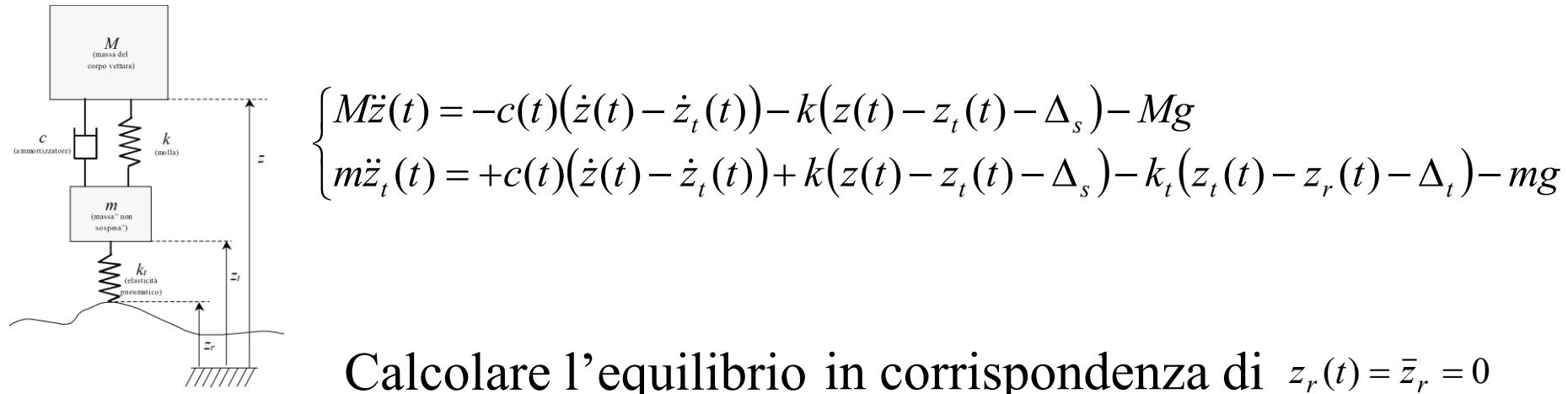
Calcolare lo stato e l'uscita di equilibrio ed il guadagno statico in corrispondenza dell'ingresso  $u(t) = \bar{u} = 2$

$$\det A = 1 \neq 0$$

$$\bar{\mathbf{x}} = -A^{-1}B\bar{u} = -\frac{1}{1} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = C\bar{\mathbf{x}} + D\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 6 \quad \longrightarrow \quad \mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = 3$$

# Esempio – Sospensione

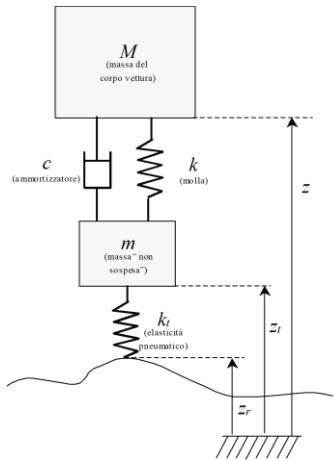


Calcolare l'equilibrio in corrispondenza di  $z_r(t) = \bar{z}_r = 0$

$$\begin{cases} -k(\bar{z} - \bar{z}_t - \Delta_s) - Mg = 0 \\ k(\bar{z} - \bar{z}_t - \Delta_s) - k_t(\bar{z}_t - \bar{z}_r - \Delta_t) - mg = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -k & k \\ k & -k - k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mg - k\Delta_s \\ k\Delta_s - k_t\Delta_t + mg \end{bmatrix}$$

**NB: vale qualunque sia  $c(t)$**



$$\begin{bmatrix} -k & k \\ k & -k-k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mg - k\Delta_s \\ k\Delta_s - k_t\Delta_t + mg \end{bmatrix}$$

```
>> A=sym('[-k,k;k,-k-kt]');B=sym(' [M*g-k*Ds;k*Ds-kt*Dt+m*g]');
pretty(simple(inv(A)*B))
```

$$\begin{cases} \bar{z} = \dots \\ \dot{\bar{z}} = 0 \\ \bar{z}_t = \dots \\ \dot{\bar{z}}_t = 0 \end{cases}$$

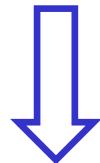
|                 |                                |                                |
|-----------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $\frac{Mg}{k}$  | $\frac{Mg}{k}$                 | $\frac{mg}{kt}$                |
| $-\frac{k}{M}$  | $- \frac{k}{M} + \frac{Ds}{M}$ | $\frac{D_s}{M} - \frac{kt}{M}$ |
| $\frac{kt}{M}$  | $k$                            | $\frac{kt}{M}$                 |
| $\frac{Mg}{kt}$ | $\frac{mg}{kt}$                | $\frac{kt}{M}$                 |
| $-\frac{m}{kt}$ | $\frac{D_t}{M} - \frac{m}{kt}$ | $\frac{D_t}{M}$                |

## 5. Movimento di sistemi LTI SISO

Si consideri un sistema SISO del I ordine ( $n=1$ , stato scalare)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \end{cases}$$

Si calcoli il movimento dello stato per  $x(0) = x_0$   
 $u(t)$  generico,  $t \geq 0$



$$x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

Ora, si consideri un sistema SISO di ordine  $n$  qualsiasi

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

Si calcoli il movimento dello stato per  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$   
 $u(t)$  generico,  $t \geq 0$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau) d\tau$$

Esponenziale  
di matrice

$$e^{At} = \sum_0^\infty \frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots$$

# Formule di Lagrange (per il calcolo del movimento di sistemi LTI)

## Movimento dello stato

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

## Movimento dell'uscita

$$y(t) = C e^{At} \mathbf{x}_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)$$

## 6. Movimento libero e movimento forzato

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{At} \mathbf{x}_0}_{\mathbf{x}_l(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{\mathbf{x}_f(t)}$$

Movimento libero  
dello stato

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) \\ y(t) = y_l(t) \end{cases} \text{ per } u(t) = 0$$

Dipende solo  
dalla condizione  
iniziale

Movimento forzato  
dello stato

Dipende solo  
dall'ingresso

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_f(t) \\ y(t) = y_f(t) \end{cases} \text{ per } x_0 = 0$$

Movimento libero  
dell'uscita

$$y_l(t)$$

Movimento forzato  
dell'uscita

$$y_f(t)$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At} \mathbf{x}_0}_{y_l(t)} + \underbrace{C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{y_f(t)} + Du(t)$$

# 7. Matlab

**ss** Construct state-space model or convert model to state space.

Construction:

**SYS = ss(A,B,C,D)** creates an object SYS representing the continuous-time state-space model

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Con questo comando si crea un sistema dinamico LTI.

## Esempio

```
>> A=[-1 3; -2 -7]; B=[2 1]'; C=[1 1]; D=1;  
>> Sistema=ss(A,B,C,D)
```

Sistema =

A =

|    |    |    |
|----|----|----|
|    | x1 | x2 |
| x1 | -1 | 3  |
| x2 | -2 | -7 |

B =

|    |    |
|----|----|
|    | u1 |
| x1 | 2  |
| x2 | 1  |

C =

|    |    |    |
|----|----|----|
|    | x1 | x2 |
| y1 | 1  | 1  |

D =

|    |    |
|----|----|
|    | u1 |
| y1 | 1  |

Continuous-time state-space model.

**lsim** Simulate time response of dynamic systems to arbitrary inputs.

**lsim(SYS,U,T)** plots the time response of the dynamic system SYS to the input signal described by U and T. The time vector T is expressed in the time units of SYS and consists of regularly spaced time samples.

For example,

```
t = 0:0.01:5; u = sin(t); lsim(sys,u,t)
```

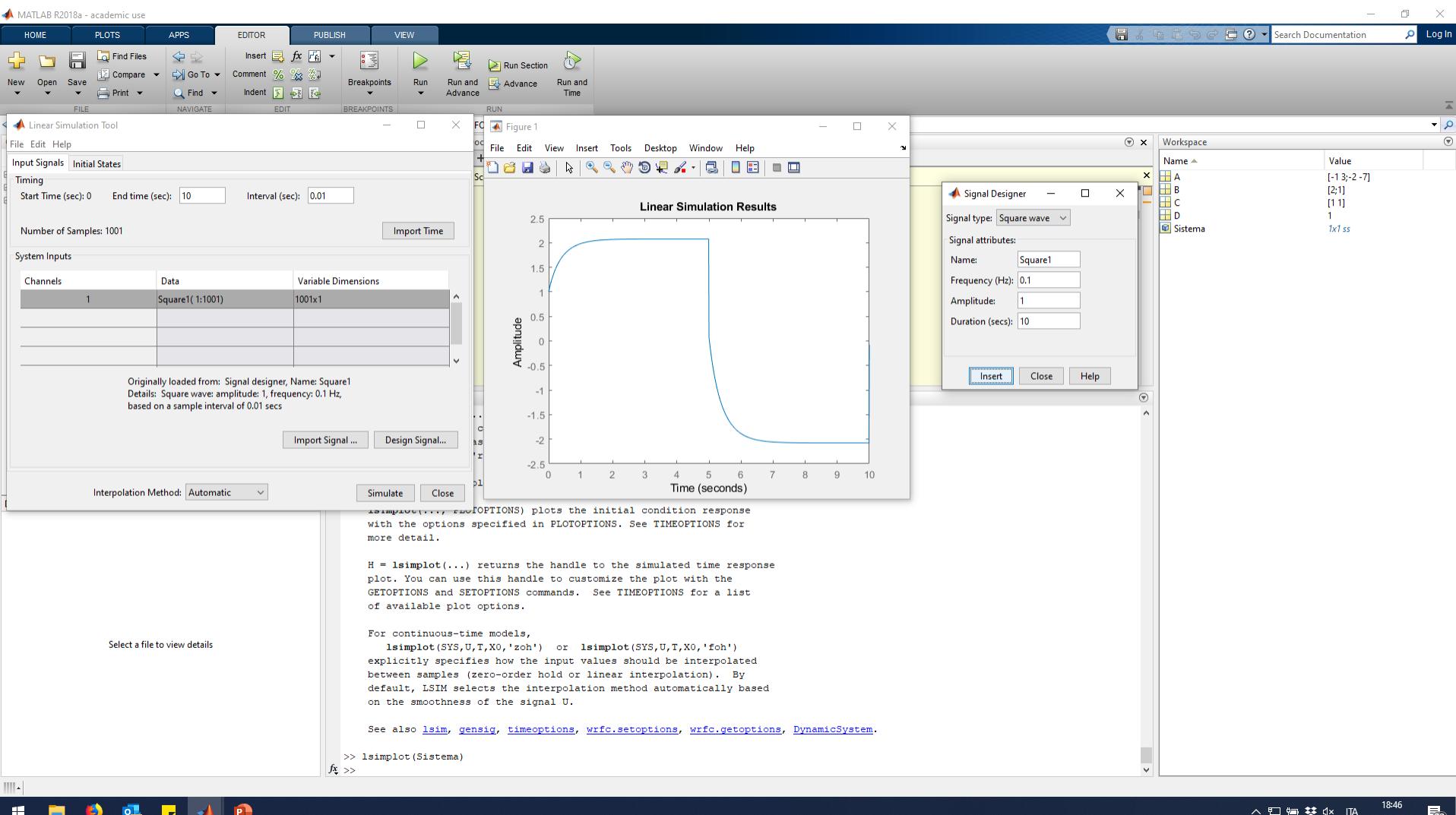
simulates the response of a single-input model SYS to the input  $u(t) = \sin(t)$  during 5 time units.

**lsim(SYS,U,T,X0)** specifies the initial state vector X0 at time T(1) (for state-space models only). X0 is set to zero when omitted.

**Y = lsim(SYS,U,T)** returns the output history Y.

**lsimplot(SYS)** opens the Linear Simulation Tool for the dynamic system SYS, which enables interactive specification of the driving input(s), time vector, and initial state.

Con questo comando si può calcolare (non analiticamente) il movimento di un sistema LTI a partire da una data **condizione iniziale** e con un assegnato **ingresso**.



Questo comando serve per calcolare il solo **movimento libero** di un sistema.

**initial** Initial condition response of state-space models.

**initial(SYS,X0)** plots the undriven response of the state-space model SYS (created with SS) with initial condition X0 on the states. This response is characterized by the equations

$$\text{Continuous time: } \dot{x} = Ax, \quad y = Cx, \quad x(0) = x_0$$

When invoked with left hand arguments,

**[Y,T,X] = initial(SYS,X0)**

returns the output response Y, the time vector T used for simulation, and the state trajectories X

# Principio di sovrapposizione degli effetti

approfondimento

Consideriamo un sistema SISO (eventualmente tempo-variante) di ordine  $n$  qualsiasi

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Siano  $x'(t)$  e  $y'(t)$  i movimenti dello stato e dell'uscita generati dall'ingresso  $u'(t)$  con stato iniziale  $x_0'$ .

Siano  $x''(t)$  e  $y''(t)$  i movimenti dello stato e dell'uscita generati dall'ingresso  $u''(t)$  con stato iniziale  $x_0''$ .

Allora per ogni  $\alpha, \beta$  scalari i movimenti dello stato  $x'''(t)$  e dell'uscita  $y'''(t)$  generati dall'ingresso  $u'''(t) = \alpha u'(t) + \beta u''(t)$  con stato iniziale  $x_0''' = \alpha x_0' + \beta x_0''$  sono:

$$x'''(t) = \alpha x'(t) + \beta x''(t) \quad \text{e} \quad y'''(t) = \alpha y'(t) + \beta y''(t)$$

cioè:

$$\begin{aligned} u'(t), x_0' &\rightarrow x'(t), y'(t) \\ u''(t), x_0'' &\rightarrow x''(t), y''(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'''(t) &= \alpha u'(t) + \beta u''(t) \\ x_0''' &= \alpha x_0' + \beta x_0'' \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x'''(t) &= \alpha x'(t) + \beta x''(t) \\ y'''(t) &= \alpha y'(t) + \beta y''(t) \end{aligned}$$

Quindi:

il **movimento libero** di un sistema lineare a partire da una combinazione lineare di condizioni iniziali è la combinazione lineare dei movimenti liberi generati a partire dalle singole condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x_0' &\rightarrow x_l'(t) \\ x_0'' &\rightarrow x_l''(t) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x_0''' &= \alpha x_0' + \beta x_0'' \rightarrow \\ &\rightarrow x_l'''(t) = \alpha x_l'(t) + \beta x_l''(t) \end{aligned}$$

il **movimento forzato** di un sistema lineare a partire da una combinazione lineare di ingressi è la combinazione lineare dei movimenti forzati generati a partire dai singoli ingressi

$$\begin{aligned} u'(t) &\rightarrow x_f'(t) \\ u''(t) &\rightarrow x_f''(t) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} u'''(t) &= \alpha u'(t) + \beta u''(t) \rightarrow \\ &\rightarrow x_f'''(t) = \alpha x_f'(t) + \beta x_f''(t) \end{aligned}$$

# Sistemi LTI MIMO (cenni)

approfondimento

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$$

$A$  matrice  $n \times n$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

$C$  matrice  $p \times n$

$B$  matrice  $n \times m$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

$D$  matrice  $p \times m$

In corrispondenza di  $u(t) = \bar{u}$

$$0 = A\bar{x} + B\bar{u} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad A\bar{x} = -B\bar{u}$$

Se  $\det A \neq 0$

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} = (-CA^{-1}B + D)\bar{u}$$

Matrice  $p \times m$

Matrice dei  
guadagni statici

Se  $\det A = 0$

Il sistema  $A\bar{x} = -B\bar{u}$  può avere  
infinite o nessuna soluzione.

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

$\underbrace{x_f(t)}_{n \times 1} = \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau}_{n \times n}$ 
 $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}_{m \times 1}$

$$x_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \sum_{j=1}^m B_j u_j(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^m \int_0^t e^{A(t-\tau)} B_j u_j(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^m x_{fj}(t)$$

Il movimento forzato è la somma dei movimenti forzati dovuti alle componenti dell'ingresso

# Esempio

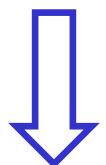
approfondimento

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Due ingressi, due uscite,  
del secondo ordine

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + u_1(t) - 2u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 3x_2(t) - u_1(t) + u_2(t) \\ y_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + u_1(t) \\ y_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + u_2(t) \end{cases}$$

Si calcoli l'equilibrio in corrispondenza di  $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

**approfondimento**

$$\det A = 1 \neq 0$$

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u} = -\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mu = -CA^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

# Rappresentazioni equivalenti

approfondimento

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Cambiamento di variabili di stato

$$\tilde{x}(t) = Tx(t) \quad \text{con } \det T \neq 0$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = T\dot{x}(t) = T(Ax(t) + Bu(t)) = TAT^{-1}\tilde{x}(t) + TBu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) = CT^{-1}\tilde{x}(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}u(t) \end{cases}$$

$$\tilde{A} = TAT^{-1}, \tilde{B} = TB, \tilde{C} = CT^{-1}, \tilde{D} = D$$

$$(A, B, C, D) \sim (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$$

$$(A, B, C, D) \sim (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$$

approfondimento

stesso sistema

(diversa rappresentazione di stato ma stesso legame ingresso-uscita)

## Equilibrio

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \det \tilde{A} \neq 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\mu} = \mu$$

## Movimento

stesso movimento dell'uscita  $y(t)$   
in corrispondenza del medesimo ingresso e  
della condizione iniziale  $\tilde{x}_0 = Tx_0$

# Lezione 4.

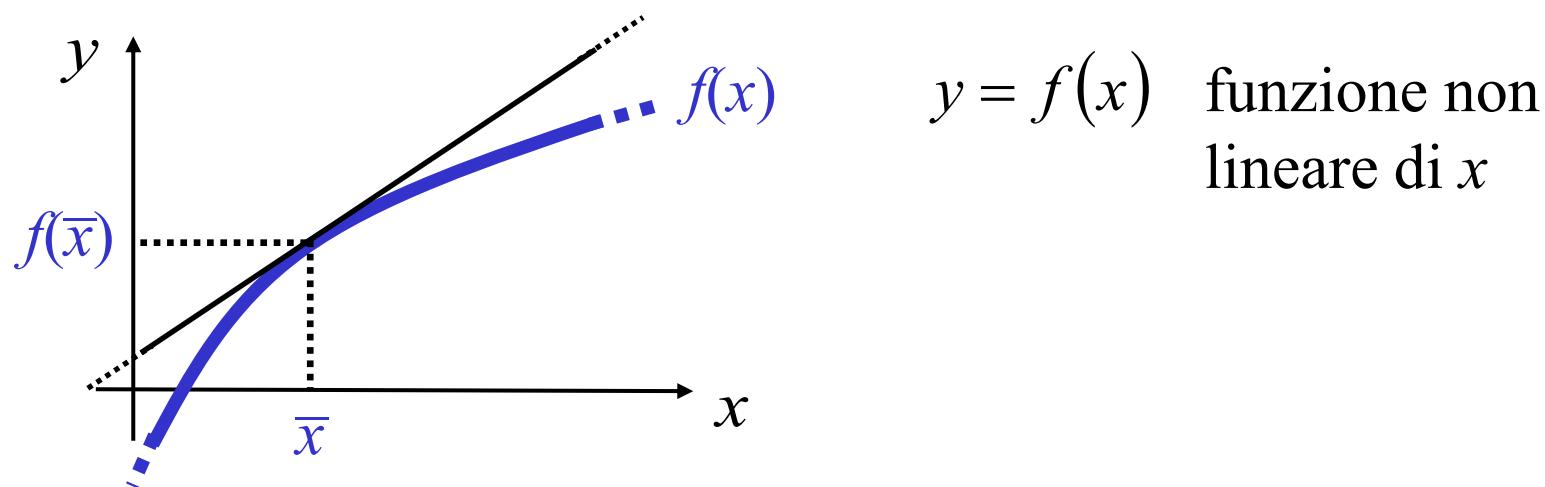
# Linearizzazione di

# sistemi non lineari

# Schema

1. Introduzione
2. Linearizzazione vicino all'equilibrio
3. Sistema lineare tangente
4. Simulazioni

# 1. Introduzione



$y = f(x)$  funzione non lineare di  $x$

Vicino a  $\bar{x}$   $f(x)$  può essere approssimata usando la sua tangente:

$$y \cong f(\bar{x}) + \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=\bar{x}} (x - \bar{x})$$

“Vicino a  $\bar{x}$ ” significa che  $(x - \bar{x})$  è piccolo

## 2. Linearizzazione vicino ad un equilibrio

Si consideri un sistema SISO non lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

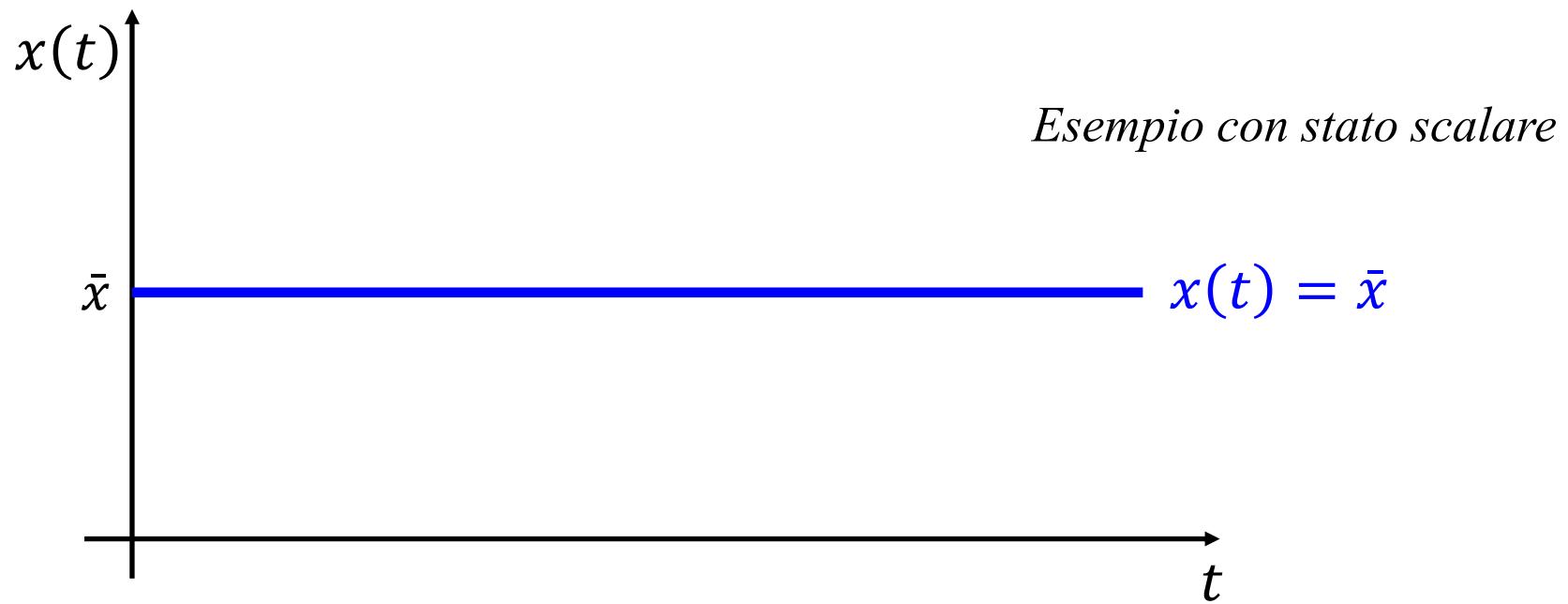
Si supponga che questo sistema abbia uno stato di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  in corrispondenza di un ingresso costante  $\bar{u}$  cioè:

$$f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = 0$$

Si vuole trovare un **sistema lineare** che **approssimi** il comportamento dinamico del sistema non lineare vicino all'equilibrio.

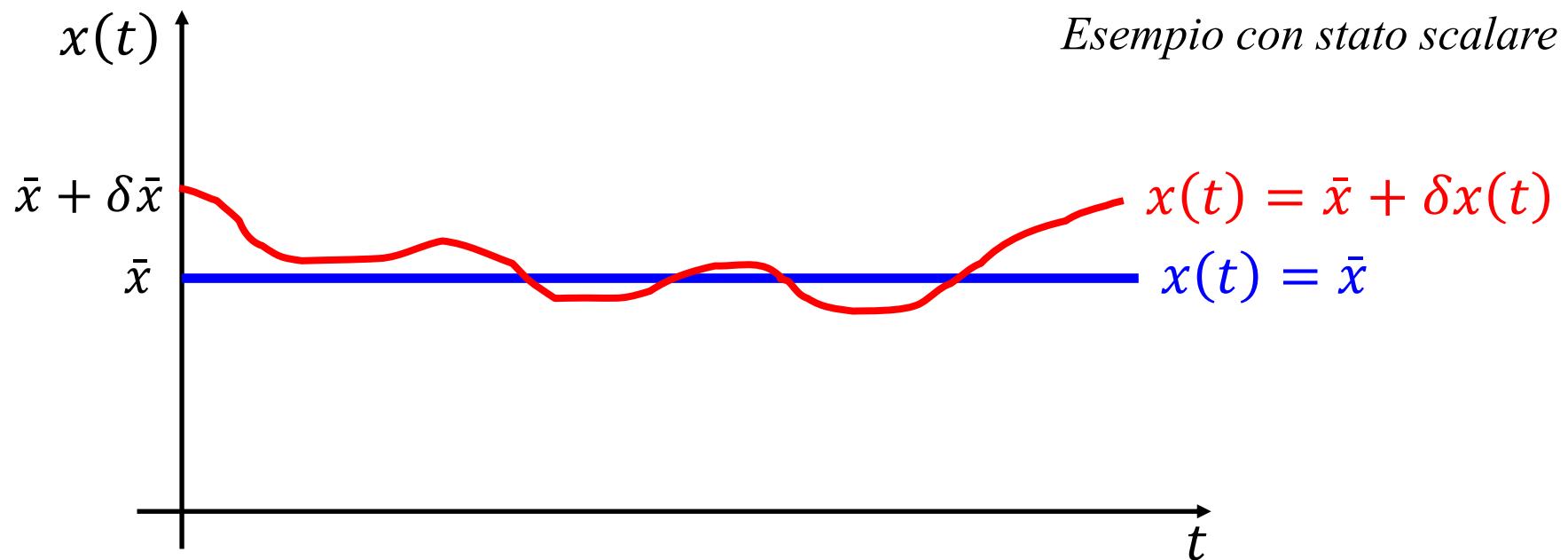
Se  $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u})$  è un equilibrio allora il movimento dello stato ottenuto con condizione iniziale  $\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$  e ingresso  $u(t) = \bar{u}$ ,  $t \geq 0$  è  $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}, t \geq 0$

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}, t \geq 0$$



Si perturbi sia la condizione iniziale sia l'ingresso. Se le perturbazioni sono **piccole** (e sotto opportune ipotesi di regolarità del sistema) si può descrivere il movimento dello stato come perturbazione del movimento di equilibrio

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u} + \delta u(t), t \geq 0 \\ \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\delta \mathbf{x}} \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\delta \mathbf{x}}(t), t \geq 0$$



$x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$  è il movimento dello stato con ingresso  $u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$  e quindi deve soddisfare l'equazione di stato  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ .

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{d}{dt}(\bar{x} + \delta x(t)) = \dot{\delta x}(t)$$

$$f(x(t), u(t)) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (x(t) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (u(t) - \bar{u}) + \text{altro}$$

- Sviluppo in serie di Taylor di  $f(x(t), u(t))$  intorno a  $(\bar{x}, \bar{u})$  -

Nel problema che stiamo affrontando si ha:

- $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$  perché siamo all'equilibrio
- $x(t) - \bar{x} = \delta x(t)$  e  $u(t) - \bar{u} = \delta u(t)$  è il movimento considerato

Quindi:  $f(x(t), u(t)) \cong \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u(t)$

$$\dot{\delta x}(t) \cong f_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + f_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t)$$

Questo movimento deve soddisfare anche l'**equazione di uscita**

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

Anche il movimento dell'uscita si può esprimere come somma dell'uscita di equilibrio e di una perturbazione

$$y(t) = \bar{y} + \delta y(t)$$

$$g(x(t), u(t)) = g(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{\bar{x}, \bar{u}} (x(t) - \bar{x}) + \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{\bar{x}, \bar{u}} (u(t) - \bar{u}) + \text{altro}$$

- Sviluppo in serie di Taylor di  $g(x(t), u(t))$  intorno a  $(\bar{x}, \bar{u})$  -

Nel problema che stiamo affrontando si ha:

- $g(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{y}$  perché siamo all'equilibrio
- $x(t) - \bar{x} = \delta x(t)$  e  $u(t) - \bar{u} = \delta u(t)$  è il movimento considerato

Quindi  $g(x(t), u(t)) \cong \bar{y} + \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta x(t) + \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \delta u(t)$

$$\delta y(t) \cong g_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + g_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t)$$

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) \cong f_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + f_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \\ \delta y(t) \cong g_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + g_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \end{cases}$$

**Sistema  
SISO**

$$f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix}_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

$$f_u(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial u \\ \vdots \\ \partial f_n / \partial u \end{bmatrix}_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

matrice  $A$   $n \times n$

vettore  $B$   $n \times 1$

$$g_x(\bar{x}, \bar{u}) = [\partial g / \partial x_1 \quad \dots \quad \partial g / \partial x_n]_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

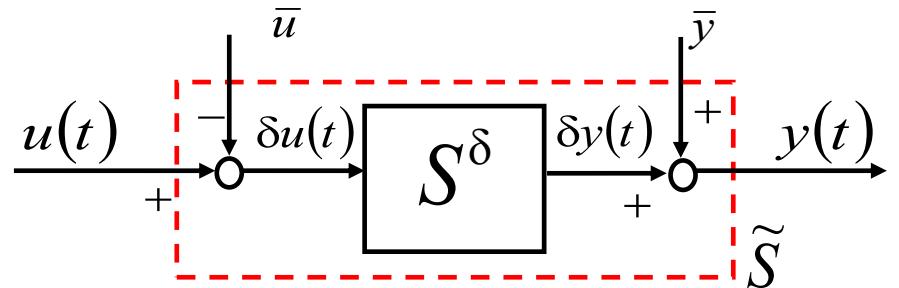
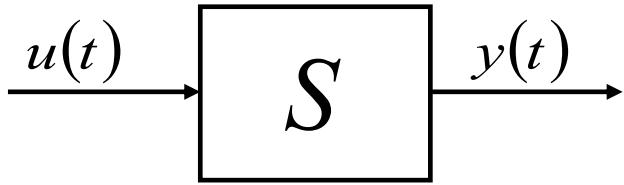
vettore  $C$   $1 \times n$

$$g_u(\bar{x}, \bar{u}) = \partial g / \partial u \Big|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

scalare  $D$

### 3. Sistema lineare tangente

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad S^\delta : \begin{cases} \dot{\delta x}(t) \cong f_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + f_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \\ \delta y(t) \cong g_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + g_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \end{cases}$$



$\tilde{S}$  è l'approssimazione di  $S$  nell'intorno del punto di equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u})$

$S^\delta$  viene spesso indicato (più correttamente) con il nome di **sistema lineare tangente**

$\tilde{S}$  viene spesso indicato anche con il nome di **approssimazione (o modello) locale**

# Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t)u(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + x_1(t)u(t) \\ \dot{x}_3(t) = -x_3(t) - x_2(t)u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

Calcolare lo stato e l'uscita di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante

$$u(t) = \bar{u} = 1 \quad \text{per } t \geq 0$$

$$\begin{cases} 0 = -\bar{x}_2 + 1 \\ 0 = -\bar{x}_2 + \bar{x}_1 \\ 0 = -\bar{x}_3 - \bar{x}_2 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 1 \\ \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1 \\ \bar{x}_3 = -\bar{x}_2 = -1 \\ \bar{y} = \bar{x}_1 = 1 \end{cases} \text{ ovvero } \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } \bar{y} = 1$$

Linearizzare il sistema intorno all'equilibrio trovato

$$\begin{cases} \dot{\delta x}(t) \approx f_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + f_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \\ \dot{\delta y}(t) \approx g_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + g_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \end{cases}$$

$$f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 & \partial f_1 / \partial x_3 \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 & \partial f_2 / \partial x_3 \\ \partial f_3 / \partial x_1 & \partial f_3 / \partial x_2 & \partial f_3 / \partial x_3 \end{bmatrix}_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{u} & 0 \\ \bar{u} & -1 & 0 \\ 0 & -\bar{u} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f_u(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial u \\ \partial f_2 / \partial u \\ \partial f_3 / \partial u \end{bmatrix}_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} -\bar{x}_2 + 1 \\ \bar{x}_1 \\ -\bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$g_x(\bar{x}, \bar{u}) = [\partial g / \partial x_1 \quad \partial g / \partial x_2 \quad \partial g / \partial x_3]_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

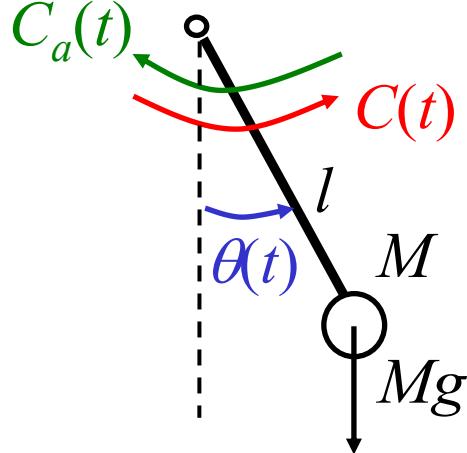
$$g_u(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

$$S^\delta : \begin{cases} \dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

# Esempio



Equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{pmatrix} \arcsin\left(\frac{\bar{u}}{Mgl}\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{u}$   
con  $\bar{u}$  qualsiasi

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) & f_1(x(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{h}{Ml^2} x_2(t) + \frac{u(t)}{Ml^2} & f_2(x(t), u(t)) \\ y(t) = x_1(t) & g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

$$f_1(x, u) = x_2$$

$$f_2(x, u) = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{h}{Ml^2} x_2 + \frac{u}{Ml^2}$$

$$\left. \frac{df_1(x, u)}{dx_1} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = 0$$

$$\left. \frac{df_1(x, u)}{dx_2} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = 1$$

$$\left. \frac{df_2(x, u)}{dx_1} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = -\frac{g}{l} \cos(\bar{x}_1)$$

$$\left. \frac{df_2(x, u)}{dx_2} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = -\frac{h}{Ml^2}$$

$$A = f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(\bar{x}_1) & -\frac{h}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

$$f_1(x, u) = x_2$$

$$f_2(x, u) = -\frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{h}{Ml^2} x_2 + \frac{u}{Ml^2}$$

$$\left. \frac{df_1(x, u)}{du} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = 0$$

$$\left. \frac{df_2(x, u)}{du} \right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = \frac{1}{Ml^2}$$

$$B = f_u(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

$$g(x, u) = x_1(t)$$

$$\frac{dg(x, u)}{dx_1} \Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = 1 \quad \frac{dg(x, u)}{dx_2} \Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = 0$$

$$C = g_x(\bar{x}, \bar{u}) = [1 \quad 0]$$

$$g(x, u) = x_1(t)$$

$$\frac{dg(x, u)}{du} \Bigg|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = 0$$

$$D = g_u(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

$$S^\delta : \begin{cases} \dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \dot{\delta y}(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(\bar{x}_1) & -\frac{h}{Ml^2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml^2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Si considerino i seguenti tre equilibri

$$\begin{array}{ll} \bar{u} = 0 & \bar{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{array}{l} A_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{h}{Ml^2} \end{bmatrix} \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ll} \bar{u} = 0 & \bar{x}_B = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{array}{l} A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{h}{Ml^2} \end{bmatrix} \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ll} \bar{u} = Mgl & \bar{x}_C = \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{array}{l} A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{Ml^2} \end{bmatrix} \end{array}$$

## 4. Simulazioni Matlab

$$M = 1 \text{ kg}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

$$h = 0.5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Equilibrio  $\bar{u} = 0$

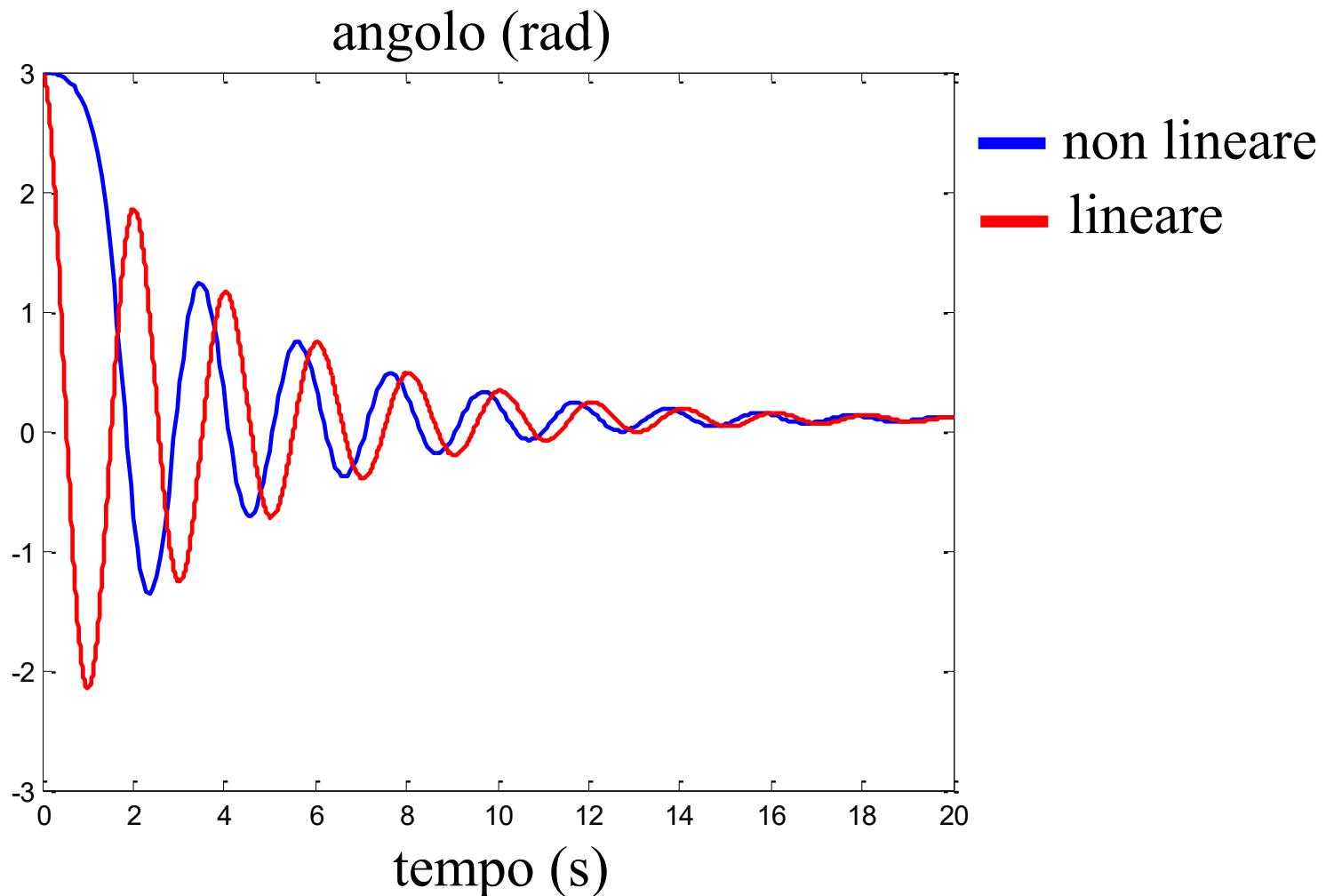
$$\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = 0 + \delta u(t) = 1, \quad t \geq 0$$

“piccola” perturbazione  
dell’ingresso

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

“grande” perturbazione della c.i.

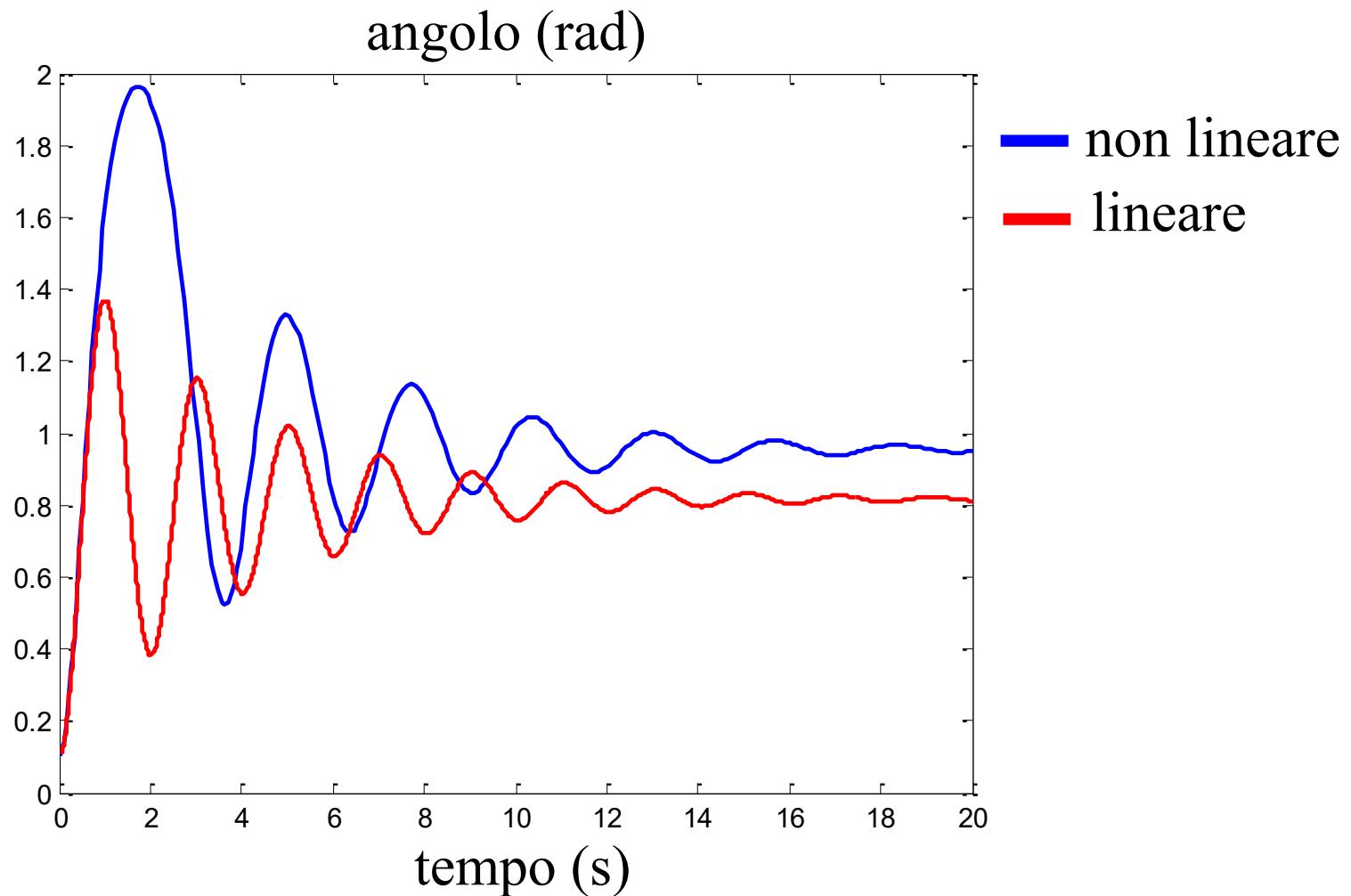


$$u(t) = 0 + \delta u(t) = 8, \quad t \geq 0$$

“grande” perturbazione  
dell’ingresso

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \bar{x} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

“piccola” perturbazione della c.i.

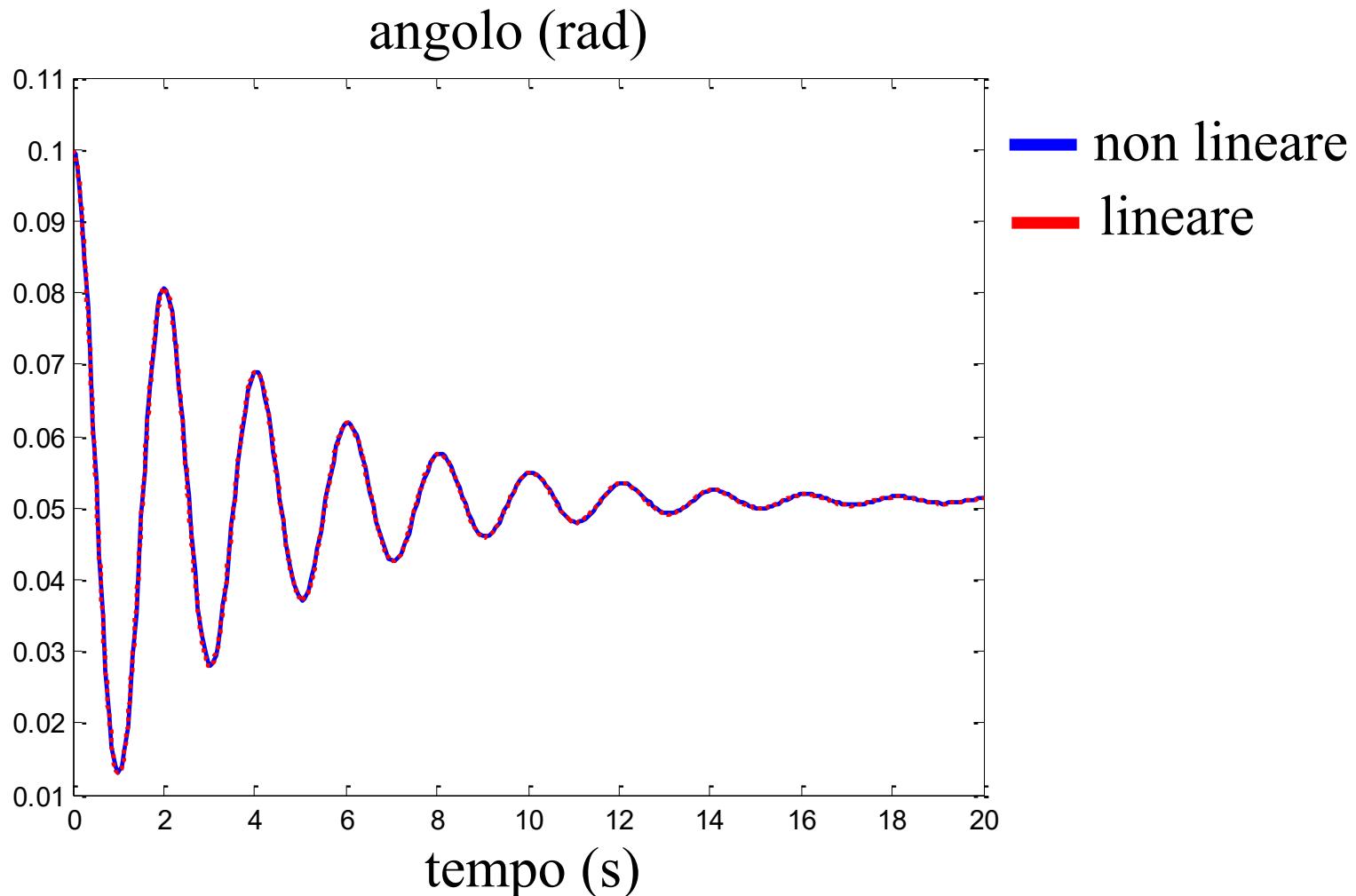


$$u(t) = 0 + \delta u(t) = 0.5, \quad t \geq 0$$

“piccola” perturbazione  
dell’ingresso

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \bar{x} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

“piccola” perturbazione della c.i.



# Lezione 5.

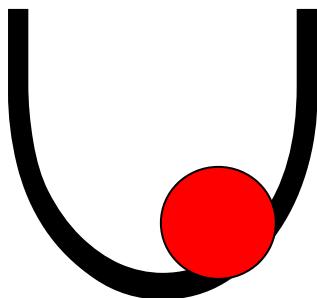
# Stabilità dei sistemi dinamici

# Schema della lezione

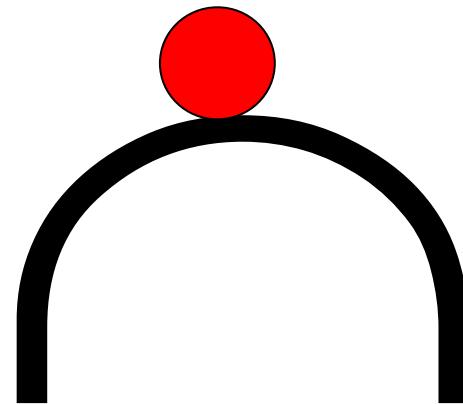
1. Introduzione
2. Stabilità dell'equilibrio
3. Stabilità dell'equilibrio nei sistemi LTI
4. Classificazione dei sistemi LTI
5. Proprietà dei sistemi LTI as. stabili

# 1. Introduzione

Due equilibri



Stabile



Instabile

- ✿ La stabilità è quella proprietà per cui un sistema, dopo una perturbazione, tende a tornare nella situazione preesistente la perturbazione.
- ✿ La stabilità è una proprietà locale (in generale), cioè si riferisce al comportamento del sistema in seguito a perturbazioni “piccole”.
- ✿ Non tutte le grandezze di un sistema sono note con precisione: la **condizione iniziale** è spesso non nota.

### Teoria di Lyapunov

Nella teoria dei sistemi dinamici si parla di:

- Stabilità di un movimento
- Stabilità di un equilibrio
- Stabilità del sistema (per sistemi lineari)

## 2. Stabilità dell'equilibrio

Sia  $(\bar{x}, \bar{u})$  un equilibrio per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ \dot{y}(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} \end{cases}$$



$$x(t) = \bar{x}$$

movimento nominale

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta\bar{x} \end{cases}$$



$$x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$$

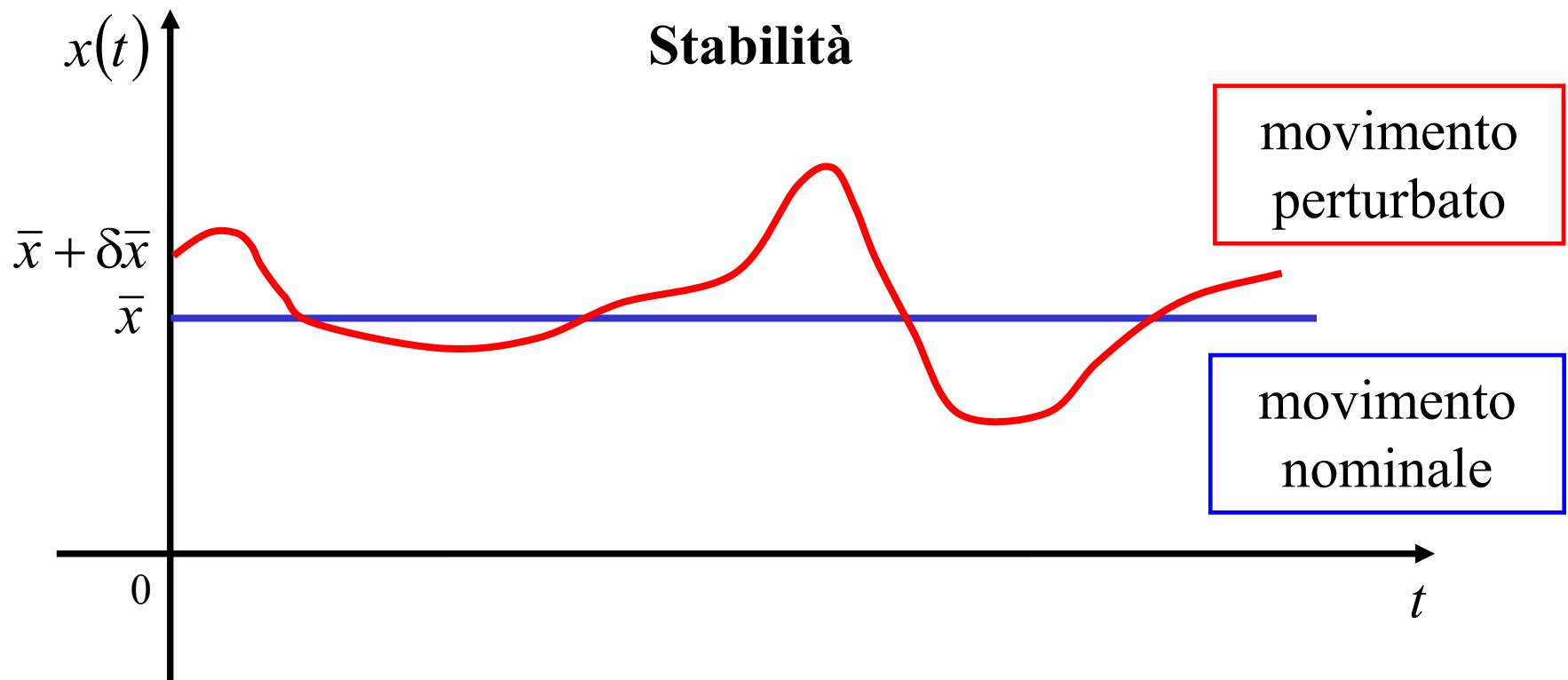
movimento perturbato

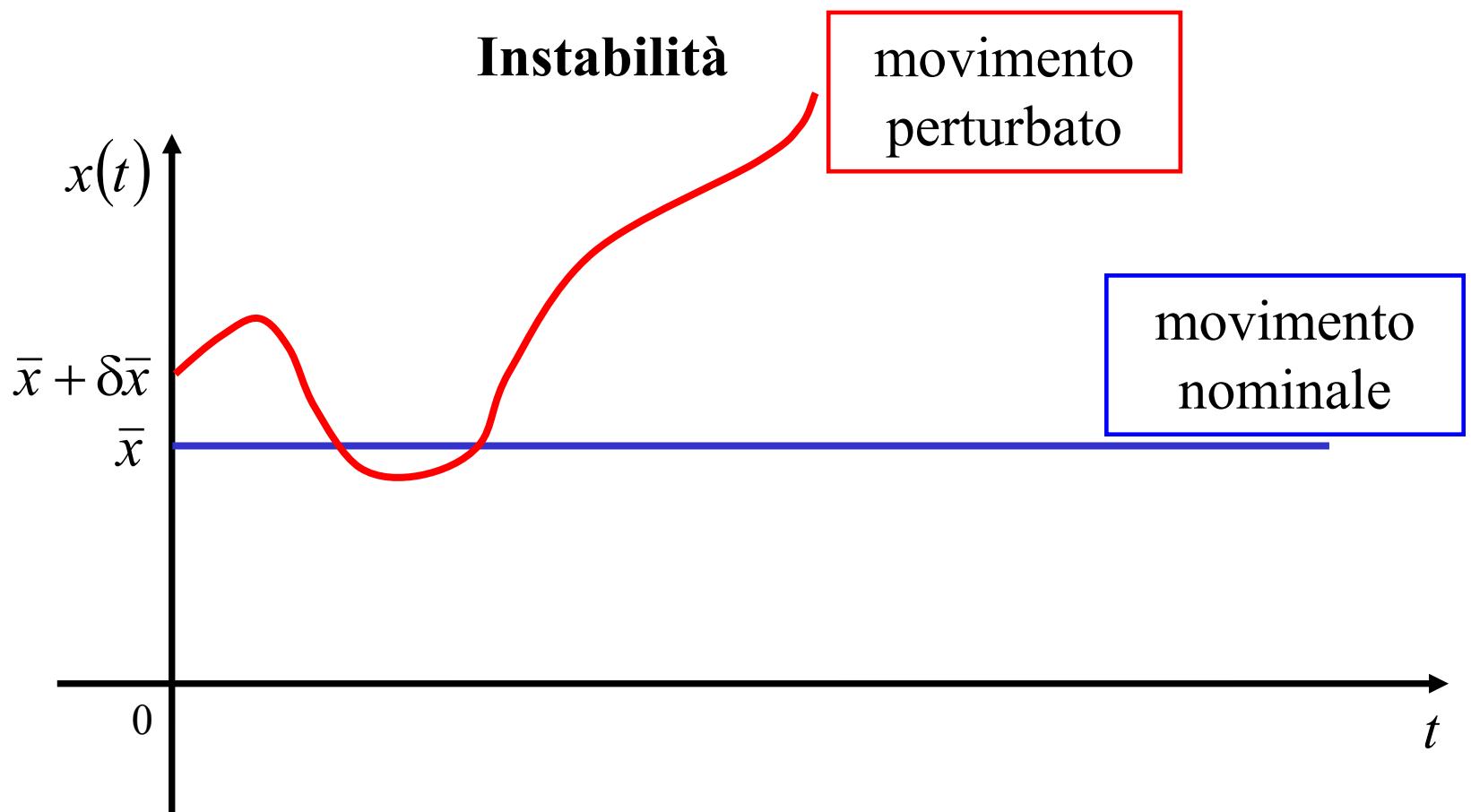
(Stesso ingresso, c.i. differente)

perturbazione della condizione iniziale

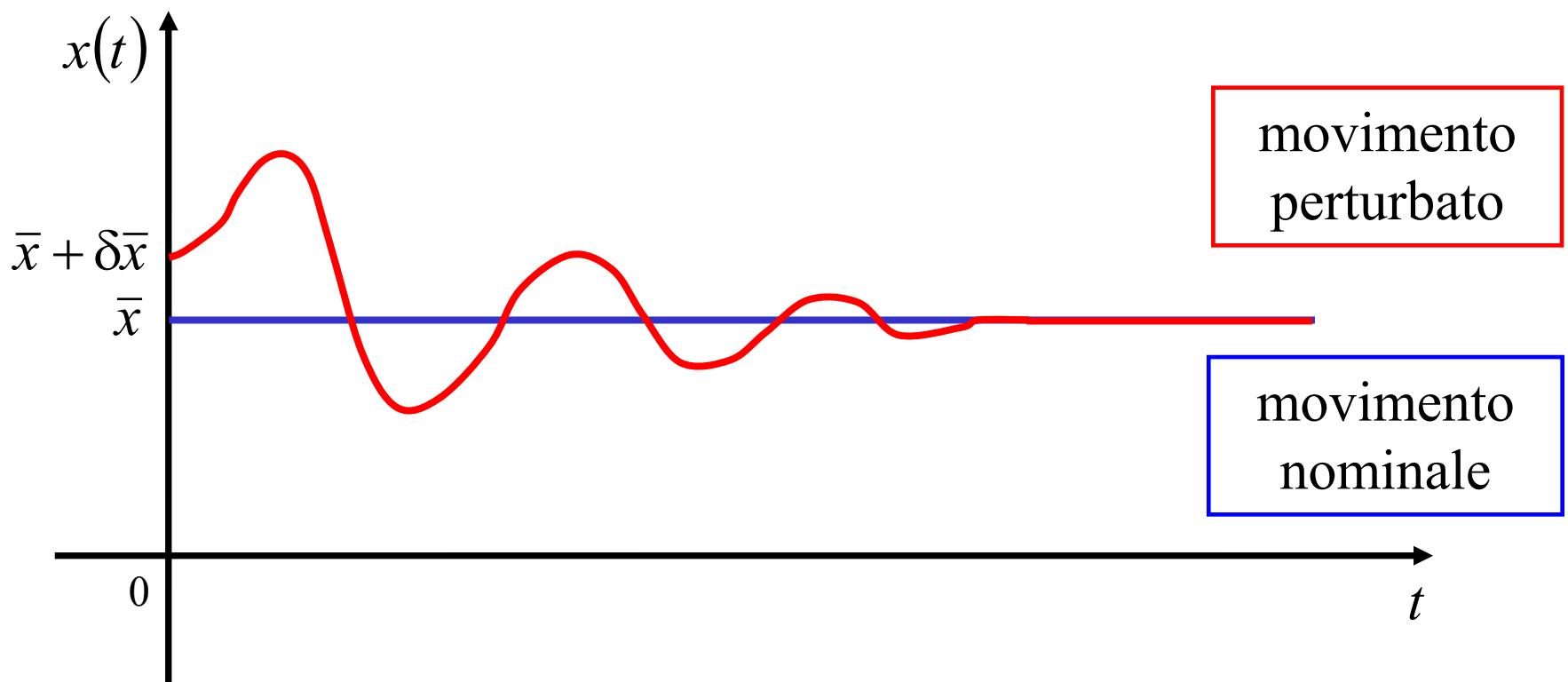
perturbazione del movimento

Per un sistema del primo ordine è possibile visualizzare graficamente in modo semplice il concetto di stabilità.





## Asintotica stabilità



E' possibile esprimere i precedenti concetti in modo rigoroso ricorrendo alla topologia.

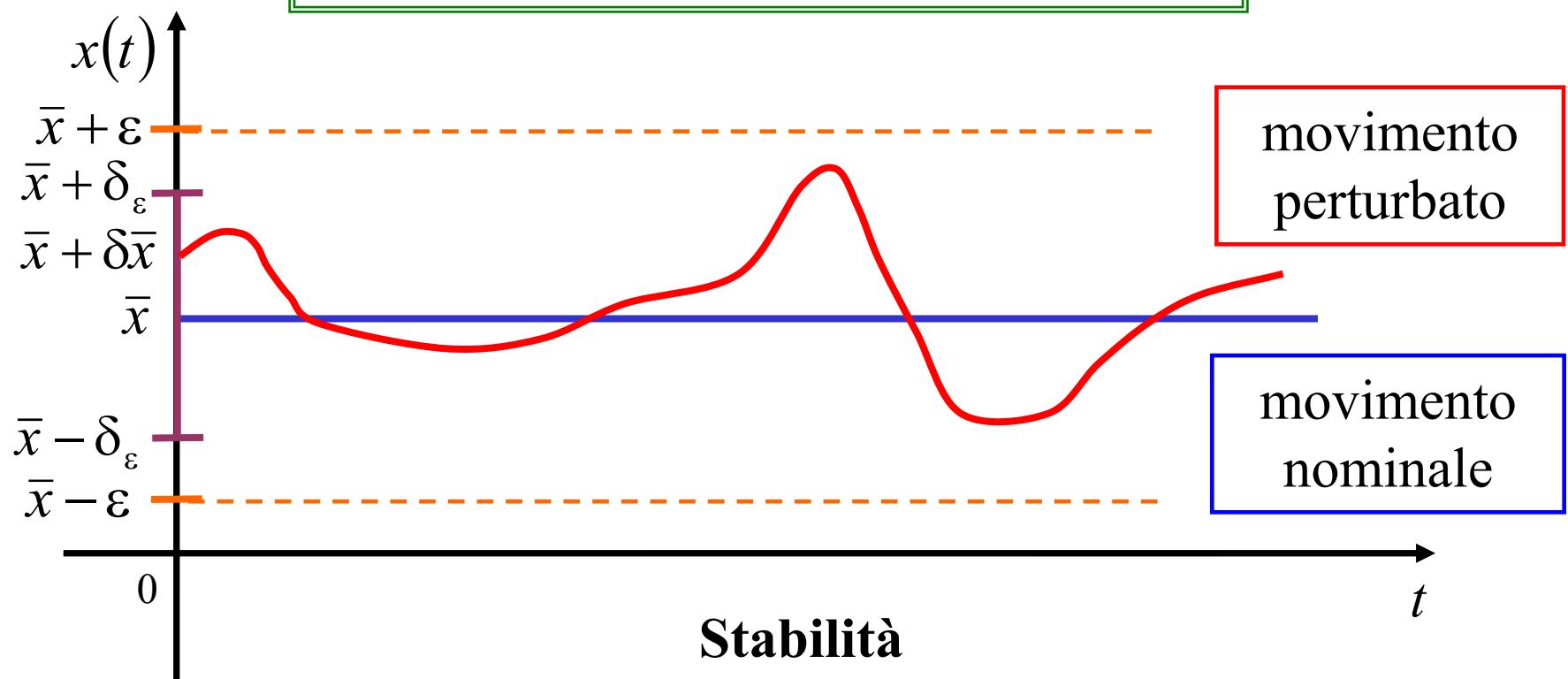
## approfondimento

Un equilibrio  $\bar{x}$  si dice stabile se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che}$$

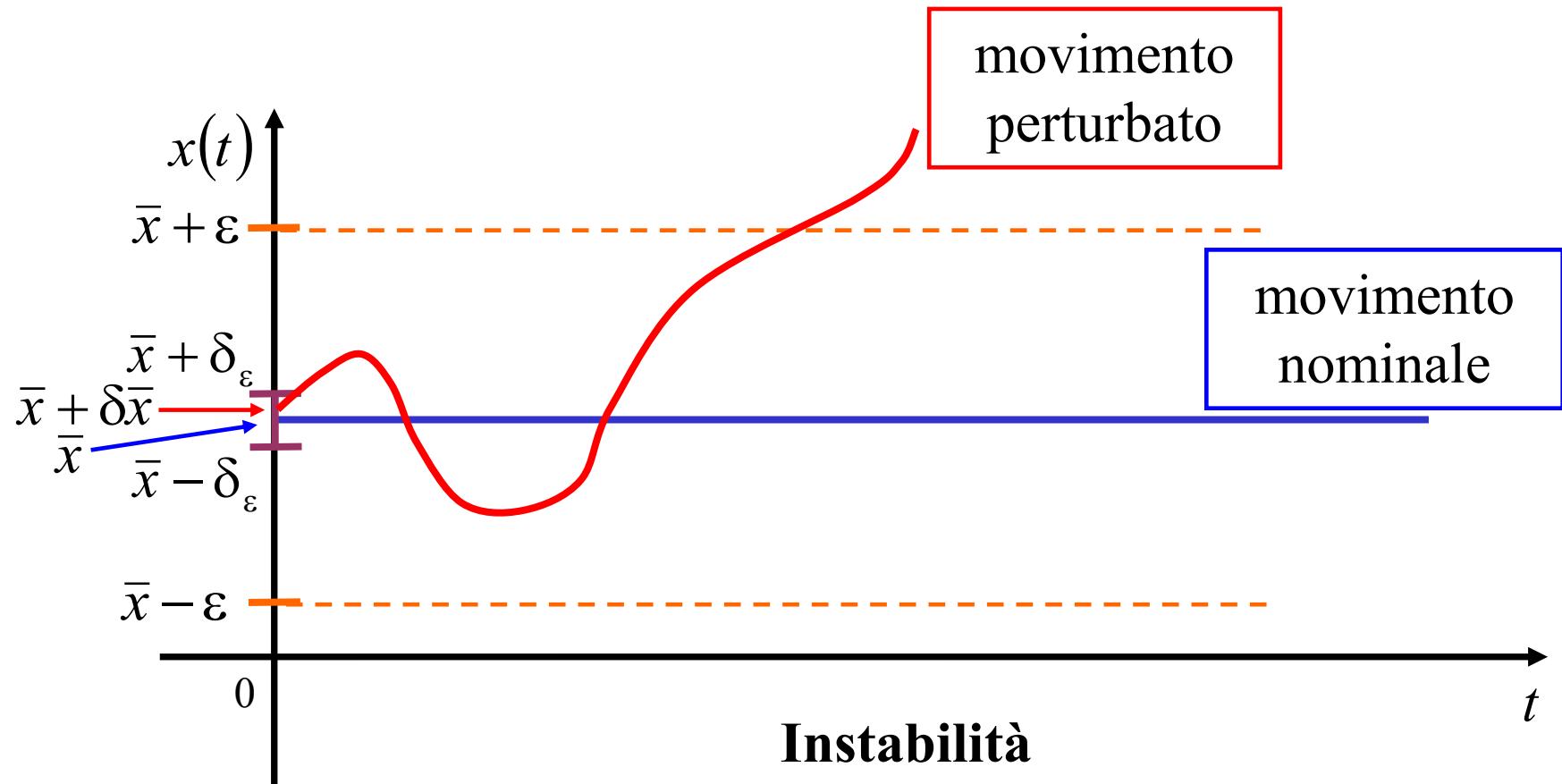
$$\forall \delta\bar{x} \text{ che soddisfa } \|\delta\bar{x}\| < \delta_\varepsilon$$

$$\text{risulti } \|\delta x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$



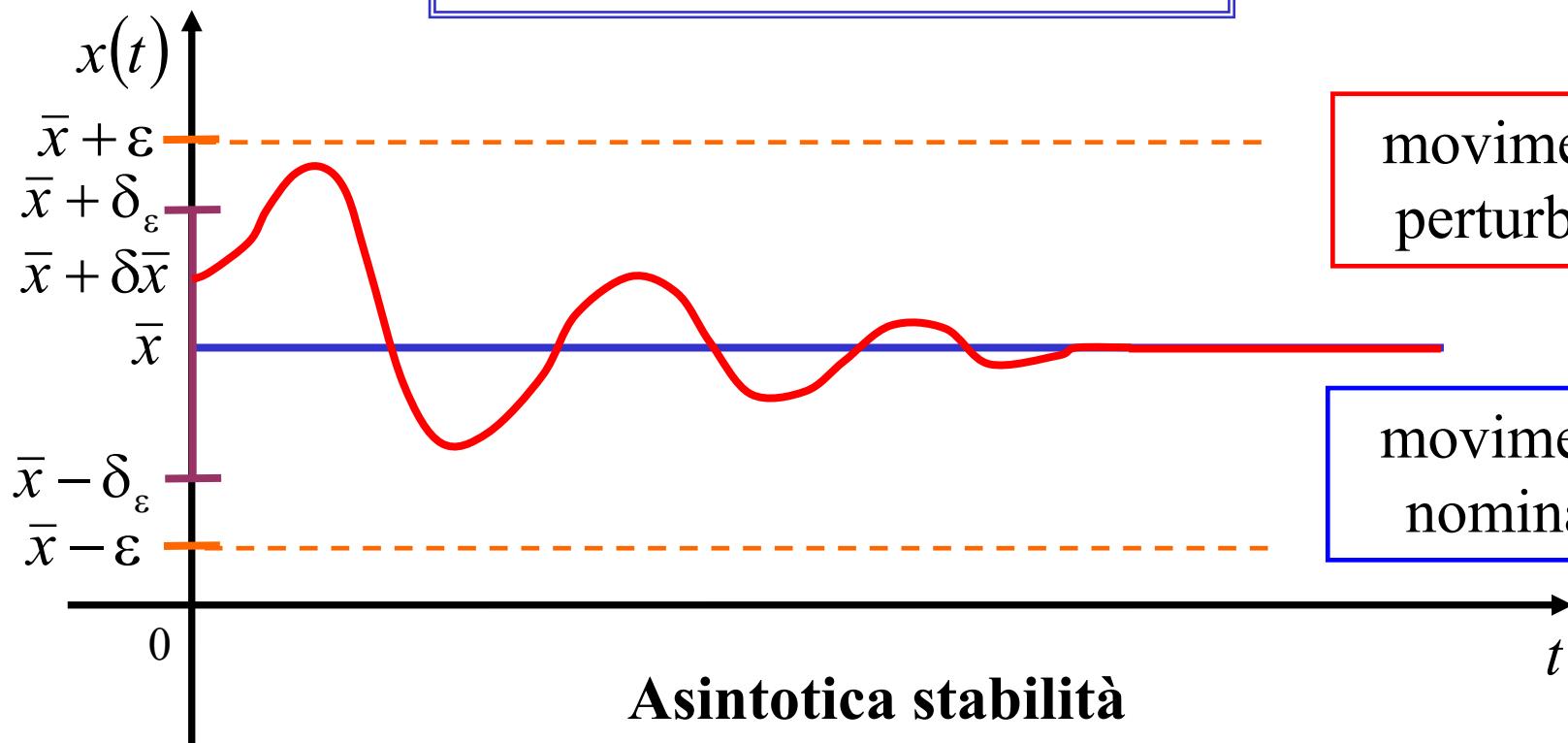
approfondimento

Un equilibrio  $\bar{x}$  si dice instabile se non è stabile.



Un equilibrio  $\bar{x}$  si dice asintoticamente stabile se è stabile ed inoltre

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\delta x(t)\| = 0$$



### 3. Stabilità dell'equilibrio nei sistemi LTI

Consideriamo un sistema LTI SISO

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Sia  $(\bar{x}, \bar{u})$  un equilibrio per il sistema.

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} \end{cases}$$



movimento nominale

$$x(t) = \bar{x}, t \geq 0$$

Usando la formula di Lagrange

movimento  
nominale

$$x(t) = e^{At} \bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u} d\tau = \bar{x}$$

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u}, t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta\bar{x} \end{cases}$$

perturbazione della condizione iniziale

Usando la formula di Lagrange

movimento perturbato

$$x(t) = e^{At} (\bar{x} + \delta\bar{x}) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u} d\tau =$$

$$= e^{At} \bar{x} + e^{At} \delta\bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u} d\tau =$$

$$= \underbrace{e^{At} \bar{x} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u} d\tau}_{\text{movimento nominale}} + \underbrace{e^{At} \delta\bar{x}}_{\text{perturbazione del movimento}}$$

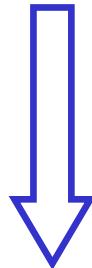
movimento nominale

perturbazione del movimento

Quindi:

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x} = e^{At} \delta \bar{x}$$

perturbazione del  
movimento



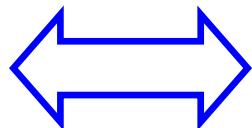
perturbazione della  
condizione iniziale

La perturbazione del movimento che si ottiene in seguito ad una perturbazione della condizione iniziale:

- non dipende dal particolare stato di equilibrio  
quindi si può parlare di stabilità del sistema
- dipende solo dalla matrice  $e^{At}$   
da studiare accuratamente
- la stabilità (nei sistemi lineari) è una proprietà “globale”  
(non dipende dall’entità della perturbazione)

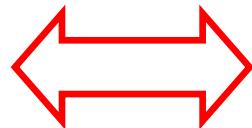
Utilizzando la definizione di stabilità dell'equilibrio vista  
(intuitivamente) si può dedurre che

**Asintotica  
stabilità**



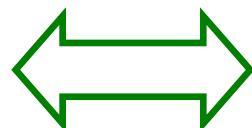
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$$

**Instabilità**



$$e^{At} \text{ diverge per } t \rightarrow \infty$$

**Stabilità**



$$e^{At} \text{ limitata } \forall t$$

**N.B.  $e^{At}x_0$  è il movimento libero!!!**

# Esempio esplicativo (caso scalare)

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

$$a < 0 \iff \lim_{t \rightarrow \infty} e^{at} = 0 \iff \text{Asintotica stabilità}$$

$$a > 0 \iff e^{at} \text{ diverge per } t \rightarrow \infty \iff \text{Instabilità}$$

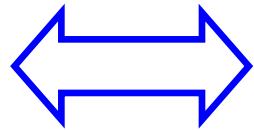
$$a = 0 \iff e^{at} \text{ limitata } \forall t \iff \text{Stabilità}$$

Per esempio

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$e^{-2t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$



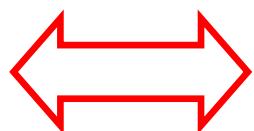
**Asintotica  
stabilità**

Per esempio

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + u(t)$$

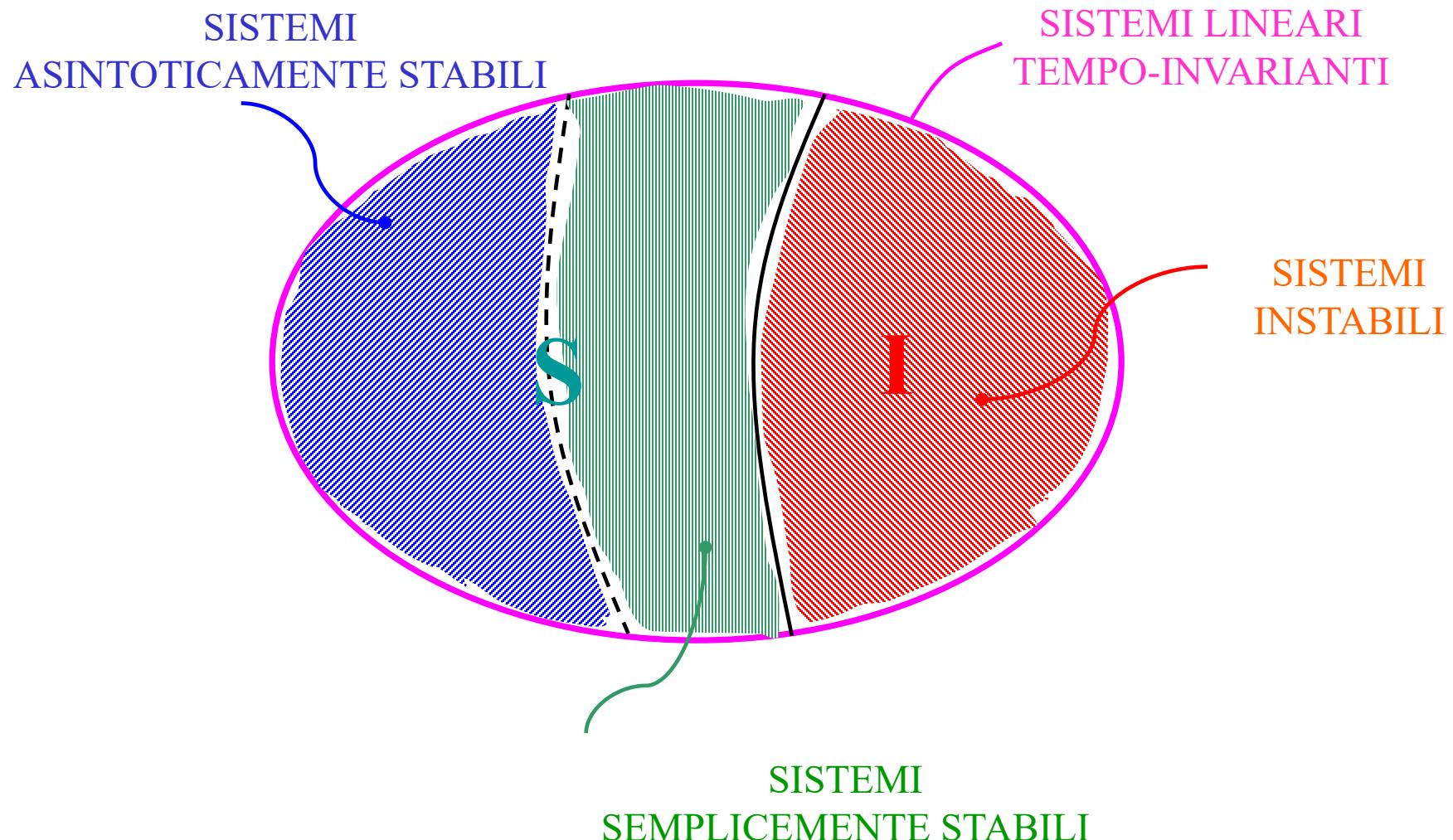
$$x(0) = x_0$$

$$e^{2t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$$



**Instabilità**

## 4. Classificazione dei sistemi LTI (per la stabilità)



## 5. Proprietà dei sistemi LTI as. stabili

### Proprietà 1

Un sistema LTI as. stabile “spostato” dall’equilibrio, tende a tornarci spontaneamente.

Sia  $(\bar{u}, \bar{x})$  un equilibrio. Se si cambia la condizione iniziale, ma si applica lo stesso ingresso, il movimento dello stato di un sistema LTI as. stabile tende sempre allo stesso equilibrio.

$$\begin{cases} u(t) = \bar{u} , \quad t \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta \bar{x} \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \bar{x}$$

Modificando la condizione iniziale, modifco solo il movimento libero che nei sistemi as.stabili si annulla asintoticamente.

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

$$x(0) = 1$$

Lo stato di equilibrio in corrispondenza di  
 $\bar{u} = 1$  è  $\bar{x} = 1$

Quindi applicando l'ingresso costante  $\bar{u} = 1$  con c.i.  $x(0) = 1$  si ottiene il movimento (costante) dello stato  $x(t) = 1$  per tutti i  $t \geq 0$

$$\begin{cases} u(t) = 1, t \geq 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$



$$x(t) = 1, t \geq 0$$

movimento nominale

Si cambi lo stato iniziale, mantenendo lo stesso ingresso:

$$\begin{cases} u(t) = 1, t \geq 0 \\ x(0) = 1 + \delta \bar{x} \end{cases}$$

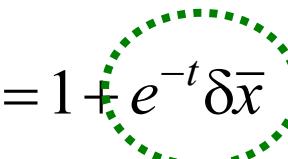


$$x(t) = 1 + \delta x(t)$$

movimento perturbato

Qual'è l'espressione del movimento perturbato?

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \bar{u} d\tau = \\&= e^{-t} (1 + \delta \bar{x}) + \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau + e^{-t} \delta \bar{x} = \\&= e^{-t} + e^{-t} \int_0^t e^\tau d\tau + e^{-t} \delta \bar{x} = e^{-t} + e^{-t} (e^t - 1) + e^{-t} \delta \bar{x} = \\&= 1 + e^{-t} \delta \bar{x}\end{aligned}$$

 **perturbazione dell'equilibrio**

$$e^{-t} \delta \bar{x} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{qualsiasi sia } \delta \bar{x}$$

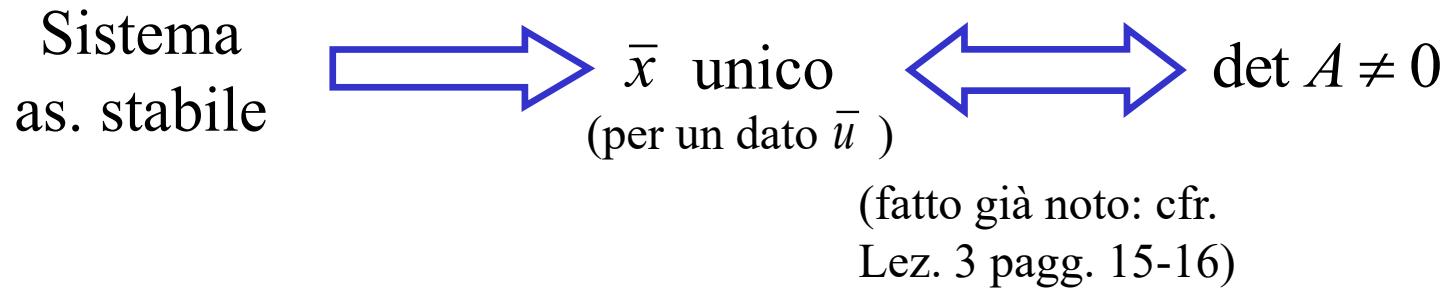
La perturbazione del movimento tende ad annullarsi, qualsiasi sia l'entità della perturbazione della condizione iniziale.

## Proprietà 2

Fissato  $u(t) = \bar{u}$ , lo stato di equilibrio  $\bar{x}$  di un sistema LTI as. stabile è unico.

(Cfr. Lez. 3 pag. 17)

Si supponga per assurdo che  $\bar{\bar{x}} \neq \bar{x}$  sia un altro stato di equilibrio per il sistema. Allora, con condizione iniziale  $x(0) = \bar{\bar{x}}$  il movimento dello stato sarebbe  $x(t) = \bar{\bar{x}}$  e non tenderebbe asintoticamente a  $\bar{x}$  contro la Proprietà 1.



## Proprietà 3

Il movimento dello stato di un sistema LTI as. stabile dipende asintoticamente solo dall'ingresso  $u(t)$

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} x_f(t)$$

  $e^{At}x(0) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

Cioè: in un sistema as. stabile il movimento non risente (asintoticamente) delle condizioni iniziali.

# Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} u(t) = \sin(t), t \geq 0 \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

Il movimento dello stato è:

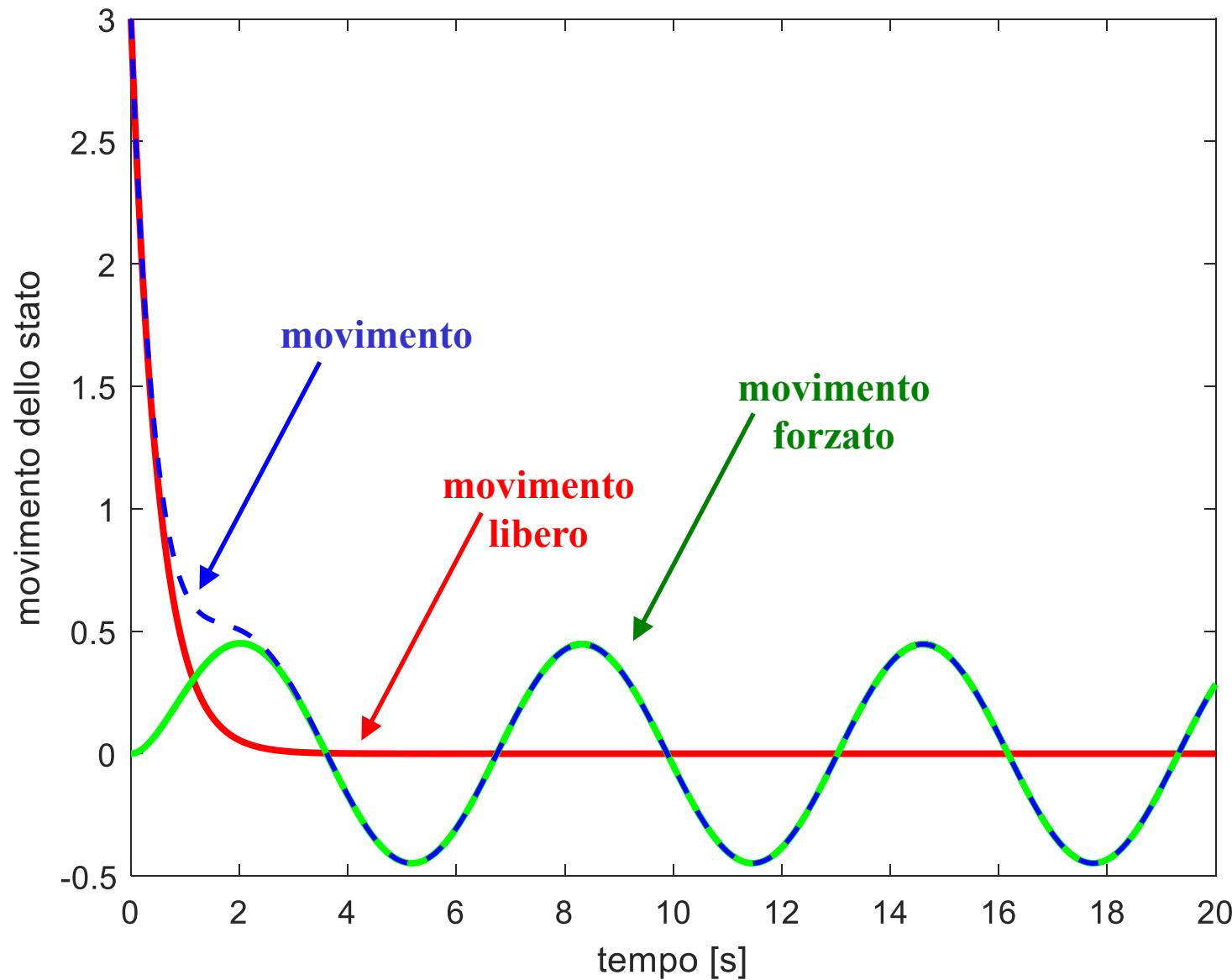
$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = 3e^{-2t} + e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} \sin(\tau)d\tau =$$
$$= 3e^{-2t} + \frac{1}{5}(e^{-2t} - \cos(t)) + \frac{2}{5}\sin(t)$$

movimento libero

movimento forzato

$$x(t) = \cancel{3e^{-2t}} + \frac{1}{5}(e^{-2t} - \cos(t)) + \frac{2}{5}\sin(t)$$

per  $t \rightarrow \infty$



## Proprietà 4

Se  $u(t) = 0$  allora il movimento dello stato di un sistema LTI as. stabile tende asintoticamente a zero.

$$\text{Se } u(t) = 0 \quad \longrightarrow \quad x_f(t) = 0$$

$$x(t) = x_l(t)$$

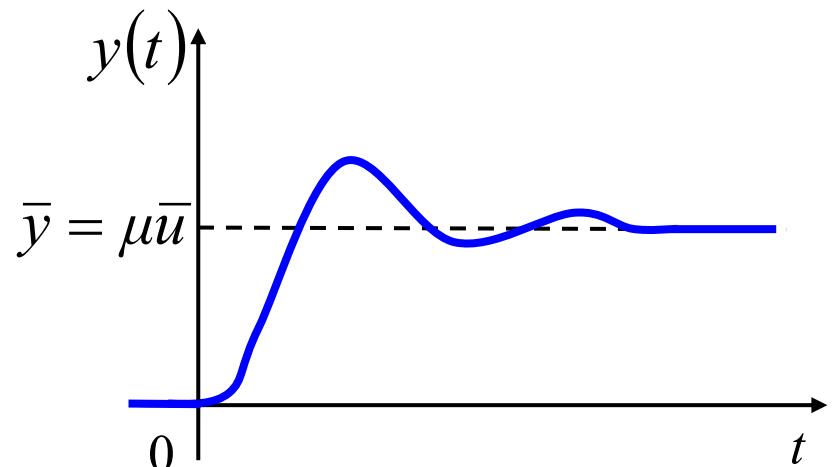
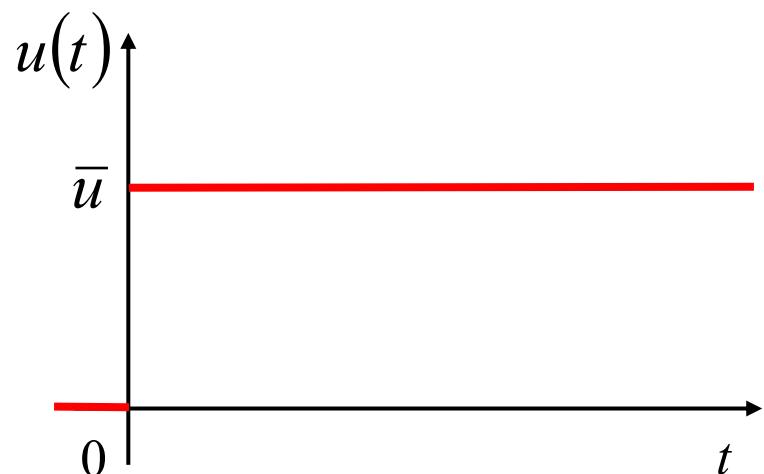
$$\longrightarrow e^{At} x(0) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

## Proprietà 5

Se  $u(t) = \bar{u}$  allora l'uscita di un sistema LTI as. stabile tende al valore di regime

$$\bar{y} = \mu \bar{u} = (-CA^{-1}B + D)\bar{u}$$

(Cfr. Lez. 3 pag. 16)



## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + 2u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} u(t) = 2, t \geq 0 \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

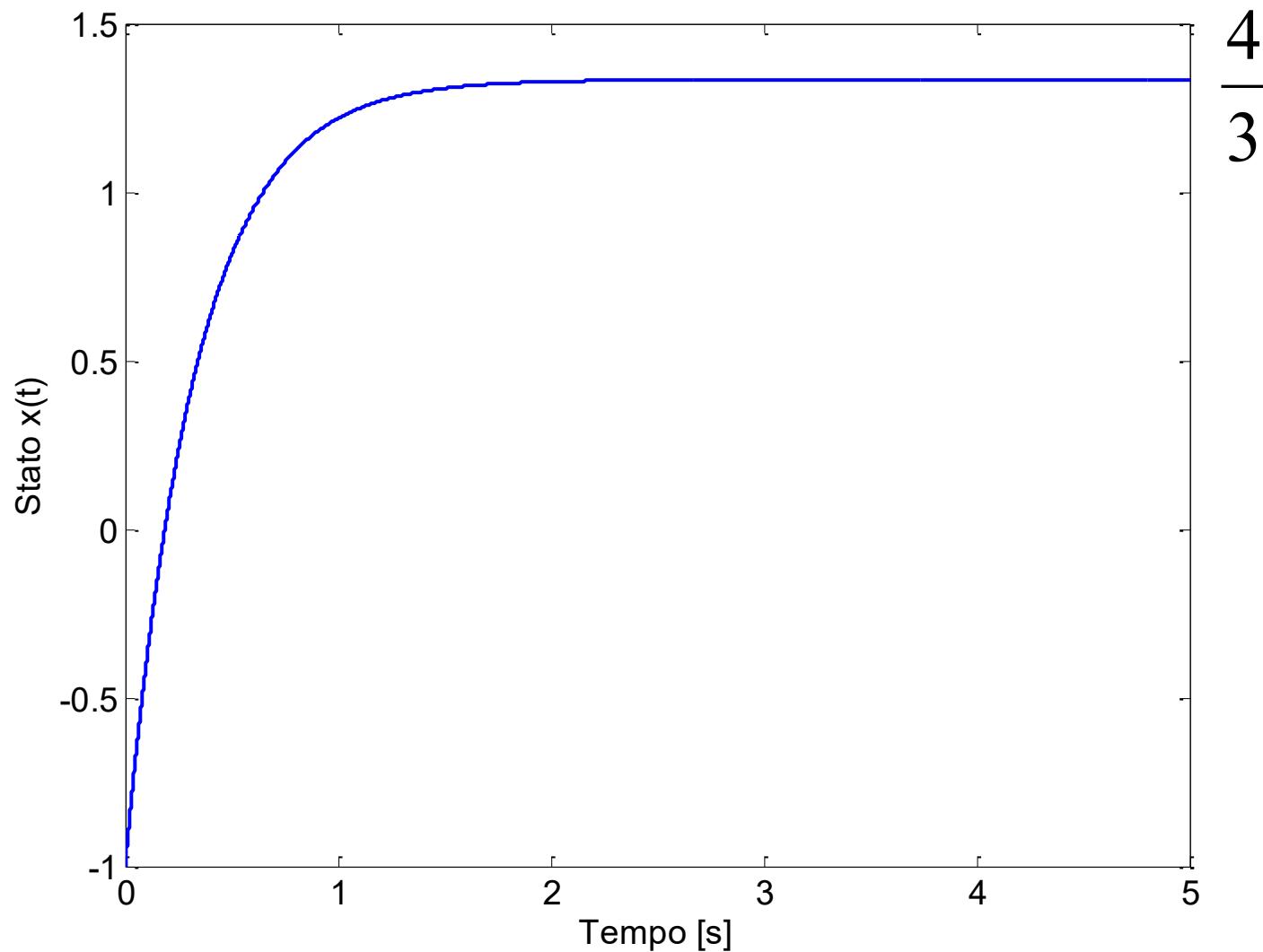
Il movimento dello stato è:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = -e^{-3t} + e^{-3t} \int_0^t 4e^{3\tau}d\tau = \frac{4}{3} - \frac{7}{3}e^{-3t}$$

$$y(t) = \frac{4}{3} - \frac{7}{3}e^{-3t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{4}{3}$$

Infatti

$$\bar{y} = (-CA^{-1}B + D)\bar{u} = \left(-1\left(-\frac{1}{3}\right)2 + 0\right)2 = \frac{4}{3}$$



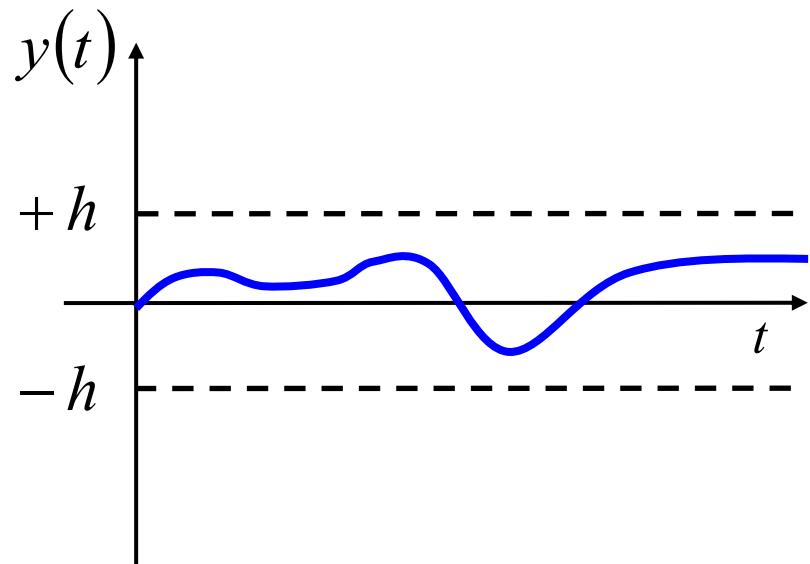
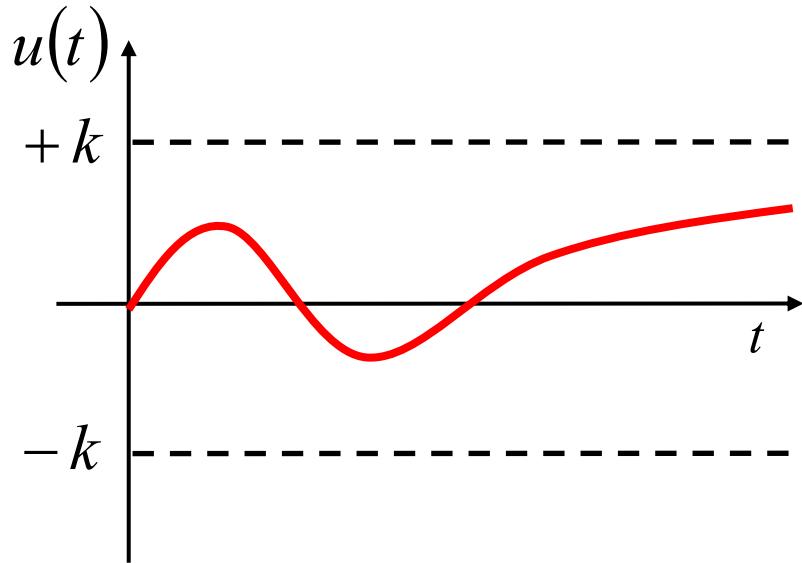
## Proprietà 6

Se si applica ad un sistema LTI as. stabile un ingresso limitato, allora l'uscita è limitata.

Se  $u(t)$ ,  $t \geq 0$  è tale che  $|u(t)| \leq k$ ,  $t \geq 0$

allora  $\exists h : |y(t)| \leq h$ ,  $t \geq 0$

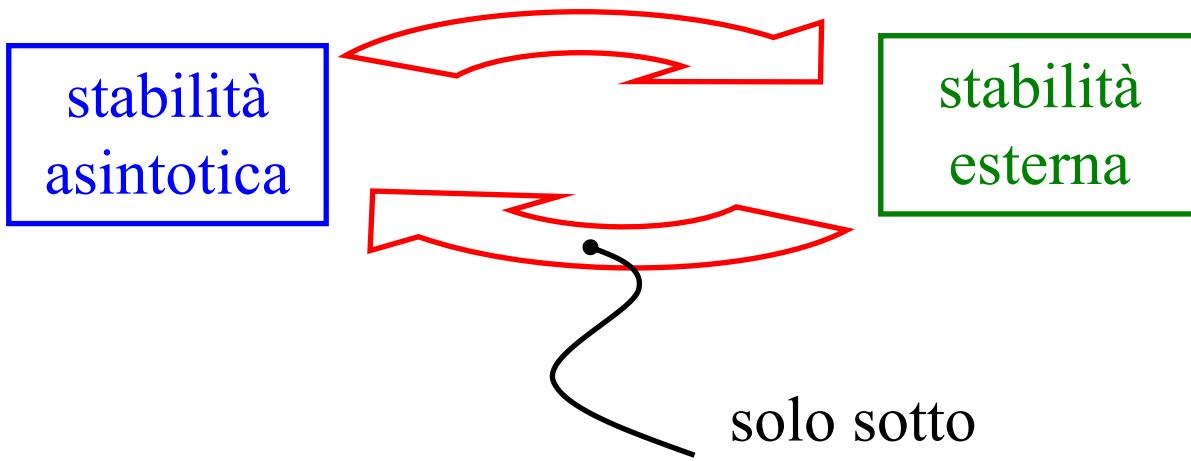
stabilità esterna  
(BIBO)



stabilità  
asintotica

stabilità  
esterna

so lo sotto  
opportune ipotesi



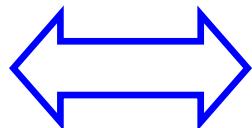
# Lezione 6. Stabilità e matrice A nei sistemi LTI

# Schema della lezione

1. Studio della matrice  $e^{At}$  per  $t \rightarrow \infty$
2. Teoremi sulla stabilità dei sistemi LTI
3. Regione di asintotica stabilità
4. Criteri di stabilità basati sulla matrice A
5. Criteri di stabilità basati sul polinomio caratteristico
6. Matlab

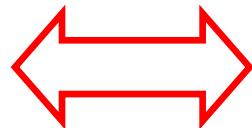
# 1. Studio della matrice $e^{At}$ per $t \rightarrow \infty$

Asintotica  
stabilità



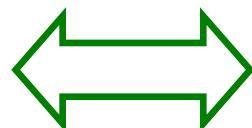
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$$

Instabilità



$e^{At}$  diverge per  $t \rightarrow \infty$

Stabilità



$e^{At}$  limitata  $\forall t$

Come si può capire il comportamento di  
 $e^{At}$  per  $t \rightarrow \infty$  nei seguenti casi?

- ✿  $A$  diagonale
- ✿  $A$  con autovalori reali distinti (diagonalizzabile)
- ✿  $A$  con autovalori complessi coniugati distinti (diagonalizzabile)
- ✿  $A$  con autovalori multipli (diagonalizzabile oppure no)

## A diagonale

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & & \cdots & 0 \\ & s_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & s_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} s_i, \ i = 1, \dots, n \\ \text{sono gli autovalori (reali)} \end{array}$$

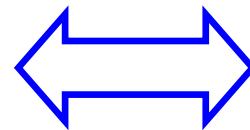
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & & \cdots & 0 \\ & e^{s_2 t} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & e^{s_n t} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{contiene solo termini del tipo } e^{s_i t} \\ (\text{solo sulla diagonale}) \end{array}$$

I termini  $e^{s_i t}$  si dicono **modi** del sistema.

**Asintotica  
stabilità**

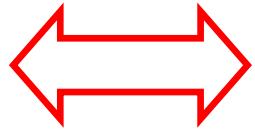


$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$$

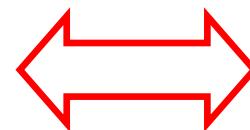


$$s_i < 0, \forall i$$

**Instabilità**

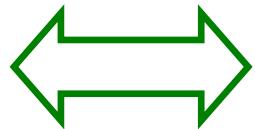


$e^{At}$  diverge  
per  $t \rightarrow \infty$

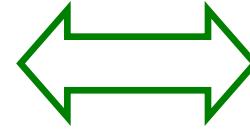


$$\exists i : s_i > 0$$

**Stabilità**



$e^{At}$  limitata  $\forall t$



$$s_i \leq 0, \forall i$$

# Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + 3u(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

La matrice  $A$  è:  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Gli autovalori sono  
(reali) negativi  Il sistema è as. stabile

Infatti (prova):

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## $A$ con autovalori reali distinti

Se  $A$  ha autovalori reali e distinti allora  $A$  è diagonalizzabile, cioè esiste  $M$  tale che  $\tilde{A} = M^{-1}AM$

$$\text{dove } \tilde{A} = \begin{bmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{bmatrix}$$

$s_i$ ,  $i = 1, \dots, n$   
sono gli autovalori (reali e distinti)

Allora:

$$e^{At} = e^{M\tilde{A}M^{-1}t} = Me^{\tilde{A}t}M^{-1} = M \begin{bmatrix} e^{s_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{s_n t} \end{bmatrix} M^{-1}$$

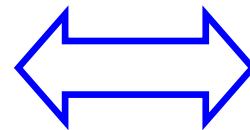
(Si può dimostrare  
che è vero!)

$e^{At}$  contiene solo combinazioni  
lineari di modi del tipo  $e^{s_i t}$   
(non solo sulla diagonale!)

**Asintotica  
stabilità**

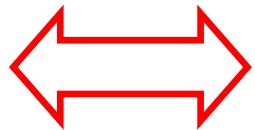


$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$$

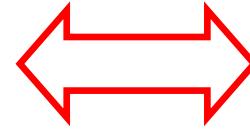


$$s_i < 0, \forall i$$

**Instabilità**

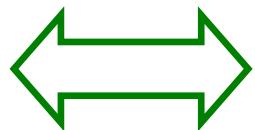


$e^{At}$  diverge  
per  $t \rightarrow \infty$

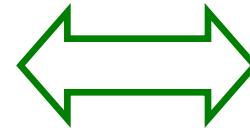


$$\exists i : s_i > 0$$

**Stabilità**



$e^{At}$  limitata  $\forall t$



$$s_i \leq 0, \forall i$$

*Identico a prima!*

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t) \\ y(t) = 3x_1(t) \end{cases}$$

La matrice  $A$  è:  $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = (s+2)(s+1) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -1 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

Gli autovalori sono  
reali negativi e       Il sistema è as. stabile  
distinti

Infatti (prova):

Si calcoli la trasformazione  $M$  che diagonalizza  $A$ . Per fare ciò si calcolino gli autovettori di  $A$ .

$$Av_1 = -v_1 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2\alpha + 2\beta = -\alpha \\ -\beta = -\beta \end{cases} \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Av_2 = -2v_2 \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ -2\beta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2\alpha + 2\beta = -2\alpha \\ -\beta = -2\beta \end{cases} \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= Me^{\tilde{A}t}M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## A con autovalori complessi distinti

Gli autovalori complessi  
compaiono sempre a coppie       $\begin{cases} s_1 = \sigma + j\omega \\ s_2 = \sigma - j\omega \end{cases}$

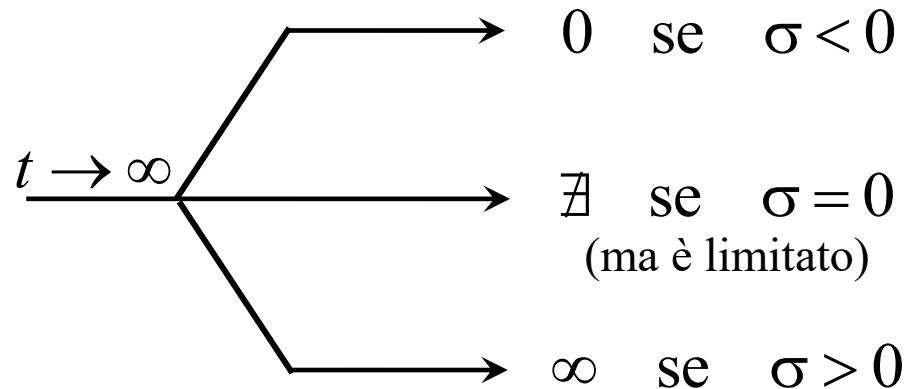
Si dimostra che  $e^{At}$  contiene termini del tipo  $\gamma e^{(\sigma+j\omega)t} + \bar{\gamma} e^{(\sigma-j\omega)t}$   
con  $\gamma = \alpha + j\beta$  costante complessa

$$\begin{aligned}\gamma e^{(\sigma+j\omega)t} + \bar{\gamma} e^{(\sigma-j\omega)t} &= \gamma e^{\sigma t} e^{j\omega t} + \bar{\gamma} e^{\sigma t} e^{-j\omega t} \\&= \gamma e^{\sigma t} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) + \bar{\gamma} e^{\sigma t} (\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)) = \\&= e^{\sigma t} ((\gamma + \bar{\gamma}) \cos(\omega t) + j(\gamma - \bar{\gamma}) \sin(\omega t)) = \\&= e^{\sigma t} (2\alpha \cos(\omega t) - 2\beta \sin(\omega t))\end{aligned}$$

**funzione limitata per  $t \rightarrow \infty$**

la convergenza dipende dal segno della parte reale  $\sigma$

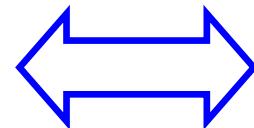
$$= e^{\sigma t} (2\alpha \cos \omega t - 2\beta \sin \omega t)$$



**Asintotica  
stabilità**

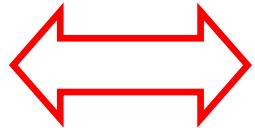


$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$$

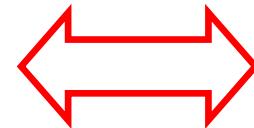


$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i$$

**Instabilità**

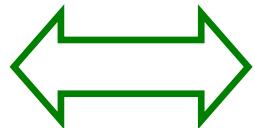


$e^{At}$  diverge  
per  $t \rightarrow \infty$

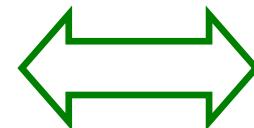


$$\exists i : \operatorname{Re}(s_i) > 0$$

**Stabilità**



$e^{At}$  limitata  $\forall t$



$$\operatorname{Re}(s_i) \leq 0, \forall i$$

*Identico a prima!*

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2u(t) \end{cases}$$

La matrice  $A$  è:  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1)^2 + 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -1 + j \\ s_2 = -1 - j \end{cases}$$

Gli autovalori sono  
complessi coniugati  $\longrightarrow$  Il sistema è as. stabile  
con parte reale negativa

## $A$ con autovalori multipli (reali per fissare le idee)

- ✓ Se  $A$  è diagonalizzabile

$e^{At}$  contiene solo termini del tipo  $e^{s_i t}$  (cfr. caso precedente)

- ✓ Se  $A$  non è diagonalizzabile

Sia  $s_i$  un autovalore multiplo.

Allora gli elementi di  $e^{At}$  contengono termini del tipo  $e^{s_i t} \quad te^{s_i t} \quad t^2 e^{s_i t} \quad \dots$

 Se  $s_i < 0$  il sistema è **as. stabile**.

 Se  $s_i = 0$  il sistema è **instabile!**

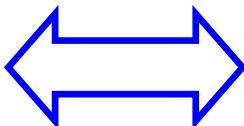
**Attenzione agli autovalori multipli con parte reale nulla !!**

## 2. Teoremi sulla stabilità dei sistemi LTI

### Teorema 1

Un sistema LTI è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori della matrice  $A$  hanno parte reale negativa

$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i$$

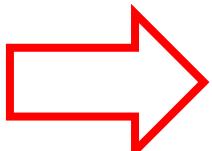


**Asintotica  
stabilità**

### Teorema 2

Un sistema LTI è **instabile** se la matrice  $A$  ha almeno un **autovalore con parte reale positiva**.

$$\exists i^* : \operatorname{Re}(s_{i^*}) > 0$$



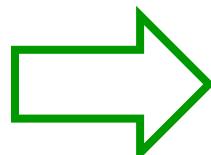
**Instabilità**

### Teorema 3

Un sistema LTI è **stabile** se la matrice  $A$  ha tutti gli autovalori con parte reale negativa ed uno solo nullo (o una sola coppia c.c. con parte reale nulla).

$$\operatorname{Re}(s_i) \leq 0, \forall i$$

$$\exists! i^* : \operatorname{Re}(s_{i^*}) = 0$$



**Stabilità**

## Osservazione 1 (sul Teorema 3)

Una coppia di autovalori complessi coniugati “conta” come uno solo. Quindi, un sistema con una sola coppia di autovalori complessi coniugati a parte reale nulla (e tutti gli altri con parte reale negativa) è stabile (semplicemente).

## Osservazione 2 (sui Teoremi 2 & 3)

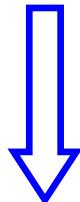
Ci sono sistemi con più di un autovalore con parte reale nulla (e tutti gli altri con parte reale negativa) che sono **stabili (semplicemente)** ed altri sistemi con più di un autovalore con parte reale nulla (e tutti gli altri con parte reale negativa) che sono **instabili**.

## Schema riassuntivo per autovalori con parte reale nulla

$$\begin{aligned} \text{Re}(s_i) &\leq 0, \forall i \\ \exists i : \text{Re}(s_i) &= 0 \end{aligned}$$



non asintoticamente stabile  
(ma stabile o instabile?)

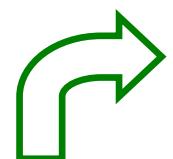


- \* singolo autovalore con  $\text{Re}(s_i) = 0$   
(o una sola coppia di  
autovalori immaginari)

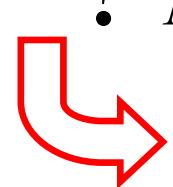


semplicemente  
stabile

- \* più autovalori con  $\text{Re}(s_i) = 0$



semplicemente stabile



? *Non affrontiamo questo caso*

instabile

## Esempio

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ -6 & s+4 & 0 \\ 6 & -3 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1)(s+4)(s+1) = 0$$


$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = -1 \\ s_2 = -1 \\ s_3 = -4 \end{array} \right.$$

Tutti gli autovalori sono reali e negativi.

Il sistema con  $A$  come matrice dinamica è certamente **as. stabile!**

N.B.  $A$  ha un autovalore multiplo, ma non con parte reale nulla!

## Esempio

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ -6 & s-4 & 0 \\ 6 & -3 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1)(s-4)(s+1) = 0$$


$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = -1 \\ s_2 = -1 \\ s_3 = +4 \end{array} \right.$$

$A$  ha un autovalore reale positivo.

Il sistema con  $A$  come matrice dinamica è certamente **instabile!**

## Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ -6 & s+3 & 0 \\ 6 & -3 & s+1 \end{bmatrix} = (s+1)(s+3)s = 0$$


$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = -3 \\ s_2 = -1 \\ s_3 = 0 \end{array} \right.$$

$A$  ha un solo autovalore nullo e tutti gli altri reali negativi.  
Il sistema con  $A$  come matrice dinamica è **stabile** (non as.).

## Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

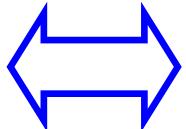
$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ -2 & -3 & s-4 \end{bmatrix} = s^2(s-4) = 0 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = +4 \end{cases}$$

Ha un autovalore nullo doppio ed uno positivo.

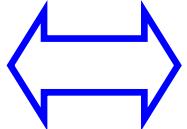
Il sistema con  $A$  come matrice dinamica è certamente **instabile!**

In particolare, un sistema è instabile se gli autovalori multipli con parte reale nulla hanno molteplicità geometrica inferiore alla molteplicità algebrica.

**Asintotica  
stabilità**



$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$$



$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i$$

**Instabilità**



$e^{At}$  diverge  
per  $t \rightarrow \infty$



$$\exists i : \operatorname{Re}(s_i) > 0$$

oppure

$$\operatorname{Re}(s_i) \leq 0, \forall i$$

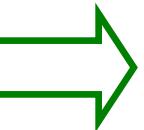
$A$  ha autovalori multipli  
con parte reale nulla la cui  
**molteplicità geometrica è  
inferiore alla molteplicità  
algebrica.**

**approfondimento**

**Stabilità**



$e^{At}$  limitata  $\forall t$



$$\operatorname{Re}(s_i) \leq 0, \forall i \quad \exists ! i : \operatorname{Re}(s_i) = 0$$

oppure

$$\operatorname{Re}(s_i) \leq 0, \forall i$$

$A$  ha autovalori multipli  
con parte reale nulla la cui  
**molteplicità geometrica è uguale  
alla molteplicità algebrica.**

# Esempio

approfondimento

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ -8 & s+4 & 0 \\ 8 & -4 & s \end{bmatrix} = s^2(s+4) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} s_{11} = 0 \\ s_{12} = 0 \\ s_2 = -4 \end{cases}$$

Ha un autovalore nullo doppio ed uno negativo.

Bisogna calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore nullo, ovvero valutare il numero di autovettori linearmente indipendenti ad esso associati.

Si calcolino gli autovettori associati all'autovalore 0.

**approfondimento**

$$Av_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ qualsiasi} \\ \beta = 2\alpha \\ \gamma \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

$$v_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'autovalore nullo ha molteplicità geometrica 2 perchè ha due autovettori linearmente indipendenti associati.

Quindi il sistema è **stabile (non as.)**.

Infatti è possibile diagonalizzare la matrice  $A$ .

approfondimento

Si calcoli l'autovettore associato all'autovalore  $-4$

$$A\boldsymbol{v}_2 = -4\boldsymbol{v}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0 = -4\alpha \\ 8\alpha - 4\beta = -4\beta \\ -8\alpha + 4\beta = -4\gamma \end{cases}$$

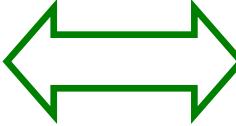
$$\rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \text{ qualsiasi} \\ \gamma = -\beta \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2e^{-4t} & e^{-4t} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 - 2e^{-4t} & e^{-4t} & 0 \\ -2 + 2e^{-4t} & 1 - e^{-4t} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è limitata

$e^{At}$  limitata  $\forall t$   **Stabilità (semplice)**

**approfondimento**

# Esempio

approfondimento

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ -2 & -3 & s+4 \end{bmatrix} = s^2(s+4) = 0 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = -4 \end{cases}$$

Ha un autovalore nullo doppio ed uno negativo.

Bisogna calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore nullo, ovvero valutare il numero di autovettori linearmente indipendenti ad esso associati.

Si calcolino gli autovettori associati all'autovalore 0. **approfondimento**

$$Av_1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ \beta = 0 \\ \gamma \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'autovalore nullo ha molteplicità geometrica 1 perchè ha un solo autovettore associato.

Quindi il sistema è **instabile**.

Infatti (prova):

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{2} & -\frac{5}{8}e^{-4t} + \frac{5}{8} + \frac{1}{2}t \end{bmatrix}$$

$t \rightarrow \infty$

NON è limitata

$e^{At}$  diverge per  $t \rightarrow \infty$  **Instabilità**

## Teorema 1

Un sistema LTI è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori della matrice  $A$  hanno parte reale negativa

$$\text{Re}(s_i) < 0, \forall i \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{Asintotica} \\ \text{stabilità} \end{array}$$

## Teorema 2

Un sistema LTI è **instabile** se la matrice  $A$  ha almeno un **autovalore con parte reale positiva** oppure se ha tutti gli autovalori con parte reale negativa o nulla e questi ultimi sono **multipli e con molteplicità geometrica inferiore alla loro molteplicità algebrica**.

## Teorema 3

Un sistema LTI è **stabile** se la matrice  $A$  ha tutti gli autovalori con parte reale negativa o nulla e questi ultimi hanno **molteplicità geometrica uguale alla loro molteplicità algebrica**.

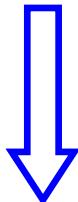
## Schema riassuntivo per autovalori con parte reale nulla

$$\begin{aligned} \text{Re}(s_i) &\leq 0, \forall i \\ \exists i : \text{Re}(s_i) &= 0 \end{aligned}$$



approfondimento

non asintoticamente stabile  
(ma stabile o instabile?)



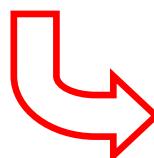
- \* singolo autovalore con  $\text{Re}(s_i) = 0$   
(o una sola coppia di  
autovalori immaginari)



semplicemente  
stabile

semplicemente stabile  
(se molt. geometrica **uguale**  
alla algebrica)

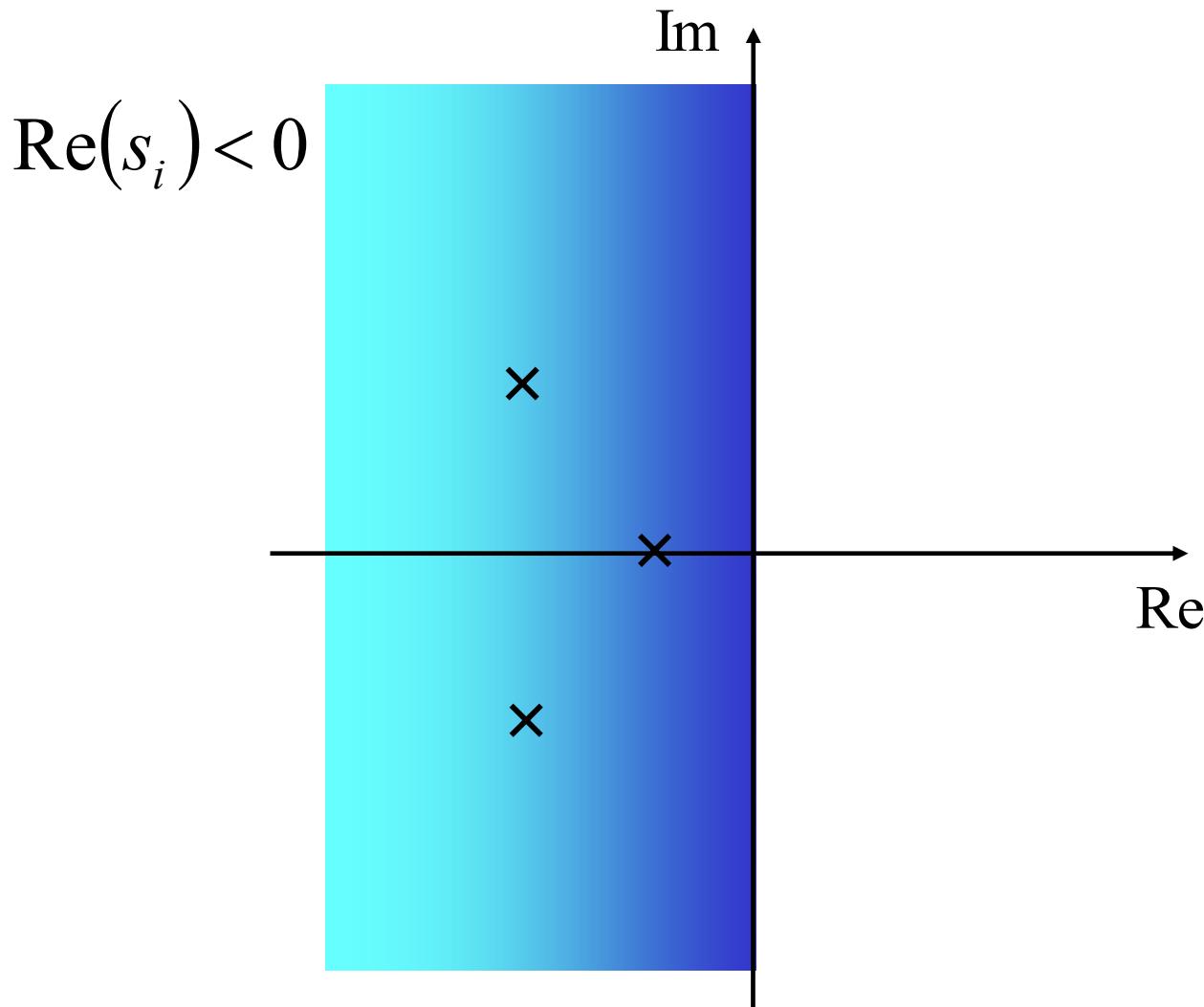
- \* più autovalori con  $\text{Re}(s_i) = 0$



instabile

(se molt. geometrica **inferiore**  
alla algebrica)

### 3. Regione di asintotica stabilità



## 4. Criteri di stabilità basati sulla matrice $A$

- ★ Per discutere la stabilità non serve calcolare esplicitamente gli autovalori della matrice  $A$ . E' sufficiente conoscere il segno della loro parte reale.
- ★ Esistono criteri che consentono di giudicare la stabilità senza calcolare esplicitamente gli autovalori. Essi consentono di determinare il segno della parte reale degli autovalori per ispezione della struttura della matrice  $A$ .

## Criterio 1

Se  $A$  è triangolare     $A = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$      $A = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c} \text{asintotica} \\ \text{stabilità} \end{array} \iff \text{Re}(s_i) < 0, \forall i \iff a_{ii} < 0, \forall i \quad (\text{gli elementi sulla diagonale sono negativi})$$

Infatti in questo caso gli autovalori sono gli elementi sulla diagonale  $s_i = a_{ii}$

## Criterio 2

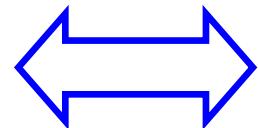
La traccia di una matrice è la somma degli elementi sulla diagonale principale.

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

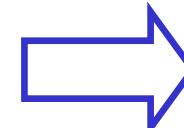
La traccia di una matrice è uguale alla somma dei suoi autovalori

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n \text{Re}(s_i)$$

asintotica  
stabilità



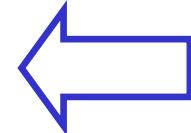
$$\text{Re}(s_i) < 0, \forall i$$



$$\text{tr}A < 0$$

(Condizione solo necessaria)

instabilità



$$\exists i : \text{Re}(s_i) > 0$$



$$\text{tr}A > 0$$

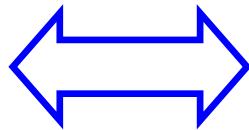
(Condizione sufficiente)

## Criterio 3

Il determinante di una matrice è il prodotto degli autovalori.

$$\det A = \prod_{i=1}^n s_i$$

asintotica  
stabilità



$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad & \det A \neq 0 \\ & (-1)^n \det A > 0 \end{aligned}$$

(Condizione solo necessaria)

## 5. Criteri di stabilità basati sul polinomio caratteristico

Sono criteri basati sulla possibilità di conoscere il segno della parte reale degli autovalori solo ispezionando il polinomio caratteristico (senza calcolarli direttamente)

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1} s + \varphi_n$$

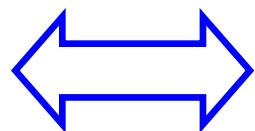
The diagram illustrates the relationship between the terms of the characteristic polynomial and the real part of a root. Four red arrows point from the terms  $\varphi_0 s^n$ ,  $\varphi_1 s^{n-1}$ ,  $\varphi_{n-1} s$ , and  $\varphi_n$  to the expression  $\text{Re}(s_i)$ . A question mark is placed below  $\text{Re}(s_i)$ , indicating that the sign of this real part can be determined by examining the signs of the coefficients  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ .

## Criterio 4

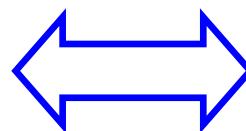
Solo per  $n=2$

**Condizione Necessaria & Sufficiente** per l'asintotica stabilità di un sistema del secondo ordine è che il suo polinomio caratteristico abbia coefficienti non nulli e concordi in segno

asintotica  
stabilità



$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \quad i = 1, 2$$



$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$$

diversi da zero e concordi in segno

Infatti  $\varphi(s) = \varphi_0 s^2 + \varphi_1 s + \varphi_2 = \varphi_0 (s - s_1)(s - s_2)$

$$\begin{cases} s_1 s_2 = \varphi_2 / \varphi_0 \\ -(s_1 + s_2) = \varphi_1 / \varphi_0 \end{cases}$$

## Esempio

$\varphi(s) = s^2 + 3s + 1$  è il polinomio caratteristico della matrice  $A$   
 $n=2$  di un sistema **asintoticamente stabile**

$\varphi(s) = s^2 - 3s + 1$  è il polinomio caratteristico della matrice  $A$   
 $n=2$  di un sistema **non as. stabile**

## Criterio 5

Per  $n \geq 3$  qualsiasi

**Condizione Necessaria** per l'asintotica stabilità di un sistema è che il suo polinomio caratteristico abbia coefficienti non nulli e concordi in segno

asintotica  
stabilità  $\iff$   $\text{Re}(s_i) < 0, i = 1, \dots, n \implies \varphi_i$  diversi da zero e  
(Condizione solo concordi in segno  
necessaria)

Quindi:

$\varphi_i$  nulli o discordi in segno  $\implies \exists i^*: \text{Re}(s_{i^*}) \geq 0$

## Esempio

$\varphi(s) = s^3 + 2s^2 - 3s + 1$  è il polinomio caratteristico della matrice  $A$   
 $n=3$  di un sistema **non as. stabile**

$\varphi(s) = s^3 + 4s^2 + 1$  è il polinomio caratteristico della matrice  $A$   
 $n=3$  di un sistema **non as. stabile**

$\varphi(s) = s^3 + 4s^2 + 4s + 1$  è il polinomio caratteristico della matrice  $A$   
 $n=3$  di un sistema di cui nulla si può dire a priori  
riguardo la stabilità

## Criterio 6 (Criterio di Routh)

$$\varphi(s) = \varphi_0 s^n + \varphi_1 s^{n-1} + \varphi_2 s^{n-2} + \varphi_3 s^{n-3} \dots + \varphi_n$$

Tabella di Routh

|   |             |             |             |          |          |                        |
|---|-------------|-------------|-------------|----------|----------|------------------------|
| 1<br>2<br>⋮<br>$i-2$<br>$i-1$<br>$i$<br>⋮ | $\varphi_0$ | $\varphi_2$ | $\varphi_4$ | ...      | 0        | ← Coefficienti pari    |
|   | $\varphi_1$ | $\varphi_3$ | $\varphi_5$ | ...      | 0        | ← Coefficienti dispari |
|   | $\vdots$    | $\vdots$    | $\vdots$    | $\ddots$ | $\vdots$ |                        |
|   | $h_1$       | $h_2$       | $h_3$       | ...      | 0        |                        |
|   | $k_1$       | $k_2$       | $k_3$       | ...      | 0        |                        |
|   | $l_1$       | $l_2$       | $l_3$       | ...      | 0        |                        |
|   | $\vdots$    | $\vdots$    | $\vdots$    | $\ddots$ | $\vdots$ |                        |

Regola di calcolo

$$l_j = -\frac{1}{k_1} \det \begin{bmatrix} h_1 & h_{j+1} \\ k_1 & k_{j+1} \end{bmatrix}$$

## Criterio di Routh

**asintotica  
stabilità**

$$\leftrightarrow \text{Re}(s_i) < 0, \forall i$$

Elementi della prima  
colonna della tabella di  
Routh diversi da zero e  
concordi in segno

# Esempio

$$\varphi(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + k$$

Per quali valori di  $k$  è asintoticamente stabile?

Per il criterio 5 C.N. è  $k > 0$

Tabella di Routh

|                    |     |     |
|--------------------|-----|-----|
| 1                  | 11  | $k$ |
| 6                  | 6   | 0   |
| 10                 | $k$ | 0   |
| $6 - \frac{3}{5}k$ | 0   | 0   |
| $k$                | 0   | 0   |

$\xrightarrow{\hspace{2cm}}$   $\begin{cases} 6 - \frac{3}{5}k > 0 \\ k > 0 \end{cases}$   $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$   $0 < k < 10$

# 6. Matlab

**eig** Eigenvalues and eigenvectors.

**E = eig(A)** produces a column vector E containing the eigenvalues of a square matrix A.

**[V,D] = eig(A)** produces a diagonal matrix D of eigenvalues and a full matrix V whose columns are the corresponding eigenvectors so that  $A*V = V*D$ .

Con questo comando si calcolano autovalori ed autovettori di matrici quadrate.

## Esempio

```
>> A=[-1 3; -2 -7];  
>> [V, D] = eig(A)
```

V =

**autovettori**

|         |         |
|---------|---------|
| 0.9211  | -0.5354 |
| -0.3893 | 0.8446  |

D =

**autovalori**

|         |   |
|---------|---|
| -2.2679 | 0 |
| -5.7321 | 0 |

Sistema asintoticamente stabile

Funziona anche per sistemi con autovalori complessi coniugati

```
>> A=[1 -1; 1 1];  
>> [V,D] = eig(A)
```

V =

autovettori

$$\begin{bmatrix} 0.7071 + 0.0000i \\ 0.0000 - 0.7071i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.7071 + 0.0000i \\ 0.0000 + 0.7071i \end{bmatrix}$$

D =

autovalori

$$\begin{bmatrix} 1.0000 + 1.0000i \\ 0.0000 + 0.0000i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.0000 + 0.0000i \\ 1.0000 - 1.0000i \end{bmatrix}$$

Sistema instabile

# Lezione 7.

## Stabilità dell'equilibrio nei sistemi non lineari

# 1. Stabilità dell'equilibrio di un sistema non lineare

Si consideri un sistema non lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Si supponga che questo sistema abbia uno stato di equilibrio  $\bar{x}$  in corrispondenza di un ingresso costante  $\bar{u}$  cioè:

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$$

Cosa si può dire della stabilità di questo equilibrio?

**N.B.** Per i sistemi non lineari è sensato discutere la stabilità dell'equilibrio (non ha senso parlare di stabilità del sistema).

Si consideri il sistema lineare tangente relativo all'equilibrio di cui si vuole studiare la stabilità

$$S^\delta : \begin{cases} \dot{\delta x}(t) \cong f_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + f_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \\ \dot{\delta y}(t) \cong g_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + g_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t) \end{cases}$$

In particolare, si considerino gli autovalori  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  della sua matrice di stato  $f_x(\bar{x}, \bar{u})$

## Teorema 1 (non lineare)

Un equilibrio di un sistema non lineare è asintoticamente stabile se tutti gli autovalori della matrice di stato del relativo sistema lineare tangente hanno parte reale negativa.

$$\operatorname{Re}(s_i) < 0, \forall i$$



L'equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u})$  è asintoticamente stabile

## Teorema 2 (non lineare)

Un equilibrio di un sistema non lineare è instabile se almeno un autovalore della matrice di stato del relativo sistema lineare tangente ha parte reale positiva.

$$\exists i^*: \operatorname{Re}(s_{i^*}) > 0$$



L'equilibrio  $(\bar{x}, \bar{u})$  è instabile

- ✿ I Teoremi 1 & 2 si riferiscono ad un **equilibrio!!**  
Non al sistema!! (non lineare!!)
- ✿ Si osservi che la condizione del Teorema 1  
è solo sufficiente.

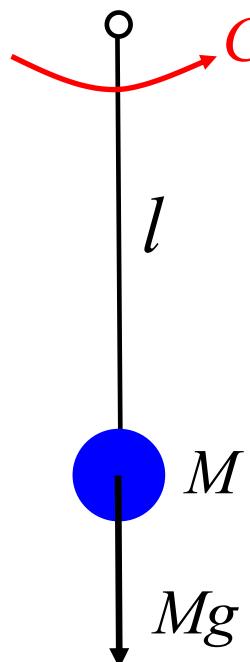
## Nota Bene (sistema non lineare)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Re}(s_i) < 0, \forall i \neq i^* \\ \exists! i^* : \text{Re}(s_{i^*}) = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\hspace{1cm}} (\bar{x}, \bar{u}) \ ?$$

Se  $f_x(\bar{x}, \bar{u})$  ha anche solo un autovalore a parte reale nulla, **niente si può dire della stabilità dell'equilibrio.**  
Per giudicare la stabilità occorrono strumenti di analisi più potenti (e complicati).

# Esempio

Si consideri l'equilibrio A  $(\bar{x}, \bar{u}) = \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \right)$



$C(t) = u(t) = 0$

La matrice di stato del sistema lineare tangente è

$$A_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{h}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

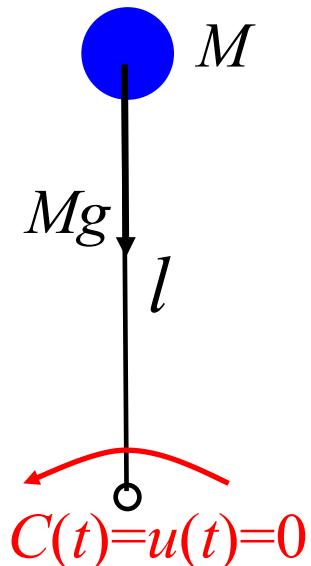
Il suo polinomio caratteristico è

$$\varphi(s) = s^2 + \frac{h}{Ml^2}s + \frac{g}{l}$$

$\varphi_{i=0,1,2} > 0 \iff \text{Re}(s_i)_{i=1,2} < 0 \implies$  Equilibrio as. stabile

Criterio 4      Teorema 1  
(non lineare)

Si consideri l'equilibrio B  $(\bar{x}, \bar{u}) = \left( \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \right)$



La matrice di stato del sistema lineare tangente è

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{h}{Ml^2} \end{bmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico è

$$\varphi(s) = s^2 + \frac{h}{Ml^2}s - \frac{g}{l}$$

$\varphi_i$  discordi e non nulli  $\xrightarrow{\text{Criterio 4}}$   $\exists i^*: \operatorname{Re}(s_{i^*}) > 0 \xrightarrow{\text{Teorema 2}} \text{Equilibrio instabile}$

Nulla si può dire del terzo equilibrio.

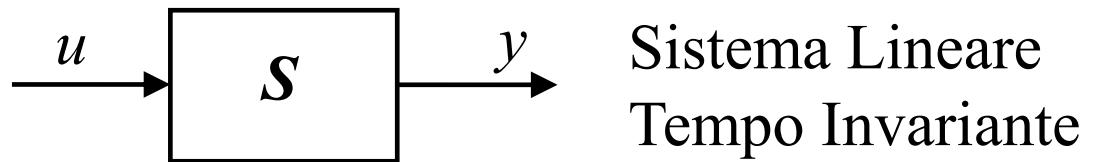
# Lezione 8.

# Trasformazione di Laplace

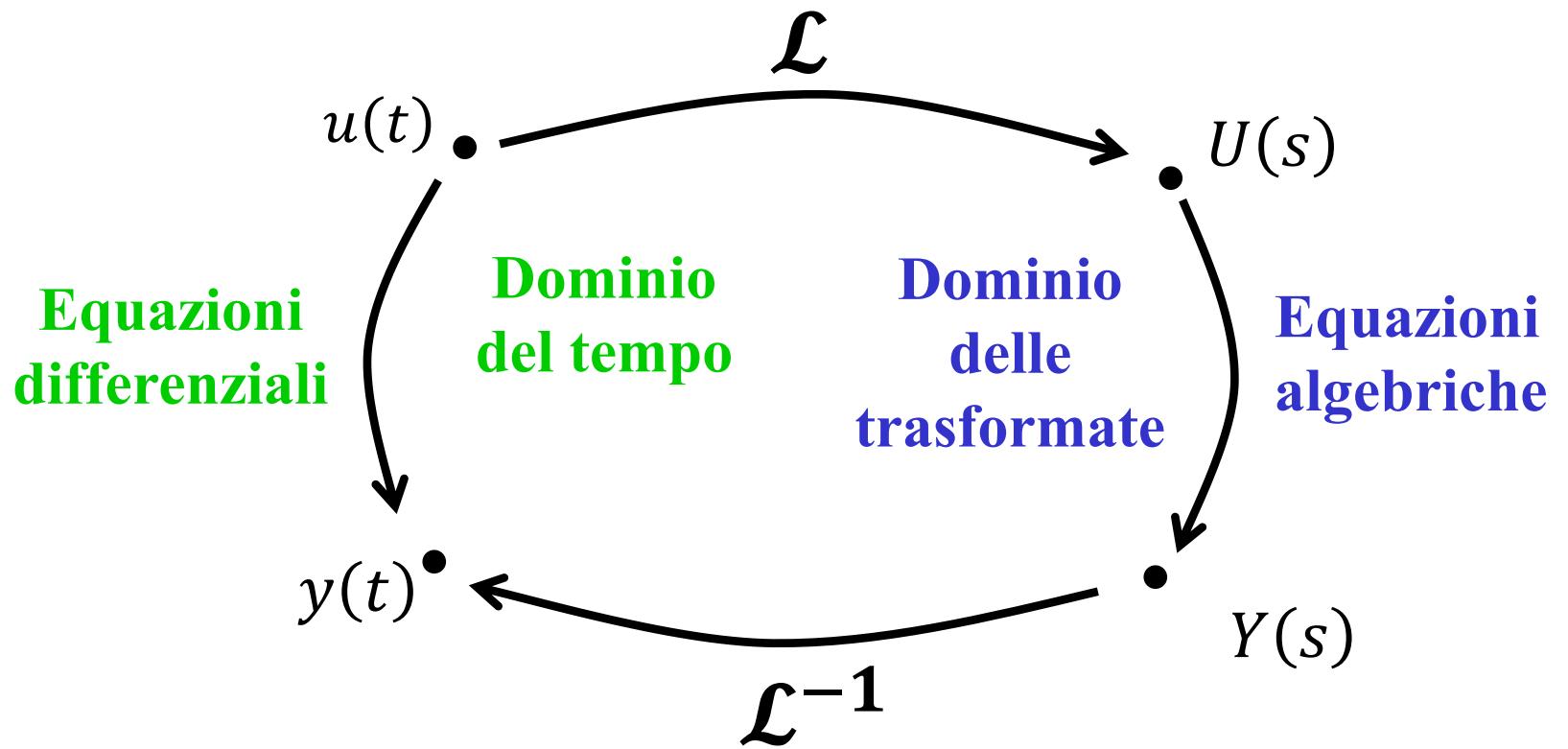
# Schema della lezione

1. Introduzione
2. Definizione di trasformazione di Laplace
3. Legame tra scalino ed impulso
4. Proprietà della trasformazione di Laplace
5. Poli e zeri di una trasformata

# 1. Introduzione



Sistema Lineare  
Tempo Invariante



## 2. Definizione di trasformazione di Laplace

$f(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Segnale a tempo continuo

$$\downarrow \mathcal{L}$$

$F(s): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $s \in \mathbb{C}$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

## Osservazioni

- ★  $\mathcal{L}[f(t)]$  è una funzione reale di variabile complessa
- ★  $\mathcal{L}[f(t)]$  non dipende dai valori assunti da  $f(t)$  con  $t < 0$

# Esempio

## Trasformata dello scalino

Lo scalino (di ampiezza unitaria) è la seguente funzione del tempo:

$$\text{sca}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

La trasformata di Laplace dello scalino è:

$$\mathcal{L}[\text{sca}(t)] = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

# Esempio

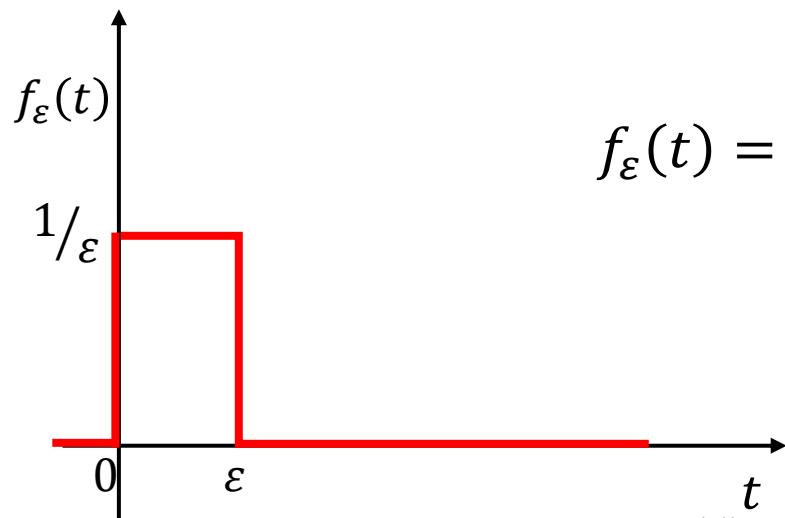
## Trasformata dell'impulso

L'impulso è la funzione del tempo definita dalle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \text{imp}(t) = 0, t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \text{imp}(t) dt = 1 \end{cases} \quad ?$$

Cosa significano (insieme) queste due relazioni?

E' possibile pensare ad una funzione  $f_\varepsilon(t)$  definita come segue:



$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0, t > \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{per } 0 \leq t \leq \varepsilon \end{cases}$$

e dire che:

$$\text{imp}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t)$$

Quindi calcolare la trasformata di Laplace dell'impulso:

$$\text{imp}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t) \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \mathcal{L}[\text{imp}(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}[f_\varepsilon(t)]$$

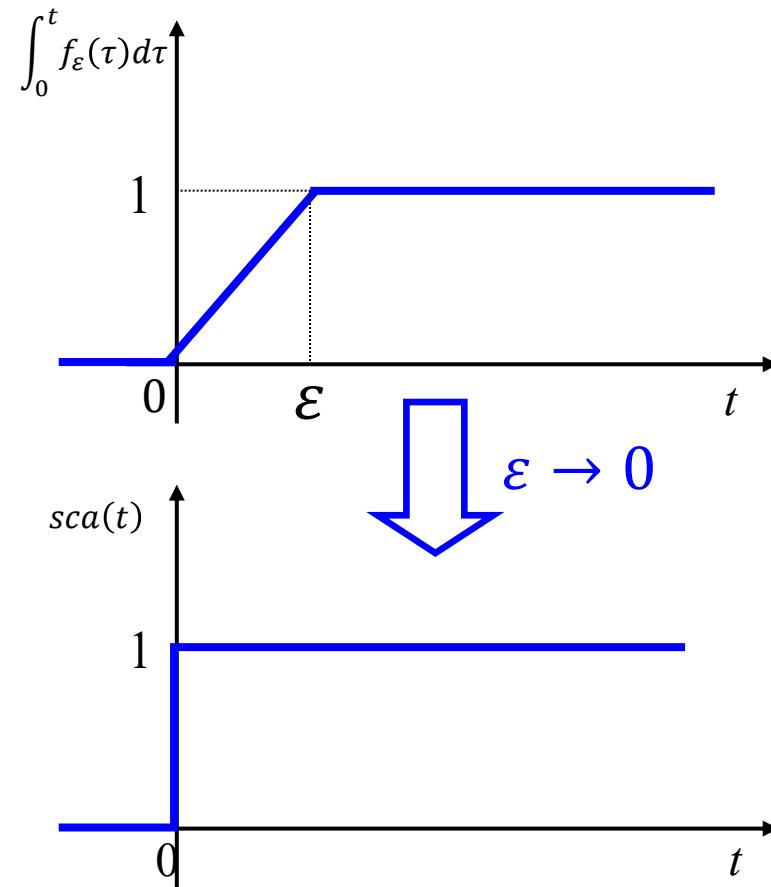
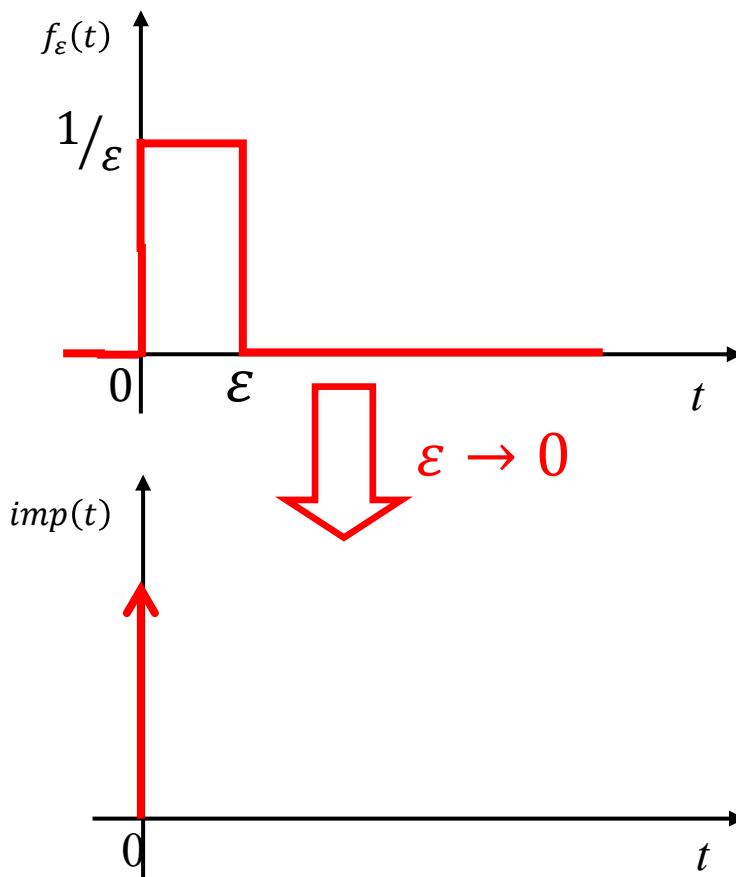
$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_\varepsilon(t)] &= \int_0^\infty f_\varepsilon(t) e^{-st} dt = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt = \frac{1}{\varepsilon} \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^\varepsilon = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon s} [e^{-\varepsilon s} - 1] = \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\text{imp}(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}[f_\varepsilon(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s e^{-\varepsilon s}}{s} = 1$$

### 3. Legame tra scalino e impulso

$$sca(t) = \int_0^t imp(\tau) d\tau$$

$$imp(t) = \frac{d}{dt} sca(t)$$



# 4. Trasformazione di Laplace: proprietà

## 4.1 Linearità

$$F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] \quad F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$$

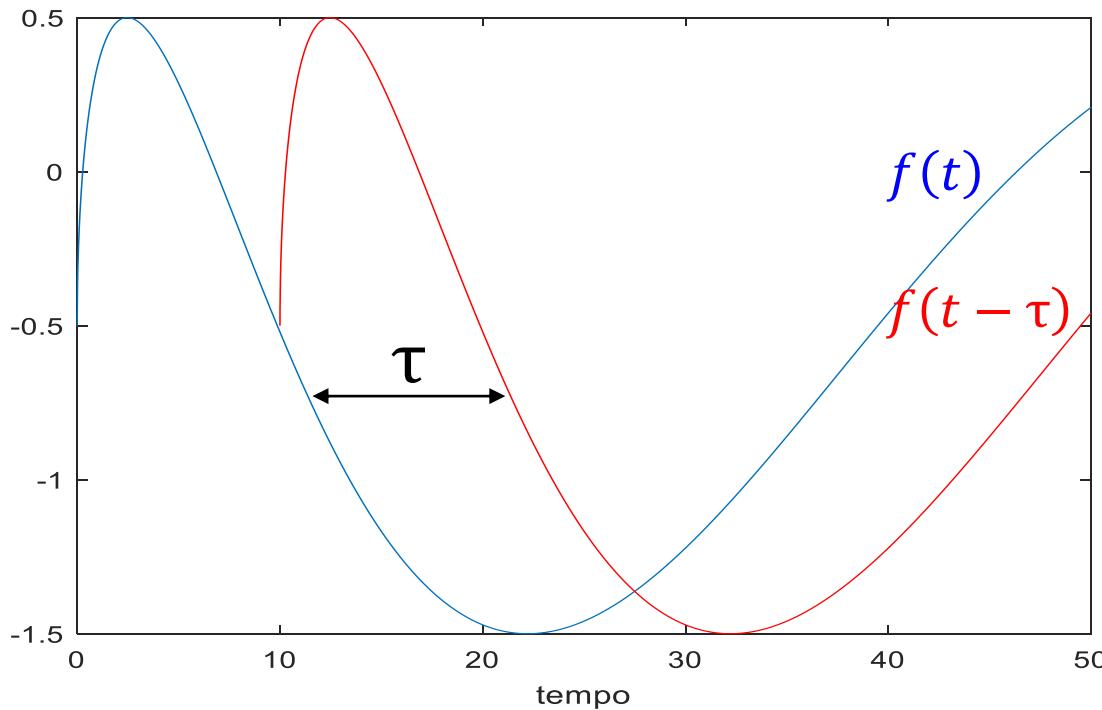
$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

## 4.2 Traslazione nel dominio del tempo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad f(t) = 0, t < 0$$

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s)$$

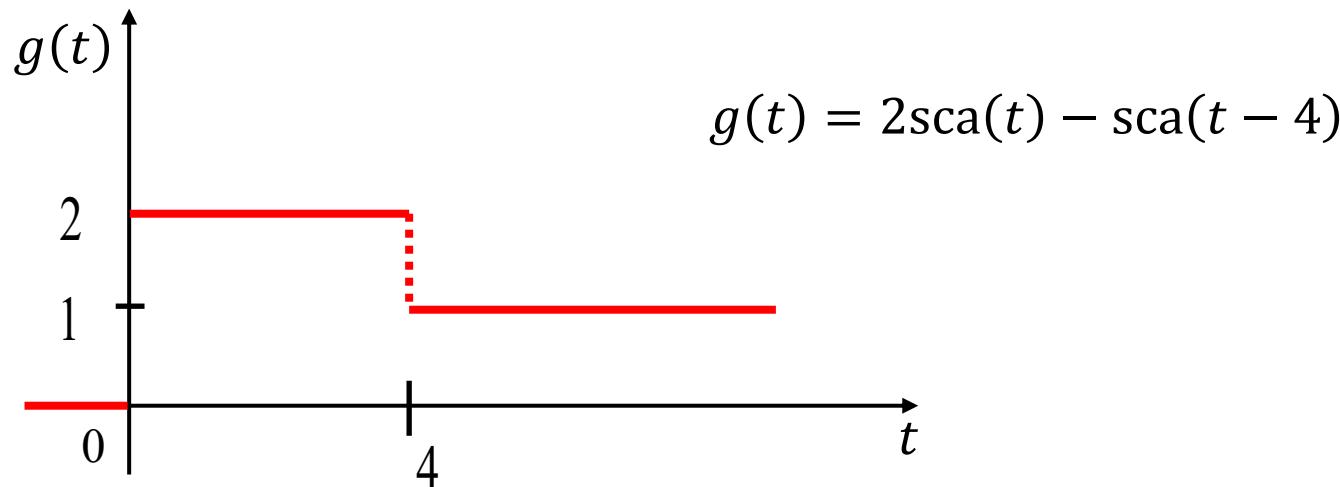
$$\tau > 0$$



*Potremmo parlare di  
trasformata del “ritardo”*

# Esempio

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s)$$



$$G(s) = 2\mathcal{L}[\text{sca}(t)] - \mathcal{L}[\text{sca}(t - 4)] = 2\frac{1}{s} - e^{-4s}\frac{1}{s} = \frac{2}{s} - \frac{e^{-4s}}{s}$$

Ricorda

$$\mathcal{L}[\text{sca}(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s)$$

## 4.3 Traslazione nel dominio delle trasformate

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L} [e^{\lambda t} f(t)] = F(s - \lambda)$$

## Esempio

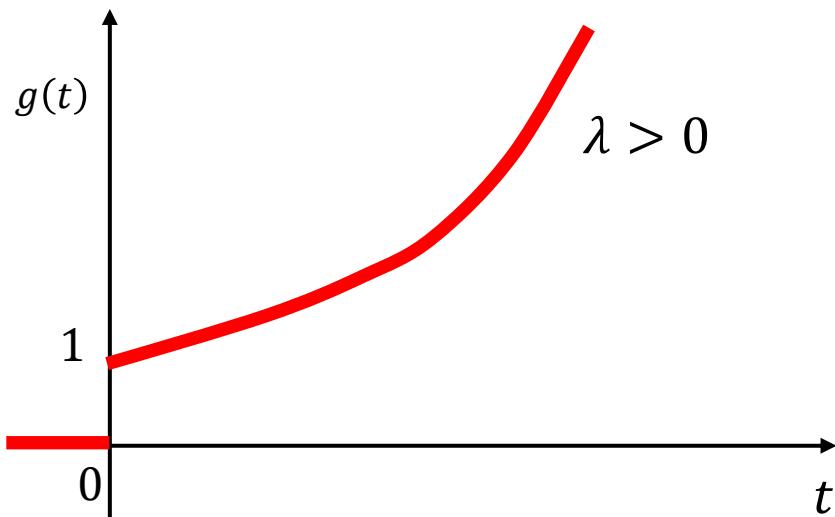
$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} f(t)] = F(s - \lambda)$$

$$f(t) = \text{sca}(t)$$

Ricorda

$$\mathcal{L}[\text{sca}(t)] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} \text{sca}(t)] = \frac{1}{s - \lambda}$$



Dal momento che, per la definizione di trasformata di Laplace,

$\mathcal{L}[e^{\lambda t}] = \mathcal{L}[e^{\lambda t} \text{sca}(t)]$ ,  
possiamo dire che scrivere

$$g(t) = e^{\lambda t} \text{sca}(t)$$

è equivalente a scrivere

$$g(t) = e^{\lambda t}, t \geq 0$$

Potremmo parlare di  
trasformata del “modo”

# Esempio

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \mathcal{L}[\sin(\omega t) \operatorname{sca}(t)] =$$

$$= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2j}\mathcal{L}[e^{j\omega t}] - \frac{1}{2j}\mathcal{L}[e^{-j\omega t}] =$$

$$= \frac{1}{2j} \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{2j} \frac{1}{s+j\omega} = \frac{2j\omega}{2j(s^2 + \omega^2)} =$$

$$= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

## 4.4 Derivazione nel dominio delle trasformate

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

## Esempio

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$$

$$f(t) = e^{\lambda t}$$

Ricorda

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{\lambda t}] = \frac{1}{s - \lambda}$$

$$\mathcal{L}[te^{\lambda t}] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[e^{\lambda t}] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s - \lambda} = \frac{1}{(s - \lambda)^2}$$

## 4.5 Derivazione nel dominio del tempo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$$

*L'operatore di derivazione è trasformato  
nell'operatore di moltiplicazione per s*

# Esempio

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] =$$

$$= \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \sin \omega t\right] = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} \sin \omega t\right] = \frac{1}{\omega} (s\mathcal{L}[\sin \omega t] - \sin(0)) =$$

$$= \frac{1}{\omega} \left[ s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - 0 \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\text{Essendo } \mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

## Estensione a derivate di ordine superiore

- Ordine 2

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] &= s\mathcal{L}[\dot{f}(t)] - \dot{f}(0) = s(sF(s) - f(0)) - \dot{f}(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)\end{aligned}$$

- Ordine n

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0}$$

## 4.6 Integrazione nel dominio del tempo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} F(s)$$

*Se la derivazione è trasformata in moltiplicazione per  $s$ , l'integrazione deve per forza essere trasformata in divisione per  $s$ !*

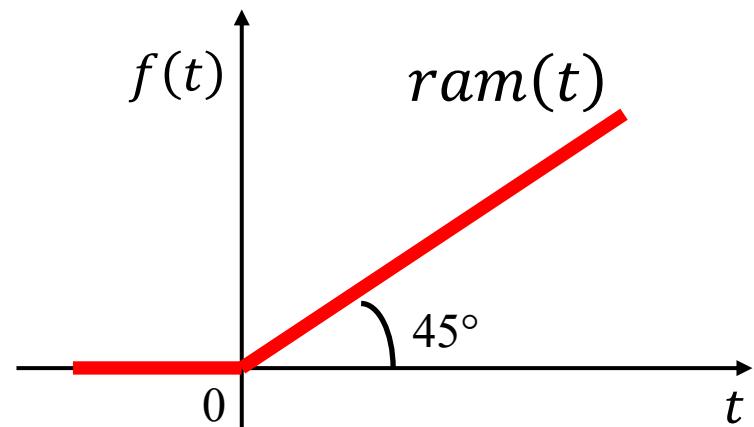
# Esempio

$$f(t) = t \text{sca}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \text{ram}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ t & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

Si ha che

$$\text{ram}(t) = \int_0^t \text{sca}(\tau) d\tau$$

$$\mathcal{L}[\text{ram}(t)] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[\text{sca}(t)] = \frac{1}{s^2}$$



## 5. Poli e zeri di una trasformata

**Poli:** valori di  $s$  per cui  $F(s) = \infty$

**Zeri:** valori di  $s$  per cui  $F(s) = 0$

### Caso notevole

Se  $F(s)$  razionale, cioè  $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  con  $N(s)$  e  $D(s)$  polinomi in  $s$

**Poli:** radici di  $D(s) = 0$

**Zeri:** radici di  $N(s) = 0$

## Trasformata di un vettore

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[\mathbf{x}(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[x_1(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[x_n(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}$$

### Proprietà

$$1. \quad \mathcal{L}[A\mathbf{x}(t)] = A\mathcal{L}[\mathbf{x}(t)] = A\mathbf{X}(s)$$

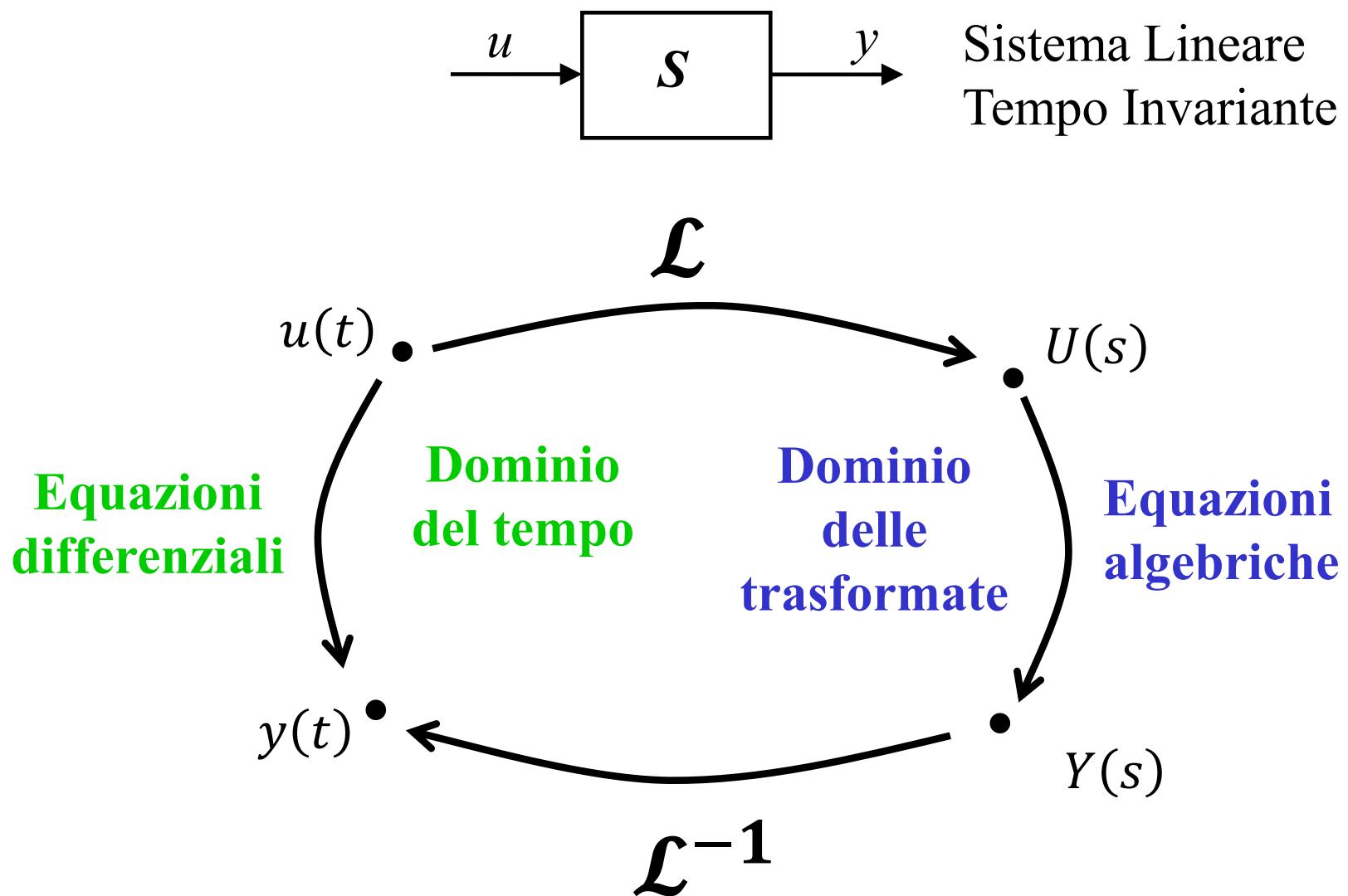
$$2. \quad \mathcal{L}[\dot{\mathbf{x}}(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[\dot{x}_1(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[\dot{x}_n(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sX_1(s) - x_1(0) \\ \vdots \\ sX_n(s) - x_n(0) \end{bmatrix} = s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0)$$

# Lezione 9. Calcolo dell'antitrasformata di Laplace

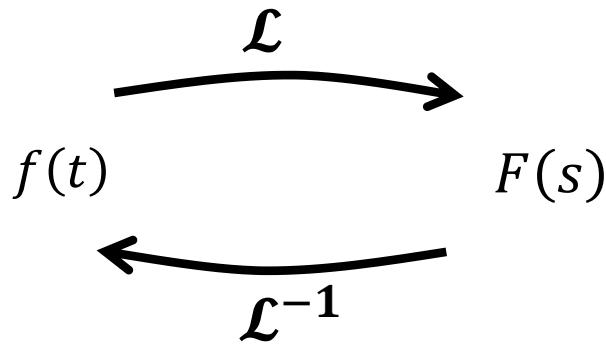
# Schema della lezione

1. Introduzione
2. Antitrasformazione di Laplace
3. Strumenti per l'antitrasformazione
4. Teorema del valore iniziale
5. Teorema del valore finale
6. Antitrasformazione mediante sviluppo di Heaviside

# 1. Introduzione

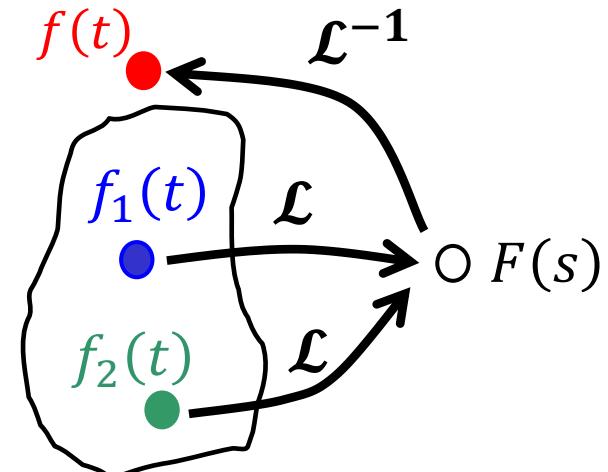
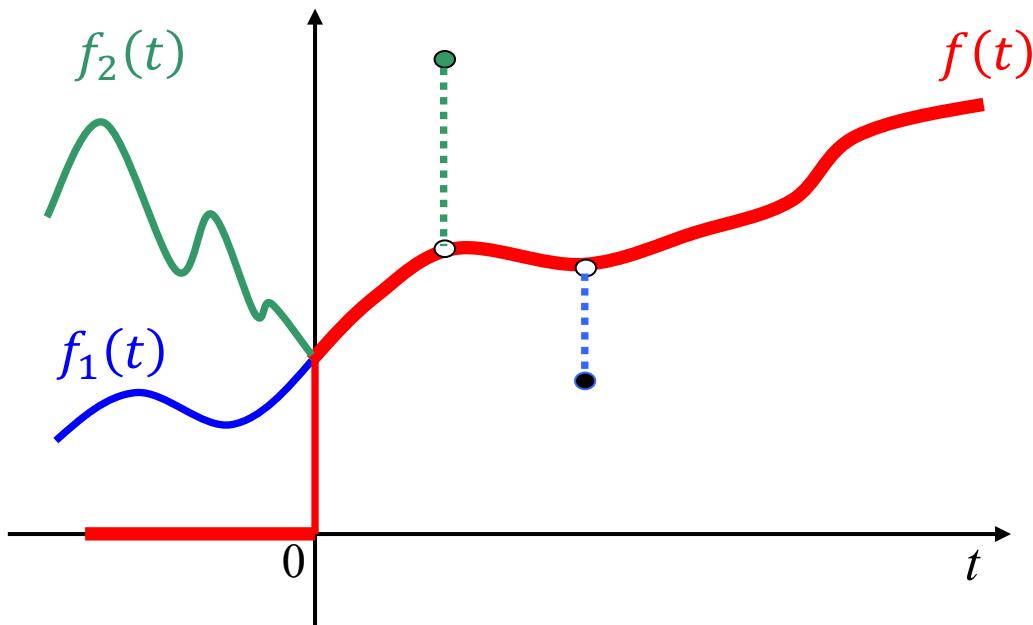


## 2. Antitrasformazione di Laplace



Si ha corrispondenza biunivoca  
considerando uguali le funzioni  
che lo sono:

- per  $t \geq 0$
- a meno di un insieme di misura nulla (singoli punti)



### 3. Strumenti per l'antitrasformazione di Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

- ✓ ~~Formula esplicita~~
- ✓ Teorema del valore iniziale   $f(0)$
- ✓ Teorema del valore finale   $f(\infty)$
- ✓ Sviluppo di Heaviside  
(solo per  $F(s)$  razionale)

## 4. Teorema del valore iniziale

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) \quad \text{se esiste finito}$$

# Esempio

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Applichiamo il teorema del valore iniziale:  $f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} = 1$

E se volessimo conoscere anche  $\dot{f}(0)$  ?

$$\text{Sappiamo che } \mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0) = s \frac{s}{s^2 + \omega^2} - 1 = \frac{-\omega^2}{s^2 + \omega^2}$$

$$\dot{f}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}[\dot{f}(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{-\omega^2}{s^2 + \omega^2} = 0$$

Questi risultati sono perfettamente coerenti con il fatto (noto) che  $F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \mathcal{L}[\cos(\omega t)]$

## 5. Teorema del valore finale

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

Ipotesi       $F(s)$  ha solo:

- poli con parte reale negativa
- poli nulli, cioè in  $s = 0$

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

se esiste finito

# Esempio

➤  $F(s) = \mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Poli in  $\pm j\omega$       ➤ il Teorema del valore finale  
non è applicabile !

➤  $F(s) = \mathcal{L}[\text{sca}(t)] = \frac{1}{s}$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} = 1$$

## 6. Antitrasformazione mediante sviluppo di Heaviside

Applicabile solo per  $F(s)$  razionali

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \quad m \leq n$$

L'idea è scomporre  $F(s)$  nella somma di elementi per i quali è nota l'antitrasformata.

$$\begin{aligned} F(s) &= (F_1(s)) + (F_2(s)) + \cdots \\ &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f_1(t) + f_2(t) + \cdots = f(t) \end{aligned}$$

Si considerano solo i seguenti casi:

- ★  $F(s)$  con poli reali distinti
- ★  $F(s)$  con poli reali multipli
- ★  $F(s)$  con poli complessi coniugati
- ★  $F(s)$  con grado del denominatore  
uguale al grado del numeratore ( $m = n$ )

## Poli reali distinti

$$D(s) = a_0(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)$$

poli in  $-p_i$  con  $p_i \neq p_j, i \neq j$

$$F(s) = \frac{\alpha_1}{s + p_1} + \frac{\alpha_2}{s + p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s + p_n}$$

$\mathcal{L}^{-1}$        $\mathcal{L}^{-1}$        $\mathcal{L}^{-1}$

$\alpha_1 e^{-p_1 t}$        $\alpha_2 e^{-p_2 t}$        $\alpha_n e^{-p_n t}$

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-p_i t}, t \geq 0$$

# Esempio

Calcolare l'antitrasformata di  $F(s) = \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)}$

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+6} + \frac{\alpha_3}{s+1} =$$

$$= \frac{\alpha_1(s+6)(s+1) + \alpha_2 s(s+1) + \alpha_3 s(s+6)}{s(s+6)(s+1)} =$$

$$= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)s^2 + (7\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3)s + 6\alpha_1}{s(s+6)(s+1)}$$

Devono essere  
uguali



$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 7\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3 = 1 \\ 6\alpha_1 = 2 \end{cases}$$

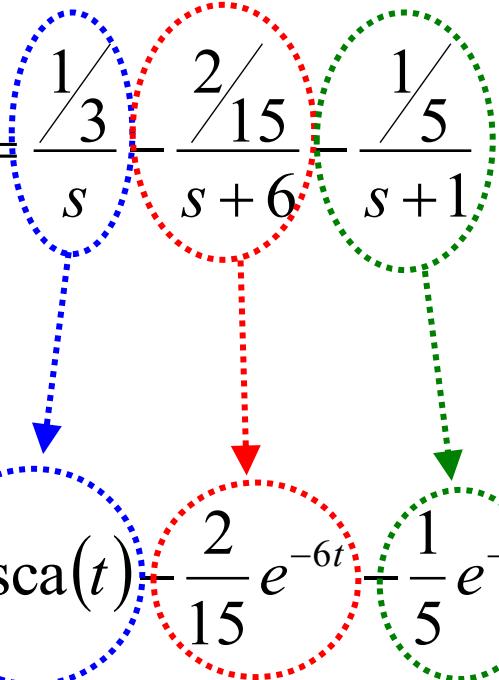
Bisogna risolvere un sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 7\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3 = 1 \\ 6\alpha_1 = 2 \end{cases} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \begin{cases} \frac{1}{3} + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \frac{7}{3} + \alpha_2 + 6\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 = \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\hspace{1cm}}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_3 - \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} - \alpha_3 - \frac{1}{3} + 6\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 = \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \begin{cases} \alpha_2 = -\alpha_3 - \frac{1}{3} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{5} \\ \alpha_1 = \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{3} \\ \alpha_2 = -\frac{2}{15} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{s} - \frac{\frac{2}{15}}{s+6} - \frac{\frac{1}{5}}{s+1}$$

E' quindi possibile calcolare l'antitrasformata

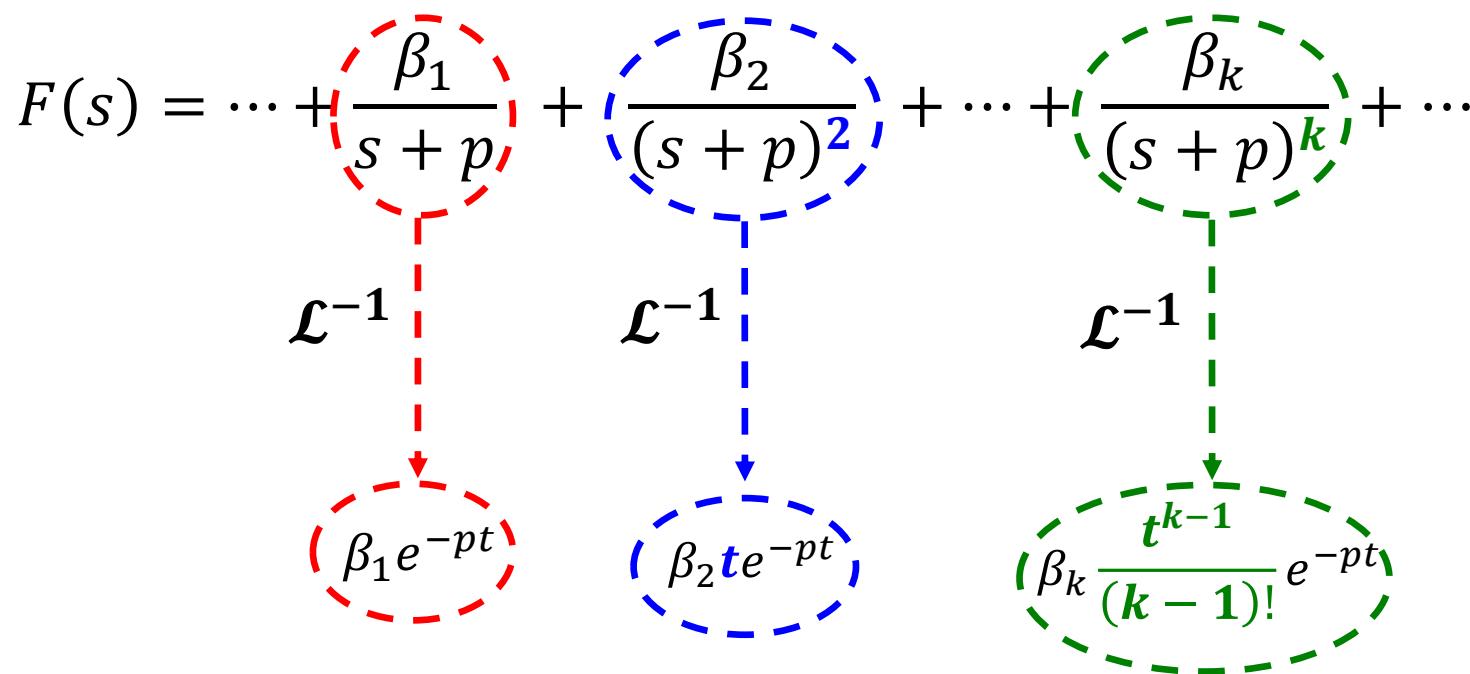
$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+6)(s+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{s} - \frac{\frac{2}{15}}{s+6} - \frac{\frac{1}{5}}{s+1}$$

$$f(t) = \frac{1}{3} \text{sca}(t) - \frac{2}{15} e^{-6t} - \frac{1}{5} e^{-t} \quad \text{per } t \geq 0$$

Si può scrivere anche così:

$$f(t) = \frac{1}{3} - \frac{2}{15} e^{-6t} - \frac{1}{5} e^{-t} \quad \text{per } t \geq 0$$

## Poli reali multipli

$$D(s) = \cdots (s + p)^k \cdots \quad k > 1$$



# Esempio

Calcolare l'antitrasformata di

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)}$$

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)} = \frac{\alpha_{11}}{s} + \frac{\alpha_{12}}{s^2} + \frac{\alpha_2}{s+1} =$$

$$= \frac{\alpha_{11}s(s+1) + \alpha_{12}(s+1) + \alpha_2 s^2}{s^2(s+1)} =$$

$$= \frac{(\alpha_{11} + \alpha_2)s^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{12})s + \alpha_{12}}{s^2(s+1)}$$

Devono essere  
uguali

$$\begin{cases} \alpha_{11} = -1 \\ \alpha_{12} = 2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_{11} + \alpha_{12} = 1 \\ \alpha_{12} = 2 \end{cases}$$

E' quindi possibile calcolare l'antitrasformata

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2(s+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$
$$f(t) = -\text{sca}(t) + 2\text{ram}(t) + e^{-t} \quad \text{per } t \geq 0$$

Si può scrivere anche così:

$$f(t) = -1 + 2t + e^{-t} \quad \text{per } t \geq 0$$

## Poli complessi coniugati

$$D(s) = \cdots \underbrace{(s - \sigma - j\omega)(s - \sigma + j\omega)}_{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \cdots$$

poli in  
 $\sigma \pm j\omega$

$$F(s) = \cdots + \frac{\beta s + \gamma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \cdots$$

$$\frac{\beta s + \gamma - \beta\sigma + \beta\sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} = \beta \frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{\gamma + \beta\sigma}{\omega} \frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$$

$\mathcal{L}^{-1}$  

$e^{\sigma t} \cos \omega t$

$\mathcal{L}^{-1}$  

$e^{\sigma t} \sin \omega t$

$$F(s) = \dots + \frac{\beta s + \gamma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \dots$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$f(t) = \dots + \beta(e^{\sigma t} \cos \omega t) + \frac{\gamma + \beta\sigma}{\omega} (e^{\sigma t} \sin \omega t) + \dots, \quad t \geq 0$$

# Esempio

Calcolare l'antitrasformata di  $F(s) = \frac{3s - 4}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)}$

$$F(s) = \frac{3s - 4}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)} = \frac{\alpha}{s + 2} + \frac{\beta s + \gamma}{s^2 + 2s + 5} =$$

$$= \frac{\alpha(s^2 + 2s + 5) + (\beta s + \gamma)(s + 2)}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)} =$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)s^2 + (2\alpha + 2\beta + \gamma)s + (5\alpha + 2\gamma)}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)}$$

Devono essere uguali

$$\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta + \gamma = 3 \\ 5\alpha + 2\gamma = -4 \end{cases}$$

Si ha quindi la seguente scomposizione:

$$F(s) = -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{s^2+2s+5}$$
$$f(t) = -2e^{-2t} + \dots$$

Non ha un'antitrasformata immediata

E' però possibile riscrivere il denominatore del secondo termine in modo differente:

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{s^2+2s+5} = -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{s^2+2s+1+4} = \\ &= -\frac{2}{s+2} + \frac{2s+3}{(s+1)^2+4} \end{aligned}$$

Qual è l'antitrasformata ?

## Pro memoria

$$\frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \rightarrow e^{\sigma t} \sin(\omega t) \quad \text{per } t \geq 0$$

$$\frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \rightarrow e^{\sigma t} \cos(\omega t) \quad \text{per } t \geq 0$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{2s + 3}{(s + 1)^2 + 4} &= k_1 \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4} + k_2 \frac{2}{(s + 1)^2 + 4} \\ &= \frac{k_1 s + k_1 + 2k_2}{(s + 1)^2 + 4} \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\hspace{1cm}}$

$$\begin{cases} k_1 = 2 \\ k_1 + 2k_2 = 3 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\hspace{1cm}}$

$$\begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

E' quindi possibile calcolare l'antitrasformata

$$F(s) = -\frac{2}{s+2} + 2 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} + \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 4}$$
$$f(t) = -2e^{-2t} + 2e^{-t}\cos(2t) + \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t) \quad \text{per } t \geq 0$$

## Grado relativo nullo ( $m=n$ )

Se il numeratore  $N(s)$  e il denominatore  $D(s)$  hanno lo stesso grado, nella scomposizione di  $F(s)$  bisogna aggiungere un termine costante.

$$F(s) = \dots + \alpha_0$$

The diagram illustrates the inverse Laplace transform of a constant term. It consists of two equations:  $F(s) = \dots + \alpha_0$  at the top and  $f(t) = \dots + \alpha_0 \text{imp}(t)$  at the bottom. A red dashed circle encloses the term  $\alpha_0$  in both equations. A vertical dashed red arrow labeled  $\mathcal{L}^{-1}$  points downwards from the top equation to the bottom one, indicating the mapping from the complex plane to the time domain.

$$\mathcal{L}^{-1}$$
$$f(t) = \dots + \alpha_0 \text{imp}(t)$$

# Esempio

Calcolare l'antitrasformata di

$$F(s) = \frac{(s+2)^2}{s(s+1)}$$

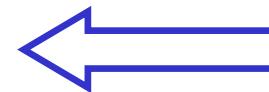
$$F(s) = \frac{(s+2)^2}{s(s+1)} = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \alpha_0 =$$

$$= \frac{\alpha_1(s+1) + \alpha_2 s + \alpha_0 s(s+1)}{s(s+1)} =$$

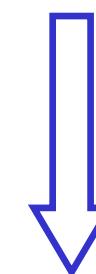
$$= \frac{\alpha_0 s^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_0)s + \alpha_1}{s(s+1)}$$

Devono essere  
uguali

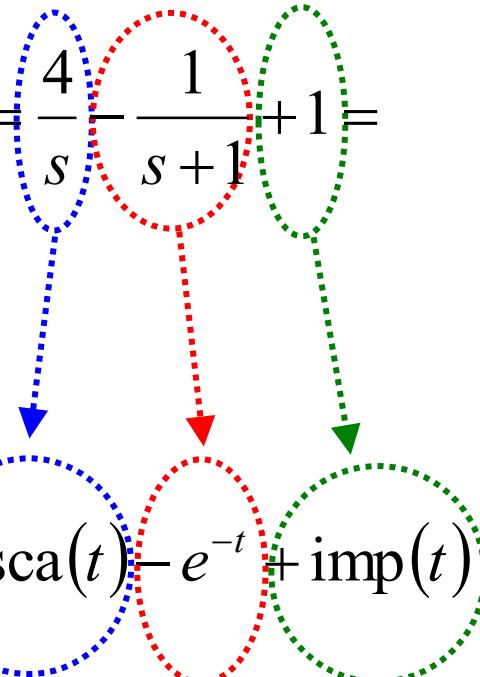
$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_0 = 4 \\ \alpha_1 = 4 \end{cases}$$



E' quindi possibile calcolare l'antitrasformata

$$F(s) = \frac{4}{s} - \frac{1}{s+1} + 1 =$$

$$f(t) = 4\text{sca}(t) - e^{-t} + \text{imp}(t) \quad \text{per } t \geq 0$$

Si può scrivere anche così:

$$f(t) = 4 - e^{-t} + \text{imp}(t) \quad \text{per } t \geq 0$$

# Esempio esplicativo

## (Trasformazione di Laplace per la risoluzione di equazioni differenziali)

Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$$

Passiamo nel dominio delle trasformate

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$$

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0)$$

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$$

Si ha quindi

$$sX(s) - x(0) = -X(s) + U(s)$$

da cui si ha

$$X(s) = \frac{1}{s+1}x(0) + \frac{1}{s+1}U(s)$$

Questa è la trasformata di Laplace della soluzione dell'equazione.

Assegnando  $u(t)$  e  $x(0)$  si otterrà la soluzione particolare corrispondente.

Per esempio con  $x(0) = 4$  ed  $u(t) = sca(t)$  si ha

$$X(s) = \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s+1}\frac{1}{s}$$

$$X(s) = \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}$$

↓      ↓      ↓      ↓  
 $4e^{-t}$        $\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$   
 $y(t) = 4e^{-t} + 1 - e^{-t} =$   
 $= 3e^{-t} + 1$

per  $t \geq 0$

# Lezione 10.

# Funzione di trasferimento

# Schema della lezione

1. Definizione
2. Dimensioni della funzione di trasferimento
3. Interpretazione della funzione di trasferimento
4. Struttura della funzione di trasferimento
5. Rappresentazione interna ed esterna
6. Poli e zeri di una funzione di trasferimento
7. Proprietà di poli e zeri
8. Parametrizzazioni di una funzione di trasferimento
9. Relazione tra guadagno statico e guadagno della funzione di trasferimento
10. Matlab

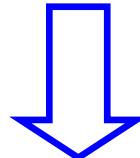
# 1. Definizione

Si consideri un sistema LTI

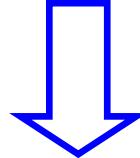
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Si esegua la trasformazione di Laplace dell'equazione di stato

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$



$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$



$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Si trasformi infine la trasformazione d'uscita

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

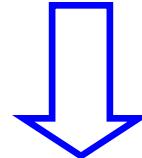
$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} B U(s) \\ Y(s) = C X(s) + D U(s) \end{cases}$$

Sostituendo lo stato nella trasformazione d'uscita si ottiene

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} x(0) + [C(sI - A)^{-1} B + D] U(s)$$

quando  $x(0) = 0$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D] U(s)$$



$$G(s) \equiv C(sI - A)^{-1} B + D$$

## Funzione di trasferimento

## 2. Dimensioni della funzione di trasferimento

Sistema SISO  ingresso ed uscita sono scalari

$$G(s) \equiv \begin{matrix} C & (sI - A)^{-1} & B + D \\ 1 \times n & n \times n & n \times 1 & 1 \times 1 \end{matrix} \quad \text{è (una funzione di } s\text{) scalare}$$

$$Y(s) = G(s)U(s)$$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

**La funzione di trasferimento è il rapporto tra le trasformate di uscita ed ingresso**

(con condizione iniziale nulla per lo stato)

# Dimensioni della funzione di trasferimento (caso generale MIMO)

approfondimento

$p$  : dim. vettore uscita

$m$  : dim. vettore ingresso

$n$  : dim. vettore stato

$$G(s) \equiv \underbrace{C}_{p \times n} \underbrace{(sI - A)^{-1}}_{n \times n} \underbrace{B}_{n \times m} + \underbrace{D}_{p \times m}$$

E' una matrice  $p \times m$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_i(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{i1}(s) & \cdots & G_{im}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{p1}(s) & \cdots & G_{pm}(s) \end{bmatrix}_{p \times m} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}$$

La  $i$ -esima componente del vettore di uscita è quindi

$$Y_i(s) = \sum_{j=1}^m G_{ij}(s) U_j(s) = G_{i1}(s) U_1(s) + G_{i2}(s) U_2(s) + \dots + G_{im}(s) U_m(s)$$

### 3. Interpretazione della funzione di trasferimento

Si consideri un sistema SISO con funzione di trasferimento  $G(s)$

Siano

$$u(t) = \text{imp}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = 1$$
$$x(0) = 0$$

Allora

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)$$

**La funzione di trasferimento è la trasformata di Laplace della risposta all'impulso del sistema**

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -10 & -12 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Calcolare la funzione di trasferimento del sistema

$$\begin{aligned} G(s) &\equiv C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+10 & 12 \\ -2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s(s+10)+24} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -12 \\ 2 & s+10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{s^2 + 10s + 24} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-12 \\ s+12 \end{bmatrix} = \frac{2s}{s^2 + 10s + 24} \end{aligned}$$

Calcolare la risposta all'impulso del sistema a partire da condizioni iniziali nulle.

$$u(t) = \text{imp}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = 1$$

$$x(0) = 0$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) = \frac{2s}{s^2 + 10s + 24} = \frac{2s}{(s+6)(s+4)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

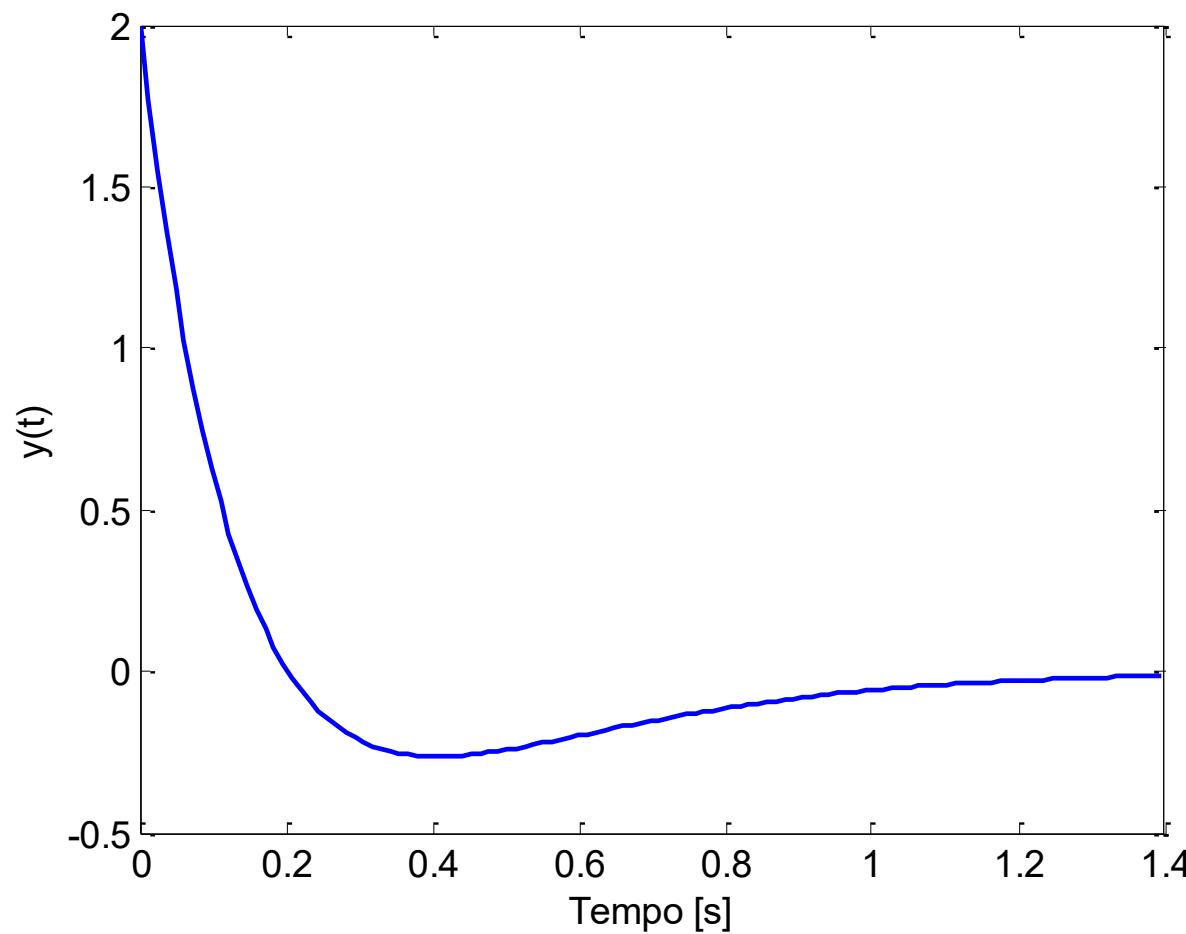
$$\frac{2s}{(s+6)(s+4)} = \frac{\alpha}{(s+4)} + \frac{\beta}{(s+6)} = \frac{\alpha s + 6\alpha + \beta s + 4\beta}{(s+6)(s+4)} = \frac{(\alpha + \beta)s + (6\alpha + 4\beta)}{(s+6)(s+4)}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 6\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 6 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{-4}{(s+4)} + \frac{6}{(s+6)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-4}{(s+4)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(s+6)}\right] =$$

$$y(t) = -4e^{-4t} + 6e^{-6t} \quad \text{per } t \geq 0$$



## 4. Struttura della funzione di trasferimento (per sistemi SISO)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

Analisi della struttura fattore per fattore

Il primo fattore è

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & s - a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}^{-1}$$

La sua espressione è

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} K(s)$$

dove  $K(s)$  è la matrice  $n \times n$  dei complementi algebrici della trasposta di  $sI - A$

- ✿  $\det(sI - A) = \varphi(s)$  è un polinomio in  $s$  di grado  $n$   
(è il polinomio caratteristico di  $A$ !)
- ✿  $k_{ij}(s)$  (elemento di  $K(s)$ ) è un polinomio in  $s$  di grado  $< n$

Moltiplicando  $(sI - A)^{-1}$  a sinistra per  $C$  e a destra per  $B$  si ha

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{\det(sI - A)} C_{(1 \times n)} K(s)_{(n \times n)} B_{(n \times 1)} = \frac{M(s)}{\varphi(s)}$$

E' un sistema SISO

- ✿  $M(s)$  è un polinomio in  $s$  di grado  $< n$

Infine, si somma  $D$

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{M(s)}{\varphi(s)} + D = \\ &= \frac{M(s) + D\varphi(s)}{\varphi(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s)} \end{aligned}$$

- ★ Se  $D \neq 0$  (cioè il sistema è proprio)  
 $N(s)$  è un polinomio in  $s$  di grado  $n$
  
- ★ Se  $D = 0$  (cioè il sistema è strettamente proprio)  
 $N(s) = M(s)$  è un polinomio in  $s$  di grado  $< n$

## Riassumendo

$$G(s) \text{ è razionale} \longrightarrow G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- ★  $D(s) = \varphi(s) = \det(sI - A)$  è un polinomio in  $s$  di grado  $n$   
(è il polinomio caratteristico di  $A$ !)
- ★  $N(s)$  è un polinomio in  $s$  :
  - ✓ di grado  $n$  se  $D \neq 0$
  - ✓ di grado  $< n$  se  $D = 0$

Salvo cancellazioni

## In caso di cancellazioni

- ★  $D(s)$  è un fattore di  $\varphi(s)$  di grado  $r < n$
- ★  $N(s)$  ha grado  $v < n$  ( $v = r$  solo se  $D$  è diverso da zero)

Una cancellazione in  $G(s)$  è un indicatore dell'esistenza di **parti “nascoste”** (**non raggiungibili** e/o **non osservabili**) del sistema (cioè che esistono nella rappresentazione di stato e che “si perdono” passando alla rappresentazione mediante funzione di trasferimento).

# Cancellazioni

## Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y = [1 \ 1]x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} G(s) &= [1 \ 1] \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s-1)(s+1)} [1 \ 1] \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s-1)(s+1)} [s+2 \ s-1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\cancel{s-1}}{\cancel{(s-1)}(s+1)} = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

Qual è il significato di questa cancellazione?

Si esplicitino le equazioni di stato

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y = [1 \ 1]x \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Si osservi che per  $x_1(0)=0$  allora  $x_1(t)=0$  per ogni  $t \geq 0$

Quindi, quando si ha condizione iniziale  $x_1(0)=0$ ,  
il sistema, dal punto di vista ingresso/uscita, è identico a

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Il fatto che ci sia una cancellazione nella funzione di trasferimento  
consiste nel fatto che una variabile di stato “non si veda” nella  
rappresentazione ingresso/uscita.

## 5. Rappresentazione di un sistema LTI

La funzione di trasferimento è detta **rappresentazione esterna** del sistema, mentre quella in variabili di stato è detta **rappresentazione interna**. In generale, però, non hanno il medesimo contenuto informativo (la rappresentazione di stato ci dice sempre tutto, la funzione di trasferimento solo se non ci sono cancellazioni)

Rappresentazione interna

$$(A, B, C, D)$$



Rappresentazione esterna

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$



$$Y(s) = G(s)U(s)$$

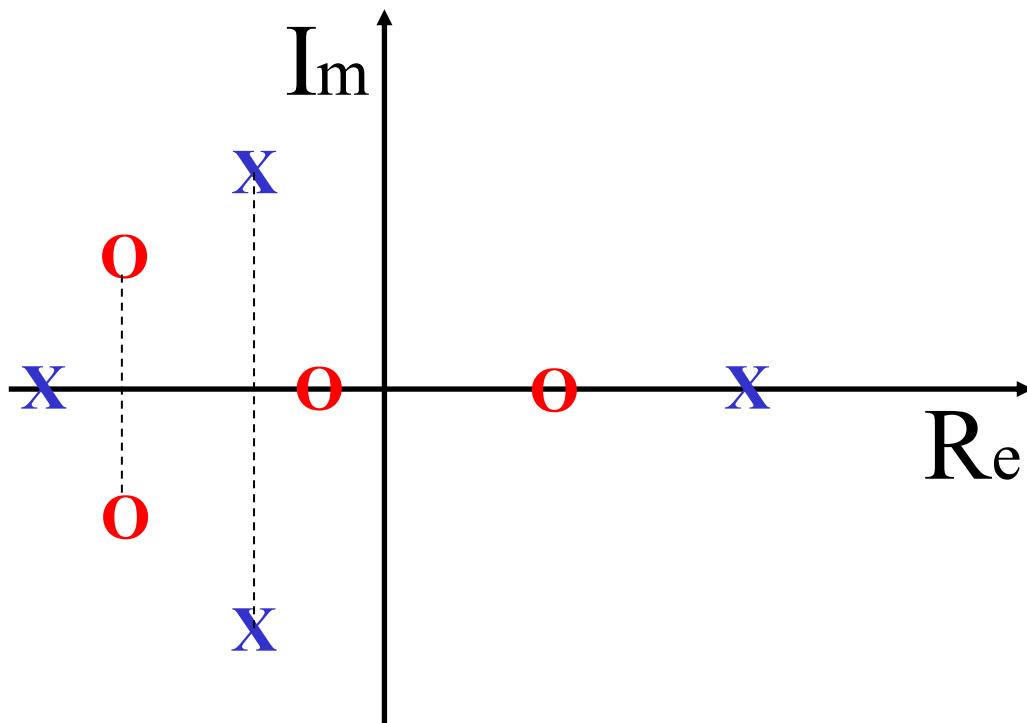
$$\text{con } x(0) = 0$$

## 6. Funzione di trasferimento : poli e zeri

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

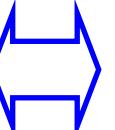
O Zeri : radici di  $N(s)=0$

X Poli : radici di  $D(s)=0$



## 7. Poli e zeri

- I poli sono tutti autovalori di  $A$
- Un autovalore di  $A$  può non essere un polo in caso di cancellazioni
- La stabilità dipende dai poli

As. stabilità   $\text{Re}(\text{poli}) < 0$   
(salvo cancellazioni)

- Numero di zeri  $\leq$  numero di poli

## 8. Funzione di trasferimento : parametrizzazioni

1.  $G(s) = \frac{\beta_m s^m + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0}$  parametri:  $\beta_i, \alpha_i$

2.  $G(s) = \rho \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \rho \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$

parametri:  $\rho$  costante di trasferimento  
 $z_i$  zeri       $p_i$  poli

3.  $G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)}$  parametri:  $\mu$  guadagno della FdT  
 $T_i, \tau_i$  costanti di tempo  
 $g$  tipo

## Osservazione – Relazione tra la 2 e la 3

$$\begin{aligned}
G(s) &= \rho \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_i (s - p_i)} = \frac{\rho}{s^g} \frac{\prod_i z_i \left( \frac{s}{z_i} - 1 \right)}{\prod_i p_i \left( \frac{s}{p_i} - 1 \right)} = \\
&= \frac{1}{s^g} \rho \frac{\prod_i (-z_i)}{\prod_i (-p_i)} \frac{\prod_i \left( 1 - \frac{s}{z_i} \right)}{\prod_i \left( 1 - \frac{s}{p_i} \right)} = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s T_i)}{\prod_i (1 + s \tau_i)} \\
&\quad \text{dove } -\frac{1}{z_i} = T_i \quad -\frac{1}{p_i} = \tau_i
\end{aligned}$$

## Esempio

$$G(s) = \frac{5s^2 + 35s + 50}{s^2 + 10s + 21}$$

è nella forma 1  $\begin{cases} \beta_0 = 50, \beta_1 = 35, \beta_2 = 5 \\ \alpha_0 = 21, \alpha_1 = 10, \alpha_2 = 1 \end{cases}$

Calcolando poli e zeri è possibile metterla nella forma 2

$$G(s) = \frac{5s^2 + 35s + 50}{s^2 + 10s + 21} = \frac{5(s+2)(s+5)}{(s+3)(s+7)} \quad \begin{cases} \rho = 5 \\ z_1 = -2, z_2 = -5 \\ p_1 = -3, p_2 = -7 \end{cases}$$

Raccogliendo  $z_i$  e  $p_i$  si può passare alla forma 3

$$G(s) = \frac{5(s+2)(s+5)}{(s+3)(s+7)} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 2 \left( \frac{1}{2}s + 1 \right) \left( \frac{1}{5}s + 1 \right)}{3 \cdot 7 \left( \frac{1}{3}s + 1 \right) \left( \frac{1}{7}s + 1 \right)} = \frac{\frac{50}{21} \left( 1 + \frac{1}{2}s \right) \left( 1 + \frac{1}{5}s \right)}{\left( 1 + \frac{1}{3}s \right) \left( 1 + \frac{1}{7}s \right)}$$

$$\mu = \frac{50}{21}, T_1 = \frac{1}{2}, T_2 = \frac{1}{5}, \tau_1 = \frac{1}{3}, \tau_2 = \frac{1}{7}, g = 0$$

## 9. Guadagno statico e guadagno di una FdT

$$g = 0$$

### Guadagno statico

Se il sistema non ha poli nell'origine allora la matrice  $A$  è invertibile e si ha

$$\mu = -CA^{-1}B + D$$

Inoltre si osservi che, essendo  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  allora

$$\mu = -CA^{-1}B + D = G(0)$$

### Guadagno della funzione di trasferimento

Se  $g = 0$  allora  $G(s) = \mu \frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)}$  e quindi anche

$$\mu = G(0)$$

Quindi il **guadagno statico** è uguale al **guadagno della funzione di trasferimento**

$g \neq 0$

## Guadagno della funzione di trasferimento

Dal momento che  $G(s) = \mu \frac{1}{s^g} \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_i (1+s\tau_i)}$  allora sarà

$$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s)$$

Il **guadagno statico** non ha nessuna relazione con il **guadagno della funzione di trasferimento** che in questo caso prende il nome di **guadagno generalizzato**

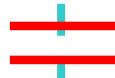
tipo

guadagno statico

guadagno della FdT

$$g = 0$$

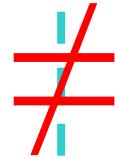
$$\mu = -CA^{-1}B + D = G(0)$$



$$\mu = G(0)$$

$$g < 0$$

$$\mu = -CA^{-1}B + D = G(0)$$



$$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s)$$

$$g > 0$$

non def.

$$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s)$$

# Esempio

## Sistema 1

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -9 & -5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0.75] \quad D = 0$$

Si calcoli il **guadagno statico** del sistema

$$\mu = -CA^{-1}B + D = \frac{3}{20}$$

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema

g=0

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2 + 9s + 20} \xrightarrow{\text{forma 2}} G(s) = \frac{s+3}{(s+4)(s+5)} \xrightarrow{\text{forma 3}} G(s) = \frac{\frac{3}{20}}{(1+\frac{1}{4}s)(1+\frac{1}{5}s)}$$

guadagno statico

=

guadagno della funzione  
di trasferimento

guadagno della  
funzione di trasferimento

## Sistema 2

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -14 & -10 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [-3 \quad -5] \quad D = 4$$

Si calcoli il **guadagno statico** del sistema

$$\mu = -CA^{-1}B + D = \mathbf{0}$$

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = \frac{4s^2 + 32s}{s^2 + 14s + 40} \xrightarrow{\text{forma 2}} G(s) = \frac{4s(s+8)}{(s+4)(s+10)}$$

$$\xrightarrow{\text{forma 3}} G(s) = \frac{\overset{4}{\cancel{s}}}{\underset{5}{\cancel{s}}} \frac{\left(1 + \frac{1}{8}s\right)}{s^{-1} \left(1 + \frac{1}{4}s\right) \left(1 + \frac{1}{10}s\right)}$$

$g < 0$

$$\text{Infatti: } \mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s) = \frac{4}{5}$$

**guadagno della  
funzione di trasferimento**

### Sistema 3

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 4] \quad D = 0$$

Non si può calcolare il **guadagno statico** del sistema perché  $A$  non è invertibile.

$$\det A = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$$

Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema

g>0

$$G(s) = \frac{4s + 32}{s^2 + 4s} \xrightarrow{\text{forma 2}} G(s) = \frac{4(s + 8)}{s(s + 4)} \xrightarrow{\text{forma 3}} G(s) = \mu \frac{\left(1 + \frac{1}{8}s\right)}{s\left(1 + \frac{1}{4}s\right)}$$

$$\text{Infatti: } \mu = \lim_{s \rightarrow 0} s^g G(s) = 8$$

**guadagno della  
funzione di trasferimento**

# 10. Matlab

Con questo comando possiamo definire una funzione di trasferimento nella «forma 1» (specificando i coefficienti dei polinomi a numeratore e a denominatore).

**tf** Construct transfer function or convert to transfer function.

Construction:

**SYS = tf (NUM,DEN)** creates a continuous-time transfer function SYS with numerator NUM and denominator DEN. SYS is an object of type tf when NUM, DEN are numeric arrays.

Conversion:

**SYS = tf (SYS)** converts any dynamic system SYS to the transfer function representation. The resulting SYS is always of class tf.

Con questo comando possiamo definire una funzione di trasferimento nella «forma 2» (specificando i poli, gli zeri e la costante di trasferimento).

**zpk** Constructs zero-pole-gain model or converts to zero-pole-gain format.

Construction:

**SYS = zpk (Z,P,K)** creates a continuous-time zero-pole-gain (zpk) model SYS with zeros Z, poles P, and gains K. SYS is an object of class @zpk.

Conversion:

**SYS = zpk (SYS)** converts any dynamic system SYS to the zpk representation. The resulting SYS is of class @zpk.

```
>> Sistema1=tf([1 1], [1 5 6])
```

Sistema1 =

$$\frac{s + 1}{s^2 + 5s + 6}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> Sistema2=zpk([-1], [-2 -3], 1)
```

Sistema2 =

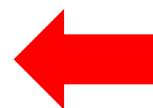
$$\frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

```
>> dcgain(Sistema2)
```

ans =

0.1667



**Attenzione!**

```
>> A=[-4 1; 3 -5]; B=[1 1]'; C=[1 1]; D=0;  
>> Sistema=ss(A,B,C,D);  
  
>> tf(Sistema)
```

ans =

$$\frac{2s + 13}{s^2 + 9s + 17}$$

Continuous-time transfer function.

```
>> zpk(Sistema)
```

ans =

$$\frac{2(s+6.5)}{(s+2.697)(s+6.303)}$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

Applicando il comando **ss** ad una funzione di trasferimento otteniamo la realizzazione in variabili di stato del sistema.

```
>> Sistema=tf([1 1],[1 5 6])
```

```
Sistema =  
s + 1  
-----  
s^2 + 5 s + 6
```

Continuous-time transfer function.

## Una verifica

```
>> eig([-5 -3; 2 0])
```

```
ans =
```

```
-3.0000  
-2.0000
```

```
>> ss(Sistema)
```

```
ans =
```

```
A =  
x1 x2  
x1 -5 -3  
x2 2 0
```

```
B =  
u1  
x1 1  
x2 0
```

```
C =  
x1 x2  
y1 1 0.5
```

```
D =  
u1  
y1 0
```

Continuous-time state-space model.

## Per curiosità...

```
>> Sistema=tf([1 1],[1 4 0])  
  
Sistema =  
  
 s + 1  
-----  
s^2 + 4 s  
  
Continuous-time transfer function.  
  
>> dcgain(Sistema)  
  
ans =  
  
 Inf
```

```
>> Sistema=tf([1 4 0],[1 5 6])  
  
Sistema =  
  
 s^2 + 4 s  
-----  
s^2 + 5 s + 6  
  
Continuous-time transfer function.  
  
>> dcgain(Sistema)  
  
ans =  
  
 0
```

# Lezione 11.

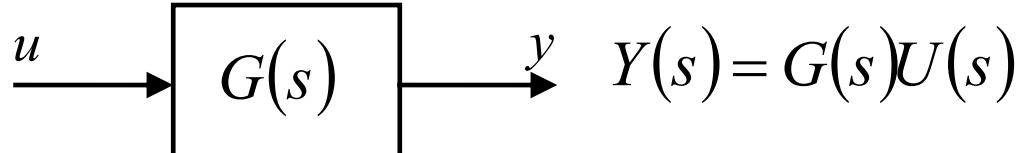
## Schemi a blocchi

# Schema della lezione

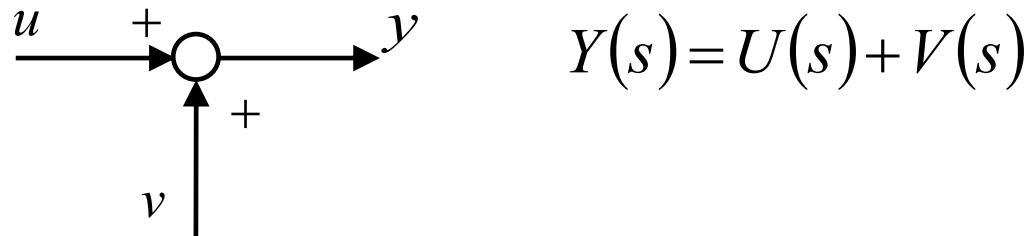
1. Elementi base di uno schema a blocchi
2. Esempio esplicativo
3. Regole di elaborazione  
serie, parallelo, retroazione
4. Stabilità  
serie, parallelo, retroazione
5. Matlab
6. Simulink

# 1. Elementi base di un schema a blocchi

**blocco**



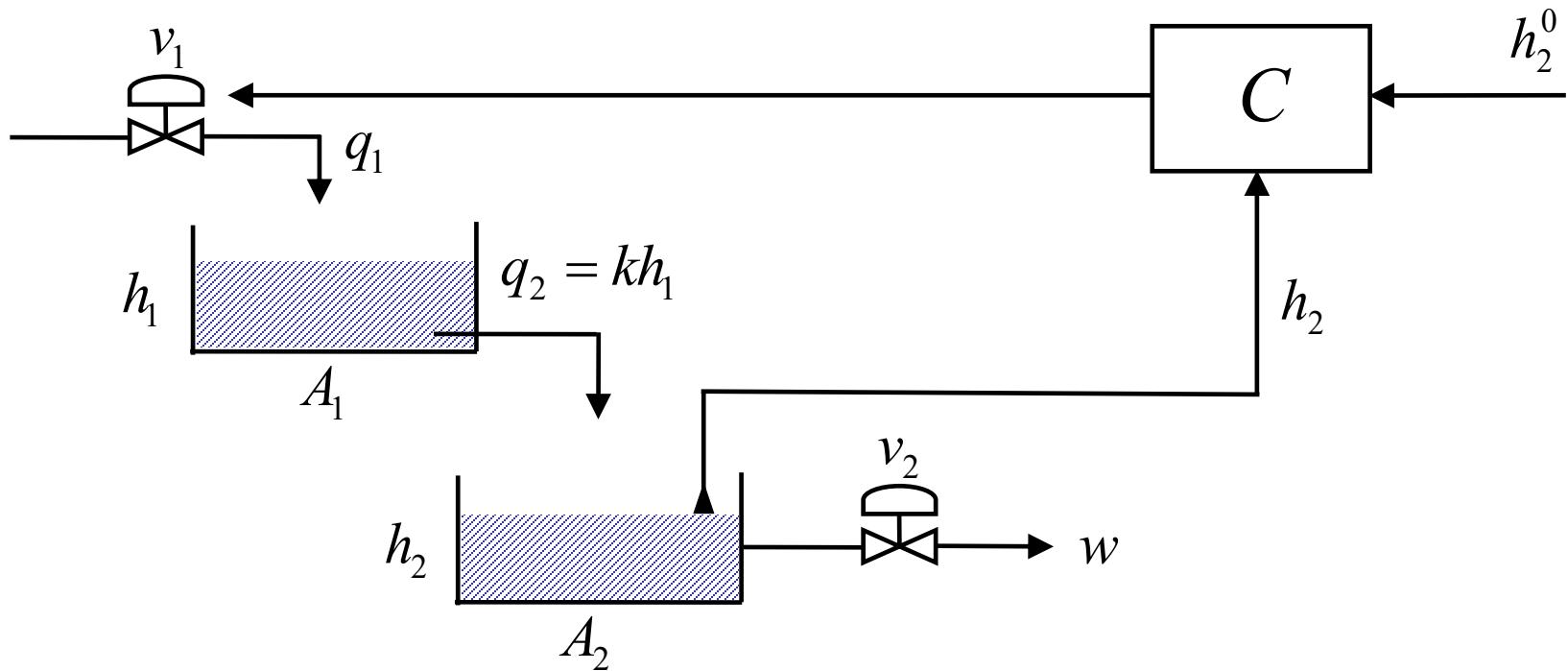
**nodo  
sommatore**



**punto di  
diramazione**

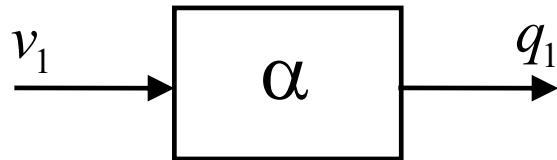


## 2. Esempio esplicativo



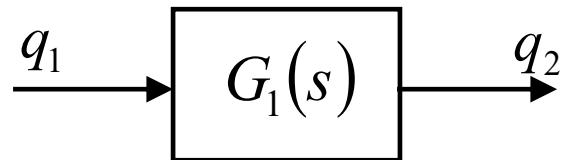
## Valvola 1

$$q_1(t) = \alpha v_1(t)$$



## Serbatoio 1

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1(t) = q_1(t) - kh_1(t) \\ q_2(t) = kh_1(t) \end{cases}$$

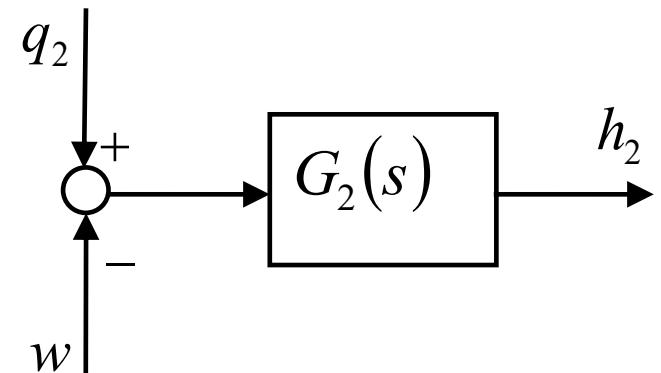


$$G_1(s) = \frac{k}{A_1 s + k}$$

## Serbatoio 2

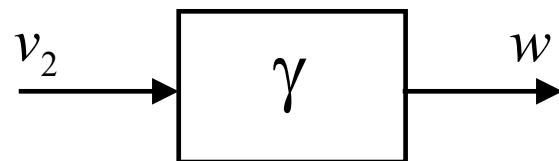
$$A_2 \dot{h}_2(t) = q_2(t) - w(t)$$

$$H_2(s) = \frac{1}{A_2 s} (Q_2(s) - W(s))$$



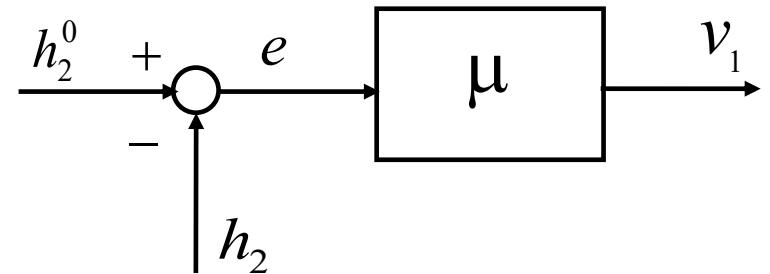
## Valvola 2

$$w(t) = \gamma v_2(t)$$



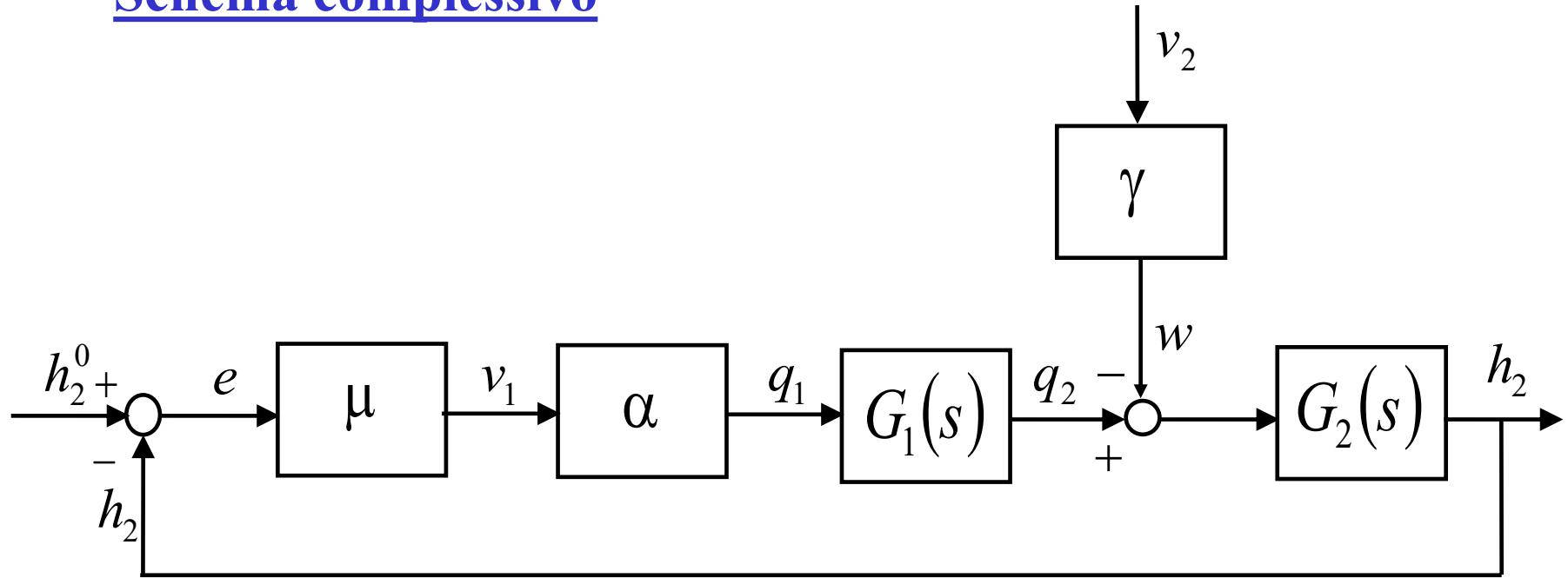
## Controllore

$$v_1(t) = \mu \underbrace{(h_2^0(t) - h_2(t))}_{e(t)}$$



Controllore proporzionale

## Schema complessivo



FdT tra  $h_2^0$  e  $h_2$  ?

FdT tra  $v_2$  e  $h_2$  ?

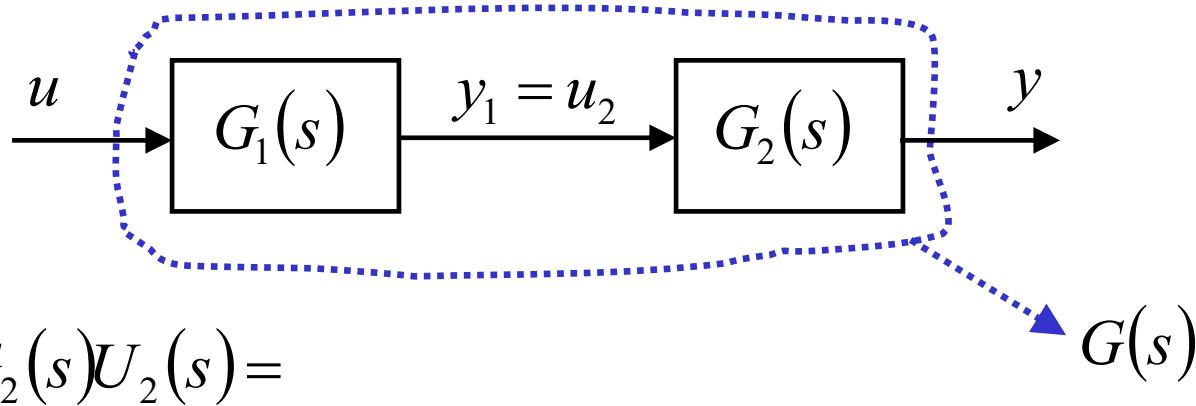
... altre FdT ?

### 3. Schemi a blocchi : regole di elaborazione

#### Blocchi

- ★ in serie
- ★ in parallelo
- ★ in retroazione

## Blocchi in serie

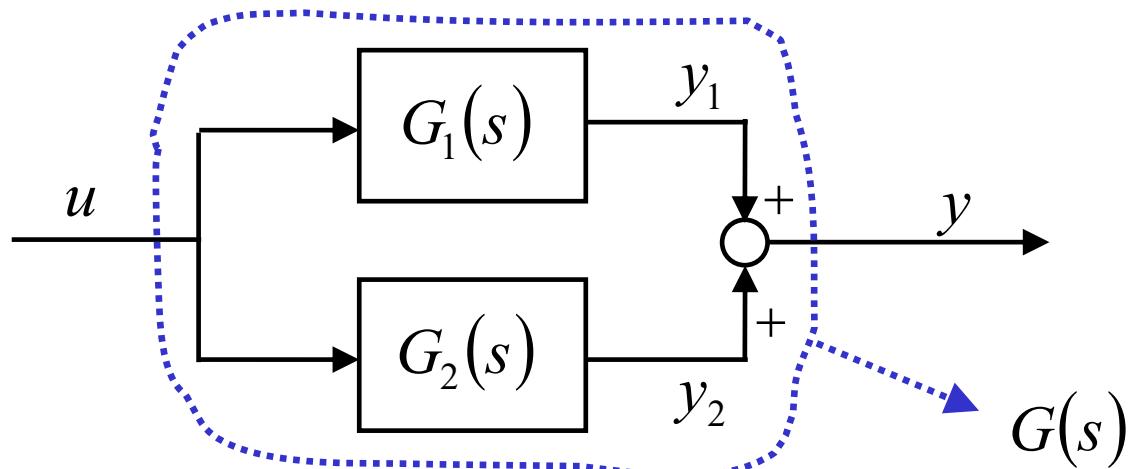


$$= G_2(s)Y_1(s) =$$

$$= G_2(s)G_1(s)U(s)$$

➡ 
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_2(s)G_1(s) = G(s)$$

## Blocchi in parallelo



$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) =$$

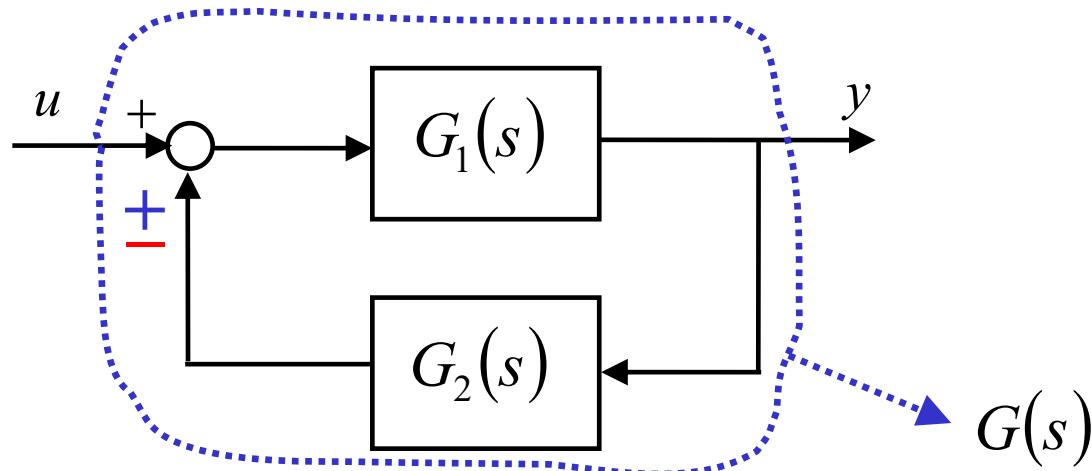
$$= G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) =$$

$$= (G_1(s) + G_2(s))U(s)$$



$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s) = G(s)}$$

## Blocchi in retroazione



Retroazione  
• negativa —  
• positiva +

$$Y(s) = G_1(s)[U(s) \pm G_2(s)Y(s)]$$

$$[1 \mp G_1(s)G_2(s)]Y(s) = G_1(s)U(s)$$

➡

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)} = G(s)$$

$$G(s) = \frac{\text{FdT “in andata”}}{1 \mp \text{FdT “d’anello”}}$$

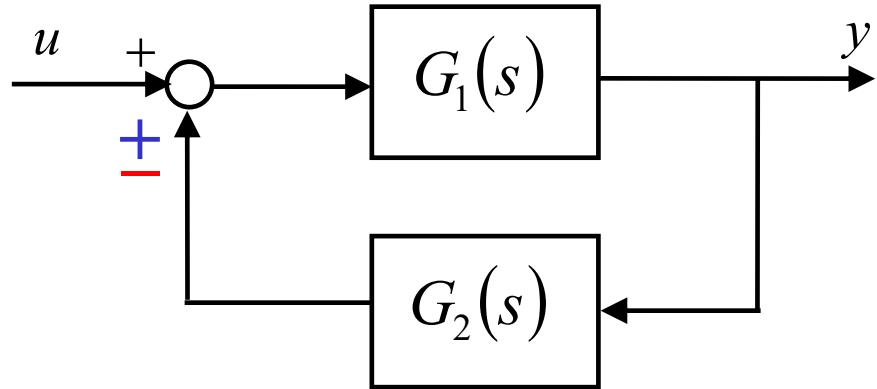
- Retroazione
- negativa
  - positiva

FdT “in andata” :

prodotto delle FdT da  $u$  a  $y$  in  
anello aperto

FdT “d’anello” :

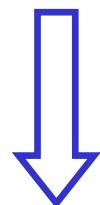
prodotto delle FdT lungo  
l’anello.



- Retroazione
- negativa —
  - positiva +

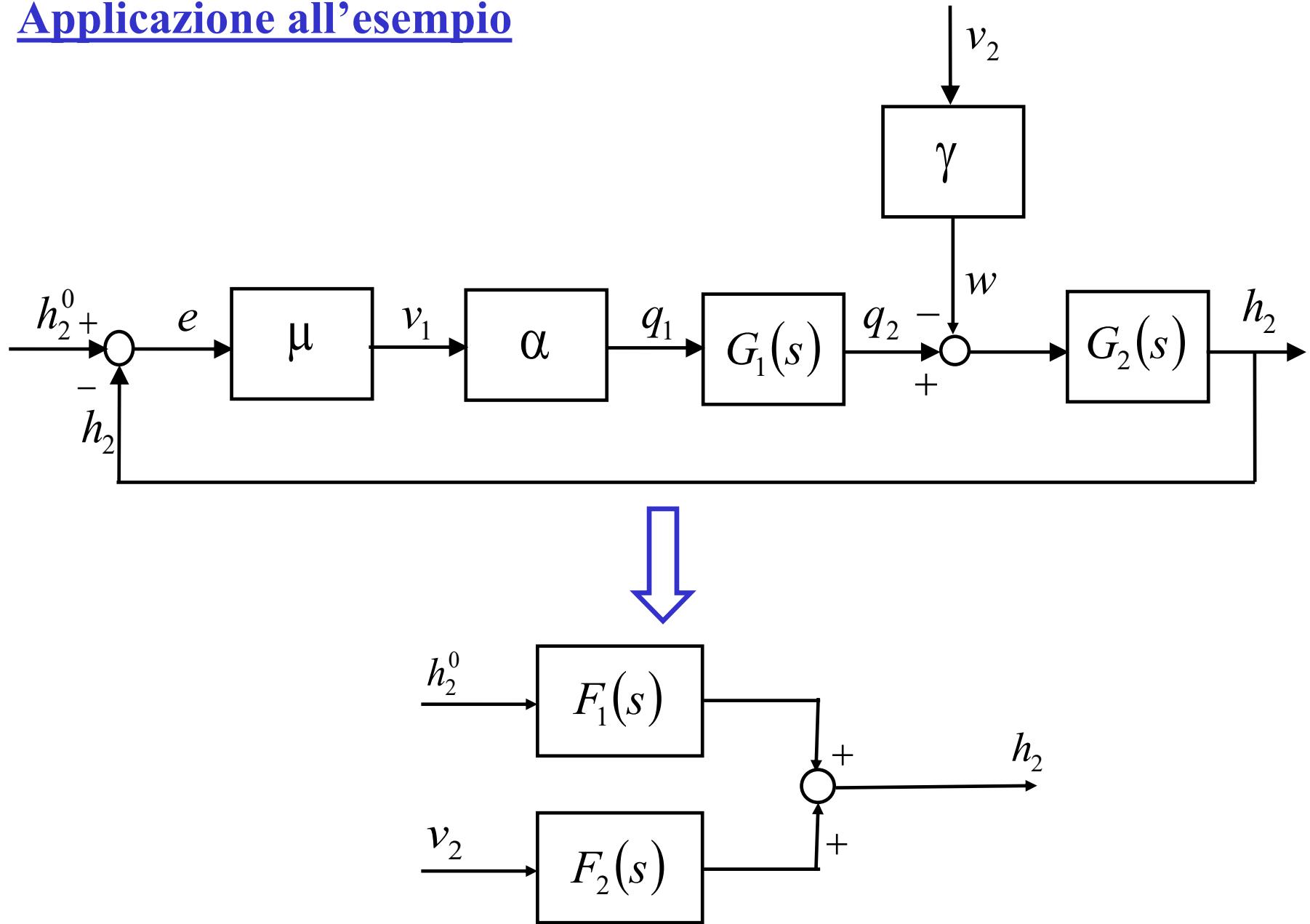
FdT “in andata” :  $G_1(s)$

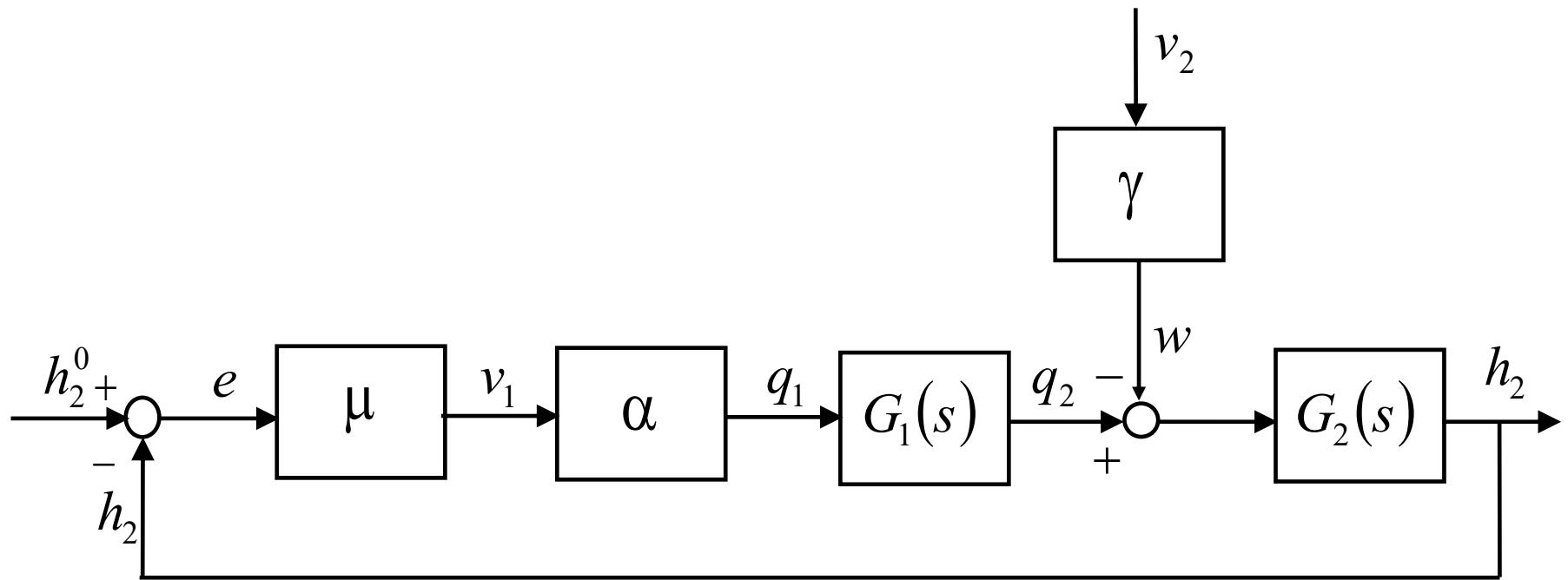
FdT “d’anello” :  $G_1(s)G_2(s)$



$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}$$

## Applicazione all'esempio





$$\frac{H_2(s)}{V_2(s)} = \frac{-\gamma G_2(s)}{1 + \mu\alpha G_1(s)G_2(s)} = F_2(s)$$

$$\frac{H_2(s)}{H_2^0(s)} = \frac{\mu\alpha G_1(s)G_2(s)}{1 + \mu\alpha G_1(s)G_2(s)} = F_1(s)$$

# 4. Schemi a blocchi : stabilità

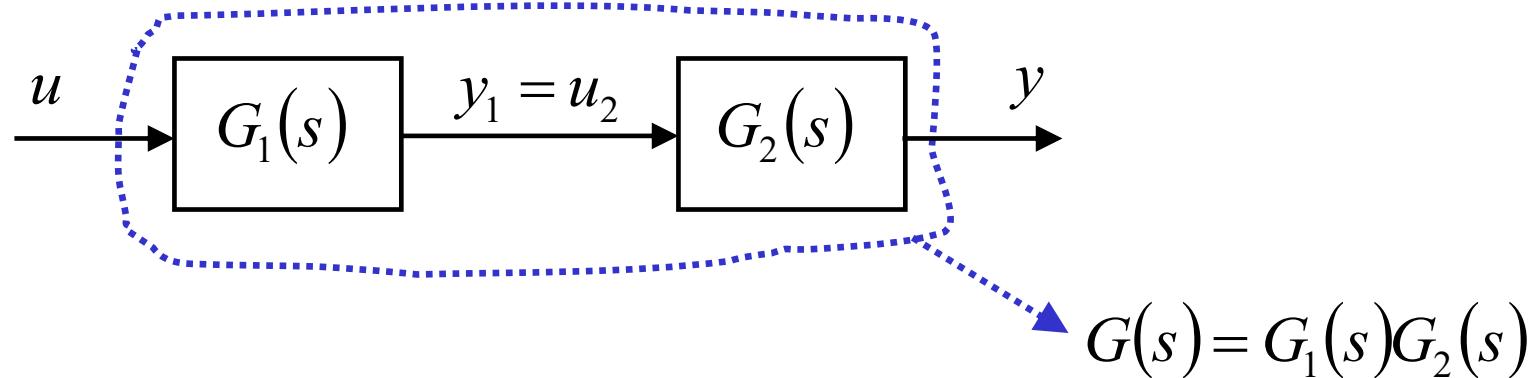
## Blocchi

- ★ in serie

- ★ in parallelo

- ★ in retroazione

## Blocchi in serie



$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$
$$G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$$G(s) = \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

## Senza cancellazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G(s) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G_1(s) \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G_2(s) \end{array} \right\}$$

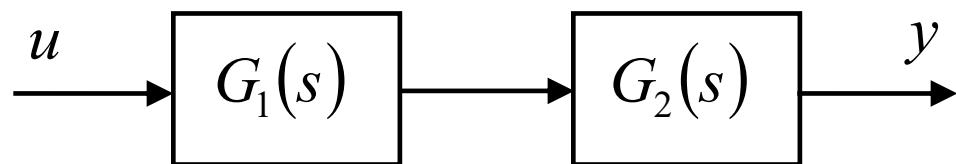
$$G(s) \xrightarrow[\text{stabile}]{} \longleftrightarrow G_1(s), G_2(s) \xrightarrow[\text{stabili}]{} \text{As.}$$

## Con cancellazioni

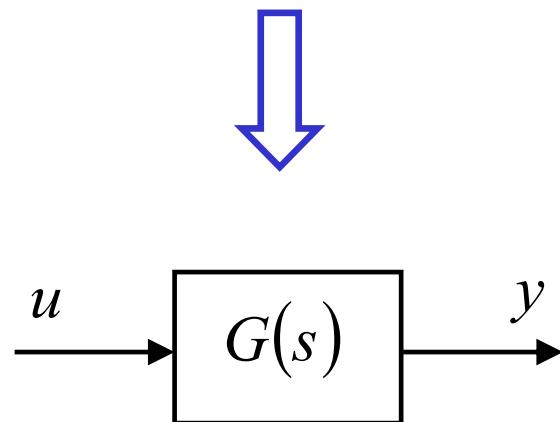
- cancellazioni con  $\text{Re} < 0$   dinamica “nascosta”  
as. stabile
- cancellazioni con  $\text{Re} \geq 0$   dinamica “nascosta”  
**non as. stabile**

Il sistema non è as. stabile  
anche se  $G(s)$  non lo mostra.

# Esempio

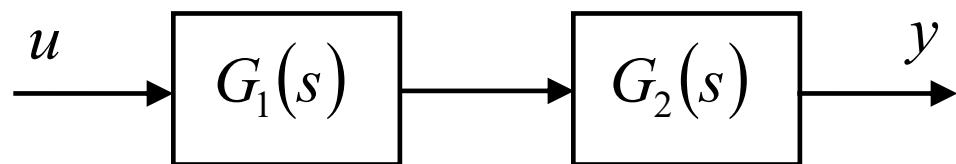


$$G_1(s) = \frac{s+2}{s+1} \quad \text{as. stabili}$$
$$G_2(s) = \frac{1}{s+3}$$

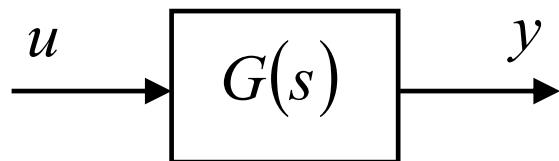
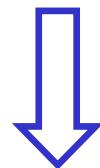


$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \quad \text{as. stabile}$$

# Esempio

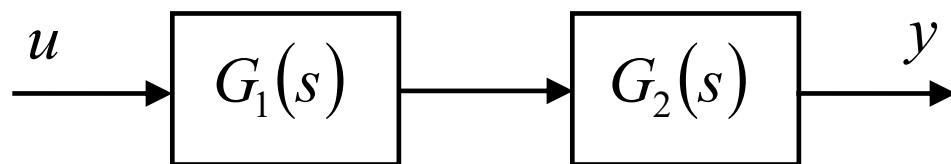


$$G_1(s) = \frac{s+2}{s-1} \quad \text{instabile}$$
$$G_2(s) = \frac{1}{s+3} \quad \text{as. stabile}$$



$$G(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s+3)} \quad \text{instabile}$$

# Esempio

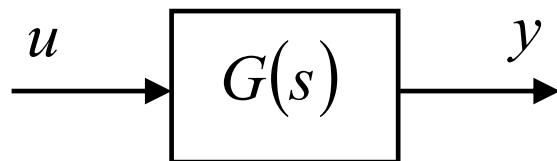
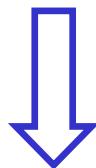


$$G_1(s) = \frac{s+2}{s-1}$$

instabile

$$G_2(s) = \frac{s-1}{s+3}$$

as. stabile



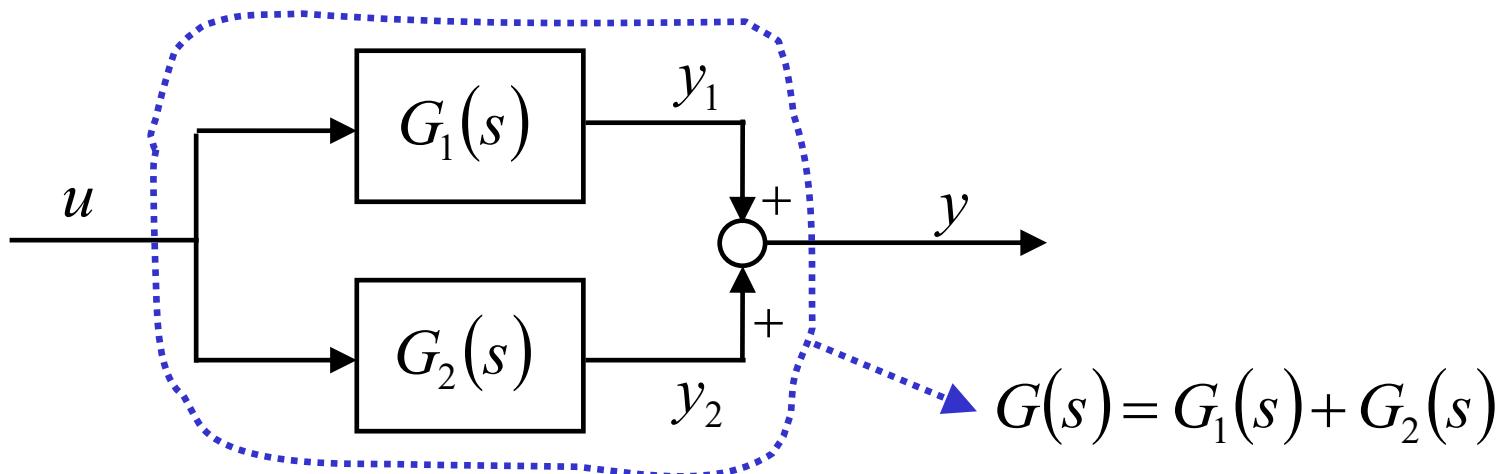
$$G(s) = \frac{s+2}{s+3}$$

C'è stata una **cancellazione polo/zero instabile!**

Il sistema è **instabile!**

(anche se dalla funzione di trasferimento non si capisce, perchè la parte instabile del sistema è “nascosta” nella rappresentazione esterna)

## Blocchi in parallelo



$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$$G(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} + \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}$$

## Senza cancellazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G(s) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G_1(s) \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G_2(s) \end{array} \right\}$$

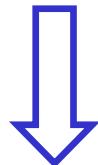
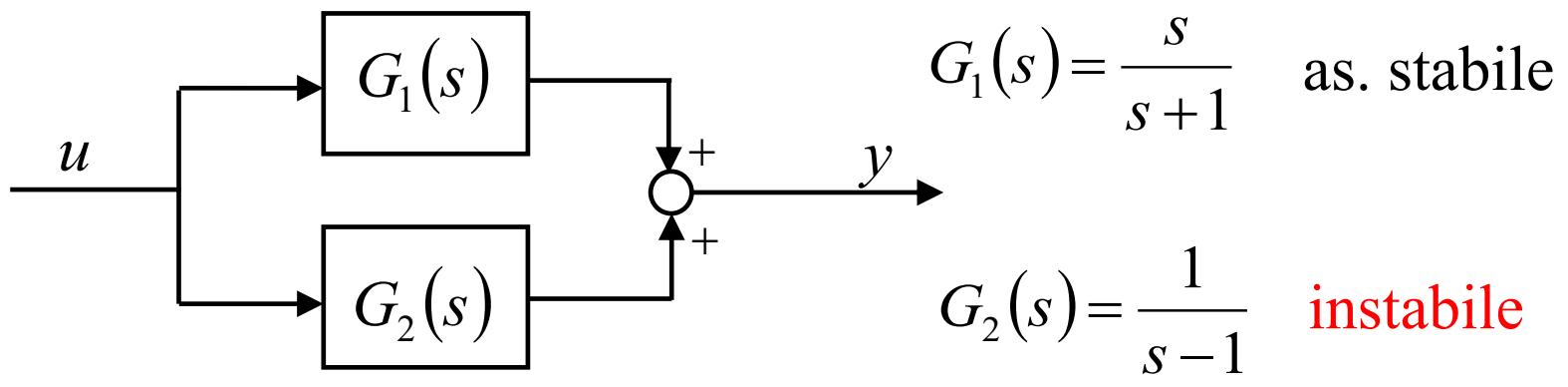
$$G(s) \xrightarrow[\text{stabile}]{} \longleftrightarrow G_1(s), G_2(s) \xrightarrow[\text{stabili}]{} \text{As.}$$

## Con cancellazioni

- cancellazioni con  $\text{Re} < 0$   dinamica “nascosta”  
as. stabile
- cancellazioni con  $\text{Re} \geq 0$   dinamica “nascosta”  
**non as. stabile**

Il sistema non è as. stabile  
anche se  $G(s)$  non lo mostra.

# Esempio

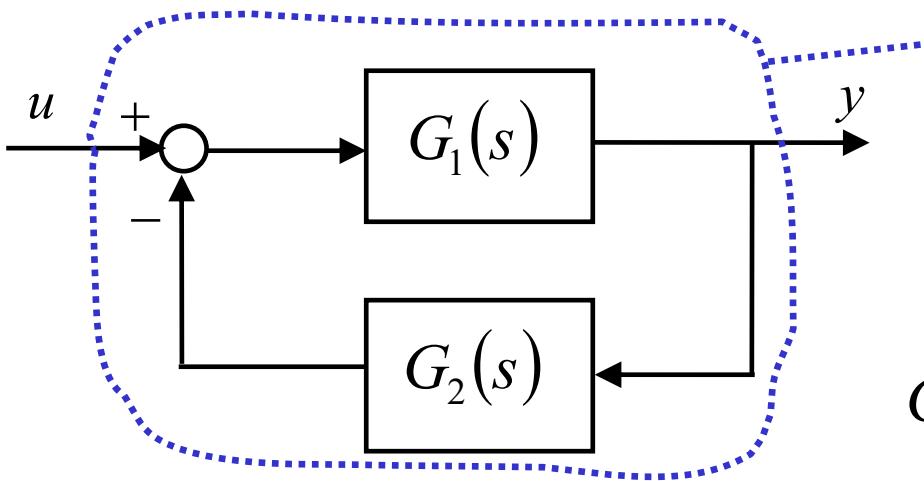


The system can be simplified into a single block  $G(s)$  with the following transfer function:

$$G(s) = \frac{s}{s+1} + \frac{1}{s-1} = \frac{s^2 + 1}{(s+1)(s-1)}$$

instabile

## Blocchi in retroazione



$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

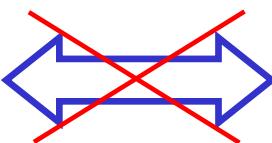
$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$$G(s) = \frac{\frac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1 + \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

## Senza cancellazioni

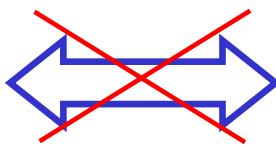
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{poli di} \\ G(s) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{radici di} \\ D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s) = 0 \end{array} \right\}$$

Asintotica stabilità  
sistema complessivo



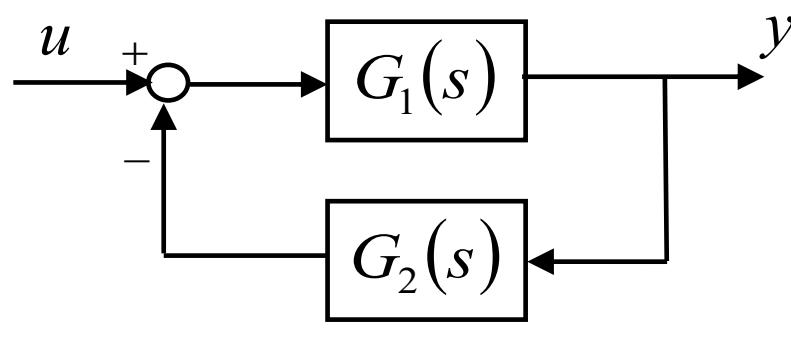
Asintotica stabilità  
sottosistemi

$G(s)$   
As. stabile



$G_1(s), G_2(s)$   
As. stabili

# Esempio



$$G_1(s) = \frac{9}{(s+1)^2}$$

As. stabile

$$G_2(s) = \frac{3}{(s+1)}$$

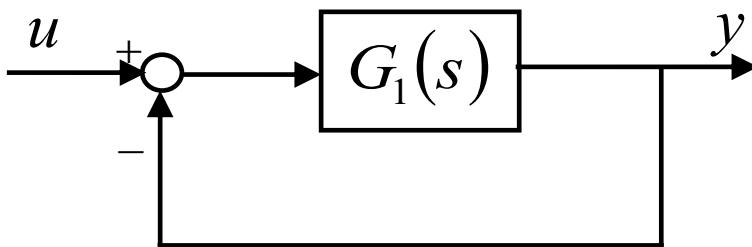
As. stabile

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\frac{9}{(s+1)^2}}{1 + \frac{27}{(s+1)^3}} = \frac{9(s+1)}{(s+1)^3 + 27}$$

poli in  $-4, \frac{1}{2} \pm j\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Instabile

# Esempio



$$G_1(s) = \frac{10}{s - 1}$$

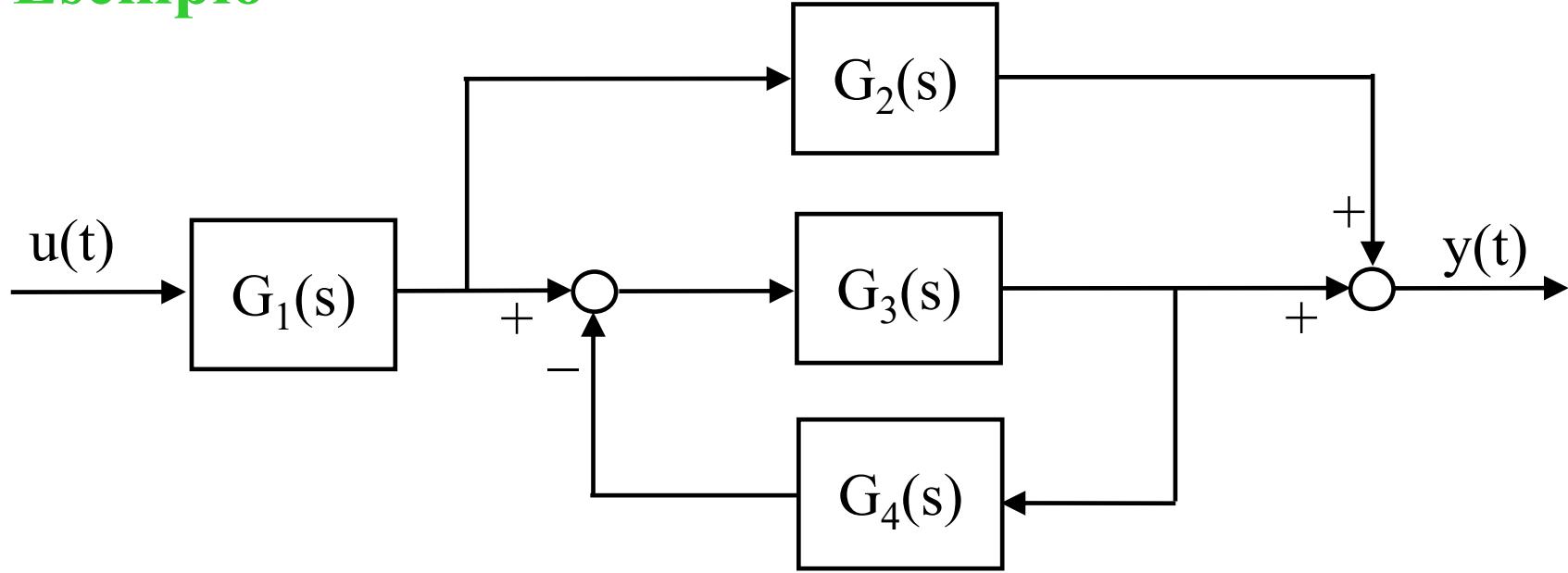
**Instabile**

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\frac{10}{s-1}}{1 + \frac{10}{s-1}} = \frac{10}{s+9}$$

polo in  $-9$

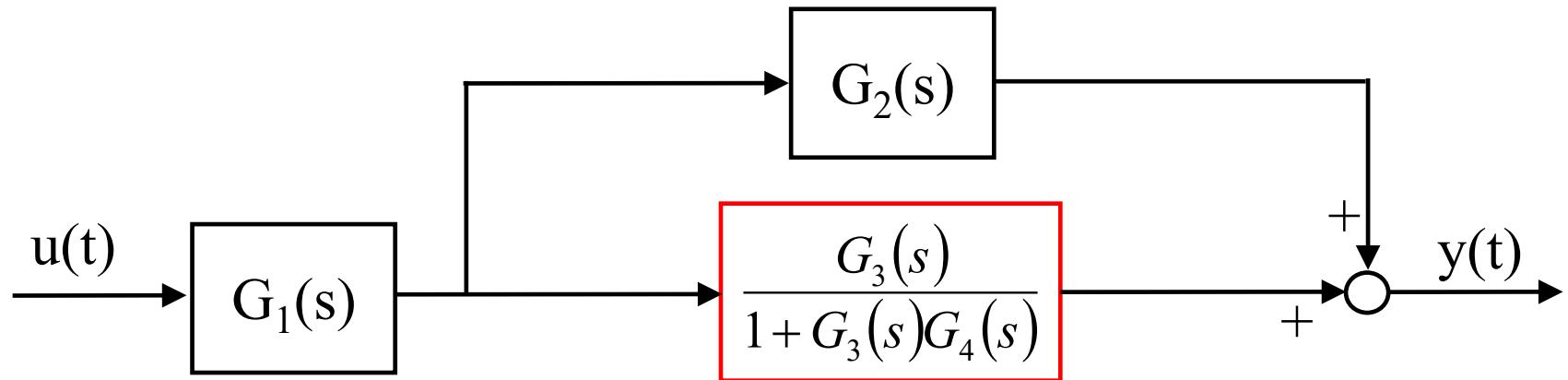
**As. stabile**

# Esempio



Calcolare la funzione di trasferimento da  $u(t)$  ad  $y(t)$

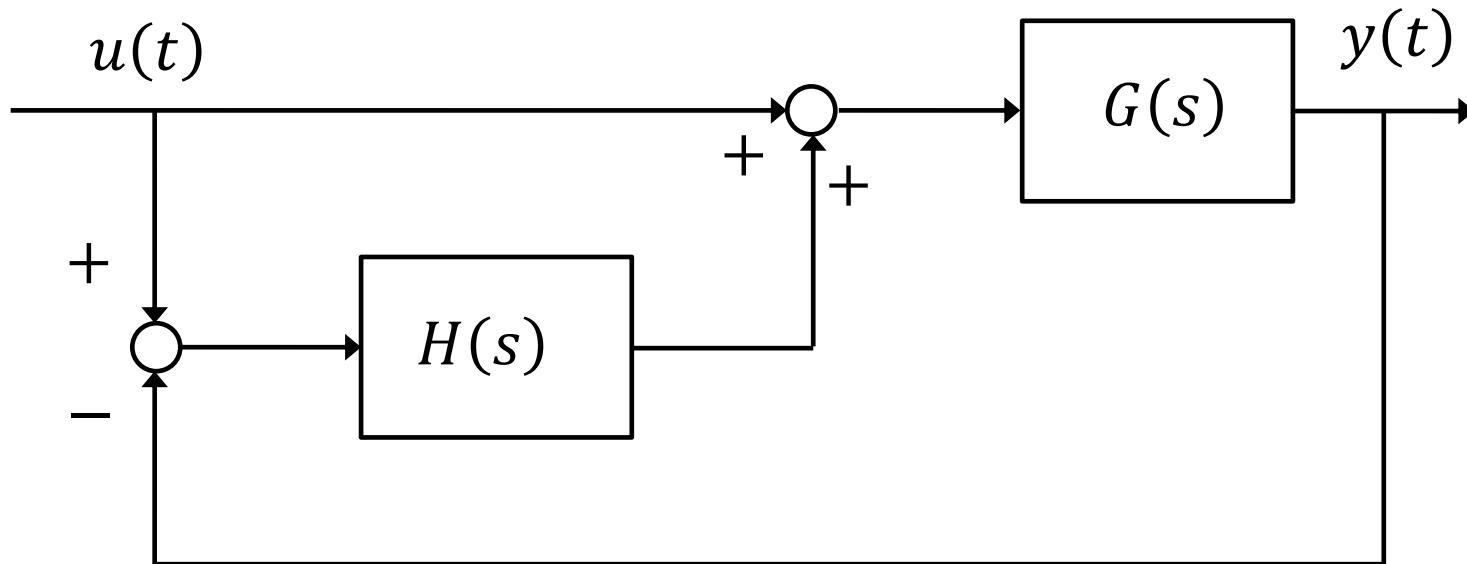
$G_3$  e  $G_4$  sono in retroazione (negativa). Il risultato della loro connessione è in parallelo a  $G_2$ . Il risultato è in serie a  $G_1$ .



$$u(t) \rightarrow G_1(s) \rightarrow \boxed{G_2(s) + \frac{G_3(s)}{1 + G_3(s)G_4(s)}} \rightarrow y(t)$$

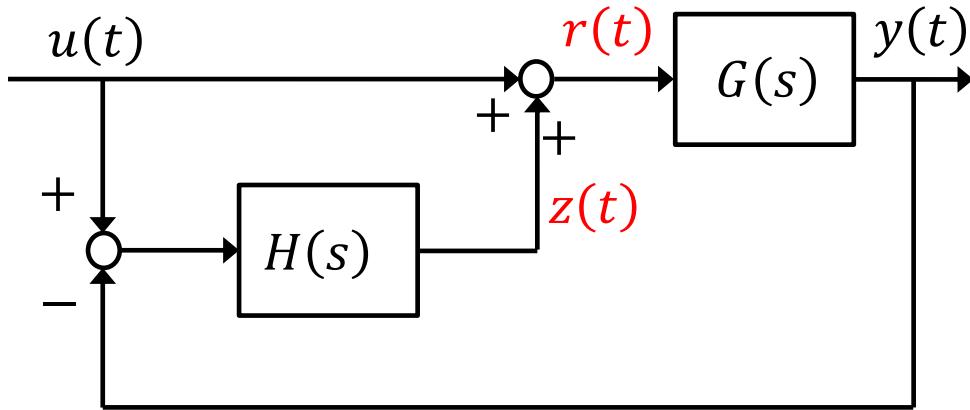
$$u(t) \rightarrow \boxed{G_1(s) \left[ G_2(s) + \frac{G_3(s)}{1 + G_3(s)G_4(s)} \right]} \rightarrow y(t)$$

# Esempio



Calcolare la funzione di trasferimento da  $u(t)$  ad  $y(t)$ .

Esistono altri modi per analizzare schemi a blocchi «complessi». Uno di questi prevede di attribuire dei nomi alle altre variabili in gioco e calcolare la funzione di trasferimento complessiva in modo diretto.



Chiamo  $r(t)$  e  $z(t)$  i due segnali senza nome.

$$Y(s) = G(s)R(s)$$

$$Y(s) = G(s)(U(s) + Z(s)) = G(s)U(s) + G(s)Z(s)$$

$$Y(s) = G(s)U(s) + G(s)H(s)(U(s) - Y(s))$$

$$Y(s) = G(s)U(s) + G(s)H(s)U(s) - G(s)H(s)Y(s)$$

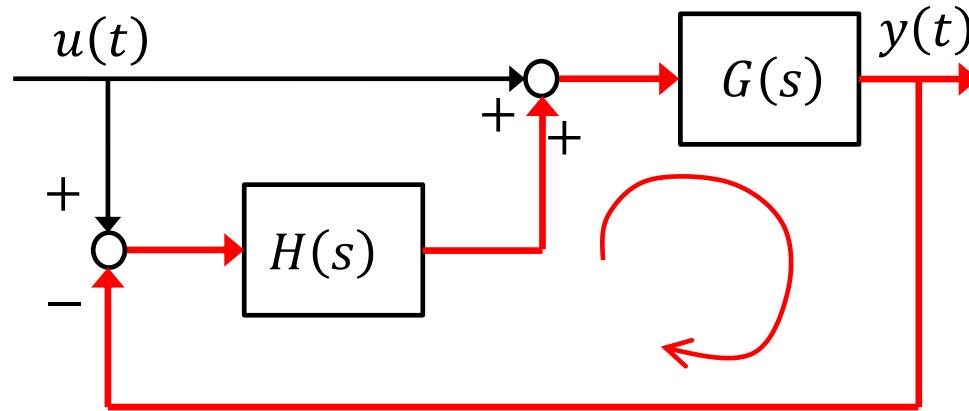
$$Y(s) = (G(s) + G(s)H(s))U(s) - G(s)H(s)Y(s)$$

$$(1 + G(s)H(s))Y(s) = (G(s) + G(s)H(s))U(s)$$

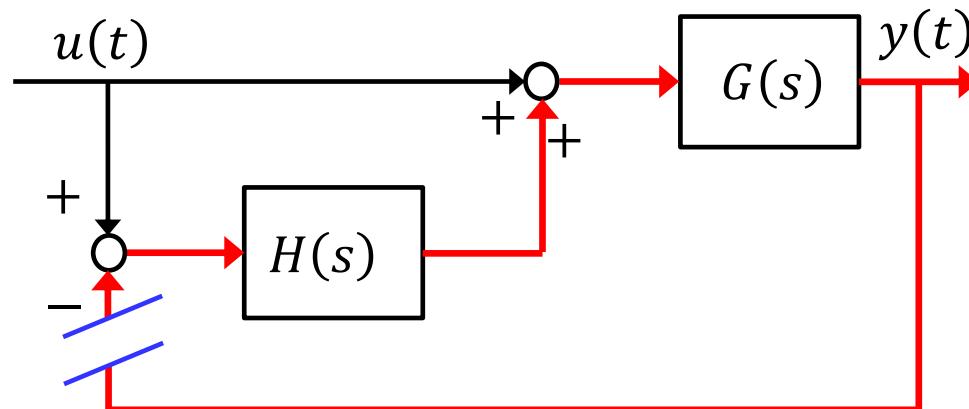
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)(1 + H(s))}{1 + G(s)H(s)}$$

E' ovviamente possibile risolvere questo schema con il metodo «standard».

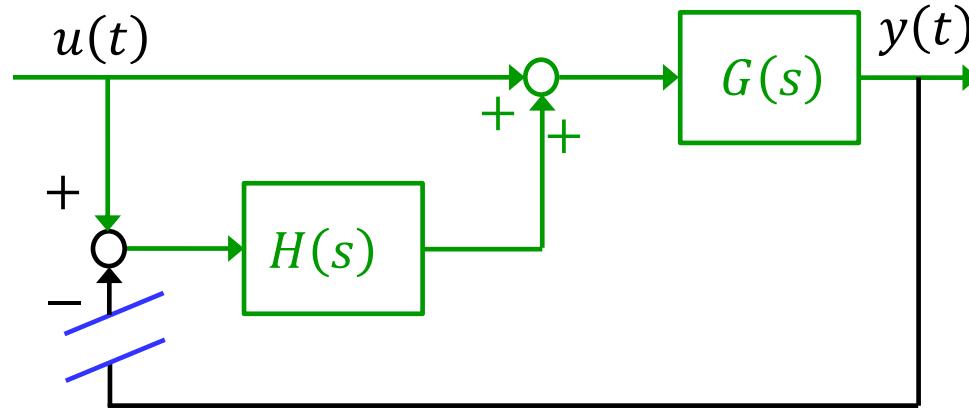
1) E' un sistema retroazionato ed evidenzio l'anello.



2) Apro l'anello di retroazione.

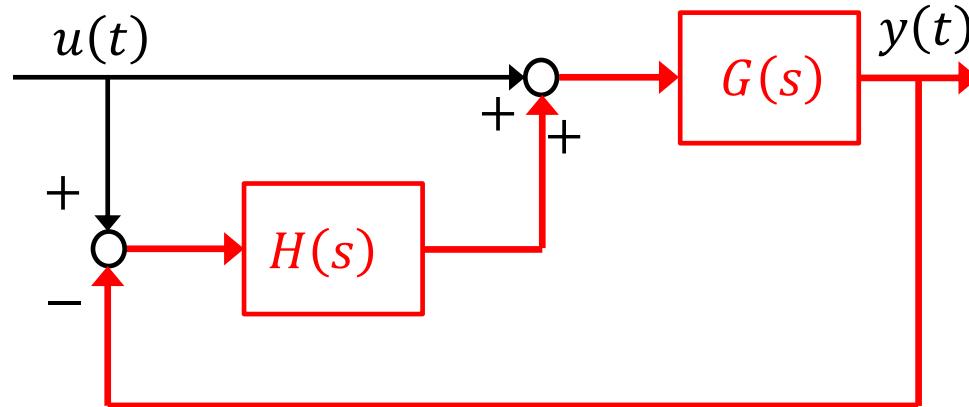


3) Calcolo la funzione di trasferimento d'andata (nota che ci sono due percorsi in parallelo).



$$A(s) = (1 + H(s))G(s)$$

3) Calcolo la funzione di trasferimento d'anello.



$$L(s) = H(s)G(s)$$

4) Calcolo la funzione di trasferimento complessiva.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{FdT \text{ } d'andata}{1 + FdT \text{ } d'anello} = \frac{(1 + H(s))G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Il risultato è (ovviamente) identico al precedente.

## 5. Matlab

Matlab dispone di comandi per risolvere semplici schemi a blocchi in serie, parallelo o in retroazione.

```
>> M = feedback(M1,M2);
```

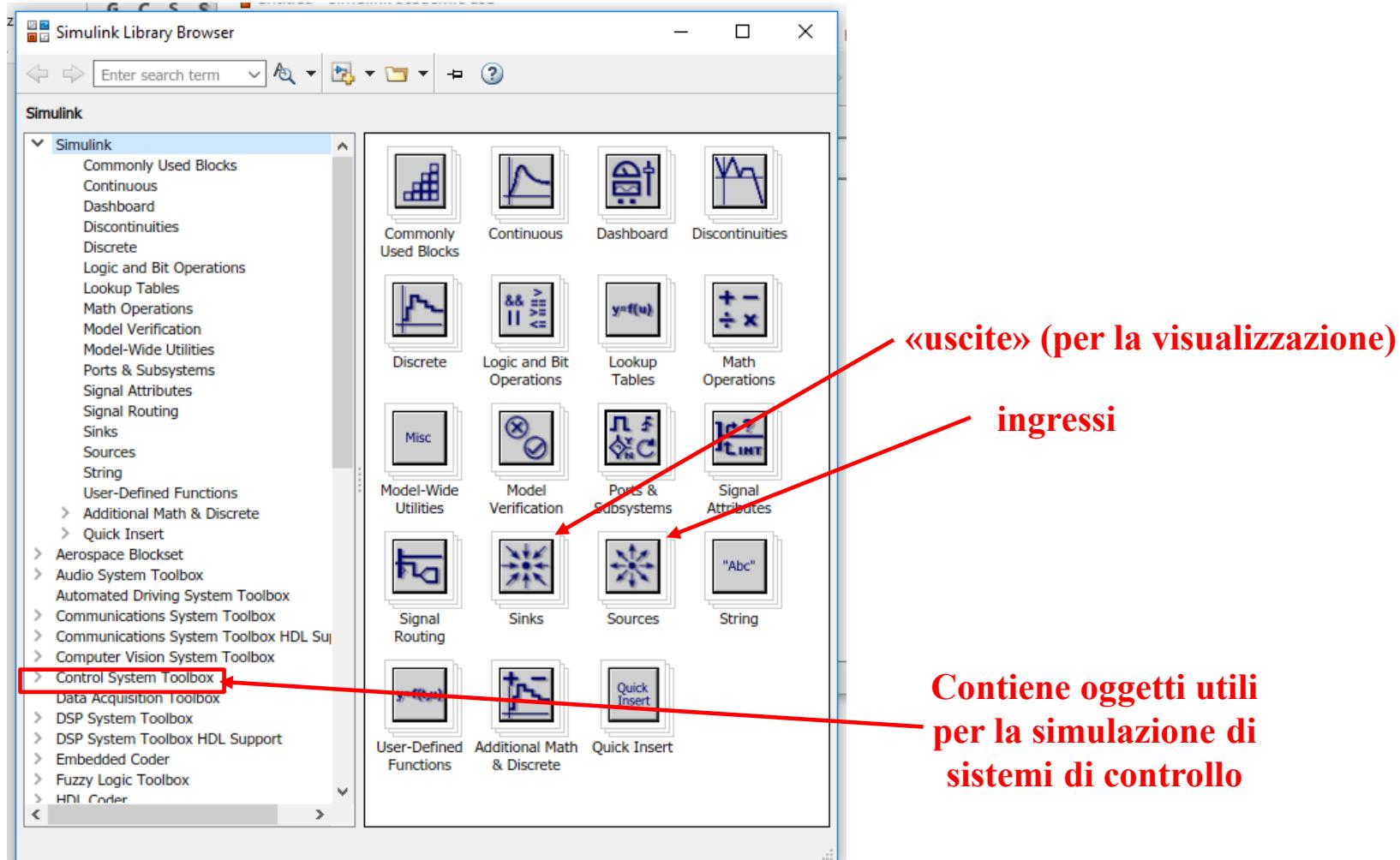
```
>> M = series(M1,M2)
```

```
>> M = parallel(M1,M2)
```

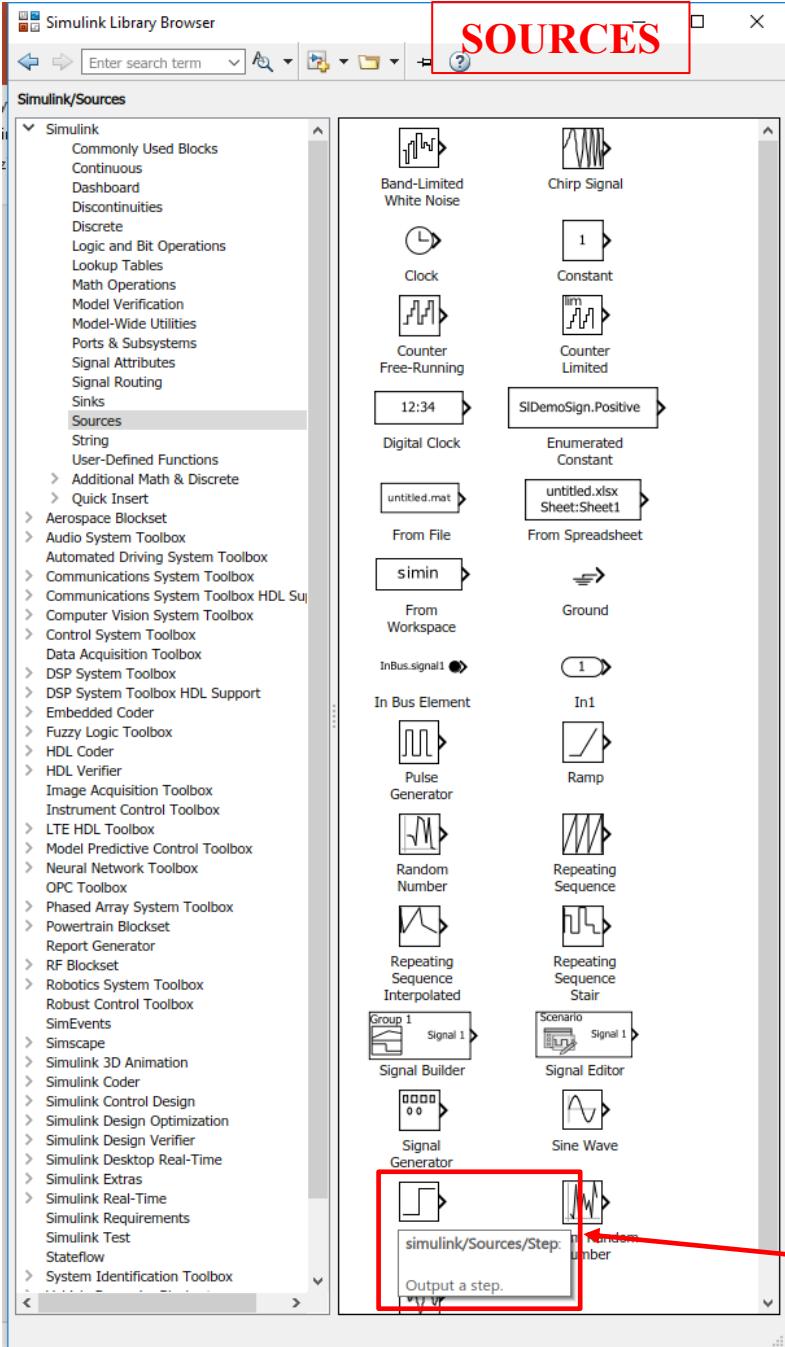
# 6. Simulink

Simulink è un ambiente di calcolo matematico e simulazione basato sul paradigma degli schemi a blocchi.

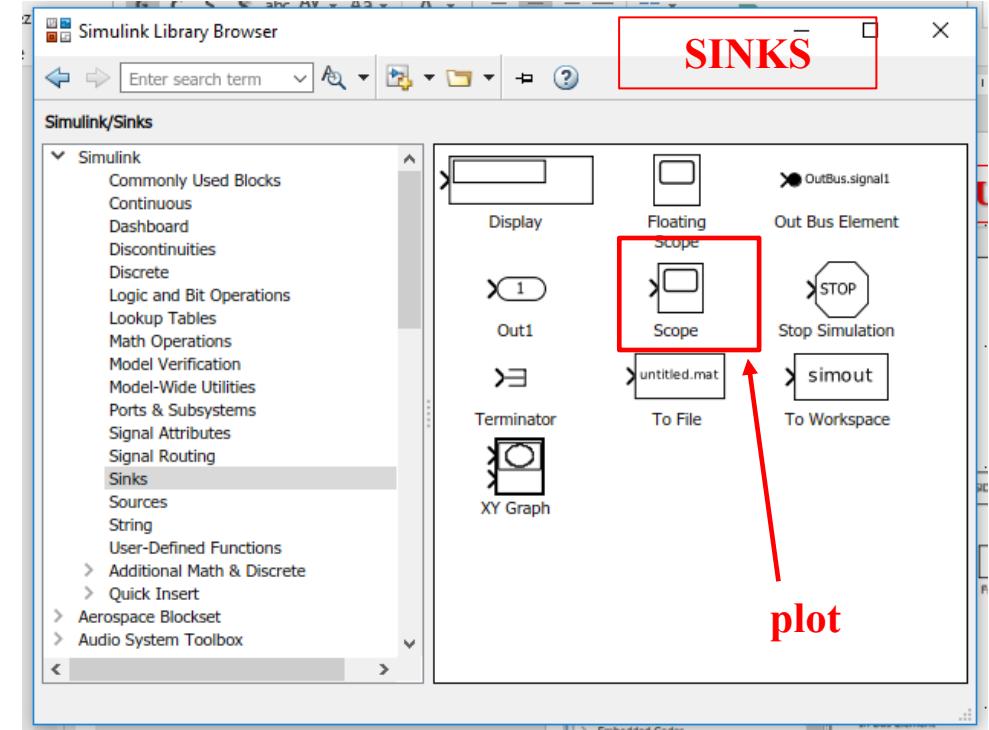
Consente di creare modelli (model) utilizzando relazioni matematiche predefinite (anche non lineari!) e blockset/toolbox su diversi ambiti specifici.



## SOURCES



## SINKS



scalino

Definiamo nel Matlab Workspace una funzione di trasferimento

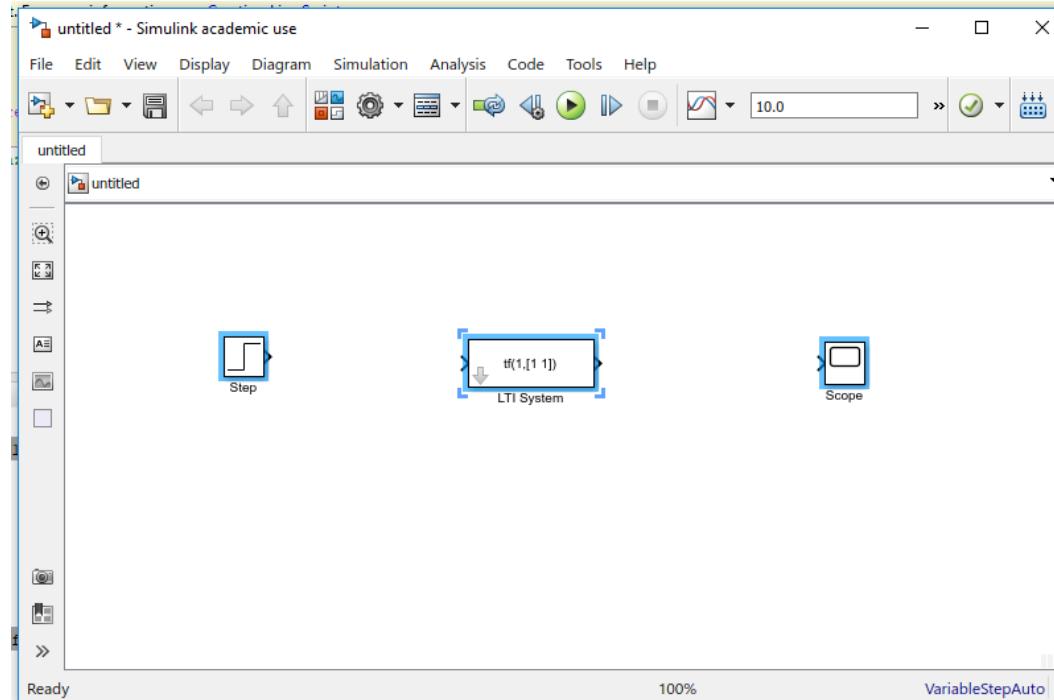
```
>> s=tf('s');  
>> G=24*(s-0.1)/(s^2+2*s+100)
```

G =

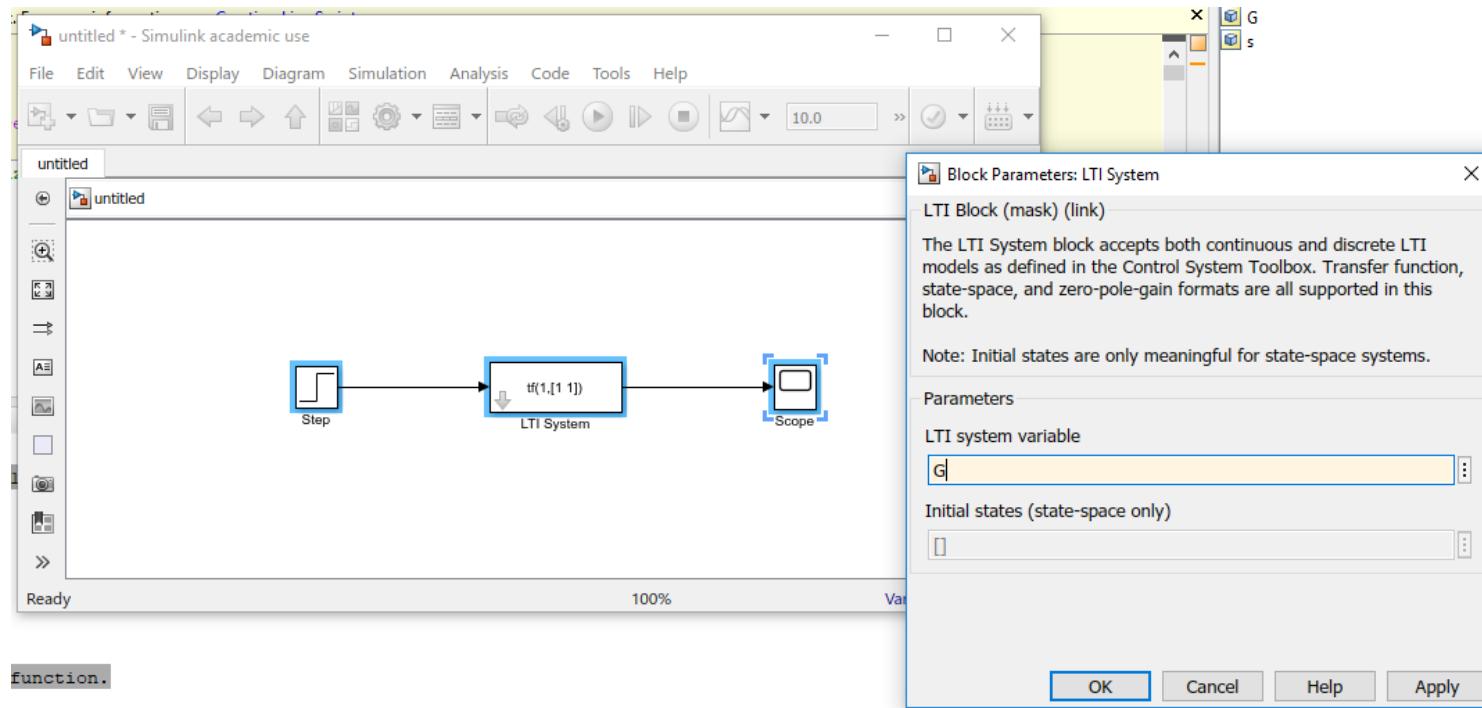
$$\frac{24 s - 2.4}{s^2 + 2 s + 100}$$

**Continuous-time transfer function.**

Creiamo un modello Simulink ed inseriamo una Source (per esempio Step), un Sink (per esempio Scope) ed un LTI model dal Control System Toolbox.

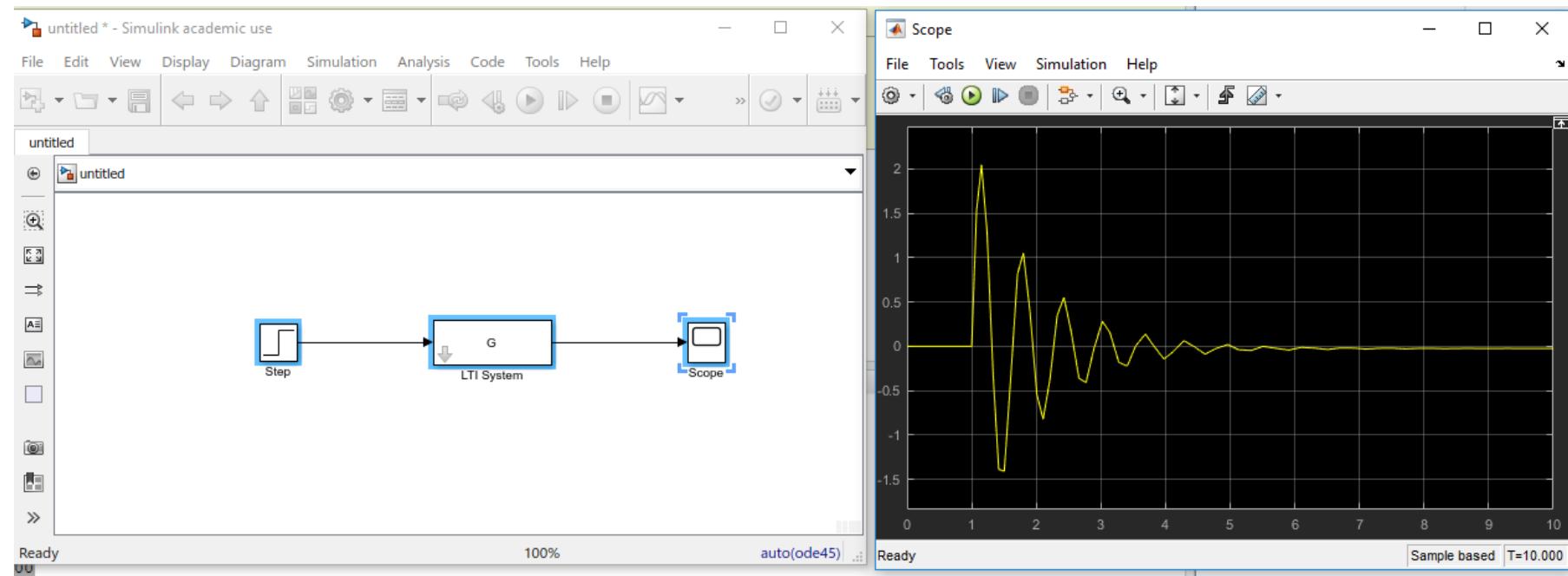


Li collegiamo tra loro ed inseriamo nel LTI model la fdt G.



function.

Apriamo la Scope e premiamo il pulsante Start.



E' possibile interconnettere (sotto-)sistemi semplici per ottenere sistemi complessi a piacere.

# SIMULINK®

New

Examples

Open...

Search



## Recent

## Projects

From Source Control ▾

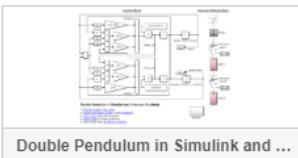
## Learn

Simulink Onramp

Stateflow Onramp

## Simscape Multibody

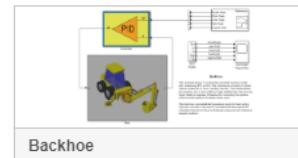
View All



Double Pendulum in Simulink and ...



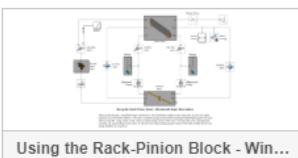
Airplane Wing Landing Gear



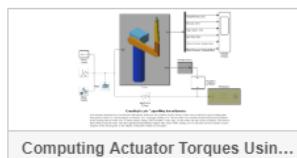
Backhoe



Modeling A Robot Using STEP Files



Using the Rack-Pinion Block - Win...



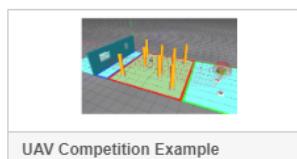
Computing Actuator Torques Usin...

## Simulink 3D Animation

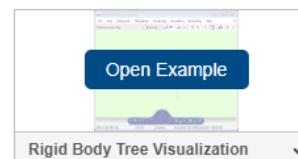
View All



Vehicle Dynamics Visualization wit...



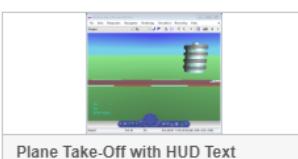
UAV Competition Example



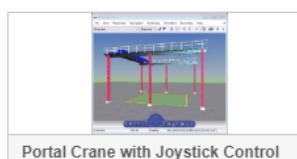
Rigid Body Tree Visualization



Differential Wheeled Robot in a Ma...



Plane Take-Off with HUD Text



Portal Crane with Joystick Control

## ▶ Simulink Coder

View All

## ▶ Simulink Control Design

View All

## ◀ Simulink Coverage

View All

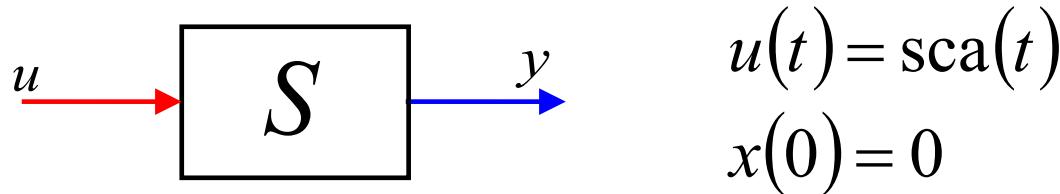
# Lezione 12.

# Risposta allo scalino

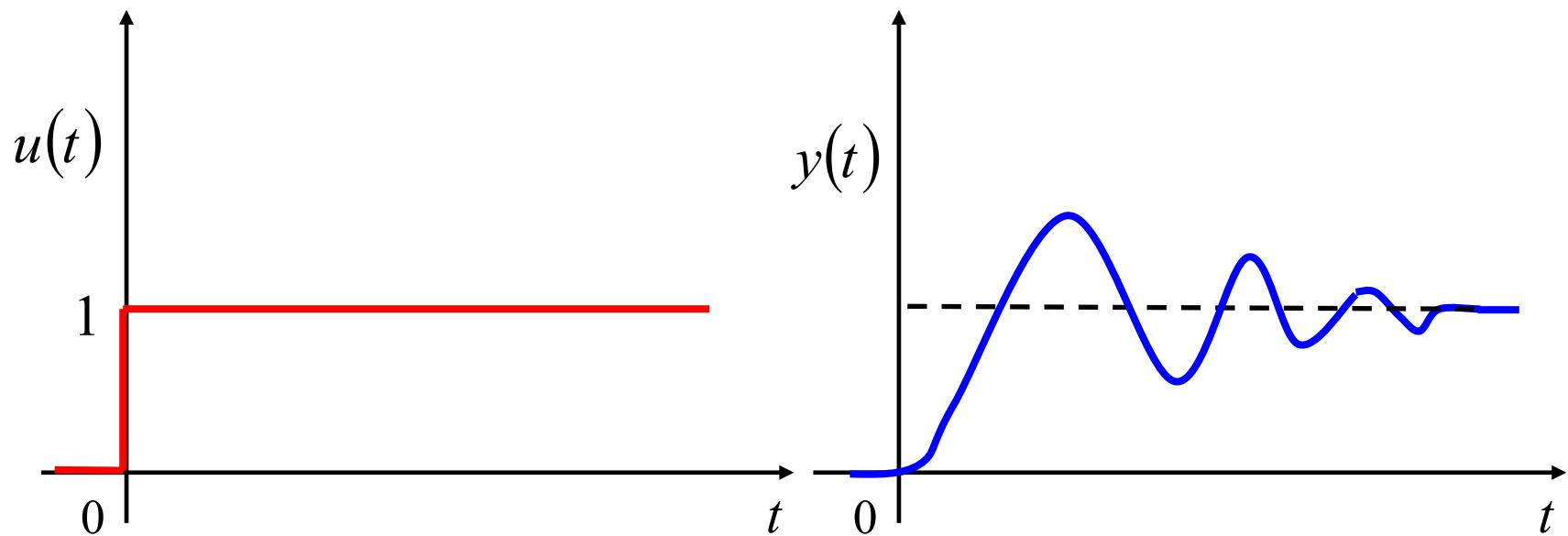
# Schema della lezione

1. Introduzione
2. Relazione tra le risposte ad ingressi canonici
3. Parametri caratteristici della risposta allo scalino
4. Sistemi del I ordine strettamente proprio
5. Sistemi del I ordine non strettamente proprio
6. Sistemi del II ordine con poli reali distinti
7. Sistemi del II ordine con poli reali distinti ed uno zero
8. Sistemi del II ordine con due poli complessi coniugati
9. Pulsazione naturale e smorzamento
10. Sistemi di ordine superiore al secondo
11. Approssimazione a poli dominanti
12. Matlab

# 1. Introduzione



Sistema asintoticamente stabile

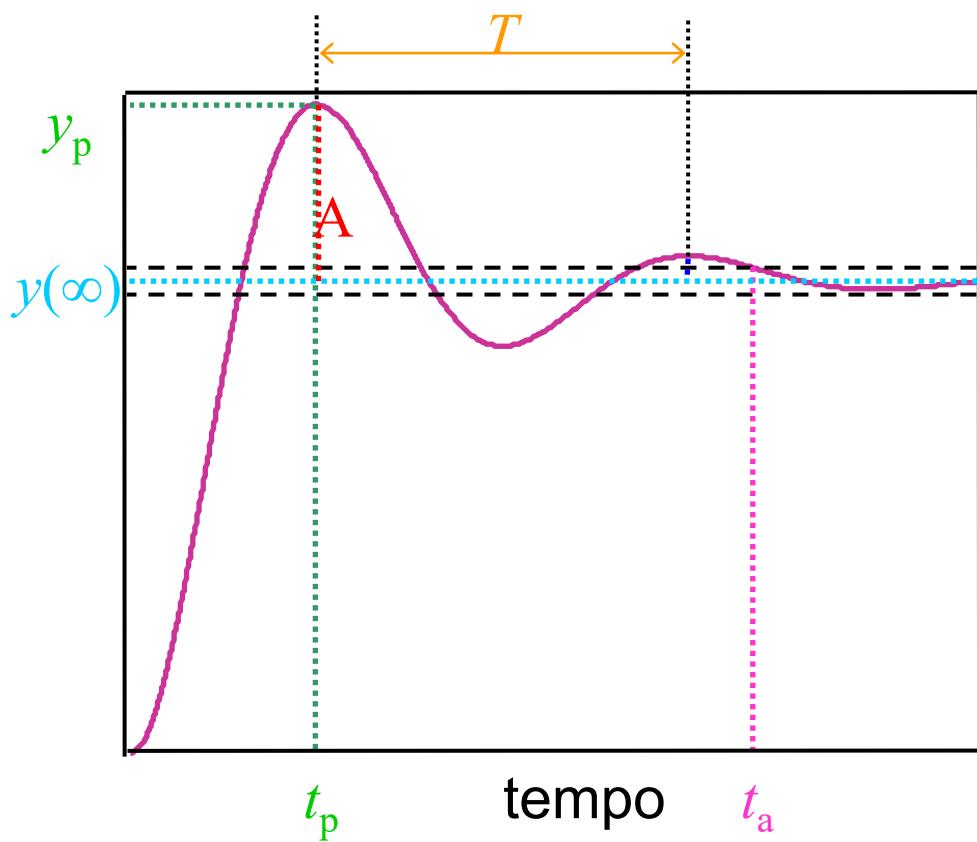


## 2. Relazione tra le risposte a ingressi canonici

| imp( $t$ )  | sca( $t$ )    | ram( $t$ )  |
|---|---------------|---|
| $\frac{d}{dt}$ sca( $t$ )   |               | $\int_0^t$ sca( $\tau$ ) $d\tau$  |
| 1   | $\frac{1}{s}$ | $\frac{1}{s^2}$   |
| Risposta<br>all'impulso   |               | Risposta<br>alla rampa  |
| $\frac{d}{dt} \left[ \begin{array}{l} \text{risposta} \\ \text{allo scalino} \end{array} \right]$ |               | $\int_0^t \left[ \begin{array}{l} \text{risposta} \\ \text{allo scalino} \end{array} \right] d\tau$ |

### 3. Parametri caratteristici della risposta allo scalino

Risposta allo scalino



$y(\infty)$   $\bar{y}$  Valore di regime

$t_a$  Tempo di assestamento

$t_p$  Tempo di picco

$y_p$  Valore di picco

$A = y_p - y(\infty)$  Massima sovraelongazione

$\Delta = \frac{A}{y(\infty)}$  Massima sovraelongazione relativa

$T$  Periodo delle oscillazioni

## 4. Sistemi del primo ordine strettamente propri

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + s\tau}$$

Strettamente proprio

$$\tau > 0$$



Sistema as. stabile

$$\mu > 0$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{(1+s\tau)} \frac{1}{s}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s(1+s\tau)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{\mu}{\tau}}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s} - \frac{\mu}{s+\frac{1}{\tau}}\right] = \mu\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

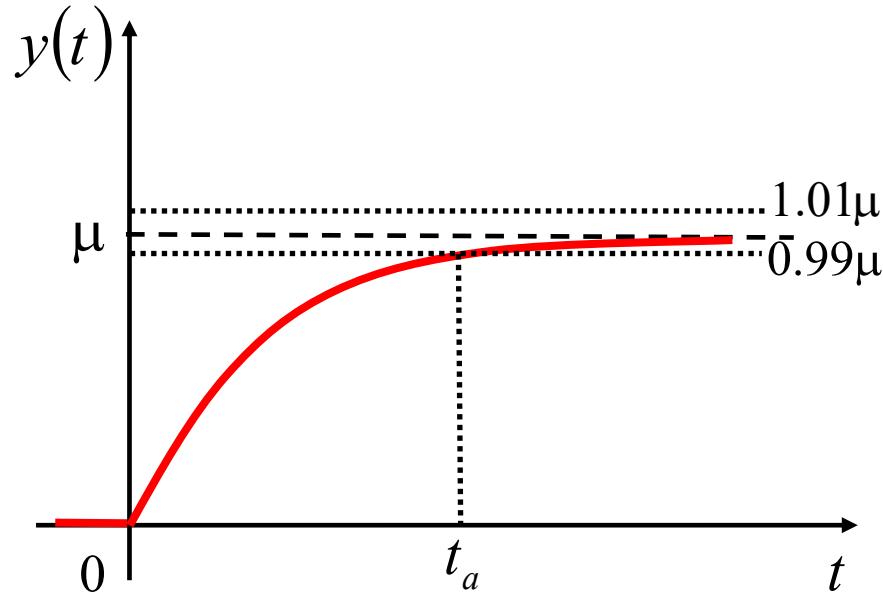
$$y(t) = \mu\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad t \geq 0$$

$$y(\mathbf{0}^+) = 0$$

$$\dot{y}(\mathbf{0}) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sY(s) - y(0)] = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{\frac{\mu}{\tau}}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{\mu}{\tau}$$

$$y(\infty) = \mu$$

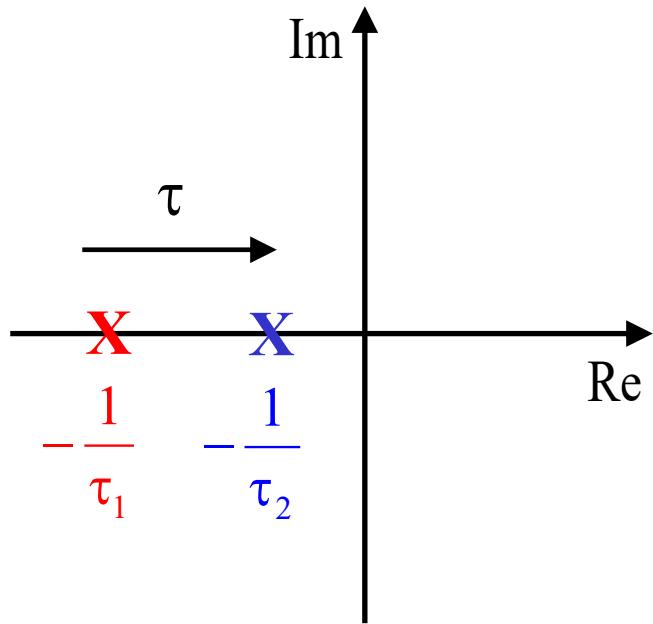
## Valutazione del tempo di assestamento



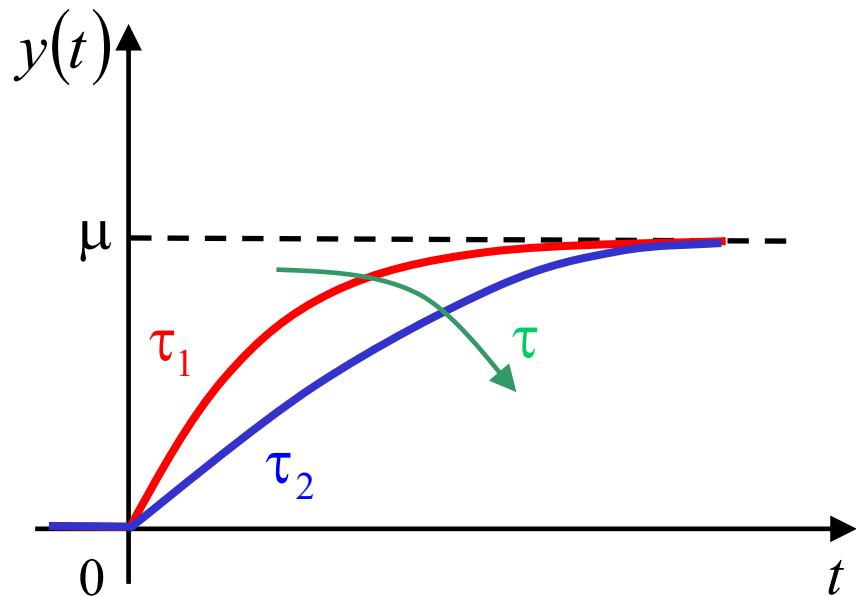
$$\begin{aligned}y(t_a) &= 0.99 \mu \\ \mu(1 - e^{-\frac{t_a}{\tau}}) &= 0.99\mu \\ 1 - e^{-\frac{t_a}{\tau}} &= 0.99 \\ e^{-\frac{t_a}{\tau}} &= 0.01 \\ -\frac{t_a}{\tau} &= \ln 0.01 \\ \frac{t_a}{\tau} &= \ln 100 \\ t_a &\cong 4.6\tau\end{aligned}$$

$$t_a \cong 5\tau$$

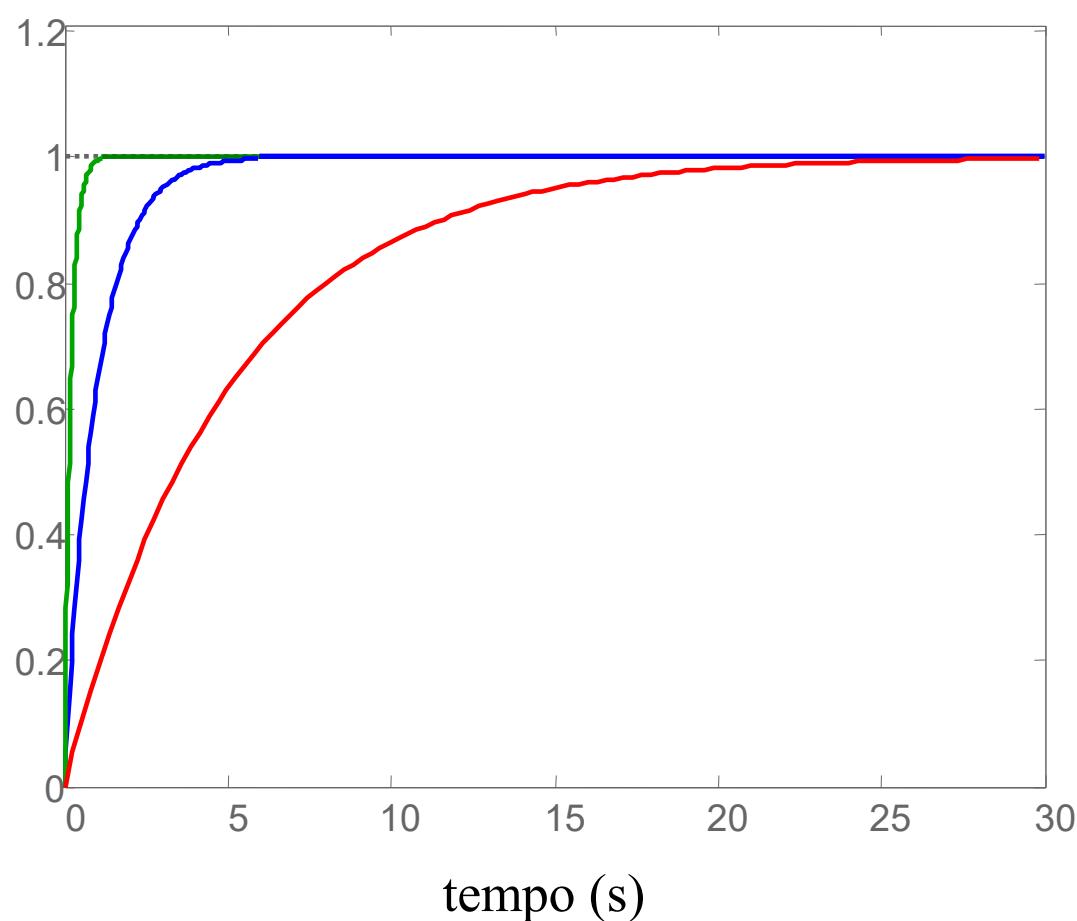
## Posizione del polo e velocità della risposta



Più vicino è il polo all'asse immaginario, più grande è la costante di tempo associata, più lenta è la risposta.



# Esempio



$$G(s) = \frac{1}{1 + s\tau}$$

$\tau = 0.2$  s

$\tau = 1$  s

$\tau = 5$  s

## 5. Sistemi del primo ordine non strettamente propri

$$G(s) = \frac{\mu(1+sT)}{1+s\tau}$$

Non strettamente proprio

$\tau > 0$   Sistema as. stabile

$\mu > 0 \quad T \neq \tau$

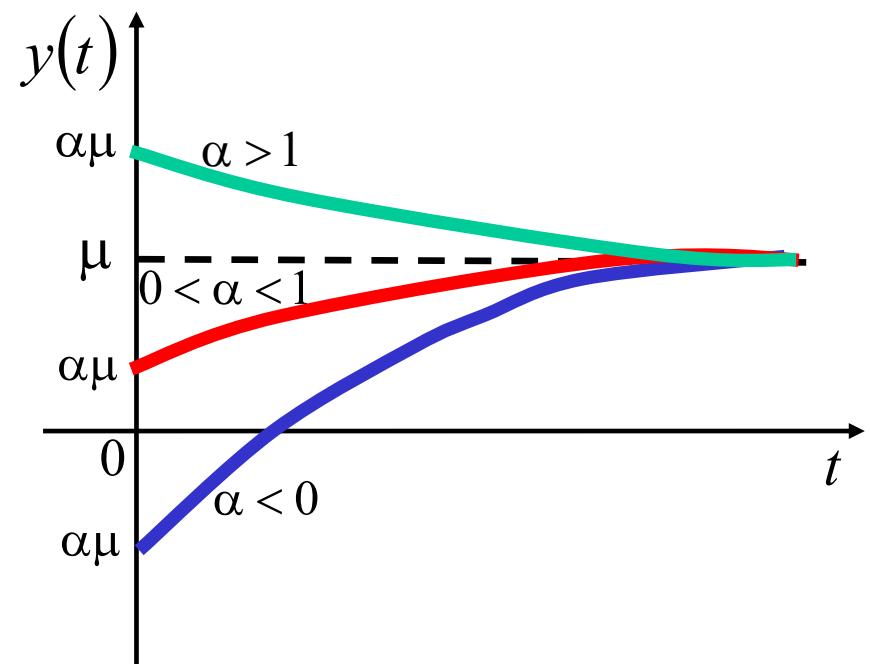
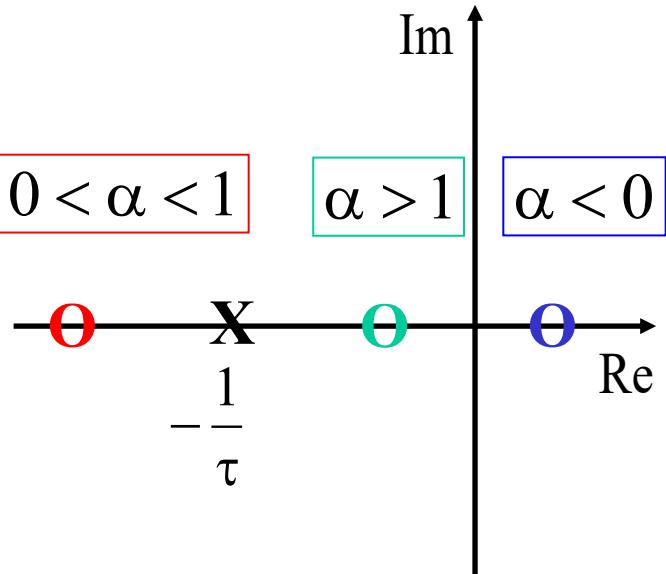
$$\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)U(s) = \frac{\mu(1+sT)}{1+s\tau} \frac{1}{s} = \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu(1+sT)}{s(1+s\tau)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{\mu T}{\tau}\left(s+\frac{1}{T}\right)}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}\right] = \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s} + \frac{\frac{\mu(T-\tau)}{\tau}}{s+\frac{1}{\tau}}\right] = \mu\left(1 + \frac{T-\tau}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad t \geq 0
\end{aligned}$$

ponendo  $\textcolor{green}{T = \alpha\tau}$

$$y(t) = \mu\left(1 + (\alpha - 1)e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad t \geq 0$$

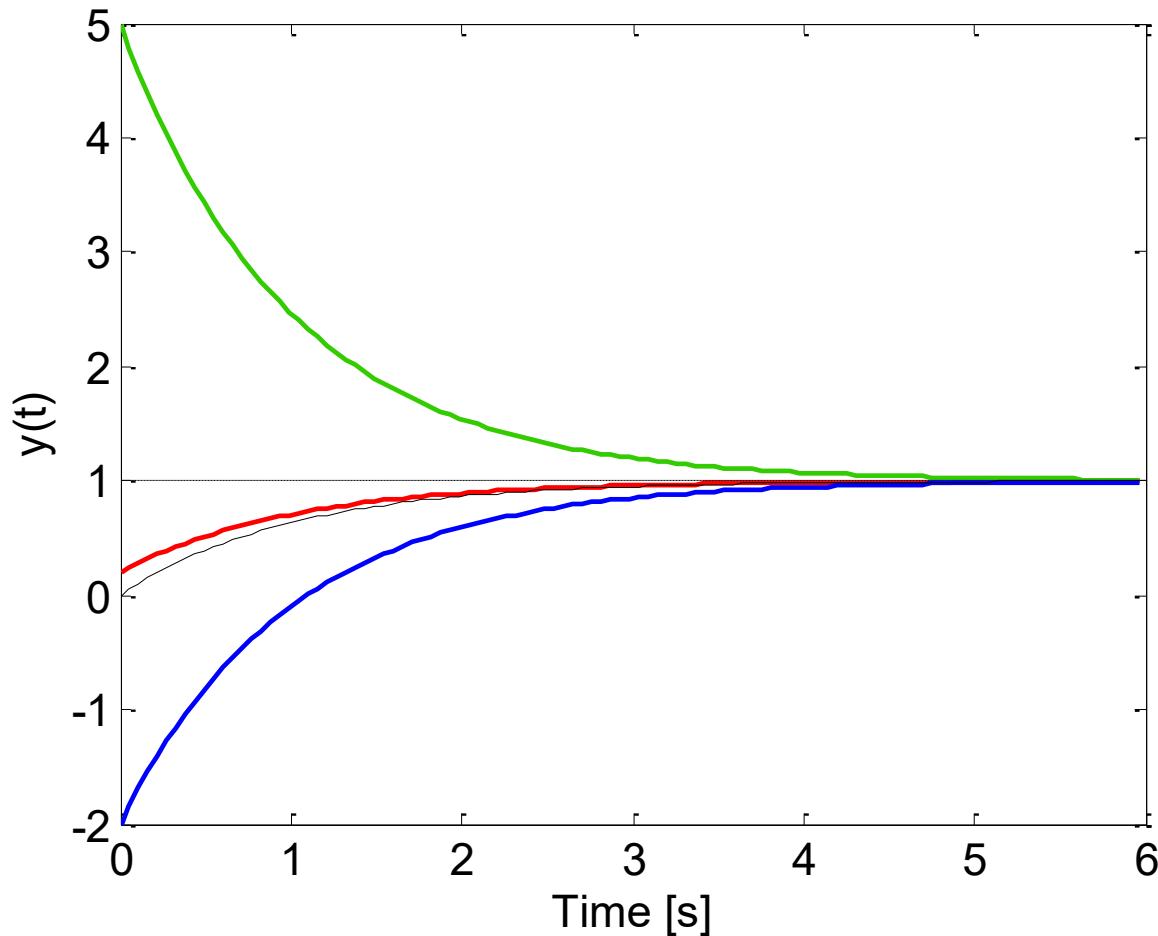
$$y(0^+) = \mu \frac{T}{\tau} \neq 0 \quad \textcolor{red}{\leftarrow} \quad \textit{non inizia da 0!}$$

$$y(\infty) = \mu$$



Tempo di assestamento  $t_a \cong 5\tau$

# Esempio



$$G(s) = \frac{1+sT}{1+s}$$

$$T = -2 \text{ s} \quad \alpha = -2$$

$$T = 5 \text{ s} \quad \alpha = 5$$

$$T = 0.2 \text{ s} \quad \alpha = 0.2$$

$$T = 0 \text{ s} \quad \alpha = 0$$

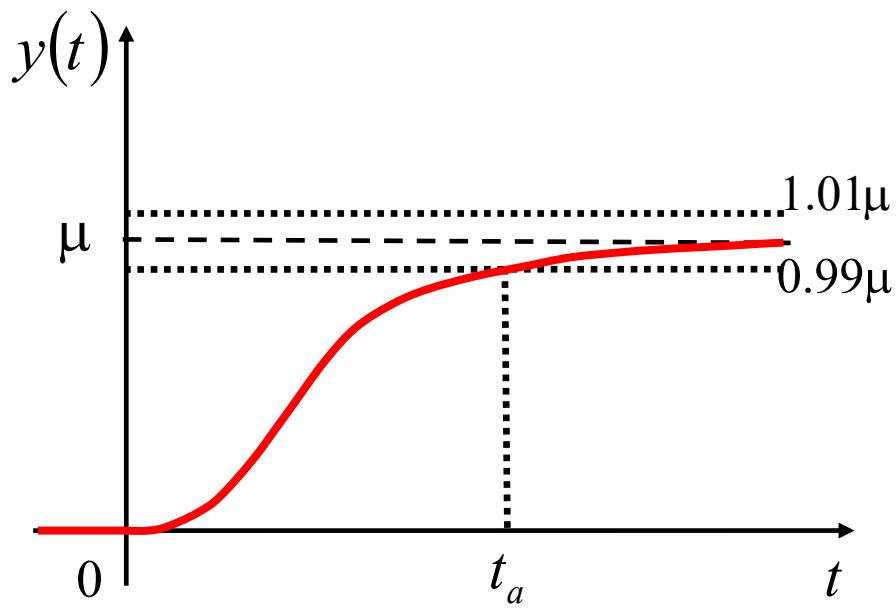
Se la costante di tempo dello zero è molto più piccola (in valore assoluto) di quella del polo allora la risposta non differisce molto dalla risposta del solo polo.

## 6. Sistemi del secondo ordine con poli reali distinti

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \quad \begin{array}{l} \tau_1 \neq \tau_2 \quad \mu > 0 \\ \tau_1 > \tau_2 > 0 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{as stabile}}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{\mu}{\tau_1\tau_2}}{s\left(s+\frac{1}{\tau_1}\right)\left(s+\frac{1}{\tau_2}\right)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s} - \frac{\frac{\mu\tau_1}{\tau_1-\tau_2}}{s+\frac{1}{\tau_1}} + \frac{\frac{\mu\tau_2}{\tau_1-\tau_2}}{s+\frac{1}{\tau_2}}\right] \end{aligned}$$

$$y(t) = \mu \left( 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right) \quad t \geq 0$$



$$y(0^+) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sY(s) - y(0)] = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{\frac{\mu}{\tau_1 \tau_2}}{s \left( s + \frac{1}{\tau_1} \right) \left( s + \frac{1}{\tau_2} \right)} = 0$$

$$y(\infty) = \mu > 0$$

*derivata iniziale nulla!*

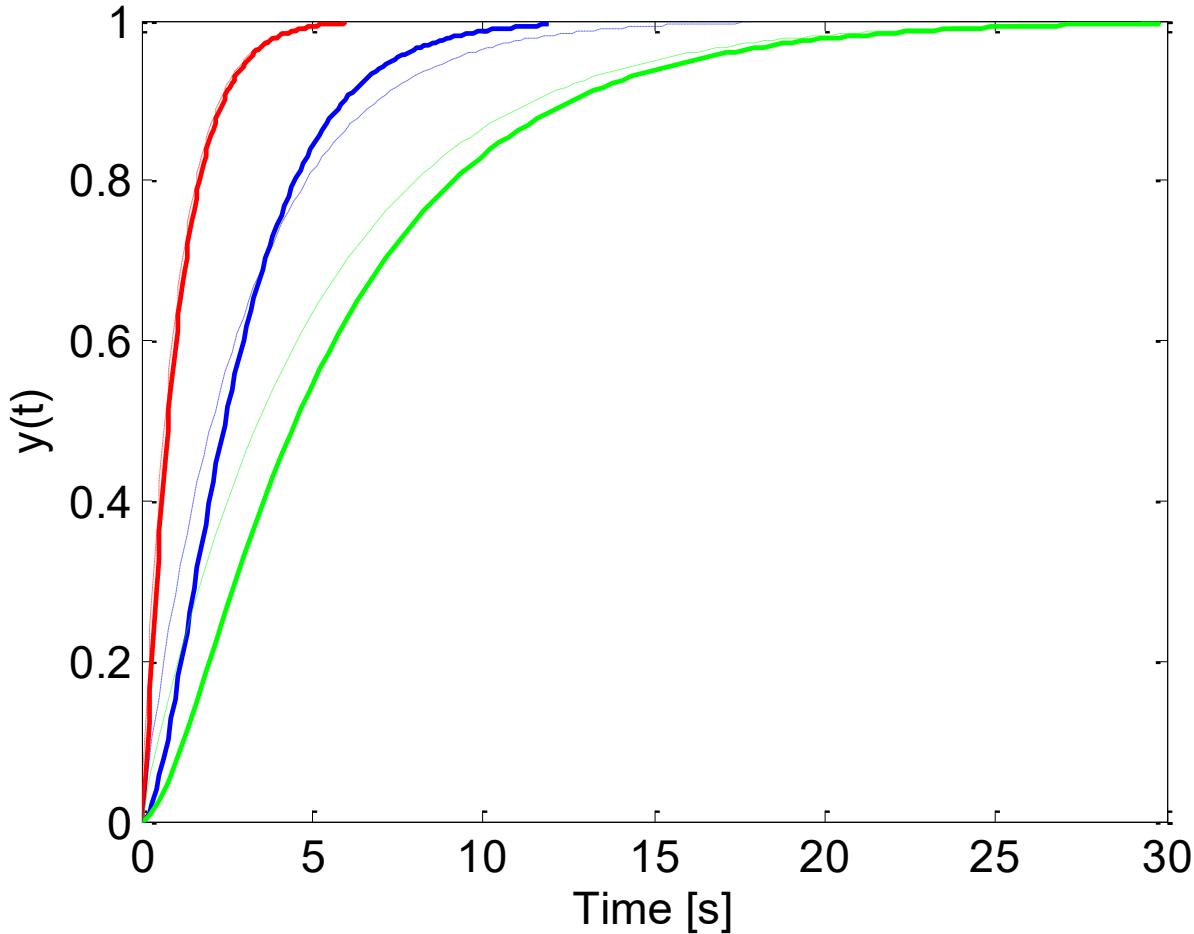
$t_a$  è una funzione non semplice di  $\tau_1$  e  $\tau_2$ .

Si osservi però che se  $\tau_1 \gg \tau_2$  allora  $e^{-t/\tau_1} \gg e^{-t/\tau_2}$

$$y(t) = \mu \left( 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right) \cong \mu \left( 1 - e^{-t/\tau_1} \right)$$

Il polo  $-\frac{1}{\tau_1}$  si dice **polo dominante**.

# Esempio



$$G(s) = \frac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$

linea continua

$$\tau_1 = 5\text{s}; \tau_2 = 1\text{s}$$

$$\tau_1 = 3\text{s}; \tau_2 = 1\text{s}$$

$$\tau_1 = 1\text{s}; \tau_2 = 0.1\text{s}$$

linea tratteggiata

$$\tau_1 = 5\text{s}; \tau_2 = 0\text{s}$$

$$\tau_1 = 3\text{s}; \tau_2 = 0\text{s}$$

$$\tau_1 = 1\text{s}; \tau_2 = 0\text{s}$$

La costante di tempo più grande (il polo lento) è la più importante nel determinare la forma della risposta allo scalino (ed in particolare il tempo di assestamento)

## 7. Sistema del secondo ordine con poli reali distinti ed uno zero

$$G(s) = \frac{\mu(1+sT)}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)} \quad \begin{array}{l} \tau_1 \neq \tau_2 \neq T \quad \mu > 0 \\ \tau_1 > \tau_2 > 0 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{as stabile}}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right]$$

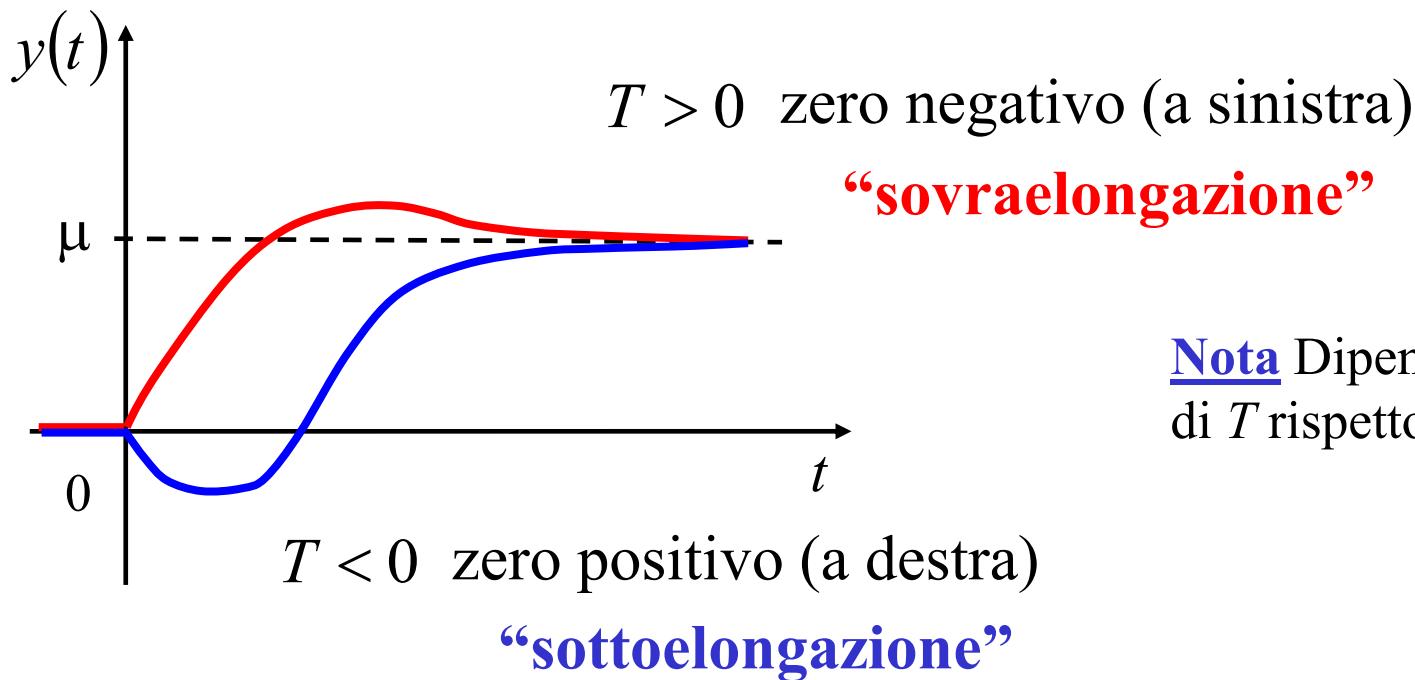
$$\boxed{y(t) = \mu \left( 1 - \frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right)} \quad t \geq 0$$

$$y(0^+) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = \frac{\mu T}{\tau_1 \tau_2} = \begin{cases} > 0 & \text{se } T > 0 \\ < 0 & \text{se } T < 0 \end{cases}$$

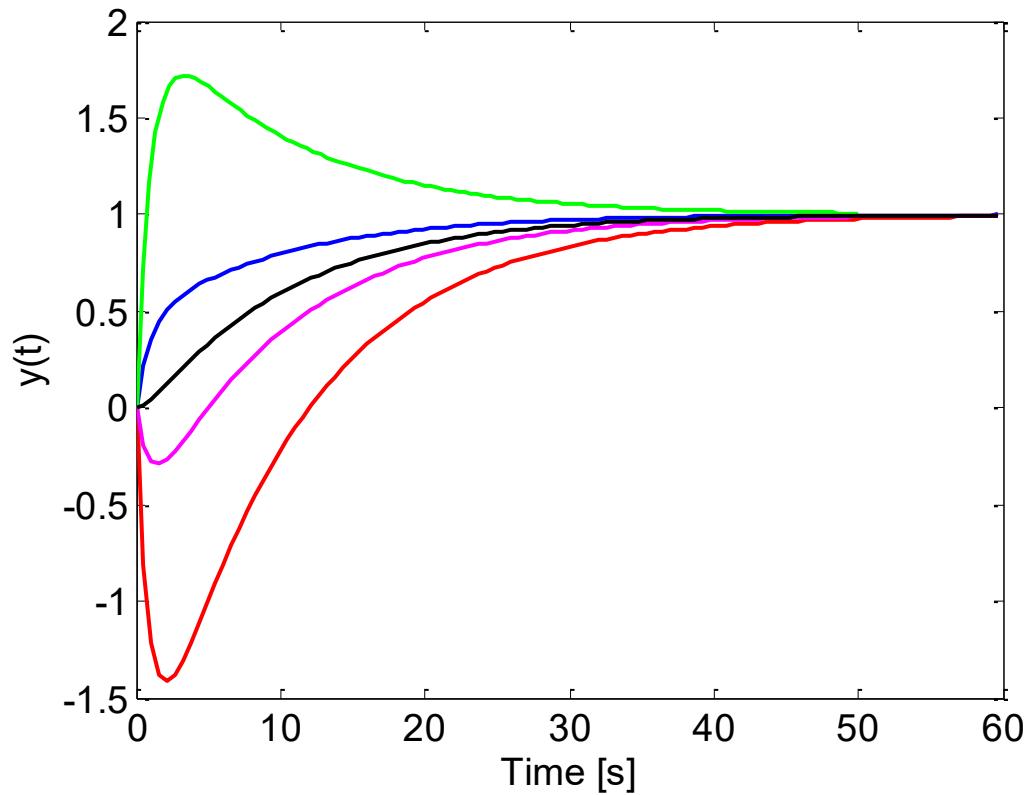
$$y(\infty) = \mu > 0$$

Il segno della derivata iniziale dipende dal segno dello zero!



**Nota** Dipende dal valore di  $T$  rispetto a  $\tau_1, \tau_2$

# Esempio



$$G(s) = \frac{(1+sT)}{(1+10s)(1+s)}$$

- $T=0\text{s}$  no zero
- $T=5\text{s}$  zero  $<0$  “intermedio”
- $T=-5\text{s}$  zero  $>0$  “intermedio”
- $T=20\text{s}$  zero  $<0$  “lento”
- $T=-20\text{s}$  zero  $>0$  “lento”

Riassumendo.

Zero a dx: sempre sottoelongazione, tanto maggiore quanto più lo zero è piccolo (cioè “lento”) rispetto al polo dominante (in modulo).

Zero a sx: sovraelongazione solo se lo zero è piccolo rispetto al polo dominante (in modulo).

## 8. Sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati

$$G(s) = \frac{\rho}{(s - \sigma + j\omega)(s - \sigma - j\omega)}$$

$$= \frac{\rho}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$$

guadagno

$$\mu = G(0) = \frac{\rho}{\sigma^2 + \omega^2} \quad \rho > 0$$

poli  $\sigma \pm j\omega$        $\sigma < 0$

as stabile

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\rho}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} \frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mu}{s} + \frac{-\mu s + 2\sigma\mu}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}\right]$$

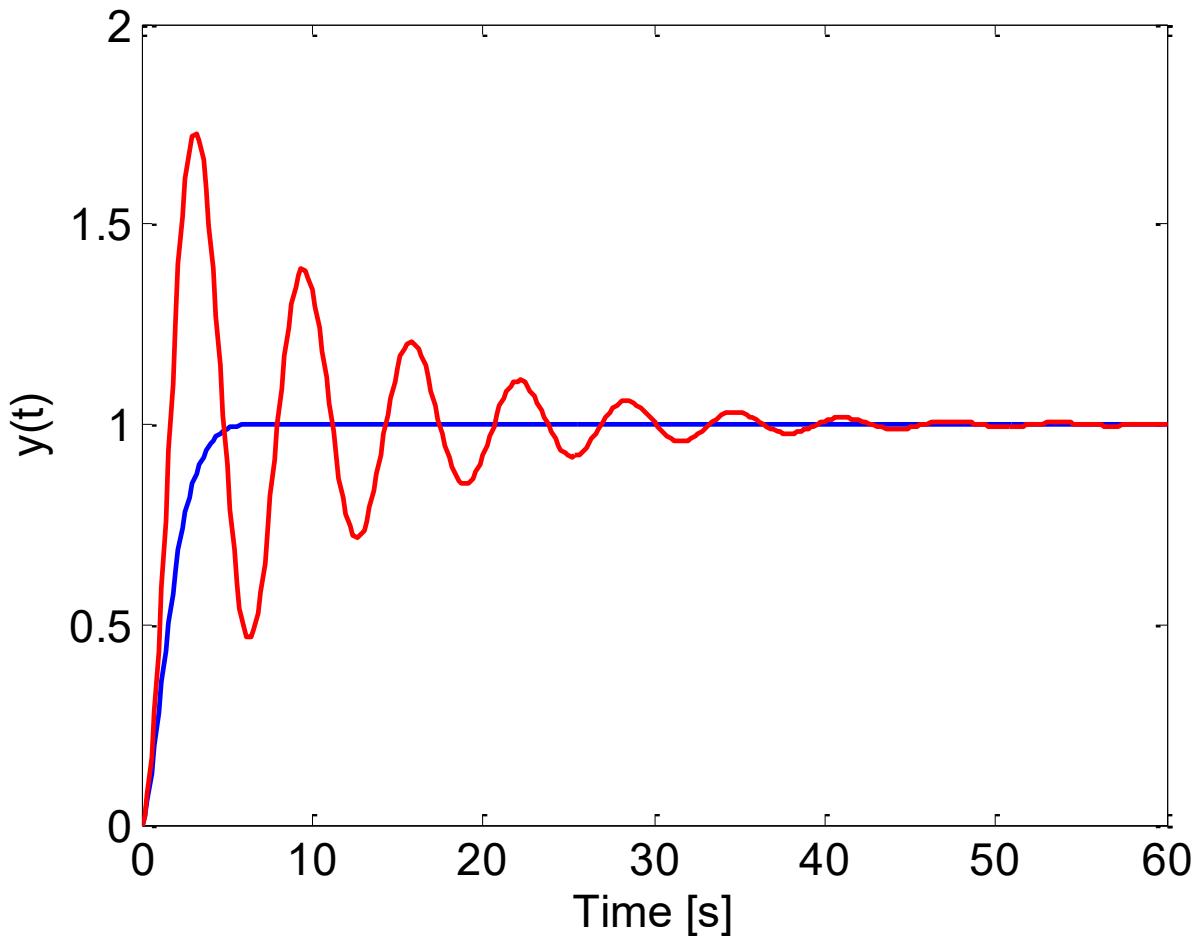
$$= \mu \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s - \sigma - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}\right] = \mu \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{\sigma}{\omega} \frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}\right]$$

$e^{\sigma t} \cos \omega t$        $e^{\sigma t} \sin \omega t$

$$y(t) = \mu \left[ 1 - e^{\sigma t} \cos \omega t + \frac{\sigma}{\omega} e^{\sigma t} \sin \omega t \right]$$

$t \geq 0$

# Esempio

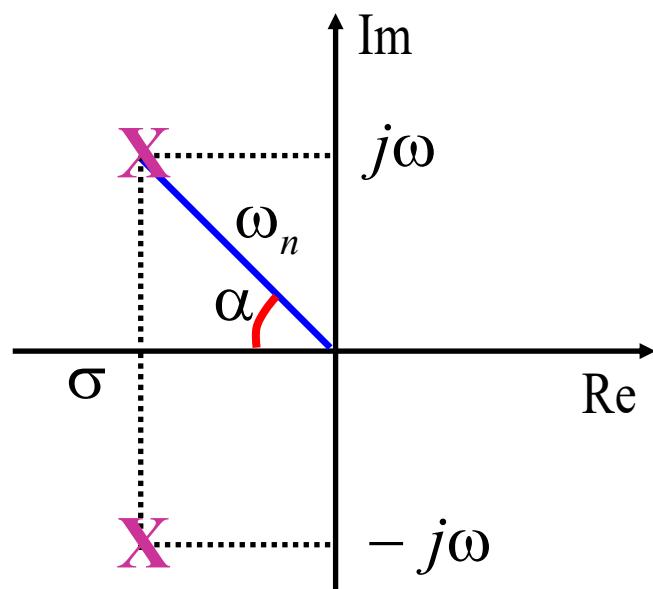


$$s_{1,2} = -0.9 \pm j0.4359$$

$$s_{1,2} = -0.1 \pm j0.9950$$

Come faccio a capire  
(in modo semplice)  
se la risposta presenta  
oscillazioni o no?

## 9. Pulsazione naturale e smorzamento



$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

pulsazione naturale

$$\xi = \cos \alpha = \frac{-\sigma}{\omega_n}$$

smorzamento

Relazioni inverse

$$\sigma = -\omega_n \xi \quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Una funzione di trasferimento con due poli complessi coniugati si può quindi esprimere usando **pulsazione naturale** e **smorzamento**:

$$G(s) = \frac{\rho}{(s - \sigma)^2 + \omega^2} = \frac{\rho}{s^2 - 2\sigma s + \underbrace{\sigma^2 + \omega^2}_{\omega_n^2}} = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$\sigma = -\omega_n \xi$   
 $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$

$$G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

## Esempio

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 4s + 13}$$

poli in  $s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm j3$

$\sigma = -2 \quad \omega = 3$

Usando la definizione:  $\omega_n = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$$\xi = \frac{-\sigma}{\omega_n} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

## Esempio (esula dal problema della risposta allo scalino)

$$G(s) = \frac{10}{s^2 - 4s + 13}$$

poli in  $s_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm j3$

$\sigma = 2 \quad \omega = 3$

Usando la definizione:  $\omega_n = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$$\xi = \frac{-\sigma}{\omega_n} = \frac{-2}{\sqrt{13}}$$

## Casi notevoli

Essendo  $\xi = \frac{-\sigma}{\omega_n} = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$   -1 ≤ ξ ≤ 1

### In particolare

- $\xi = 1$  se  $\begin{cases} \omega = 0 \\ \sigma < 0 \end{cases}$  Poli reali coincidenti as. stabili in  $-\omega_n$

Infatti  $G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{(s + \omega_n)^2}$

- $\xi = -1$  se  $\begin{cases} \omega = 0 \\ \sigma > 0 \end{cases}$  Poli reali coincidenti instabili in  $+\omega_n$

Infatti  $G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{s^2 - 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{(s - \omega_n)^2}$

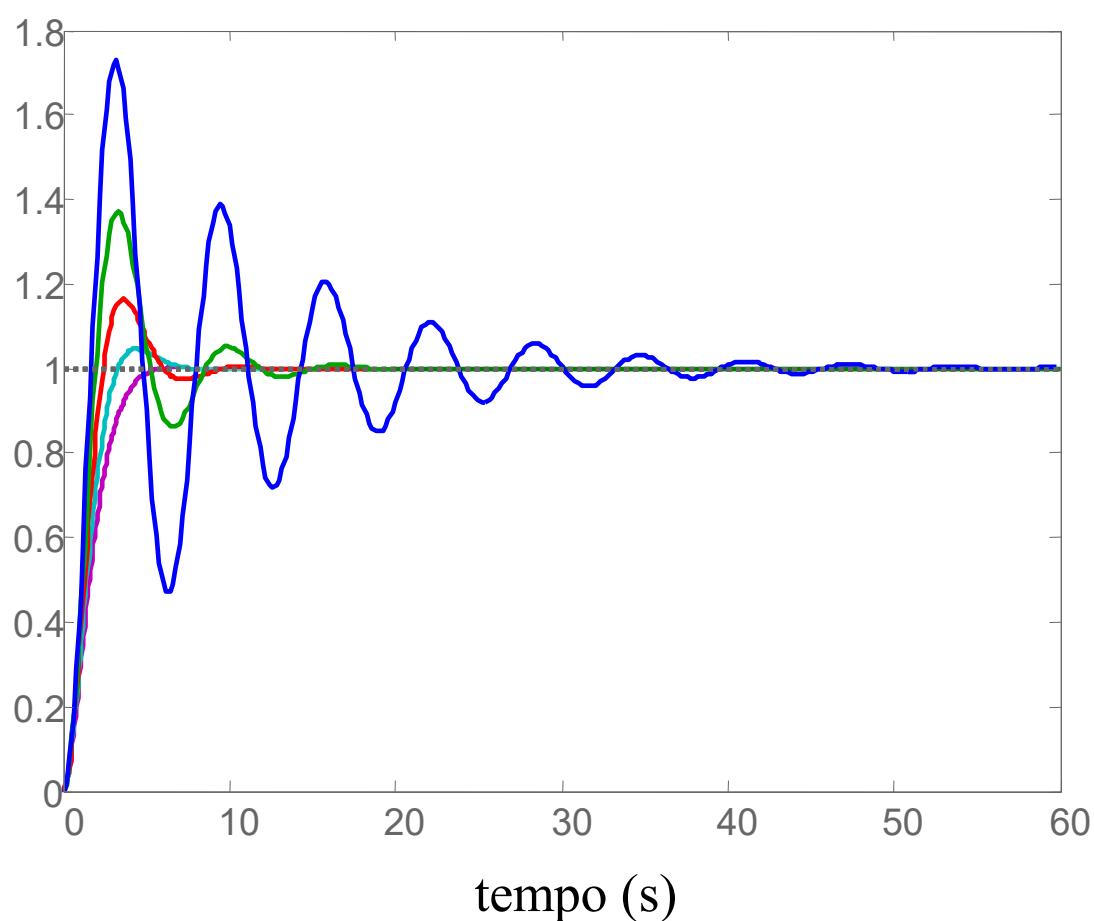
- $\xi = 0$  se  $\sigma = 0$  Poli immaginari coniugati in  $\pm j\omega_n$

Infatti  $G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\rho}{s^2 + \omega_n^2}$

### In generale

- $0 < \xi < 1$  se  $\sigma < 0$  Poli complessi coniugati as. stabili
- $-1 < \xi < 0$  se  $\sigma > 0$  Poli complessi coniugati instabili

# Esempio



$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi s + s^2}$$

$$\mu = 1 \quad \omega_n = 1$$

$$\xi = 0.1$$

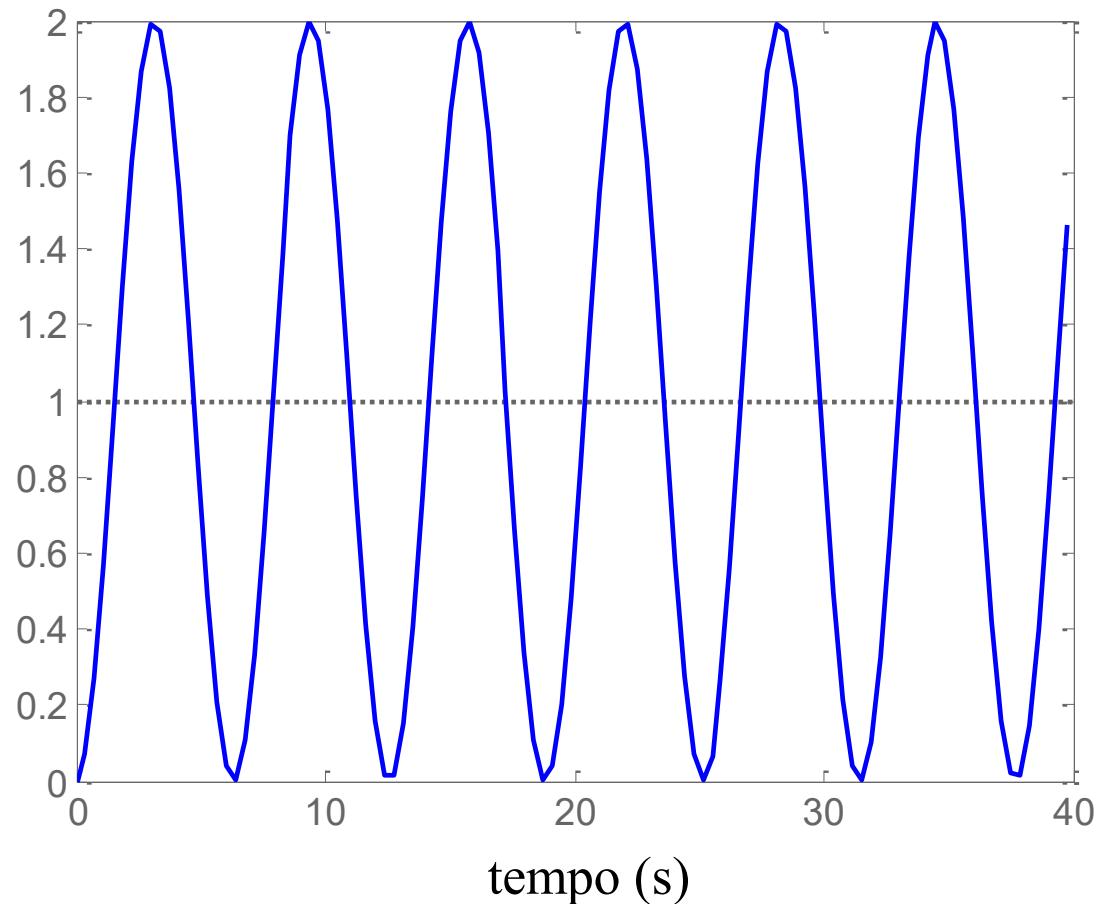
$$\xi = 0.3$$

$$\xi = 0.5$$

$$\xi = 0.7$$

$$\xi = 0.9$$

$$\xi = 0$$



## Parametri caratteristici della risposta allo scalino (in funzione di $\omega_n$ e $\xi$ )

$$t_a \cong \frac{5}{\sigma} = \frac{5}{\xi \omega_n}$$

tempo d'assestamento

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

periodo di eventuali oscillazioni

$$t_p = \frac{1}{2} T = \frac{\pi}{\omega}$$

tempo dell'eventuale primo picco

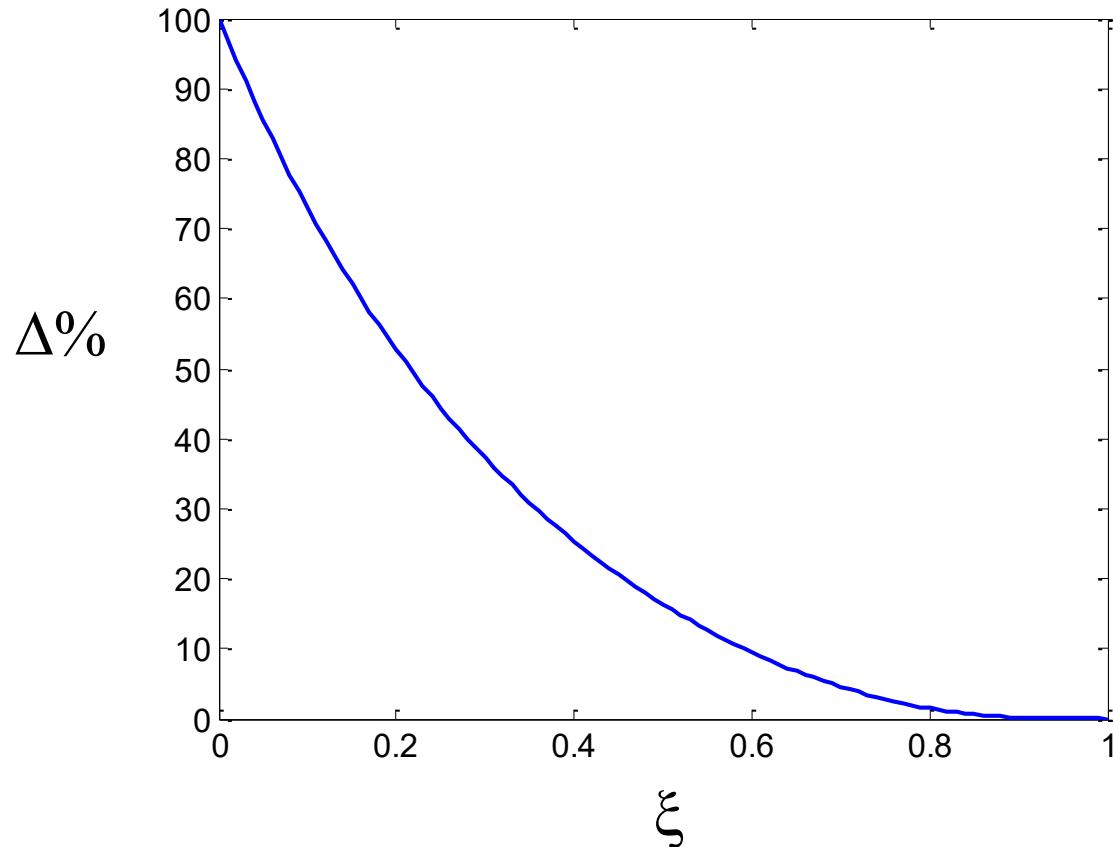
$$y_p = \mu \left[ 1 + e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega}} \right] = \mu \left[ 1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right]$$

ampiezza dell'eventuale  
primo picco

$$\Delta \% = 100 \frac{A}{\bar{y}} = 100 e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega}} = 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \%$$

massima sovraelongazione  
relativa percentuale

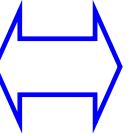
## Massima sovraelongazione percentuale



$$\Delta\% = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \%$$

# 10. Risposta allo scalino di sistemi di ordine superiore al secondo

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^m (1+sT_i)}{\prod_{i=1}^n (1+s\tau_i)}$$

as stabile   $\text{Re}(\tau_i) > 0$   
 $g \leq 0$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

## Teorema valore iniziale (con g=0)

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{G(s)}{s} \begin{cases} \xrightarrow{\quad} 0 & \text{se } m < n \\ \xrightarrow{\quad} \neq 0 & \text{se } m = n \end{cases}$$

str. proprio  
non str. proprio

In generale:

$$\begin{cases} \frac{d^i y}{dt^i}(0^+) = 0 & \text{per } i = 0, \dots, r-1 \\ \frac{d^i y}{dt^i}(0^+) \neq 0 & \text{per } i \geq r \end{cases}$$

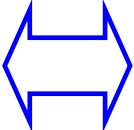
dove  $r = n-m$  è il  
grado relativo

## Teorema valore finale

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G(s)}{s} \begin{cases} \xrightarrow{\quad} \mu & \text{se } g = 0 \\ \xrightarrow{\quad} 0 & \text{se } g < 0 \end{cases}$$

# 11. Approssimazione a poli dominanti

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^m (1+sT_i)}{\prod_{i=1}^n (1+s\tau_i)}$$

as stabile   $\begin{cases} \text{Re}(\tau_i) > 0 \\ g \leq 0 \end{cases}$

Ipotesi: poli reali distinti  $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{\alpha_0}{s} + \frac{\alpha_1}{1+s\tau_1} + \frac{\alpha_2}{1+s\tau_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{1+s\tau_n}$$

$\mathcal{L}^{-1}$      $\mathcal{L}^{-1}$      $\mathcal{L}^{-1}$      $\mathcal{L}^{-1}$

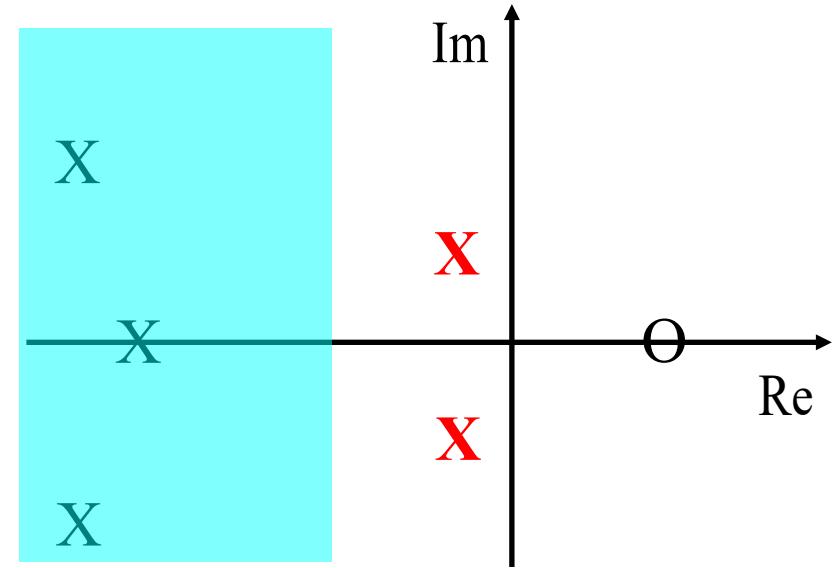
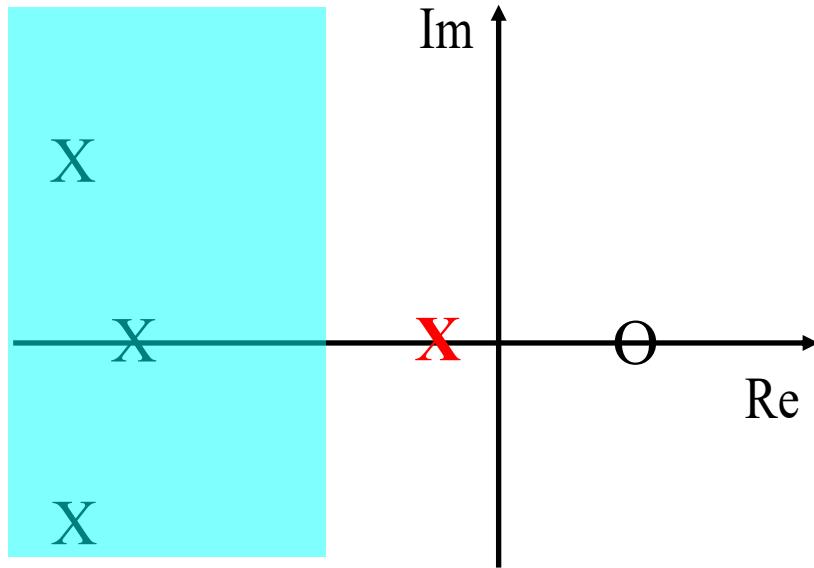
$$y(t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{\alpha_2}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{\tau_n} e^{-t/\tau_n}$$

Se fosse  $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n$

$$y(t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} + \frac{\alpha_2}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{\tau_n} e^{-t/\tau_n}$$

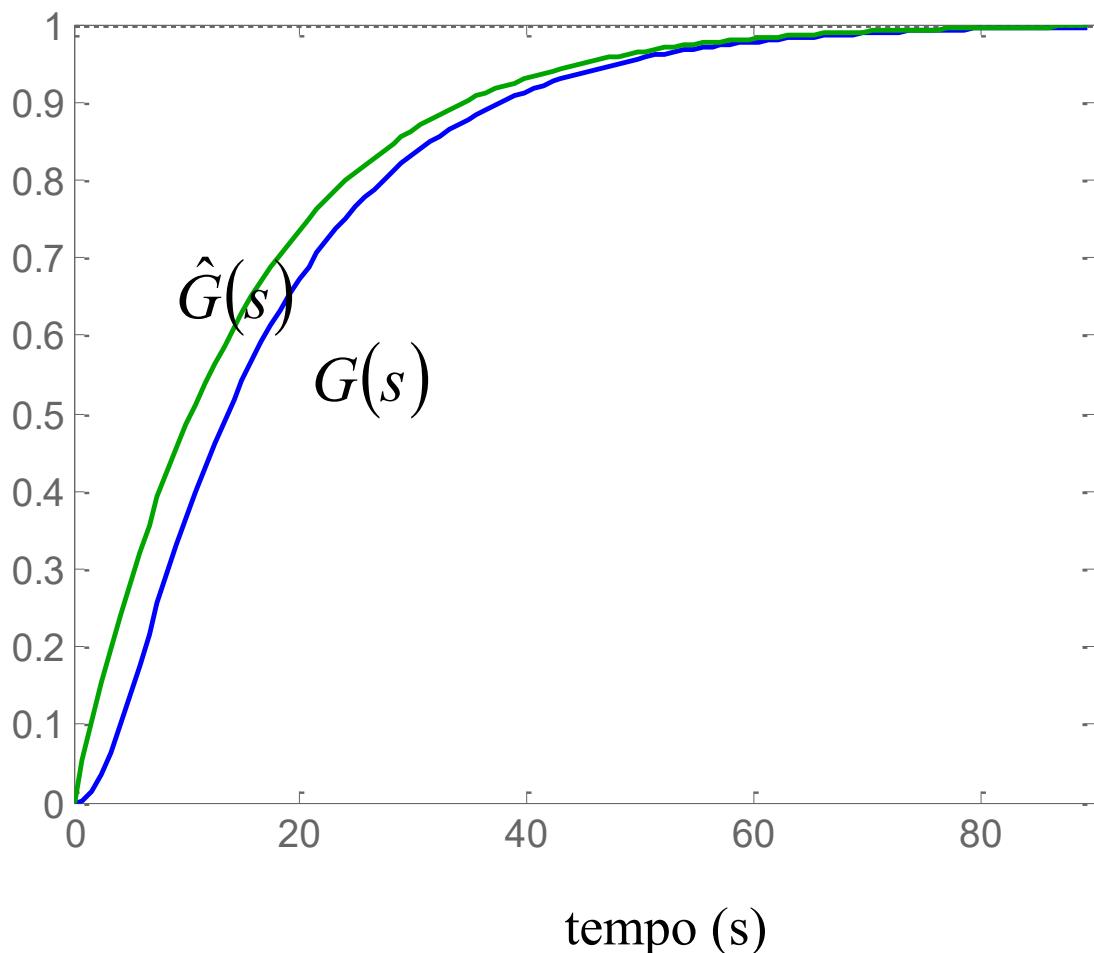
E' possibile approssimare la risposta allo scalino con quella di un sistema del I ordine con costante di tempo la più lenta fra tutte le costanti di tempo del sistema.

I poli dominanti sono quelli più vicini  
all'asse immaginario (poli "lenti")



L'**approssimazione a poli dominanti** consiste nel considerare  
solo i poli dominanti (preservando il guadagno ed  
eventualmente il comportamento iniziale)

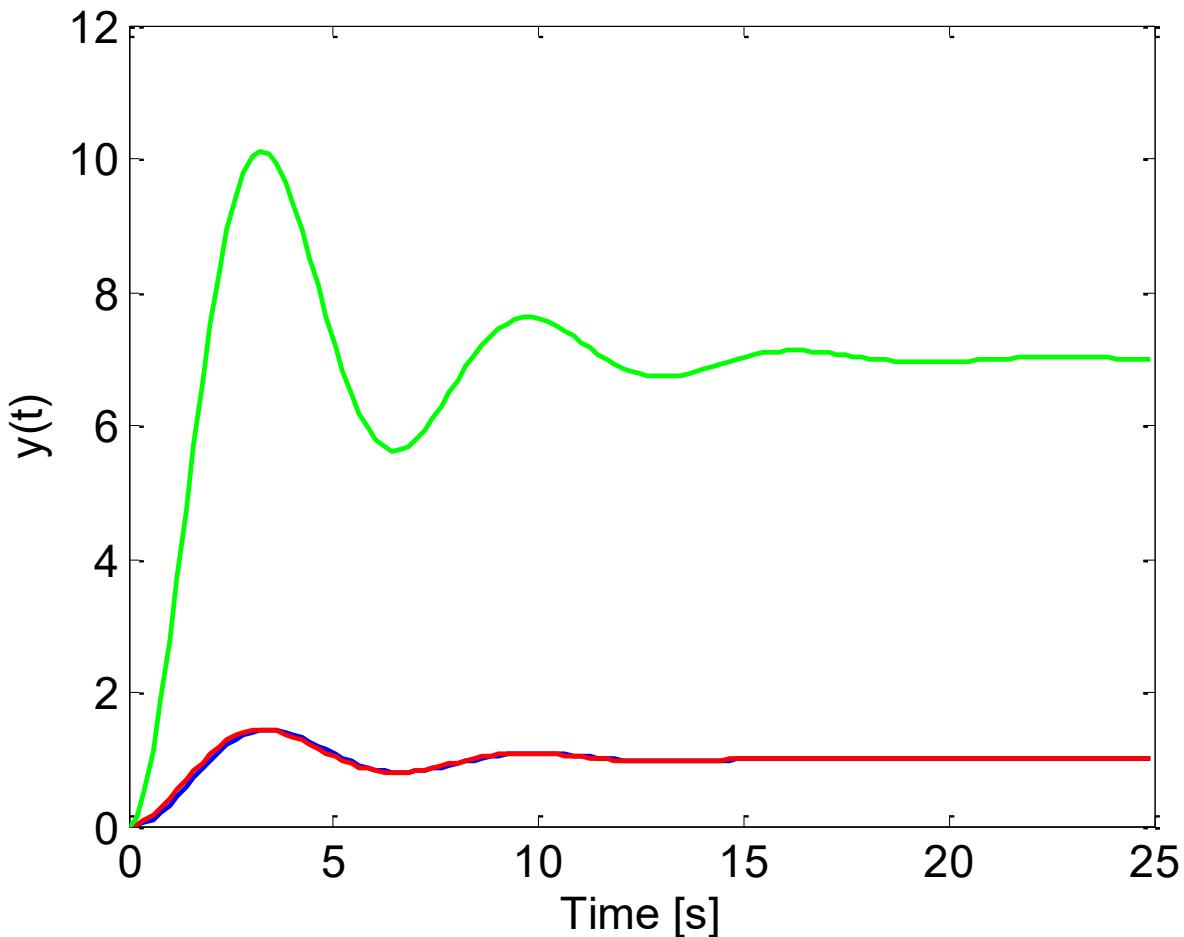
# Esempio



$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+2s)(1+15s)}$$

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{(1+15s)}$$

# Esempio



$$G(s) = \frac{7}{(s^2 + 0.5s + 1)(s + 7)}$$

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$$

$$H(s) = \frac{7}{s^2 + 0.5s + 1}$$

**Attenzione al  
guadagno!**

# 12. Matlab

**step** Step response of dynamic systems.

**[Y,T] = step(SYS)** computes the step response Y of the dynamic system SYS.

For state-space models,

**[Y,T,X] = step(SYS)**

also returns the state trajectory X.

**stepplot** Plot step response of linear systems.

stepplot, an extension of STEP, provides a command line interface for customizing the plot appearance.

**stepplot(SYS)** plots the step response of the dynamic system SYS.

Con questi comandi si può calcolare e tracciare la **risposta allo scalino** di un sistema.

E' possibile anche calcolare la **risposta all'impulso**.

**impulse** Impulse response of dynamic systems.

**impulse(SYS)** plots the impulse response of the dynamic system SYS.

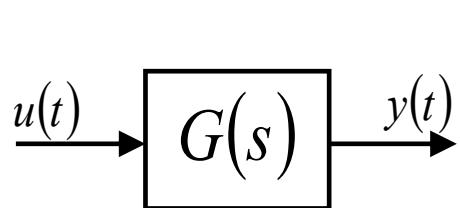
# Lezione 13.

# Risposta in frequenza

# Schema della lezione

1. Risposta alla sinusoide
2. Teorema della risposta in frequenza
3. Risposta in frequenza
4. Matlab

# 1. Risposta alla sinusoide



$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \quad \text{As. stabile}$$

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad \longrightarrow \quad U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = \\ &= \underbrace{\frac{\alpha_1}{1 + s\tau_1} + \frac{\alpha_2}{1 + s\tau_2} + \dots}_{Y_1(s)} + \underbrace{\frac{\beta s + \gamma}{s^2 + \omega^2}}_{Y_2(s)} \end{aligned}$$

The term  $\frac{\beta s + \gamma}{s^2 + \omega^2}$  is highlighted with a red dashed circle and labeled "risposta forzata". The term  $\underbrace{\frac{\alpha_1}{1 + s\tau_1} + \frac{\alpha_2}{1 + s\tau_2} + \dots}_{Y_1(s)}$  is highlighted with a blue bracket and labeled "risposta libera".

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

Siccome il sistema è asintoticamente stabile

Per  $t \rightarrow \infty$    $y_1(t) \rightarrow 0$

Quindi

Per  $t \rightarrow \infty$    $y(t) \approx y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_2(s)]$

Asintoticamente resta solo la risposta forzata

$$Y_2(s) = \frac{\beta s + \gamma}{s^2 + \omega^2} = \beta \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{\gamma}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

$$y_2(t) = \beta \cos \omega t + \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t$$

Esiste questa formula

$$X \cos \theta + Y \sin \theta = \sqrt{X^2 + Y^2} \sin \left( \theta + \tan^{-1} \left( \frac{X}{Y} \right) \right)$$

Da cui si ottiene

$$y_2(t) = \sqrt{\beta^2 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}} \sin \left( \omega t + \tan^{-1} \frac{\beta \omega}{\gamma} \right)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\beta^2 \omega^2 + \gamma^2} \sin \left( \omega t + \tan^{-1} \frac{\beta \omega}{\gamma} \right)$$

Riprendiamo la trasformata dell'uscita

$$Y(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = Y_1(s) + \frac{\beta s + \gamma}{s^2 + \omega^2}$$

Moltiplicando ambo i membri per  $s^2 + \omega^2$

$$G(s)A\omega = (s^2 + \omega^2)Y_1(s) + \beta s + \gamma$$

Valutiamo questa identità per  $s = j\omega$

$$G(j\omega)A\omega = j\beta\omega + \gamma$$

e scriviamo l'identità per il modulo e per la fase

$$|G(j\omega)A\omega| = |G(j\omega)|A\omega = |j\beta\omega + \gamma| = \sqrt{\beta^2\omega^2 + \gamma^2} \quad \text{Modulo}$$

$$\angle(G(j\omega)A\omega) = \angle G(j\omega) = \angle(j\beta\omega + \gamma) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta\omega}{\gamma}\right) \quad \text{Fase}$$

Quindi si ha

$$|G(j\omega)|A\omega = \sqrt{\beta^2\omega^2 + \gamma^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \text{atan} \left( \frac{\beta\omega}{\gamma} \right)$$

Precedentemente avevamo trovato che

$$y_2(t) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\beta^2\omega^2 + \gamma^2} \sin \left( \omega t + \text{atan} \frac{\beta\omega}{\gamma} \right)$$

Sostituendo le espressioni precedenti si ha

$$\color{blue}{y_2(t) = |G(j\omega)| A \sin(\omega t + \angle G(j\omega))}$$

## Riassumendo

$$u(t) = A \sin \omega t \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

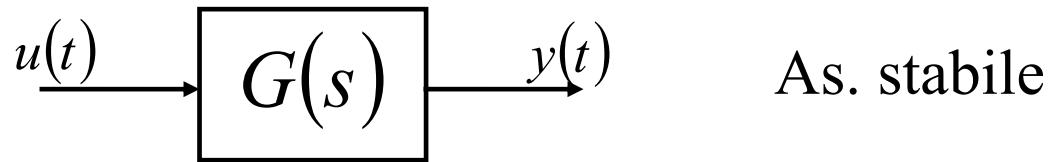
$$Y(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = \cancel{Y_1(s)} + Y_2(s) \quad \text{asintoticamente}$$

$$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y_2(t) = |G(j\omega)| A \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

**La sinusoide  $y_2(t)$  è completamente caratterizzata dal modulo e dalla fase del numero complesso  $G(j\omega)$**

## 2. Teorema della risposta in frequenza



$$u(t) = A \sin(\bar{\omega}t)$$

Allora a transitorio esaurito (al lato pratico per  $t > t_a$ )

$$y(t) \approx B \sin(\bar{\omega}t + \varphi)$$

dove:  $B = |G(j\bar{\omega})|A$

$$\varphi = \angle G(j\bar{\omega})$$

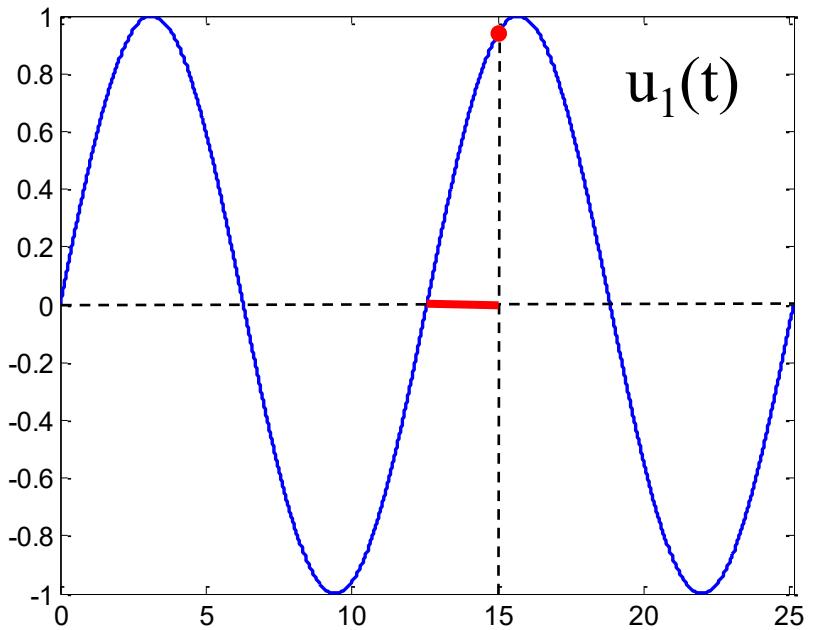
indipendentemente dalle condizioni iniziali del sistema

# Esempio

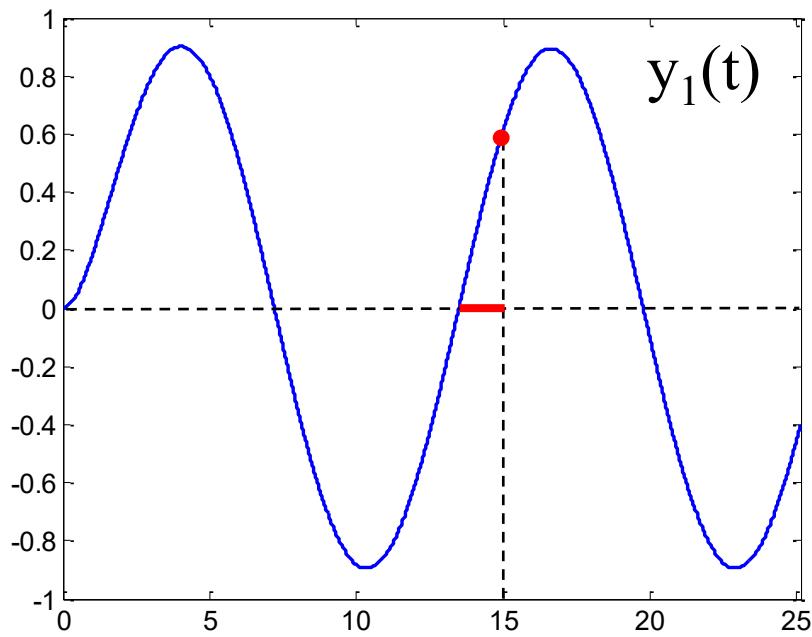
$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \sin(0.5t) \\ \omega_1 &= 0.5 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{cases} |G(j0.5)| = \frac{1}{|1+j0.5|} = 0.89 \\ \angle G(j0.5) = -\text{atan}(0.5) = -26.6^\circ \end{cases}$$

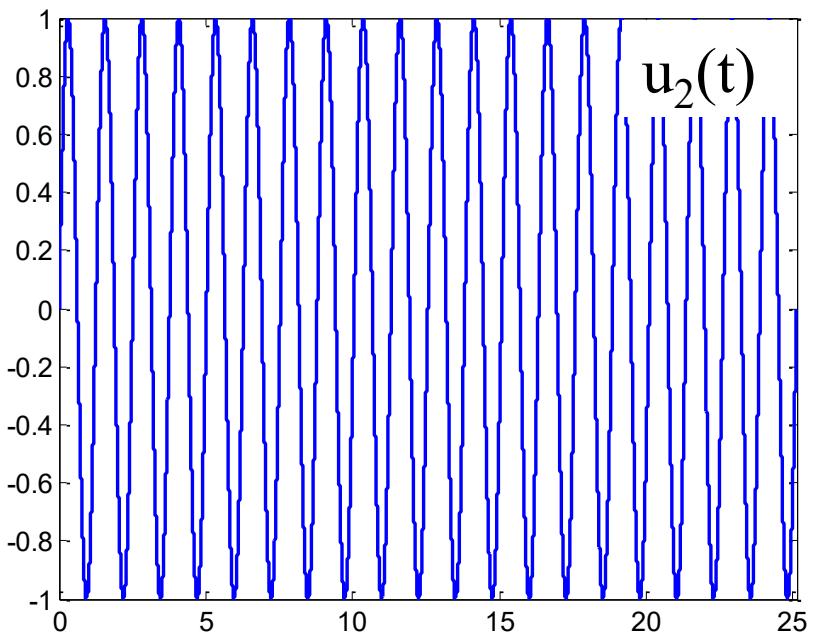
$$\begin{aligned} u_2(t) &= \sin(5t) \\ \omega_2 &= 5 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{cases} |G(j5)| = \frac{1}{|1+j5|} = 0.20 \\ \angle G(j5) = -\text{atan}(5) = -78.6^\circ \end{cases}$$



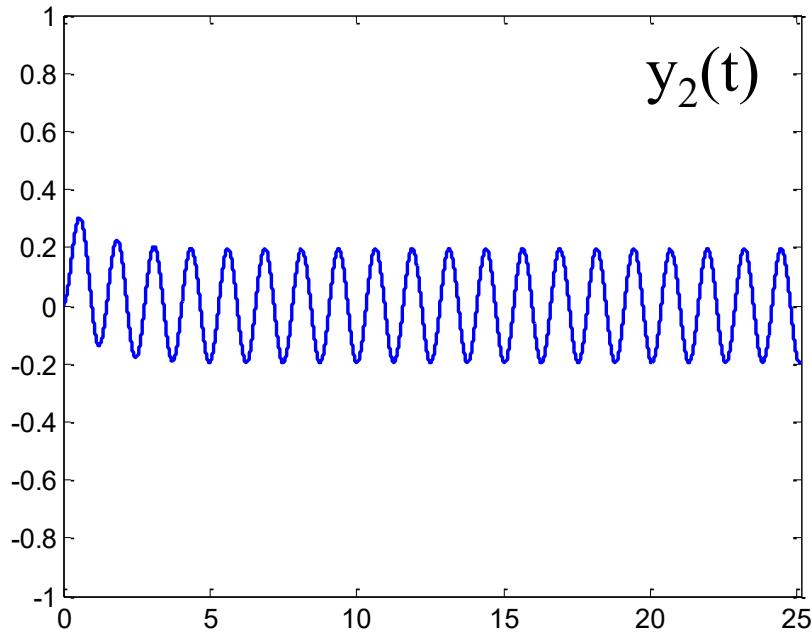
$u_1(t)$



$y_1(t)$



$u_2(t)$



$y_2(t)$

### 3. Risposta in frequenza

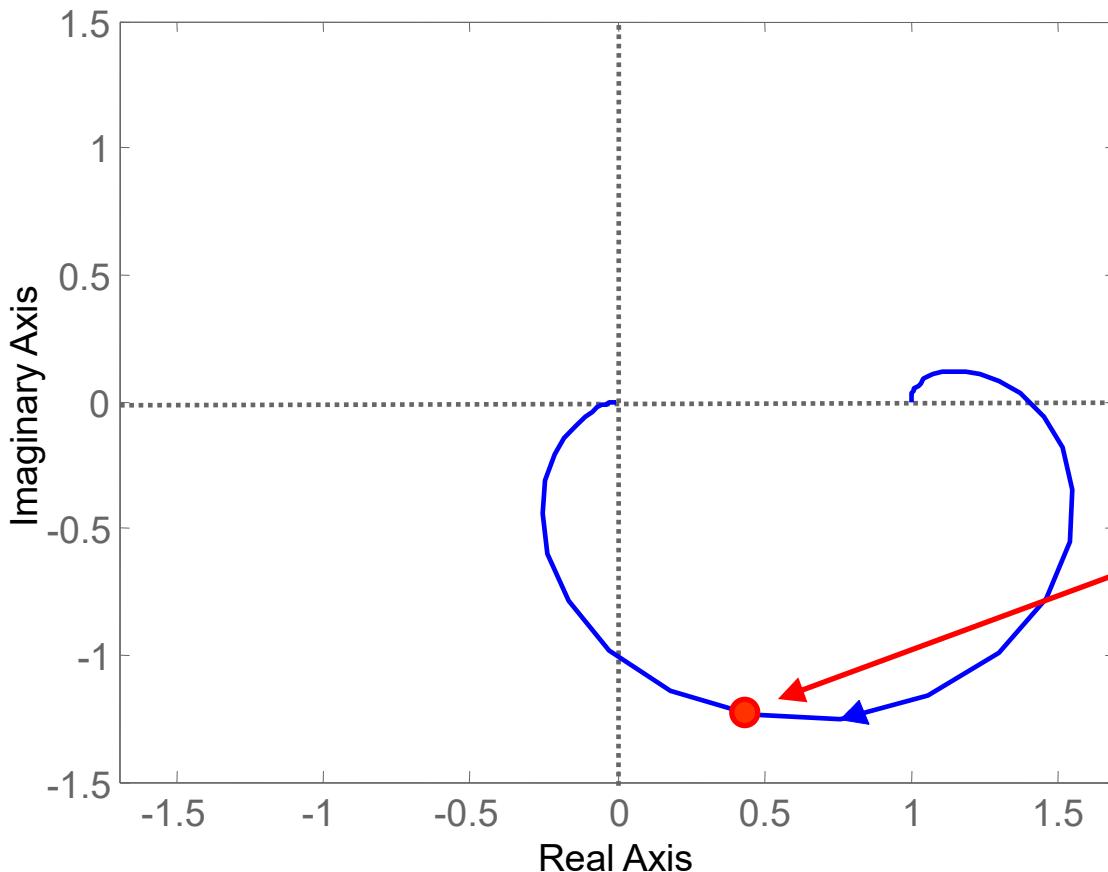
$$G(j\omega) \quad \text{per tutti gli } \omega \geq 0$$

Funzione complessa di variabile reale

$$\omega \longrightarrow G(j\omega)$$

# Esempio

$$G(s) = \frac{1+s}{\left(1+\frac{1}{3}s\right)\left(1+\frac{1}{5}s\right)^2} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad G(j\omega) = \frac{1+j\omega}{\left(1+\frac{1}{3}j\omega\right)\left(1+\frac{1}{5}j\omega\right)^2}$$



$$G(j5) \approx 0.44 - 1.23j$$

$$|G(j5)| \approx \sqrt{0.44^2 + 1.23^2} =$$

$$= 1.7065$$

$$\arg G(j5) \approx \text{atan} \frac{1.23}{0.44} \approx$$

$$\approx -70^\circ,3$$

## 4. Matlab

[ H, W ] = **freqresp**(SYS)

restituisce la risposta in frequenza calcolata in valori di pulsazione predefiniti W.

# Lezione 14.

## Rappresentazione grafica della risposta in frequenza

# Schema della lezione

1. Rappresentazioni grafiche della risposta in frequenza
2. Diagramma di Bode del modulo: convenzioni
3. Diagramma di Bode del modulo: tracciamento
4. Diagramma asintotico di Bode del modulo:  
regole per il tracciamento
5. Diagramma di Bode della fase: convenzioni
6. Argomento di un numero complesso
7. Diagramma di Bode della fase: tracciamento
8. Diagramma asintotico di Bode della fase:  
regole per il tracciamento
9. Sistemi a fase minima
10. Diagramma polare
11. Matlab

# 1. Rappresentazioni grafiche della risposta in frequenza

La risposta in frequenza  $G(j\omega)$  è una funzione a valori complessi della variabile reale (positiva)  $\omega$ . Quindi, per ogni valore reale positivo di  $\omega$  avrò un punto del piano complesso.

## Esempio

$$G(s) = \frac{5}{1+5s}$$

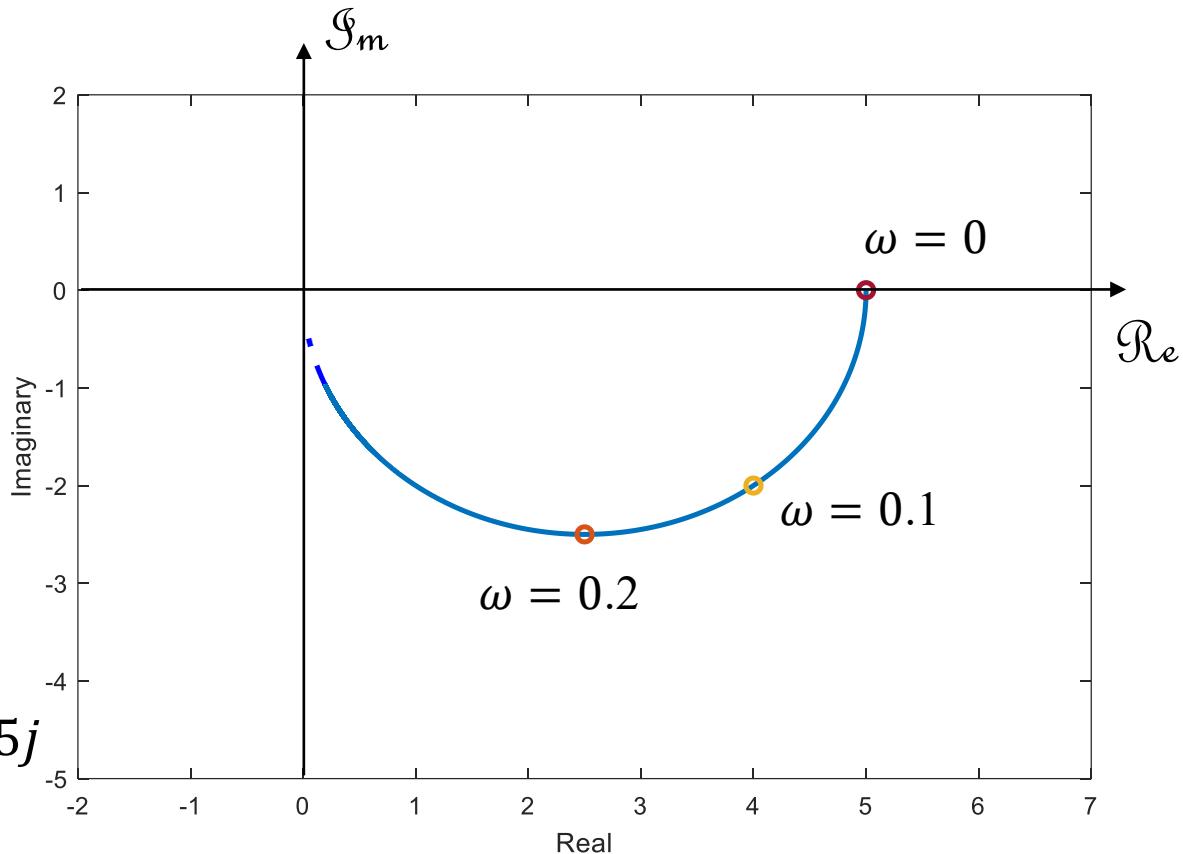
$$G(j\omega) = \frac{5}{1+5j\omega}$$

Calcoliamo qualche punto

$$G(j0) = \frac{5}{1+5j0} = 5$$

$$G(j0.1) = \frac{5}{1+5j0.1} = 4 - 2j$$

$$G(j0.2) = \frac{5}{1+5j0.2} = 2.5 - 2.5j$$



La rappresentazione nel piano complesso della risposta in frequenza si dice **diagramma polare**.

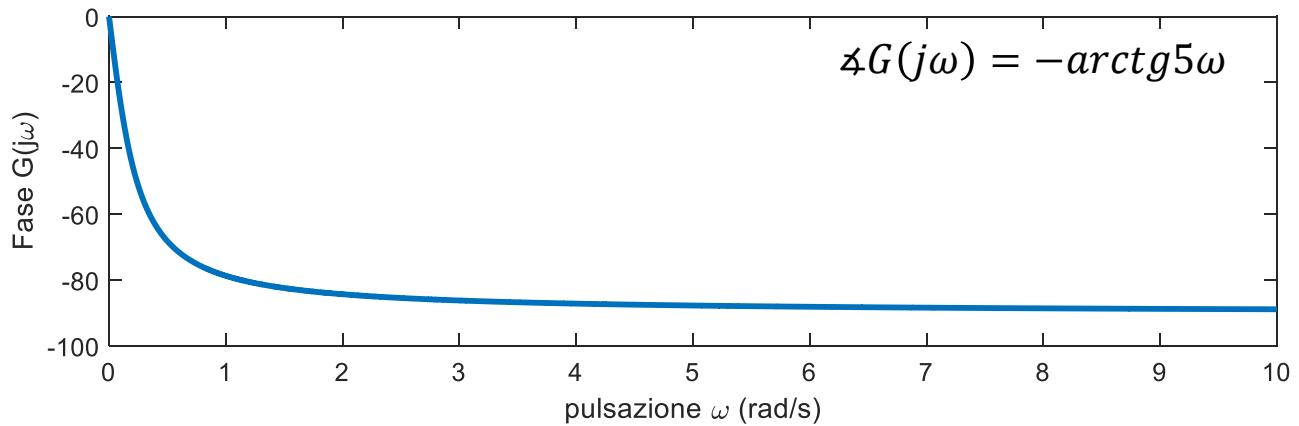
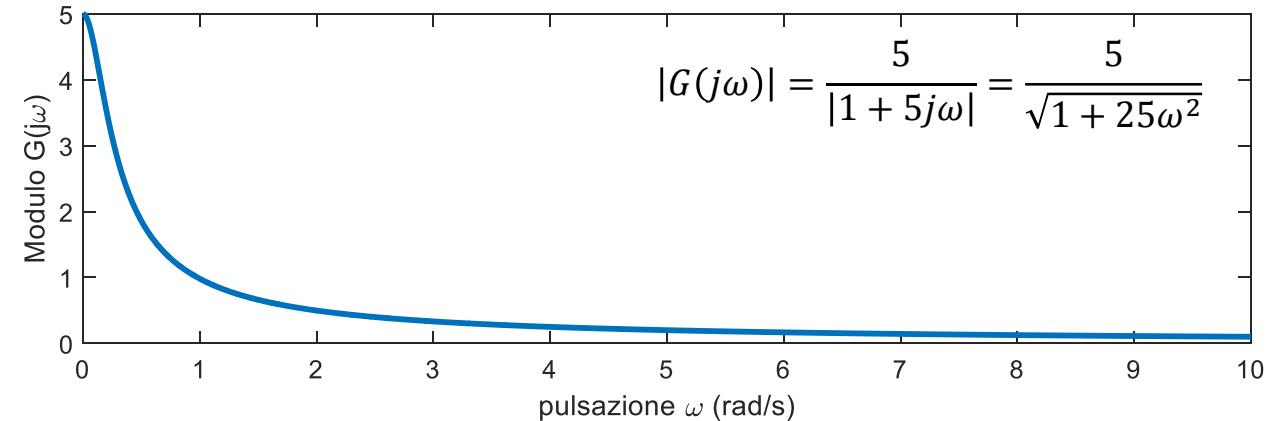
E' possibile rappresentare in **due grafici separati** il **modulo** e la **fase** della risposta in frequenza.

Sia il modulo  $|G(j\omega)|$  che la fase  $\angle G(j\omega)$  sono funzioni a valori **reali** della variabile reale (positiva)  $\omega$ .

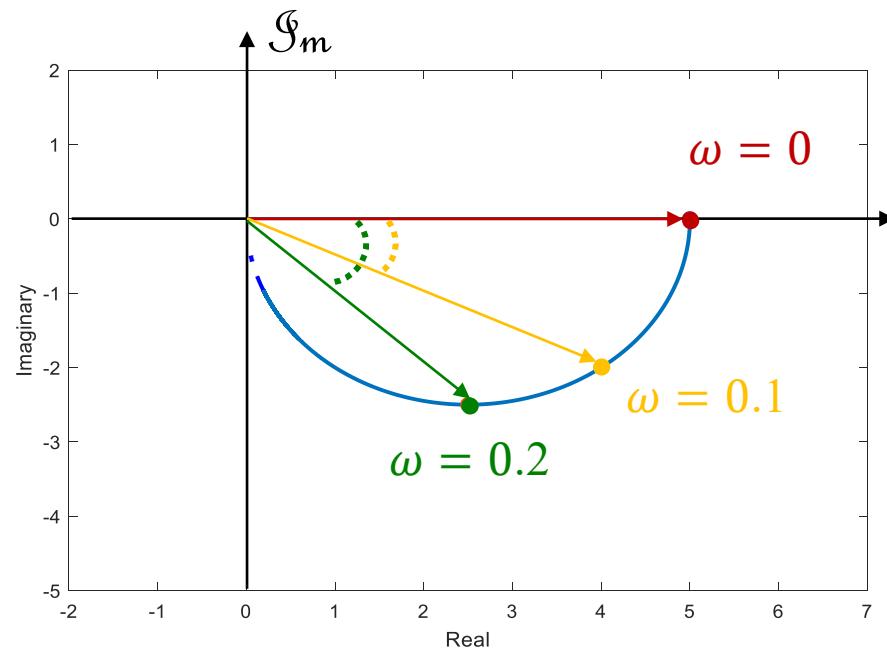
### Esempio

$$G(s) = \frac{5}{1+5s}$$

$$G(j\omega) = \frac{5}{1+5j\omega}$$



Le rappresentazioni di modulo e fase della risposta in frequenza in funzione della pulsazione sono **diagramma cartesiani**.



$$|G(j0)| = 5$$

$$|G(j0.1)| = \sqrt{20} \cong 4.47$$

$$|G(j0.2)| = \sqrt{12.5} \cong 3.54$$

$$\angle G(j0) = 0^\circ$$

$$\angle G(j0.1) = -\arctg 0.5 = -26.6^\circ$$

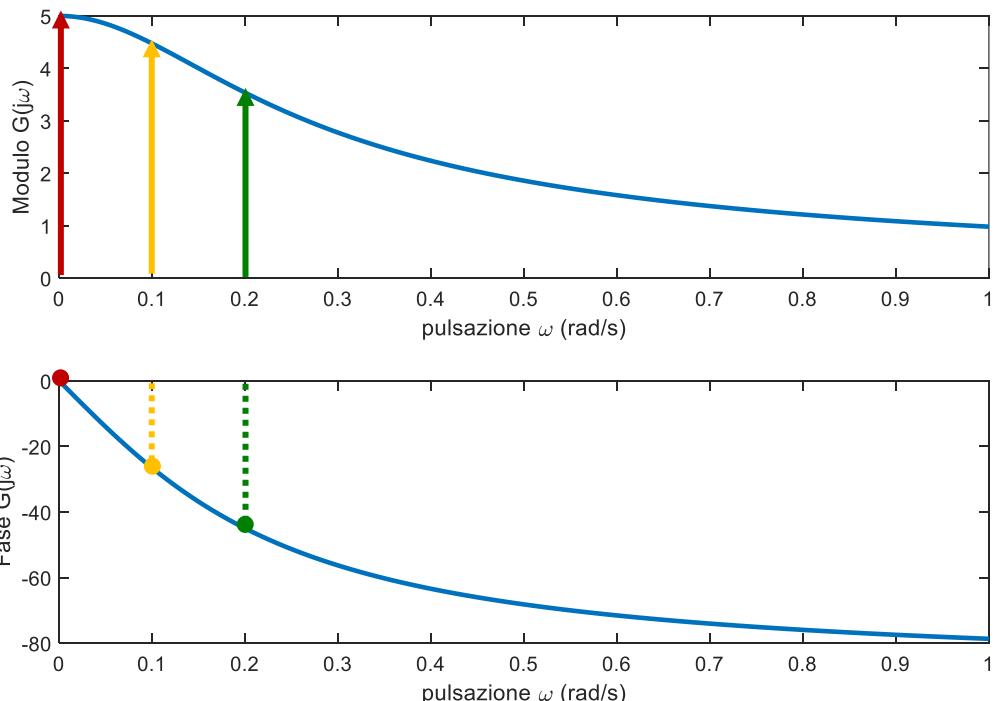
$$\angle G(j0.2) = -\arctg 1 = -45^\circ$$

Ovviamente, il contenuto informativo dei diagrammi cartesiani è il medesimo del diagramma polare.

$$G(j0) = \frac{5}{1+5j0} = 5$$

$$G(j0.1) = \frac{5}{1+5j0.1} = 4 - 2j$$

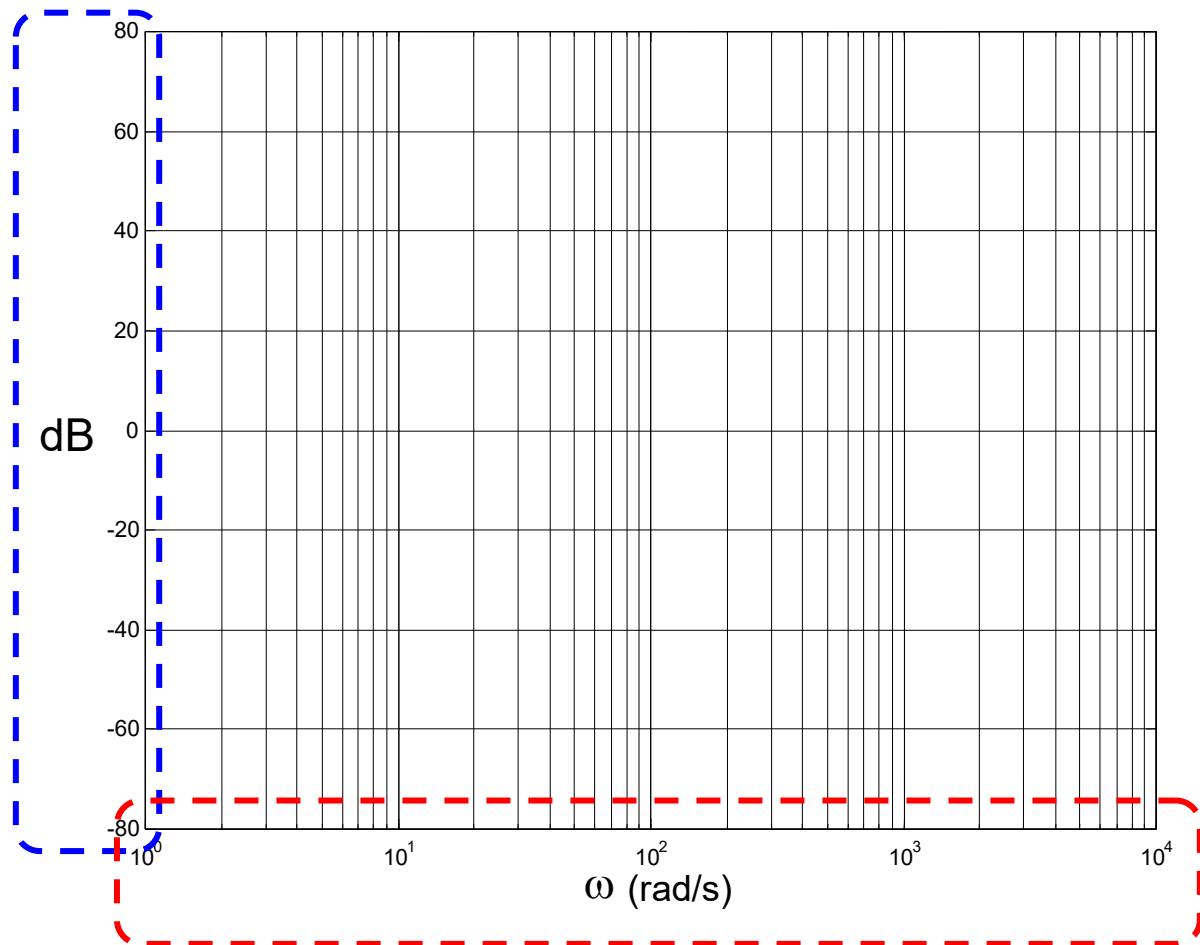
$$G(j0.2) = \frac{5}{1+5j0.2} = 2.5 - 2.5j$$



## 2. Diagramma di Bode del modulo : convenzioni

Ordinata in dB

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$



Ascissa in scala logaritmica  $\log \omega_2 - \log \omega_1 = \log \frac{\omega_2}{\omega_1}$

N.B. Logaritmo in base 10

## Nota Bene

### Scala lineare



$$d = x_2 - x_1 = x_4 - x_3$$

Punti alla stessa distanza: uguale **differenza** delle ascisse.

### Scala logaritmica



$$\begin{aligned} d &= \log \omega_2 - \log \omega_1 = \log \omega_4 - \log \omega_3 \\ &= \log \frac{\omega_2}{\omega_1} = \log \frac{\omega_4}{\omega_3} \end{aligned}$$

Punti alla stessa distanza:  
uguale **rapporto** delle ascisse.

### 3. Diagramma di Bode del modulo : tracciamento

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)}$$

funzione di trasferimento



$$|G(j\omega)| = \frac{|\mu|}{|j\omega|^g} \frac{\prod_i |(1 + j\omega T_i)|}{\prod_i |(1 + j\omega \tau_i)|}$$

modulo della risposta in frequenza

**modulo della risposta in frequenza in dB**

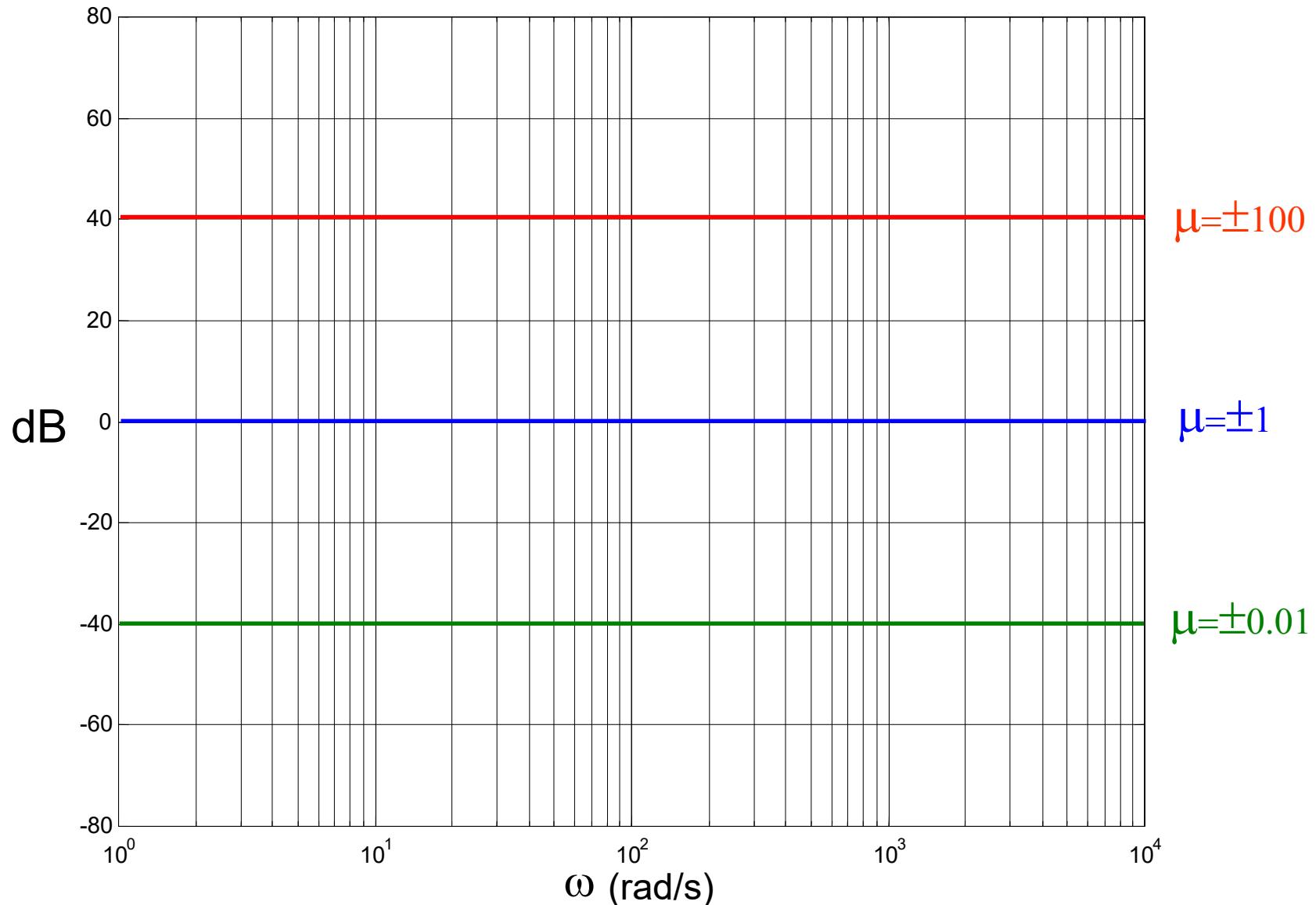
$$|G(j\omega)|_{dB} = \text{guadagno} - \text{poli o zeri nell'origine} + \sum_i \text{zeri (reali & complessi coniugati)} - \sum_i \text{poli (reali & complessi coniugati)}$$

The equation is visually divided into four parts by dashed circles:

- Top blue circle:  $20 \log |\mu|$  (guadagno)
- Top red circle:  $-20 \log |j\omega|^g$  (poli o zeri nell'origine)
- Middle green circle:  $+ \sum_i 20 \log |1 + j\omega T_i|$  (zeri (reali & complessi coniugati))
- Bottom purple circle:  $- \sum_i 20 \log |1 + j\omega \tau_i|$  (poli (reali & complessi coniugati))

### 3.1 Guadagno

$20 \log|\mu|$   retta costante



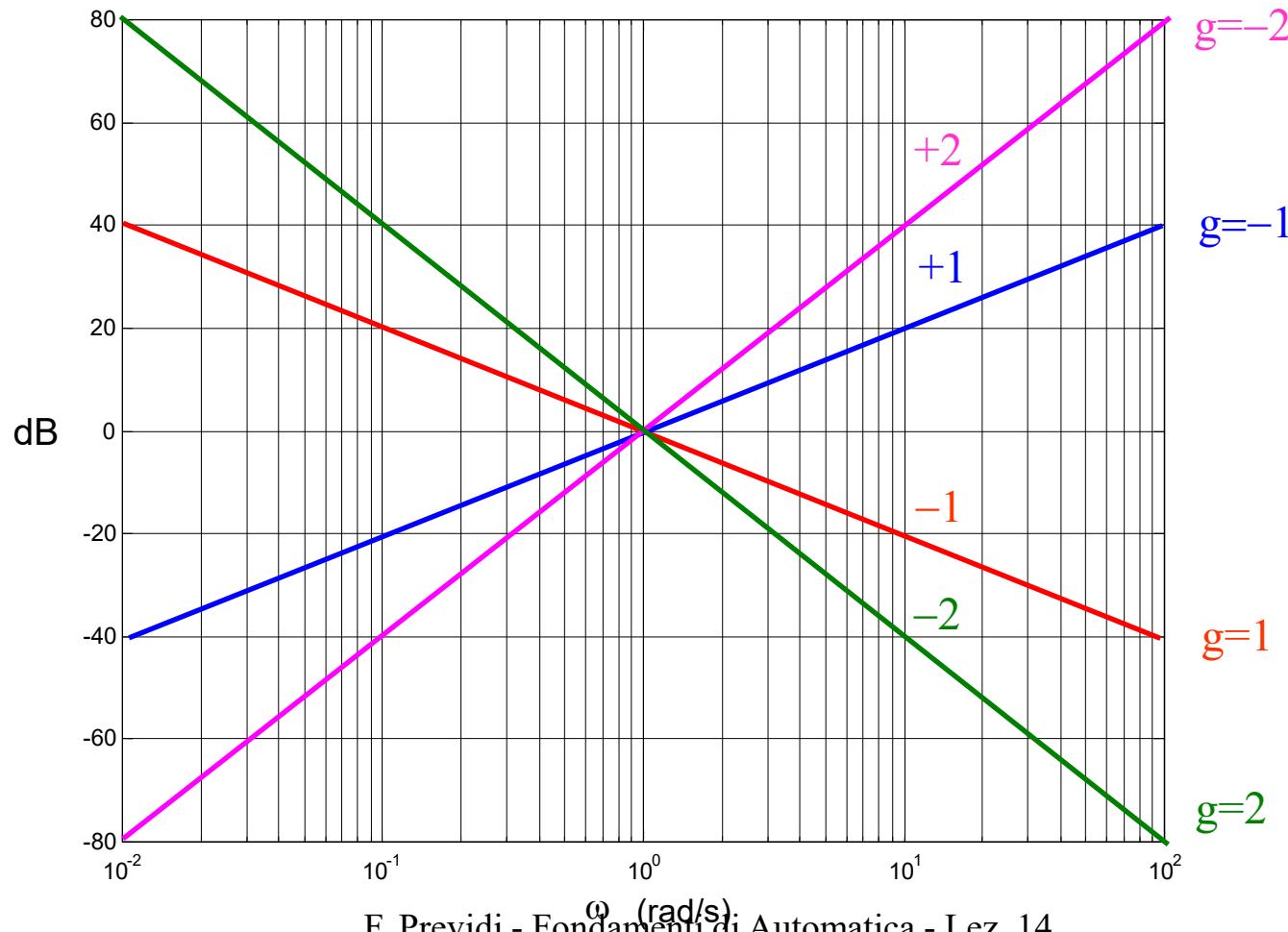
### 3.2 Poli o zeri nell'origine

$$-20 \log|j\omega|^g = -20g \log \omega$$



retta con pendenza  
- $20g$  dB per decade  
passante per 0 dB in  $\omega = 1$

per convenzione la pendenza si indica con  $-g$



## Esempio esplicativo

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

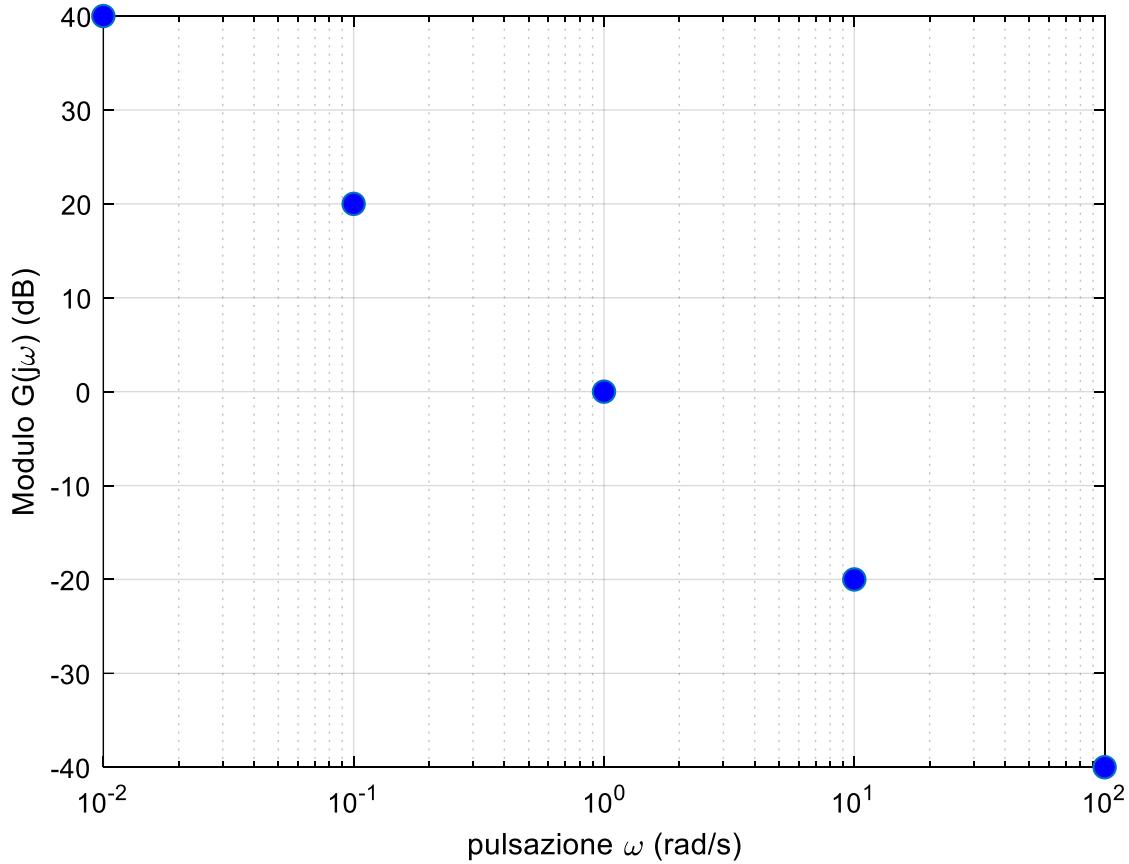
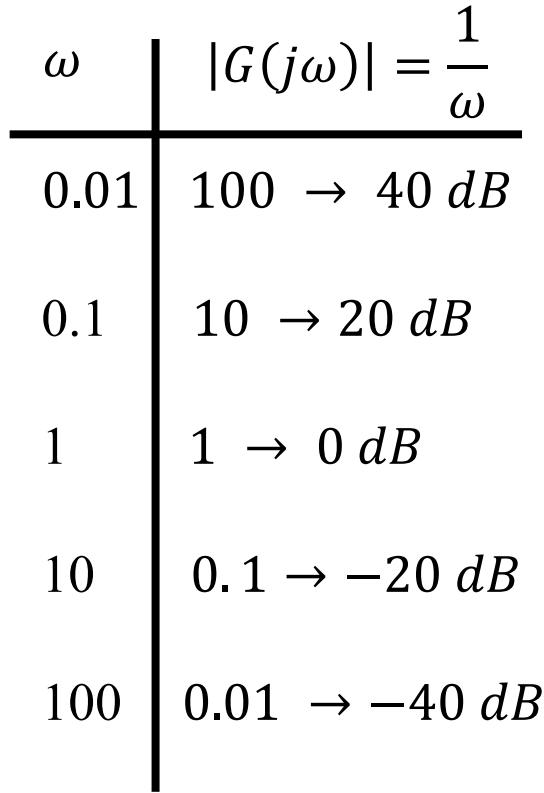
funzione di trasferimento

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

risposta in frequenza

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$

modulo della risposta in frequenza



### 3.3.a Zero reale

$$20 \log|1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad T \text{ reale}$$

Il disegno di questa funzione di  $\omega$  non è facile.

Si può trovare un'approssimazione ragionevole guardando il comportamento ad alte e basse pulsazioni.

#### Basse $\omega$

➤ se  $\omega^2 T^2 \ll 1$ , cioè  $\omega \ll \frac{1}{|T|}$  ➤  $20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cong 0 \text{ dB}$

#### Alte $\omega$

➤ se  $\omega^2 T^2 \gg 1$ , cioè  $\omega \gg \frac{1}{|T|}$  ➤  $20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cong 20 \log \omega |T| \cong 20 \log \omega + 20 \log |T|$

## Approssimazione asintotica

Basse  $\omega$

➤ per  $\omega < \frac{1}{|T|}$  ➤ retta costante a 0 dB

Alte  $\omega$

➤ per  $\omega > \frac{1}{|T|}$  ➤ retta passante per 0 dB in  $\omega = \frac{1}{|T|}$   
con pendenza +1

Infatti, si può calcolare l'intersezione con l'asse delle ascisse:

$$20 \log \omega + 20 \log |T| = 0$$

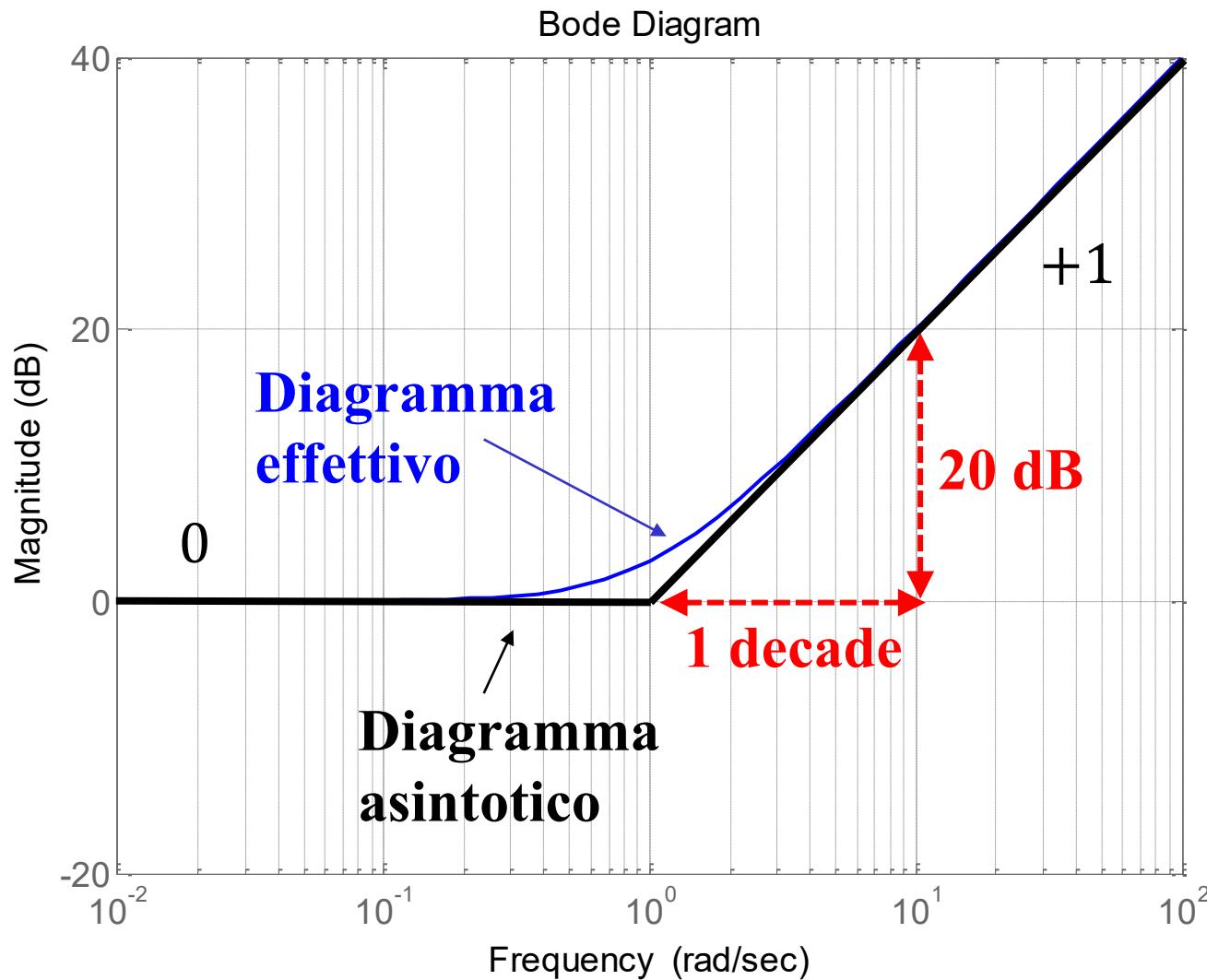
$$20 \log \omega = -20 \log |T|$$

$$20 \log \omega = 20 \log \frac{1}{|T|}$$

$$\omega = \frac{1}{|T|}$$

## Zero reale (esempio)

$$G(s) = 1 + s$$



## Valutazione dell'errore massimo

Si consideri  $G(s) = 1 + sT$

L'errore in  $\omega = \frac{1}{|T|}$  vale:

$$\begin{aligned} E &= 20 \log |1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = \\ &= 20 \log \sqrt{1 + \frac{1}{T^2} T^2} = 20 \log \sqrt{2} \cong 3 \text{ dB} \end{aligned}$$

L'errore massimo che si commette usando il diagramma asintotico è pari a 3 dB (per ogni zero), in corrispondenza della pulsazione dello zero.

### 3.3.b Zeri complessi coniugati

$$20 \log|1 + j\omega T| + 20 \log|1 + j\omega \bar{T}| \quad T \text{ complesso}$$

Usiamo l'espressione con smorzamento e pulsazione naturale

$$\tilde{G}(s) = 1 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \quad \text{funzione di trasferimento}$$

$$\tilde{G}(j\omega) = 1 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \quad \text{risposta in frequenza}$$

Il modulo (in dB) vale

$$|\tilde{G}(j\omega)|_{dB} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Cerchiamo l'approssimazione asintotica:

**Basse  $\omega$**

➤ per  $\omega \ll \omega_n$  ➤ retta costante a **0 dB**

**Alte  $\omega$**

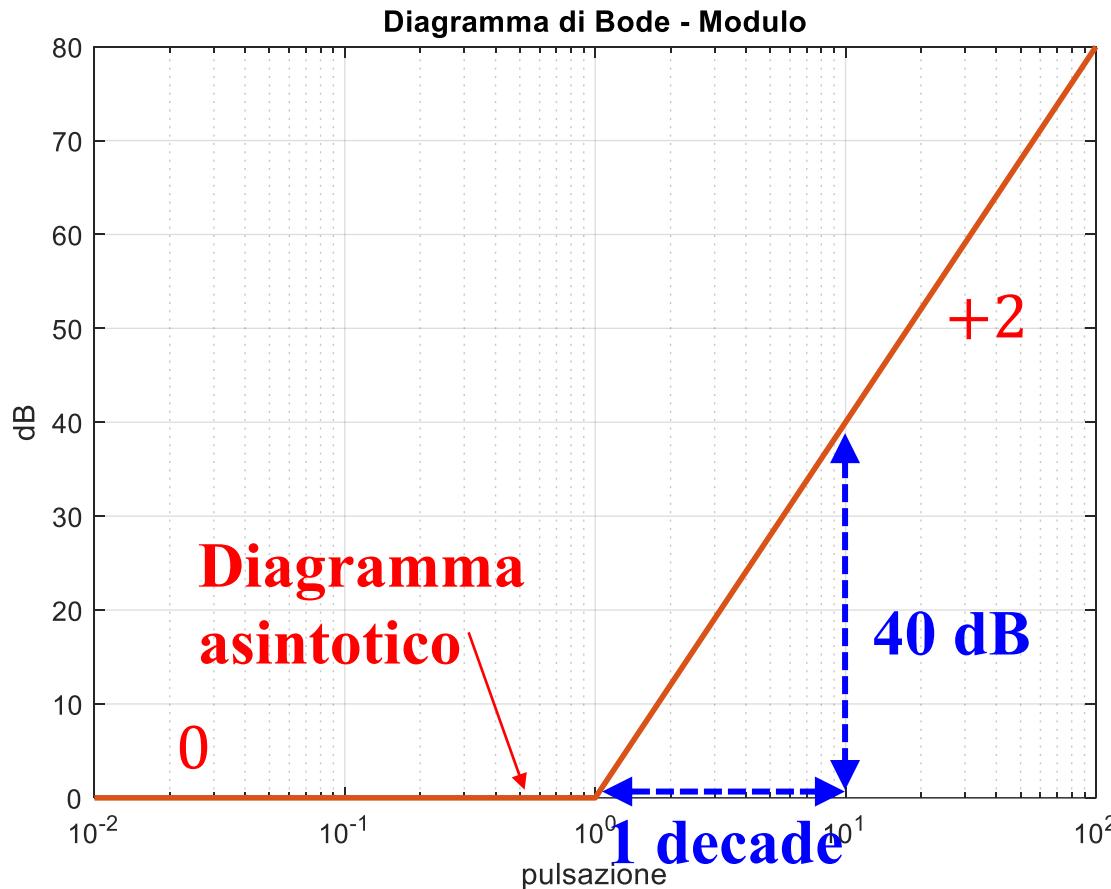
➤ per  $\omega \gg \omega_n$  ➤ 
$$|\tilde{G}(j\omega)|_{dB} \cong 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} = \\ = 40 \log \frac{\omega}{\omega_n} = 40 \log \omega - 40 \log \omega_n$$

retta passante per 0 dB in  $\omega = \omega_n$   
con pendenza +2

## Zeri complessi coniugati (esempio)

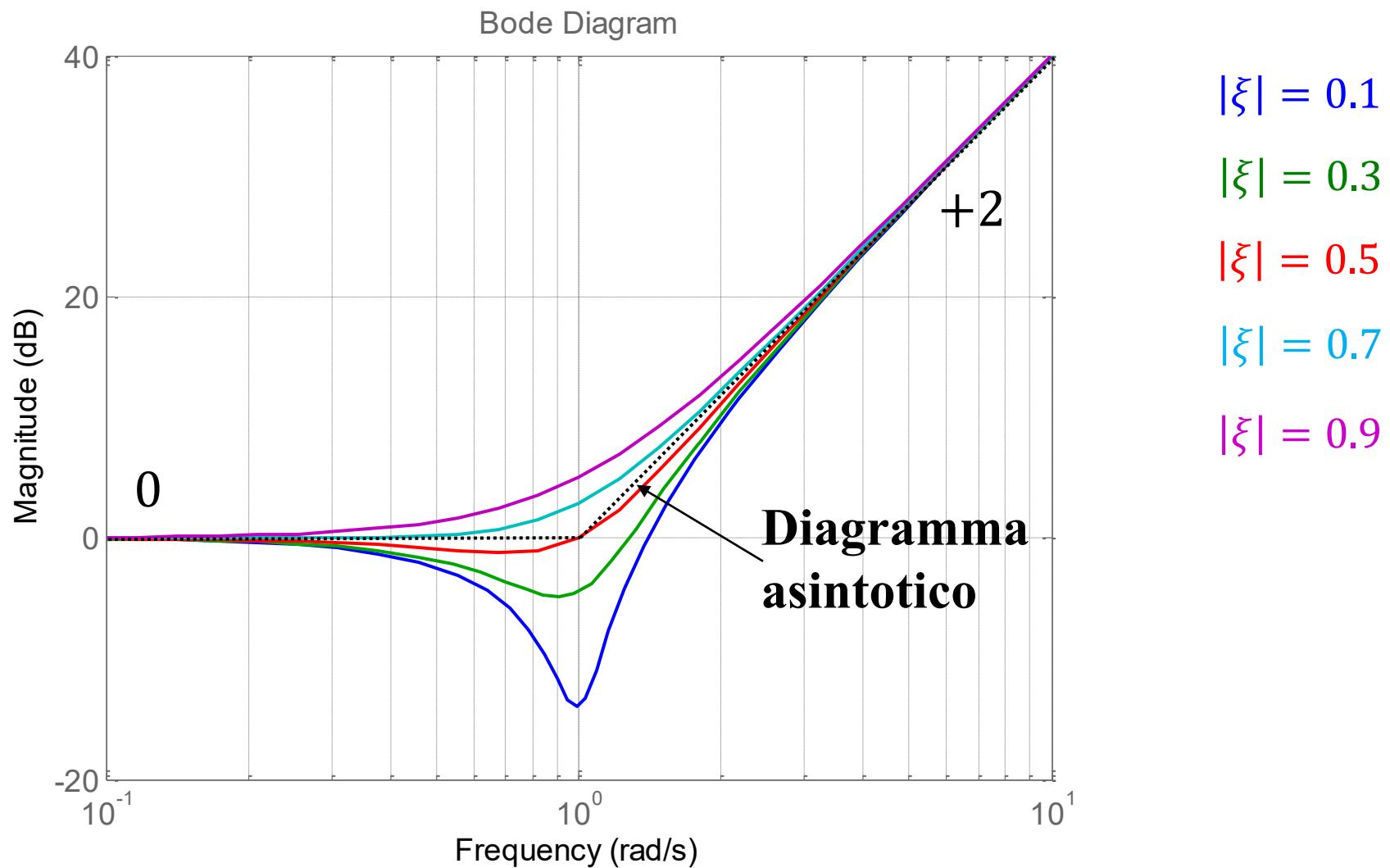
$$\tilde{G}(s) = 1 + s + s^2$$

$$\begin{array}{l} \omega_n = 1 \\ \xi = 0.5 \end{array}$$



## Zeri complessi coniugati (esempio)

$$\tilde{G}(s) = 1 + 2\xi s + s^2 \quad \omega_n = 1$$



## Valutazione dell'errore massimo

L'errore in  $\omega = \omega_n$  **dipende da  $\xi$**

$$E = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}} \Big|_{\omega=\omega_n} = 20 \log \sqrt{4\xi^2} = 20 \log(2|\xi|)$$

se  $|\xi| = 1$        $E = 20 \log 2 \cong 6 \text{ dB}$     (2 poli reali coincidenti!)

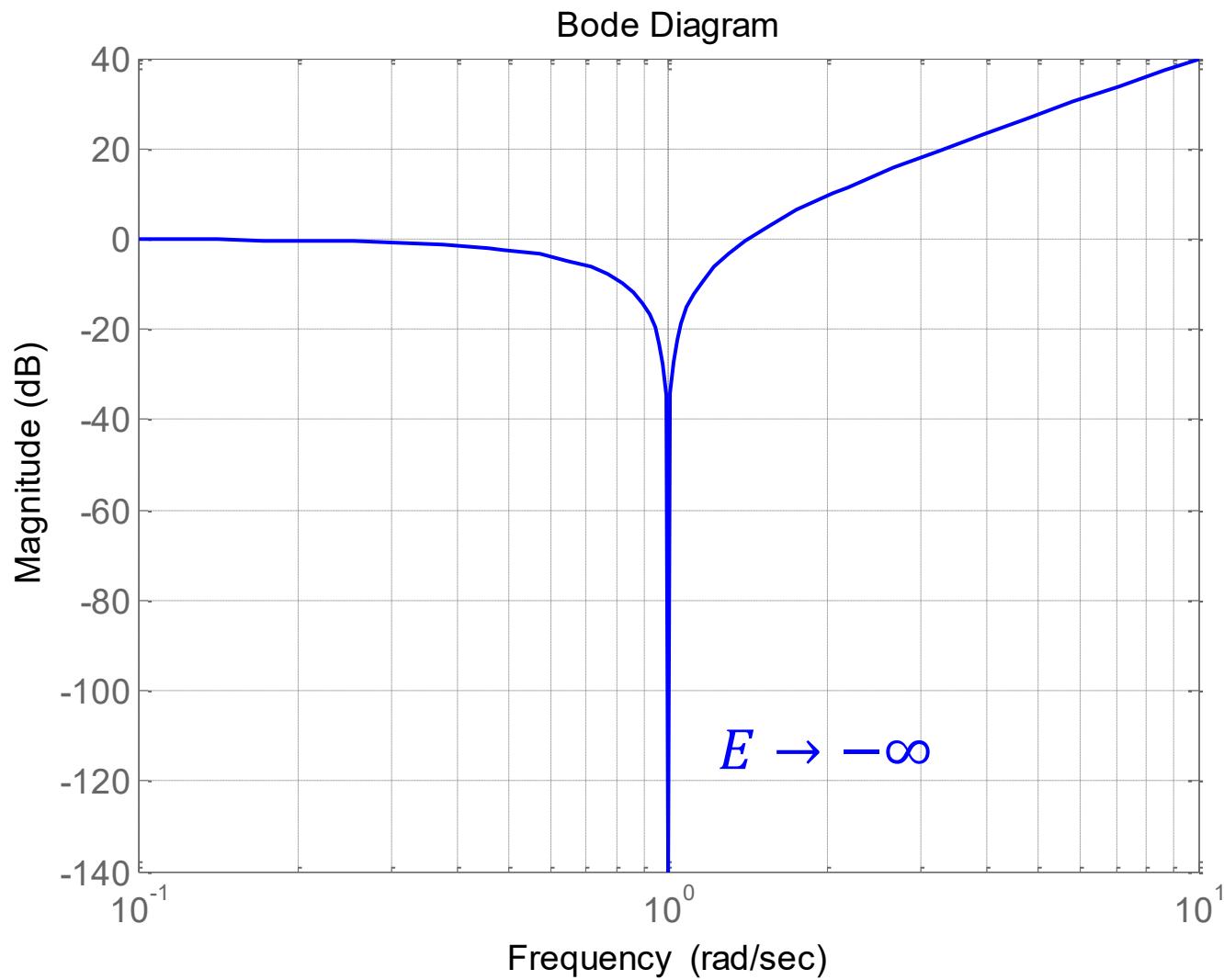
se  $\xi \rightarrow 0$        $E \rightarrow -\infty$

## Zeri immaginari coniugati (esempio)

$$\tilde{G}(s) = 1 + s^2$$

$$\omega_n = 1$$

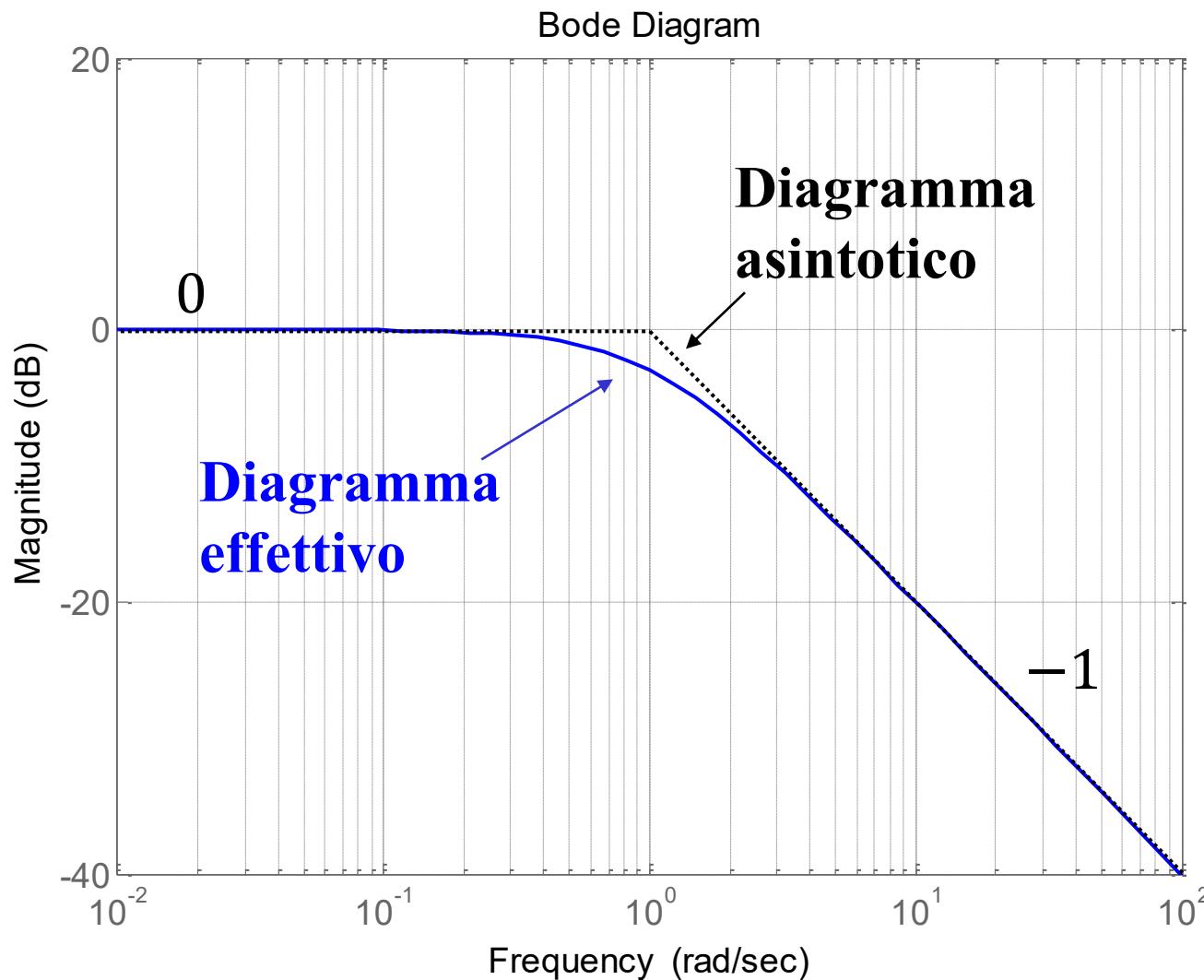
$$\zeta = 0$$



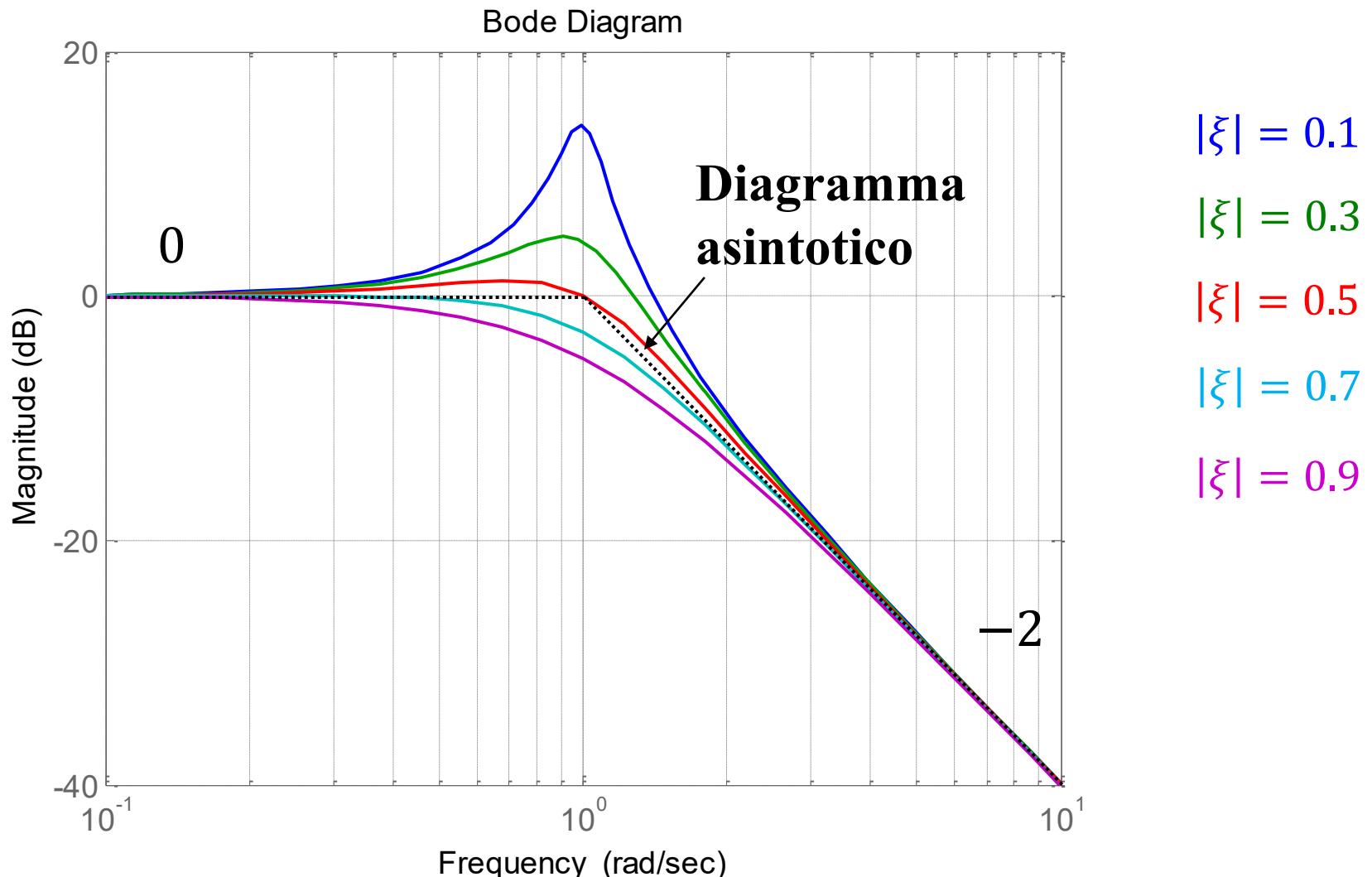
Per i **poli** i diagrammi sono uguali a quelli  
degli zeri con il segno cambiato

## Polo reale (esempio)

$$G(s) = \frac{1}{1 + s}$$



Poli complessi coniugati (esempio)  $G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi s + s^2}$      $\omega_n = 1$

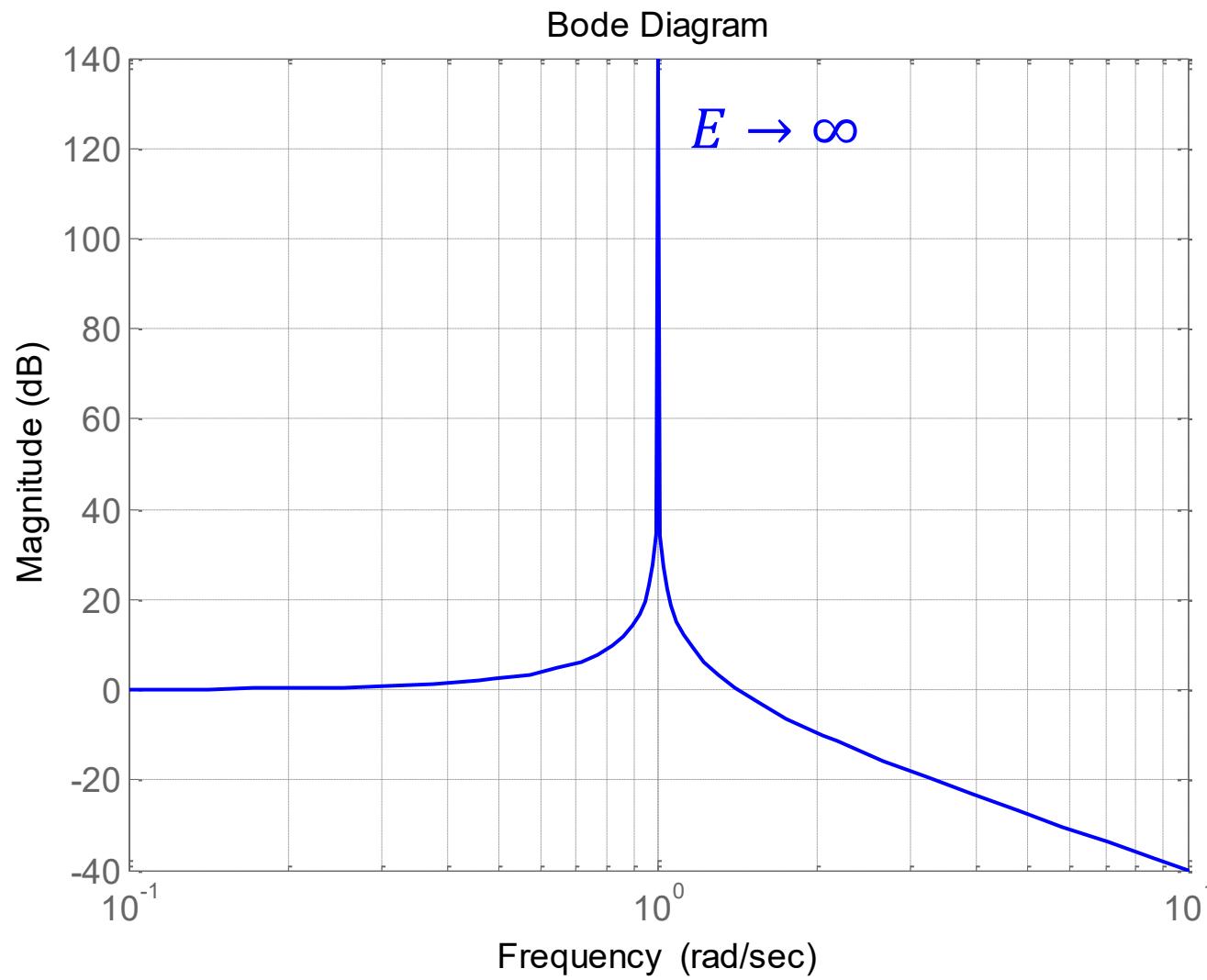


## Poli immaginari coniugati (esempio)

$$G(s) = \frac{1}{1 + s^2}$$

$$\omega_n = 1$$

$$\xi = 0$$



## Esempio esplicativo

$$G(s) = \frac{10(1 + s)}{s(1 + 0.1s)}$$

Proviamo a disegnare i singoli contributi e poi sommiamoli

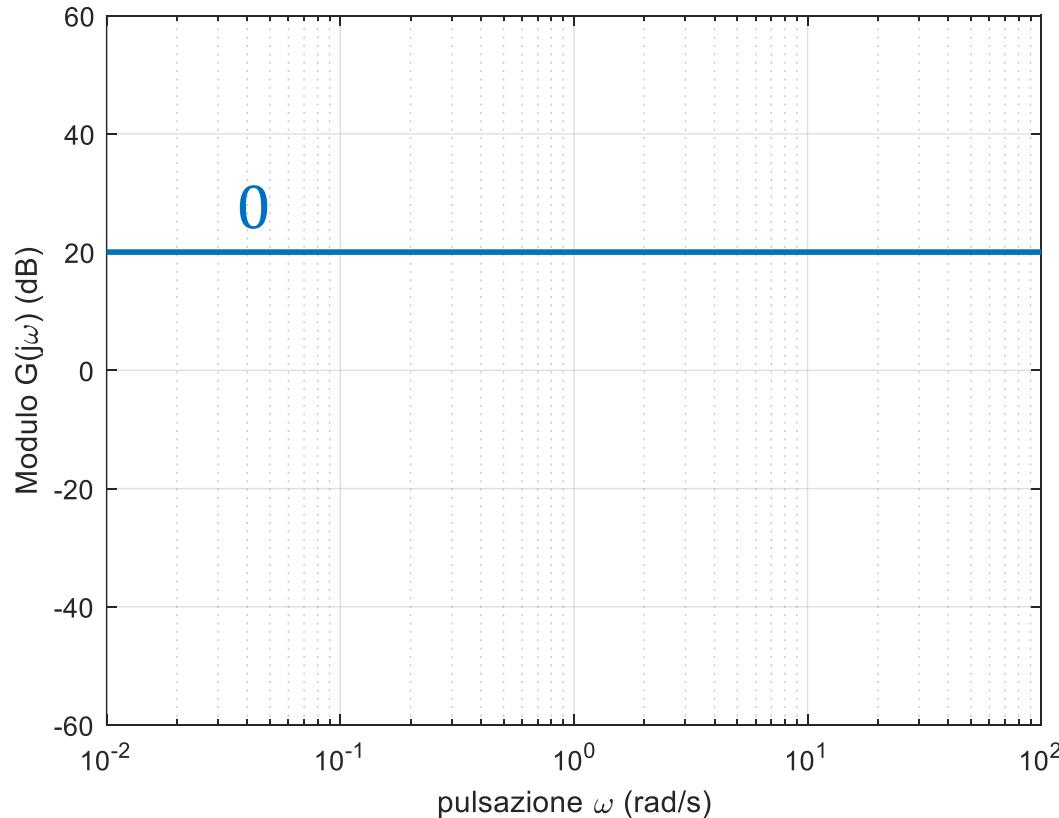
Guadagno  $\mu = 10$

Un polo nell'origine  $\frac{1}{s}$

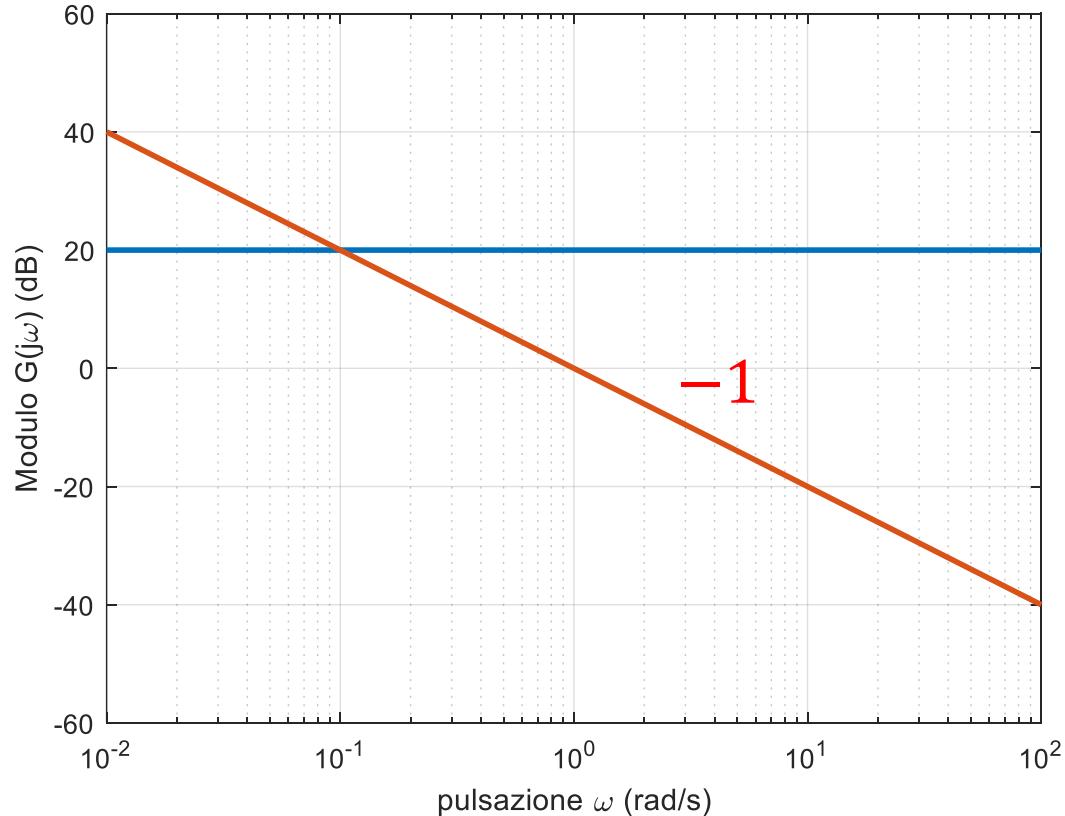
Uno zero reale in  $-1 \rightarrow (1 + s)$

Un polo reale in  $-10 \rightarrow (1 + 0.1s)$

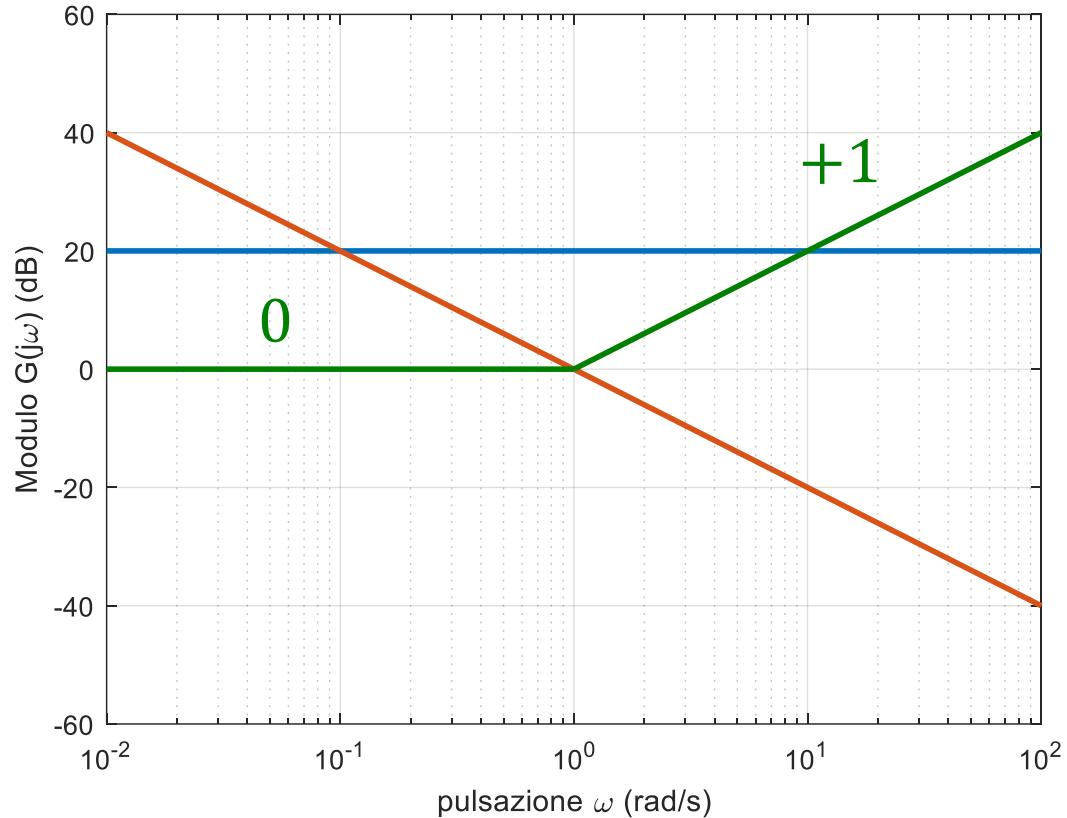
Guadagno  $\mu = 10 \rightarrow$  retta costante a 20 dB



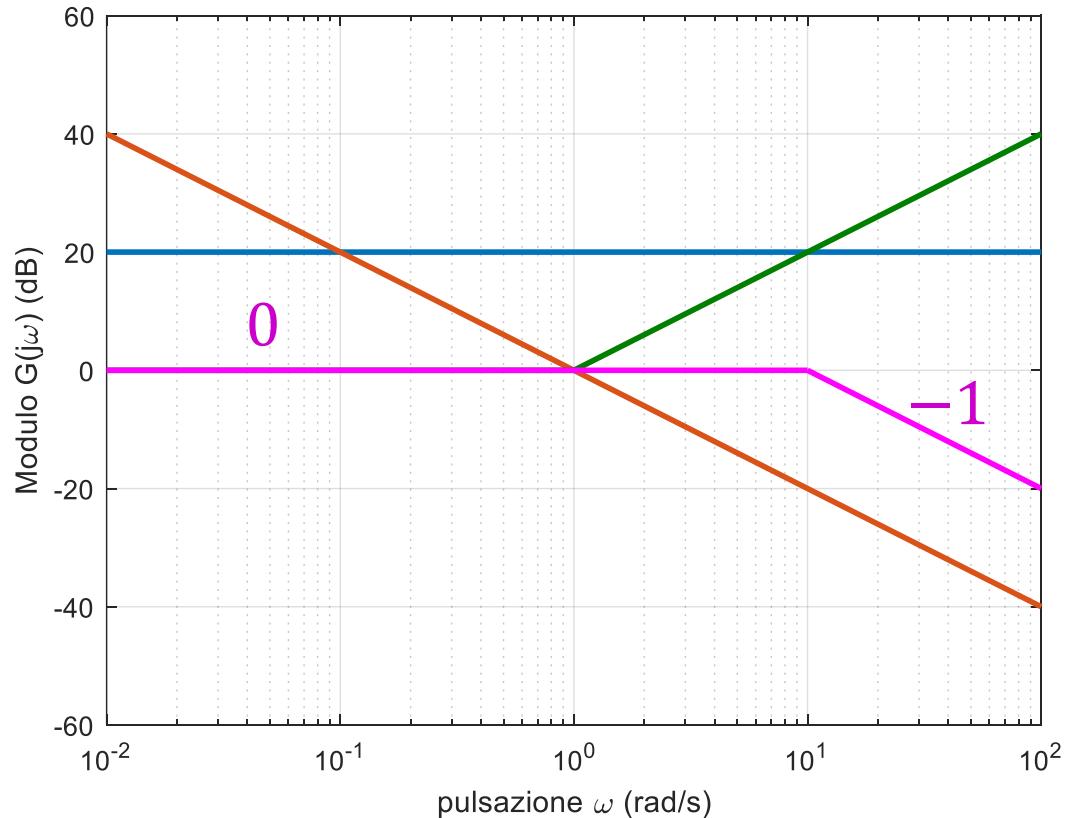
Un polo nell'origine  $\frac{1}{s} \rightarrow$  retta con pendenza  $-1$  per  $\omega = 1 \text{ rad/s}$



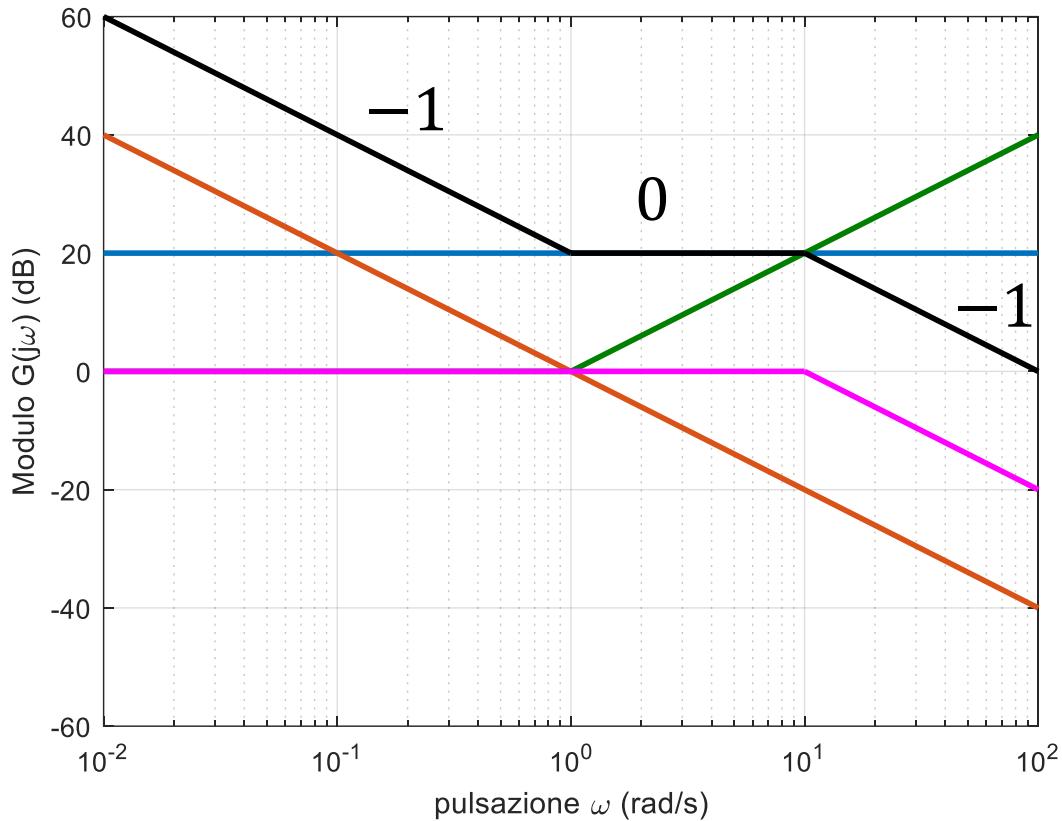
Uno zero reale  $(1 + s)$   $\rightarrow$  0 dB fino ad  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  e poi retta con pendenza +1



Un polo reale  $\frac{1}{(1+0.1s)}$  → 0 dB fino ad  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  e poi retta con pendenza  $-1$

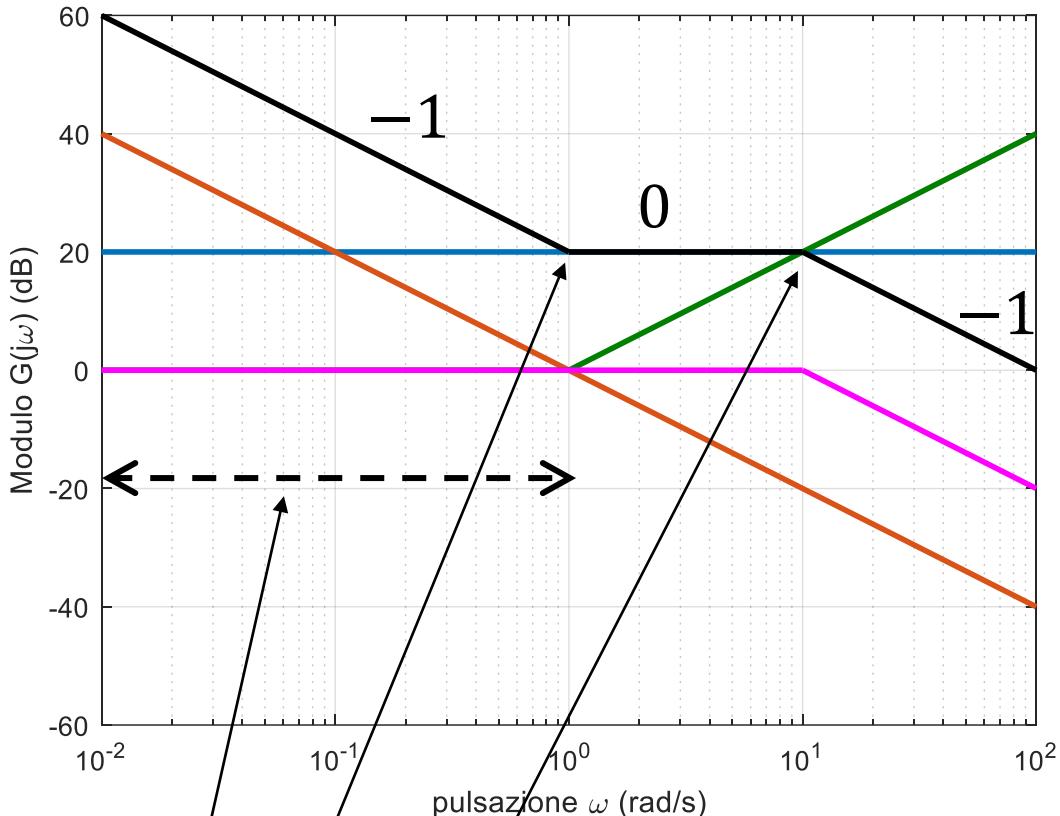


Sommando le 4 curve si ottiene il diagramma



Guadagno 10  
Polo nell'origine  
Zero in  $-1$   
Polo in  $-10$   
  
**Totale**

E' un metodo un po' laborioso...



In questa zona il **polo in  $-10$**  e lo **zero in  $-1$**  non danno contributo.  
Contano solo il **polo nell'origine** ed il **guadagno**.

Qui «interviene» lo **zero in  $-1$**  provocando un cambiamento di pendenza  $+1$  e la pendenza passa da  $-1$  a  $0$ .

Qui «interviene» il **polo in  $-10$**  provocando un cambiamento di pendenza  $-1$  e la pendenza passa da  $0$  a  $-1$ .

## 4. Diagramma asintotico di Bode del modulo : regole per il tracciamento

1. la pendenza iniziale vale  $-g$
2. il tratto iniziale passa in  $|\mu|_{dB}$  per  $\omega = 1 \text{ rad/s}$
3. cambi di pendenza in corrispondenza di poli (-1) e zeri (+1)

### Osservazione

La pendenza finale (per  $\omega \rightarrow \infty$ ) è data da :

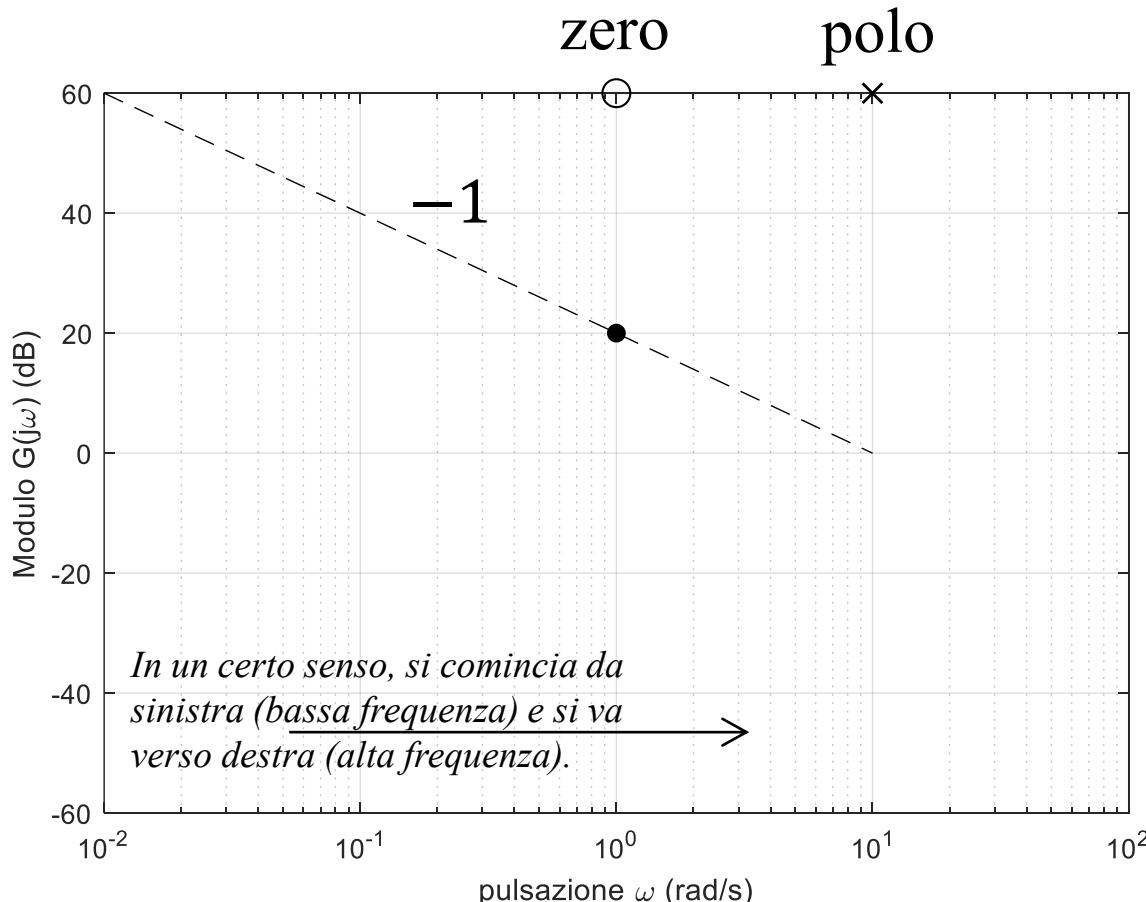
$$n^{\circ} \text{ zeri} - n^{\circ} \text{ poli} \leq 0$$

(= 0 solo se  $G(s)$  è non strett. propria)

# Esempio

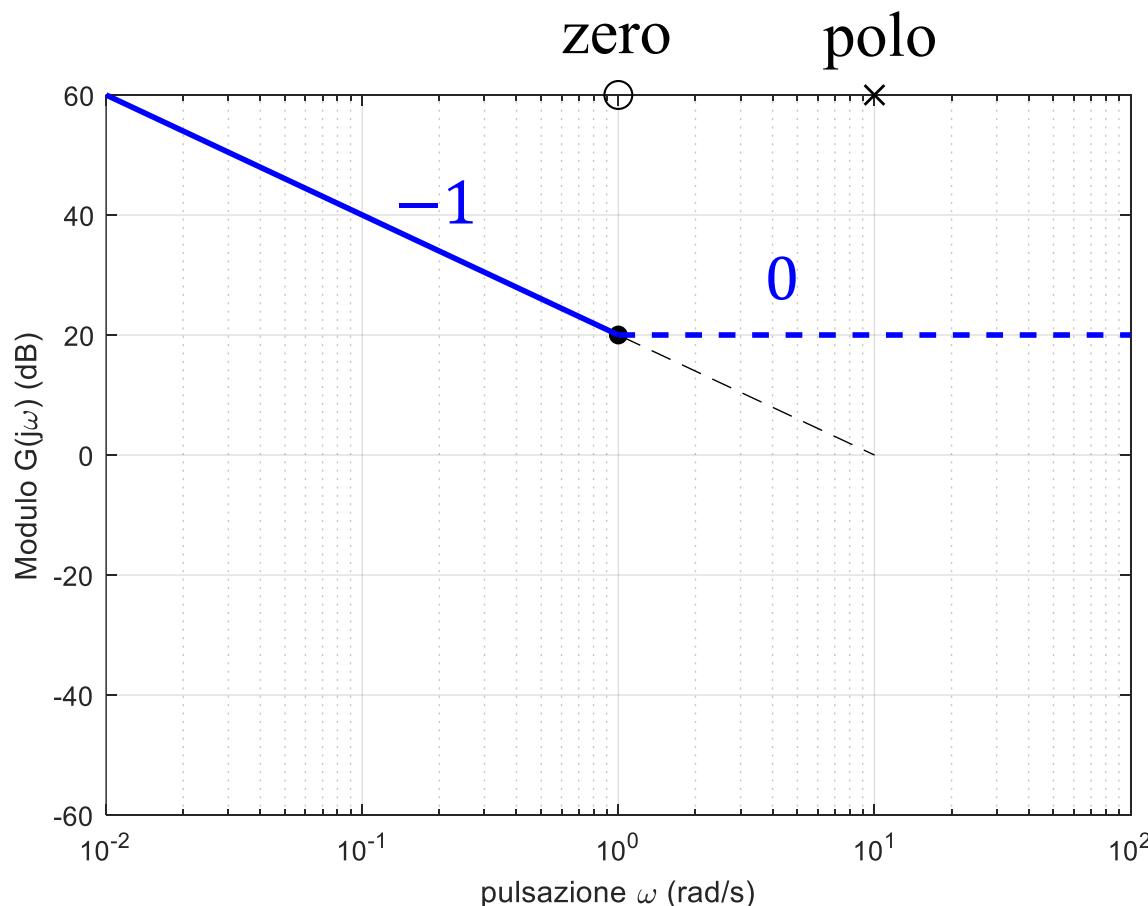
$$G(s) = \frac{10(1+s)}{s(1+0.1s)}$$

1. la pendenza iniziale vale  $-1$
2. il tratto iniziale passa in  $20 \text{ dB}$  per  $\omega = 1 \text{ rad/s}$



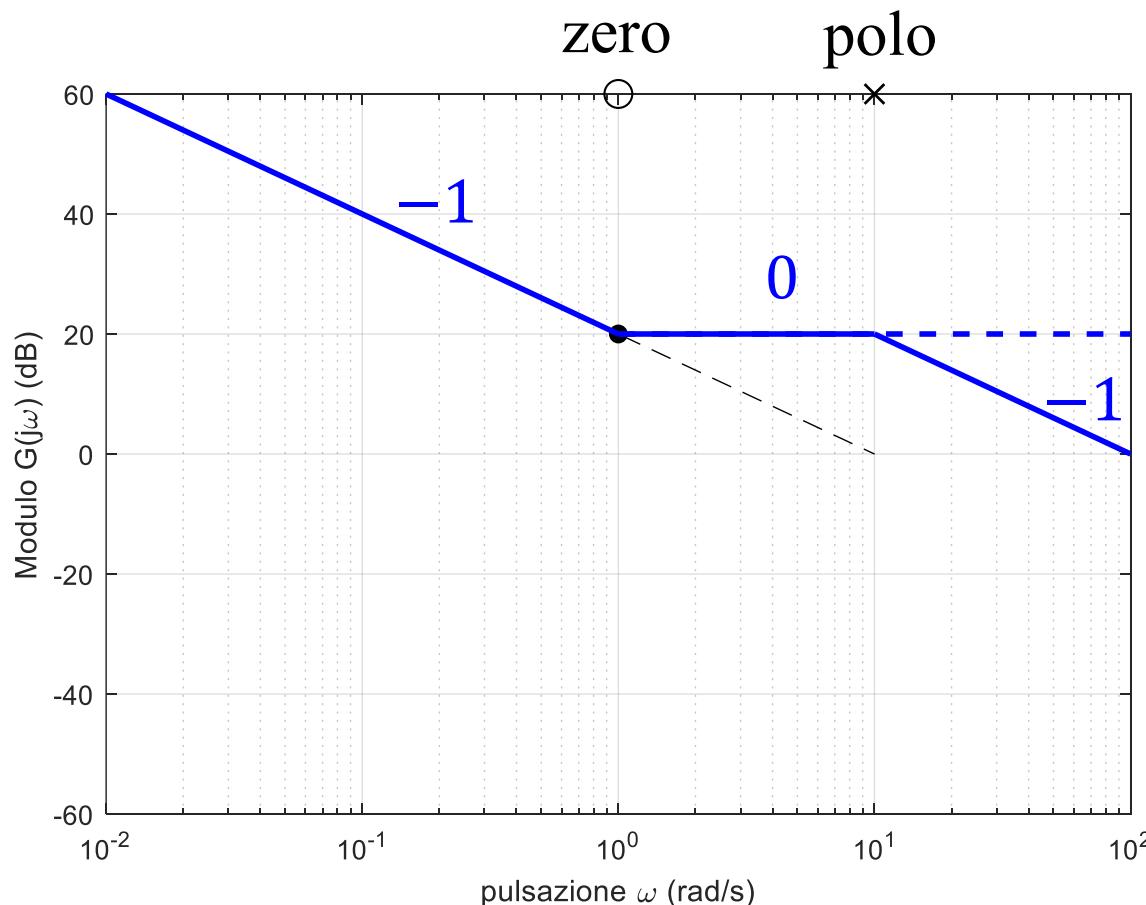
### 3. cambi di pendenza in corrispondenza di poli (-1) e zeri (+1)

Il primo che incontro (da sx a dx) è lo zero.



### 3. cambi di pendenza in corrispondenza di poli (-1) e zeri (+1)

Poi incontro il polo (sempre da sx a dx).



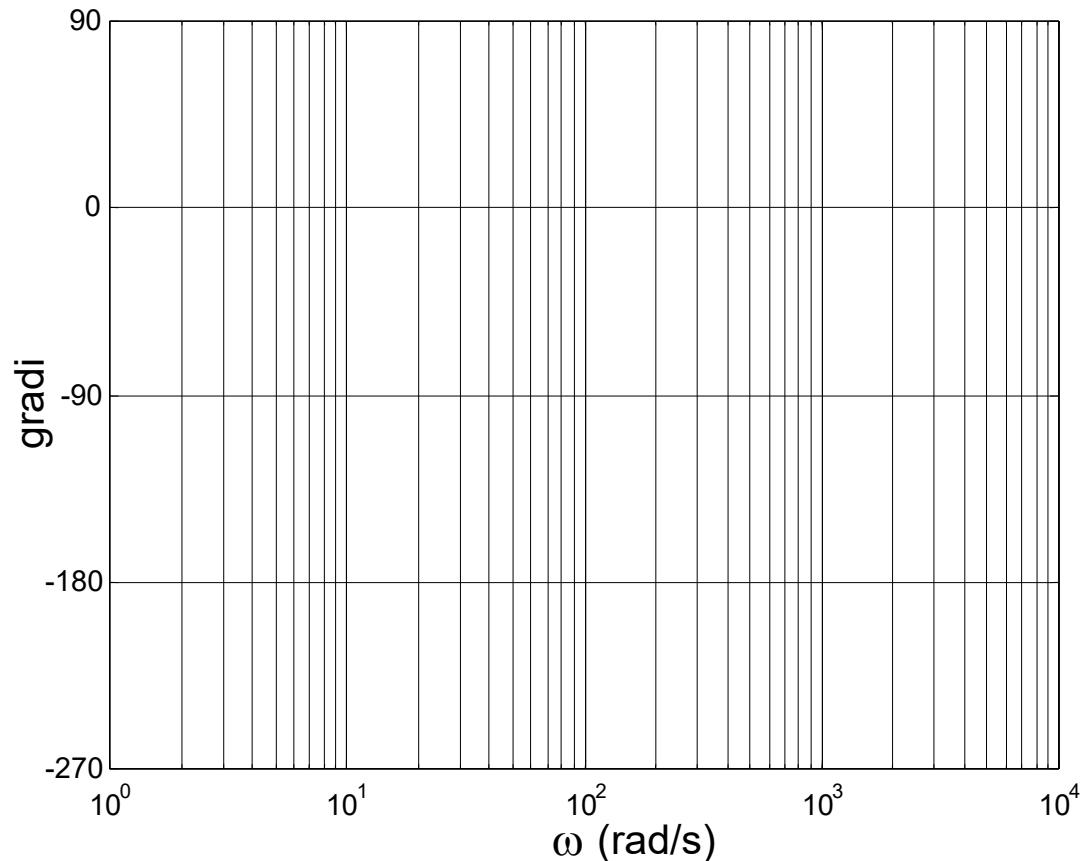
## 5. Diagramma di Bode della fase : convenzioni

➤ Ordinata in gradi

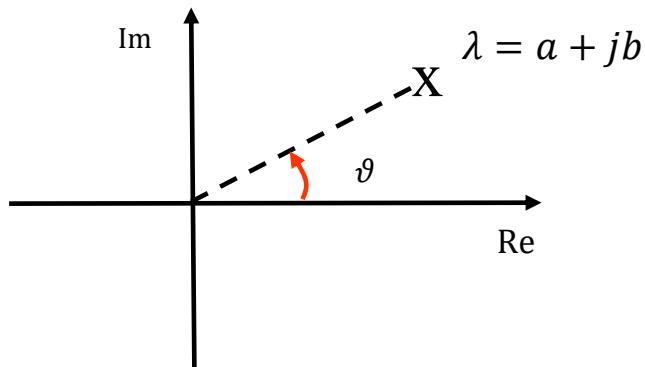
$$\angle G(j\omega)$$

➤ Ascissa in  
scala logaritmica

$$\log \omega_2 - \log \omega_1 = \log \frac{\omega_2}{\omega_1}$$



## 6. Argomento o fase di un numero complesso



Convenzione:

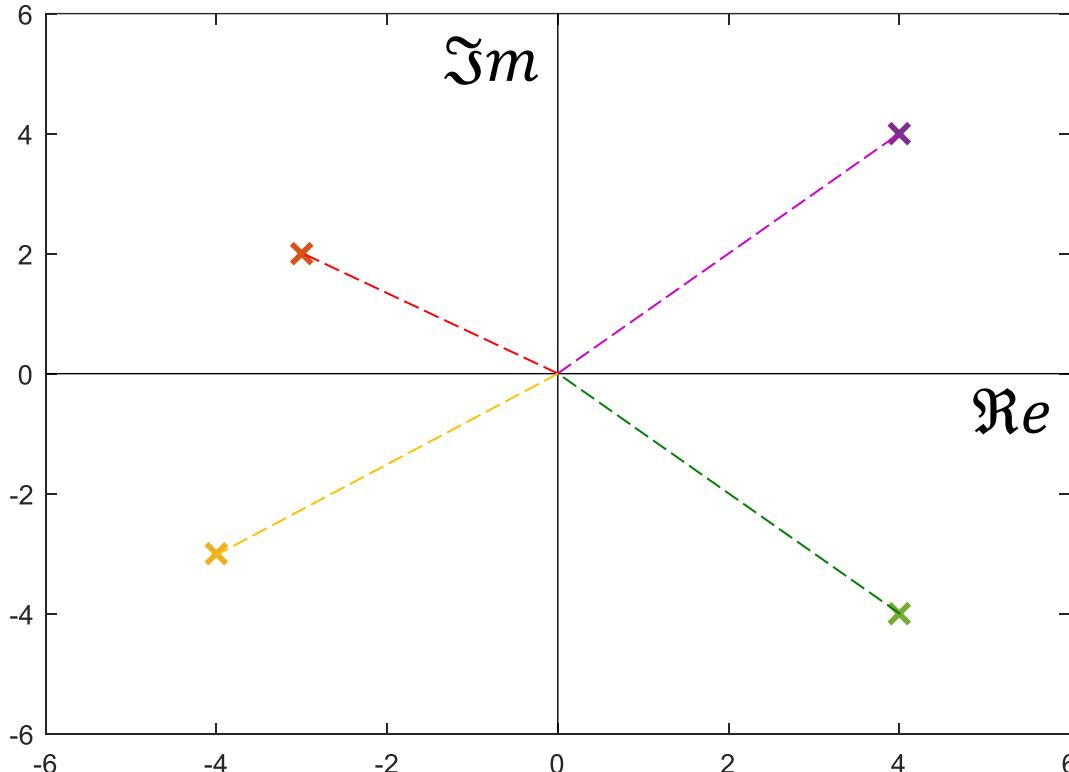
➤  $-180^\circ \leq \angle\lambda < 180^\circ$

➤ La fase di un numero reale negativo è  $-180^\circ$

Calcolo della fase

- se  $a \geq 0$   $\angle\lambda = \text{atan} \frac{b}{a}$   $(-90^\circ \leq \angle\lambda \leq +90^\circ)$
- se  $a < 0$   
 $b > 0$   $\angle\lambda = \text{atan} \frac{b}{a} + 180^\circ$   $(+90^\circ < \angle\lambda < +180^\circ)$
- se  $a < 0$   
 $b \leq 0$   $\angle\lambda = \text{atan} \frac{b}{a} - 180^\circ$   $(-180^\circ \leq \angle\lambda < -90^\circ)$

# Esempi



$$z_1 = +4 + j4$$

$$z_2 = -3 + j2$$

$$z_3 = -3 - j4$$

$$z_4 = +4 - j4$$

$$\measuredangle z_1 = \arctg \left( \frac{4}{4} \right) = 45^\circ$$

$$\measuredangle z_2 = \arctg \left( \frac{2}{-3} \right) + 180^\circ = -33^\circ.7 + 180 = +146^\circ.3$$

$$\measuredangle z_3 = \arctg \left( \frac{-4}{-3} \right) - 180^\circ = 53^\circ.1 - 180^\circ = -126^\circ.9$$

$$\measuredangle z_4 = \arctg \left( \frac{-4}{4} \right) = -45^\circ$$

## 7. Diagramma di Bode della fase : tracciamento

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)}$$

Funzione di trasferimento

$\longrightarrow$

$$G(j\omega) = \frac{\mu}{(j\omega)^g} \frac{\prod_i (1 + j\omega T_i)}{\prod_i (1 + j\omega \tau_i)}$$

Risposta in frequenza

Fase della risposta in frequenza (in gradi)

$$\angle G(j\omega) = \cancel{\frac{1}{2}\mu} - \cancel{\frac{1}{2}(j\omega)^g} + \sum_i \cancel{\frac{1}{2}(1 + j\omega T_i)} - \sum_i \cancel{\frac{1}{2}(1 + j\omega \tau_i)}$$

guadagno

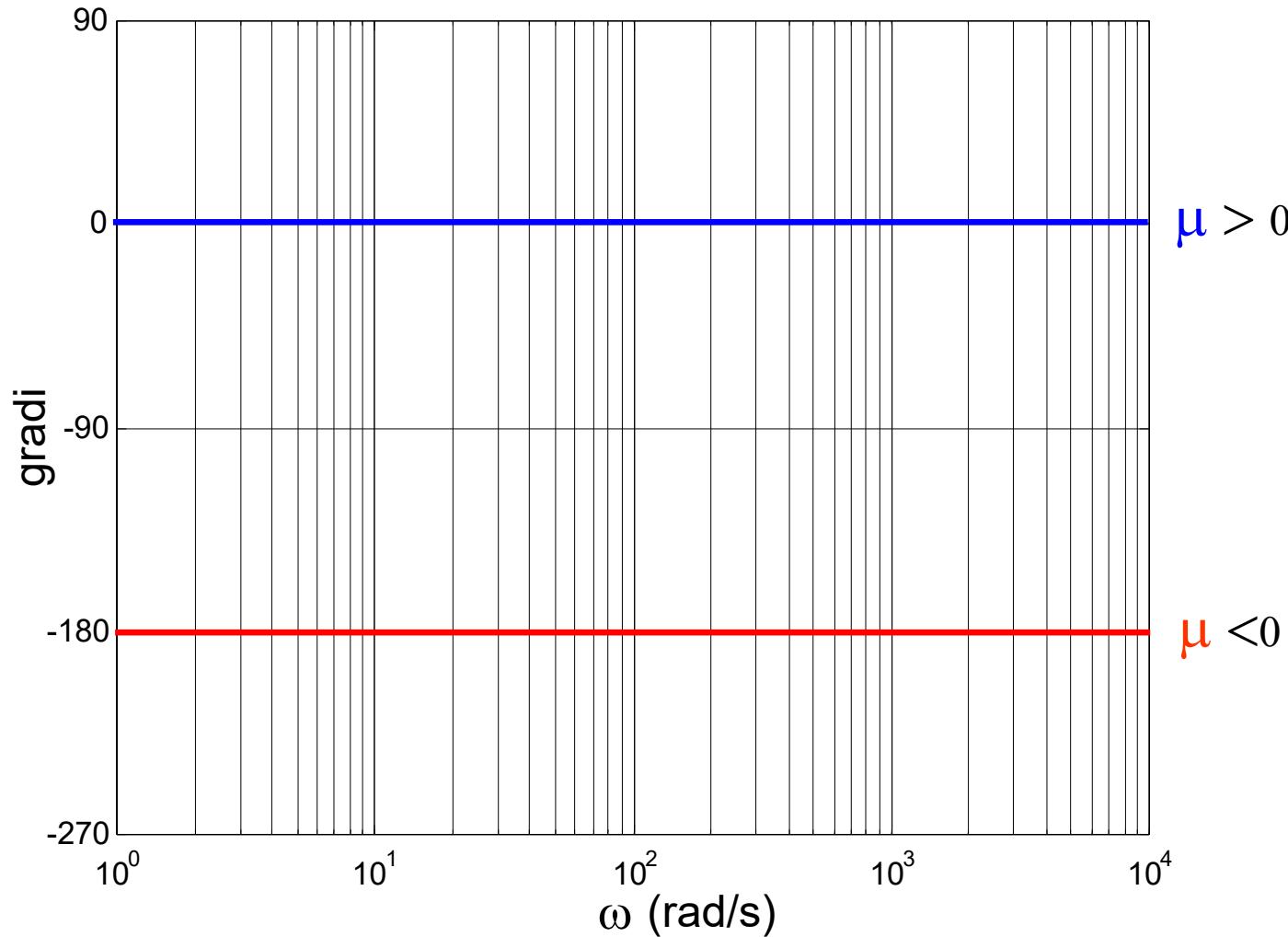
poli o zeri nell'origine

zeri (reali & complessi coniugati)

poli (reali & complessi coniugati)

## 7.1 Guadagno

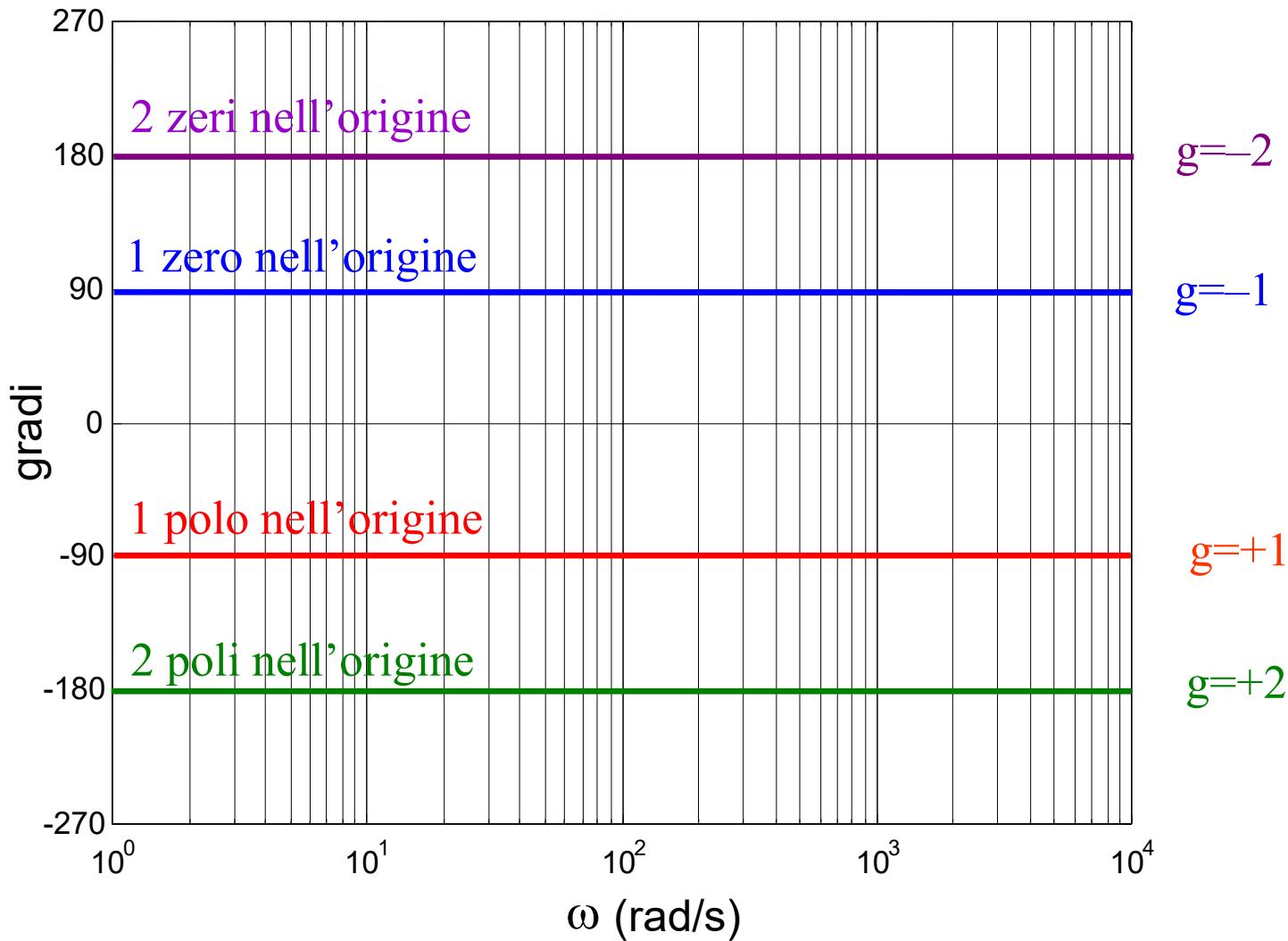
$$\Delta\mu = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \mu > 0 \\ -180^\circ & \text{se } \mu < 0 \end{cases}$$



**Due sole  
opzioni!**

## 7.2 Poli & zeri nell'origine

$$-\zeta(j\omega)^g = -g\zeta(j\omega) = -g90^\circ \quad \rightarrow \quad \text{retta costante}$$



### 7.3.a Zero reale

$$\varphi(1 + j\omega T) = \text{atan}(\omega T) \quad T \text{ reale}$$

Il disegno di questa funzione di  $\omega$  è facile, ma si può comunque trovare un'approssimazione valida per alte e basse pulsazioni.

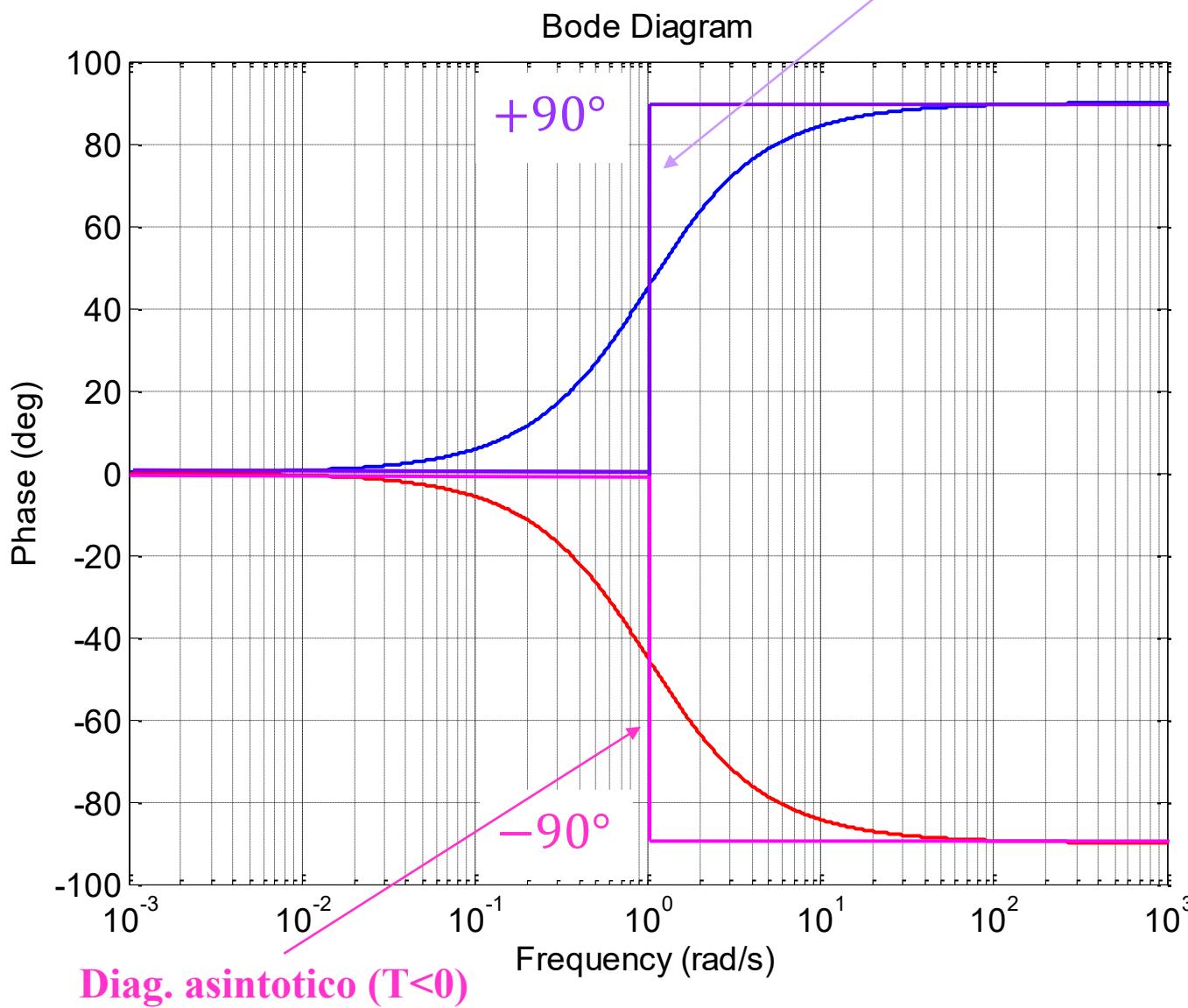
**Basse  $\omega$**

➤ per  $\omega \rightarrow 0$  ➤  $\text{atan}(\omega T) \longrightarrow 0^\circ$

**Alte  $\omega$**

➤ per  $\omega \rightarrow \infty$  ➤  $\text{atan}(\omega T)$  ↗  $+90^\circ$  se  $T > 0$  (zero a sx)  
↘  $-90^\circ$  se  $T < 0$  (zero a dx)

## Zero reale (esempio)



**Zero a SX ( $T > 0$ )**

$$G(s) = 1 + s$$

Approssimazione  
asintotica

$$G(s) = 1 - s$$

**Zero a DX ( $T < 0$ )**

## 7.3.b Zeri complessi coniugati

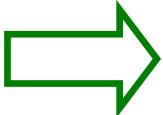
Usiamo l'espressione con smorzamento e pulsazione naturale

$$\tilde{G}(s) = 1 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \quad \text{funzione di trasferimento}$$

$$\tilde{G}(j\omega) = 1 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \quad \text{risposta in frequenza}$$

$$\angle \tilde{G}(j\omega) = \angle \left( \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

Basse  $\omega$

 per  $\omega \rightarrow 0$    $\angle \tilde{G}(j\omega) = \angle 1 = 0^\circ$

Alte  $\omega$

 per  $\omega \rightarrow \infty$  

$$\angle \tilde{G}(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctg \frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \pm 180^\circ$$

$(+180^\circ \text{ se } \xi > 0)$

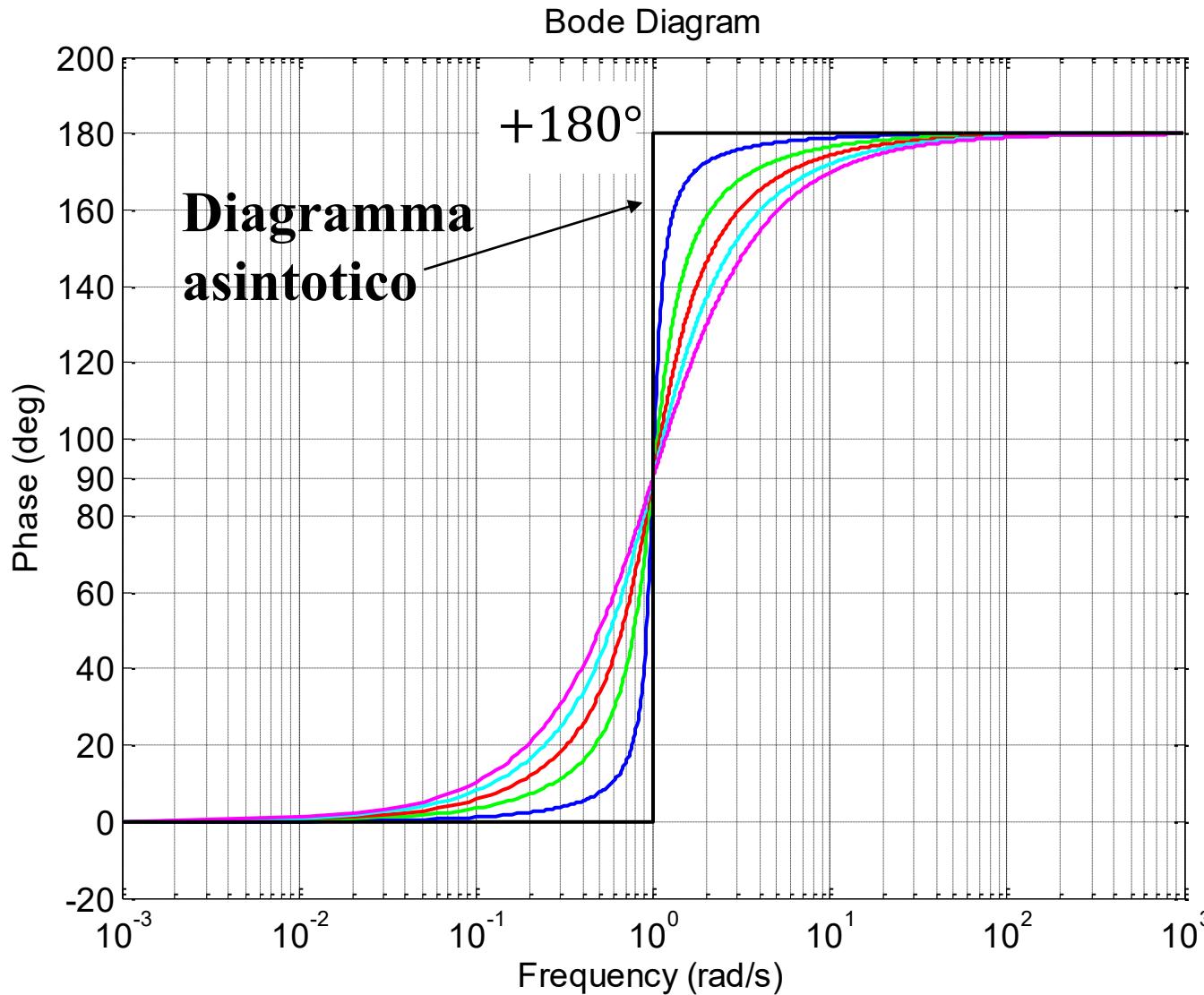
$(-180^\circ \text{ se } \xi < 0)$

$$\text{Ma } \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctg \frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = 0^\circ$$

Quindi

$$\arg(\tilde{G}(j\omega)) = \begin{cases} 0^\circ & \text{per } \omega \rightarrow 0 \\ +180^\circ \text{ se } \xi > 0 & (\text{zeri a sx}) \\ -180^\circ \text{ se } \xi < 0 & (\text{zeri a dx}) \end{cases}$$

# Zeri complessi coniugati (esempio) $G(s) = 1 + 2\xi s + s^2$ $\omega_n = 1$



Zeri a SX

$$\xi = 0.1$$

$$\xi = 0.3$$

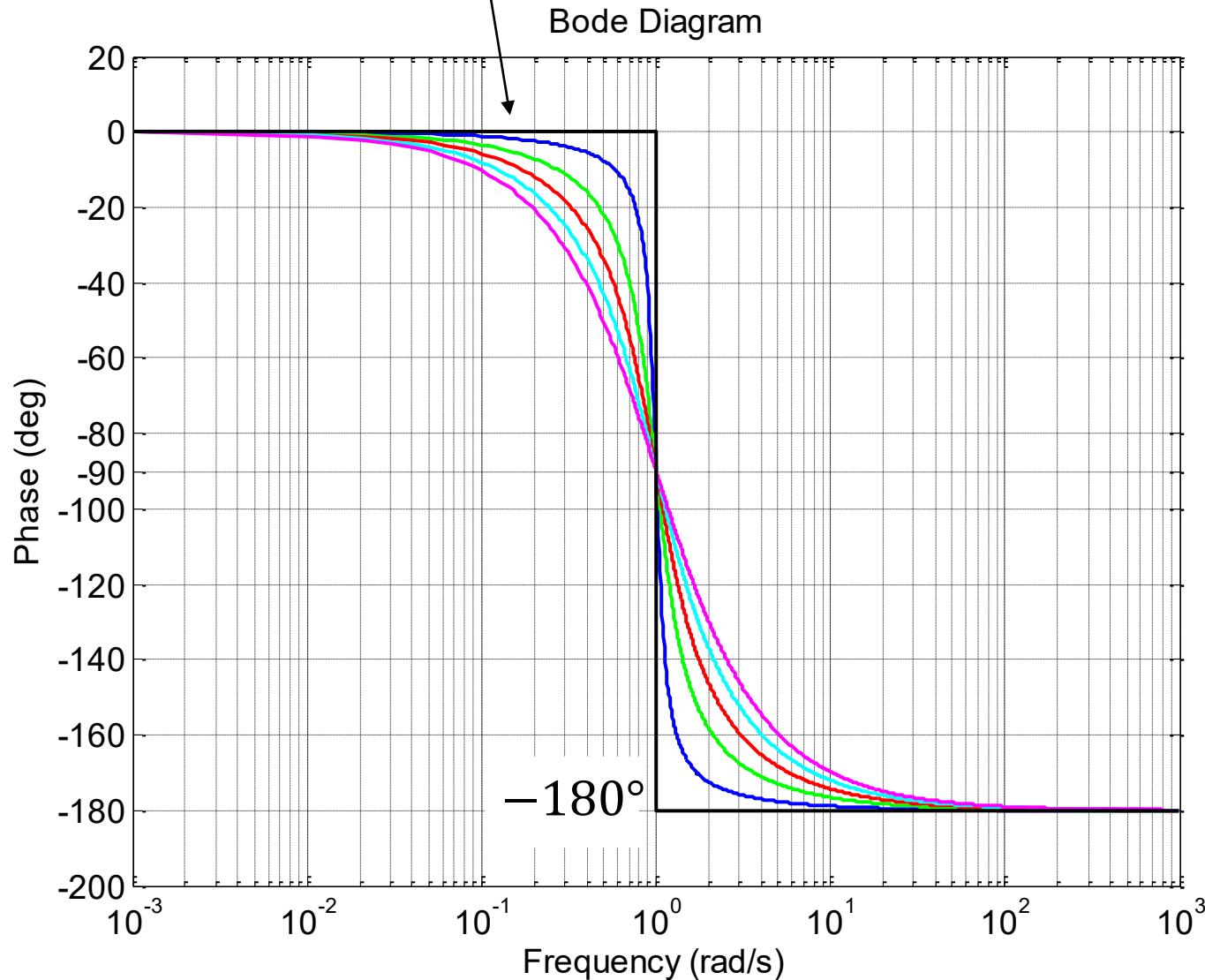
$$\xi = 0.5$$

$$\xi = 0.7$$

$$\xi = 0.9$$

# Diagramma asintotico

$$G(s) = 1 + 2\xi s + s^2 \quad \omega_n = 1$$



Zeri a DX

$$\xi = 0$$

$$\xi = -0.1$$

$$\xi = -0.3$$

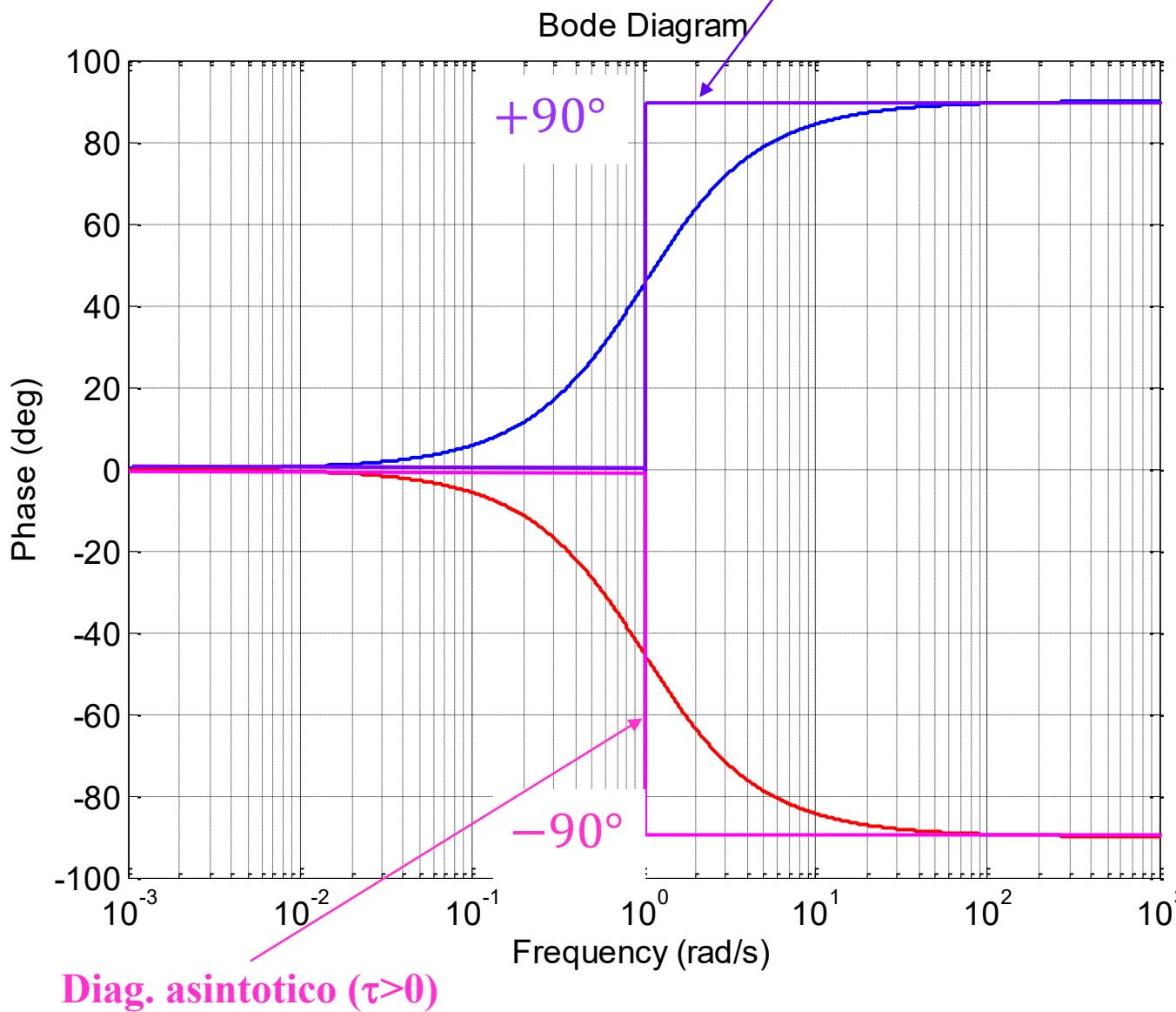
$$\xi = -0.5$$

$$\xi = -0.7$$

$$\xi = -0.9$$

Per i poli valgono i medesimi ragionamenti,  
fatto salvo il segno

## Polo reale (esempio)



Polo a DX ( $\tau<0$ )

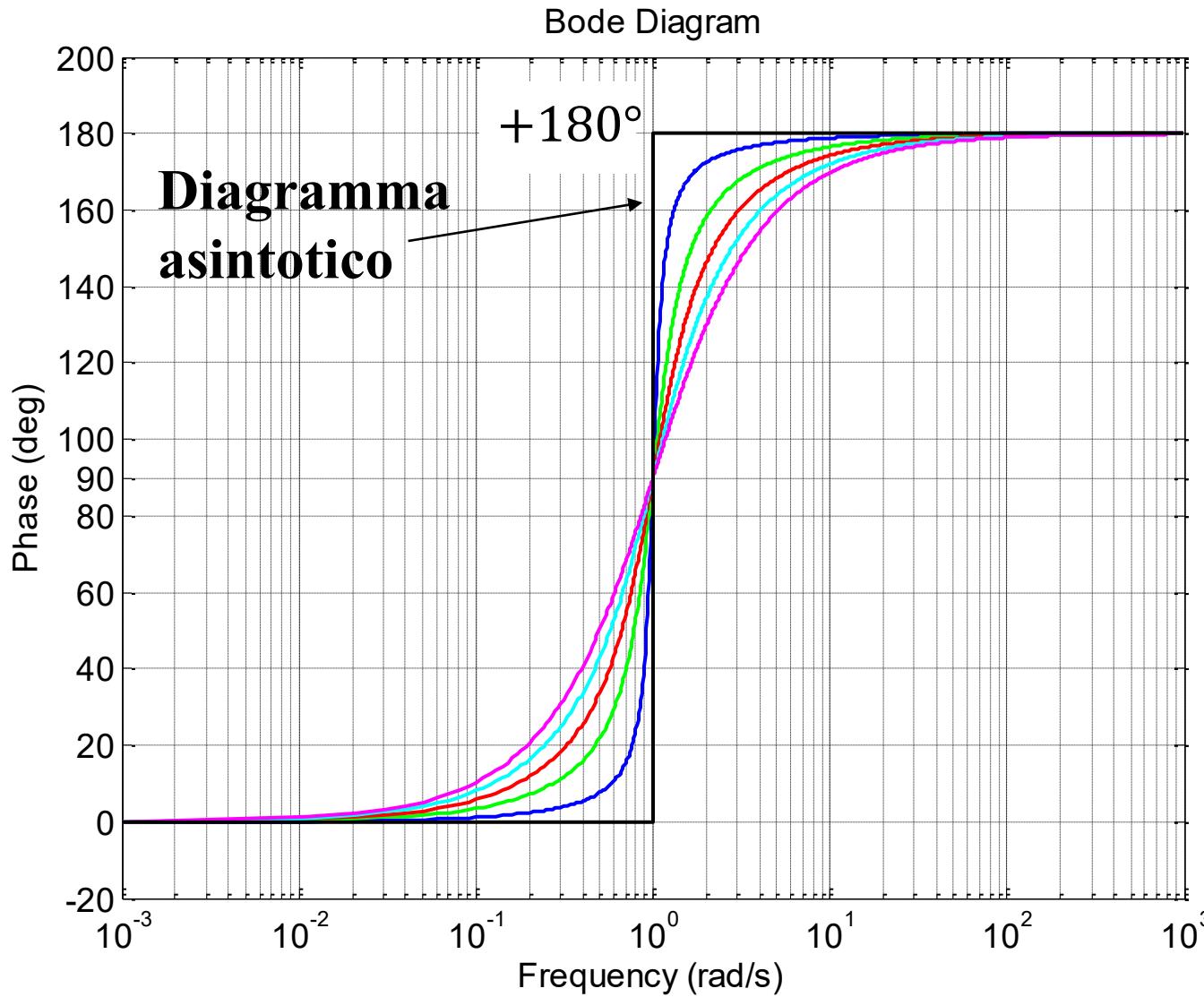
$$G(s) = \frac{1}{1-s}$$

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$

Polo a SX ( $\tau>0$ )

## Poli complessi coniugati (esempio)

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi s + s^2} \quad \omega_n = 1$$



**Poli a DX**

$$\xi = -0.1$$

$$\xi = -0.3$$

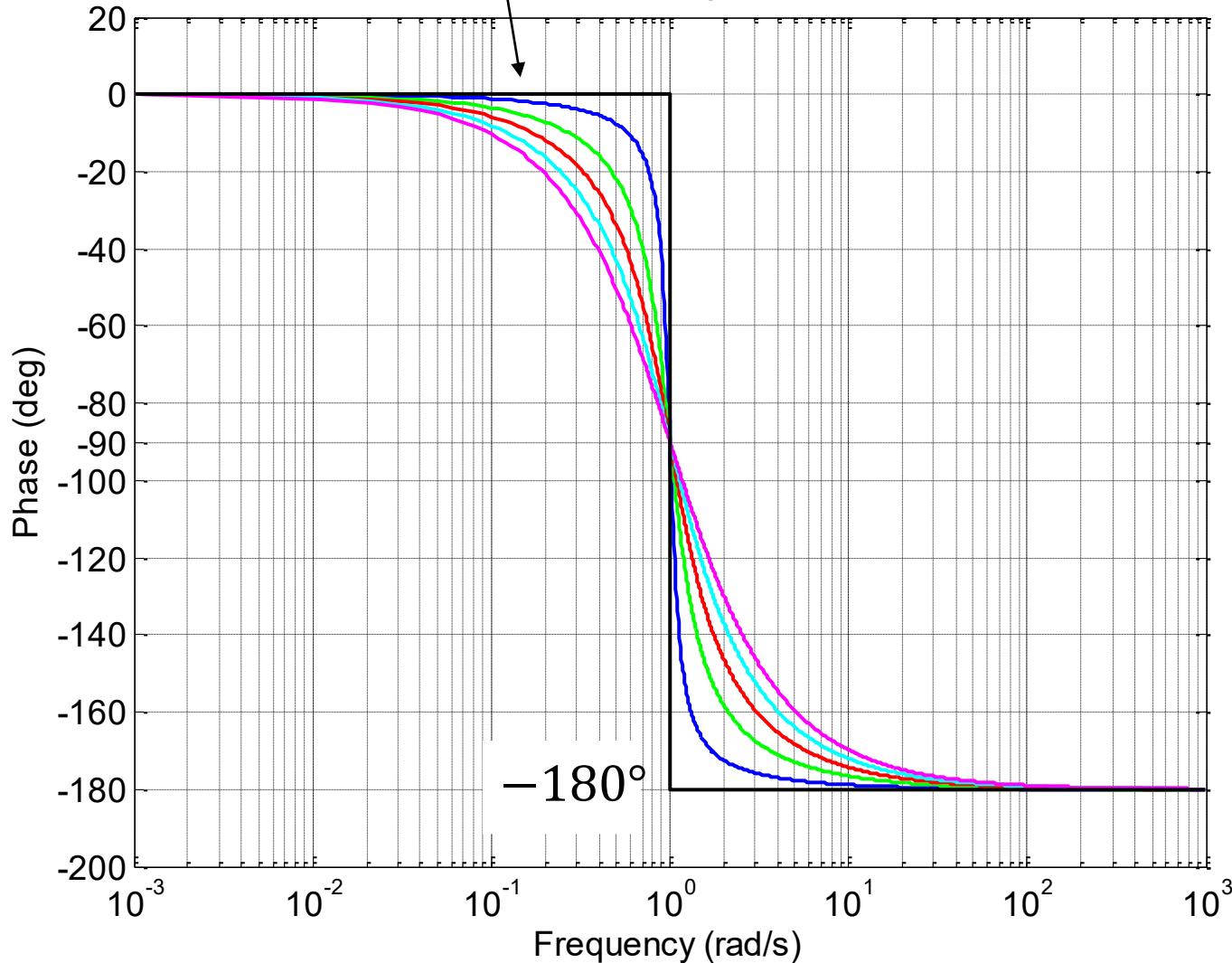
$$\xi = -0.5$$

$$\xi = -0.7$$

$$\xi = -0.9$$

# Diagramma asintotico

Bode Diagram



$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\xi s + s^2} \quad \omega_n = 1$$

Poli a SX

$$\xi = 0$$

$$\xi = 0.1$$

$$\xi = 0.3$$

$$\xi = 0.5$$

$$\xi = 0.7$$

$$\xi = 0.9$$

## 8. Diagramma asintotico di Bode della fase : regole per il tracciamento

*guadagno*      *poli o zeri nell'origine*

1. valore iniziale  $\frac{4\mu}{g} - 90^\circ$
2. cambi di valore in corrispondenza di poli e zeri

|      | semipiano<br>sinistro | semipiano<br>destro |
|------|-----------------------|---------------------|
| poli | $-90^\circ$           | $+90^\circ$         |
| zeri | $+90^\circ$           | $-90^\circ$         |

# Esempio

$$G(s) = \frac{10(1 + s)}{s(1 + 0.1s)}$$

Guadagno  $\mu = 10$

Un polo nell'origine  $\frac{1}{s}$

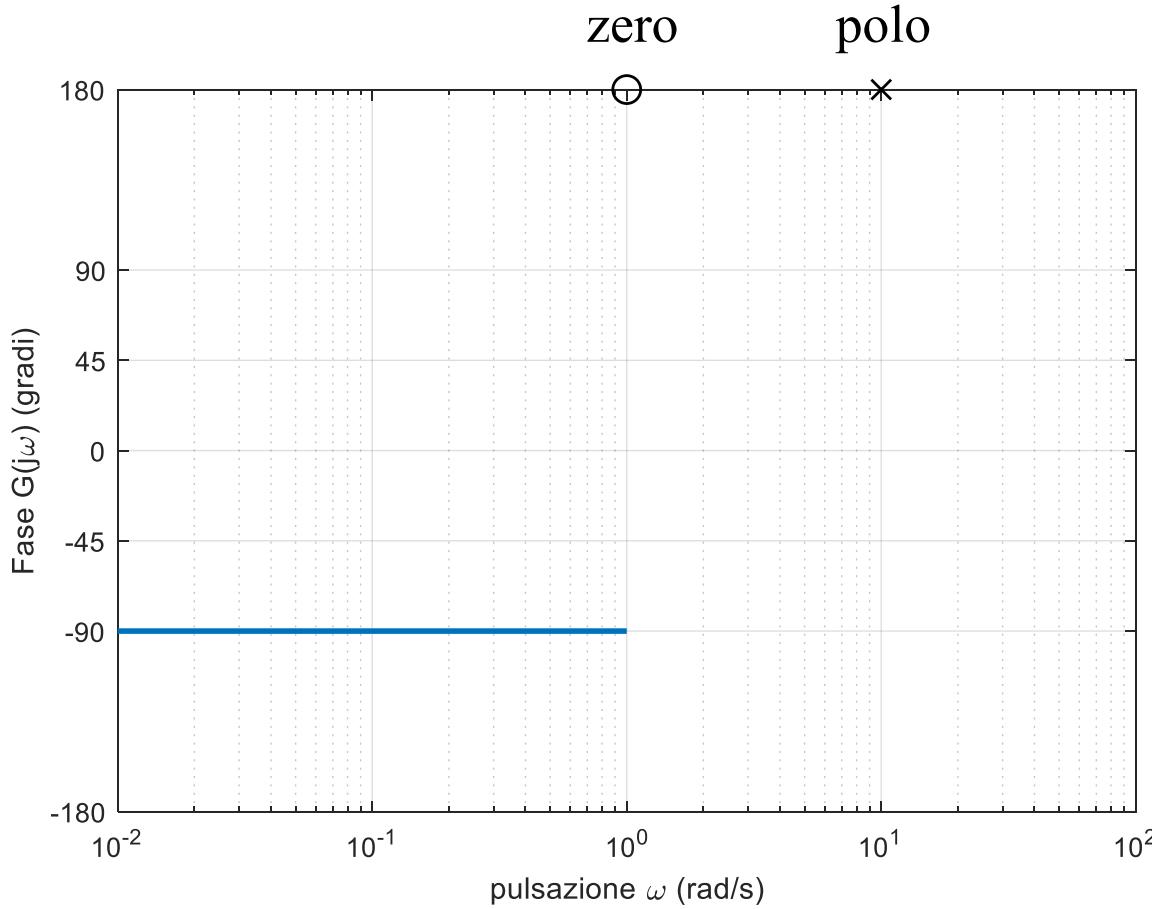
Uno zero reale in  $-1 \rightarrow (1 + s)$

Un polo reale in  $-10 \rightarrow (1 + 0.1s)$

Il guadagno è positivo e quindi dà contributo  $0^\circ$ .

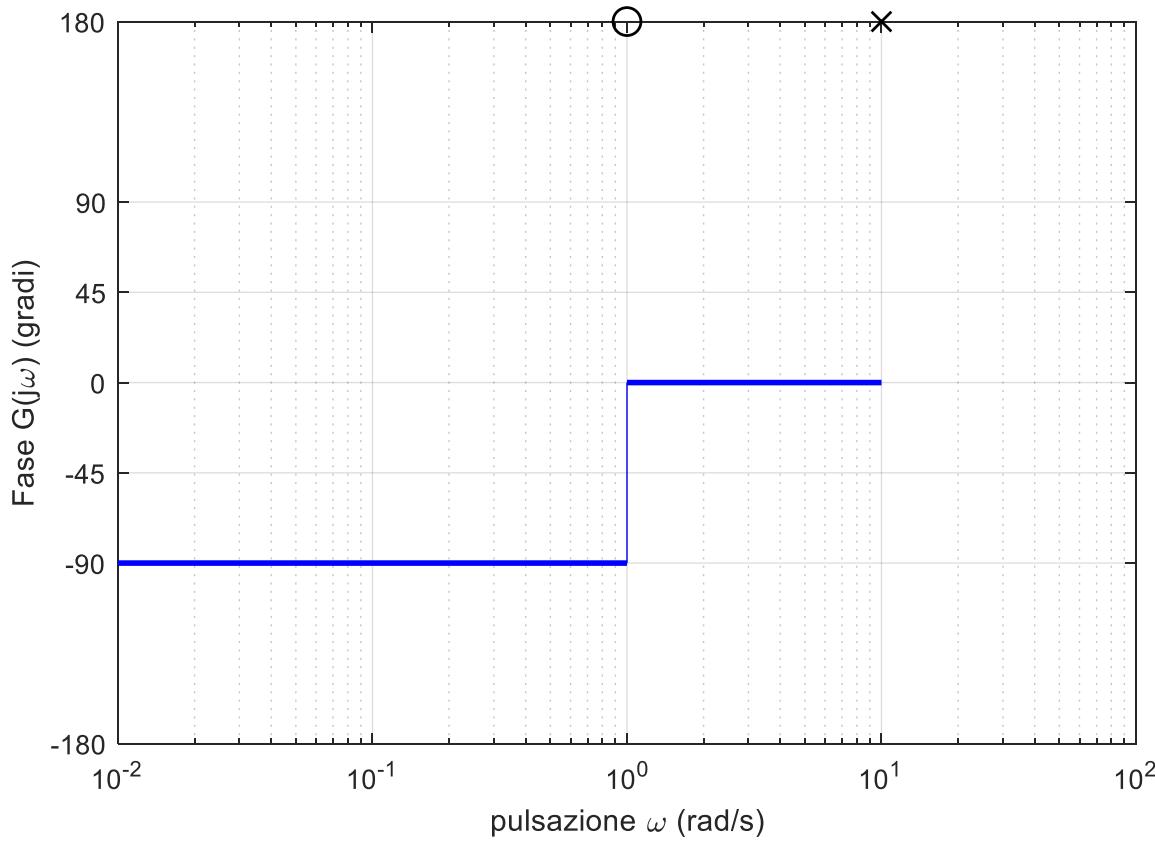
Il polo nell'origine dà contributo  $-90^\circ$ .

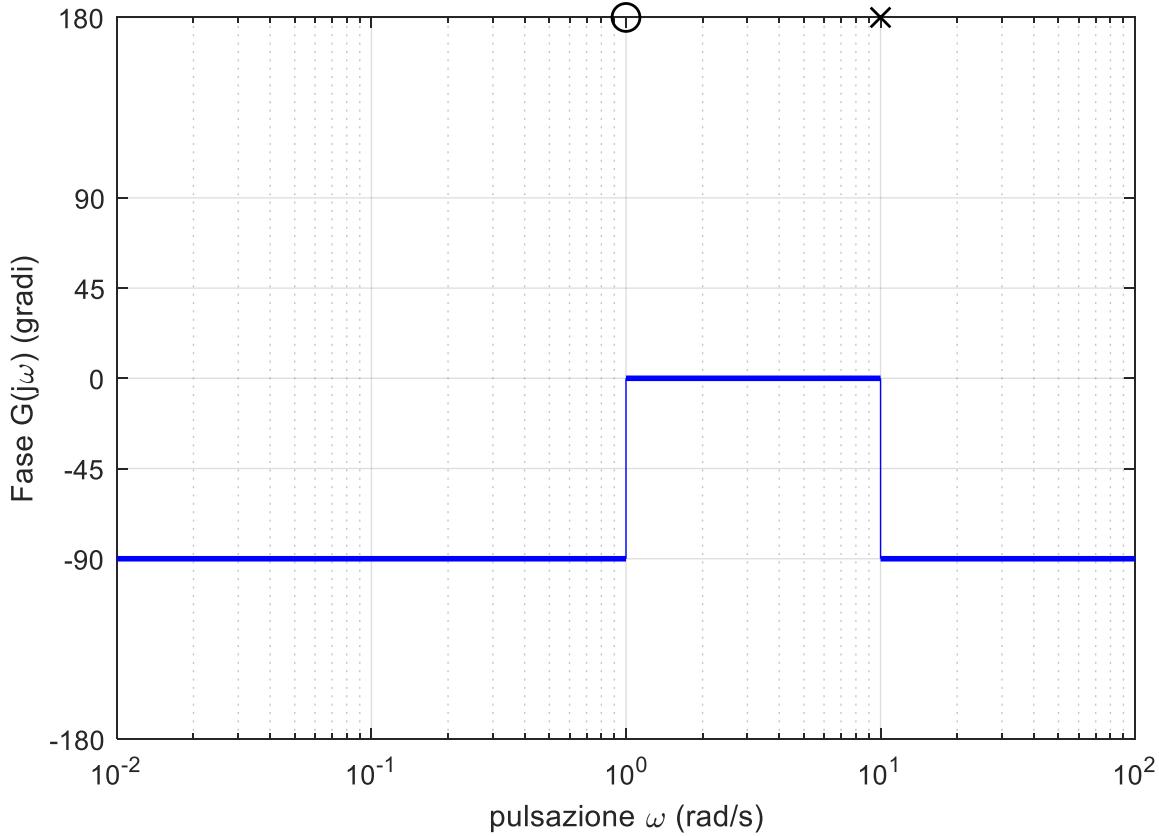
Comincio a tracciare da SX e mi fermo quando incontro lo zero.



Lo zero è negativo e quindi dà contributo  $+90^\circ$ .

Continuo a tracciare e mi fermo ancora quando incontro il polo.





# 9. Sistemi a fase minima

## Definizione

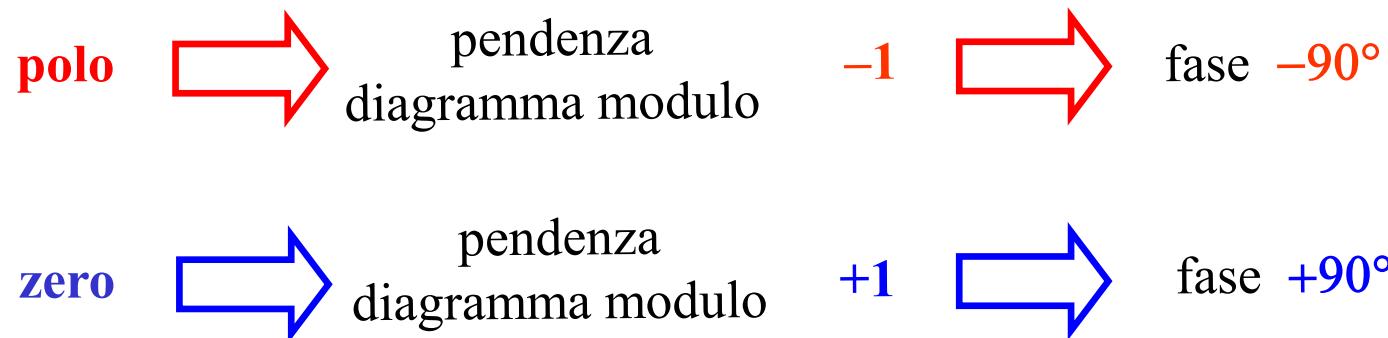
Un sistema dinamico LTI a tempo continuo si dice **a fase minima** se ha:

- guadagno positivo
- tutti i poli e gli zeri con parte reale negativa o nulla

E' quindi possibile dedurre in modo univoco il diagramma della fase da quello del modulo (in generale non è possibile senza conoscere a priori il segno del guadagno e delle singolarità).

Tutti i poli sfasano  $-90^\circ$ , tutti gli zeri sfasano  $+90^\circ$  ed il guadagno non introduce sfasamento.

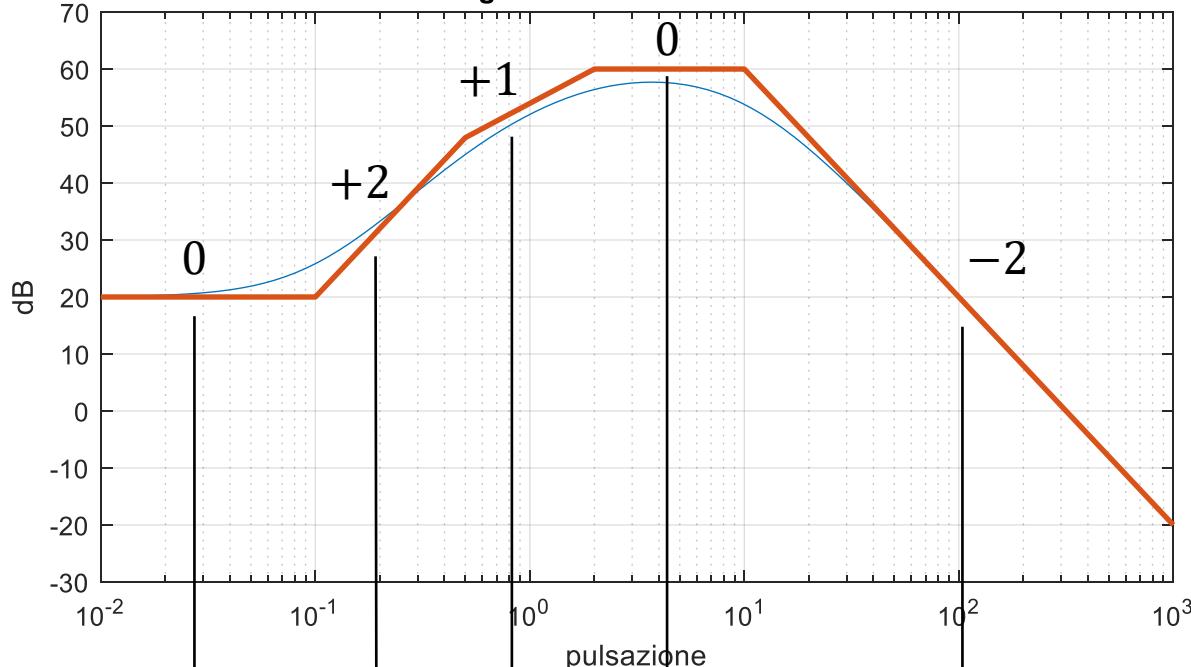
Quindi, dove il diagramma del modulo ha pendenza  $-1$ , il diagramma della fase vale  $-90^\circ$  e similmente dove il diagramma del modulo ha pendenza  $+1$ , il diagramma della fase vale  $+90^\circ$ .



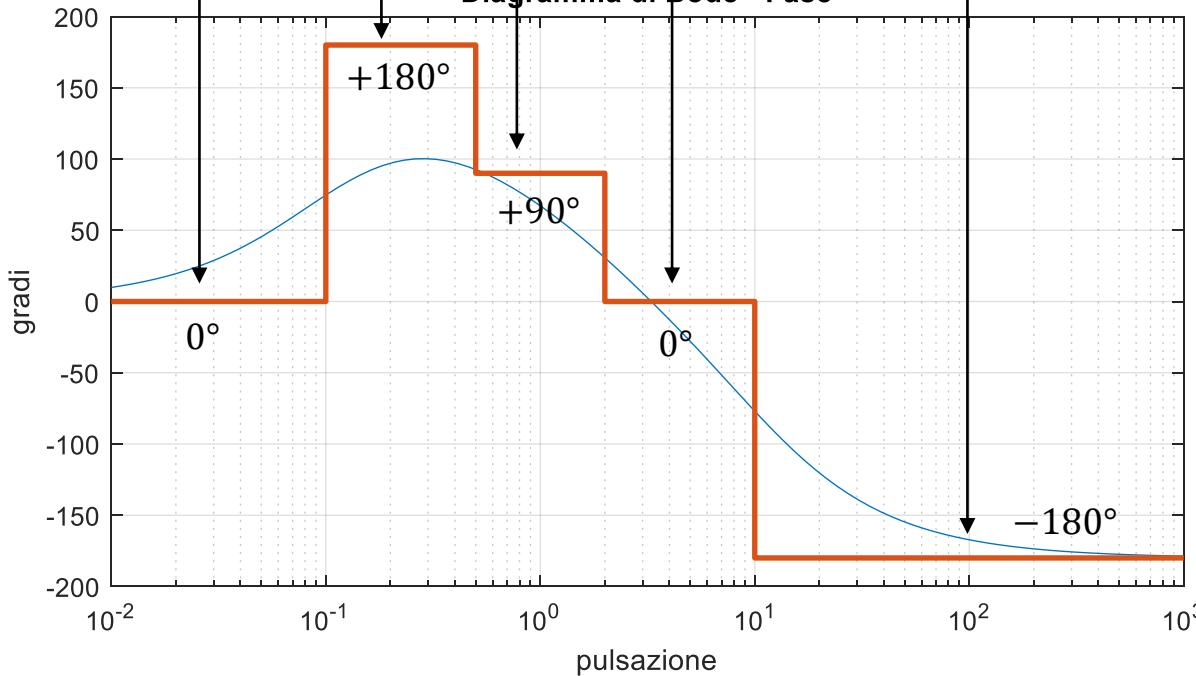
In generale, a **pendenza del diagramma del modulo  $-k$** , corrisponde valore **del diagramma della fase  $-k90^\circ$** .

### Diagramma di Bode - Modulo

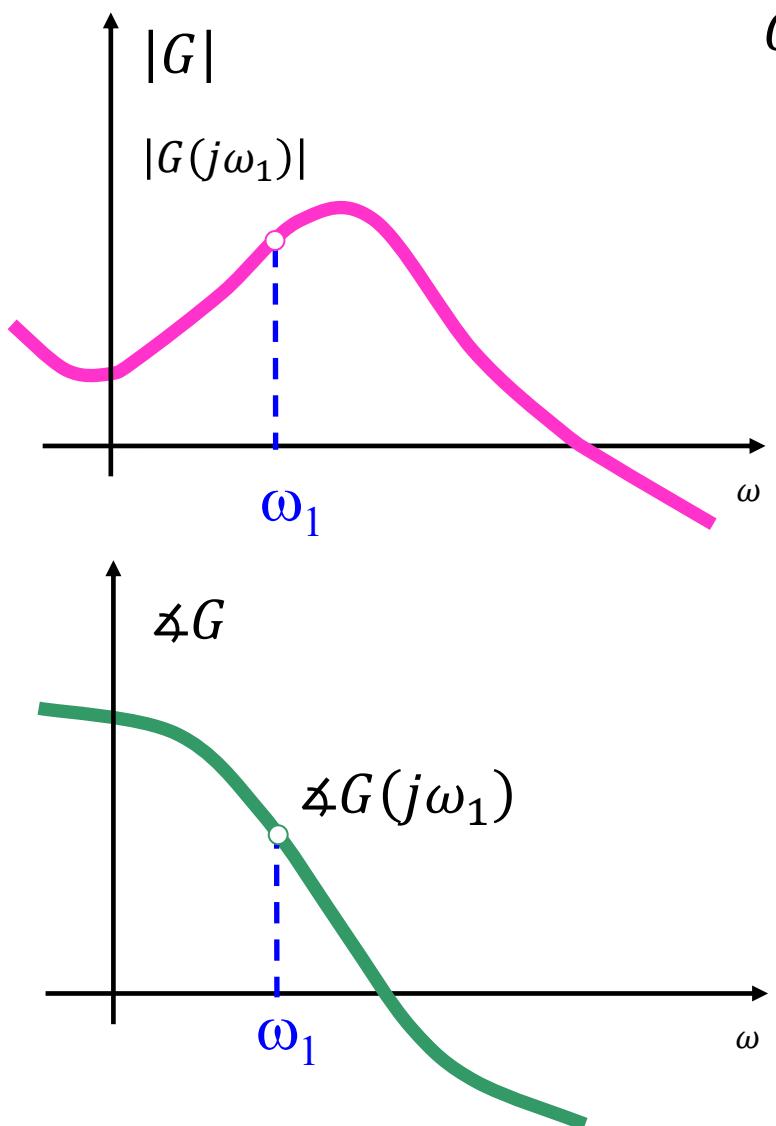
# Sistema a fase minima



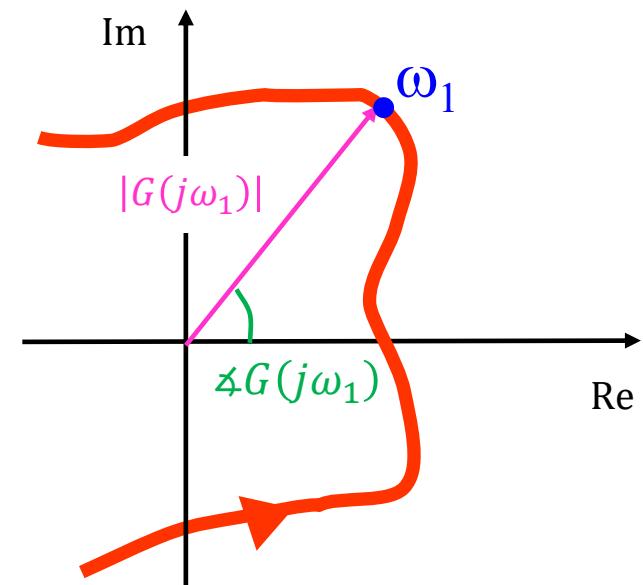
### Diagramma di Bode - Fase



# 10. Diagramma polare

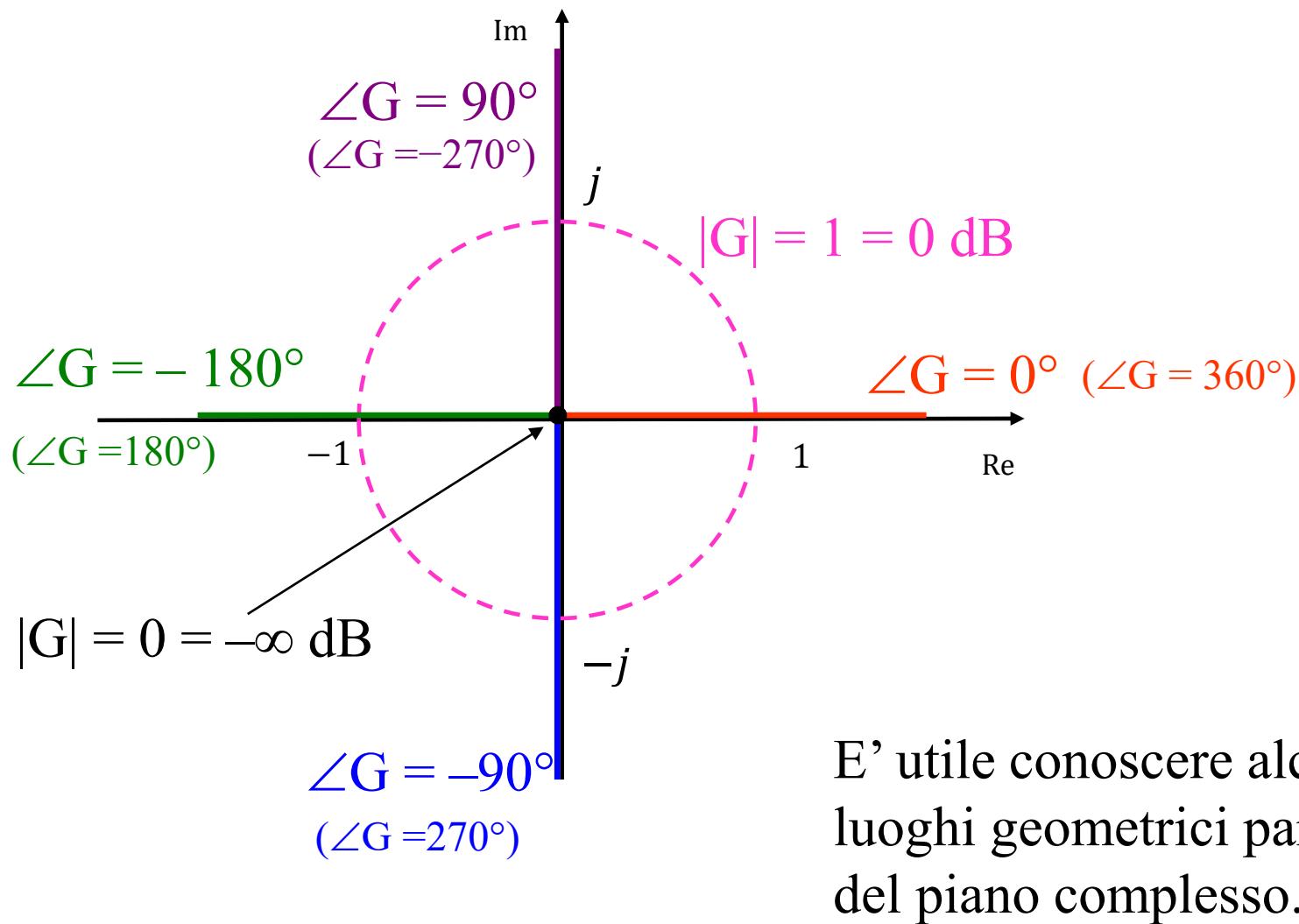


$$G(j\omega), \omega \geq 0$$



E' possibile tracciare il diagramma polare usando i diagrammi di Bode.

## Punti e curve salienti del piano complesso



E' utile conoscere alcuni luoghi geometrici particolari del piano complesso.

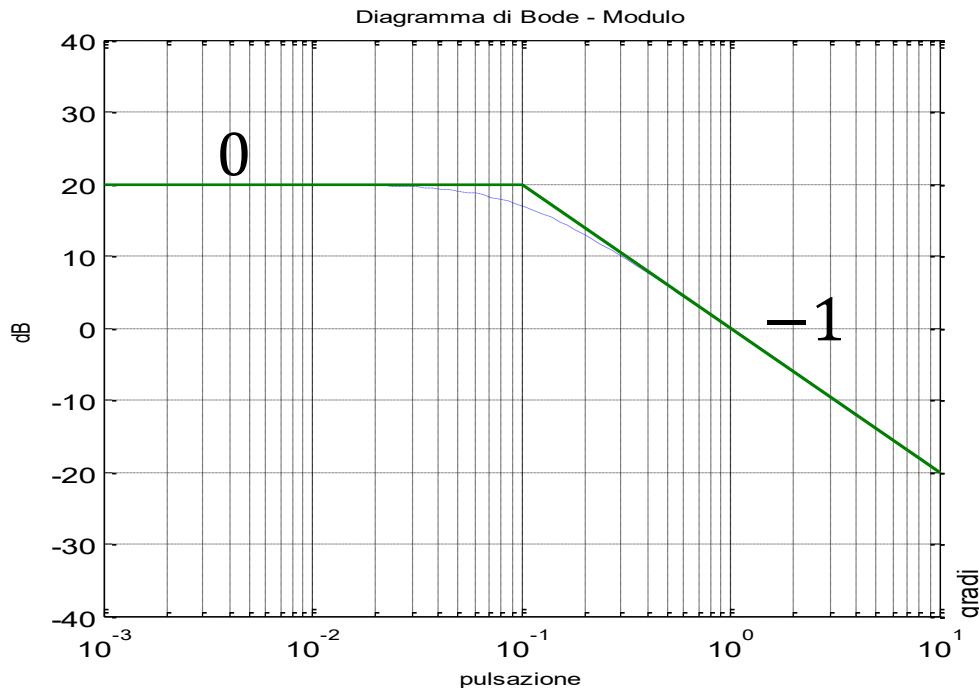
## Metodo

- 1) Traccio i diagrammi di Bode del modulo e della fase
- 2) Individuo alcuni punti salienti dai due diagrammi, usando anche l'espressione della risposta in frequenza, per esempio:
  - $G(j0)$  (dove inizia il grafico, per  $\omega = 0$ , spesso è un valore reale)
  - $G(j\infty)$  (dove termina il grafico, per  $\omega \rightarrow \infty$ , spesso è 0)
  - $\angle G(j\infty)$  (da che lato il grafico arriva nel punto finale)
  - Se attraversa gli assi (individuo sul diagramma della fase punti con fase multipla di  $90^\circ$  e leggo sul diagramma del modulo il valore alla pulsazione corrispondente)
  - Se attraversa il cerchio unitario (individuo sul diagramma del modulo il punto in cui attraversa l'asse a 0 dB e leggo sul diagramma della fase il valore alla pulsazione corrispondente).
- 3) Un discorso a parte meritano i sistemi con tipo  $g \neq 0$ .

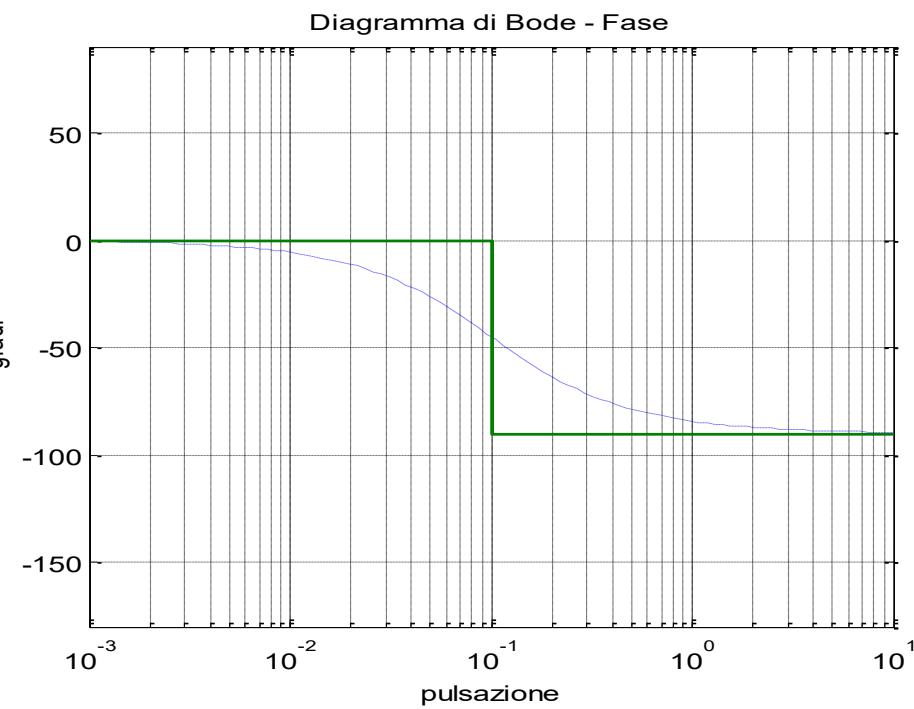
# Esempio

$$G(s) = \frac{10}{(1 + 10s)}$$

$$\begin{aligned} \mu = 10 &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Modulo } 10 (=20 \text{ dB}) \\ \text{Fase } 0^\circ \end{array} \right. \\ \tau = 10 &\rightarrow \omega = 0.1 \end{aligned}$$



$$G(j\omega) = \frac{10}{(1 + j10\omega)}$$



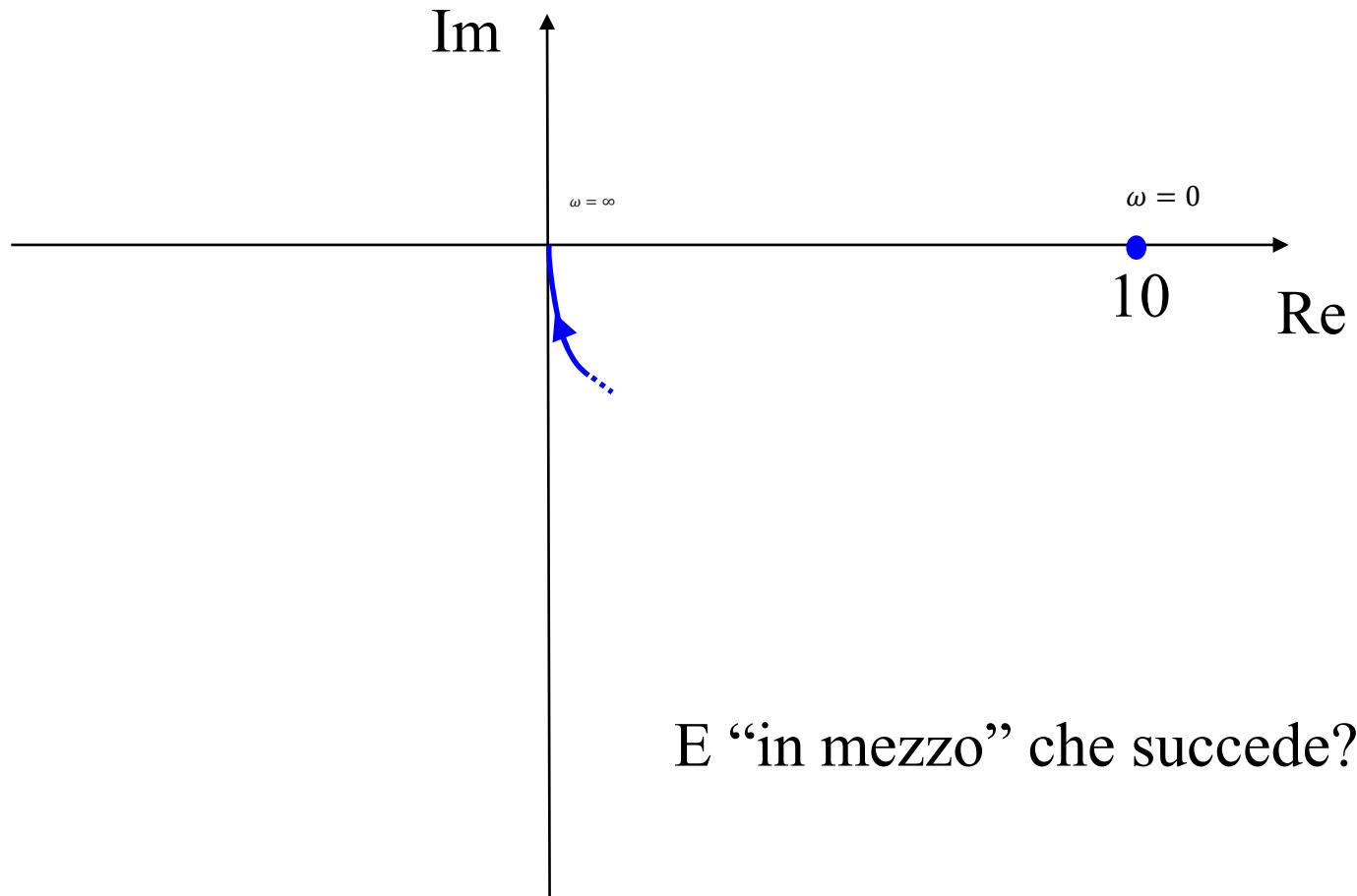
Per  $\omega = 0$      $G(j0) = \frac{10}{(1 + j10 \cdot 0)} = 10$

Per  $\omega \rightarrow \infty$      $G(j\infty) = \frac{10}{(1 + j10 \cdot \infty)} = 0$

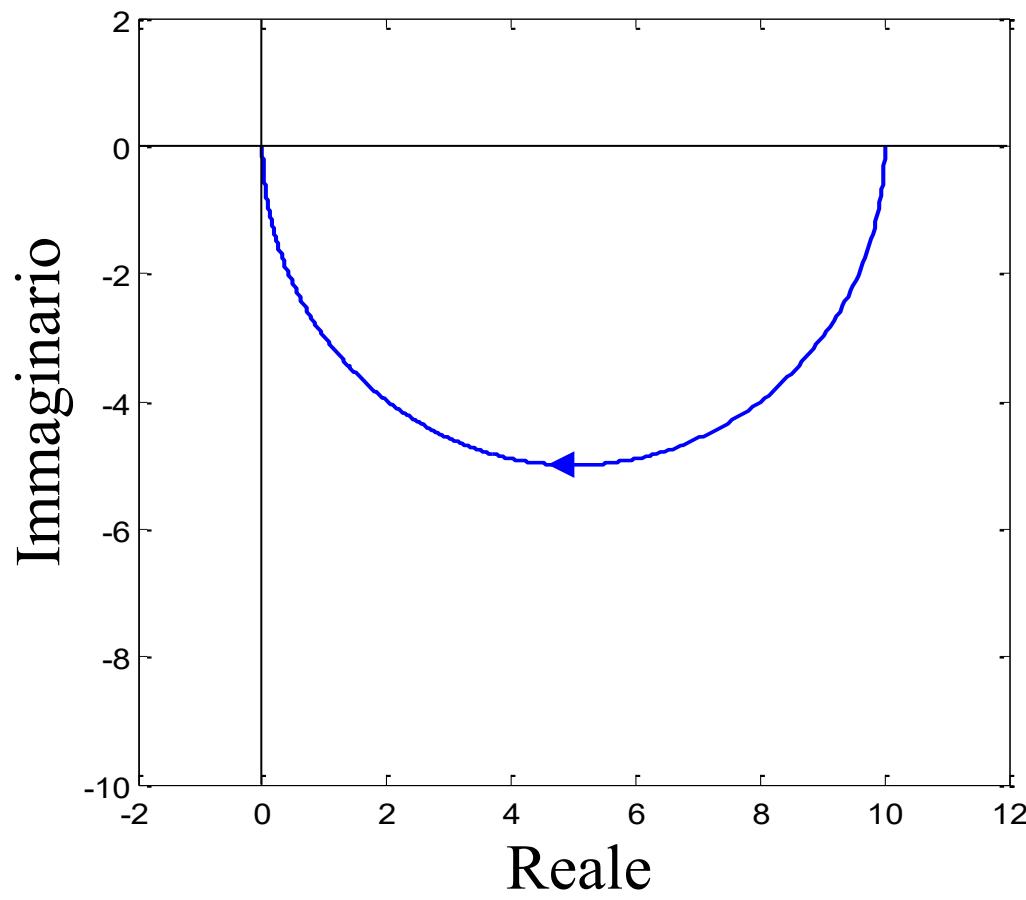
Il diagramma polare inizia in 10 ed arriva nell'origine. Ci si poteva arrivare anche dai diagrammi di Bode.

Inoltre, osservando i diagrammi di Bode si nota che:

- il modulo “parte” dal valore 10 e decresce monotonamente verso 0;
- la fase “parte” dal valore  $0^\circ$  e decresce monotonamente fino a raggiungere il valore di  $-90^\circ$ .



E “in mezzo” che succede?

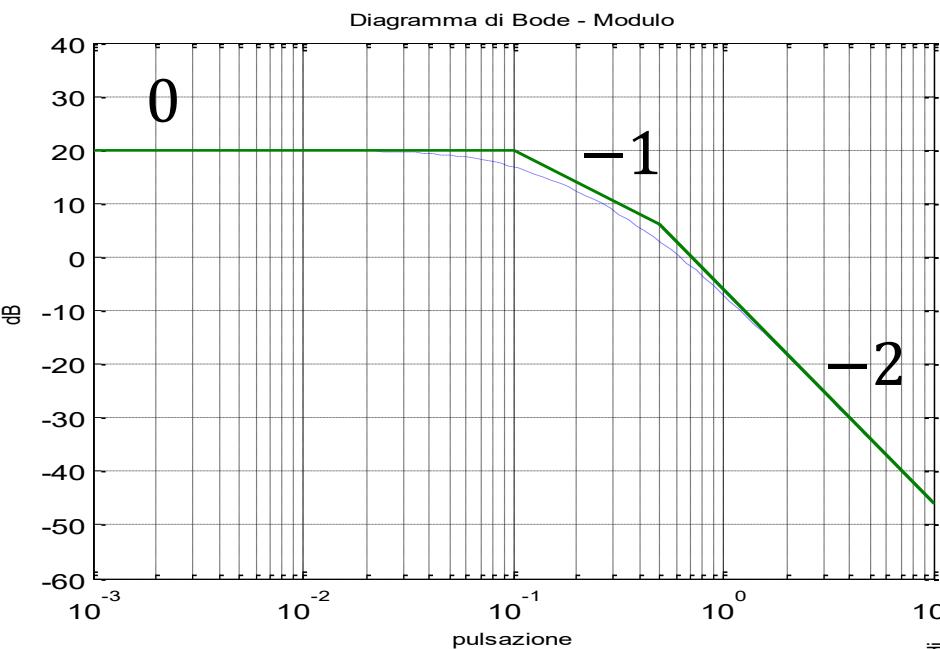


# Esempio

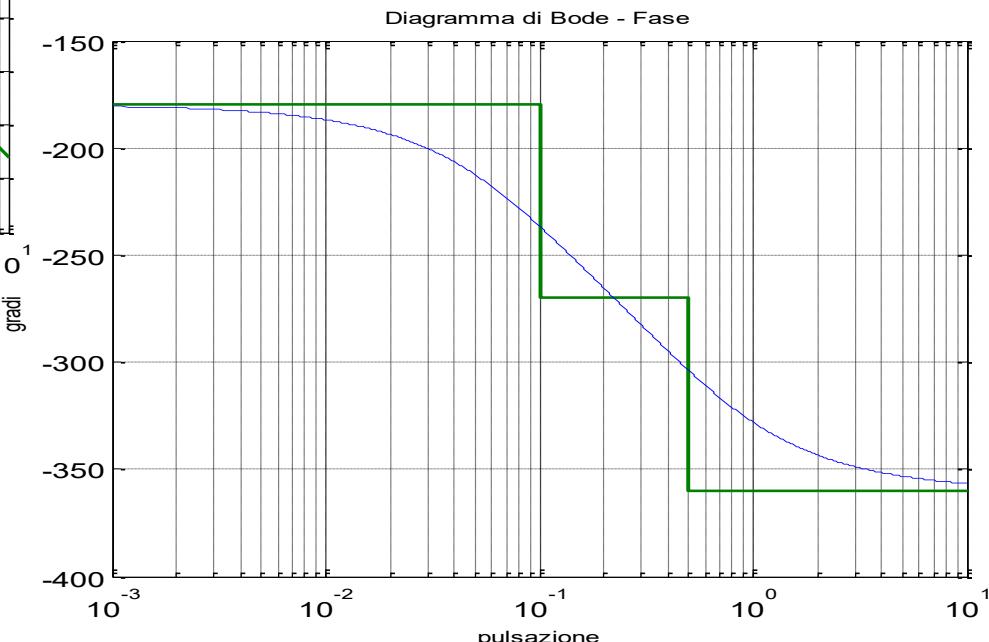
$$G(s) = \frac{-10}{(1 + 10s)(1 + 2s)}$$

$$\begin{aligned} \mu &= -10 & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Modulo 10 (=20 dB)} \\ \text{Fase } -180^\circ \end{array} \right. \\ \tau_1 &= 10 & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \omega_1 = 0.1 \\ \tau_2 &= 2 & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \omega_2 = 0.5 \end{aligned}$$

**Attenzione!  
Guadagno  
negativo!!**



$$G(j\omega) = \frac{-10}{(1 + j10\omega)(1 + j2\omega)}$$



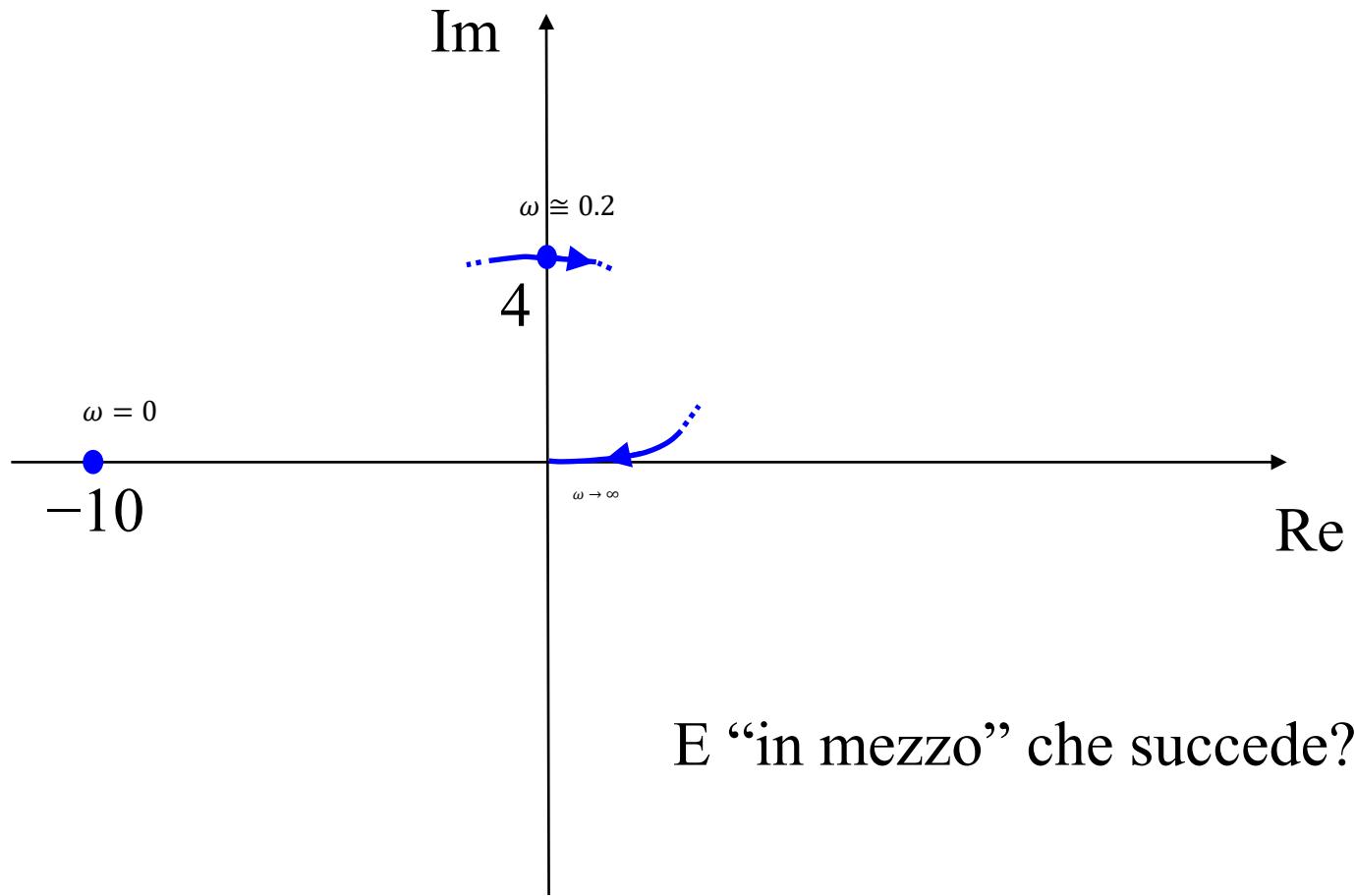
per  $\omega = 0$      $G(j0) = -10$

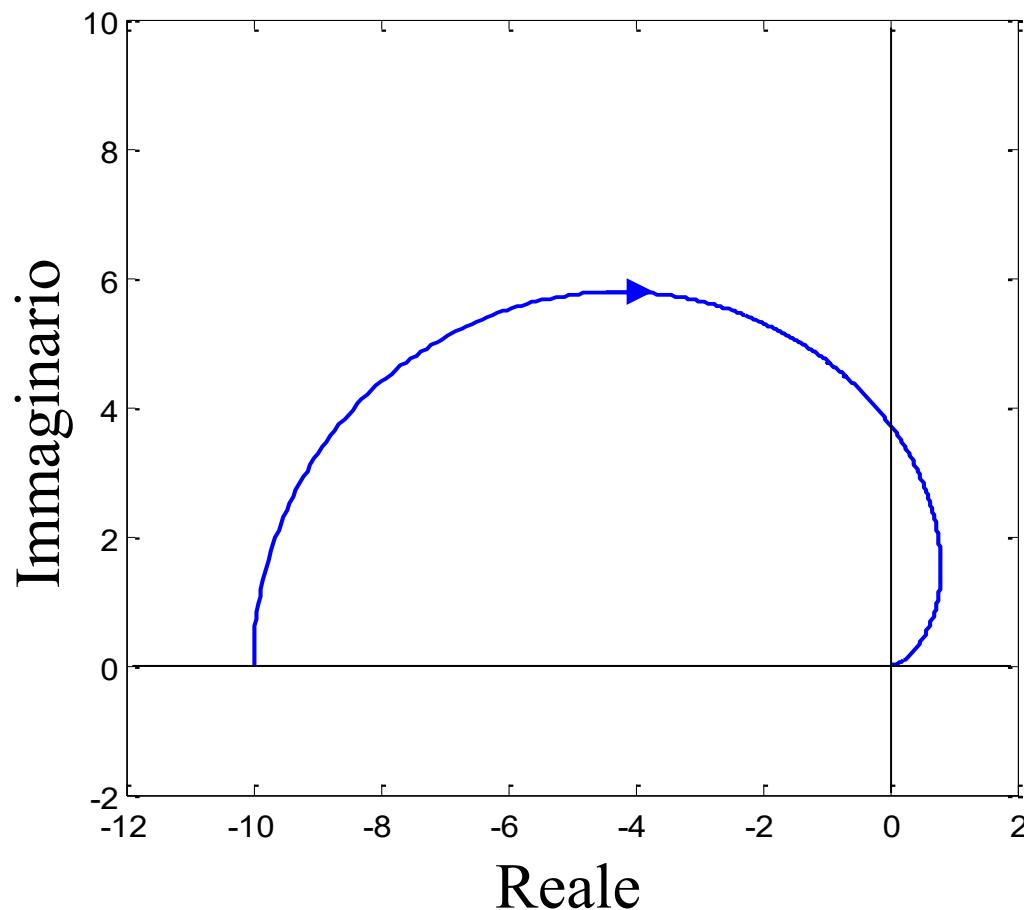
per  $\omega \rightarrow \infty$      $G(j\infty) = 0$

Il diagramma polare parte da  $-10$  ed arriva nell'origine (cfr diagrammi di Bode).

Inoltre, osservando i diagrammi di Bode si nota che:

- il modulo parte dal valore  $10$  e decresce monotonamente verso  $0$ ;
- la fase parte dal valore  $-180^\circ$  e decresce monotonamente fino a raggiungere  $-360^\circ$ ;
- la fase vale  $-270^\circ$  per  $\omega \cong 0.2$  ed in corrispondenza di questa pulsazione il modulo vale circa  $12 \text{ dB}$  cioè circa  $4$ . Ciò significa che il diagramma polare attraversa il semiasse immaginario positivo nel punto  $+4j$ ;
- il diagramma del modulo attraversa l'asse a  $0 \text{ dB}$  per  $\omega \cong 0.7$  ed in corrispondenza di questa pulsazione la fase vale circa  $-310^\circ$ . Quindi il diagramma polare attraversa la circonferenza di raggio unitario in un punto che forma un angolo di circa  $50^\circ$  con il semiasse reale positivo.





# Esempio

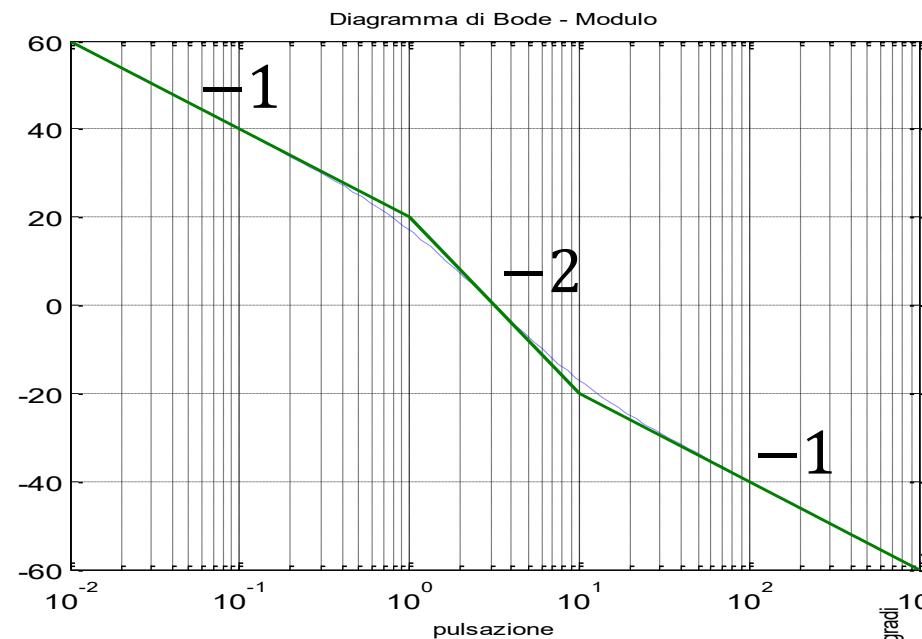
$$G(s) = \frac{10(1 + 0.1s)}{s(1 + s)}$$

$\mu = 10$   $\Rightarrow$  Modulo 10 (=20 dB)  
Fase  $0^\circ$

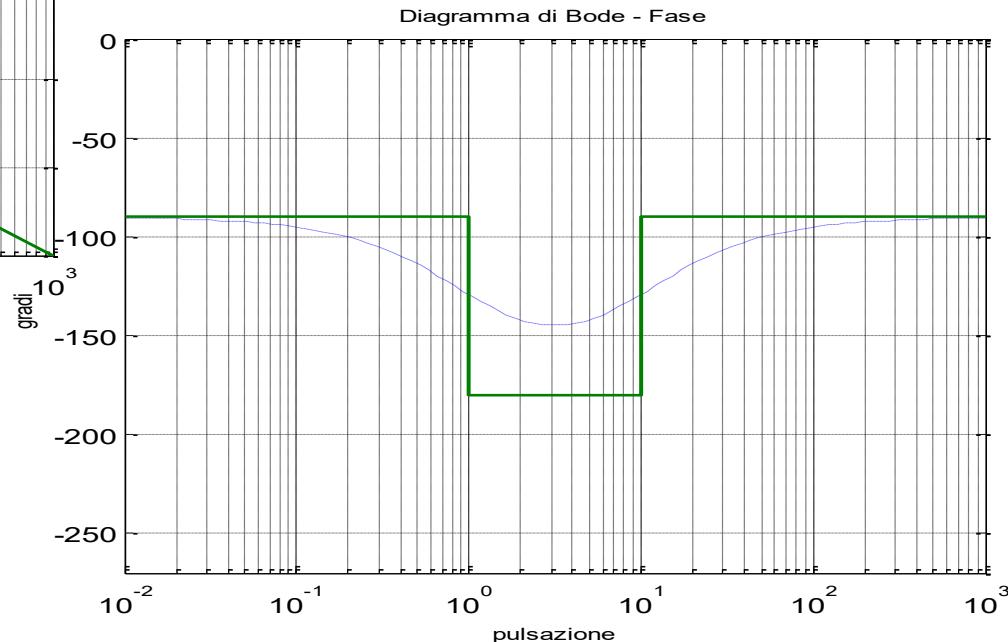
$T = 0.1$   $\Rightarrow$   $\omega = 10$

$\tau = 1$   $\Rightarrow$   $\omega = 1$

**tipo g=1**



$$G(j\omega) = \frac{10(1 + 0.1j\omega)}{j\omega(1 + j\omega)}$$



Per  $\omega \rightarrow 0$      $|G(j\omega)| \rightarrow \infty$   
                         $\angle G(j\omega) \rightarrow -90^\circ$

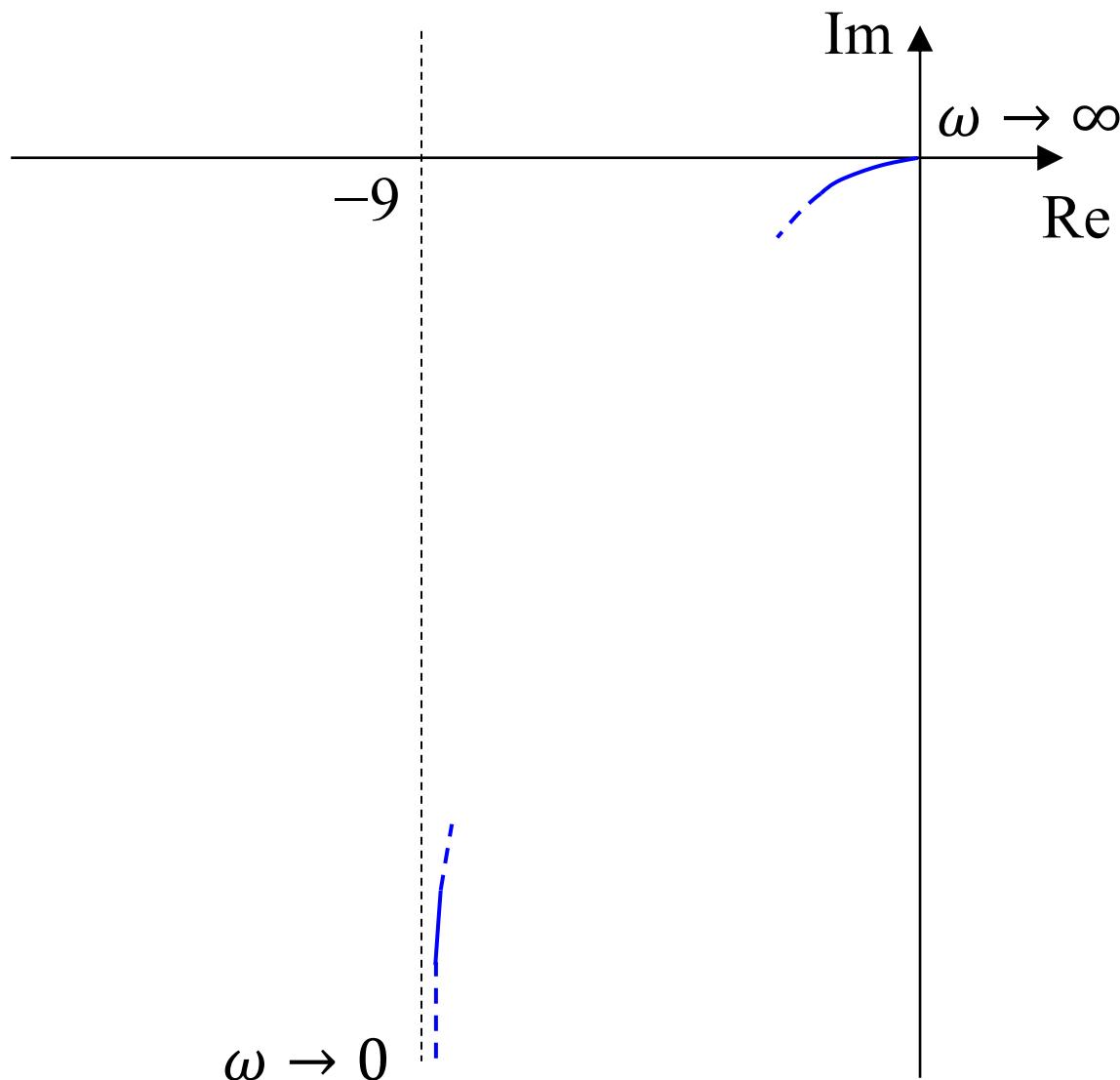
C'è un asintoto verticale!

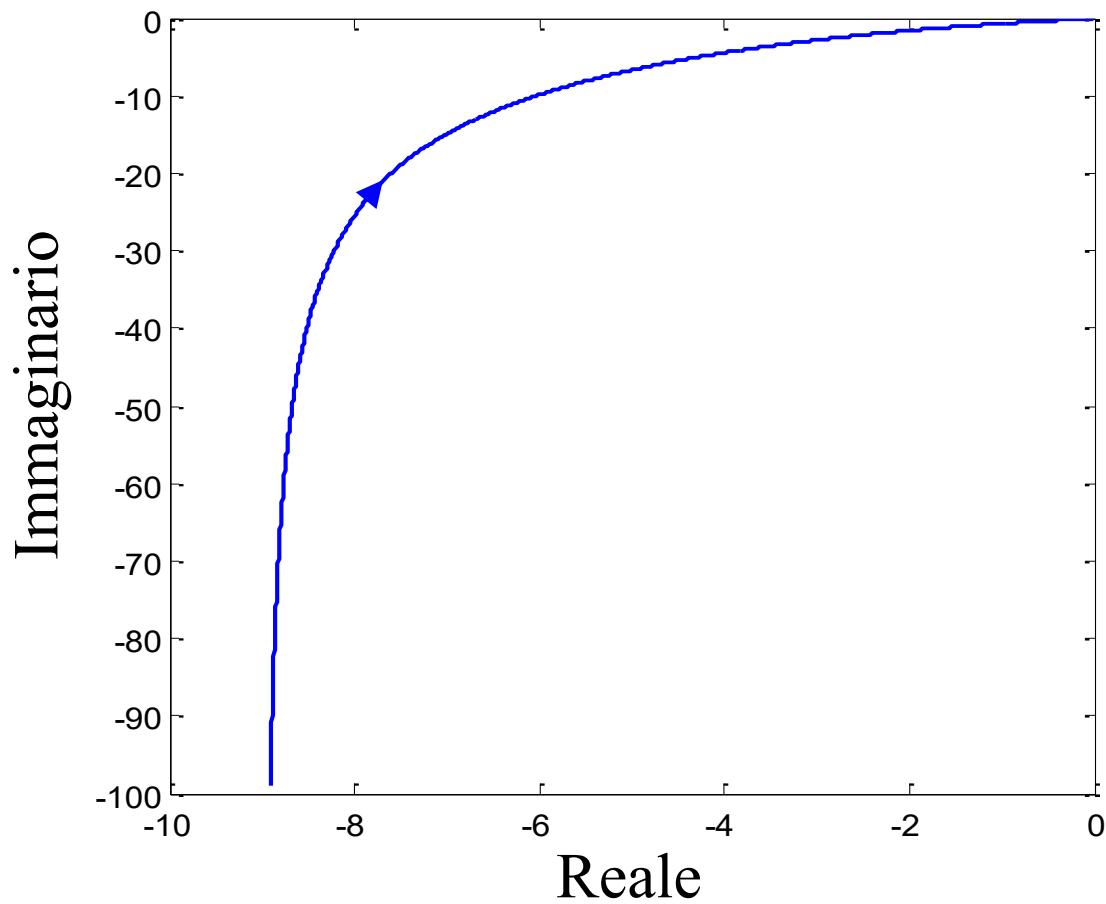
Per  $\omega \rightarrow \infty$      $G(j\omega) \rightarrow 0$

Il diagramma polare termina  
nell'origine.

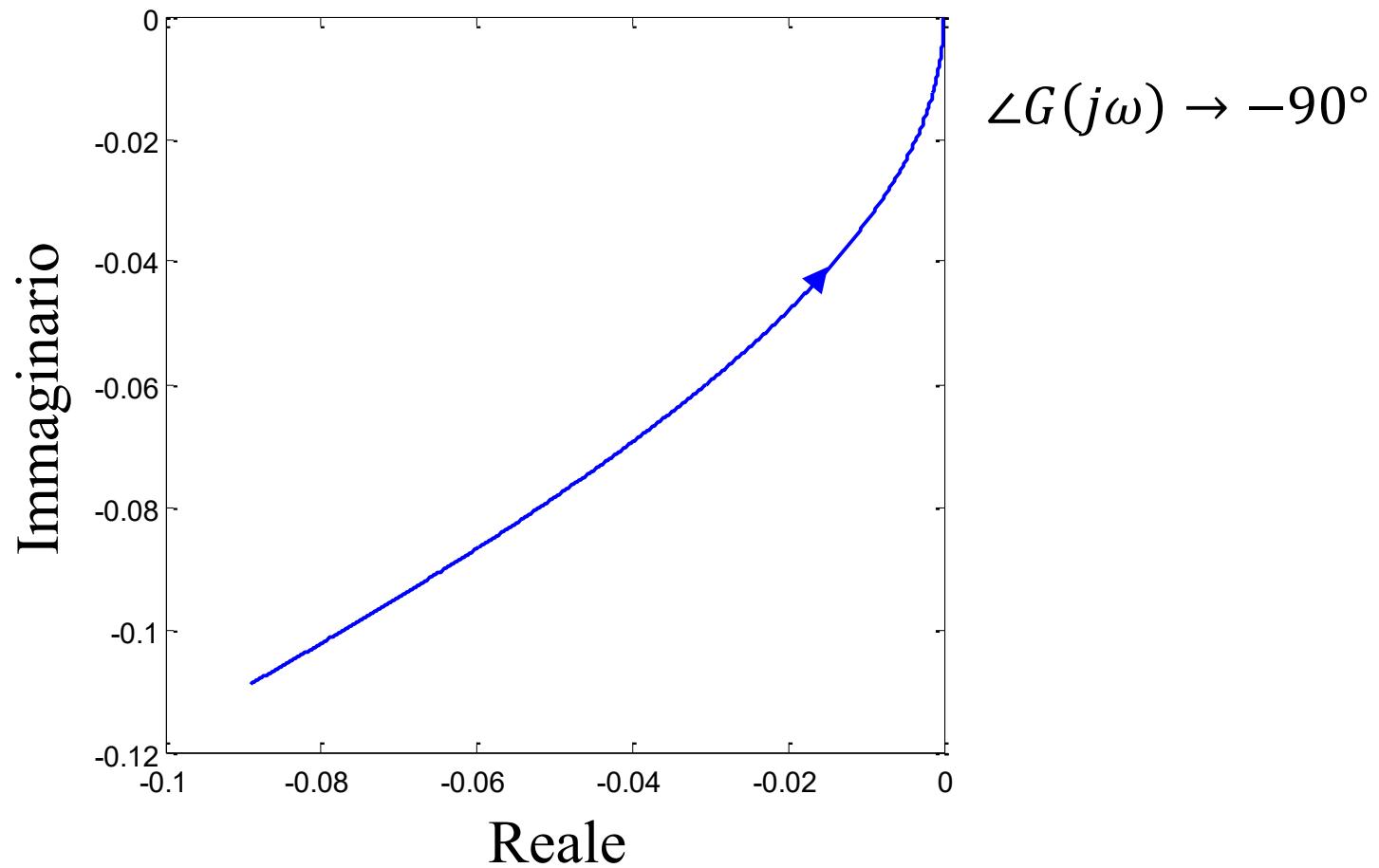
La posizione dell' asintoto si ottiene risolvendo il seguente limite:

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}(G(j\omega)) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}\left(\frac{10 + j\omega}{-\omega^2 + j\omega}\right) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}\left(\frac{(10 + j\omega)(-\omega^2 - j\omega)}{\omega^4 + \omega^2}\right) = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{-9\omega^2}{\omega^4 + \omega^2} = -9\end{aligned}$$





Per  $\omega \rightarrow \infty$  la fase vale  $90^\circ$  e quindi il diagramma polare dovrebbe arrivare nell'origine con quella fase, cioè «dal basso». E infatti è così (ma si vede solo su una «scala» più piccola)



# 11. Matlab

**bode (SYS)** Traccia i diagrammi di Bode di modulo e fase del sistema descritto da SYS.

**bodemag (SYS)** Traccia il solo diagramma del modulo.

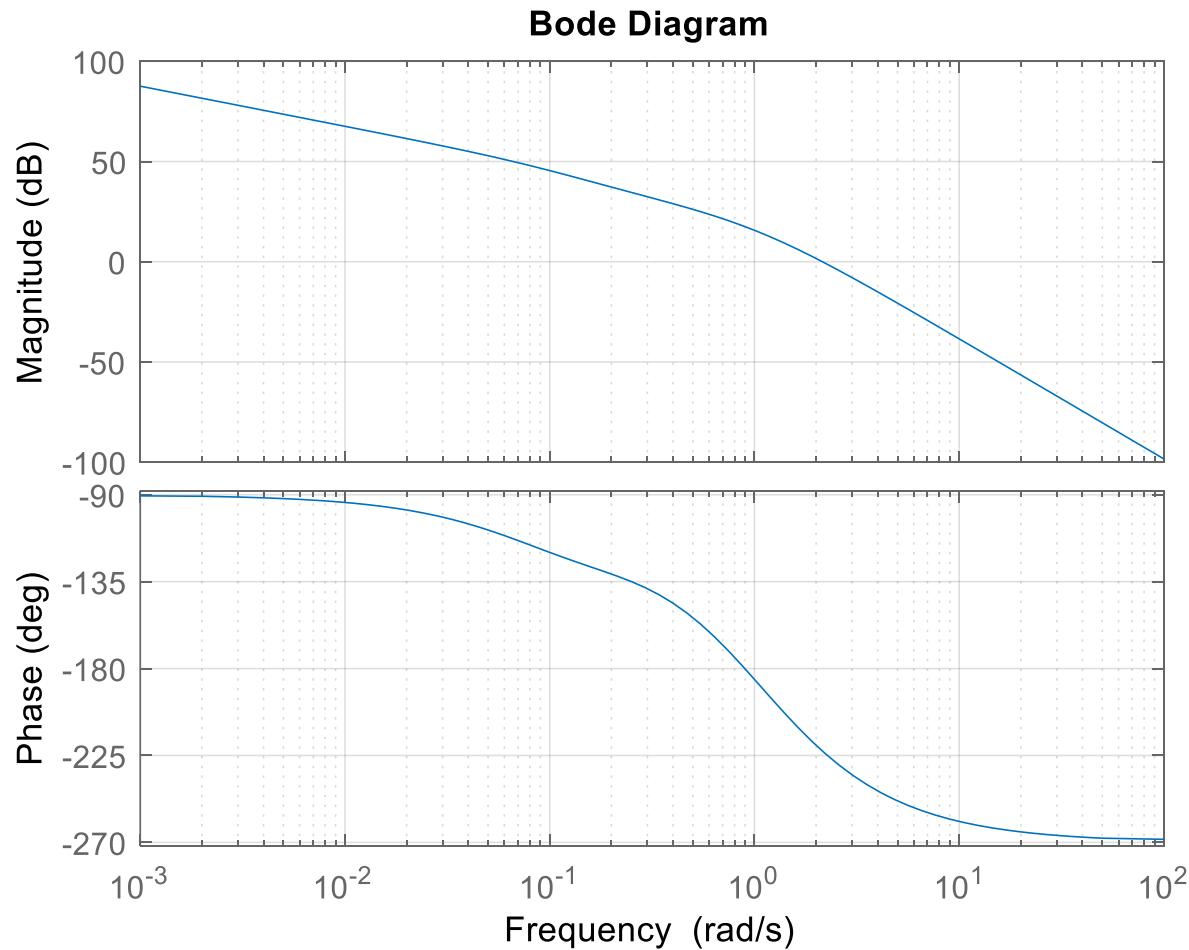
Questi comandi hanno alcune opzioni utili: specificare il range di frequenze, restituire i valori di modulo e fase della risposta in frequenza per ulteriori manipolazioni, etc... (cfr **bodeoptions**).

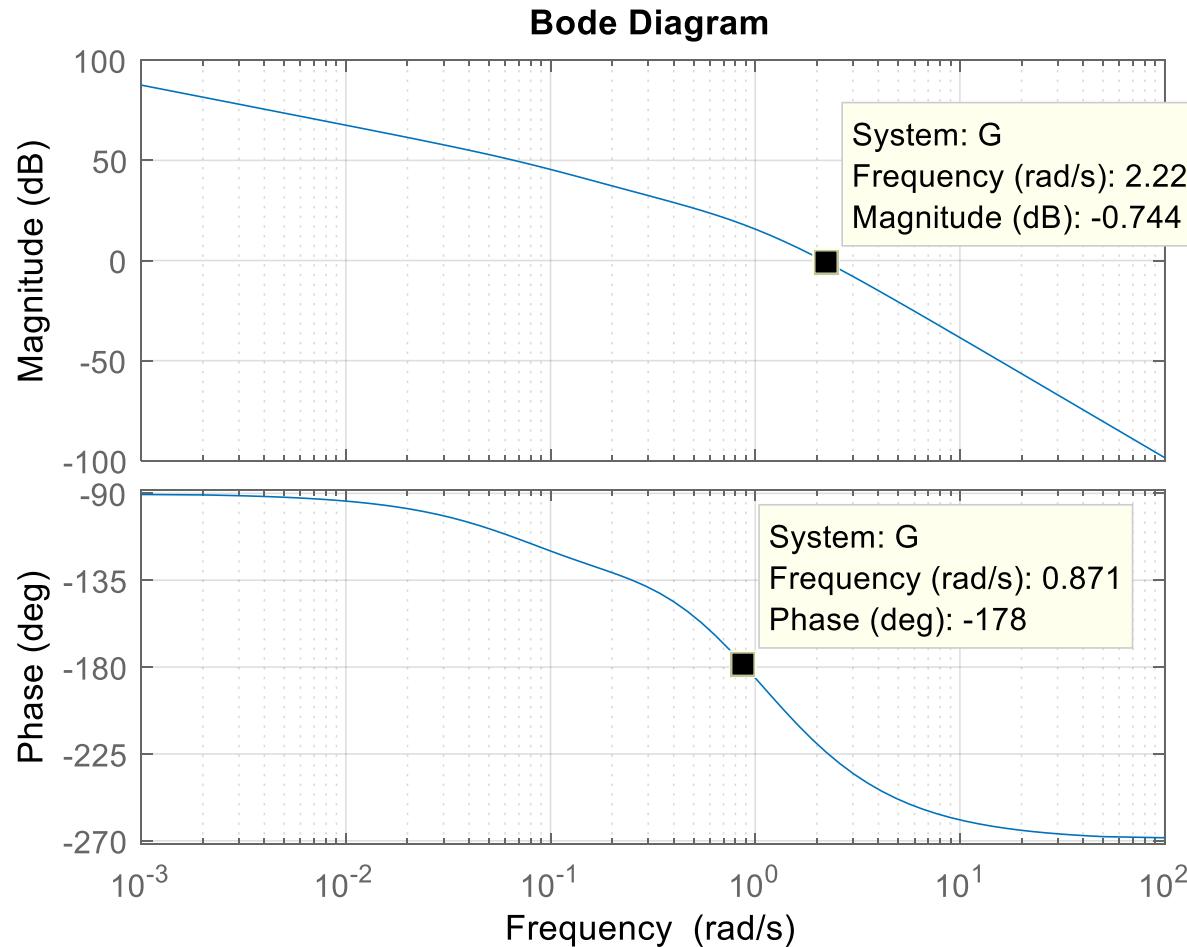
## Esempio

```
>> s=tf('s');
>> G=24*(1+5*s)/(s*(1+10*s)*(1+s)^2)
G =
          120 s + 24
-----
10 s^4 + 21 s^3 + 12 s^2 + s
```

Continuous-time transfer function.

```
>> bode(G)
>> grid
```

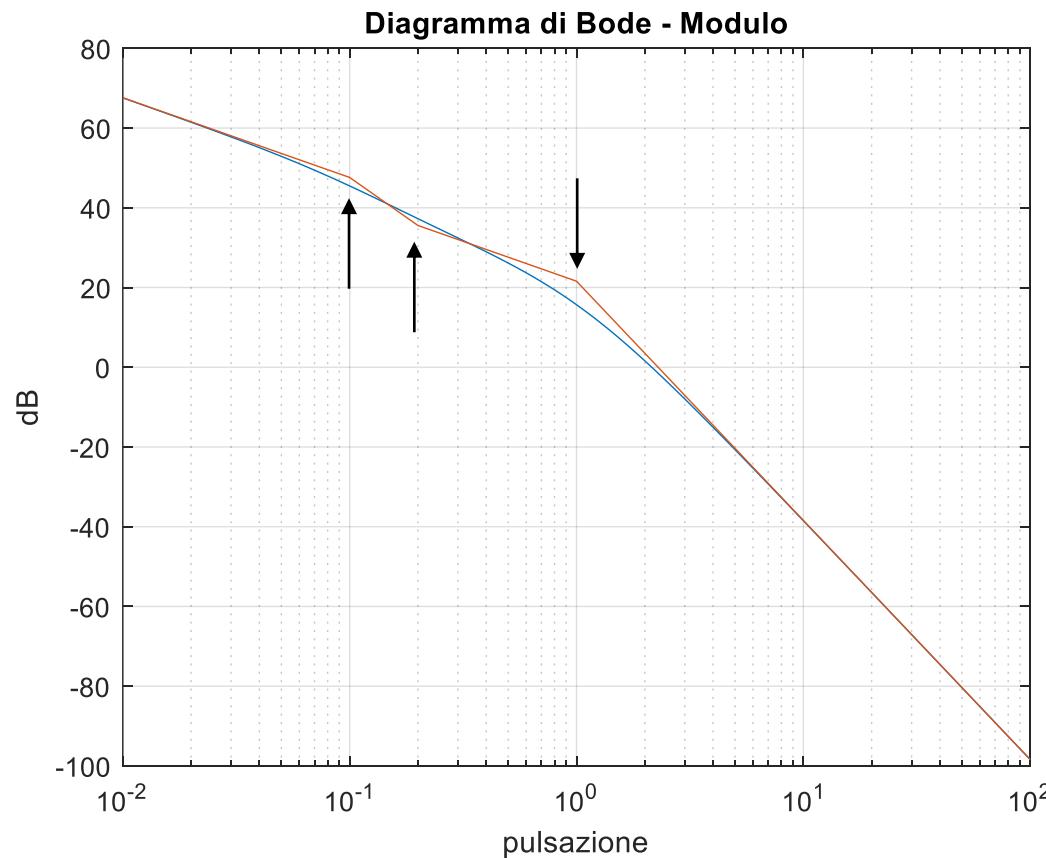




Con i «datatip» si possono evidenziare alcuni punti interessanti (in modo approssimativo).

**bodeasin (num,den,wmin,wmax,tipo)** è una funzione (creata da Alberto Leva di PoliMi) per il tracciamento dei diagrammi asintotici.

```
>> bodeasin([120 24], [10 21 12 1 0], 1e-2, 1e2, 'mod')
```



**atan2 (Y , X)** è il comando per il calcolo dell'arcotangente su quattro quadranti, dove X ed Y rappresentano ascissa ed ordinata del punto rispettivamente,  $-\pi \leq \text{atan2}(Y,X) \leq \pi$ .

## Esempio

Calcoliamo la fase dei due numeri complessi  $z_1 = 3 + 3j$  e  $z_2 = -3 - 3j$ . Se calcolassi la fase usando semplicemente l'arctg otterrei il medesimo risultato per entrambi i numeri. Infatti:

$$\angle z_1 = \arctg\left(\frac{3}{3}\right) = \arctg\left(\frac{-3}{-3}\right) = \angle z_2$$

Invece, usando il comando corretto

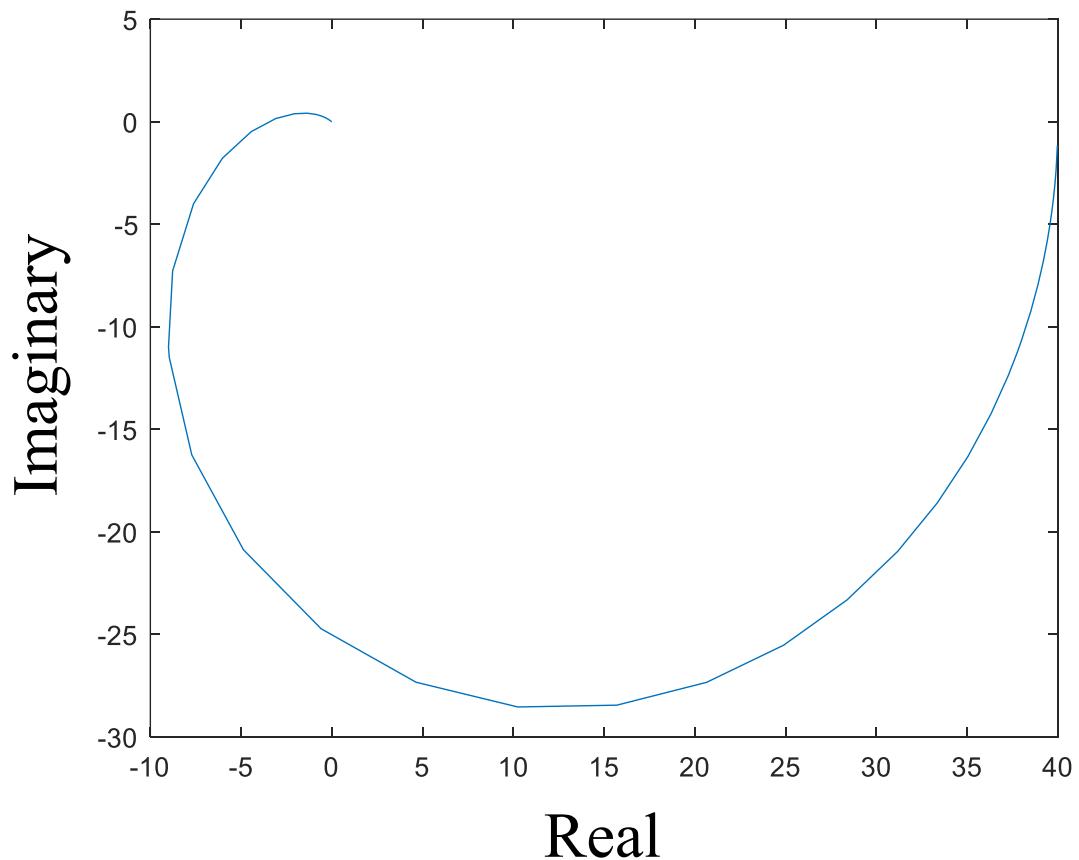
```
>> (180/pi)*atan2(3,3)
ans =
    45
>> (180/pi)*atan2(-3,-3)
ans =
   -135
```

Non esiste un singolo comando Matlab per disegnare il diagramma polare. Si può usare **freqresp** e disegnare il risultato.

```
>> G=40*(1+s) / ((1+10*s)^3)
G =
    40 s + 40
-----
1000 s^3 + 300 s^2 + 30 s + 1
```

Continuous-time transfer function.

```
>> [H,w]=freqresp(G);
>> H2=squeeze(H);
>> plot(H2)
```



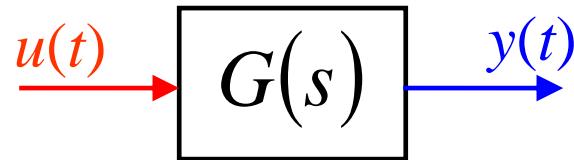
# Lezione 15.

## Azione filtrante dei sistemi dinamici

# Schema della lezione

1. Introduzione
2. Filtro passa-basso
3. Filtro passa-alto
4. Risonanza

# 1. Introduzione



$u(t)$  : segnale trasmesso

$y(t)$  : segnale ricevuto

$G(s)$  : modello lineare del canale di trasmissione

Sia, per esempio  $u(t) = A_u \sin(\bar{\omega}t + \varphi_u)$

Allora, per il teorema della risposta in frequenza, l'uscita a transitorio esaurito è

$$y(t) = \underbrace{A_u |G(j\bar{\omega})|}_{A_y} \underbrace{\sin(\bar{\omega}t + \varphi_u + \angle G(j\bar{\omega}))}_{\varphi_y}$$

Quindi, conoscendo  $A_u$  e  $\varphi_u$ , sapendo quali sono i valori desiderati per  $A_y$  e  $\varphi_y$ , è possibile progettare le caratteristiche del canale  $G(j\omega)$ .

## Nota

In generale, però, i segnali non sono semplici sinusoidi caratterizzate da singoli valori di ampiezza e fase.



**Teoria dei Segnali**

## 2. Filtro passa-basso

Lascia passare inalterate, o al più amplificate di un valore costante, le armoniche del segnale in ingresso con pulsazione inferiore od uguale ad un valore  $\bar{\omega}$  ed elimina le armoniche con pulsazione superiore.

L'intervallo di pulsazioni  $[0, \bar{\omega}]$  si dice banda passante.

## Banda passante di un filtro passabasso

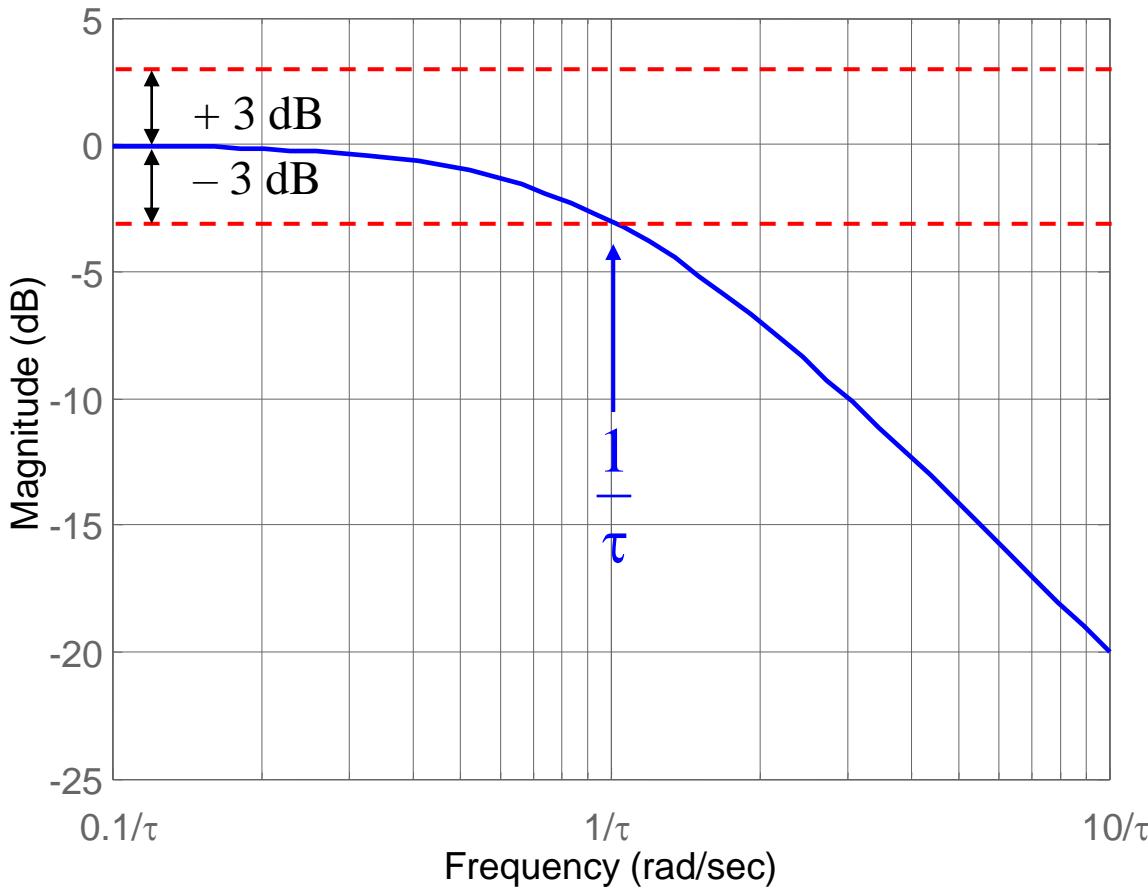
E' l'insieme dei valori di  $\omega$  per cui vale la seguente condizione

$$-3 \text{ } dB \leq |G(j\omega)|_{dB} - |G(j0)|_{dB} \leq +3 \text{ } dB$$

Ovvero

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \sqrt{2}$$

# Esempio

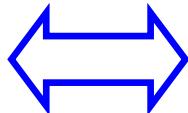


$$G(s) = \frac{1}{1 + s\tau} \quad \tau > 0$$

Banda passante

$$\omega \in \left[ 0, \frac{1}{\tau} \right]$$

Velocità di risposta



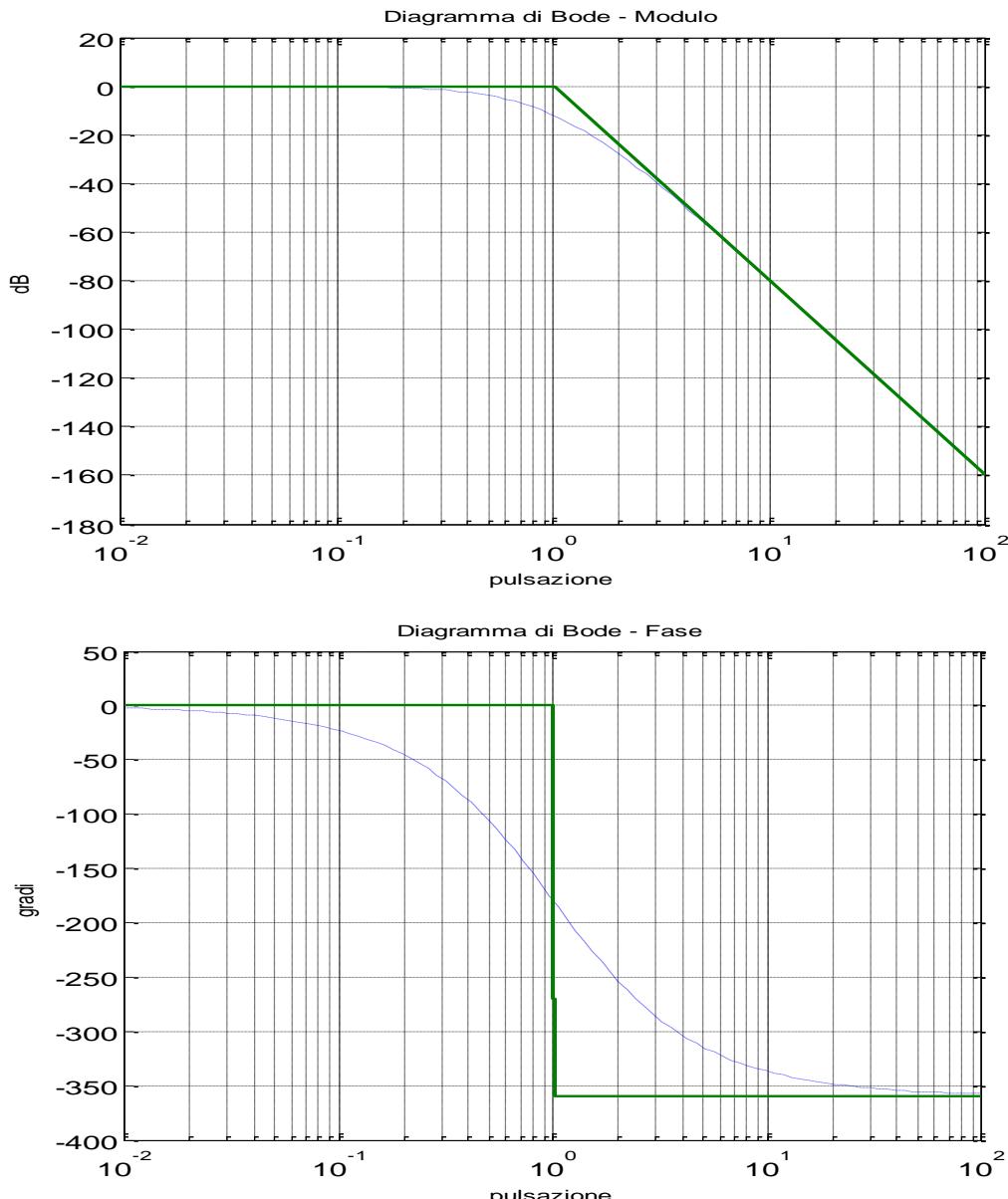
Aampiezza della  
banda passante

# Esempio (Effetto di un filtro passabasso)

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^4}$$

Banda passante  $\omega \approx [0,1]$

N.B. Attenzione allo sfasamento!

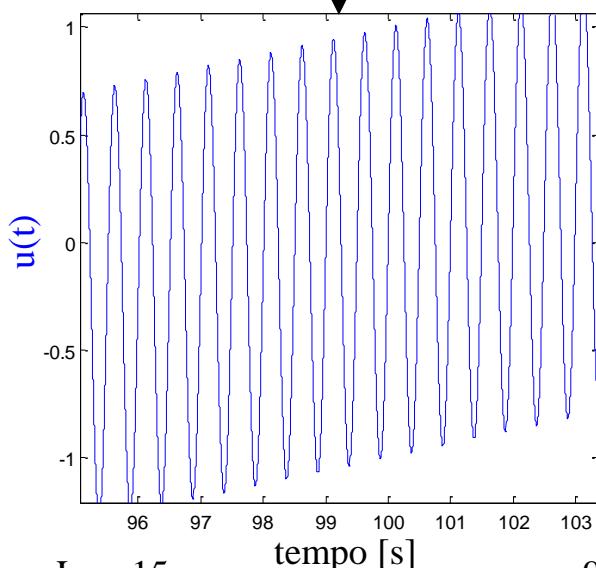
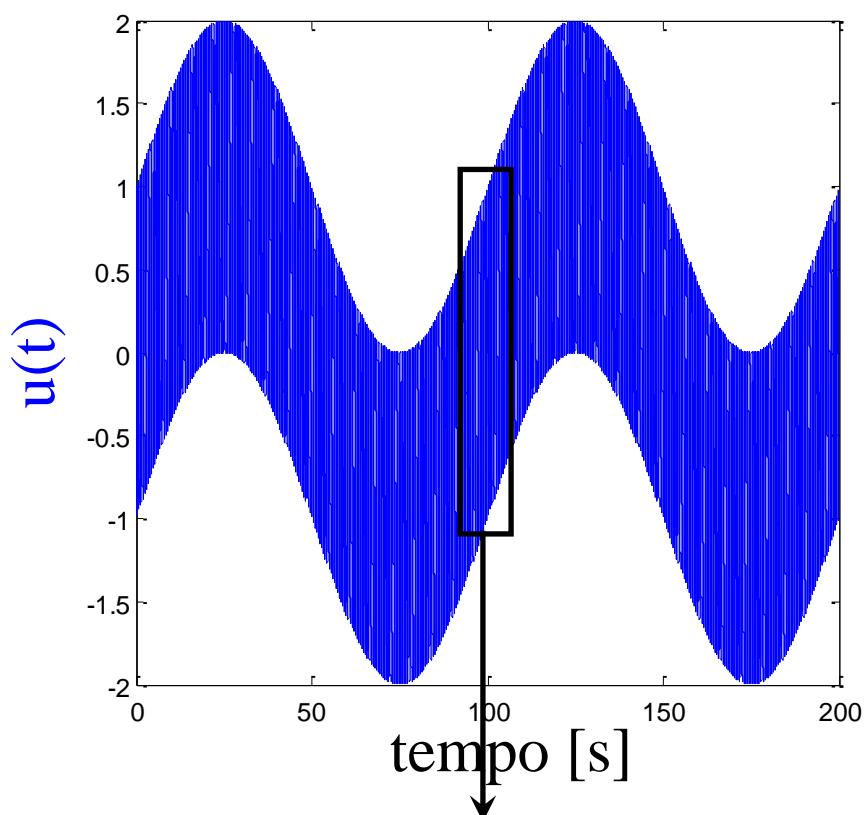
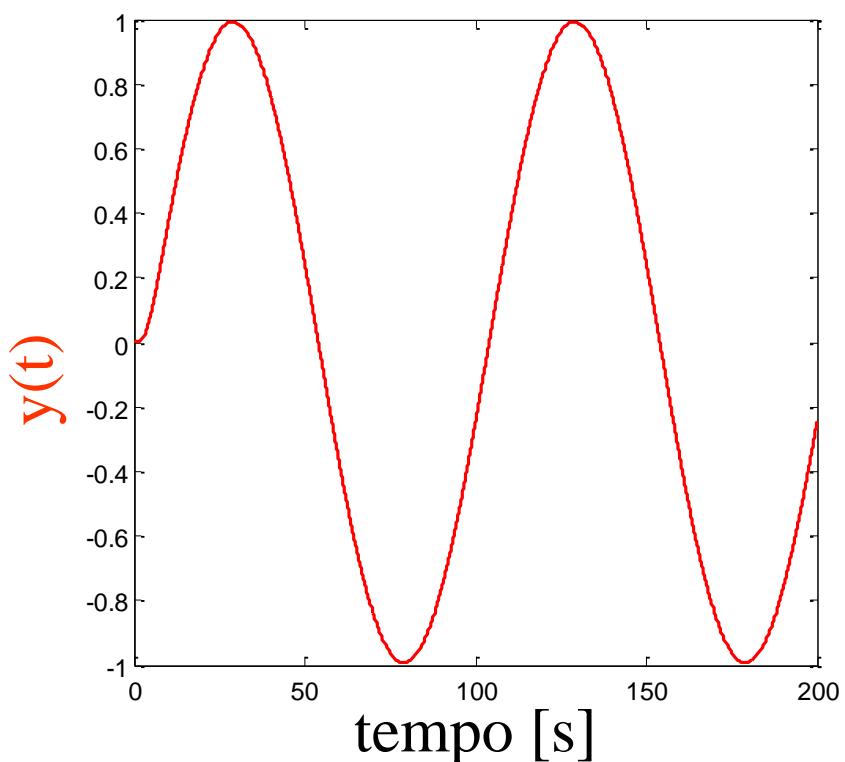


Ingresso

$$u(t) = \sin(2\pi \cdot 0.01 \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 2 \cdot t)$$

Uscita

$$y(t) \approx \sin(2\pi \cdot 0.01 \cdot t)$$



### 3. Filtro passa-alto

Lascia passare inalterate, o al più amplificate di un valore costante, le armoniche del segnale in ingresso con pulsazione superiore od uguale ad un valore  $\bar{\omega}$  ed elimina le armoniche con pulsazione inferiore.

L'intervallo di pulsazioni  $[\bar{\omega}, \infty]$  si dice banda passante.

In generale si tratta di sistemi non strettamente propri (perchè si vuole  $|G(j\infty)| \neq 0$ ).

## Banda passante di un filtro passa-alto

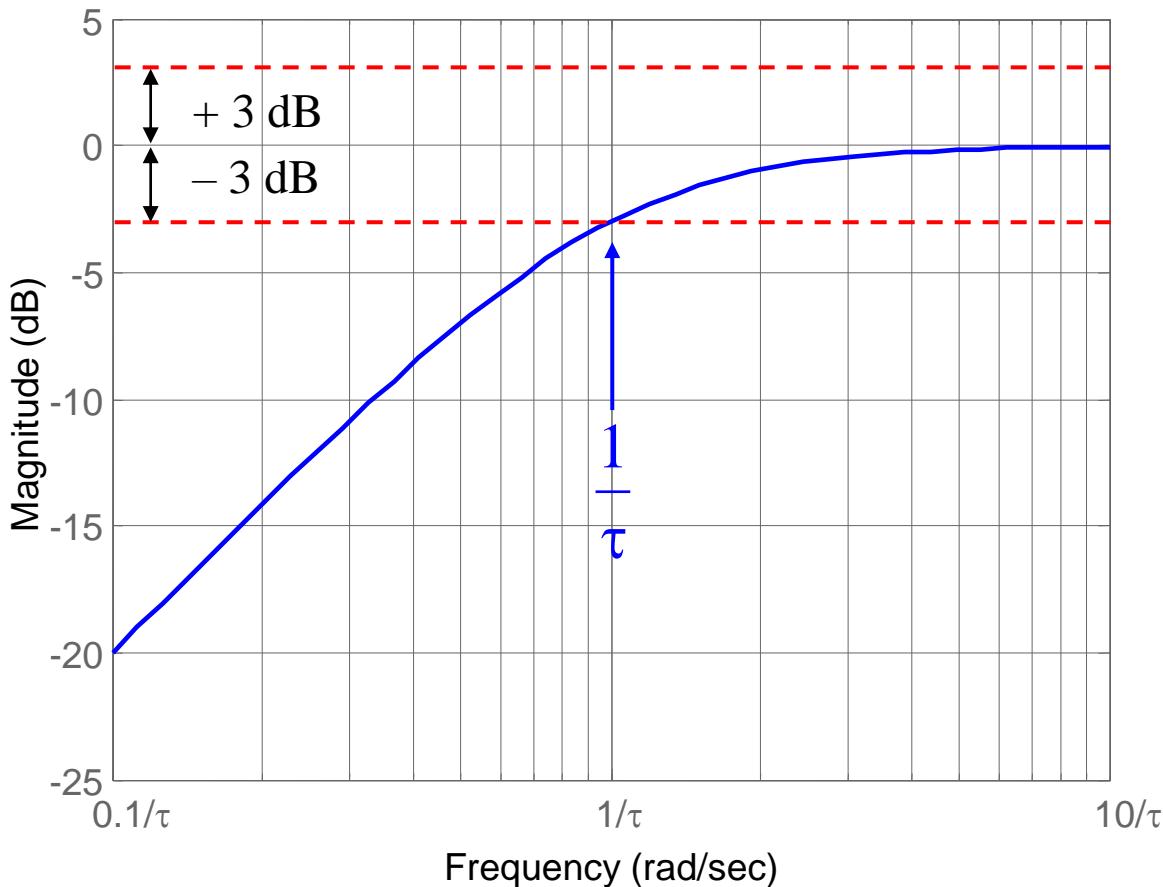
E' l'insieme dei valori di  $\omega$  per cui vale la seguente condizione

$$-3 \text{ } dB \leq |G(j\omega)|_{dB} - |G(j\infty)|_{dB} \leq +3 \text{ } dB$$

Ovvero

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\infty)|} \leq \sqrt{2}$$

# Esempio



$$G(s) = \frac{s\tau}{1 + s\tau} \quad \tau > 0$$

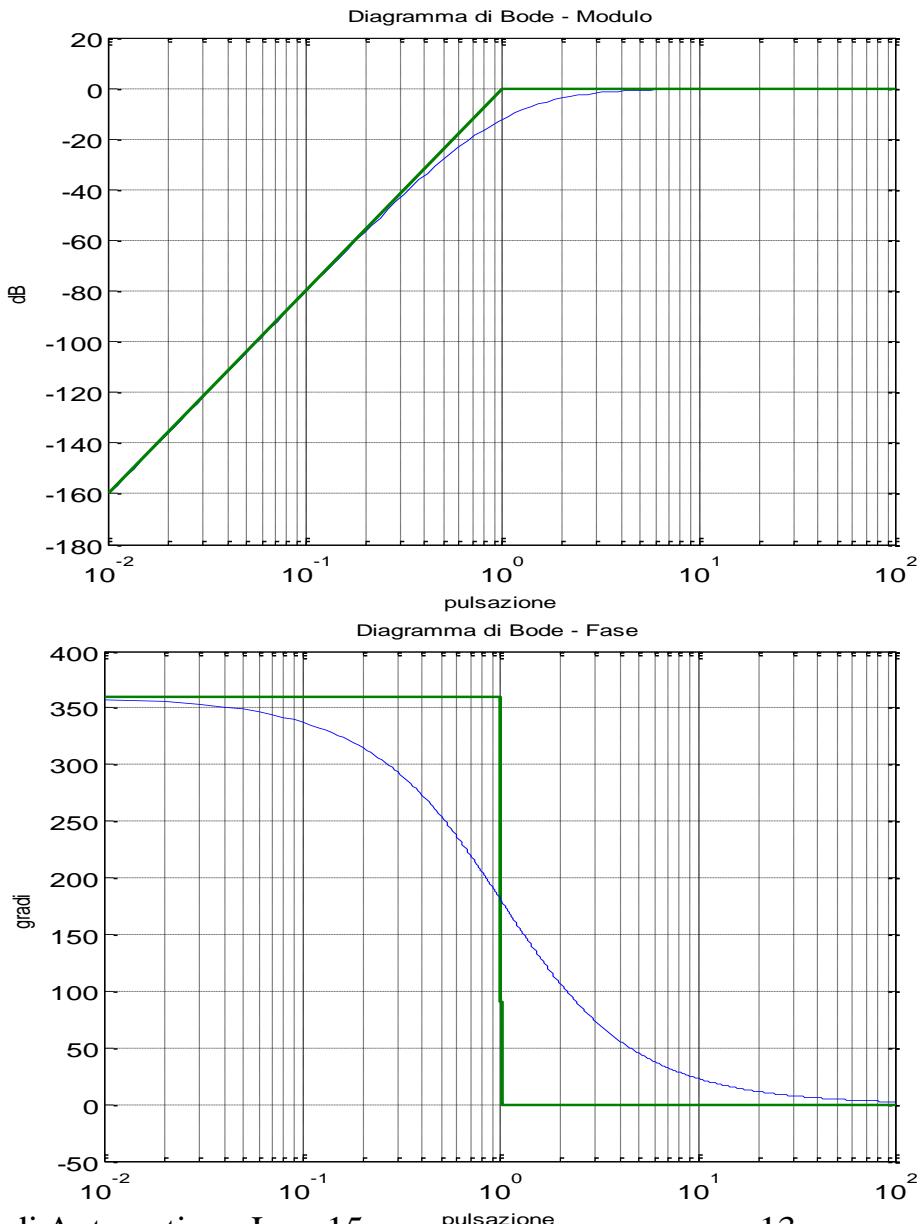
Banda passante

$$\omega \in \left[ \frac{1}{\tau}, \infty \right]$$

# Esempio (Effetto di un filtro passa-alto)

$$G(s) = \frac{s^4}{(1+s)^4}$$

Banda passante  $\omega \approx [1, \infty]$

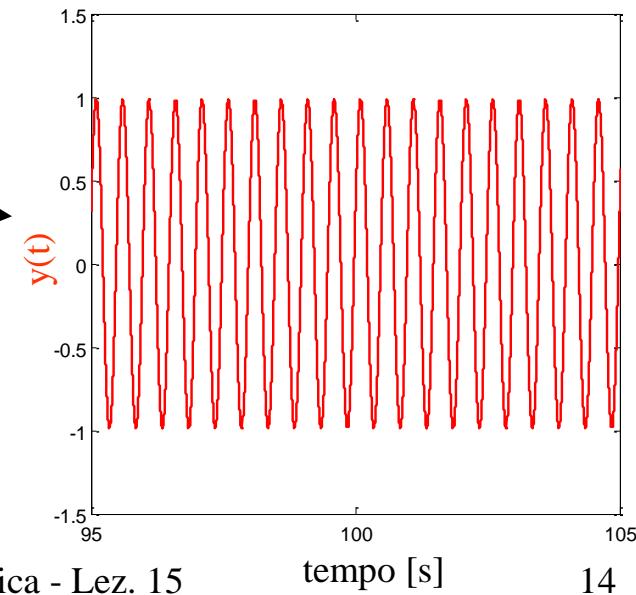
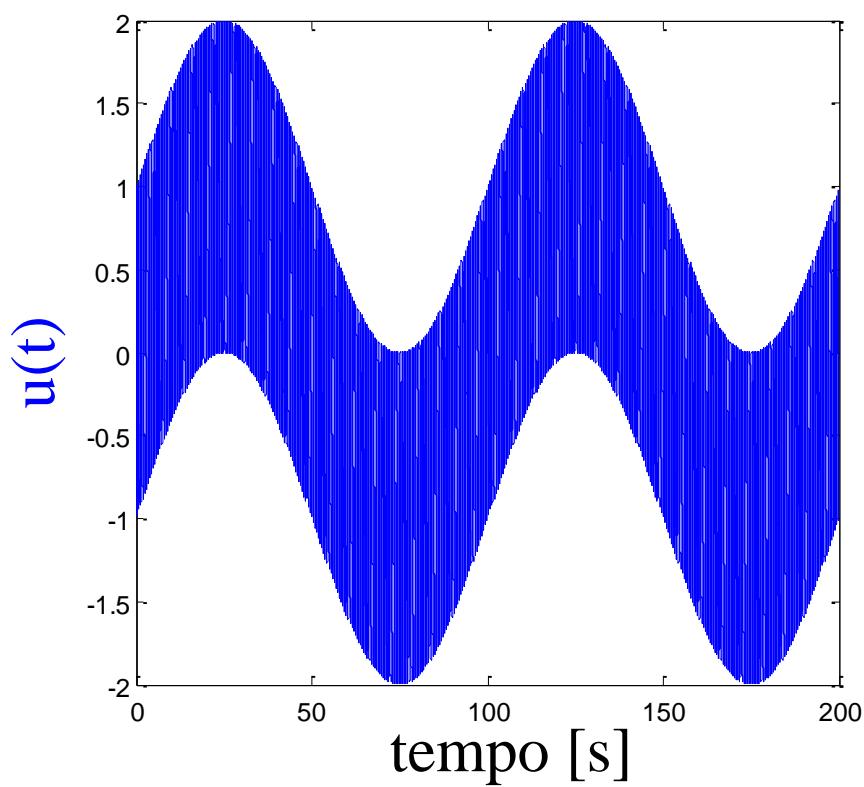
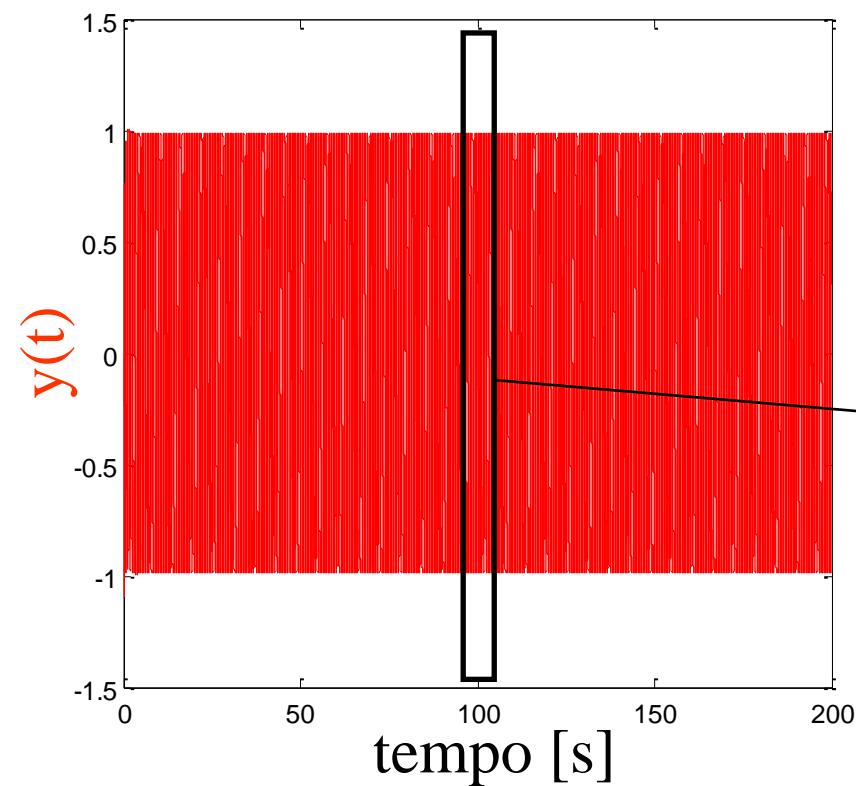


Ingresso

$$u(t) = \sin(2\pi \cdot 0.01 \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 2 \cdot t)$$

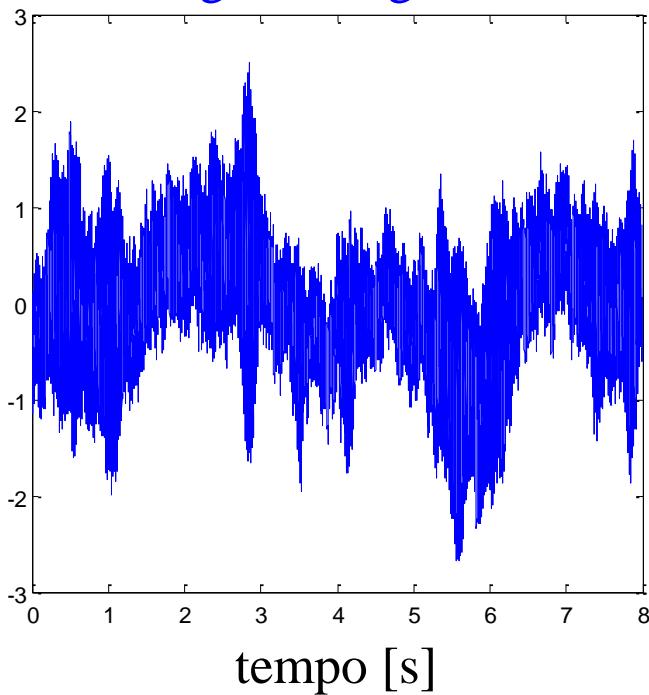
Uscita

$$y(t) \approx \sin(2\pi \cdot 2 \cdot t)$$



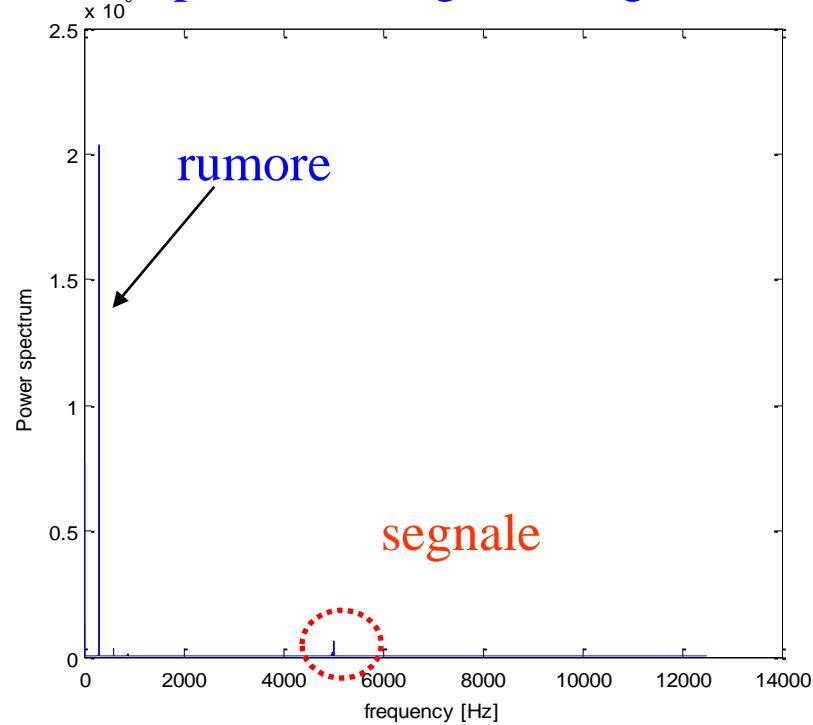
# Esempio (Filtraggio passa-banda)

Segnale originale



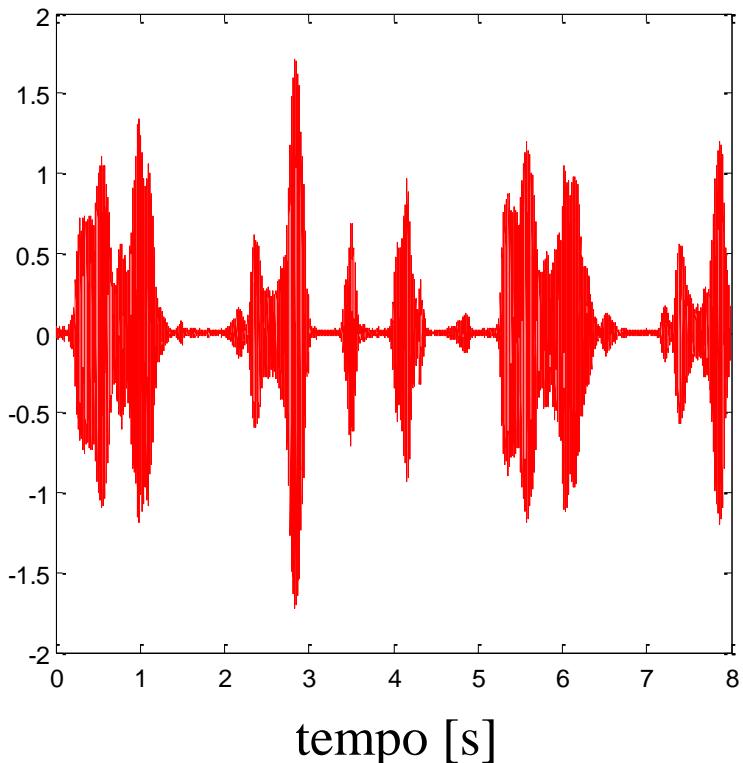
```
>>load Lez15  
>>sound(m1, 25000)
```

Spettro del segnale originale

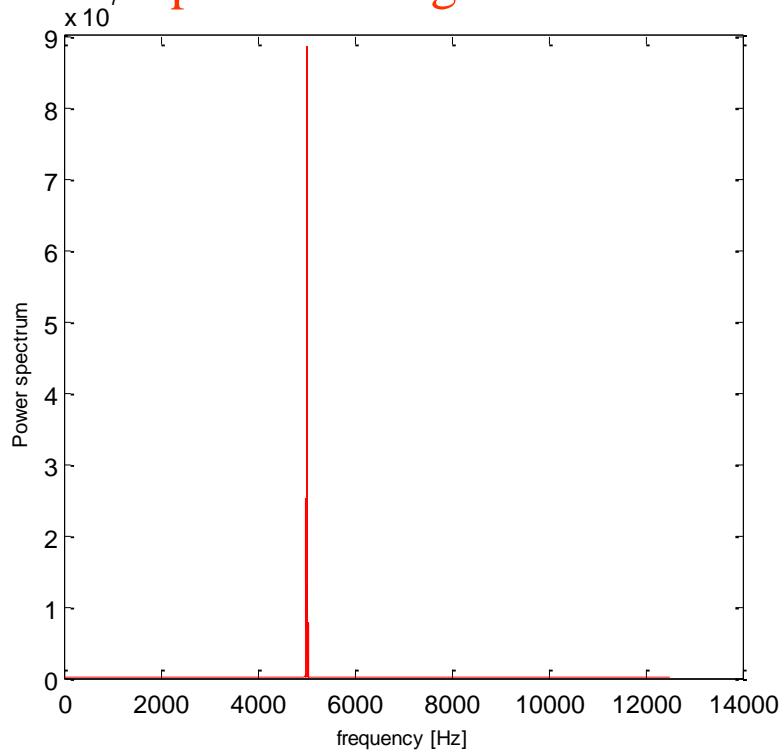


# Filtraggio passabanda (passabasso+passaalto) a banda “stretta” (4.8 kHz–5.2 kHz)

Segnale filtrato



Spettro del segnale filtrato



>>sound(m1f,25000)

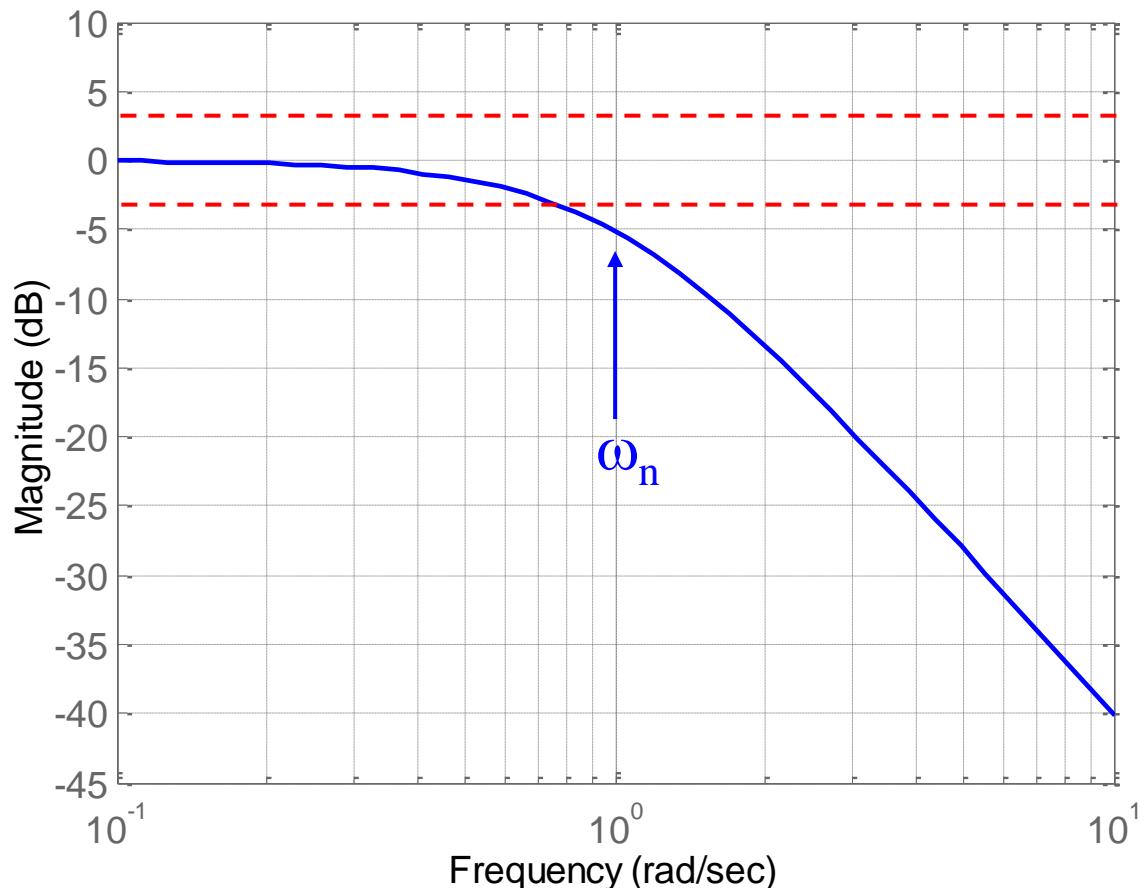
## 4. Risonanza

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Per bassi valori dello smorzamento, le componenti armoniche del segnale in ingresso con pulsazione vicina a  $\omega_n$  vengono amplificate.

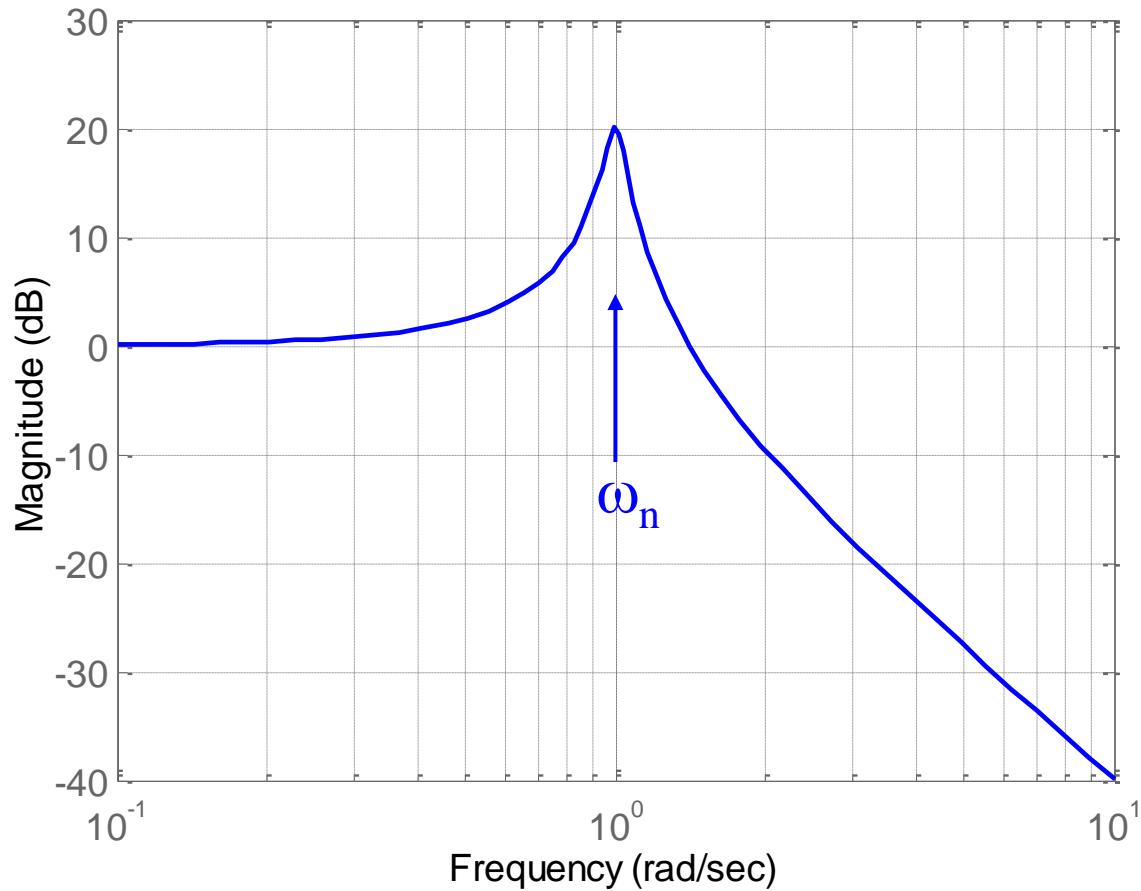
Per  $\xi \geq 0.4 \div 0.5$

E' un filtro passabasso con banda passante  $\omega \cong [0, \omega_n]$



Per  $\xi < 0.4$

Si ha risonanza (amplificazione selettiva)



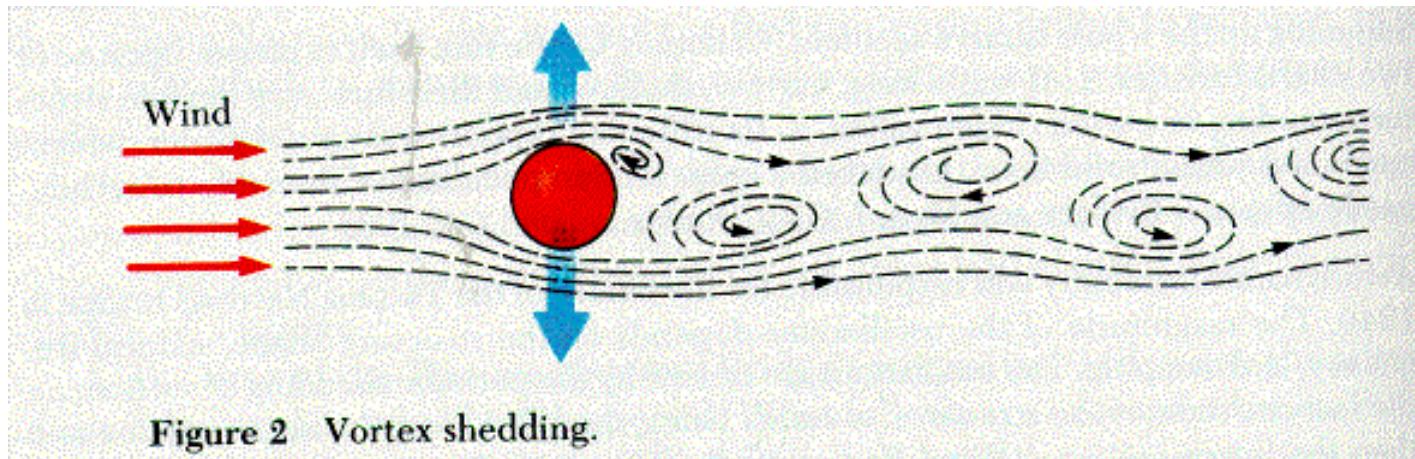
## Effetti catastrofici della risonanza (Tacoma Bridge, USA)



Il ponte collassò nel 1940.

Aerodynamic instability was responsible for the failure of the Tacoma Narrows Bridge in 1940. The magnitude of the oscillations depends on the structure shape, natural frequency, and damping. The oscillations are caused by the **periodic shedding of vortices** on the leeward side of the structure, a vortex being shed first from the upper section and then the lower section.

*Wind Forces on Buildings and Structures,*  
E. Houghton and N. Carruthers, 1976.



**Figure 2** Vortex shedding.

# Lezione 16.

# Ritardo di tempo

# Schema della lezione

1. Introduzione
2. Funzione di trasferimento
3. Risposta in frequenza
4. Diagrammi di Bode
5. Sistemi con ritardo
6. Matlab



# 1. Introduzione

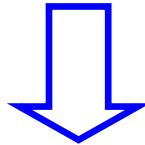


É un sistema :

- Dinamico
- Lineare
- Stazionario
- Stabile (BIBO)
- A dimensione infinita

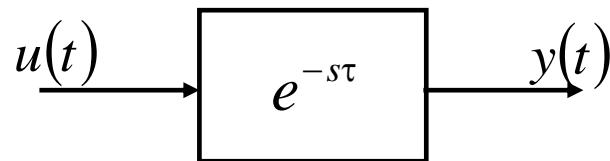
## 2. Funzione di trasferimento

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[u(t - \tau)] = e^{-\tau s} \mathcal{L}[u(t)] = e^{-\tau s} U(s)$$



$$G(s) = e^{-s\tau}$$

non razionale



guadagno statico  $G(0) = 1$

### 3. Risposta in frequenza

$$y(t) = u(t - \tau)$$

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad \longrightarrow \quad y(t) = A \sin(\omega(t - \tau)) = A \sin(\omega t - \omega\tau)$$

L'ampiezza non viene modificata (a tutte le pulsazioni).  
Lo sfasamento è  $-\omega\tau$ , lineare nella pulsazione.

Se si osserva che (coerentemente):

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} |G(j\omega)| = 1 \\ \angle G(j\omega) = -\omega\tau \quad \forall \omega \end{cases}$$

Si può affermare che vale il teorema della risposta in frequenza

$$y(t) = |G(j\omega)| A \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

## 4. Diagrammi di Bode

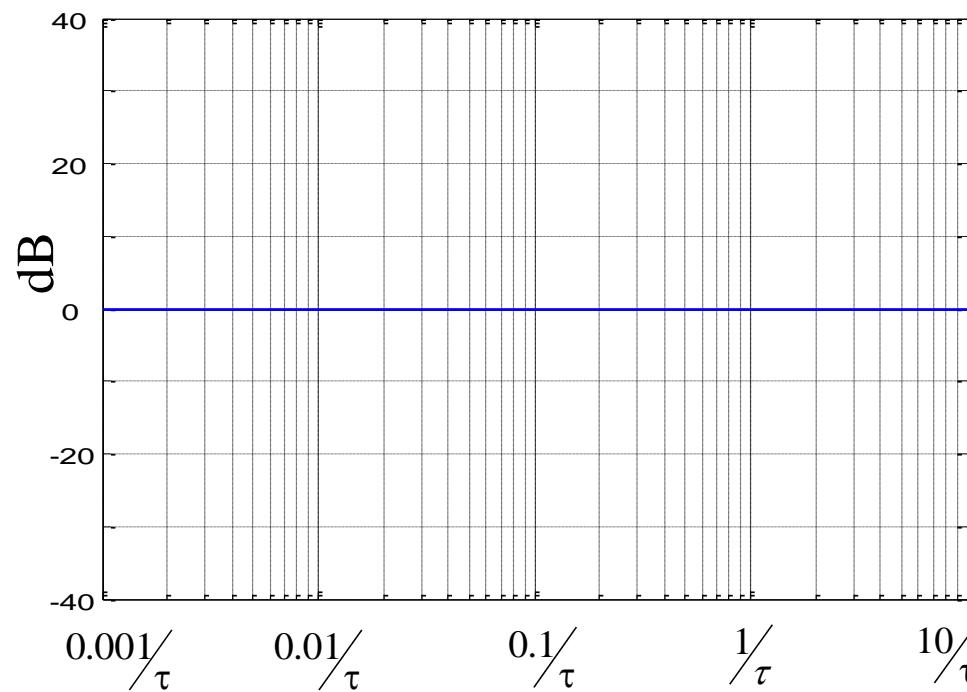
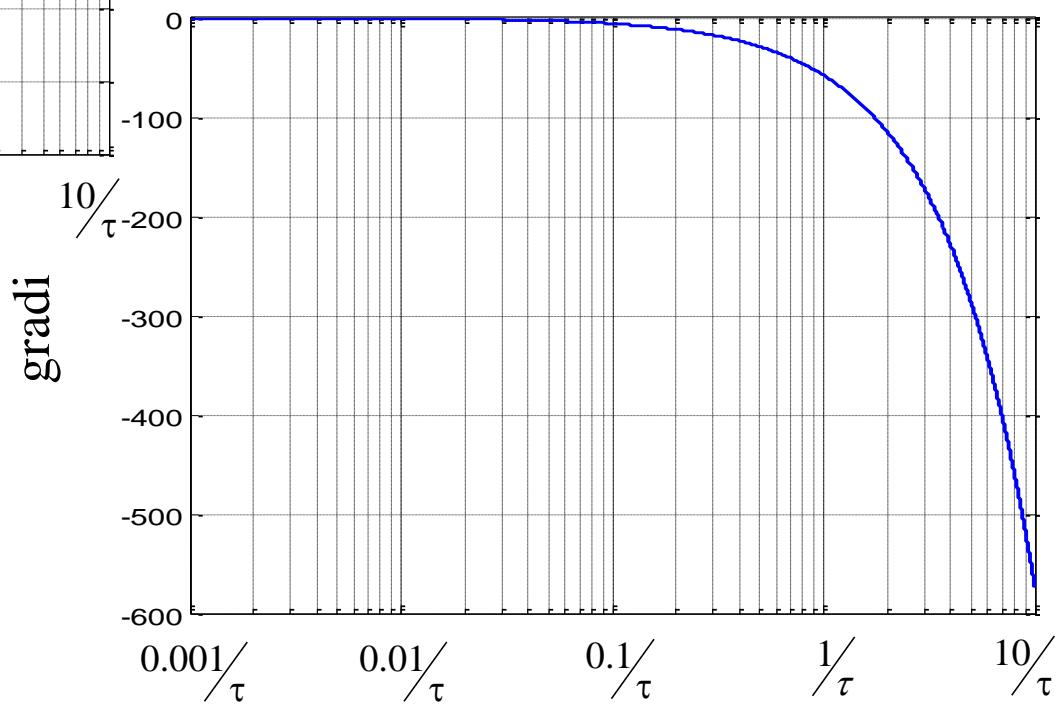


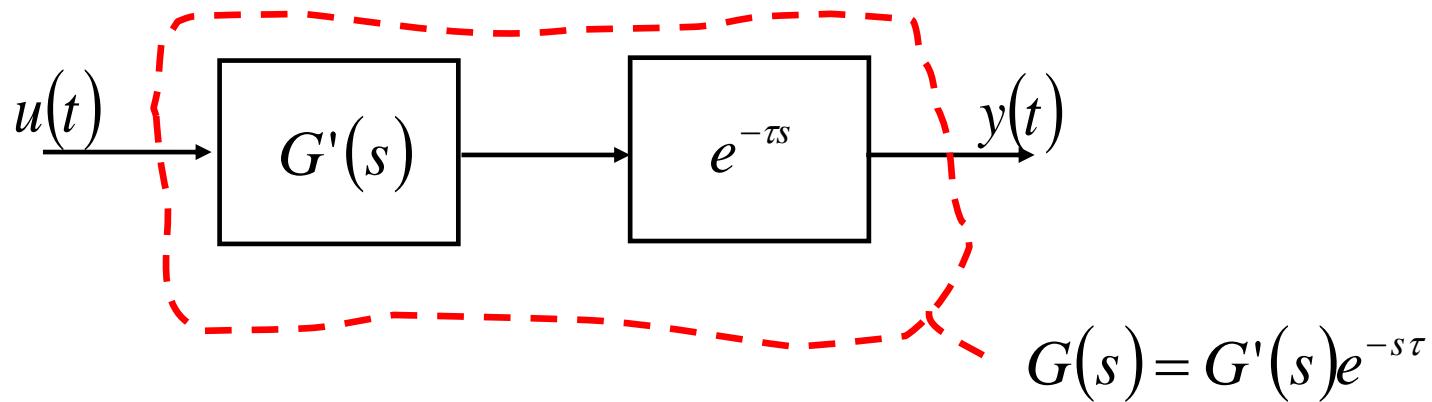
Diagramma della fase

$$\angle G(j\omega) = -\omega\tau \frac{180}{\pi}$$

Diagramma del modulo  
(Filtro passatutto)



## 5. Sistemi con ritardo



modulo

$$|G(j\omega)| = |G'(j\omega)| |e^{-j\omega\tau}| = |G'(j\omega)|$$

fase

$$\angle G(j\omega) = \angle G'(j\omega) - \omega\tau \frac{180}{\pi}$$

# 6. Matlab

Esiste una GUI per studiare le proprietà dei sistemi lineari tempo invarianti.

**ltiview** Opens the LTI Viewer GUI.

ltiview opens an empty LTI Viewer. The LTI Viewer is an interactive graphical user interface (GUI) for analyzing the time and frequency responses of linear systems and comparing such systems.

**ltiview(PLOTTYPE)** further specifies which responses to plot in the LTI Viewer.

Per esempio

```
ltiview({'step';'bode';'nyquist';'pzmap'})
```

Consente di aprire 4 grafici (risposta a scalino, diagrammi di Bode, diagramma di Nyquist e mappa poli/zeri).

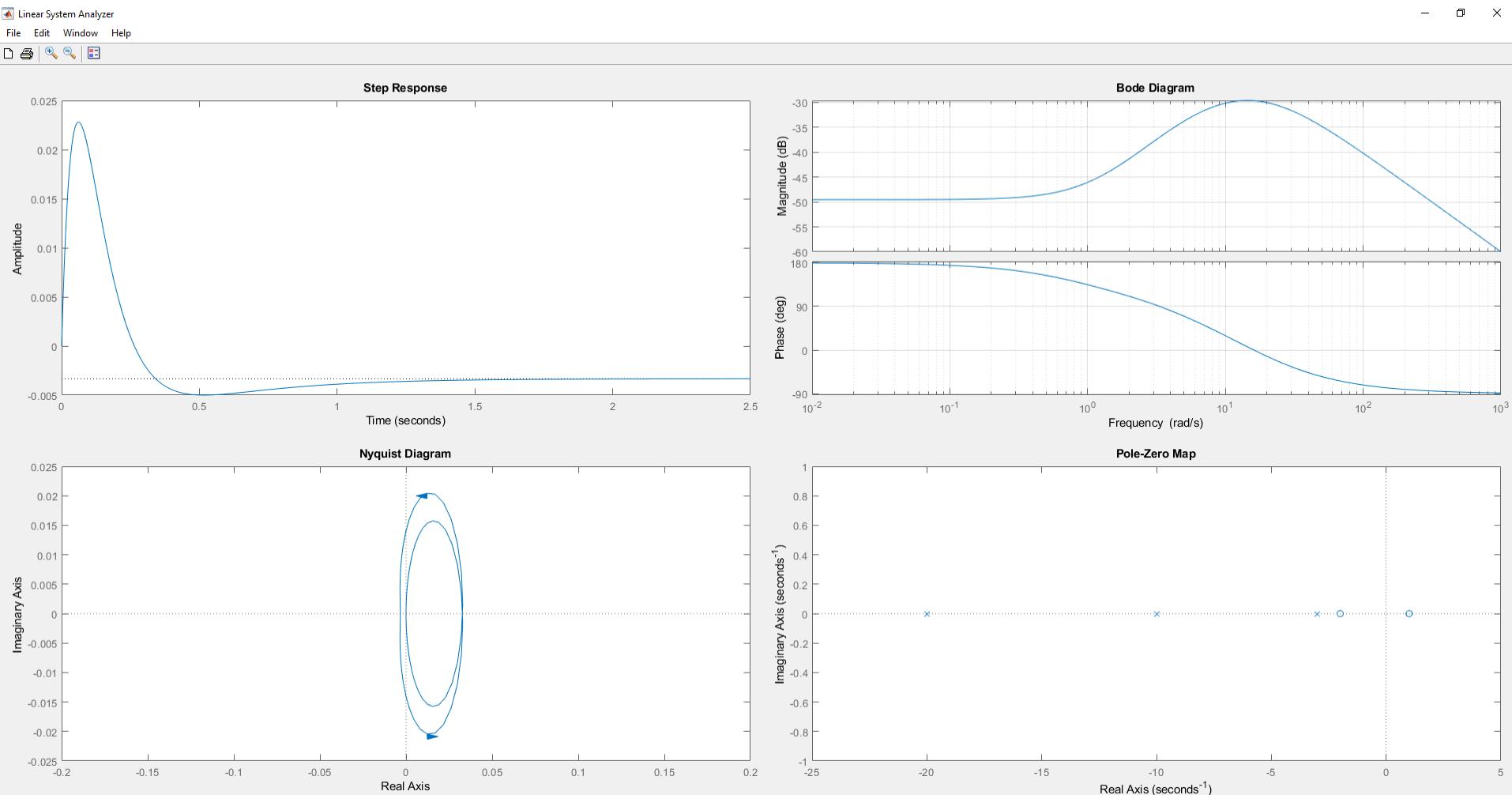
```
>> G=( (s-1)*(s+2)) / ((s+3)*(s+10)*(s+20))
```

G =

$$s^2 + s - 2$$

$$\frac{s^2 + s - 2}{s^3 + 33s^2 + 290s + 600}$$

Continuous-time transfer function.



# Lezione 17.

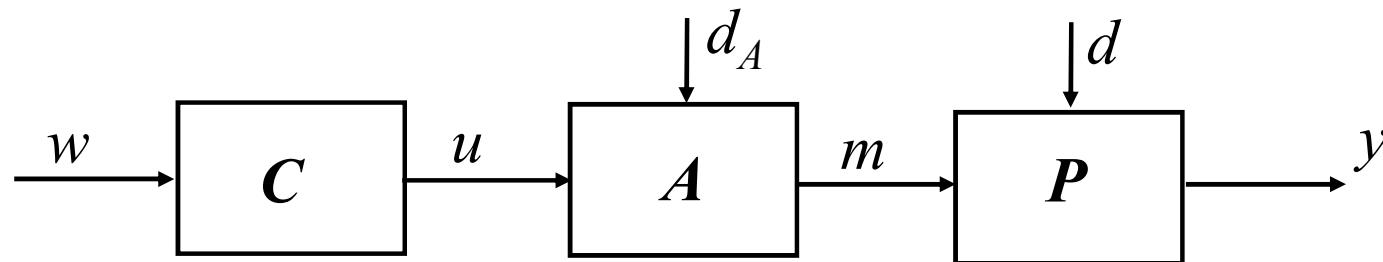
## Introduzione ai sistemi di controllo

# Schema

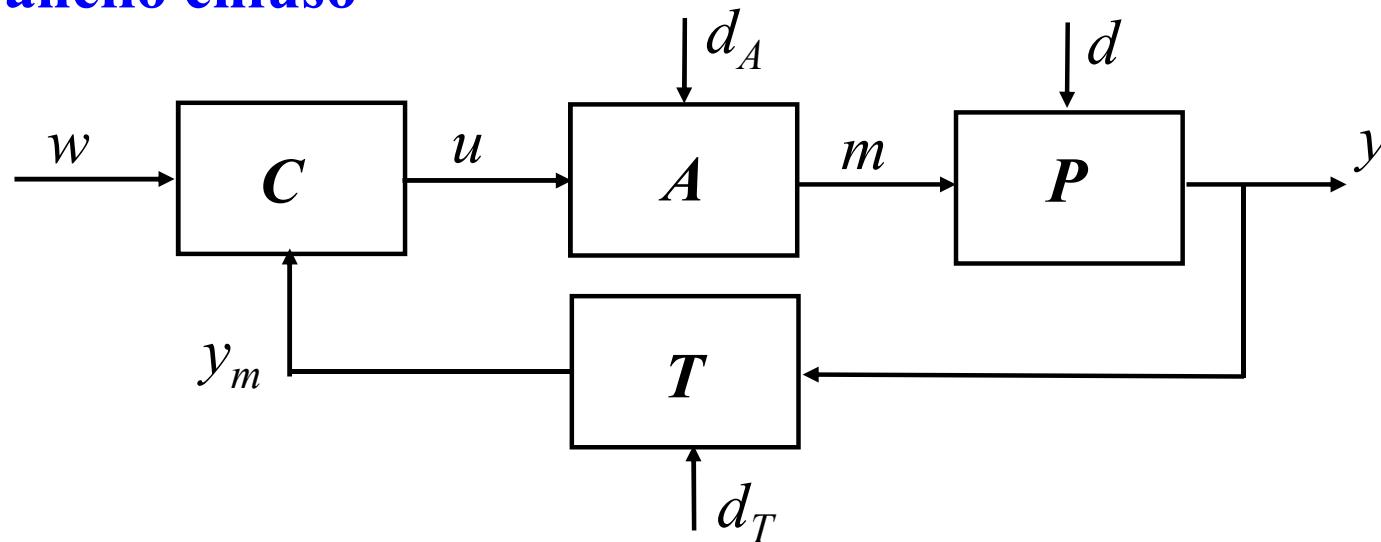
1. Sistemi di controllo in anello aperto ed in anello chiuso
2. Requisiti di un sistema di controllo
3. Analisi e sintesi di un sistema di controllo
4. Sistema di controllo in anello aperto
  - 4.1 Progetto “ideale”
  - 4.2 Limiti della strategia in anello aperto
  - 4.3 Compensazione in anello aperto di disturbi “in andata”
5. Sistemi di controllo in anello chiuso
  - 5.1 Analisi di sistemi retroazionati

# 1. Sistemi di controllo in anello aperto ed in anello chiuso

## in anello aperto



## in anello chiuso



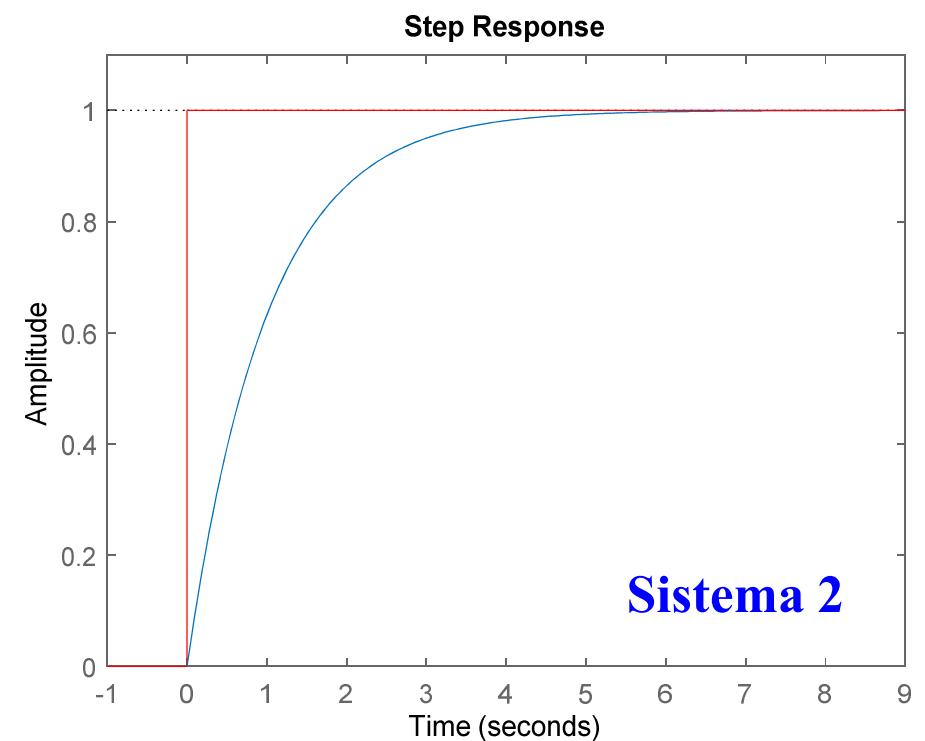
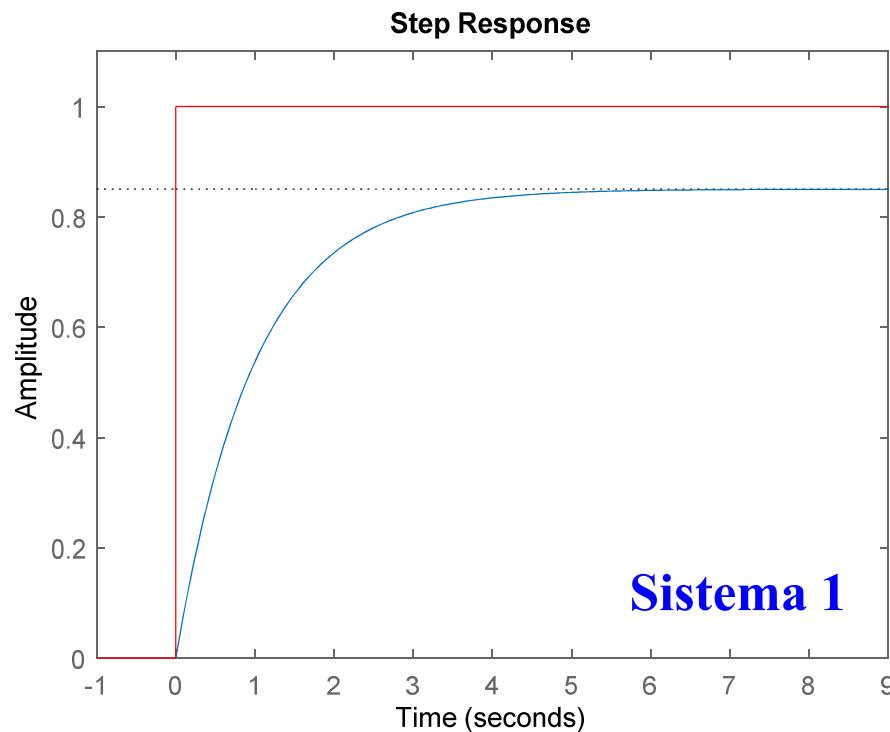
## **2. Requisiti di un sistema di controllo**

- stabilità indipendenza asintotica dalle condizioni iniziali,  
stabilità esterna
  - precisione statica  $y \sim w$  in condizioni di equilibrio
  - precisione dinamica  $y \sim w$  durante i transitori
  - attenuazione disturbi  $y \sim w$  anche in presenza di disturbi
  - moderazione  $u$  “piccola” in tutte le situazioni di interesse
  - robustezza garanzia delle precedenti proprietà anche  
in presenza di incertezza sul modello

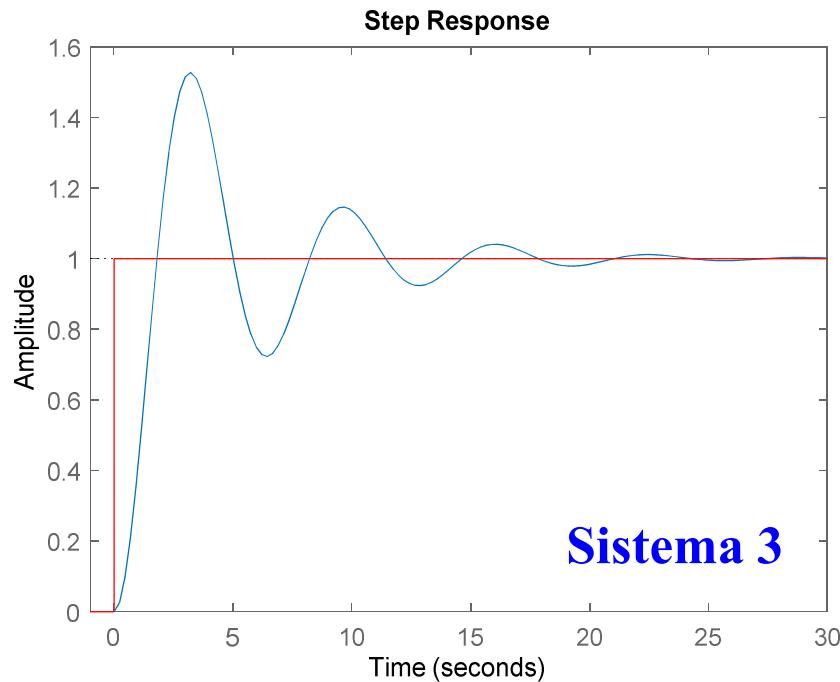
## Nota su precisione statica e precisione dinamica

Consideriamo le **risposte allo scalino unitario** di alcuni **sistemi di controllo**.

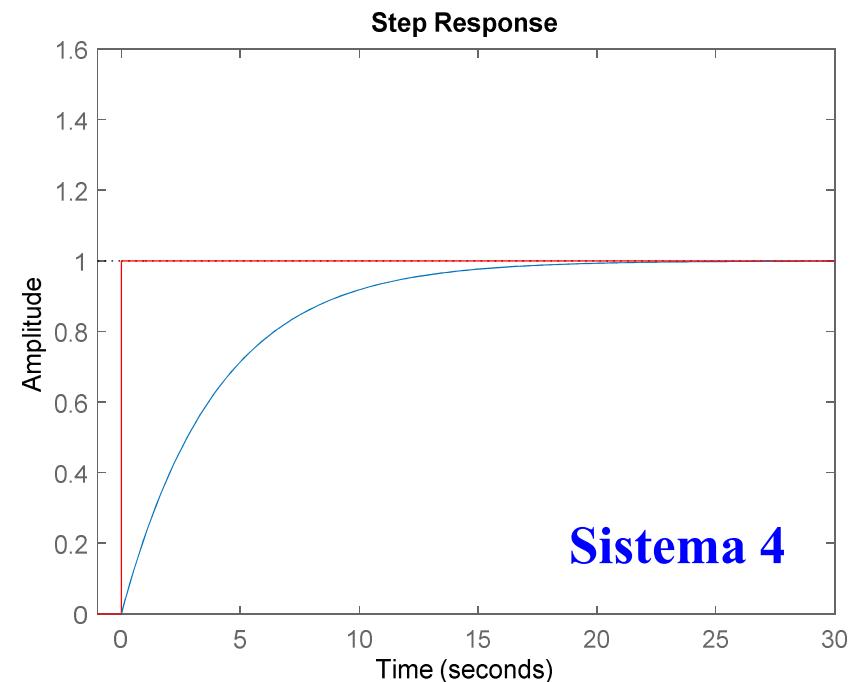
$$w(t) = sca(t)$$



Chi ha maggiore **precisione statica**?

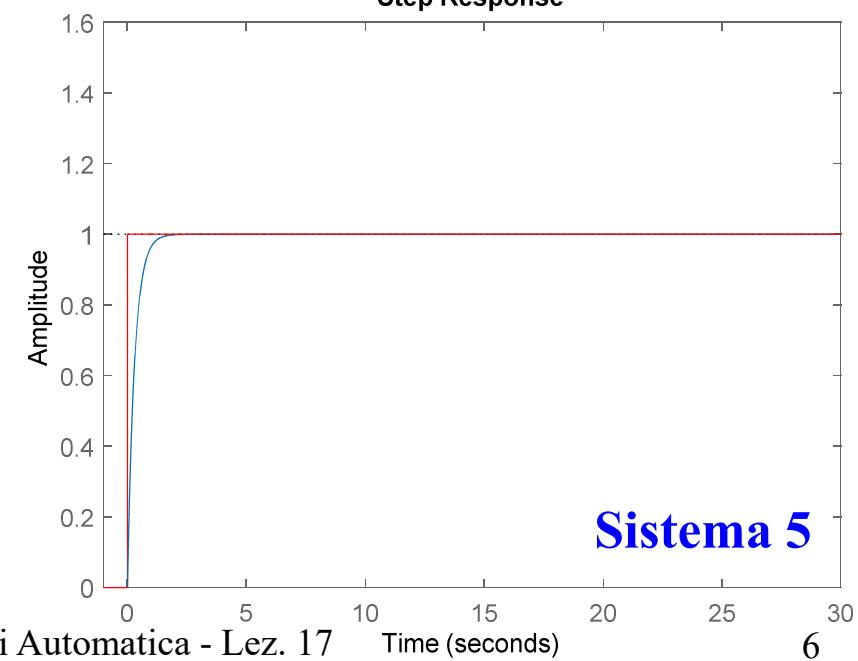


**Sistema 3**



**Sistema 4**

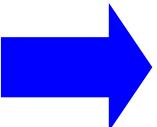
Chi ha maggiore  
precisione dinamica?



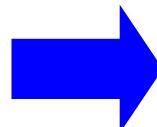
**Sistema 5**

### 3. Analisi e sintesi di un sistema di controllo

#### Problema di analisi

dati i modelli di  $P, A, T, C$   valutare le prestazioni

#### Problema di sintesi

dati i modelli di  $P, A, T$   
+  
specifiche di progetto  determinare il controllore  $C$

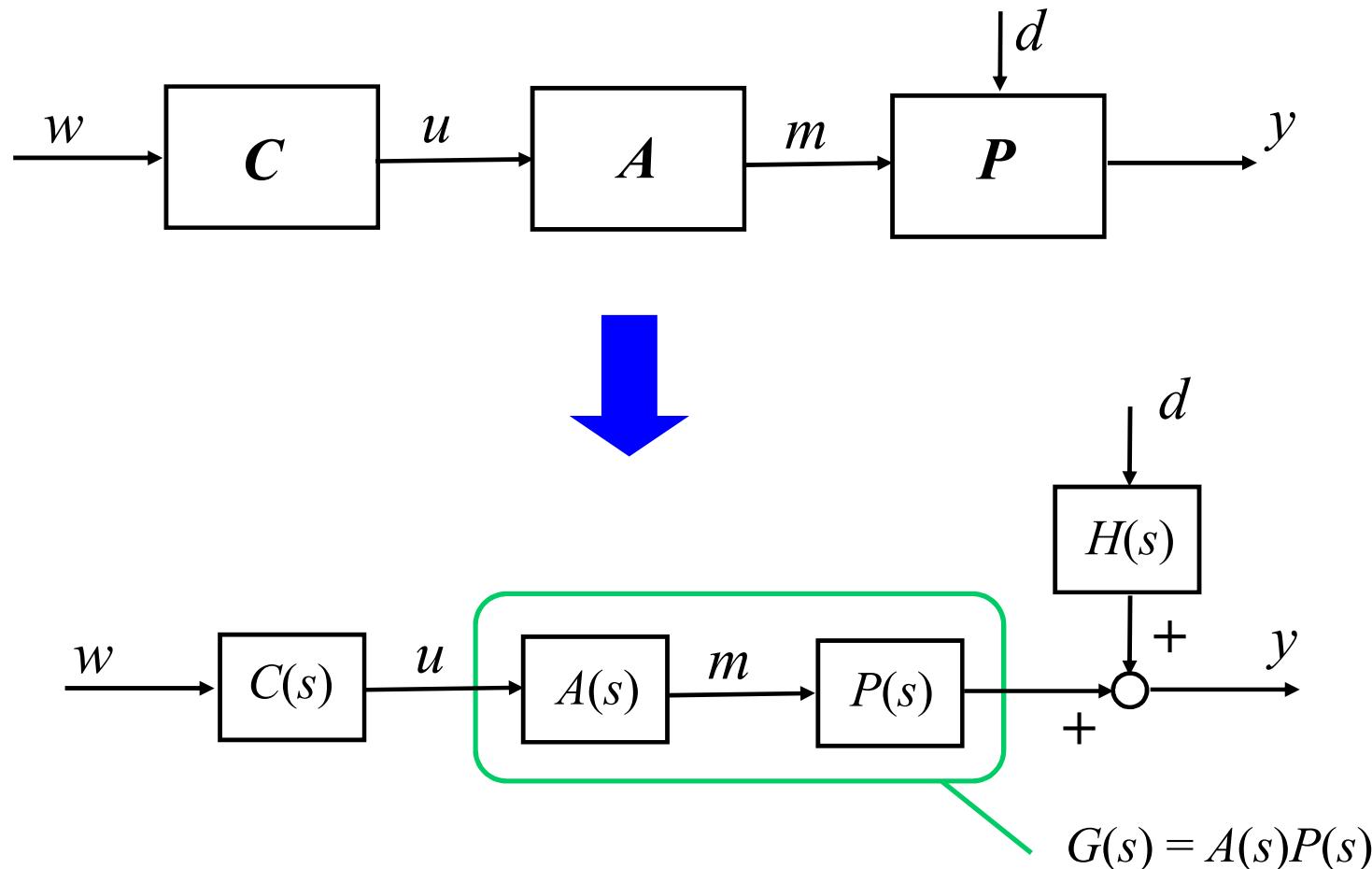
## Ipotesi

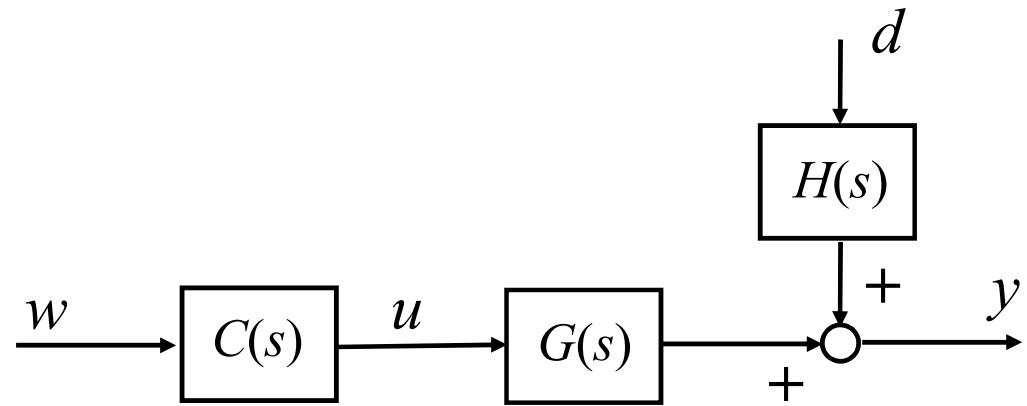
Tutti i componenti del sistema di controllo ( $P, A, T, C$ ) sono descritti da modelli lineari, cioè da

**sistemi dinamici lineari invarianti (a tempo continuo)**

eventualmente ottenuti per **linearizzazione** intorno ad uno stato di equilibrio prefissato

## 4. Sistema di controllo in anello aperto





prestazioni ideali

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C(s)G(s)$$

$\sim 1$  “passa-tutto”

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = H(s)$$

$\sim 0$  “passa-niente”

## 4.1 Progetto ideale (in anello aperto)

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C(s)G(s) = 1 \quad \rightarrow \quad C(s) = G(s)^{-1}$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = H(s) \quad \rightarrow \quad \text{Non si può fare nulla}$$

## 4.2 Limitazioni (in anello aperto)

### 1. Cancellazioni poli/zeri con $Re \geq 0$

Esempio

$$G(s) = \frac{1+s}{1-s} \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{1-s}{1+s}$$

cancellazione illecita (dinamica “nascosta” instabile)



E’ impossibile stabilizzare un sistema instabile  
usando una strategia in anello aperto

## **2. Realizzabilità**

Discussiamo questo problema  
mediante alcuni esempi

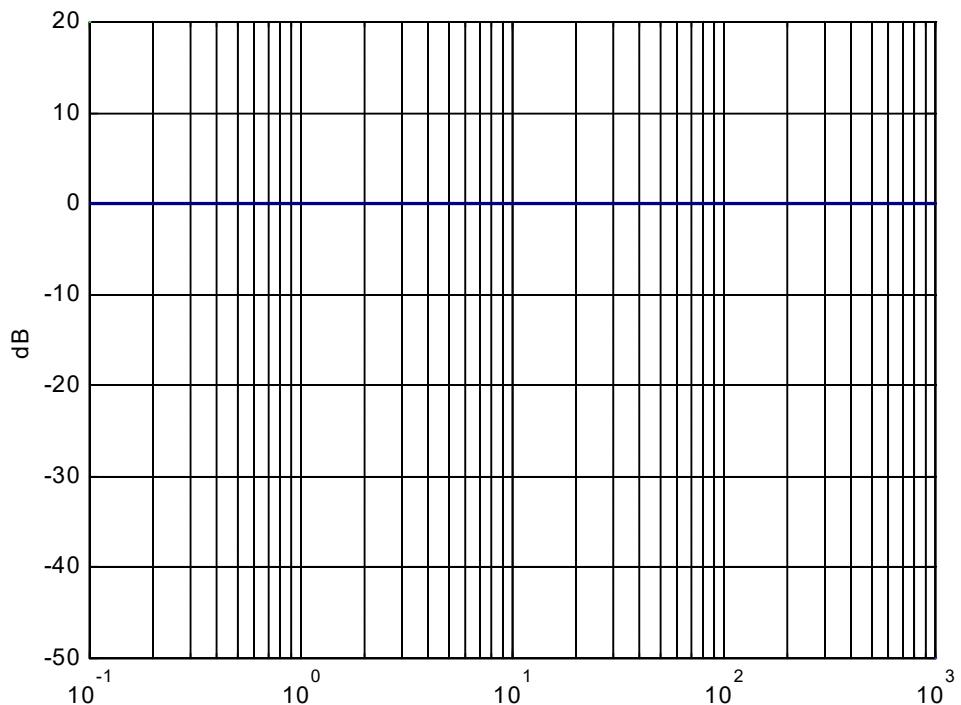
## Esempio 1

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)} \quad \rightarrow \quad C_0(s) = \frac{0.1(1+2s)(1+0.1s)}{1+s}$$

**non realizzabile (2 zeri e 1 polo)**

$$F_0(s) = C_0(s)G(s) = 1$$

**passa-tutto**



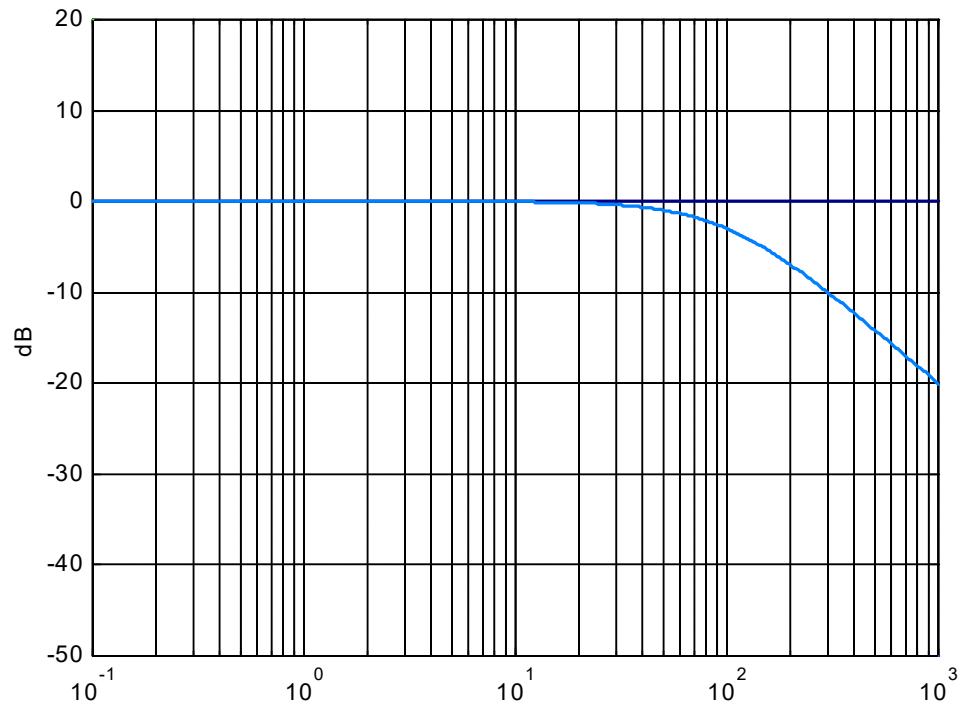
## Esempio 2

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)} \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{0.1(1+2s)(1+0.1s)}{(1+s)(1+0.01s)}$$

realizzabile

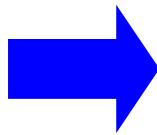
$$\begin{aligned} F_1(s) &= C_1(s)G(s) = \\ &= \frac{1}{1+0.01s} \end{aligned}$$

passa-basso con  $B \cong [0,100]$



## Esempio 3

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

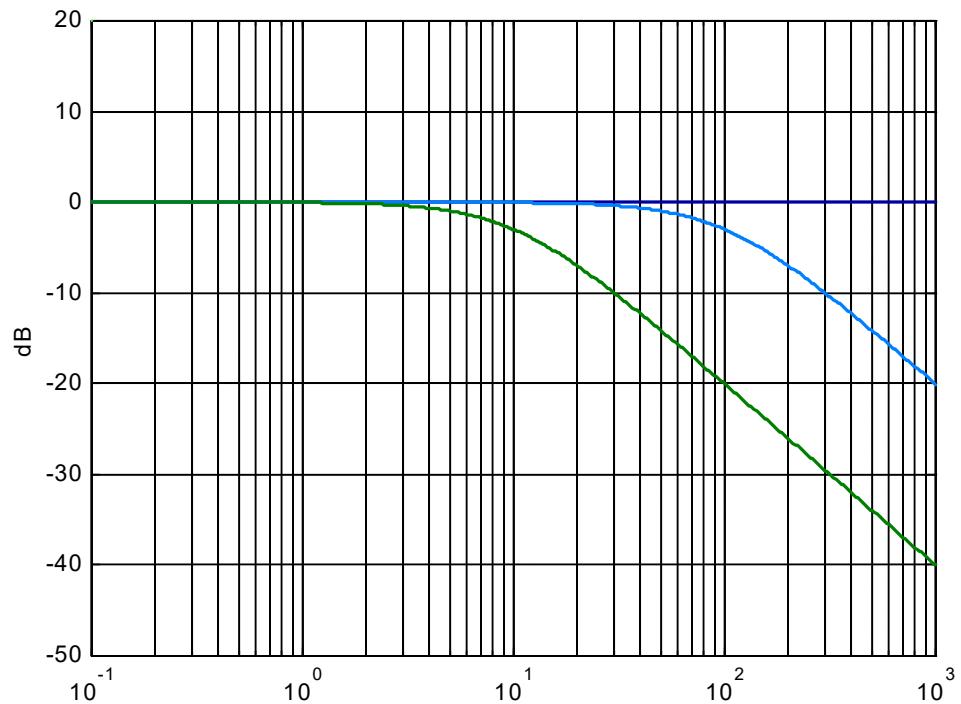


$$C_2(s) = \frac{0.1(1+2s)}{(1+s)}$$

realizzabile

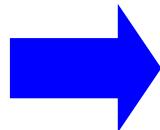
$$\begin{aligned}F_2(s) &= C_2(s)G(s) = \\&= \frac{1}{1+0.1s}\end{aligned}$$

passa-basso con  $B \cong [0,10]$



## Esempio 4

$$G(s) = \frac{10(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

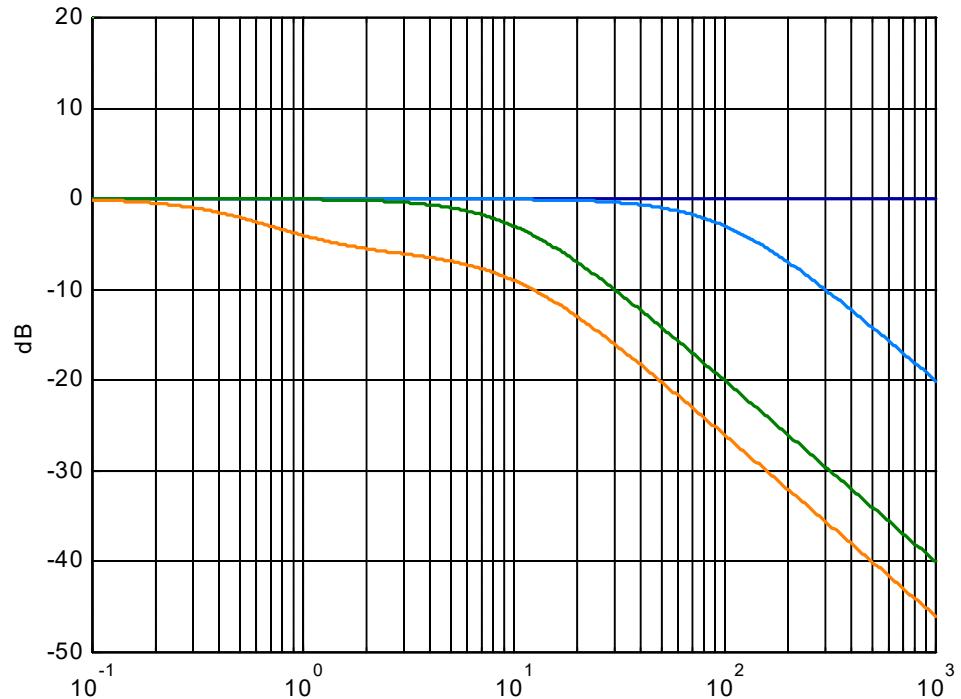


$$C_3(s) = 0.1$$

realizzabile

$$\begin{aligned} F_3(s) &= C_3(s)G(s) = \\ &= \frac{(1+s)}{(1+2s)(1+0.1s)} \end{aligned}$$

passa-basso con  $B \cong [0, 0.5]$



Si può ottenere un controllore realizzabile riducendo la banda passante, cioè:

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C(s)G(s)$$

$$\sim 1 \quad \text{“passa-tutto”}$$

ma solo fino ad una certa  $\omega_{BP}$

### 3. Scarsa robustezza

Discussiamo questo problema  
mediante un esempio

## Esempio

$$G(s) = \frac{(10 \pm \Delta)(1 + s)}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)}$$

$C_3(s) = 0.1$

$$F_3(s) = C_3(s)G(s) = (1 \pm 0.1\Delta) \frac{(1 + s)}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)}$$

guadagno diverso da 1

Se c'e' incertezza si corre il rischio di  
non ottenere le prestazioni ideali  
qualunque sia la banda di frequenza  
desiderata

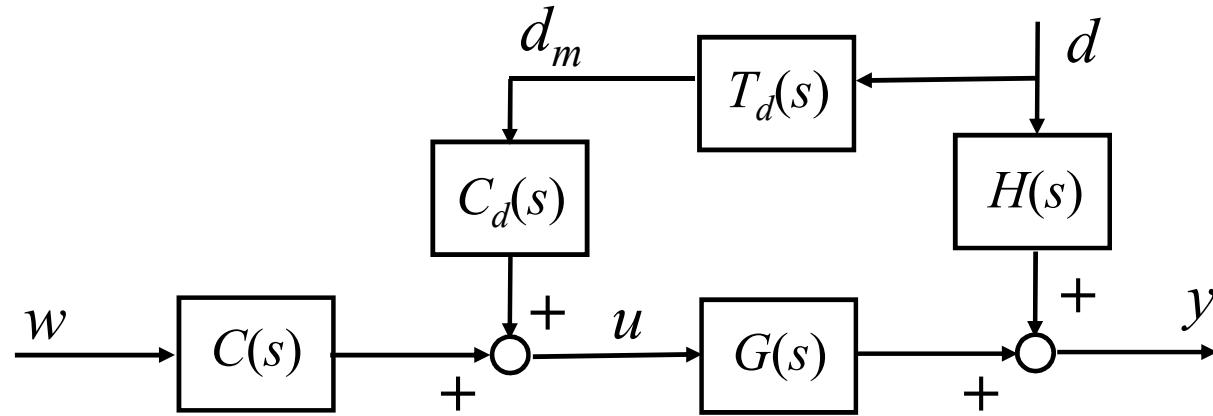
$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C(s)G(s)$$

$$\sim 1 \quad \text{"passa-tutto"}$$

Mai!

Nemmeno "a pulsazione nulla"

## 4.3 Compensazione in anello aperto del disturbo

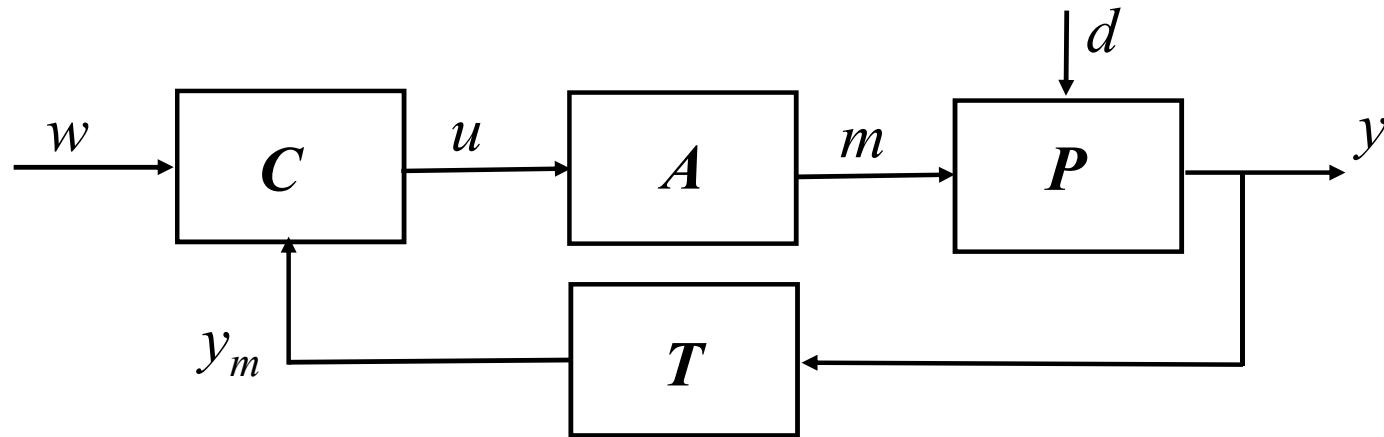


prestazioni ideali

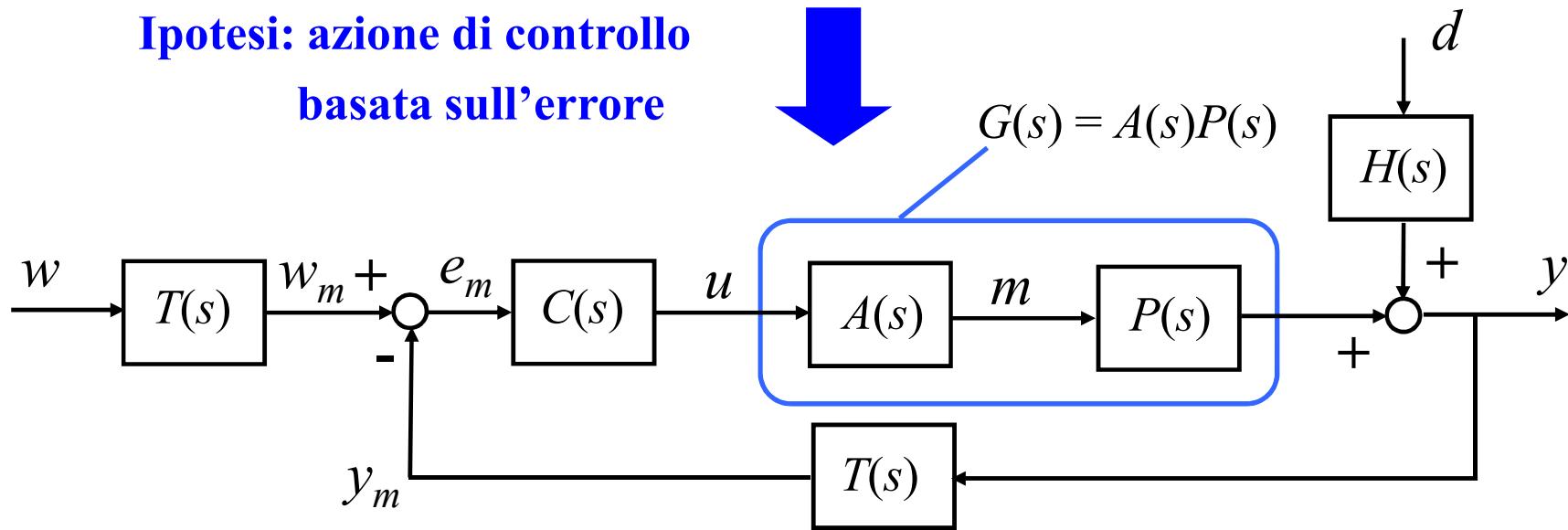
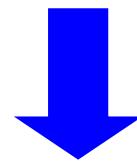
$$\frac{Y(s)}{D(s)} = H(s) + T_d(s)C_d(s)G(s)$$
$$\qquad \qquad \qquad \sim 0 \quad \text{"passa-niente"}$$
$$C_d(s) = -H(s)G(s)^{-1}T_d(s)^{-1}$$

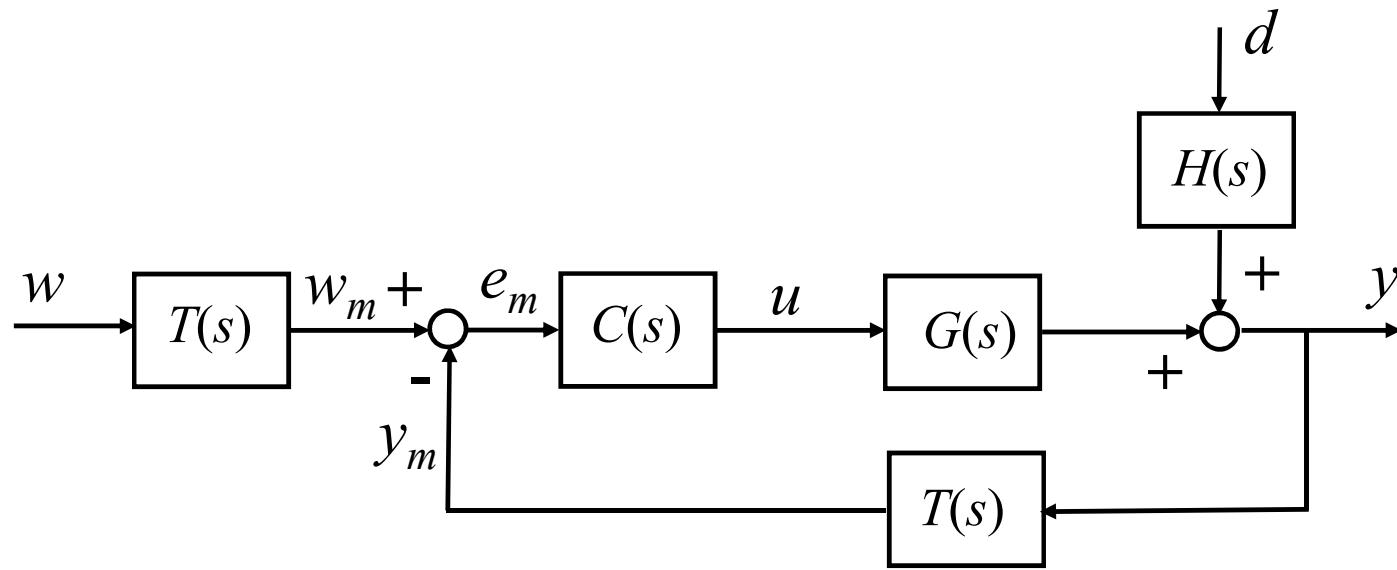
limitazioni analoghe alle precedenti

## 5. Sistema di controllo in anello chiuso



**Ipotesi: azione di controllo  
basata sull'errore**

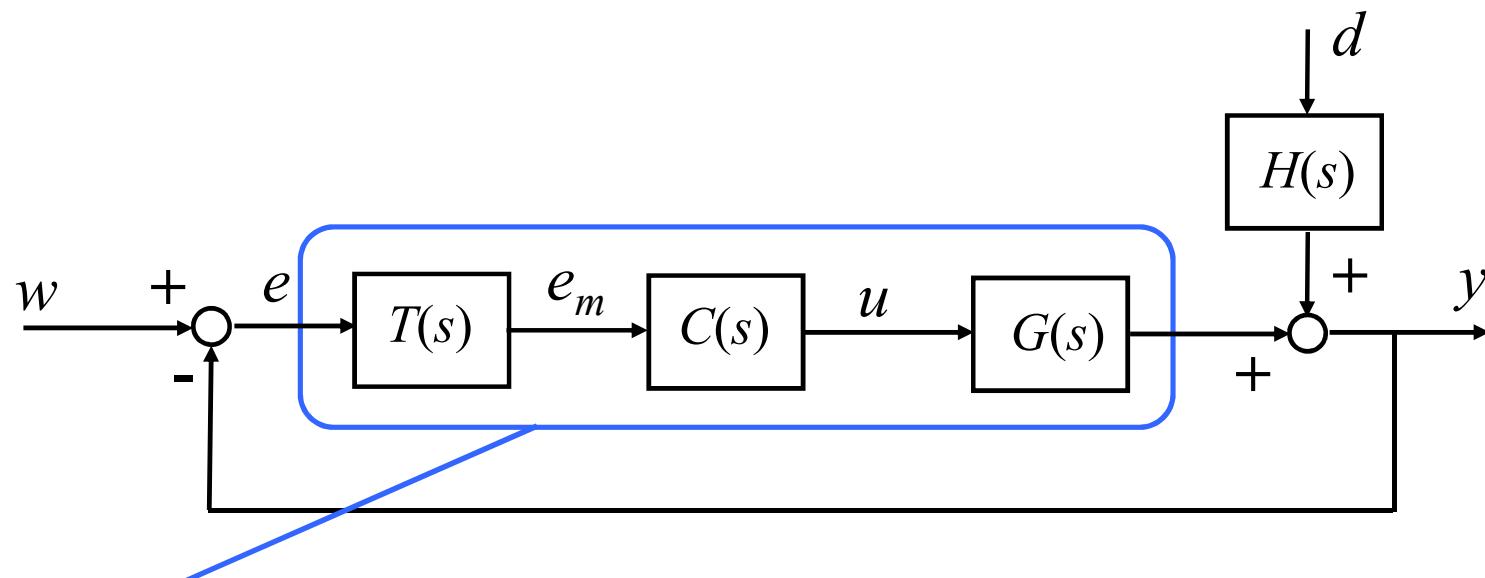




$$E_m(s) = W_m(s) - Y_m(s) = T(s) \underbrace{(W(s) - Y(s))}_{E(s)}$$

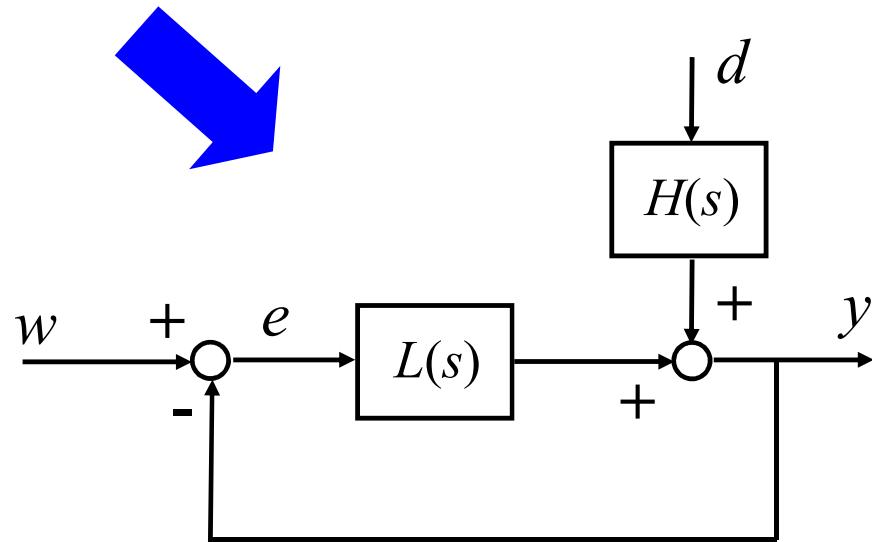
**errore apparente**

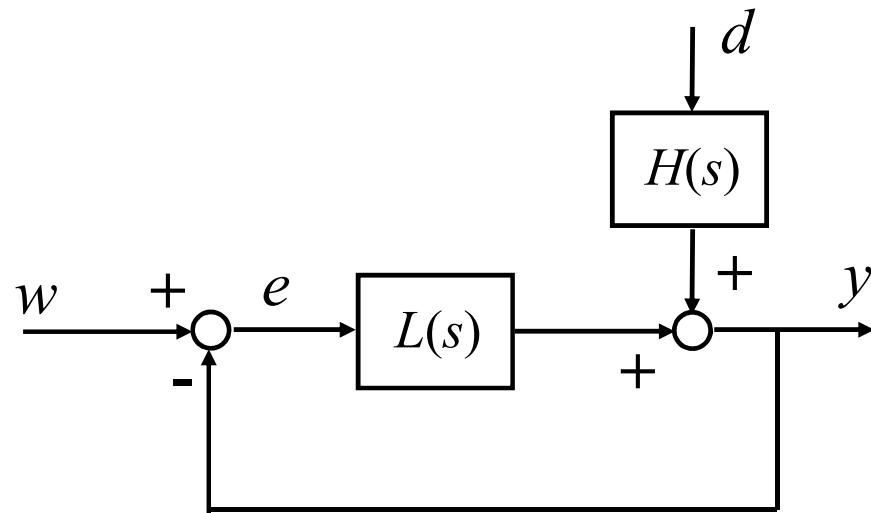
**errore effettivo**



$$L(s) = T(s)C(s)G(s)$$

**funzione di trasferimento d'anello**





prestazioni ideali

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$



$\sim 1$  “passa-tutto”

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{H(s)}{1 + L(s)}$$



$\sim 0$  “passa-niente”

Ottenerne queste prestazioni ideali in senso stretto è impossibile. Ma ...

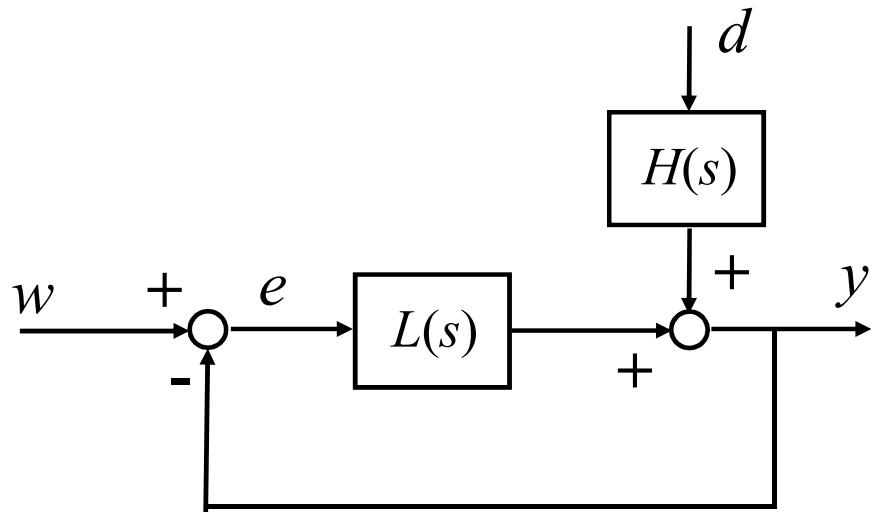
Se  $L(s) \gg 1$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \sim 1 \quad \text{"passa-tutto"}$$

Se  $L(s) \gg H(s)$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{H(s)}{1 + L(s)} \sim 0 \quad \text{"passa-niente"}$$

## 5.1 Analisi di sistemi retroazionati



- asintotica stabilità  $\rightarrow$  stabilità di  $H(s)$   
stabilità di  $\frac{L(s)}{1 + L(s)}$
- prestazioni  $\rightarrow$  studio di  $\frac{Y(s)}{W(s)}$  e  $\frac{Y(s)}{D(s)}$

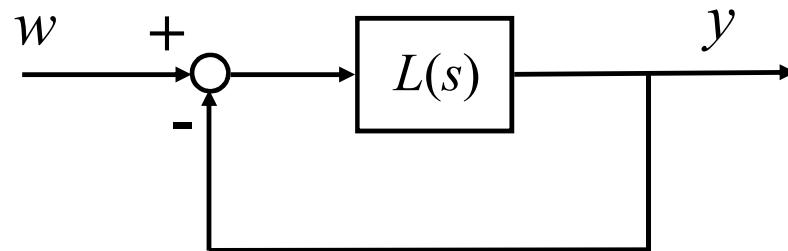
# Lezione 18.

# Stabilità di sistemi retroazionati

# Schema

1. Stabilità di sistemi retroazionati
2. Diagramma di Nyquist
3. Criterio di Nyquist
4. Estensioni del Criterio di Nyquist

# 1. Stabilità di sistemi retroazionati



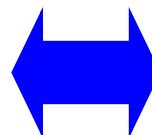
funzione d'anello

$$L(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{N(s)}{D(s) + N(s)}$$

polinomio caratteristico  
in anello chiuso

asintotica stabilità

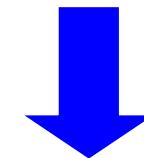
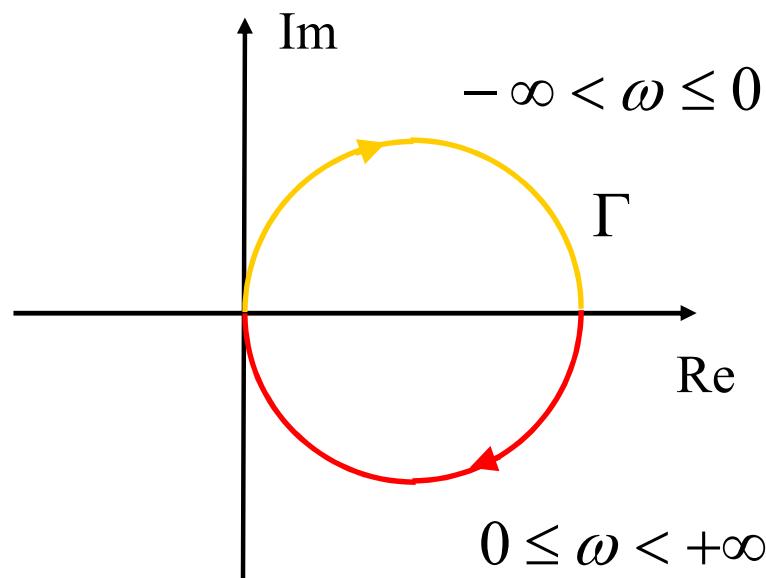


tutte le radici di  
 $D(s) + N(s) = 0$   
hanno  $\text{Re} < 0$

- Questo modo di procedere non ci è utile per capire come cambia la proprietà di stabilità al variare degli elementi che costituiscono la funzione di trasferimento d'anello (controllore e plant).
- Servono strumenti (grafici) e metodi utili anche per la fase di progetto.

## 2. Diagramma di Nyquist

Il diagramma di Nyquist  $\Gamma$  di  $L(s)$  è la curva chiusa, nel piano complesso, di  $L(j\omega)$  per  $-\infty < \omega < +\infty$ , orientato per  $\omega$  crescenti

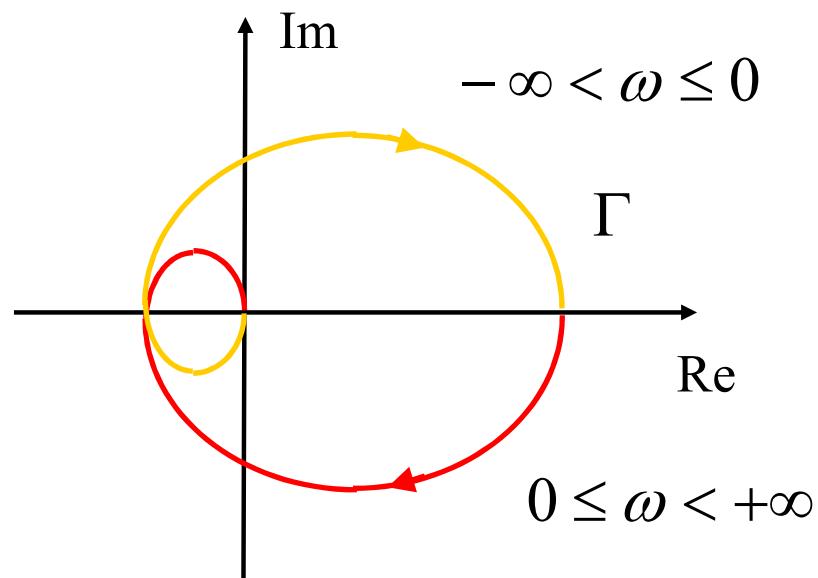


**diagramma polare**  
+  
**simmetrico rispetto  
all'asse reale**

$$L(-j\omega) = \overline{L(j\omega)}$$

## Esempio 1

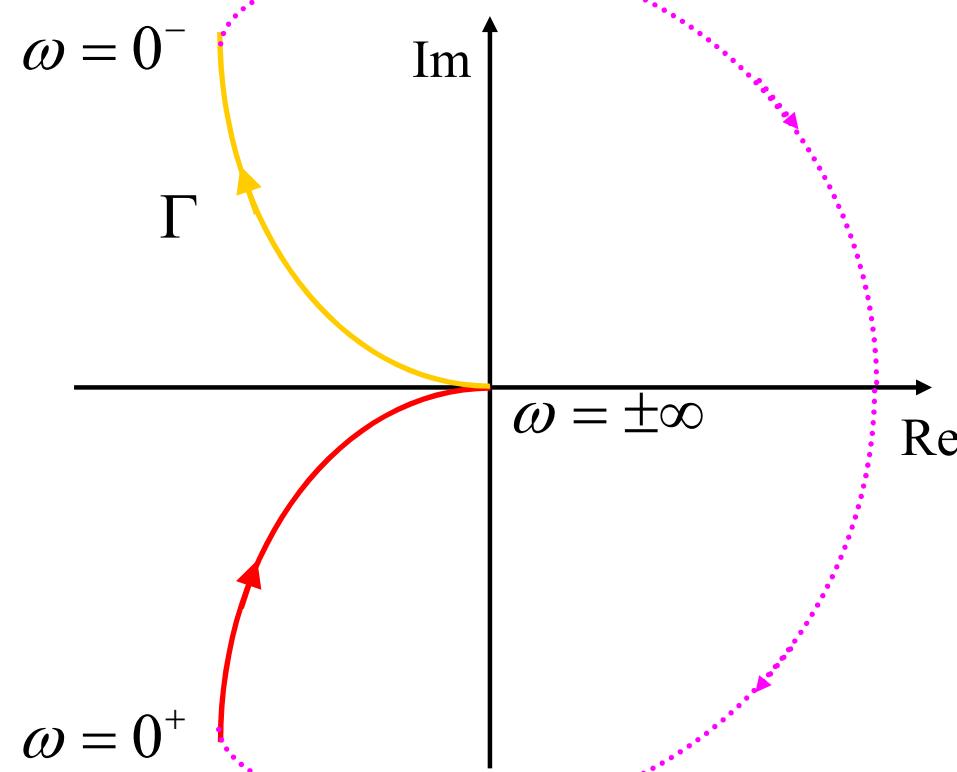
$$L(s) = \frac{100}{(1+s)^3}$$



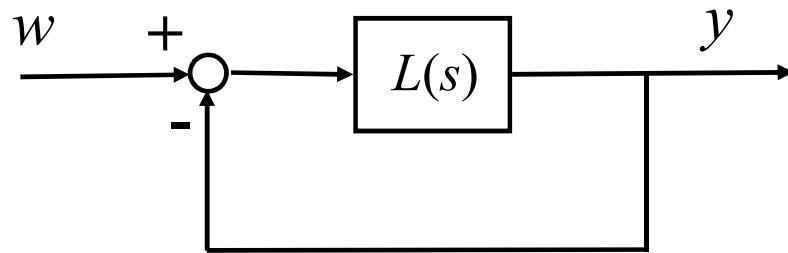
## Esempio 2

$$L(s) = \frac{100}{s(1+s)}$$

Convenzione:  
chiusura all'infinito  
in senso **orario**



### 3. Criterio di Nyquist



$\Gamma$  diagramma di Nyquist associato a  $L(s)$

$N$  numero di giri antiorari di  $\Gamma$  intorno al punto  $-1$

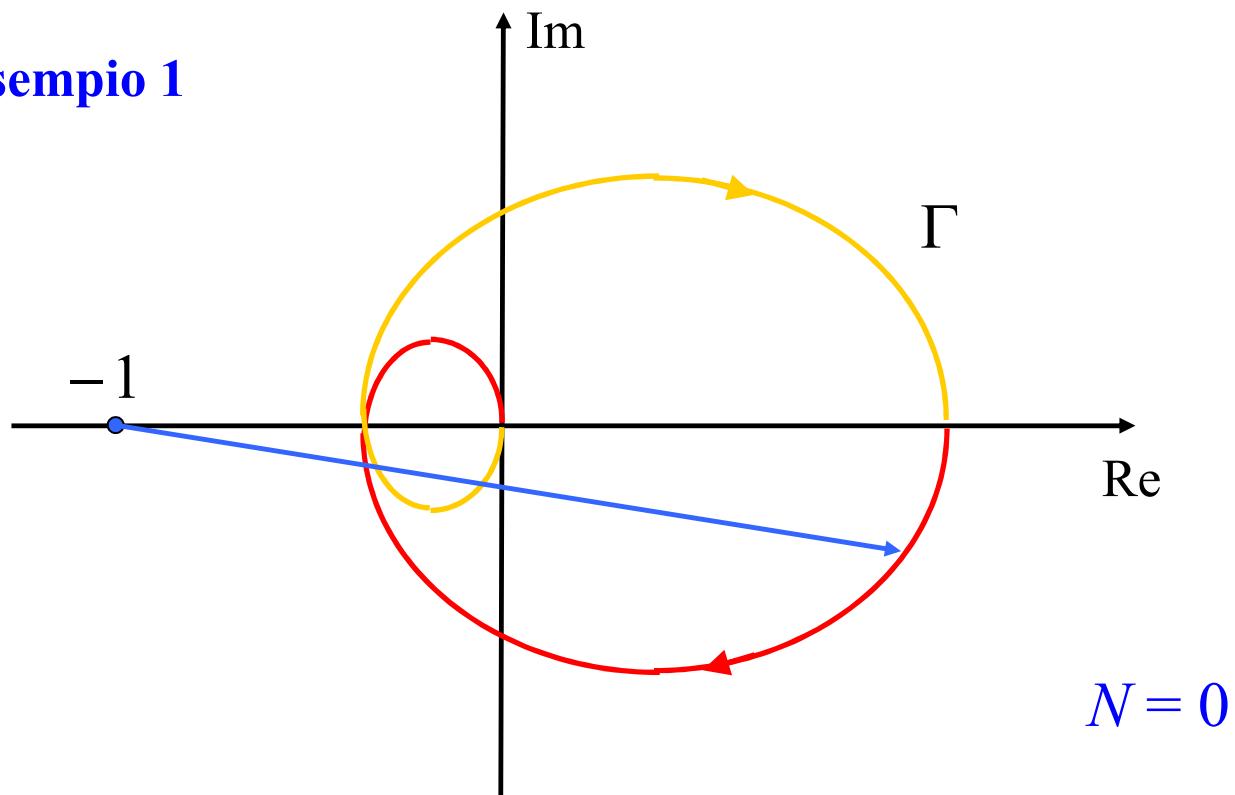
$P$  numero di poli di  $L(s)$  con  $\text{Re} > 0$

asintotica stabilità  
(del sistema retroazionato)       $\longleftrightarrow$        $\begin{cases} N \text{ ben definito} \\ N = P \end{cases}$

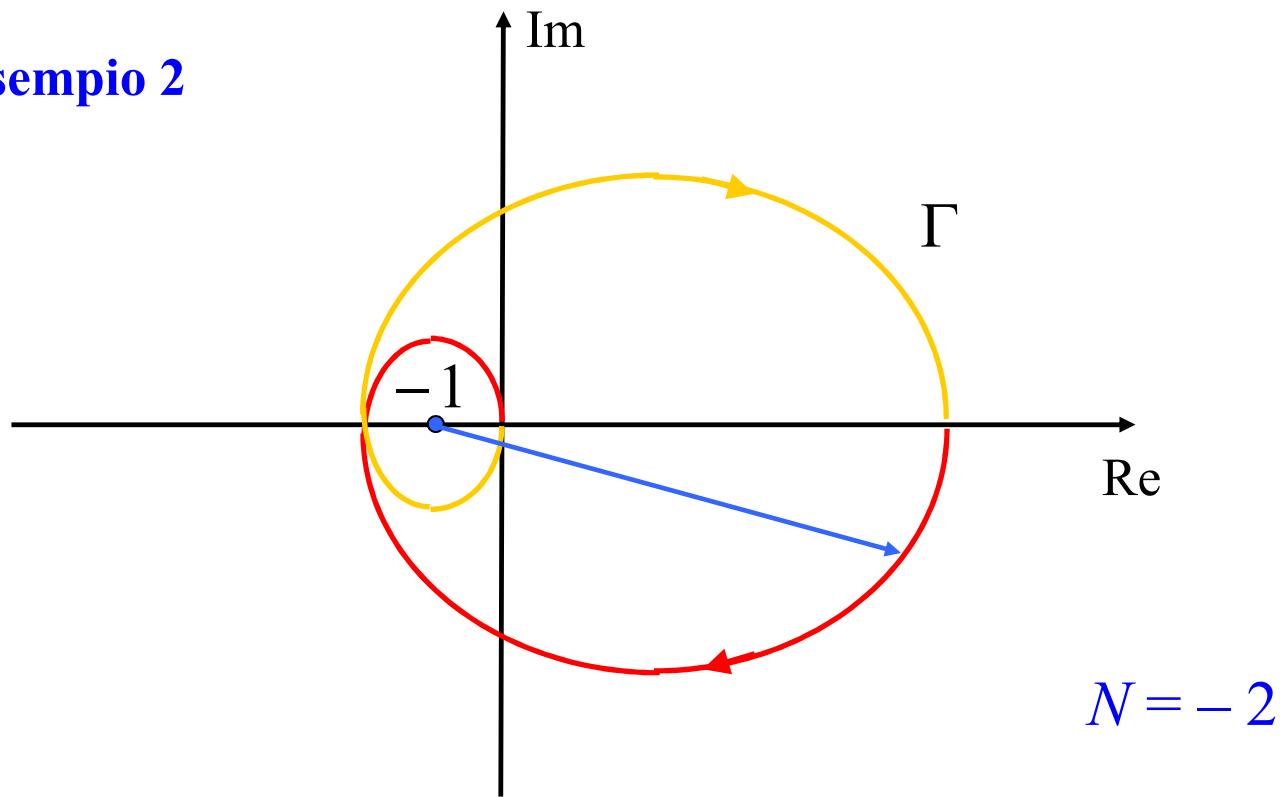
## Osservazione 1

Come si valuta  $N$ ?

Esempio 1



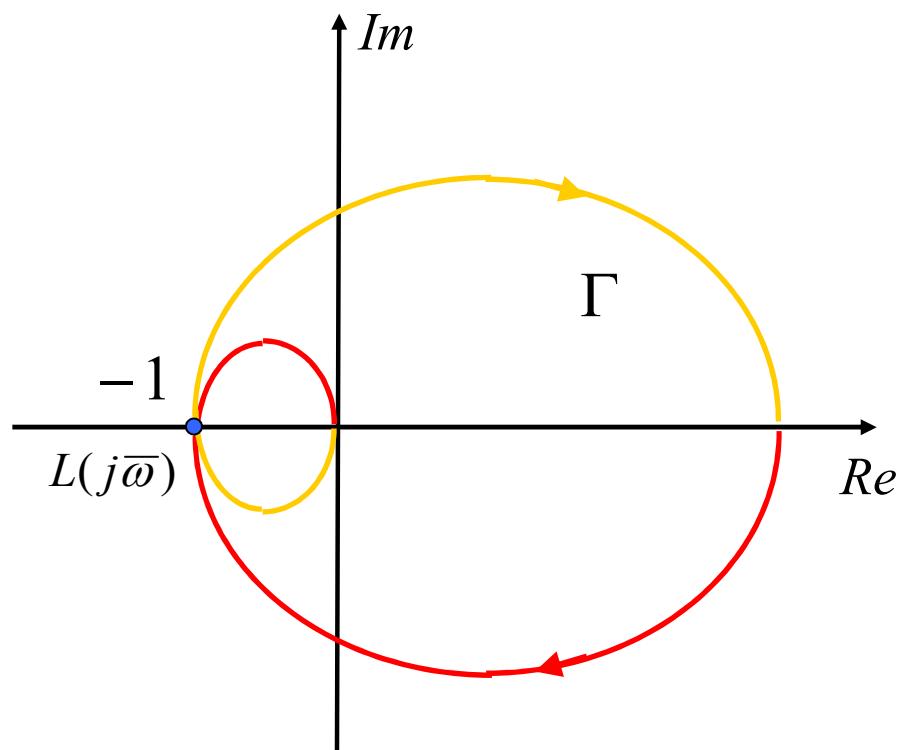
**Esempio 2**



## Osservazione 2

$N$  non ben definito  $\rightarrow$  non asintoticamente stabile

### Dimostrazione



$N$  non ben definito

$$\downarrow \exists \bar{\omega} : L(j\bar{\omega}) = -1$$

$$\downarrow 1 + L(j\bar{\omega}) = 0$$

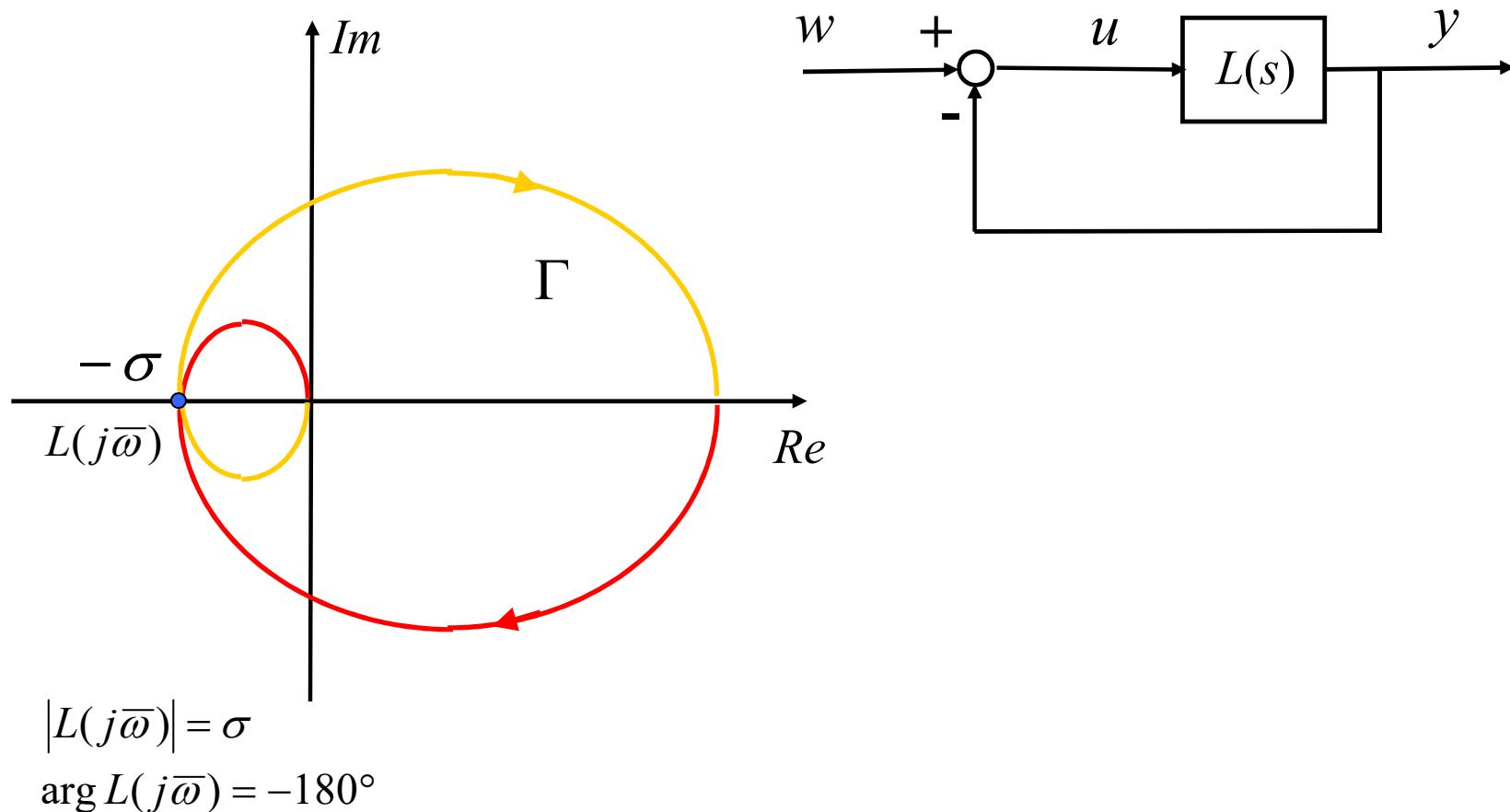
$\downarrow 1 + L(s)$  ha una radice in  $j\bar{\omega}$

$$\downarrow F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \text{ ha un polo in } j\bar{\omega}$$

$\downarrow F(s)$  non è asintoticamente stabile

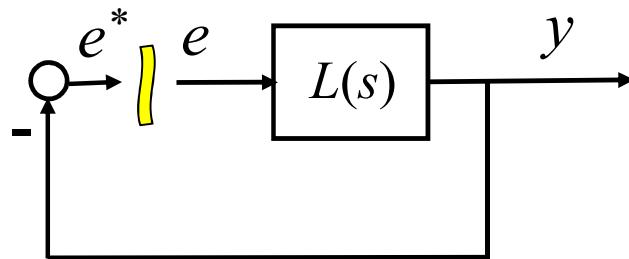
## Osservazione 3

Giustificazione intuitiva del criterio nel caso  $P = 0$



$$w(t) = 0$$

$$e(t) = \sin(\bar{\omega}t)$$



$$|L(j\bar{\omega})| = \sigma$$

$$\arg L(j\bar{\omega}) = -180^\circ$$

$$y(t) = |L(j\bar{\omega})| \sin(\bar{\omega}t + \arg L(j\bar{\omega})) =$$

$$= \sigma \sin(\bar{\omega}t - 180^\circ) = -\sigma \sin(\bar{\omega}t)$$



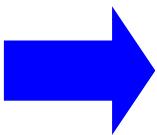
$$e^*(t) = -y(t) = \sigma \sin(\bar{\omega}t)$$

$N \neq P = 0 \quad \sigma > 1 \quad \text{instabilità}$

$N = P = 0 \quad \sigma < 1 \quad \text{asintotica stabilità}$

$N$  non definito  $\sigma = 1 \quad \text{semplificata stabilità}$   
(solo in questo caso)

## Osservazione 4

$N < 0$   instabile

cioè, giri orari intorno a  $-1$

## **Dimostrazione**

poiché  $P$  è un numero positivo o nullo

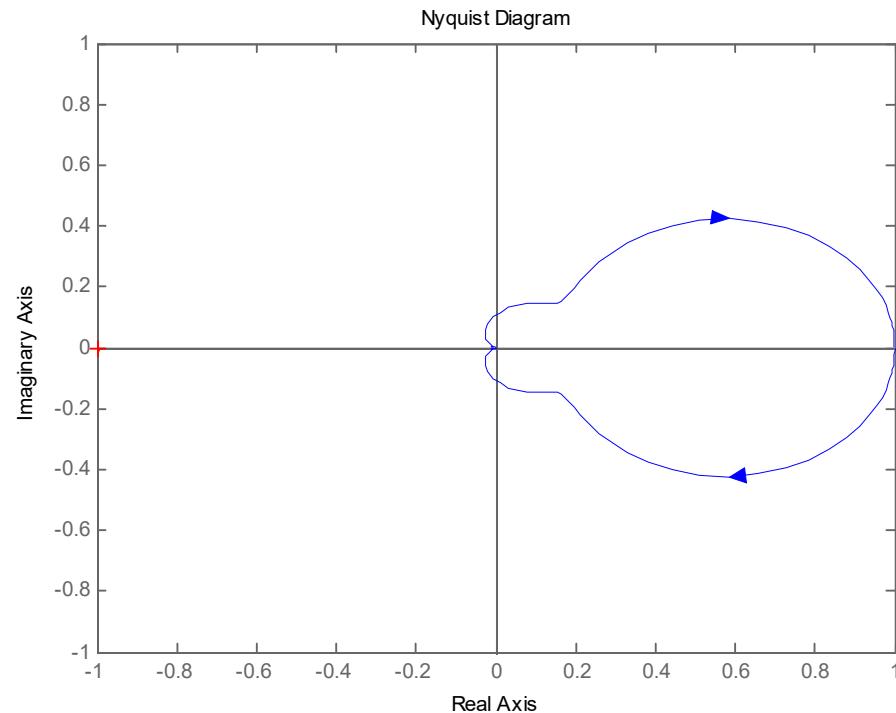
necessariamente risulta  $N \neq P$

## Esempio 1

Funzione d'anello

$$L(s) = \frac{1+s}{(1+0.1s)^2(1+5s)}$$

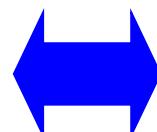
$$P = 0$$



Dal grafico

$$N = 0$$

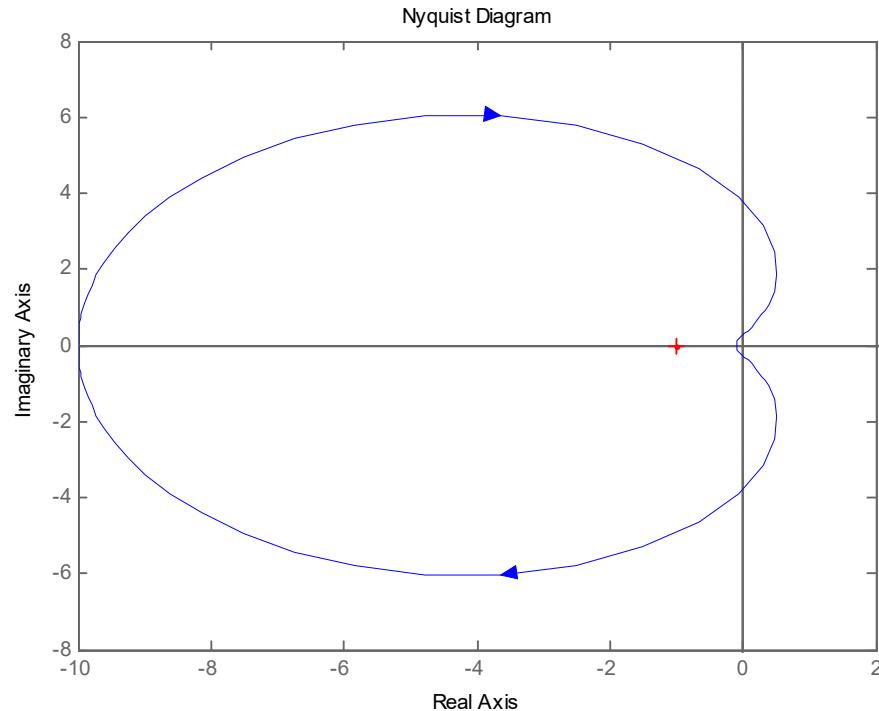
$N$  ben definito  
 $N = P$



Sistema (in anello chiuso)  
asintoticamente stabile

## Esempio 2

Funzione d'anello

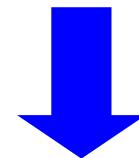


Dal grafico

$$L(s) = \frac{-0.1(1+10s)^2}{(1+s)^2}$$

$$P = 0$$

$$N = -1$$



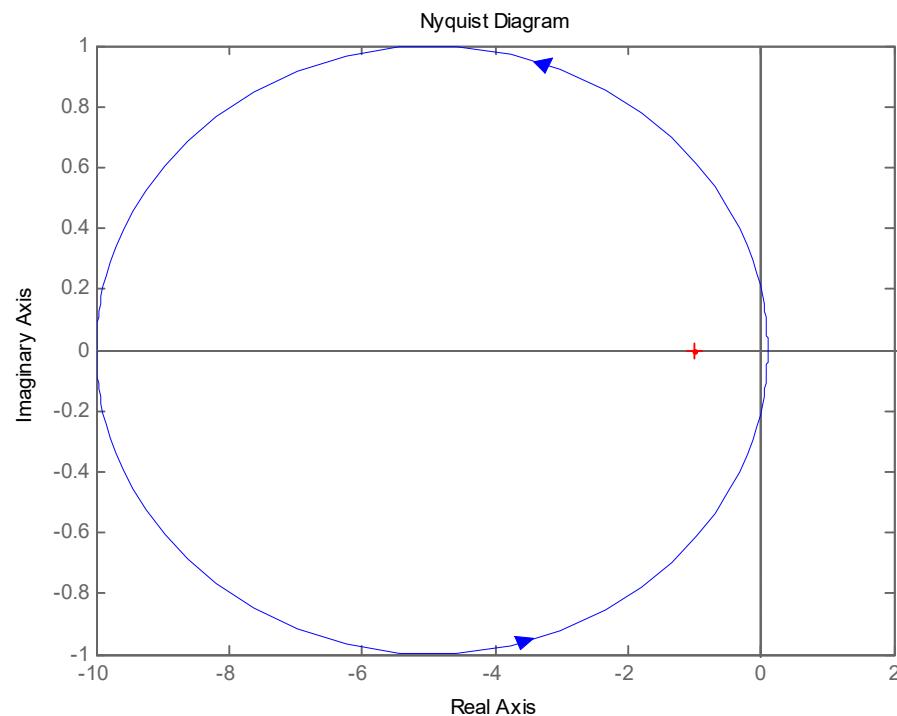
**Sistema (in anello chiuso)  
instabile**

## Esempio 3

Funzione d'anello

$$L(s) = \frac{0.1(1+10s)^2}{(1+s)(1-s)}$$

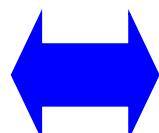
$$P = 1$$



Dal grafico

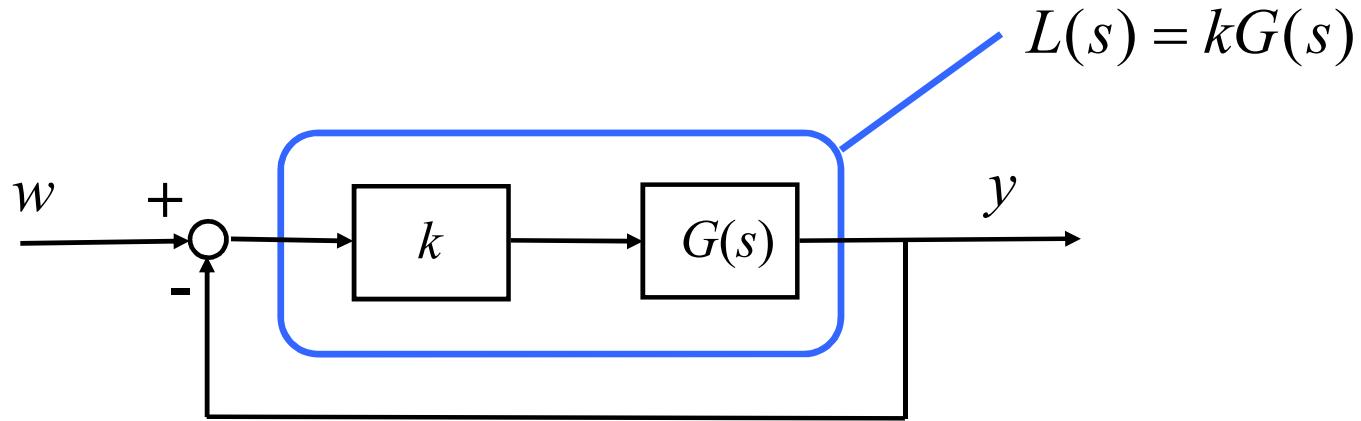
$$N = 1$$

$N$  ben definito  
 $N = P$



Sistema (in anello chiuso)  
asintoticamente stabile

## 4. Estensioni del criterio di Nyquist

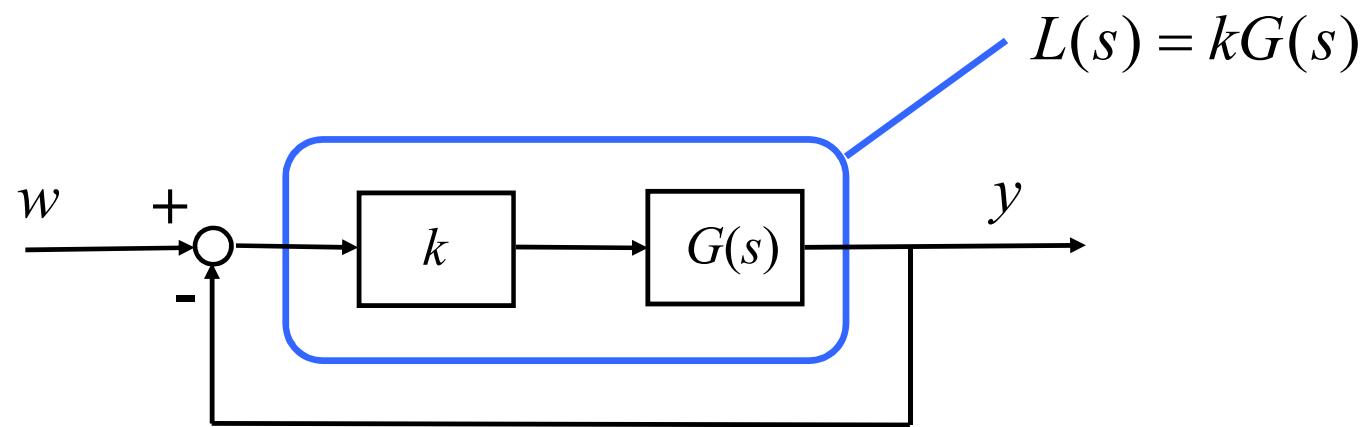


$\Gamma_L$  diagramma di Nyquist associato a  $L(s)$

$N_L$  numero di giri antiorari di  $\Gamma_L$  intorno al punto  $-1$

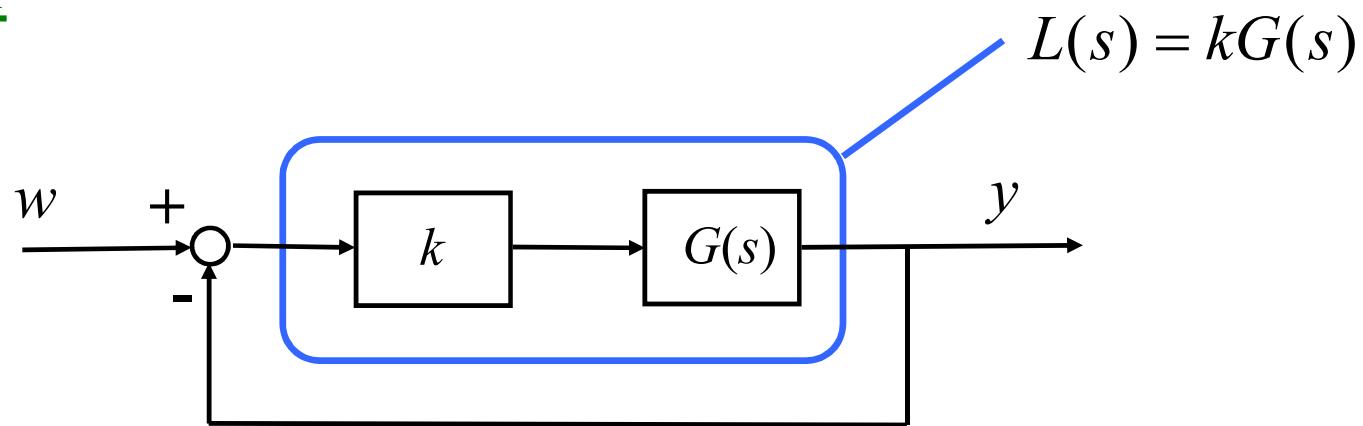
$P_L$  numero di poli di  $L(s)$  con  $\text{Re} > 0$

asintotica stabilità  $\longleftrightarrow \begin{cases} N_L \text{ ben definito} \\ N_L = P_L \end{cases}$



- Il diagramma di Nyquist associato a  $L(s)$  è identico a quello associato a  $G(s)$  a meno del fattore di scala  $k$
- I poli di  $L(s)$  coincidono con quelli di  $G(s)$

## Estensione 1

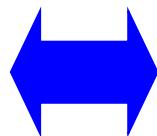


$\Gamma$  diagramma di Nyquist associato a  $(G(s))$

$N$  numero di giri antiorari di  $\Gamma$  intorno al punto  $(-1/k)$

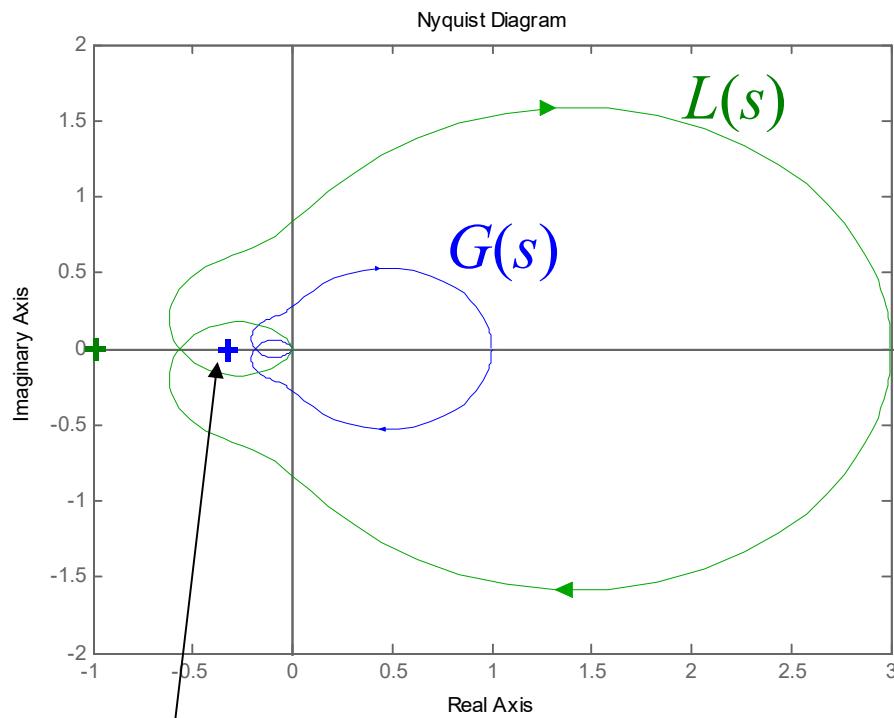
$P$  numero di poli di  $(G(s))$  con  $\text{Re} > 0$

asintotica stabilità



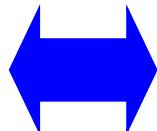
$\left\{ \begin{array}{l} N \text{ ben definito} \\ N = P \end{array} \right.$

## Esempio



$$-\frac{1}{k}$$

$N$  ben definito  
 $N = P$



Funzione d'anello

$$L(s) = 3 \cdot \frac{1}{(s^2 + 0.5s + 1)(10s + 1)}$$

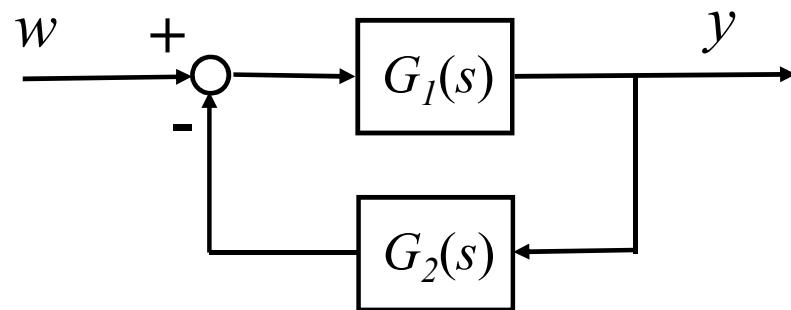
$P = 0$

Dal grafico

$$N = 0$$

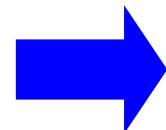
Sistema (in anello chiuso)  
asintoticamente stabile

## Estensione 2



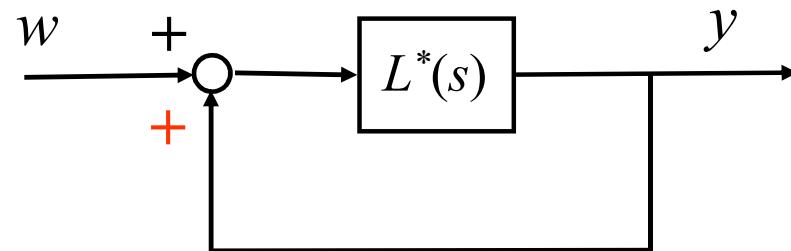
$$\frac{Y(s)}{W(s)} = F(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

$\underbrace{1 + G_1(s)G_2(s)}_{L(s)}$

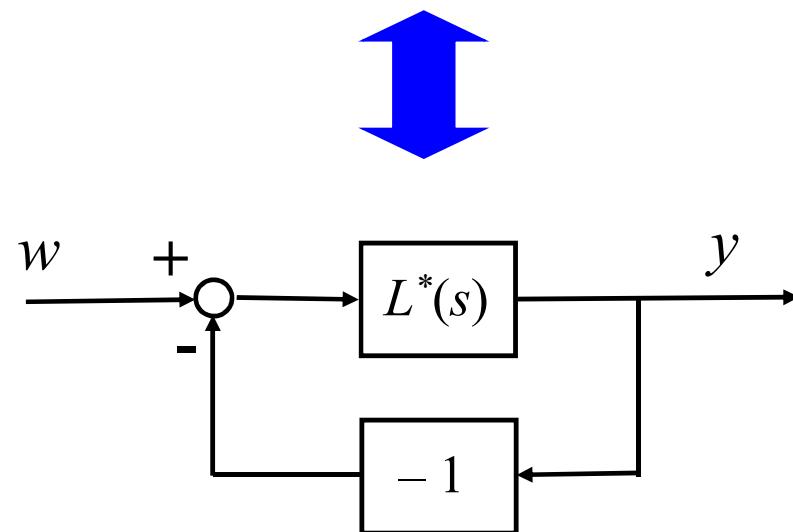


tutto invariato, con riferimento a  $L(s)$

Si consideri il seguente sistema



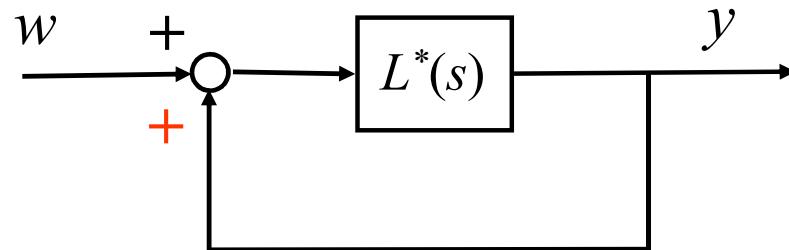
**retroazione positiva**



retroazione negativa  
con  $L(s) = -L^*(s)$   
ovvero

$$L(s) = k L^*(s)$$
$$k = -1$$

## Estensione 3



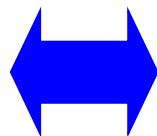
**retroazione positiva**

$\Gamma$  diagramma di Nyquist associato a  $L^*(s)$

$N$  numero di giri antiorari di  $\Gamma$  intorno al punto  $(+1)$

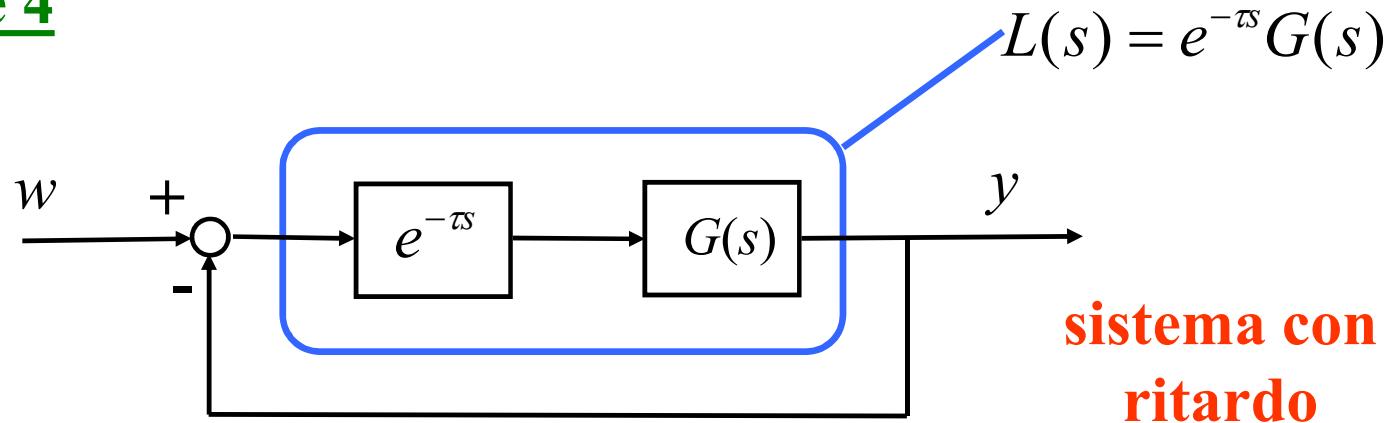
$P$  numero di poli di  $L^*(s)$  con  $\text{Re} > 0$

asintotica stabilità



$\left\{ \begin{array}{l} N \text{ ben definito} \\ N = P \end{array} \right.$

## Estensione 4



$\Gamma$  diagramma di Nyquist associato a  $L(s)$

$N$  numero di giri antiorari di  $\Gamma$  intorno al punto  $-1$

$P$  numero di poli di  $(G(s))$  con  $\text{Re} > 0$

stabilità esterna  $\longleftrightarrow \begin{cases} N \text{ ben definito} \\ N = P \end{cases}$

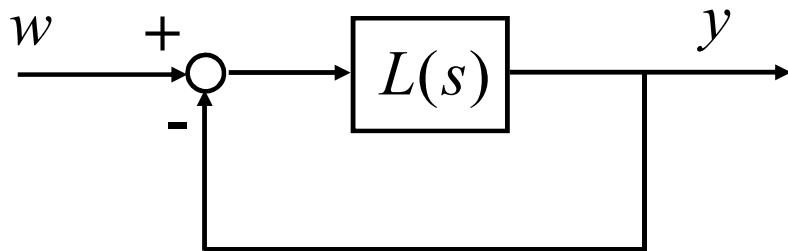
# Lezione 19. Stabilità robusta

# Schema

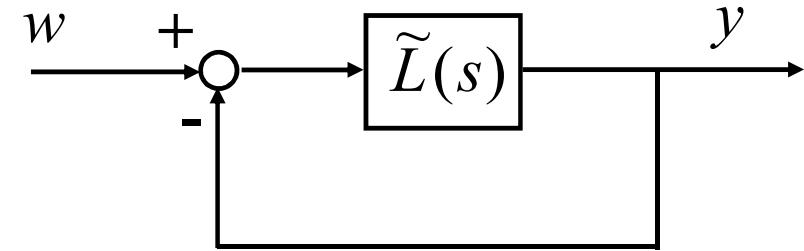
1. Stabilità & incertezza
2. Indicatori di stabilità robusta
3. Margine di guadagno
4. Margine di fase
5. Criterio di Bode
6. Sistemi a fase minima

# 1. Stabilità di sistemi retroazionati incerti

modello nominale



modello “vero”



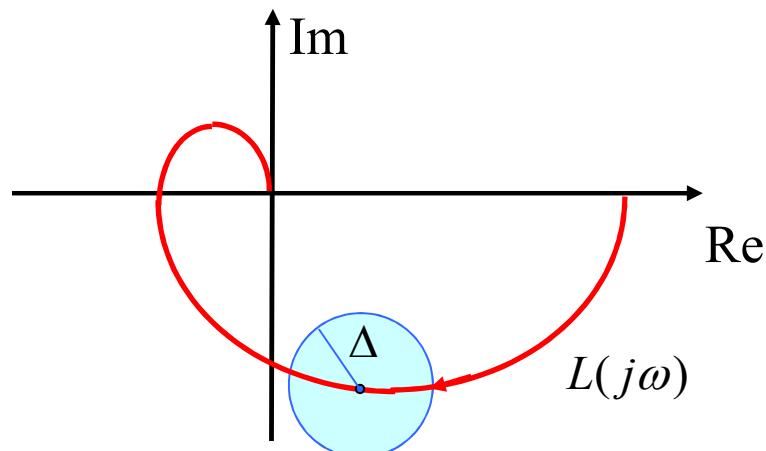
in generale  $\tilde{L}(s) \neq L(s)$

**stabilità robusta** = garanzia di stabilità anche  
in presenza di incertezza

## Esempi di tipici modelli dell'incertezza

- incertezza additiva limitata in modulo

$$\tilde{L}(s) = L(s) + \delta L(s) \quad |\delta L(j\omega)| \leq \Delta$$



- incertezza sul guadagno della funzione d'anello

$$\tilde{L}(s) = k L(s) \quad 0 < k \leq \bar{k}$$

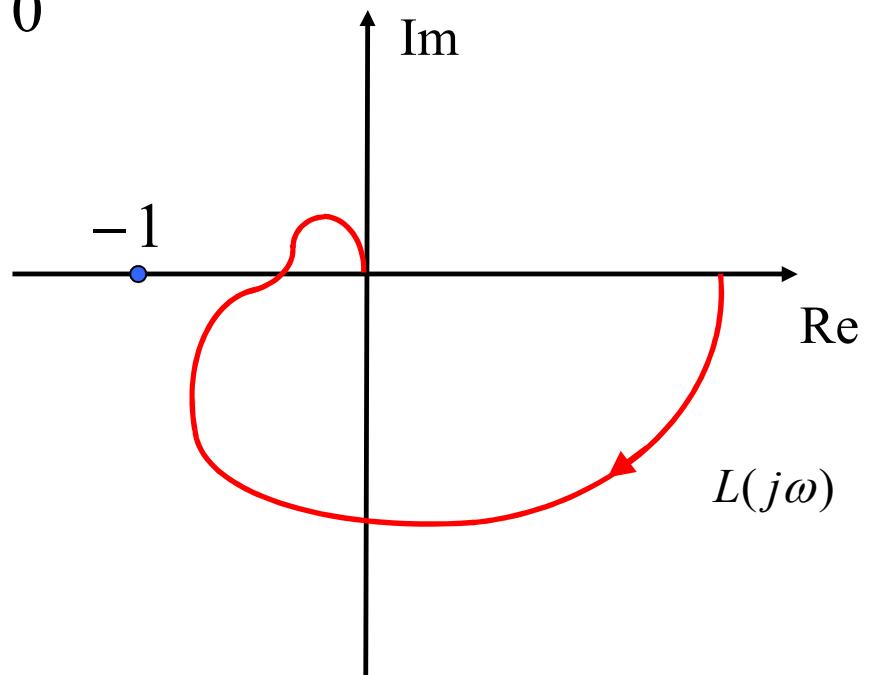
## 2. Indicatori di stabilità robusta

Sono parametri che misurano:

- l'ampiezza delle perturbazioni per cui è garantita la stabilità
- la “distanza” del modello nominale dall’instabilità

## Ipotesi

- modello nominale asintoticamente stabile in anello chiuso
- $L(s)$  non ha poli con  $\text{Re} > 0$



Per il Criterio di Nyquist

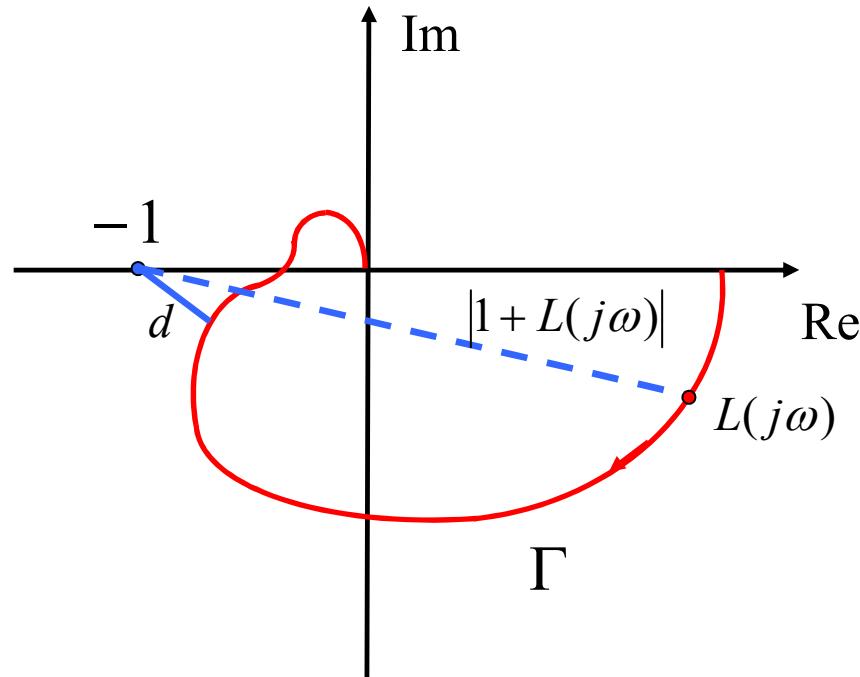
asintotica stabilità  $\iff N = 0$

## Un indicatore di robustezza

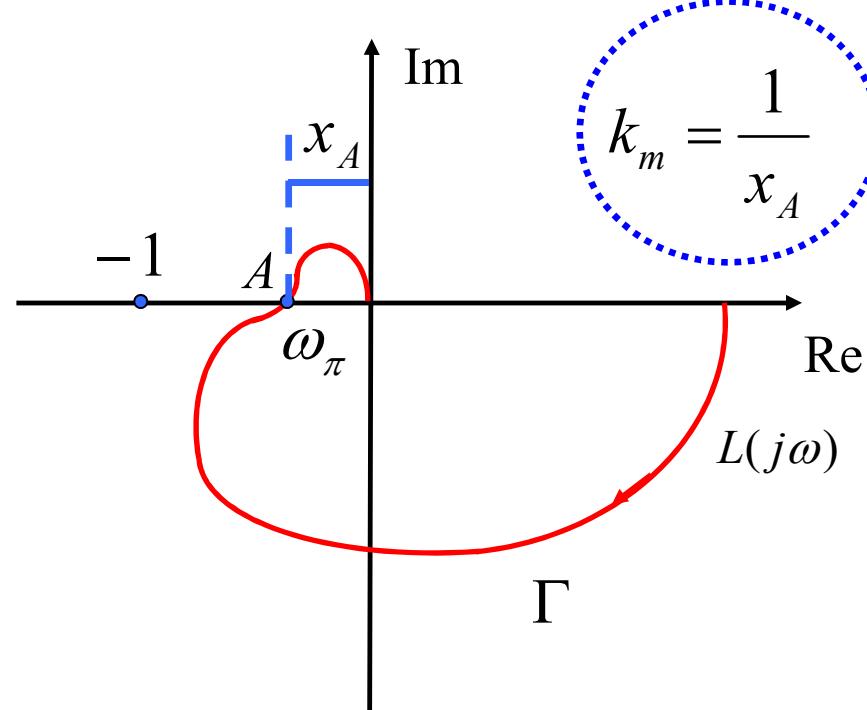
### Margine di stabilità vettoriale

$d$  distanza di  $\Gamma$  dal punto  $-1$

$$d = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$$



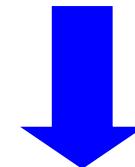
### 3. Margine di guadagno



Se  $k_m > 1$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile

Sia  $\omega_\pi$  la pulsazione per cui  
 $\arg L(j\omega_\pi) = -180^\circ$

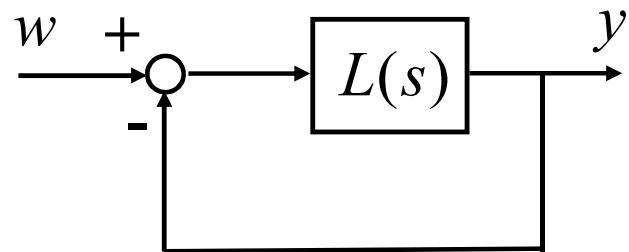
Allora  $x_A = |L(j\omega_\pi)|$



$$k_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$$

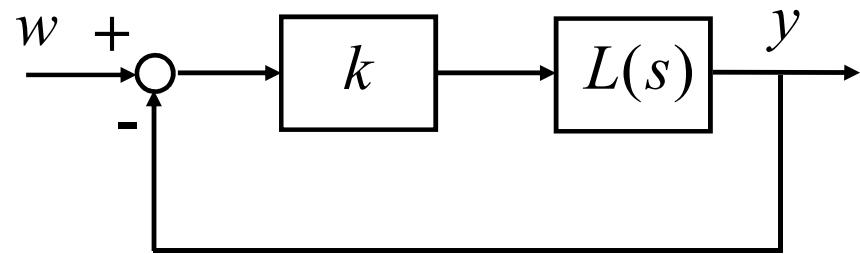
## Interpretazione

modello nominale



$$k_m > 1  
(\text{quindi } x_A < 1)$$

modello “vero”



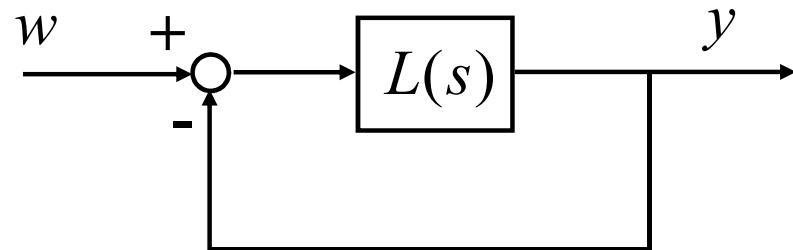
E' asintoticamente stabile  
per tutti i valori di  $k$  tali che

$$0 < k < k_m$$

(infatti bisogna guardare i giri intorno  
a  $-\frac{1}{k}$  e  $\frac{1}{k} > \frac{1}{k_m} = x_A$ )

$k_m$  è un indicatore di robustezza rispetto a  
incertezze sul guadagno d'anello

## Esempio

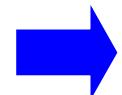


$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^3}$$

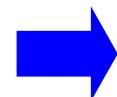
Calcolare analiticamente il margine di guadagno

Si calcoli  $\omega_\pi$

$$\arg L(j\omega_\pi) = -180^\circ$$



$$-3\arctg(\omega_\pi) = -180^\circ$$



$$\omega_\pi = \tan(60^\circ) = \sqrt{3} \text{ rad/s}$$

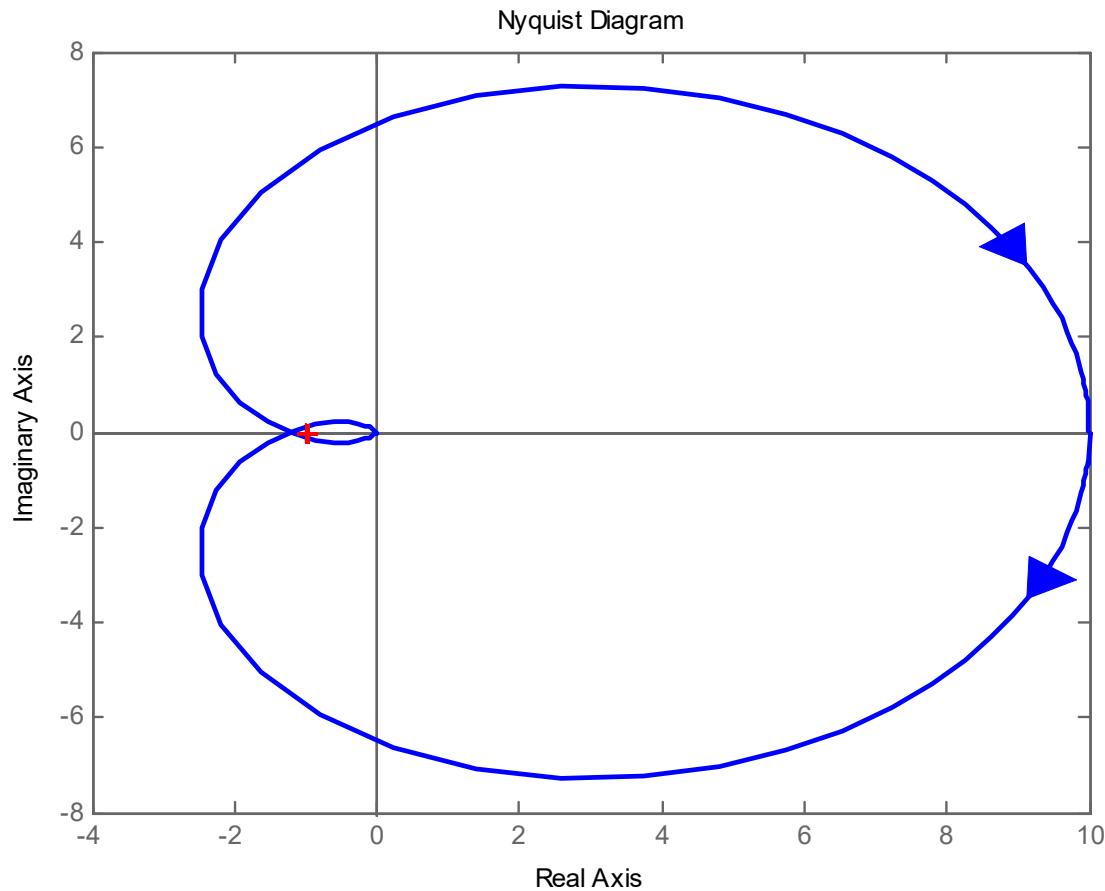
Si valuti il margine di guadagno

$$k_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = \frac{|1 + j\omega_\pi|^3}{10} = \frac{(\sqrt{1+3})^3}{10} = \frac{4}{5}$$

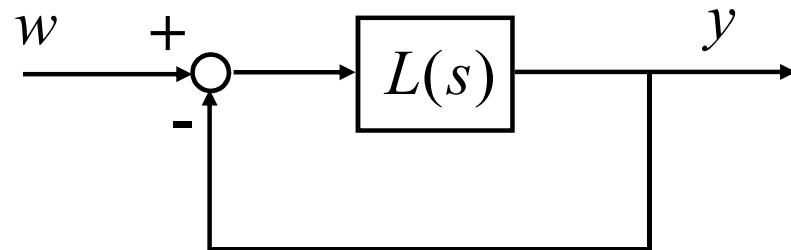
$$k_m < 1$$

Sistema instabile

Tracciando il diagramma di Nyquist si può avere conferma del risultato ottenuto.



## Esempio

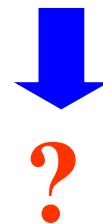


$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+5s)(1+15s)}$$

Calcolare analiticamente il margine di guadagno

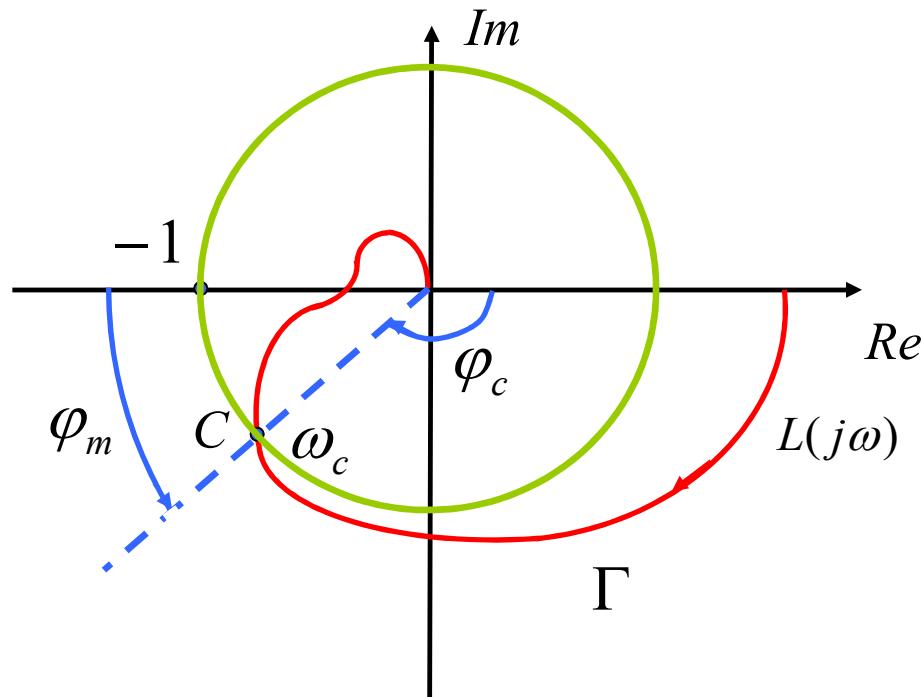
Si calcoli  $\omega_\pi$

$$\arg L(j\omega_\pi) = -180^\circ \rightarrow -\arctg(\omega_\pi) - \arctg(5\omega_\pi) - \arctg(15\omega_\pi) = -180^\circ$$



**Non è sempre possibile calcolare analiticamente  
il margine di guadagno**

## 4. Margine di fase



Sia  $\omega_c$  la pulsazione per cui

$$|L(j\omega_c)| = 1$$

$\omega_c$  si dice **pulsazione critica**

Sia  $\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$

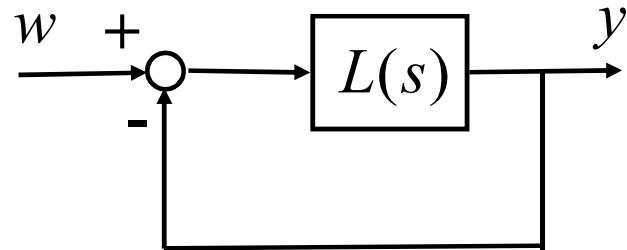
$\varphi_c$  si dice **fase critica**

Si definisce margine di fase

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$$

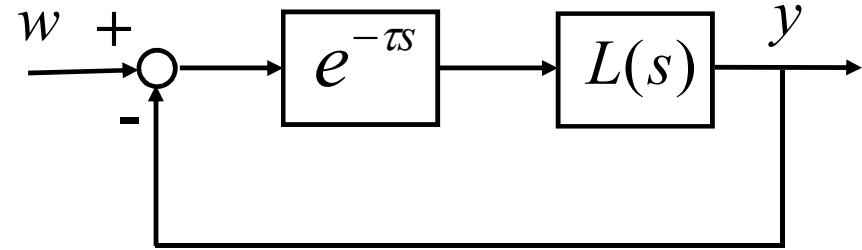
## Interpretazione

modello nominale



$$\varphi_m > 0^\circ$$

modello “vero”



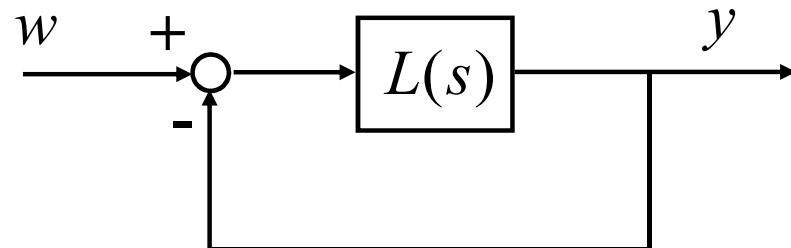
asintoticamente stabile

$$\omega_c \tau < \varphi_m \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\text{ovvero } \tau < \frac{\varphi_m}{\omega_c} \frac{\pi}{180^\circ}$$

$\varphi_m$  è un indicatore di robustezza rispetto a incertezze sul ritardo d’anello

## Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+2s)}$$

Calcolare analiticamente il margine di fase

Si calcoli  $\omega_c$

$$|L(j\omega_c)| = 1 \rightarrow \frac{10}{|1 + j\omega_c||1 + j2\omega_c|} = 1 \rightarrow \sqrt{1 + \omega_c^2} \sqrt{1 + 4\omega_c^2} = 10$$

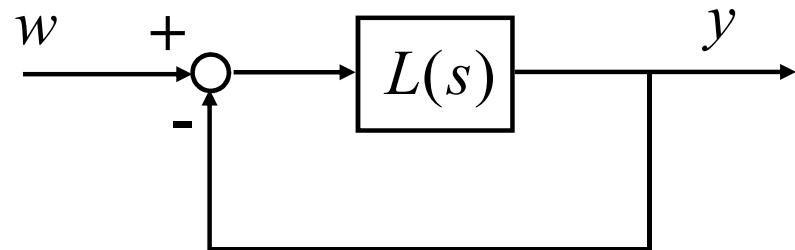
$$\rightarrow 4\omega_c^4 + 5\omega_c^2 + 1 = 100 \rightarrow \omega_c \approx 2.095 \text{ rad/s}$$

Si valuti il margine di fase

$$\varphi_c = \arg L(j\omega_c) = -\arctg(\omega_c) - \arctg(2\omega_c) \approx -64.5^\circ - 76.6^\circ = -141.1^\circ$$

$\varphi_m = 38.9^\circ$  Sistema asintoticamente stabile

## Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^3(1+5s)}$$

Calcolare analiticamente il margine di fase

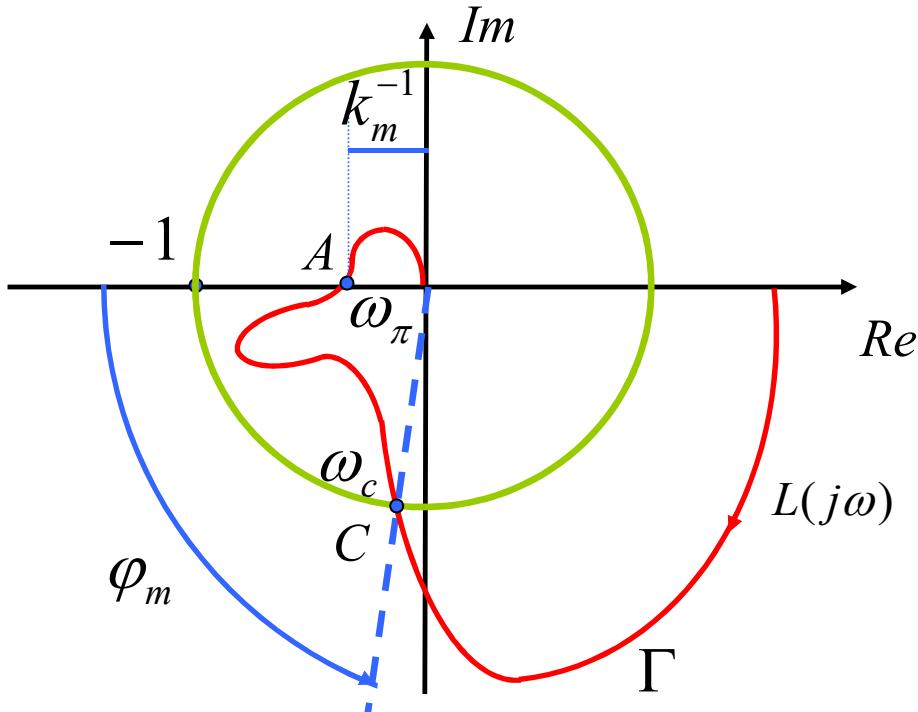
Si calcoli  $\omega_c$

$$|L(j\omega_c)| = 1 \rightarrow \frac{10}{|1+j\omega_c|^3 |1+j5\omega_c|} = 1 \rightarrow \left(\sqrt{1+\omega_c^2}\right)^3 \sqrt{1+25\omega_c^2} = 10$$

$$\rightarrow (\omega_c^2 + 1)^3 (25\omega_c^2 + 1) = 100 \rightarrow ?$$

**Non è sempre possibile calcolare analiticamente  
il margine di fase**

## Caso particolare 1

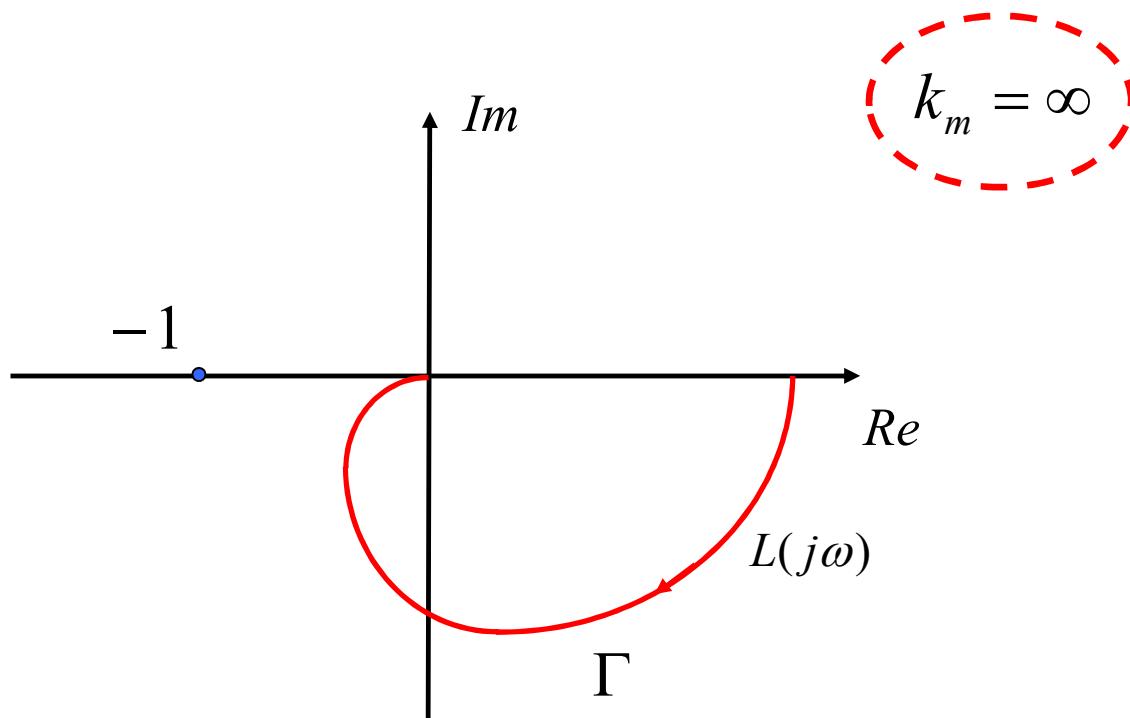


$$k_m \gg 1$$

ma il sistema è assai poco robusto

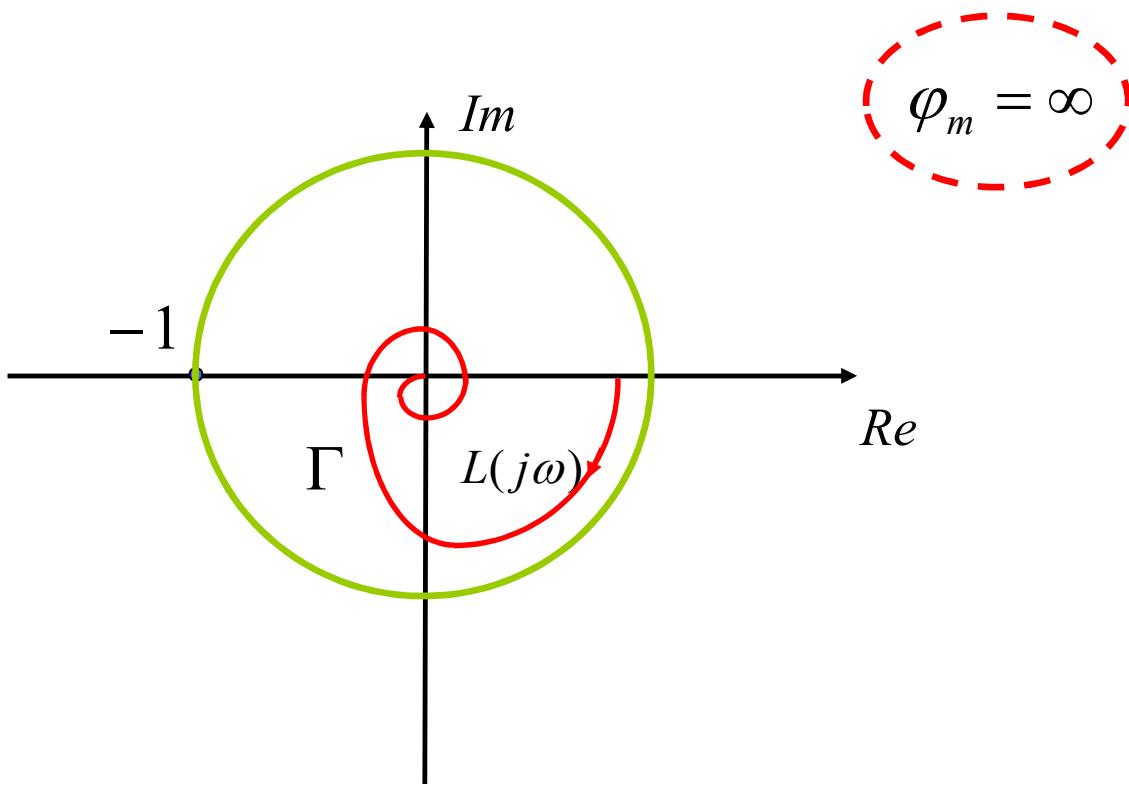
$$\varphi_m > 0^\circ$$

## Caso particolare 2



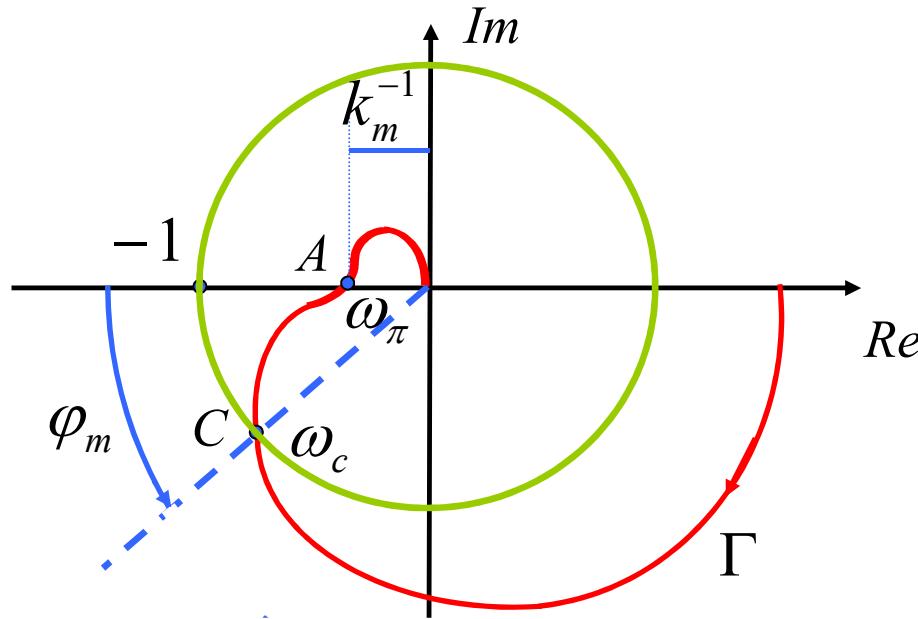
$$|\arg L(j\omega)| < 180^\circ, \forall \omega$$

## Caso particolare 3



$$|L(j\omega)| < 1, \forall \omega$$

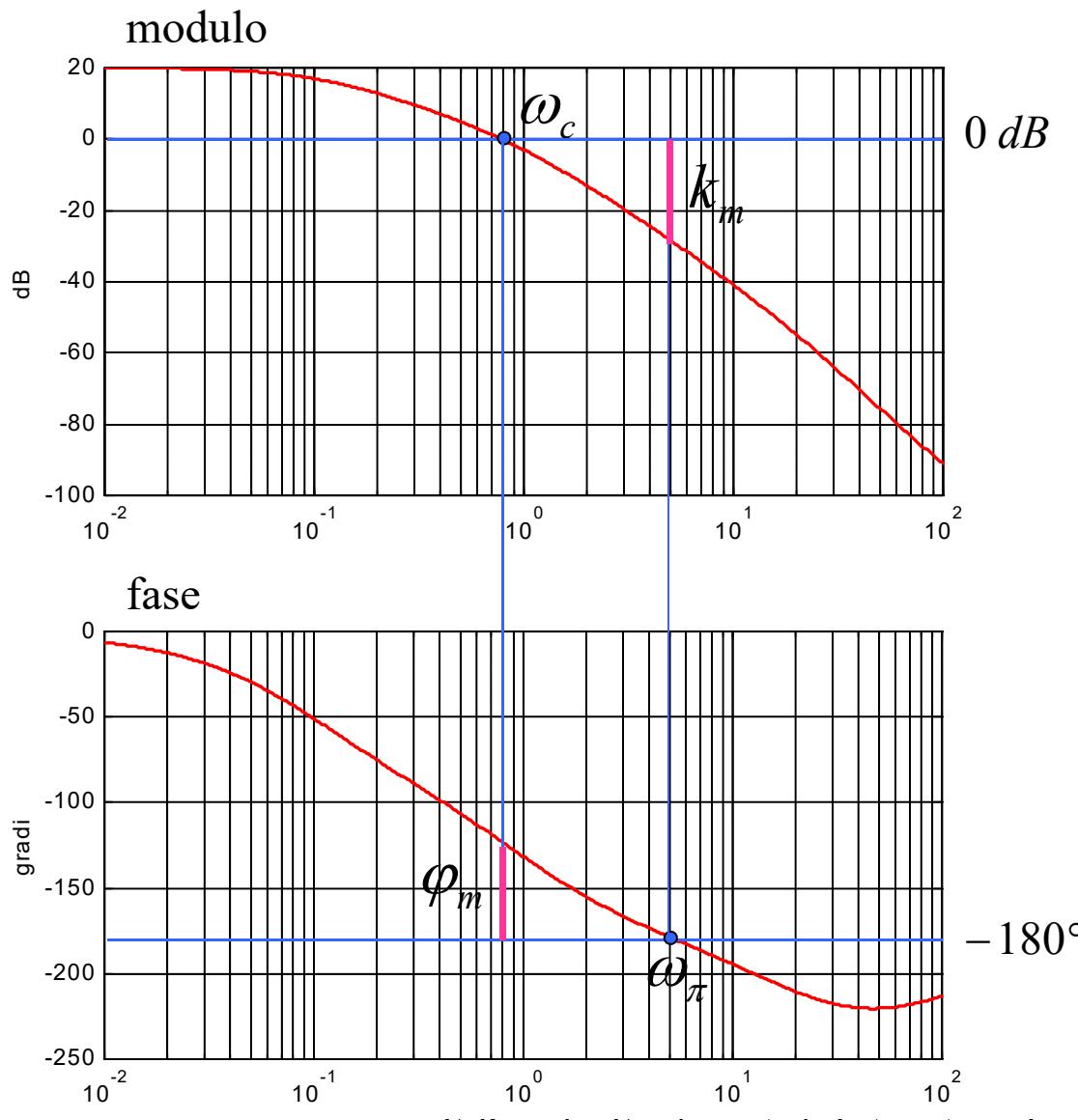
## Riassumendo



**margine di guadagno**  $k_m = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$  ,  $\arg L(j\omega_\pi) = -180^\circ$

**margine di fase**  $\varphi_m = 180^\circ - |\arg L(j\omega_c)|$  ,  $|L(j\omega_c)|_{dB} = 0 \text{ dB}$

## Valutazione dai diagrammi di Bode



margine di guadagno

$$\omega_\pi \cong 5 \text{ rad/s}$$

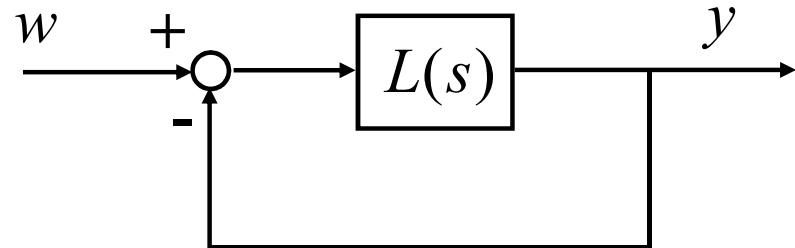
$$k_m \cong 30 \text{ dB} = \\ = 10^{\frac{30}{20}} \cong 32$$

margine di fase

$$\omega_c \cong 0.8 \text{ rad/s}$$

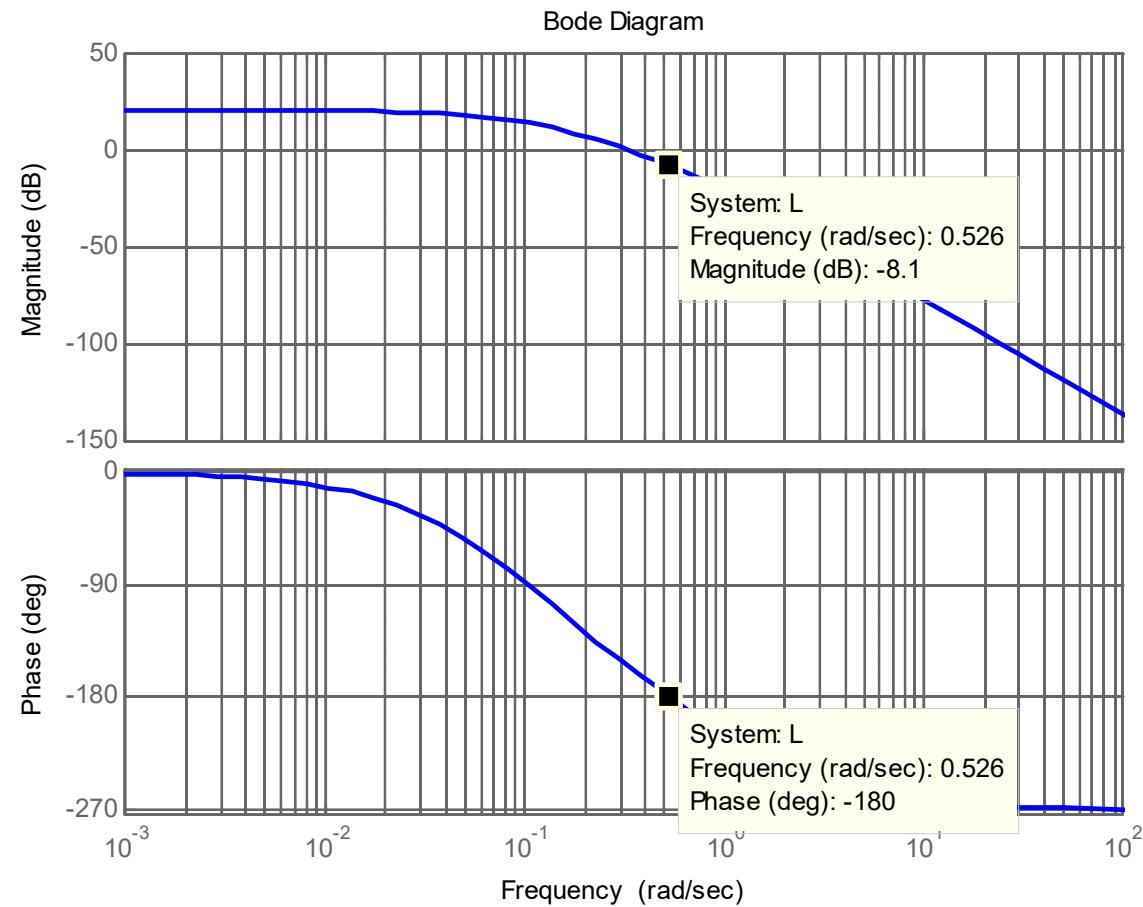
$$\varphi_m \cong 60^\circ$$

## Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+5s)(1+15s)}$$

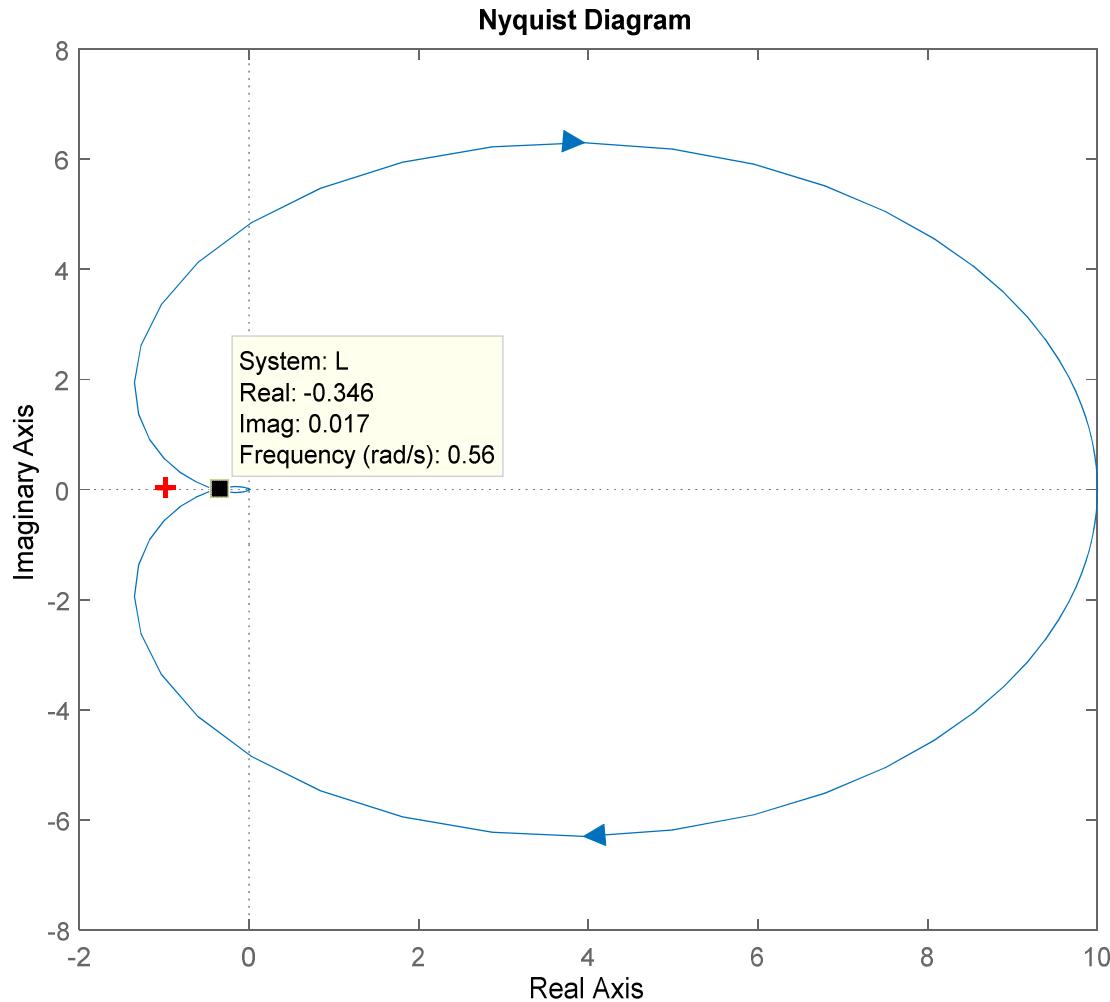
Usando i diagrammi di Bode, valutare approssimativamente il **margine di guadagno** del sistema retroazionato.



$$\omega_\pi \cong 0.526 \text{ rad/s}$$

$$k_m \cong 8.1 \text{ dB} \cong 2.54$$

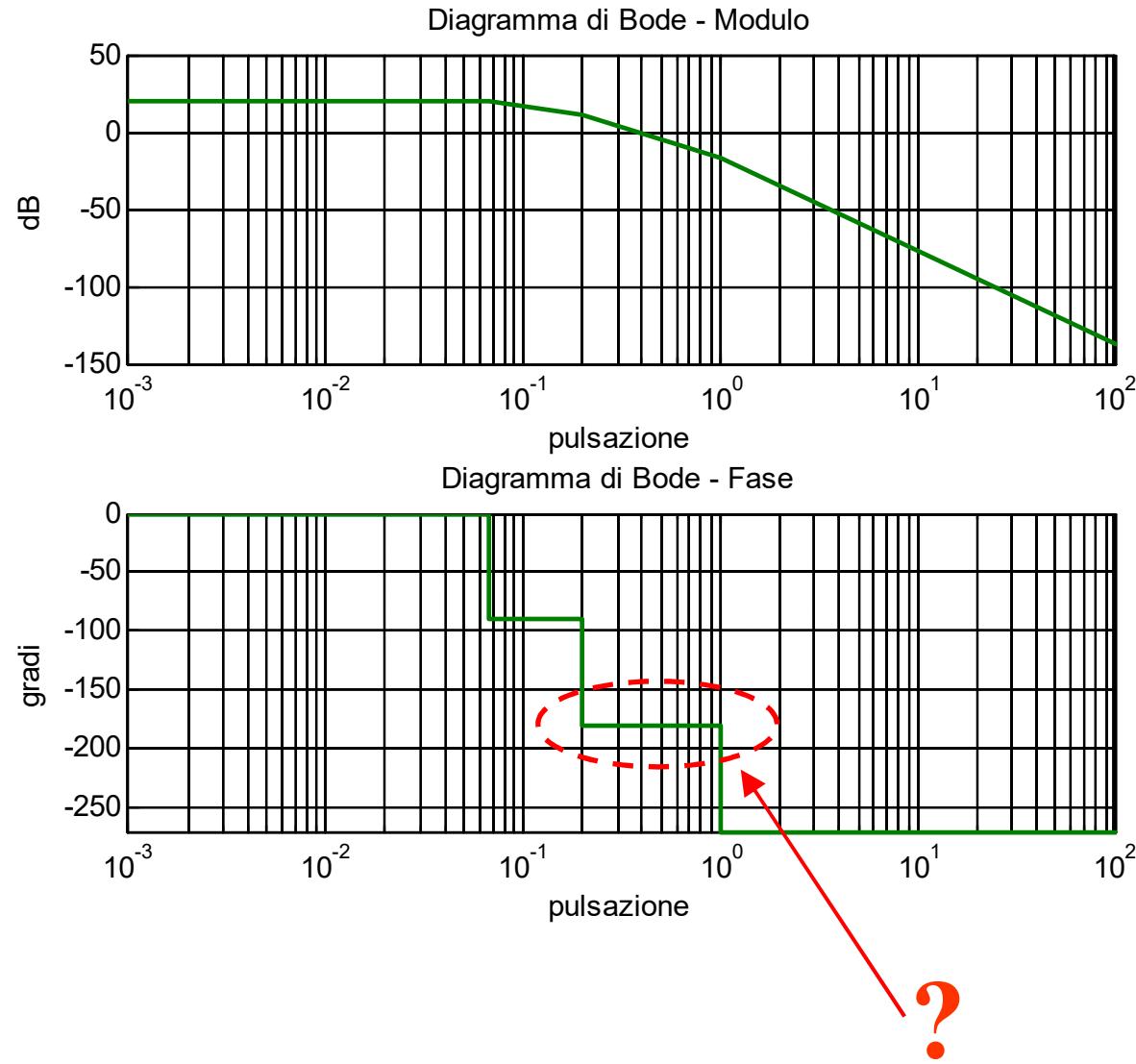
Tracciando il diagramma di Nyquist si può avere conferma del risultato ottenuto.



$$\omega_\pi \cong 0.56 \text{ rad/s}$$

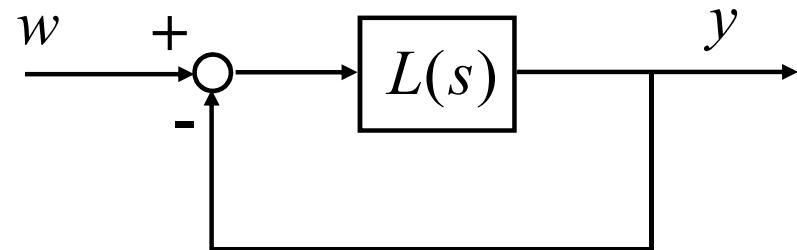
$$k_m \cong \frac{1}{0.346} \cong 2.89$$

Ripetere il calcolo usando i diagrammi di Bode asintotici.



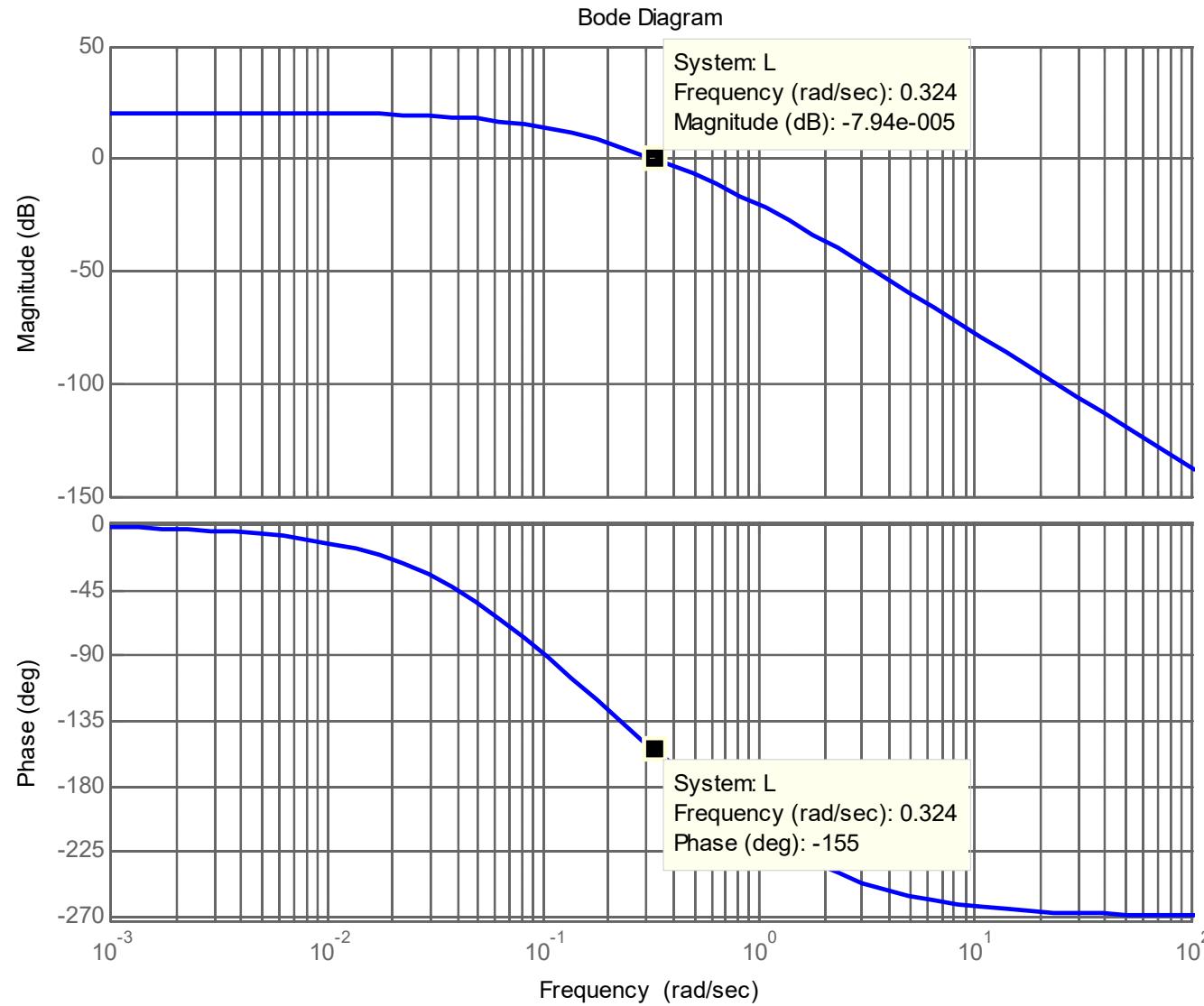
E' difficile ricavare il  
valore di  $\omega_\pi$  dal  
diagramma asintotico

## Esempio



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+5s)(1+15s)}$$

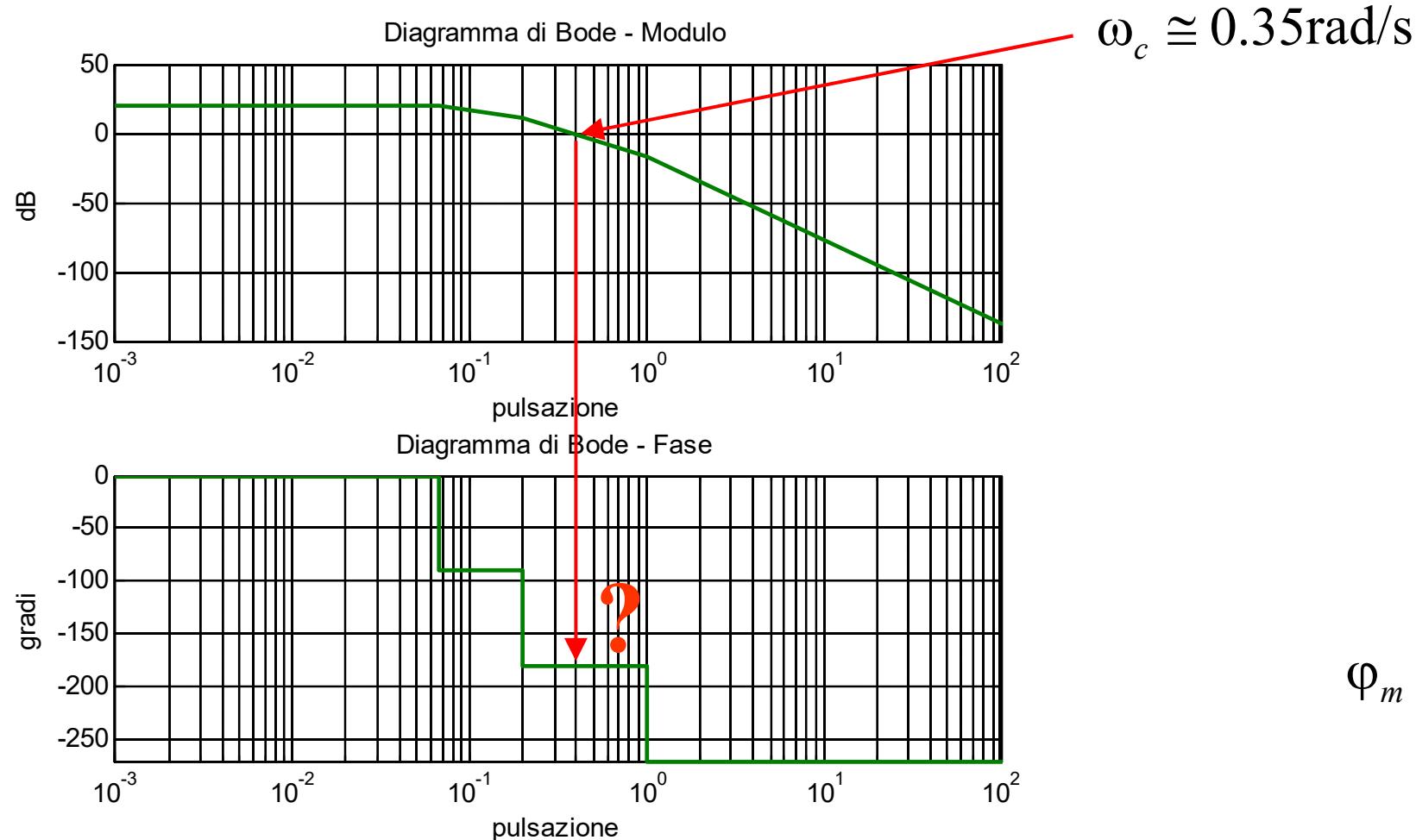
Usando i diagrammi di Bode, valutare approssimativamente il **margine di fase** del sistema retroazionato.



$$\omega_c \cong 0.324 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m \cong 25^\circ$$

Ripetere il calcolo usando i diagrammi di Bode asintotici.

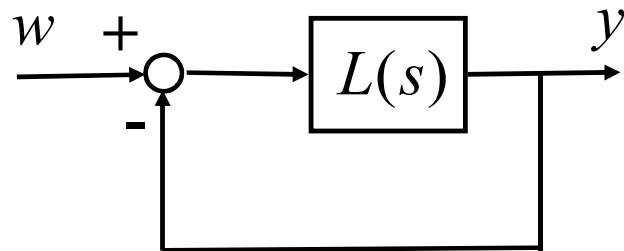


E' però possibile calcolare analiticamente la fase critica  $\varphi_c$

$$\varphi_c = -\arctg(\omega_c) - \arctg(5\omega_c) - \arctg(15\omega_c) =$$

$$= -\arctg(0.35) - \arctg(1.75) - \arctg(5.25) = -19.3^\circ - 60.2^\circ - 79.2^\circ = -158.7^\circ$$

## 5. Criterio di Bode



### Condizioni di applicabilità

- $P = 0$
- il diagramma di Bode del modulo associato a  $L(s)$  attraversa una sola volta l'asse a  $0 \text{ dB}$

$\varphi_m$  margine di fase

$\mu$  guadagno d'anello

asintotica stabilità  
del sistema retroazionato  $\longleftrightarrow \begin{cases} \mu > 0 \\ \varphi_m > 0^\circ \end{cases}$

## Dimostrazione

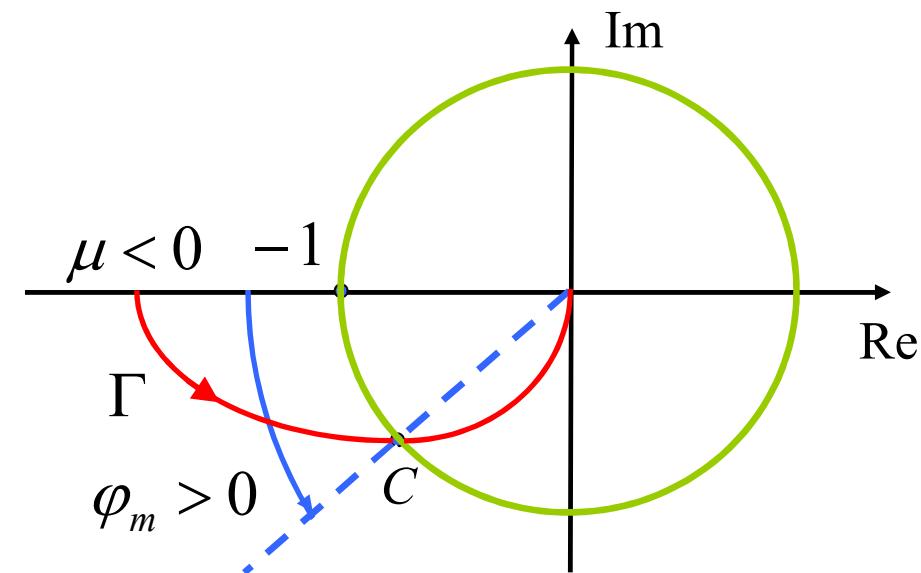
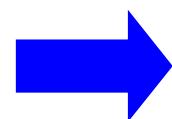
nelle ipotesi fatte

$$\left. \begin{array}{l} \mu > 0 \\ \varphi_m > 0 \end{array} \right\} \quad \leftrightarrow \quad N = 0 = P$$

asintotica stabilità

Perché  $\mu > 0$  ?

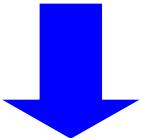
Per escludere casi  
di questo tipo



## 6. Criterio di Bode (approssimato) per sistemi a fase minima

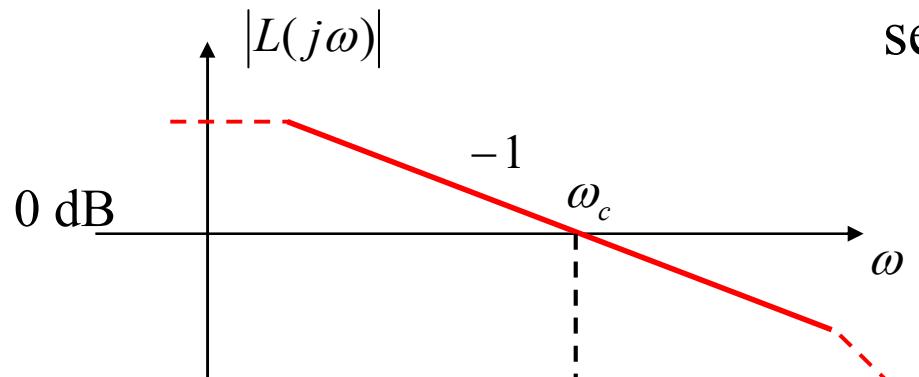
$L(s)$  a fase minima

- poli e zeri hanno  $\text{Re} \leq 0$
- il guadagno  $\mu$  è positivo

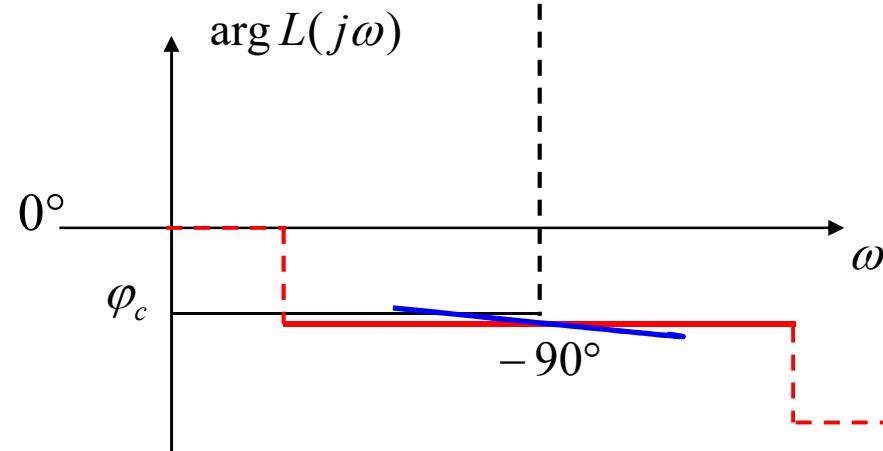
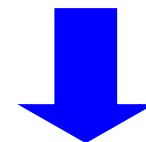


- la condizione  $\mu > 0$  è soddisfatta
- i diagrammi asintotici di Bode  
di modulo e fase hanno forti legami

(dove il modulo ha pendenza  $-k$  la fase vale circa  $-k 90^\circ$ )



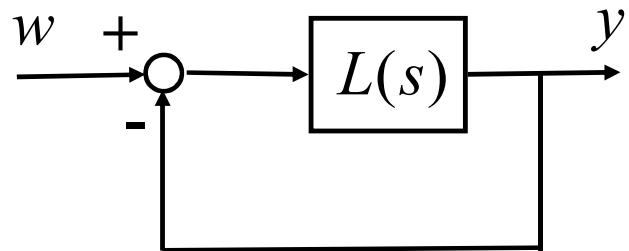
se l'attraversamento dell'asse a  $0 \text{ dB}$   
avviene con pendenza  $-1$   
(e se il tratto con tale pendenza  
è sufficientemente lungo)



$$\varphi_c \cong -90^\circ$$

$$\varphi_m \cong 90^\circ$$

## Esempio

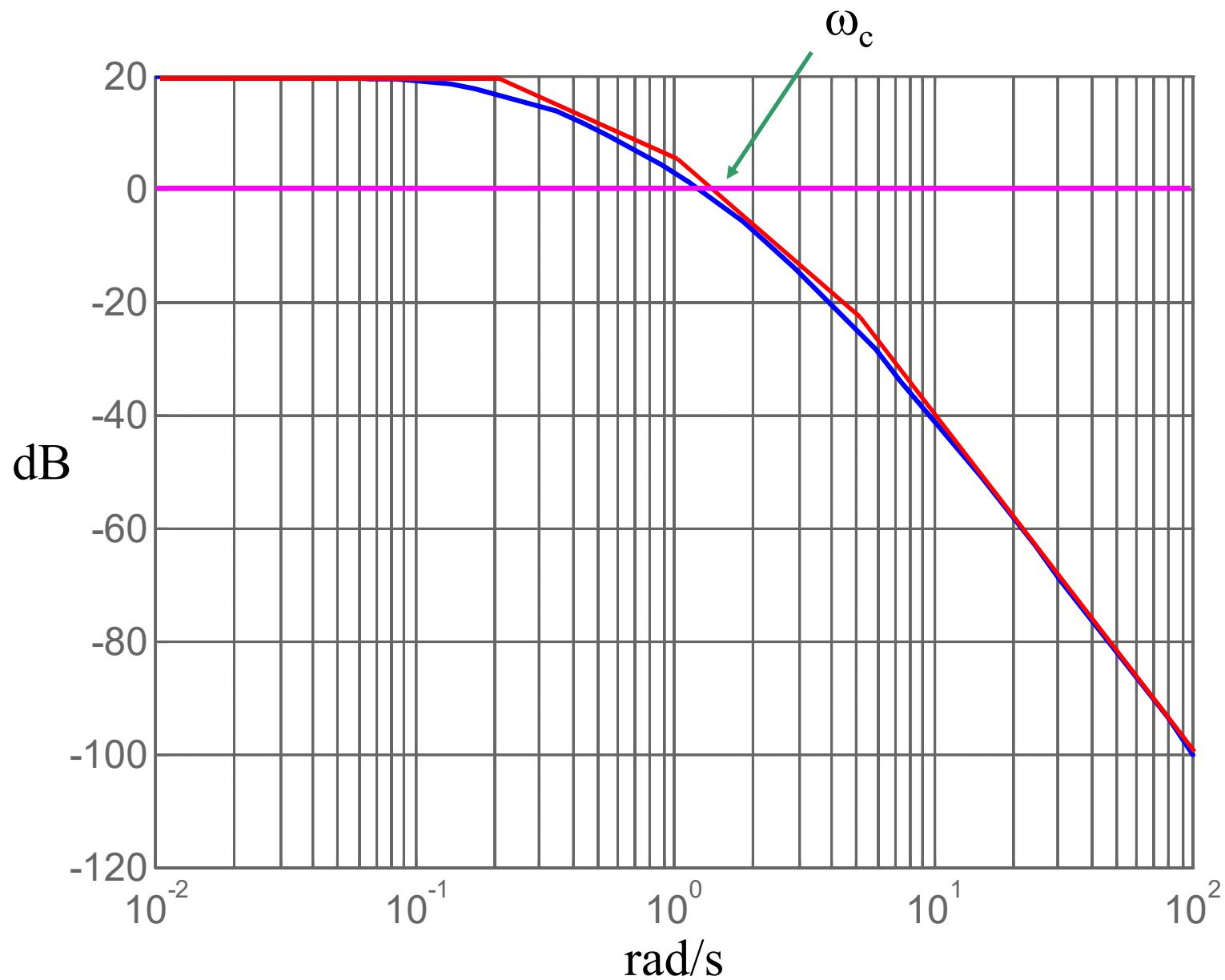


$$L(s) = \frac{10}{(1+5s)(1+s)(1+0.2s)}$$

Giudicare la stabilità mediante il criterio di Bode (se applicabile).

- $P = 0$
- il diagramma di Bode del modulo associato a  $L(s)$  attraversa una sola volta l'asse a  $0 \text{ dB}$

Il criterio di Bode è applicabile.

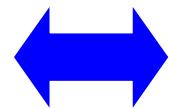


Dal grafico  $\omega_C \approx 1.4 \text{ rad/s}$

$$\begin{aligned}\varphi_C &= -\tan(5\omega_C) - \tan(\omega_C) - \tan(0.2\omega_C) = \\ &= -\tan(5 \cdot 1.4) - \tan(1.4) - \tan(0.2 \cdot 1.4) = \\ &= -\tan(7) - \tan(1.4) - \tan(0.28) = \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ &= -81.9^\circ - 54.5^\circ - 15.6^\circ = -152^\circ\end{aligned}$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |-152^\circ| = 28^\circ$$

asintotica stabilità



$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = 10 > 0 \\ \varphi_m = 28^\circ > 0 \end{array} \right.$$

Valori esatti :  $\omega_C = 1.2 \text{ rad/s}$   
 $\varphi_m = 35.1^\circ$

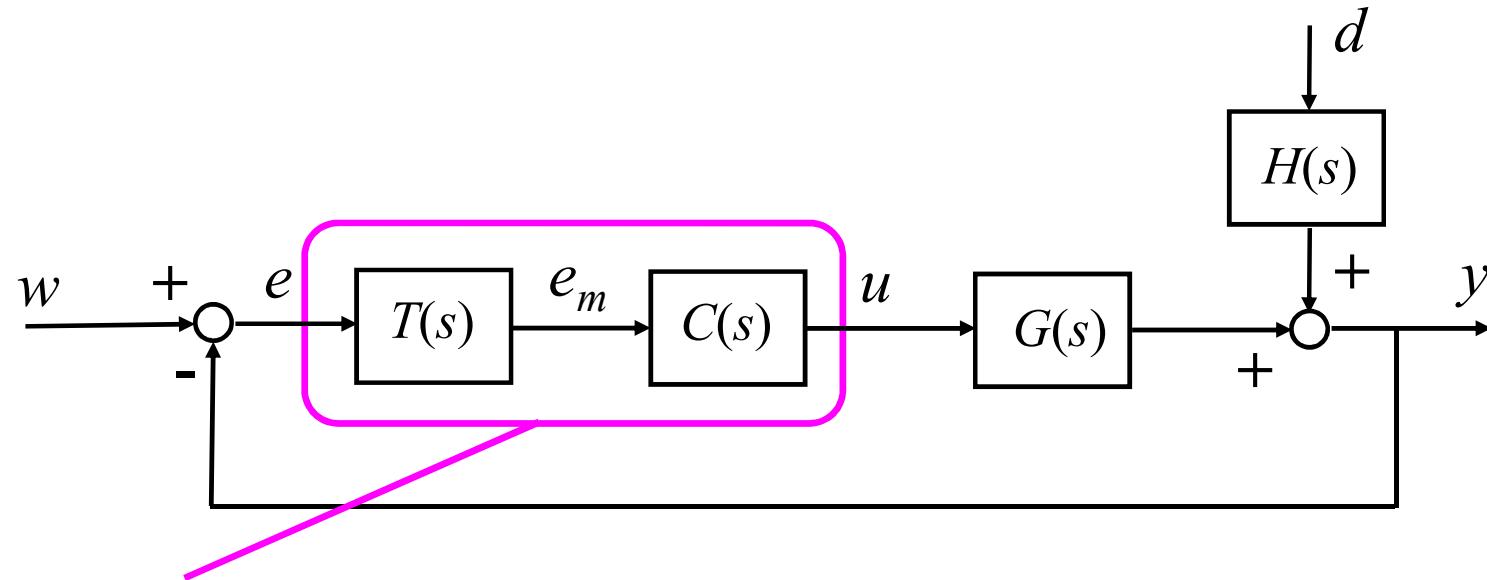
# Lezione 20. Analisi delle prestazioni di sistemi retroazionati (a)

## Introduzione

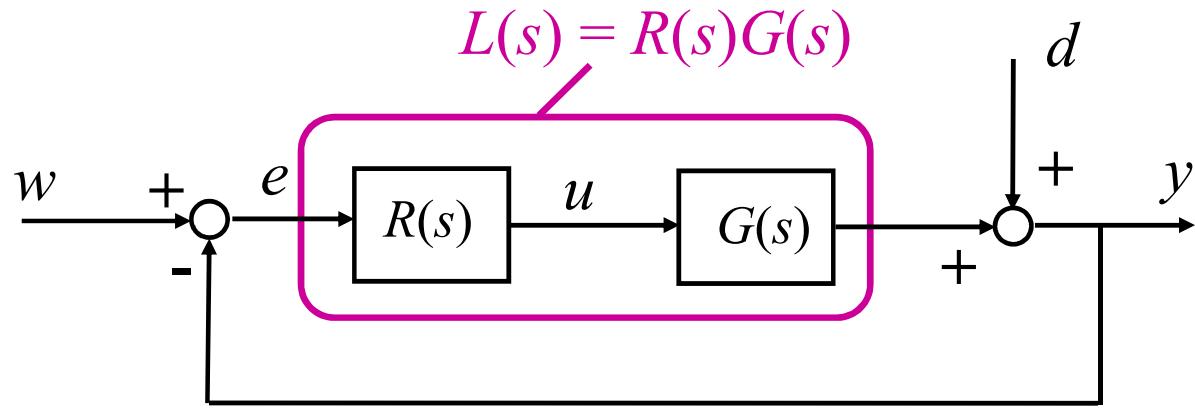
# Schema

1. Funzioni di trasferimento in anello chiuso
2. Funzioni di sensitività
3. Rappresentazioni equivalenti
4. Esempio

# 1. Funzioni di trasferimento in anello chiuso



per il momento supponiamo  $H(s) = 1$



$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \textcolor{blue}{F(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = \textcolor{red}{S(s)}$$

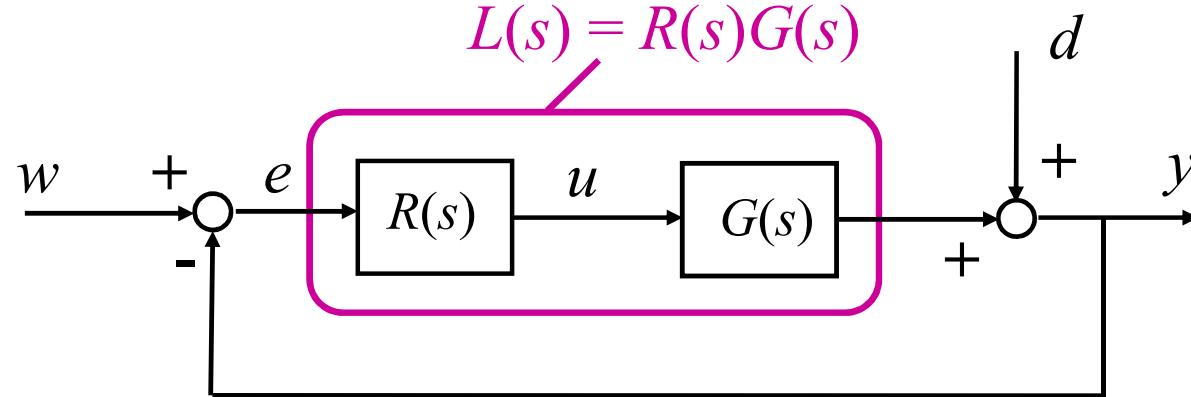
$$\frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = \textcolor{red}{S(s)}$$

$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-1}{1 + L(s)} = \textcolor{red}{-S(s)}$$

$$\frac{U(s)}{W(s)} = \frac{R(s)}{1 + L(s)} = \textcolor{green}{Q(s)}$$

$$\frac{U(s)}{D(s)} = \frac{-R(s)}{1 + L(s)} = \textcolor{green}{-Q(s)}$$

## 2. Funzioni di sensitività



$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

funzione di sensitività complementare

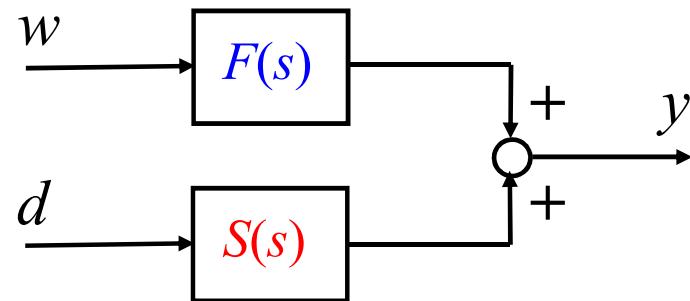
$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

funzione di sensitività

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$

funzione di sensitività del controllo

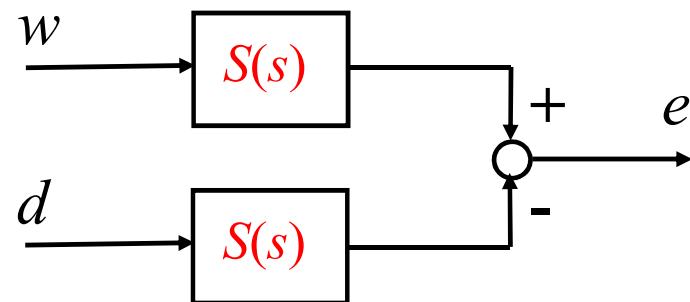
### 3. Rappresentazioni equivalenti



prestazioni  
ideali

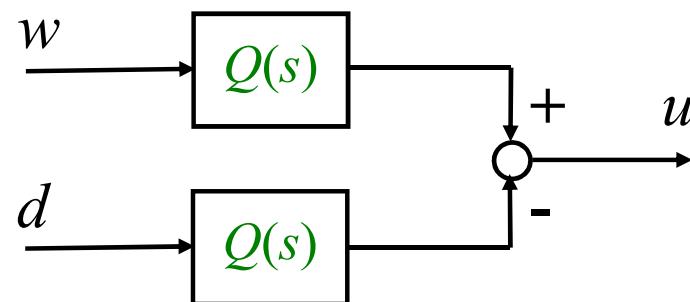
$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$\sim 1$



$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

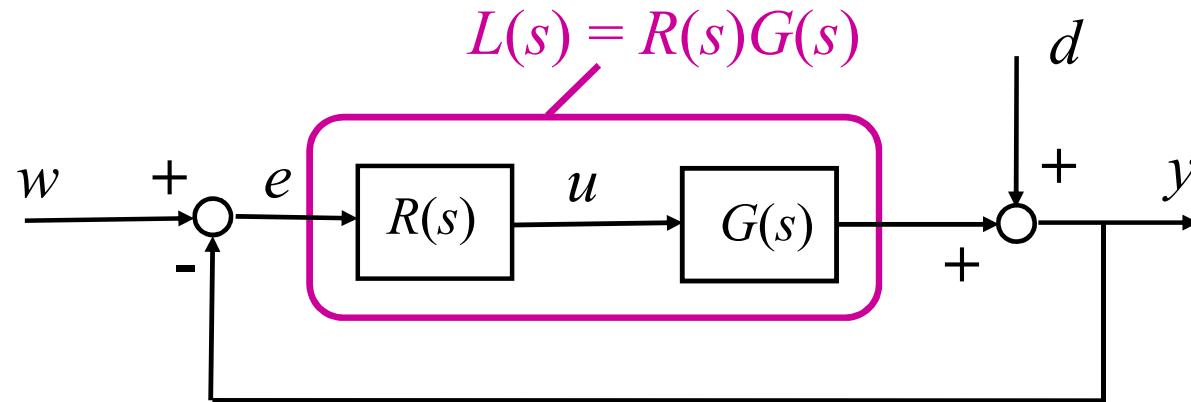
$\sim 0$



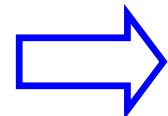
$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$

$\sim 0$

## Esempio



$$R(s) = \frac{10}{s}$$



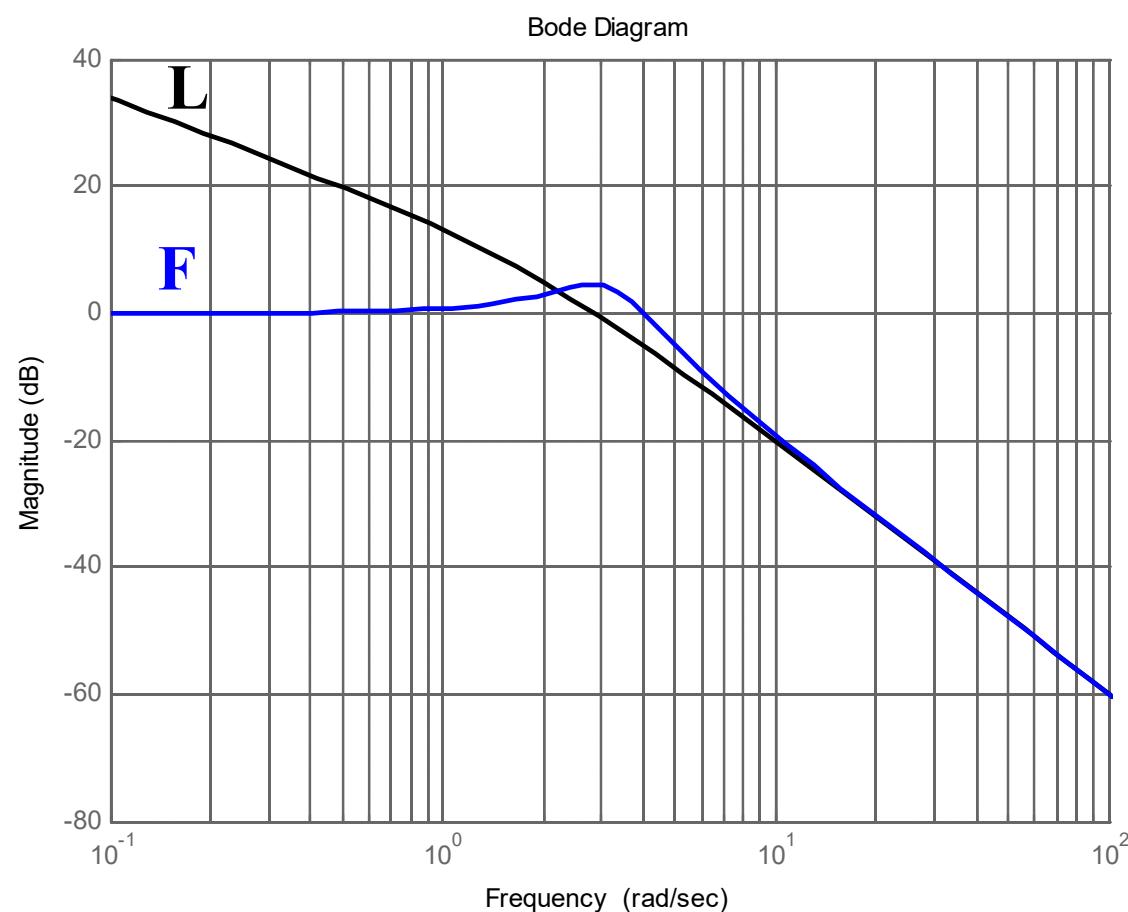
$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

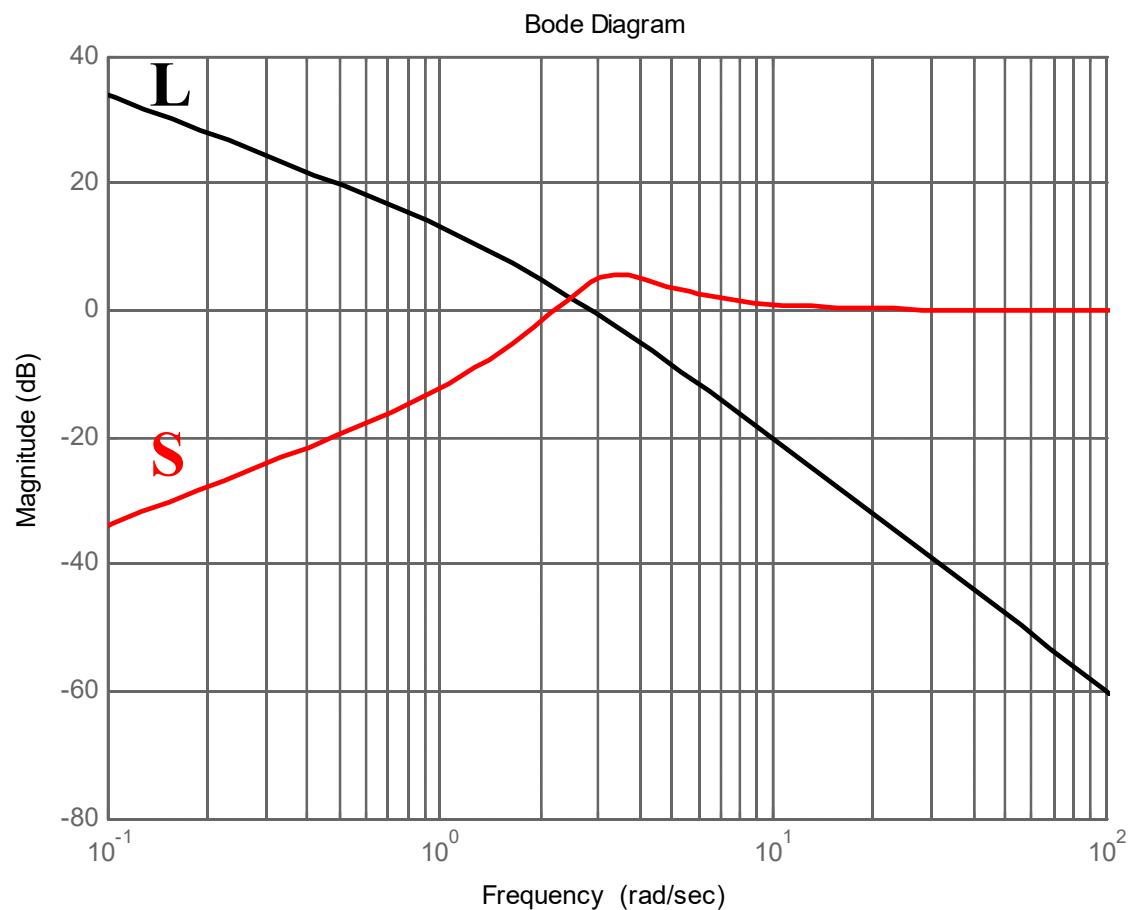
$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+2)}}{1+\frac{10}{s(s+2)}} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+\frac{10}{s(s+2)}} = \frac{s(s+2)}{s^2 + 2s + 10}$$

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{10}{s}}{1+\frac{10}{s(s+2)}} = \frac{10(s+2)}{s^2 + 2s + 10}$$





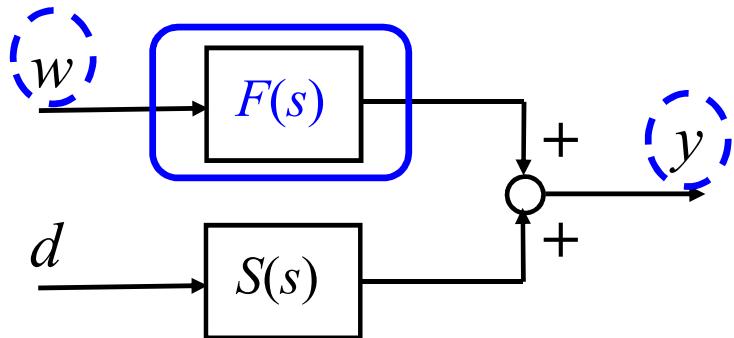
# Lezione 21. Analisi delle prestazioni di sistemi retroazionati (b)

## Sensitività complementare

# Schema

1. Analisi statica di  $F(s)$
2. Poli e zeri di  $F(s)$
3. Risposta in frequenza di  $F(s)$
4. Poli dominanti di  $F(s)$   
(valutazione approssimata dello smorzamento dei poli dominanti)
5. Esempi

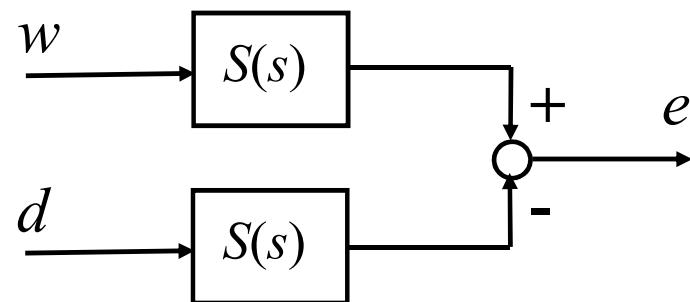
# Funzione di sensitività complementare



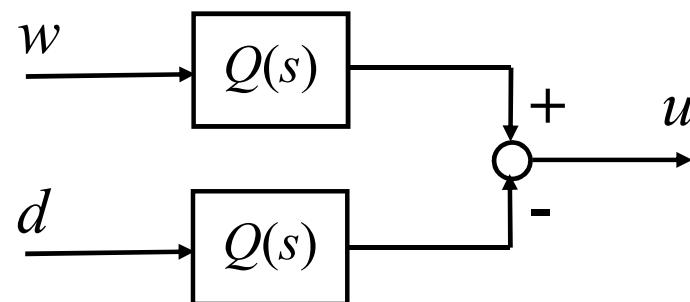
$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

prestazioni  
ideali

$$\sim 1$$

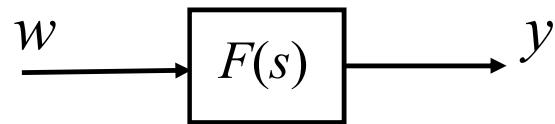


$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad \sim 0$$



$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} \quad \sim 0$$

# 1. Analisi statica di $F(s)$



$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i)}{\prod_i (1 + sT_i)}$$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

*w(t) = Asca(t)*

Valore di regime della risposta allo scalino

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \frac{A}{s} = A \lim_{s \rightarrow 0} F(s) = A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(s)}{1 + L(s)} =$$

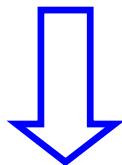
$$= A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu}{s^g + \mu} = \begin{cases} A & g > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_F = 1 \\ A \frac{\mu}{1 + \mu} & g = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_F \approx 1 \text{ se } \mu \gg 1 \\ 0 & g < 0 \end{cases}$$

## 2. Poli e zeri di $F(s)$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)}$$

$$F(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s) + N_L(s)}$$

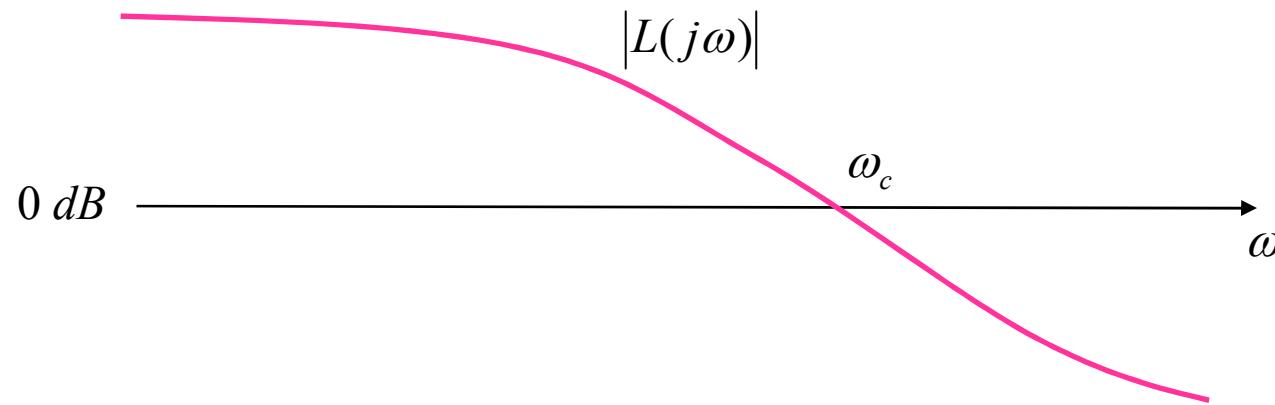


- gli zeri di  $F(s)$  sono gli zeri di  $L(s)$
- i poli di  $F(s)$  sono le radici di  $D_L(s) + N_L(s)=0$

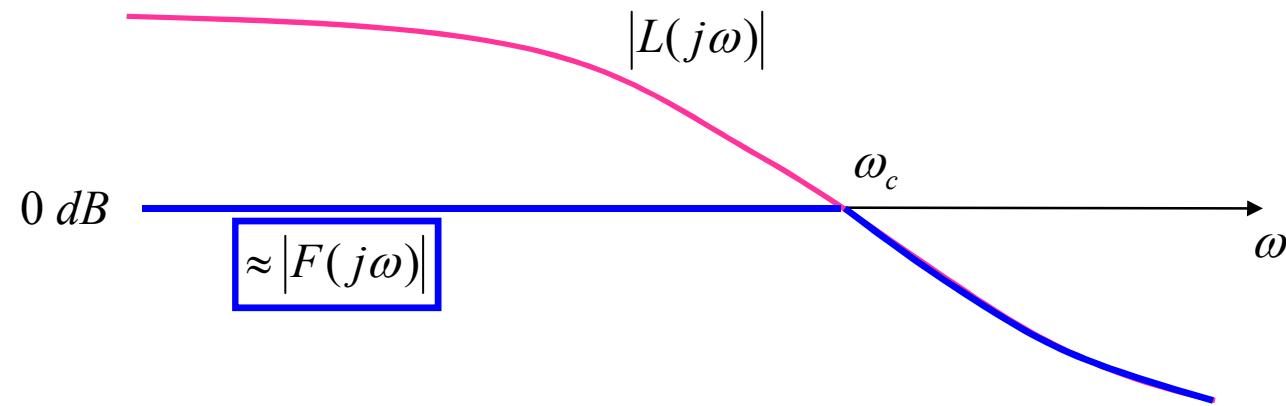
### 3. Risposta in frequenza di $F(s)$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \cong \begin{cases} 1 & |L(j\omega)| \gg 1 \\ |L(j\omega)| & |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$



$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \cong \begin{cases} 1 & \overbrace{|L(j\omega)| >> 1}^{\omega < \omega_c} \\ |L(j\omega)| & \overbrace{|L(j\omega)| << 1}^{\omega > \omega_c} \end{cases}$$



## Conclusioni (dei punti 1,2,3)

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

- ✓  $F(s)$  è un **filtro passa-basso**
- ✓ la banda passante di  $F(s)$  è  $B_F \cong [0, \omega_c]$
- ✓ il guadagno di  $F(s)$  è  $\mu_F \cong 1$       in realtà 
$$\begin{cases} \mu_F = 1 & \text{se } g > 0 \\ \mu_F = \frac{\mu}{1+\mu} & \text{se } g = 0 \end{cases}$$
- ✓ i poli dominanti di  $F(s)$   
cadono in corrispondenza di  $\omega_c$

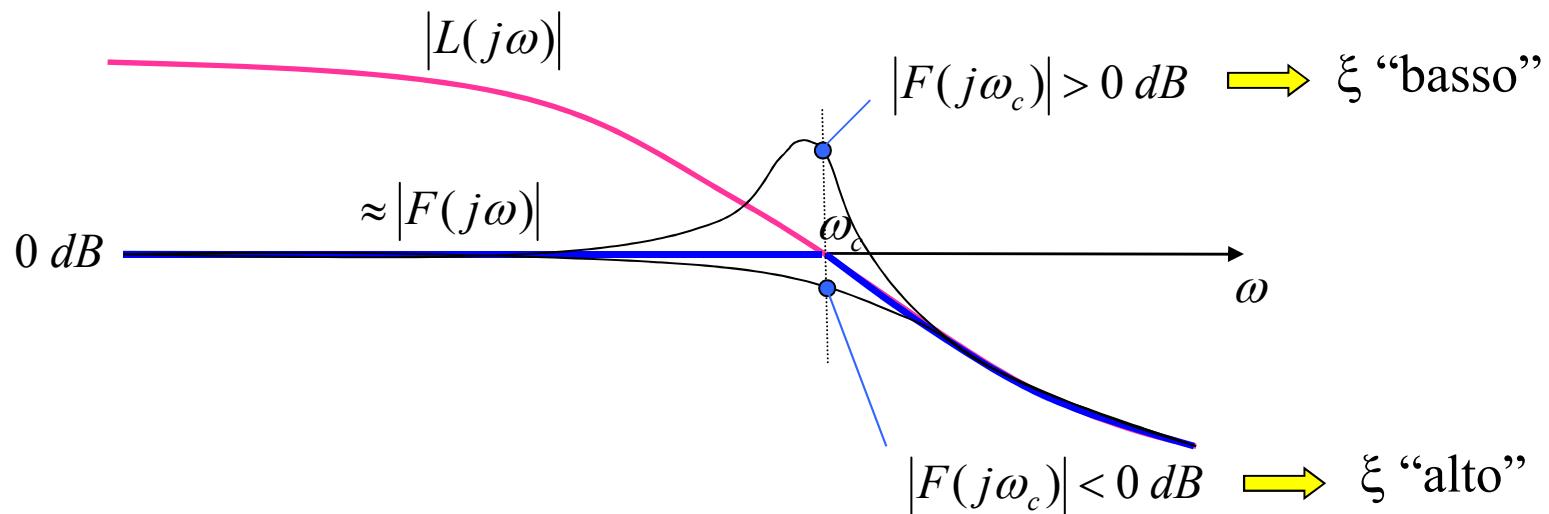
? **poli dominanti reali o complessi?  
se complessi, qual è il loro smorzamento?**

## 4. Poli dominanti di $F(s)$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

i poli dominanti di  $F(s)$   
cadono in corrispondenza di  $\omega_c$

- ?
- reali o complessi?
- se complessi, smorzamento?



Nota preliminare:  $L(j\omega_c)$  ha modulo unitario e fase pari alla fase critica

$$\begin{cases} |L(j\omega_c)| = 1 \\ \angle L(j\omega_c) = \varphi_c \end{cases} \xrightarrow{\text{ }} L(j\omega_c) = e^{j\varphi_c}$$

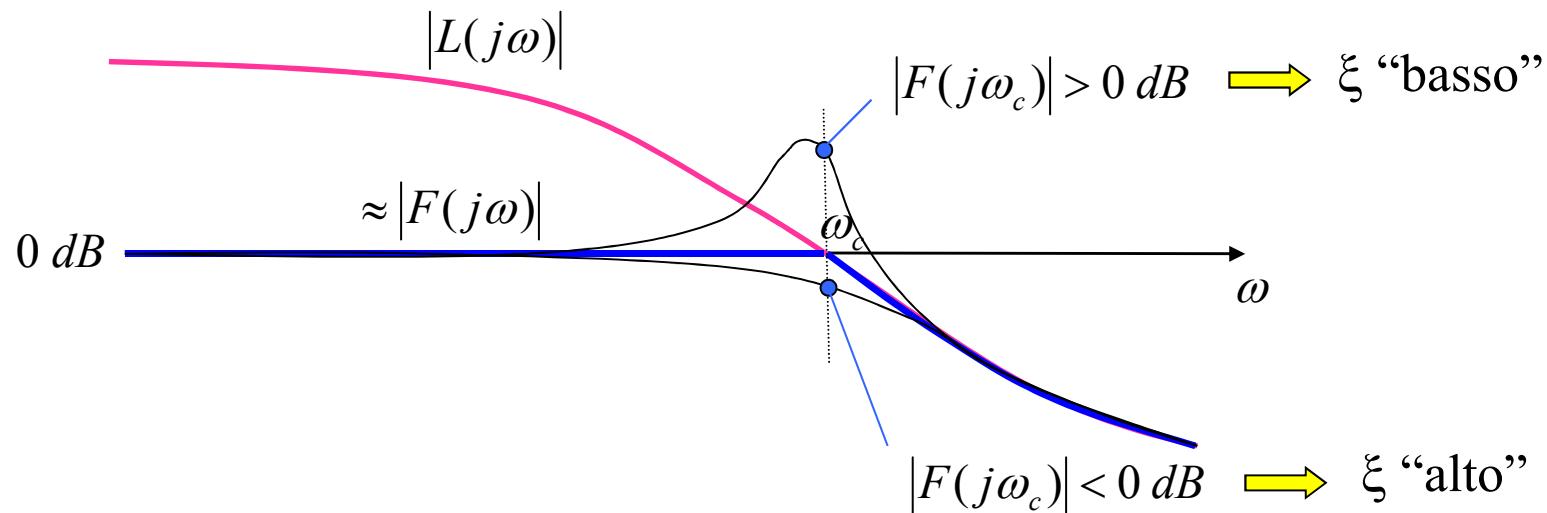
## Primo passo

➤ Calcoliamo il valore esatto di  $|F(j\omega_c)|$

$$\begin{aligned} L(j\omega_c) &= e^{j\varphi_c} \\ |F(j\omega_c)| &= \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1 + e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{|1 + \cos\varphi_c + j\sin\varphi_c|} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos\varphi_c)^2 + \sin^2\varphi_c}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos\varphi_c)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos\varphi_m)}} \\ &\quad \varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| \end{aligned}$$

$$\cos \varphi_m = \cos^2(\varphi_m/2) - \sin^2(\varphi_m/2)$$

$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos \varphi_m)}} = \frac{1}{\sqrt{4\sin^2(\varphi_m/2)}} = \boxed{\frac{1}{2\sin(\varphi_m/2)}}$$



Come posso correlare questa quantità allo smorzamento di due poli complessi coniugati con pulsazione naturale  $\omega_c$ ?

## Secondo passo

➤ Se  $F(s)$  avesse due poli dominanti complessi coniugati in  $\omega_c$  :

$$F(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\xi\omega_c s + \omega_c^2}$$

Il valore di  $|F(j\omega_c)|$  sarebbe :

$$|F(j\omega_c)| = \left| \frac{\omega_c^2}{(j\omega_c)^2 + 2\xi\omega_c j\omega_c + \omega_c^2} \right| = \frac{\omega_c^2}{|2j\xi\omega_c^2|} = \boxed{\frac{1}{2\xi}}$$

$$\boxed{\frac{1}{2\sin(\varphi_m/2)}}$$

**Calcolo esatto**

$$\boxed{\frac{1}{2\xi}}$$

**Valutazione approssimata**

## Conclusione (del punto 4)

### Valutazione approssimata dello smorzamento dei poli dominanti di $F(s)$

Lo smorzamento dei poli dominanti di  $F(s)$  vale

$$\xi \cong \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)$$

o anche, con ulteriori approssimazioni,

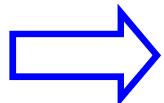
$$\xi \cong \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \cong \frac{\varphi_m}{2} \frac{\pi}{180^\circ} \cong \frac{\varphi_m}{100}$$

$$\boxed{\xi \cong \frac{\varphi_m}{100}}$$

E se non fossero complessi coniugati?

### Regola empirica

$$\varphi_m < 75^\circ$$

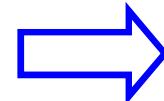


poli dominanti complessi con

$$\omega_n \cong \omega_c$$

$$\xi \cong \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)$$

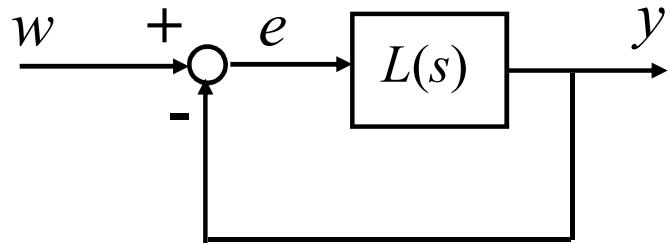
$$\varphi_m > 75^\circ$$



polo dominante reale con

$$\tau \cong \frac{1}{\omega_c}$$

## Esempio 1



$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

Per verificare i risultati, si calcoli la  $F$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+2)}}{1 + \frac{10}{s(s+2)}} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} = \frac{1}{1 + 0.2s + 0.1s^2}$$

## Analisi statica

Risposta allo scalino  $w(t) = A \text{sgn}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g=1 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad y(\infty) = A \quad (\text{cioè } \mu_F = 1)$$

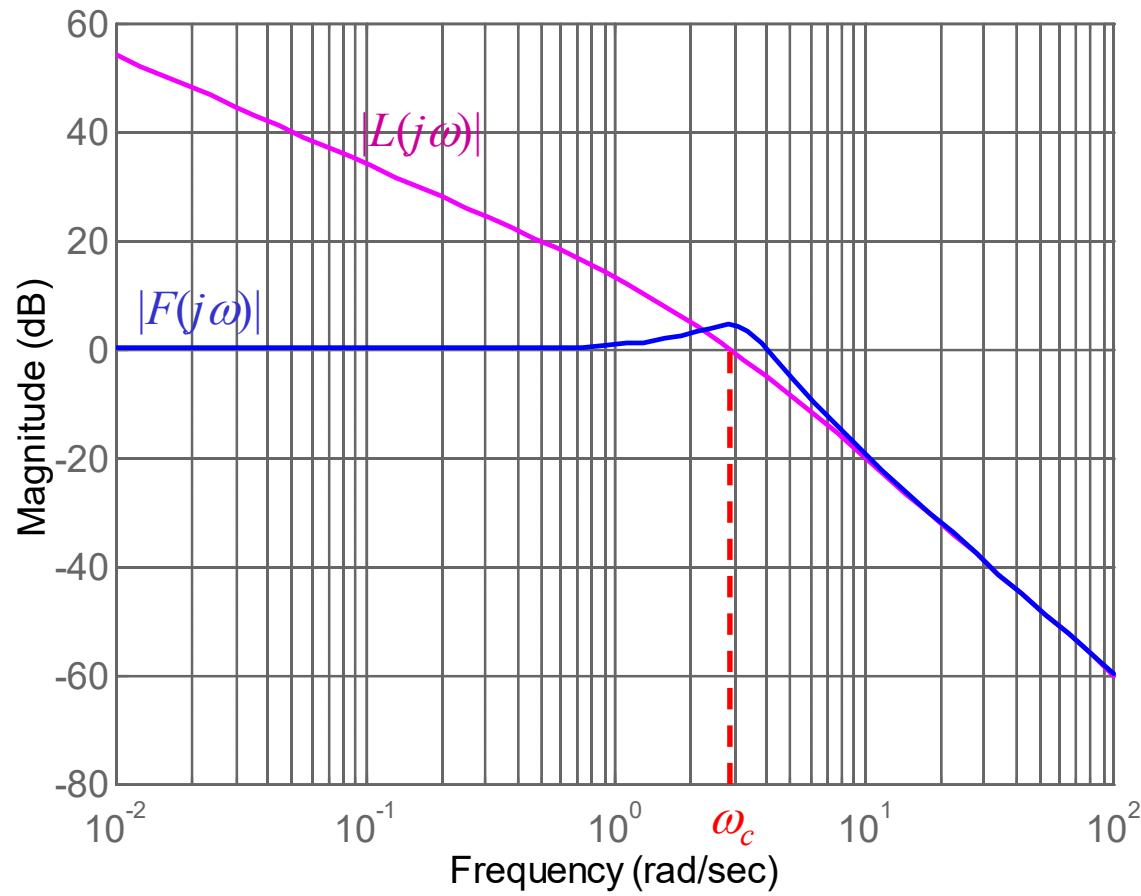
Verifica  $\mu_F = F(0) = 1$

## Poli & zeri

$$\begin{aligned} L(s) &= \frac{10}{s(s+2)} & N_L(s) &= 10 \\ && D_L(s) &= s(s+2) \\ N_L(s) + D_L(s) &= s(s+2) + 10 = s^2 + 2s + 10 \end{aligned}$$

$$\text{Verifica } F(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} = \frac{N_L(s)}{N_L(s) + D_L(s)}$$

## Risposta in frequenza



$$\omega_c = 2.86 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m = 34.9^\circ$$

## Valori esatti

$$\xi = 0.32$$

$$\omega_n = 3.16 \text{ rad/s}$$

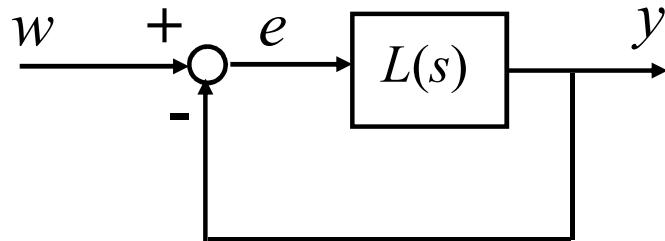
## Valori approssimati

$$\omega_n \cong \omega_c = 2.86 \text{ rad/s}$$

$$\xi \cong \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \cong 0.30$$

$$\xi \cong \frac{\varphi_m}{100} \cong 0.35$$

## Esempio 2



$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.01s)}$$

Per verificare i risultati, si calcoli la  $F$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{10}{(1+s)(1+0.01s)}}{1 + \frac{10}{(1+s)(1+0.01s)}} = \\ &= \frac{10}{11 + 1.01s + 0.01s^2} = \frac{1000}{s^2 + 101s + 1100} \end{aligned}$$

## Analisi statica

Risposta allo scalino  $w(t) = A \text{scal}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.01s)} \quad g = 0 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad y(\infty) = A \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{10}{11} A$$

Verifica  $\mu_F = F(0) = \frac{10}{11}$

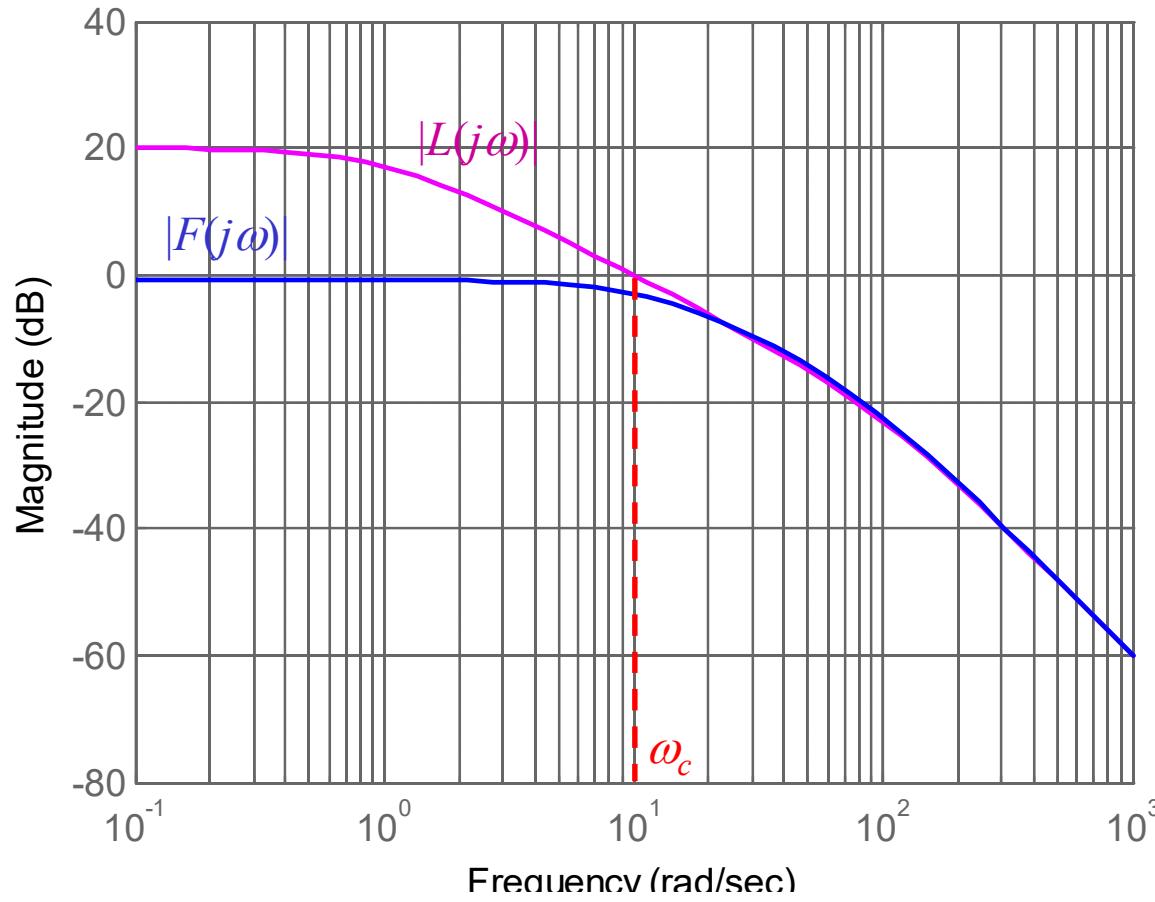
## Poli & zeri

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.01s)} \quad N_L(s) = 10 \\ D_L(s) = (1+s)(1+0.01s)$$

$$N_L(s) + D_L(s) = (1+s)(1+0.01s) + 10 = 11 + 1.01s + 0.01s^2$$

Verifica  $F(s) = \frac{10}{11 + 1.01s + 0.01s^2} = \frac{N_L(s)}{N_L(s) + D_L(s)}$

## Risposta in frequenza



$$\omega_c = 10 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m = 90^\circ$$

## Valori esatti

polo dominante

$$s_1 = -12.4$$

$$s_2 = -88.6$$

$$\tau = \frac{1}{12.4} = 0.08$$

## Valori approssimati

$$\tau \cong \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{10} = 0.1$$

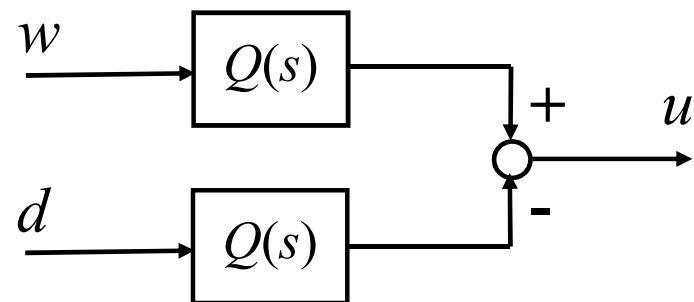
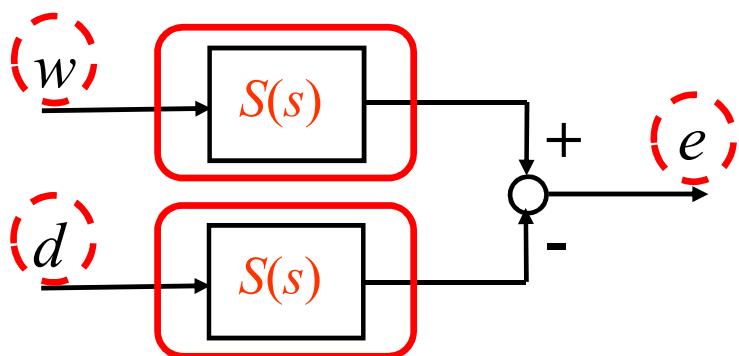
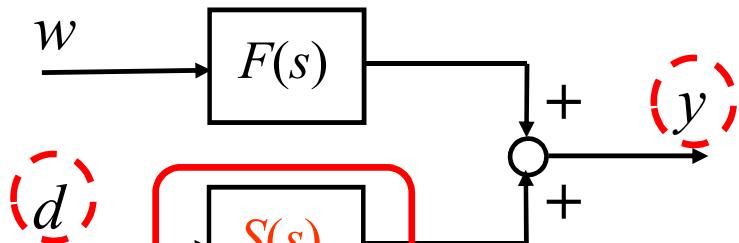
# Lezione 22. Analisi delle prestazioni di sistemi retroazionati (c)

## Sensitività

# Schema

1. Analisi statica di  $S(s)$  (risposta allo scalino)
2. Analisi statica di  $S(s)$  (risposta alla rampa)
3. Tabelle valori di regime di uscita ed errore
4. Poli e zeri di  $S(s)$
5. Risposta in frequenza di  $S(s)$
6. Esempio

# Funzione di sensitività



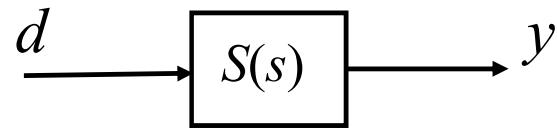
prestazioni  
ideali

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad \sim 1$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad \sim 0$$

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} \quad \sim 0$$

# 1. Analisi statica di $S(s)$ – risposta allo scalino



$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i)}{\prod_i (1 + sT_i)}$$

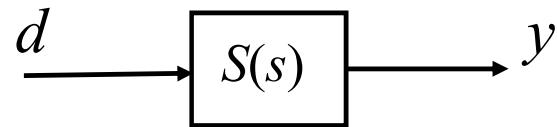
$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad \text{dashed red circle around } d(t) = A \text{scal}(t)$$

Valore di regime della risposta allo scalino

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{A}{s} = A \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(s)} =$$

$$= A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{s^g + \mu} = \begin{cases} 0 & g > 0 \\ A \frac{1}{1 + \mu} & g = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_s \equiv 0 \text{ se } \mu \gg 1 \\ A & g < 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_s = 1 \end{cases}$$

## 2. Analisi statica di $S(s)$ – risposta alla rampa



$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i)}{\prod_i (1 + sT_i)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad \text{dashed red circle around } d(t) = A \text{ ram}(t)$$

Valore di regime della risposta alla rampa

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{A}{s^2} = A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S(s)}{s} = A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1 + L(s))} =$$

$$= A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-1}}{s^g + \mu} = \begin{cases} 0 & g > 1 \\ \frac{A}{\mu} & g = 1 \\ \infty & g < 1 \end{cases}$$

### 3.a Tabella riassuntiva: uscita

Valore di regime  $y(\infty)$  in risposta a  $d(t)$

|         | $A \text{ sca}(t)$  | $A \text{ ram}(t)$ | $A \text{ par}(t)$ |
|---------|---------------------|--------------------|--------------------|
| $g = 0$ | $\frac{A}{1 + \mu}$ | $\infty$           | $\infty$           |
| $g = 1$ | 0                   | $\frac{A}{\mu}$    | $\infty$           |
| $g = 2$ | 0                   | 0                  | $\frac{A}{\mu}$    |
| $g = 3$ | 0                   | 0                  | 0                  |

### 3.b Tabella riassuntiva: errore

Valore di regime  $|e(\infty)|$  in risposta a  $w(t)$  oppure a  $d(t)$

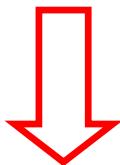
|         | $A \text{ sca}(t)$  | $A \text{ ram}(t)$ | $A \text{ par}(t)$ |
|---------|---------------------|--------------------|--------------------|
| $g = 0$ | $\frac{A}{1 + \mu}$ | $\infty$           | $\infty$           |
| $g = 1$ | 0                   | $\frac{A}{\mu}$    | $\infty$           |
| $g = 2$ | 0                   | 0                  | $\frac{A}{\mu}$    |
| $g = 3$ | 0                   | 0                  | 0                  |

## 4. Poli e zeri di $S(s)$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

$$L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)}$$

$$S(s) = \frac{D_L(s)}{D_L(s) + N_L(s)}$$



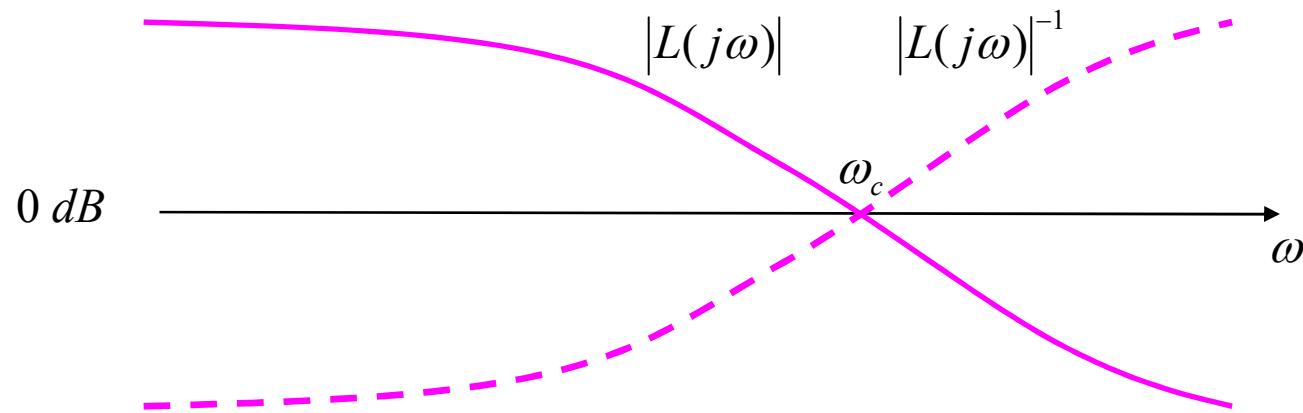
- gli zeri di  $S(s)$  sono i poli di  $L(s)$
- i poli di  $S(s)$  sono le radici di  $D_L(s) + N_L(s) = 0$

già studiate

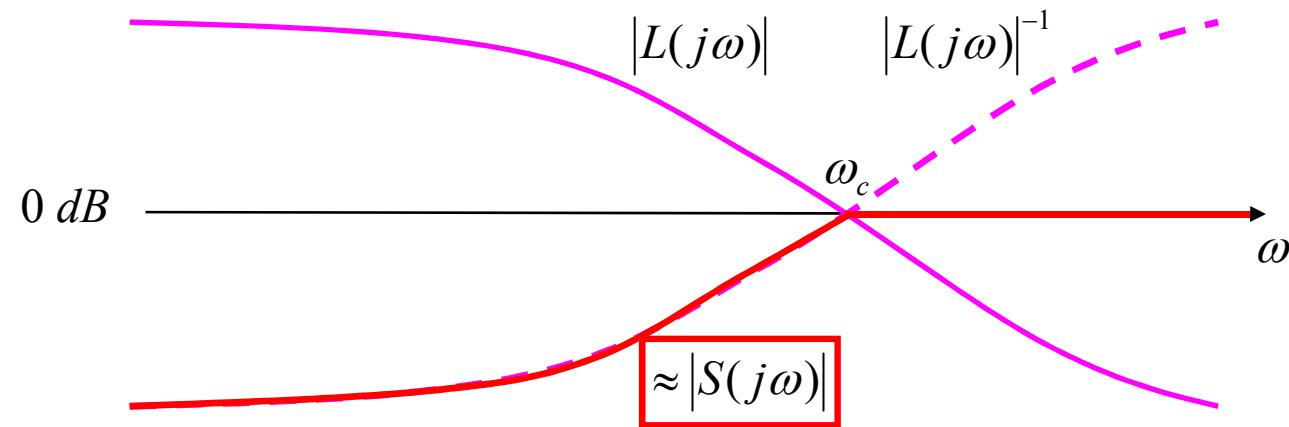
## 5. Risposta in frequenza di $S(s)$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \cong \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} = -|L(j\omega)|_{dB} & |L(j\omega)| \gg 1 \\ 1 & |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

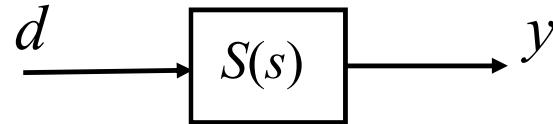


$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \cong \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} = -|L(j\omega)|_{dB} & \overbrace{|L(j\omega)|}^{\omega < \omega_c} \gg 1 \\ 1 = 0 \text{ dB} & |L(j\omega)| \ll 1 \\ \end{cases} \quad \overbrace{\omega > \omega_c}^{|L(j\omega)| \ll 1}$$

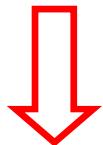


## Conclusioni

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

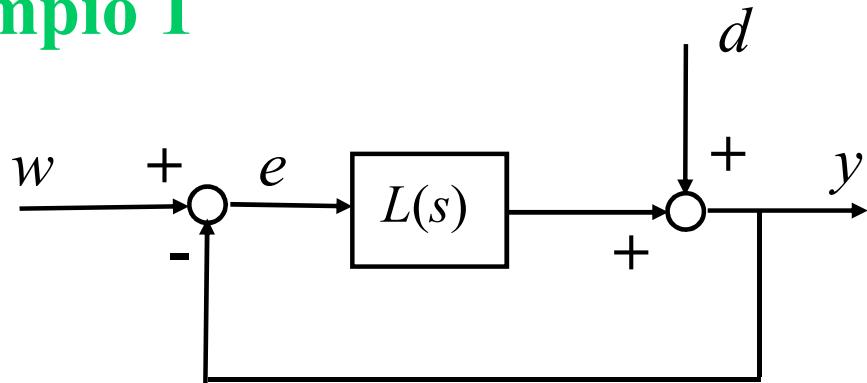


- ✓  $S(s)$  è un **filtro passa-alto**
- ✓ la banda passante di  $S(s)$  è  $B_S \cong [\omega_c, \infty]$



- ✓ il disturbo  $d$  viene attenuato solo in  $[0, \omega_c]$
- ✓ l'attenuazione in questa banda è circa uguale a  $\frac{1}{|L(j\omega)|}$

## Esempio 1



$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + \frac{10}{s(s+2)}} = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + 10} = \frac{0.2s(1 + 0.5s)}{1 + 0.2s + 0.1s^2}$$

## Analisi statica

Risposta allo scalino  $d(t) = A \text{scal}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g = 1 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad y(\infty) = 0 \\ |e(\infty)| = 0$$

Infatti  $\mu_S = S(0) = 0$

Risposta alla rampa  $d(t) = A \text{ram}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g = 1 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad y(\infty) = \frac{A}{\mu} = \frac{A}{5} \\ |e(\infty)| = \frac{A}{\mu} = \frac{A}{5}$$

Risposta allo scalino  $w(t) = A \text{sc}(t)$

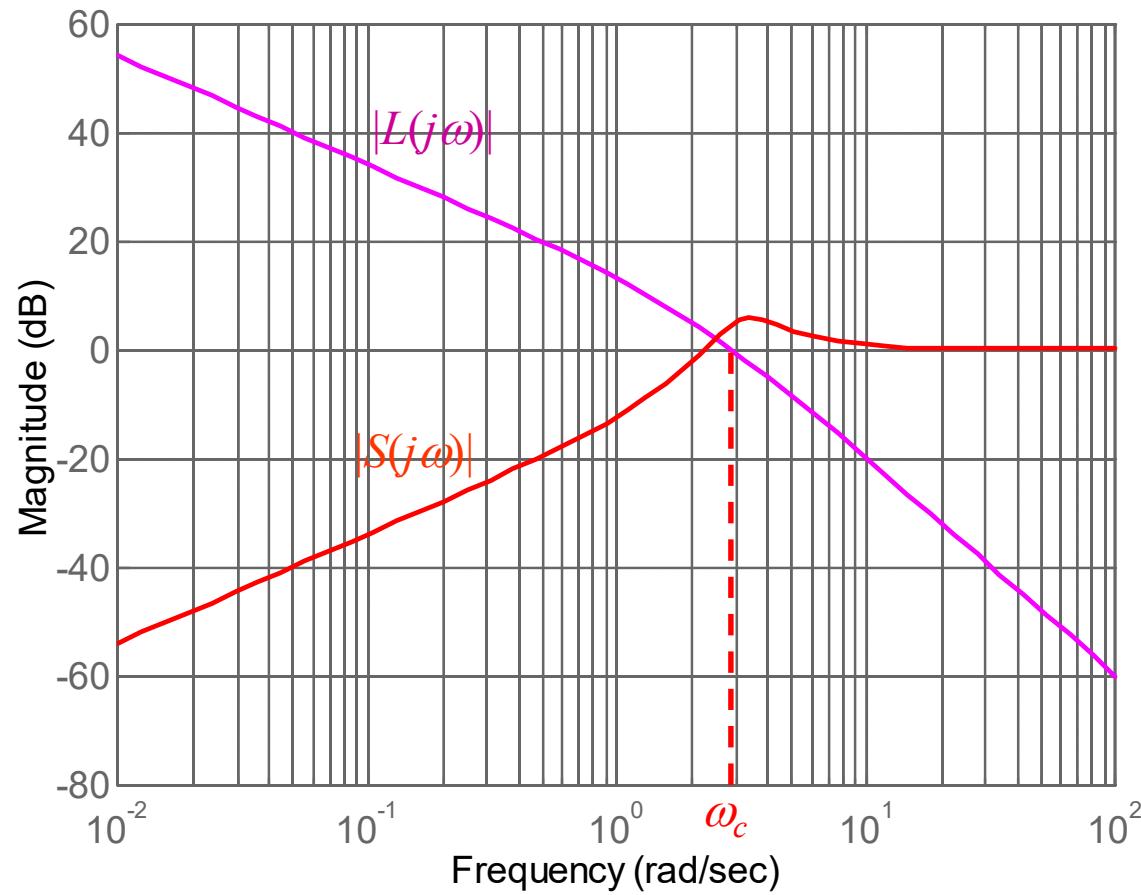
$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g = 1 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad |e(\infty)| = 0$$

Infatti  $\mu_S = S(0) = 0$

Risposta alla rampa  $w(t) = A \text{ram}(t)$

$$L(s) = \frac{10}{s(s+2)} \quad g = 1 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad |e(\infty)| = \frac{A}{\mu} = \frac{A}{5}$$

## Risposta in frequenza



Per  $\omega \leq 0.4$  attenuazione di almeno 20 dB

$$d(t) = \sin(\omega t)$$



$$|S(j\omega)|$$

ampiezza a regime  
di  $y(t)$  e di  $e(t)$

$$w(t) = \sin(\omega t)$$



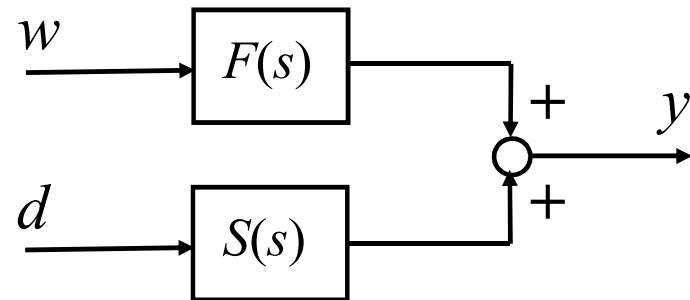
$$|S(j\omega)|$$

ampiezza a regime  
di  $e(t)$

# Lezione 23. Analisi delle prestazioni di sistemi retroazionati (d)

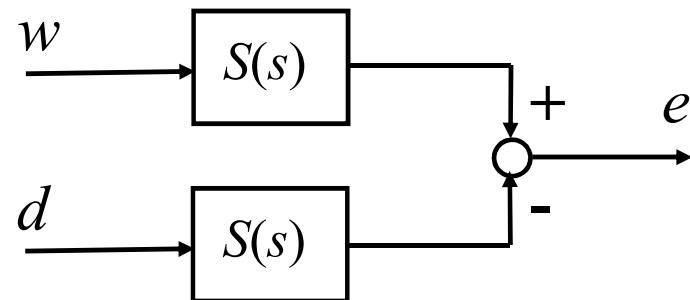
## Sensitività del controllo

# Funzione di sensitività del controllo

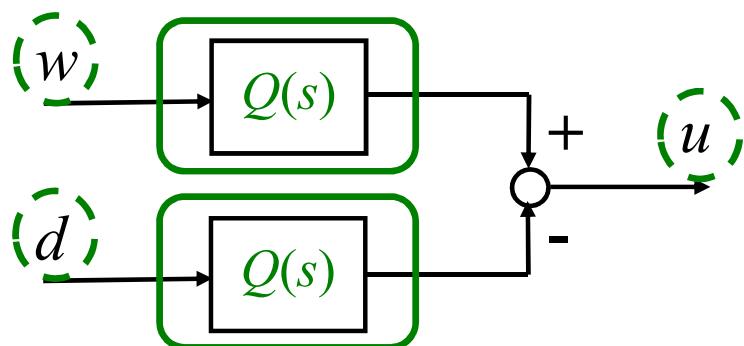


prestazioni  
ideali

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad \sim 1$$



$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad \sim 0$$



$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$

$\sim 0$

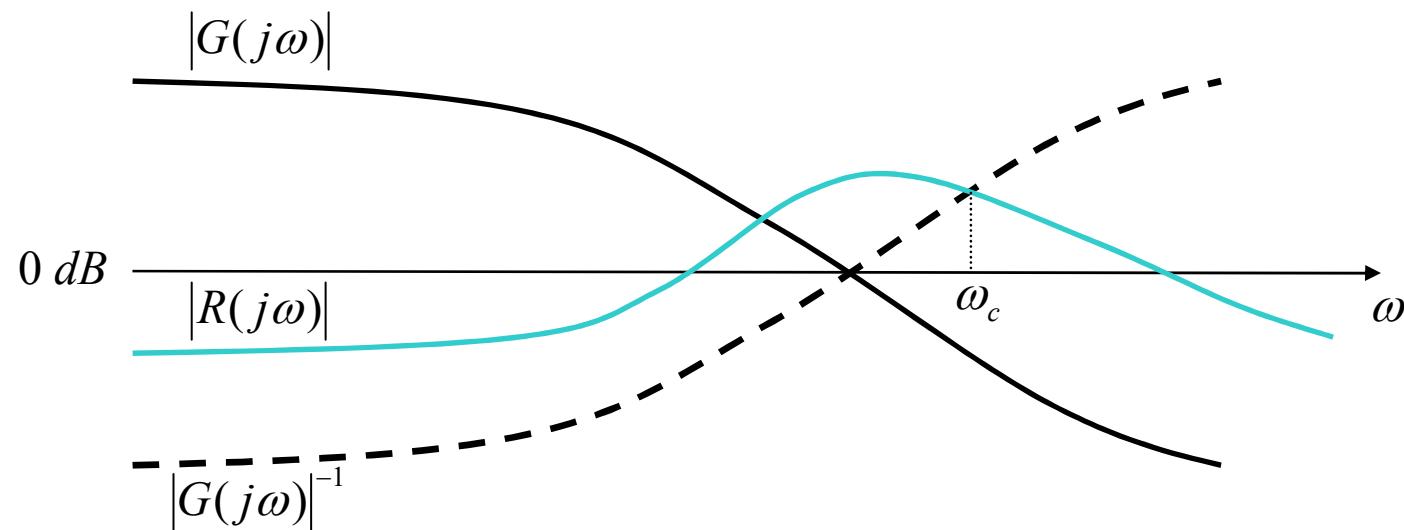
utile per valutare la moderazione

# Risposta in frequenza di $Q(s)$

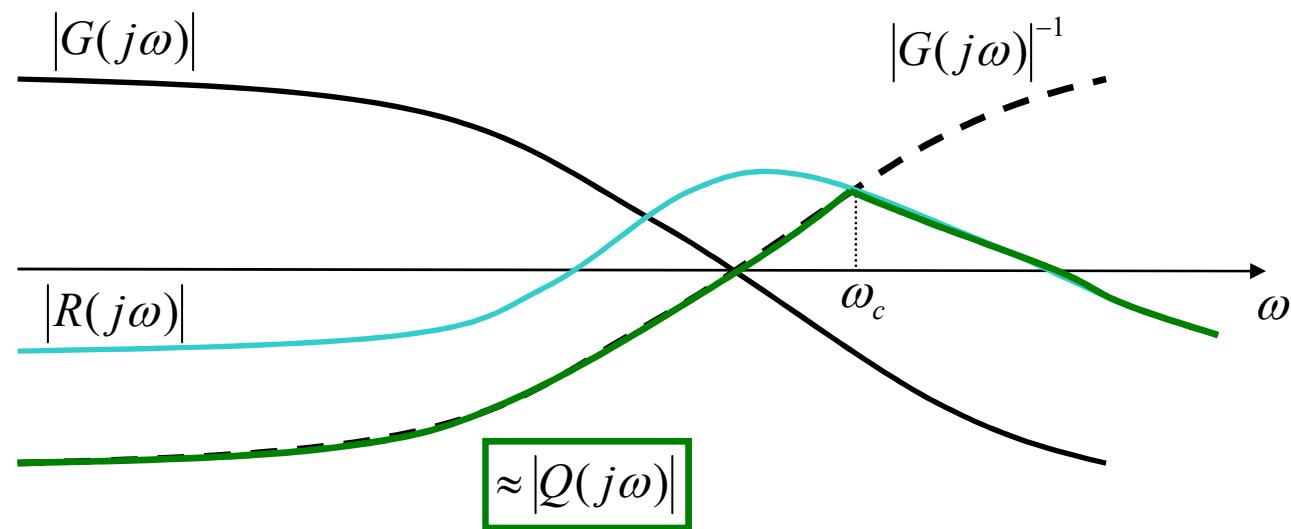
$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$

$$L(s) = R(s)G(s)$$

$$|Q(j\omega)| = \frac{|R(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \cong \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} = -|G(j\omega)|_{dB} & |L(j\omega)| \gg 1 \\ |R(j\omega)| & |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$



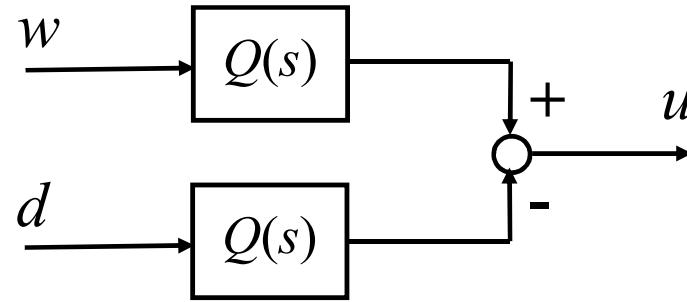
$$|Q(j\omega)| = \frac{|R(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \cong \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} = -|G(j\omega)|_{dB} & \overbrace{|L(j\omega)| \gg 1}^{\omega < \omega_c} \\ |R(j\omega)| & |L(j\omega)| \ll 1 \\ \end{cases}$$



In banda di controllo la funzione di sensitività del controllo è il modello inverso!

## Conclusioni

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}$$

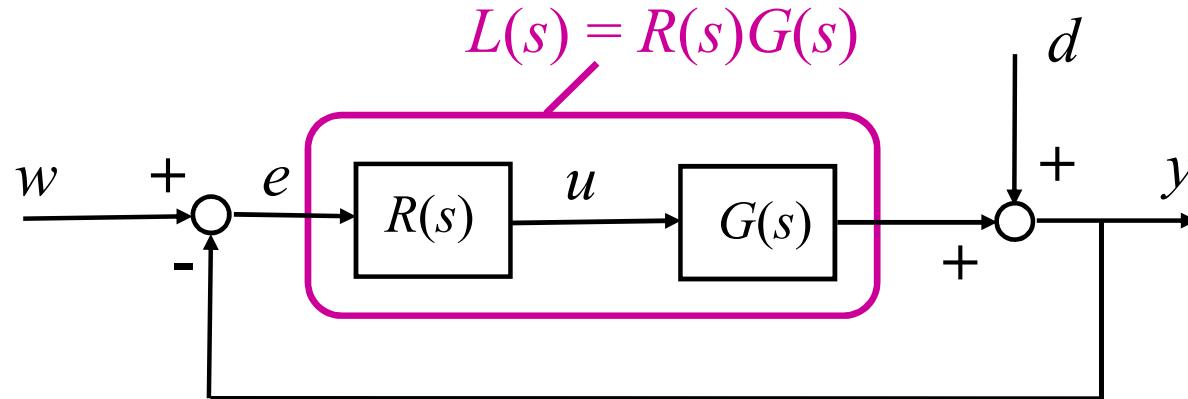


per avere **buona moderazione** occorre avere

- $|G(j\omega)|$  “grande” per  $\omega < \omega_c$

- $|R(j\omega)|$  “piccolo” per  $\omega > \omega_c$

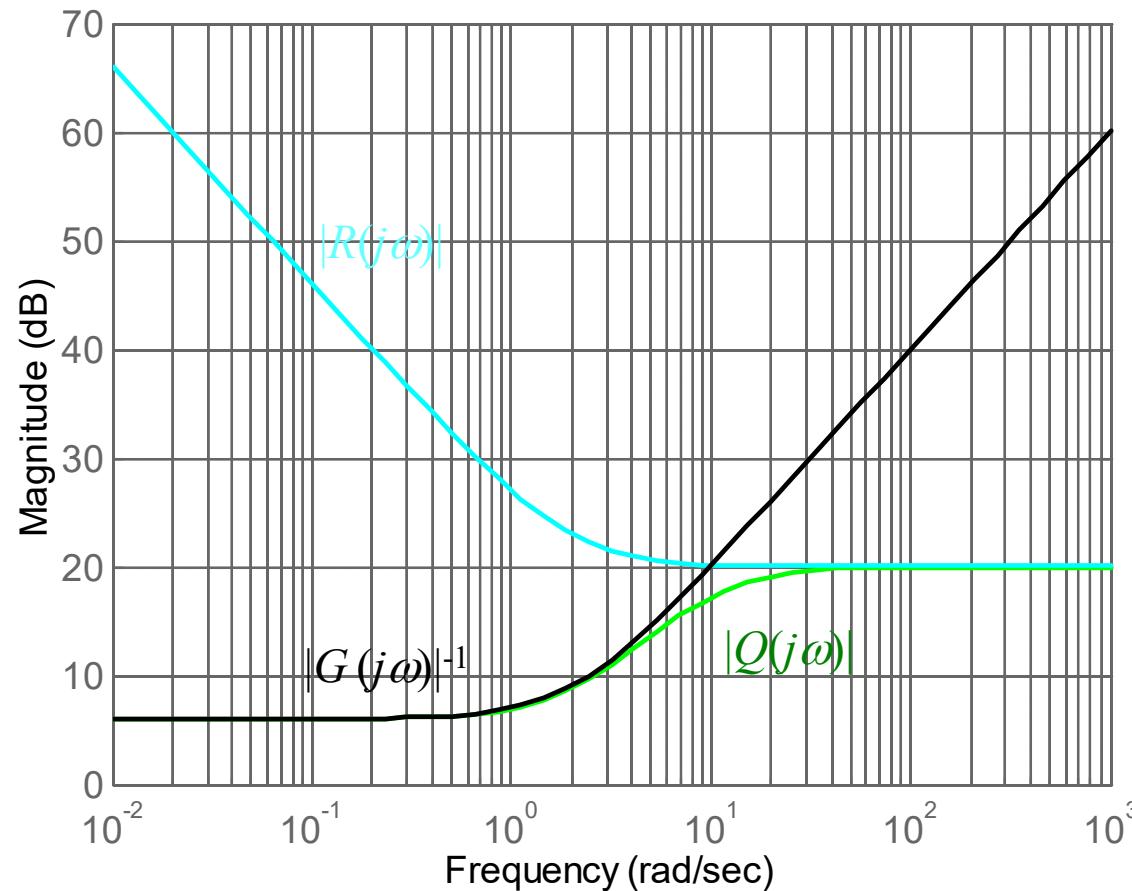
# Esempio



$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad R(s) = \frac{10(s+2)}{s} \quad \Rightarrow \quad L(s) = \frac{10}{s}$$

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{10(s+2)}{s}}{1 + \frac{10}{s}} = \frac{10(s+2)}{s+10} = \frac{2(1+0.5s)}{1+0.1s}$$

## Risposta in frequenza



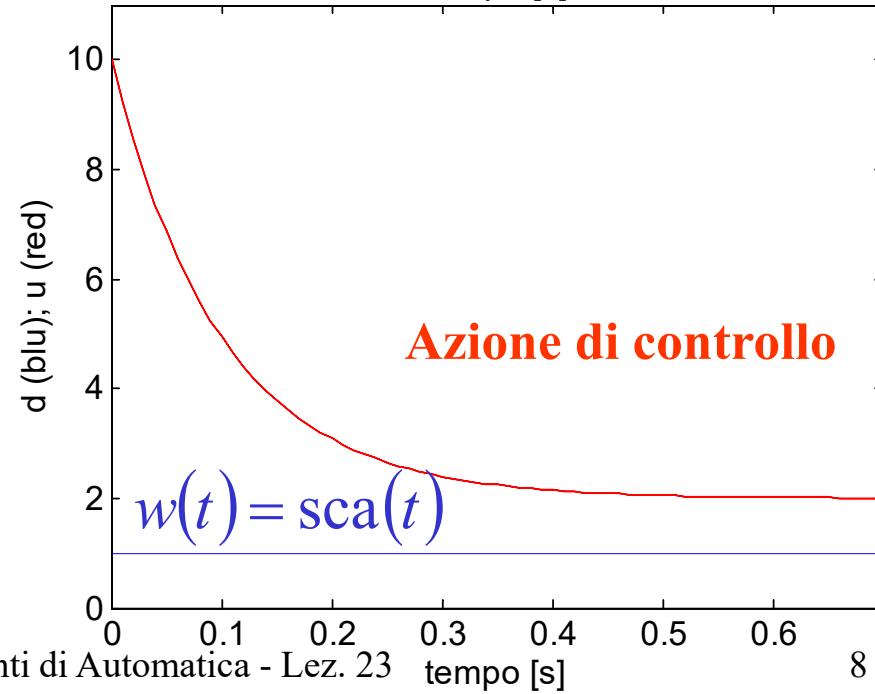
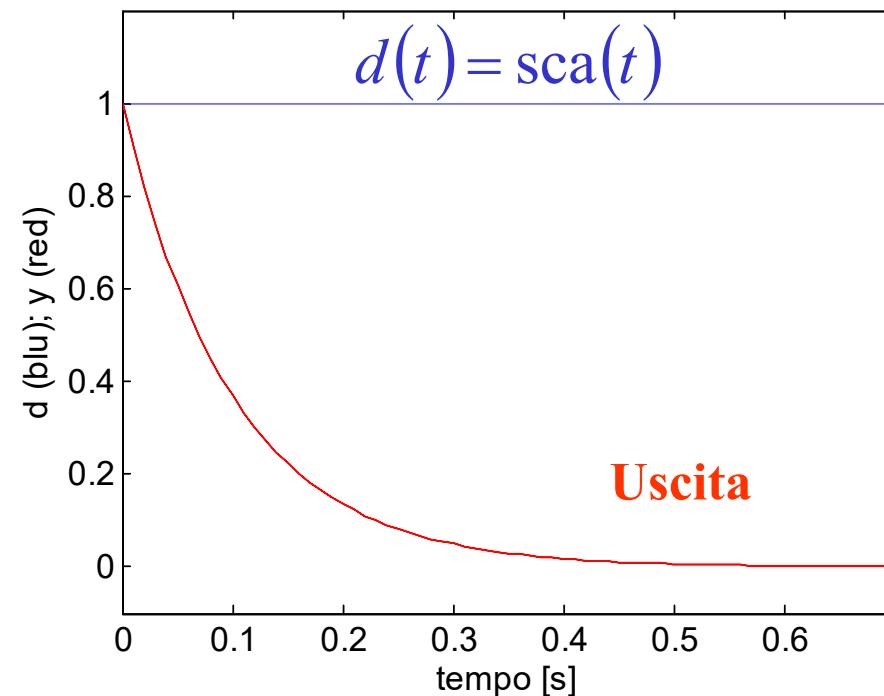
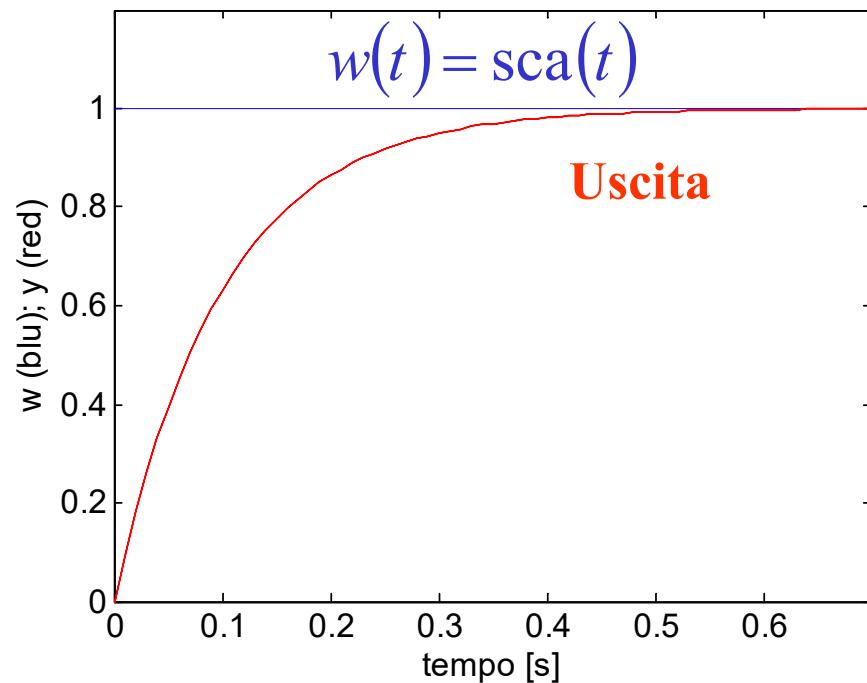
Ingressi con componenti armoniche a pulsazioni superiori a 40 rad/s vengono amplificate di 20 dB.

Per “andar veloce” devo usare azioni di controllo intense con i problemi connessi (costo attuator, saturazione attuator, etc...)

# Esempio riassuntivo

Analisi  
statica

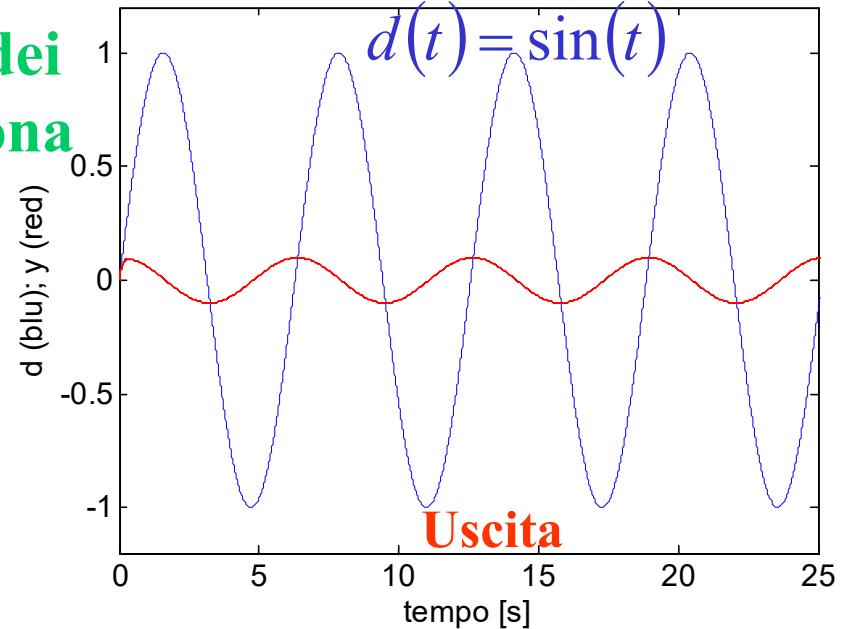
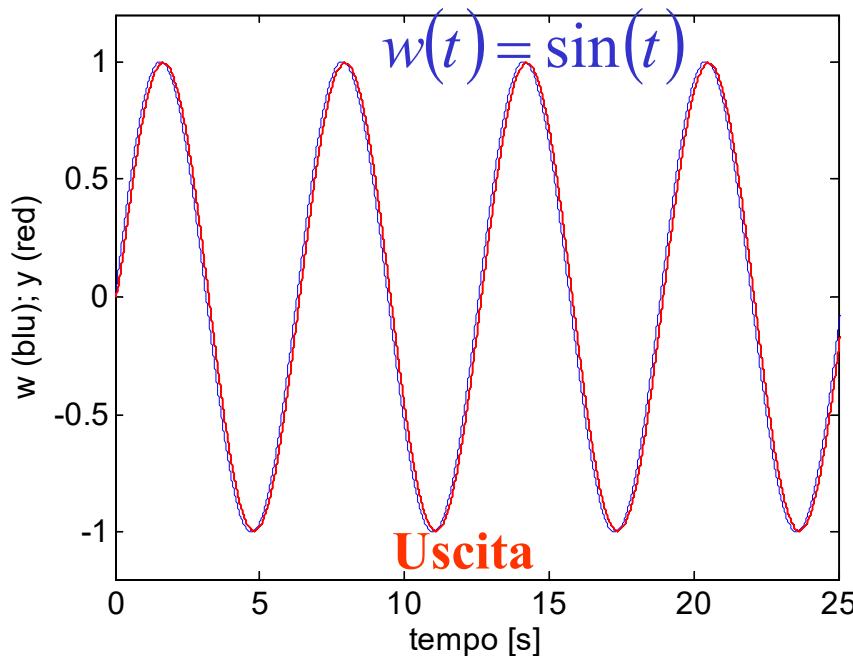
Precisione statica ottima



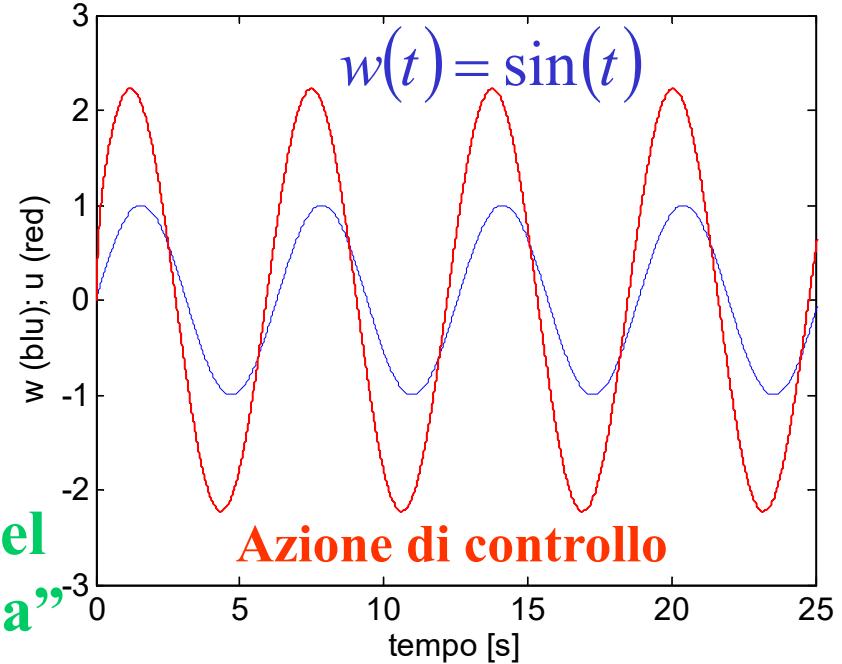
In banda  
di controllo [0,10]

Reiezione dei  
disturbi buona

Tracking ottimo



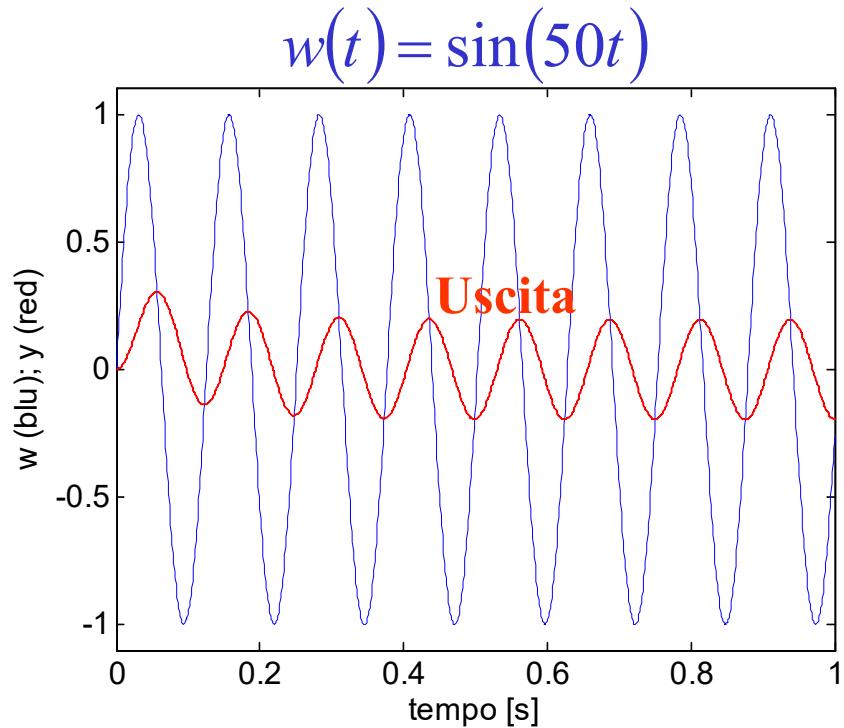
Moderazione del  
controllo “buona”



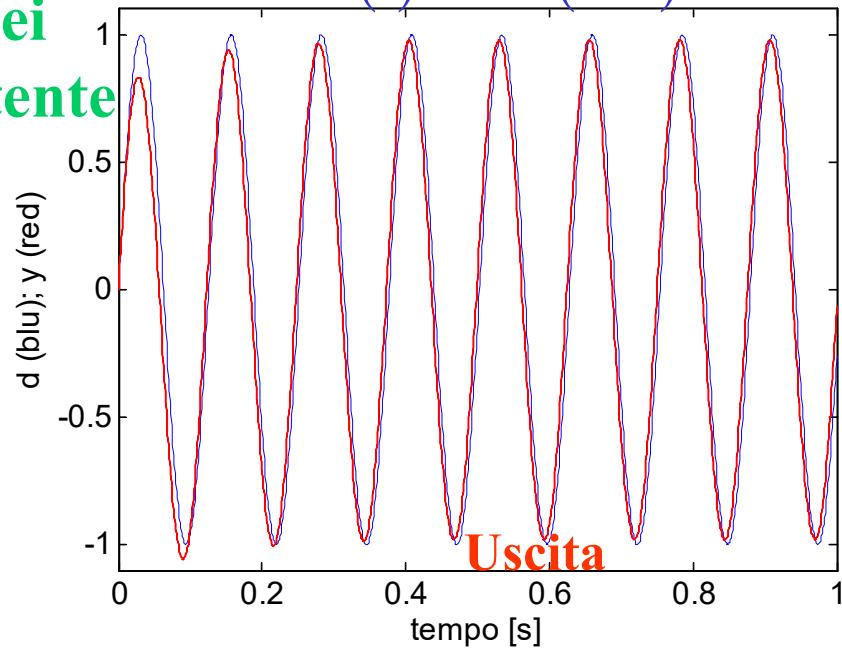
Fuori banda  
di controllo  $[10, \infty]$

Reiezione dei  
disturbi inesistente

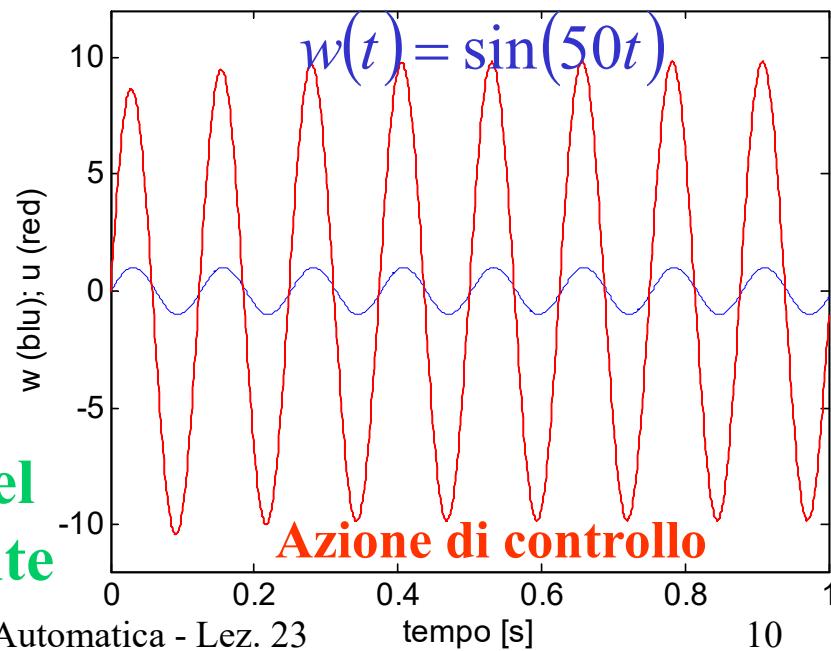
Tracking pessimo



$$d(t) = \sin(50t)$$



Moderazione del  
controllo scadente

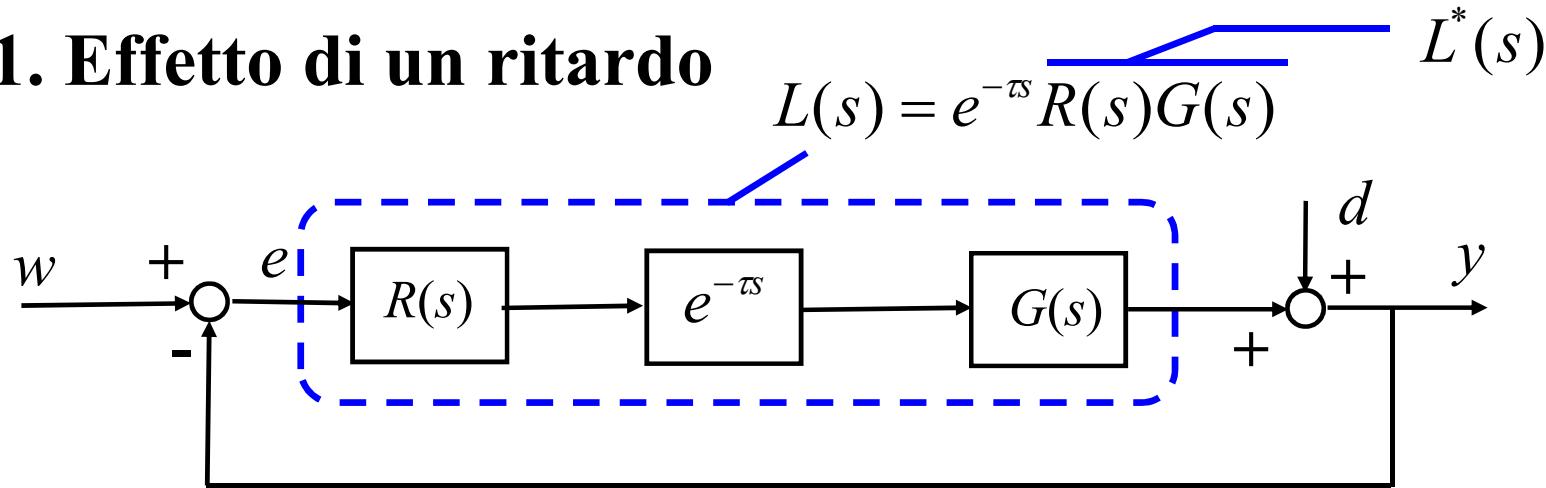


# Lezione 24. Estensioni dell'analisi di sistemi retroazionati

# Schema

1. Effetto di un ritardo
2. Blocchi in anello aperto
3. Disturbi sull'attuatore

# 1. Effetto di un ritardo



- può influenzare la stabilità vedi Nyquist e Bode
- non modifica le prestazioni statiche  $\lim_{s \rightarrow 0} L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} L^*(s)$
- non modifica  $\omega_c$   $|L(j\omega)| = |L^*(j\omega)|$
- fa diminuire  $\varphi_m$   $\varphi_c = \arg L(j\omega_c) = \arg L^*(j\omega_c) - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi}$   
↓  
diminuisce lo smorzamento  
dei poli in anello chiuso

## Esempio

$$L^*(s) = \frac{0.1}{s(s^2 + s + 1)}$$

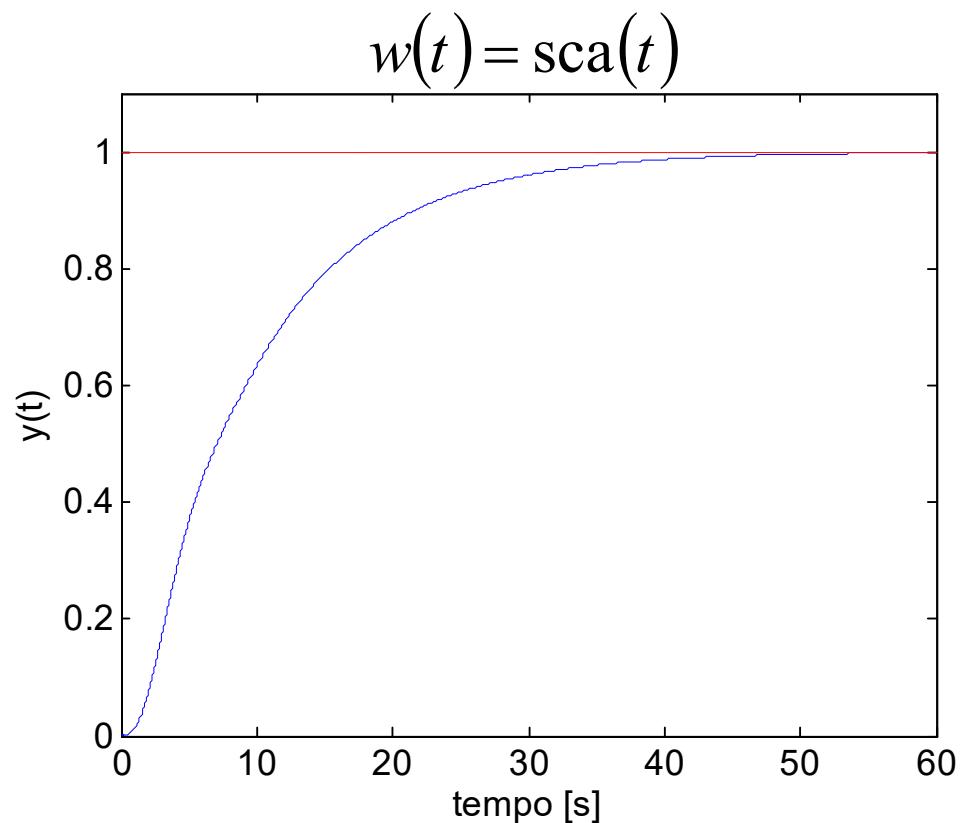
$$\omega_c = 0.101 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m^* = 84.2^\circ$$

Tempo di assestamento  
della risposta allo scalino  
in anello chiuso

$$t_a \cong \frac{5}{\omega_c} \cong \frac{5}{0.101} \cong 50 \text{ s}$$

(polo dominante reale)



Introducendo un ritardo di 8 s

$$L(s) = \frac{0.1}{s(s^2 + s + 1)} e^{-8s}$$

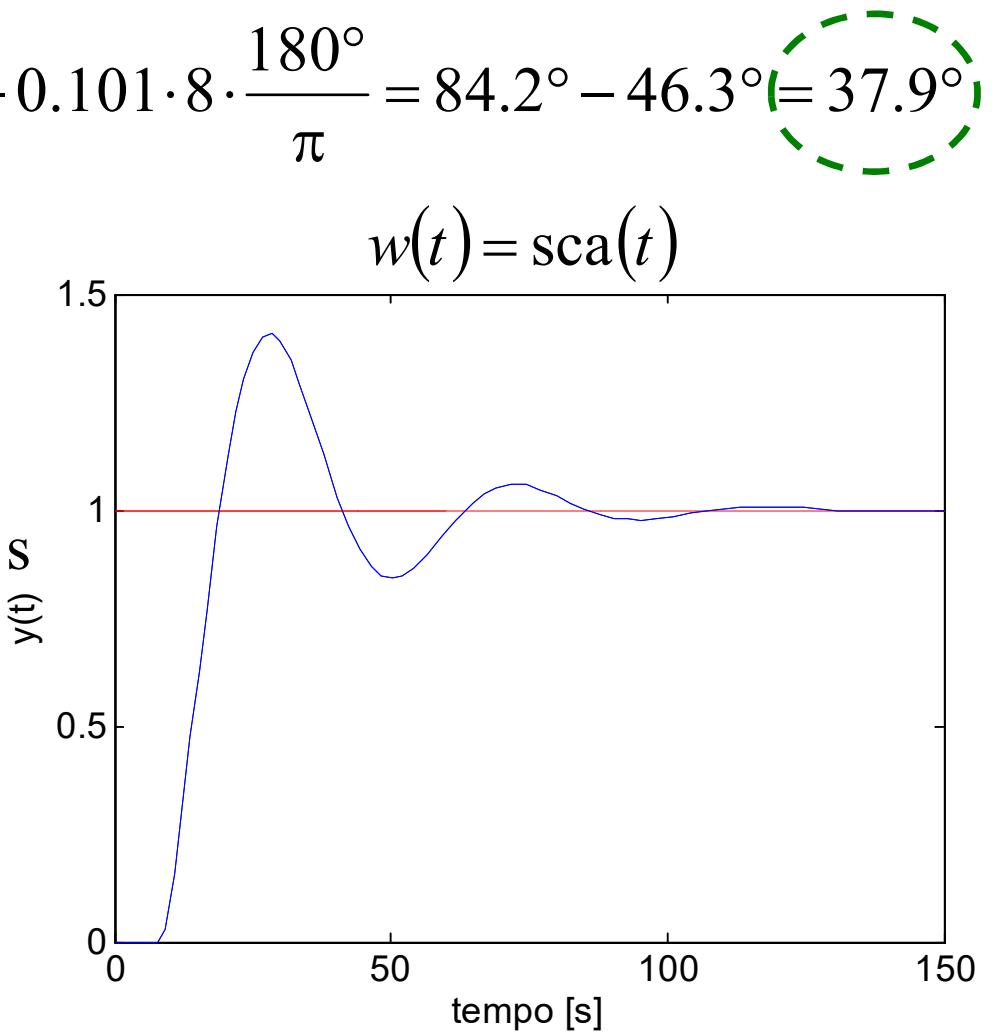
$$\omega_c = 0.101 \text{ rad/s}$$

$$\varphi_m = 84.2^\circ - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} = 84.2^\circ - 0.101 \cdot 8 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 84.2^\circ - 46.3^\circ = 37.9^\circ$$

Tempo di assestamento  
della risposta allo scalino  
in anello chiuso

$$t_a \cong \frac{5}{\xi \omega_n} \cong \frac{5}{\frac{\Phi_m}{100} \omega_c} \cong \frac{500}{\Phi_m \omega_c} = 130 \text{ s}$$

(poli dominanti complessi)



Introducendo un ritardo di 20 s  $L(s) = \frac{0.1}{s(s^2 + s + 1)} e^{-20s}$

$$\omega_c = 0.101 \text{ rad/s}$$

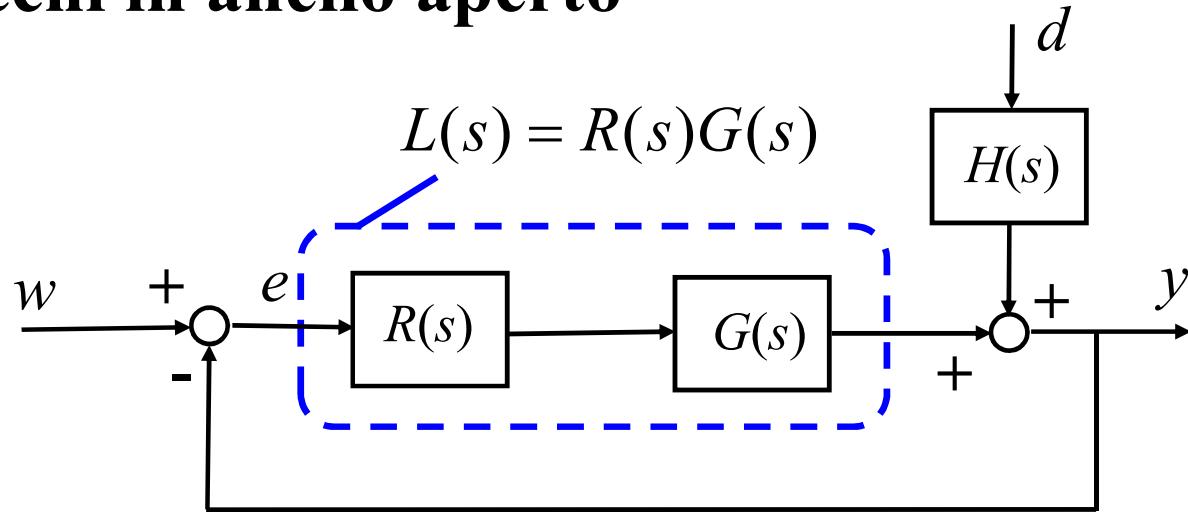
$$\varphi_m = 84.2^\circ - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} = 84.2^\circ - 0.101 \cdot 20 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 84.2^\circ - 115.7^\circ = \boxed{-31.5^\circ}$$

**Instabile!**

Infatti, calcolando il massimo ritardo  
d'anello ammissibile  $\tau_{\max}$  si ha:

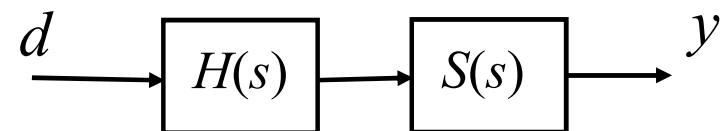
$$\omega_c \tau_{\max} \frac{180^\circ}{\pi} = 84.2^\circ \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = 84.2^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{1}{0.101} = 14.55 \text{ s}$$

## 2. Blocchi in anello aperto



$$M(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{H(s)}{1 + L(s)} = \\ = H(s)S(s)$$

ad esempio

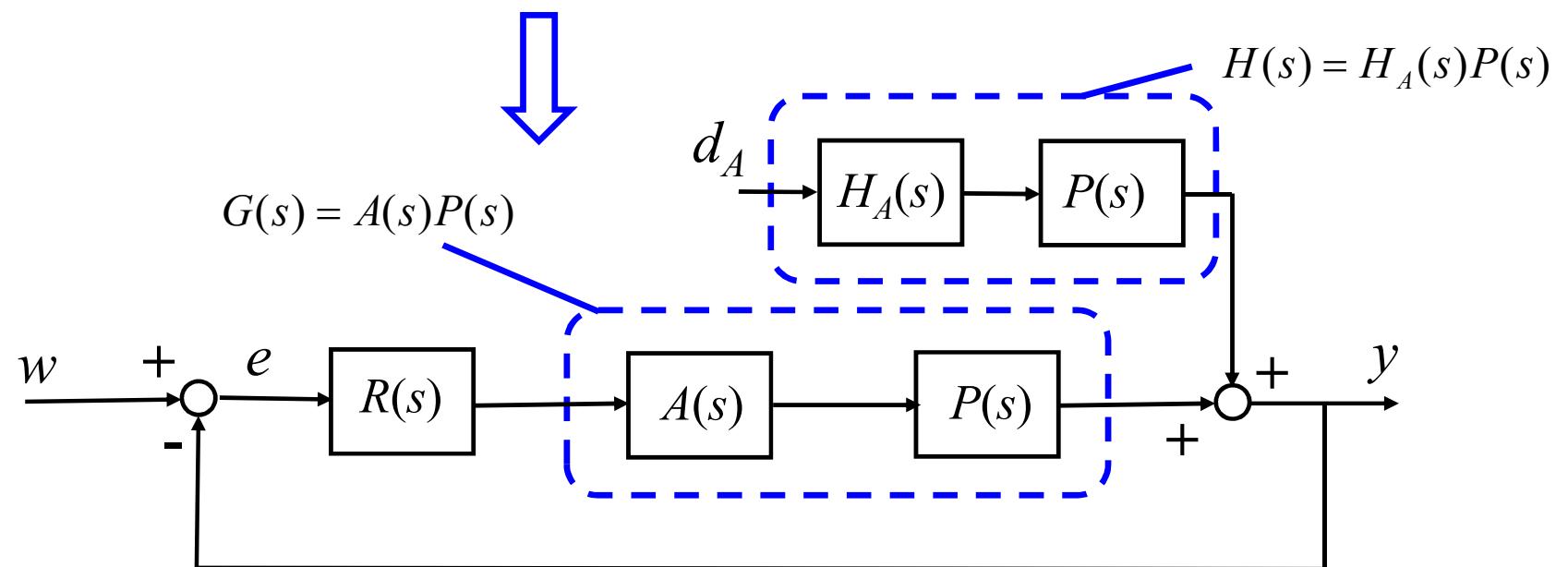
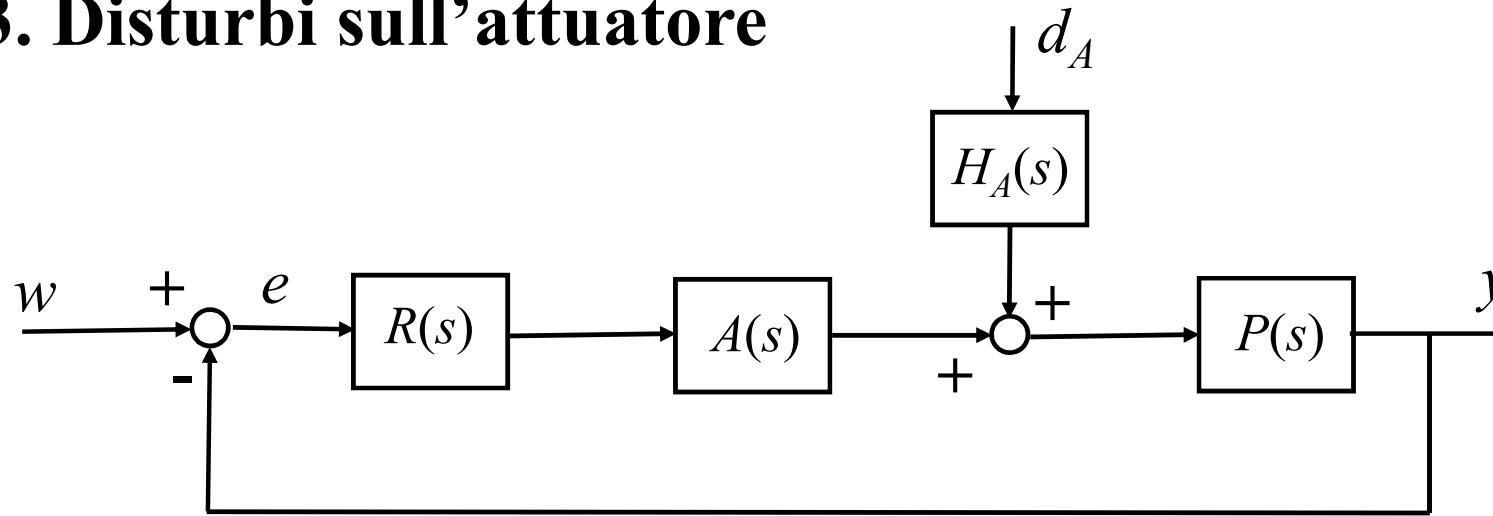


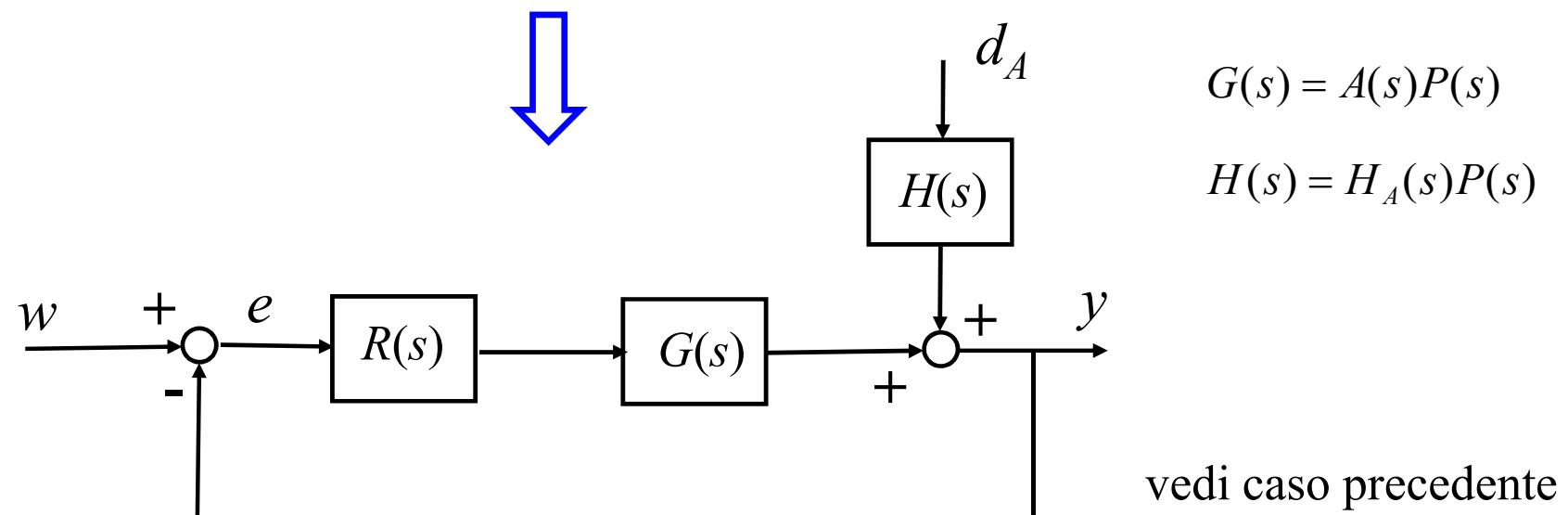
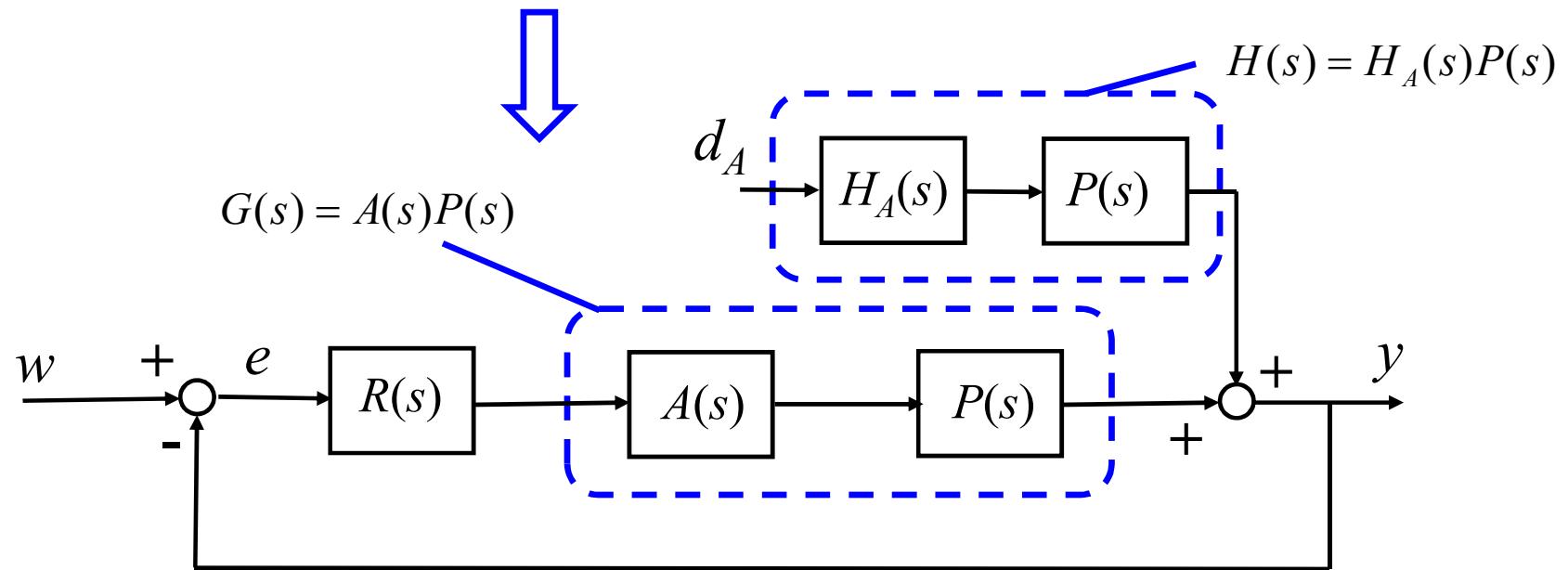
$$\mu_M = \mu_H \mu_S$$

$$|M(j\omega)| = |H(j\omega)| |S(j\omega)|$$

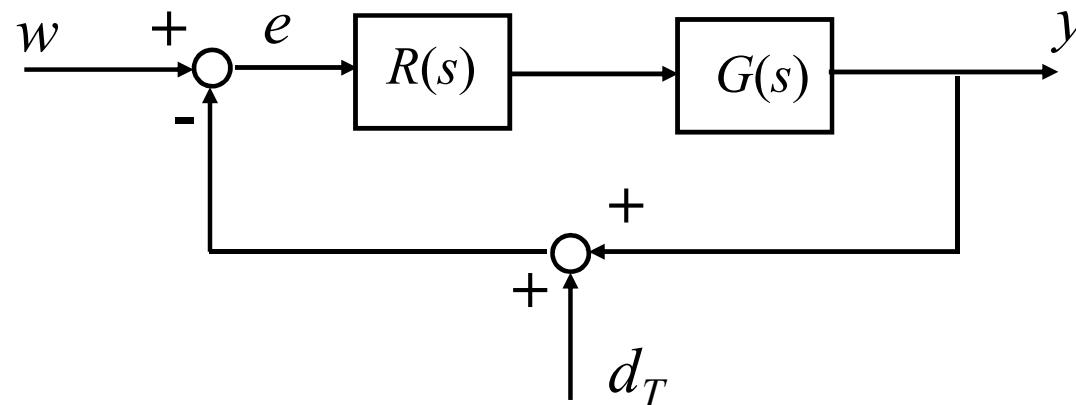
$$|M(j\omega)|_{dB} = |H(j\omega)|_{dB} + |S(j\omega)|_{dB}$$

### 3. Disturbi sull'attuatore

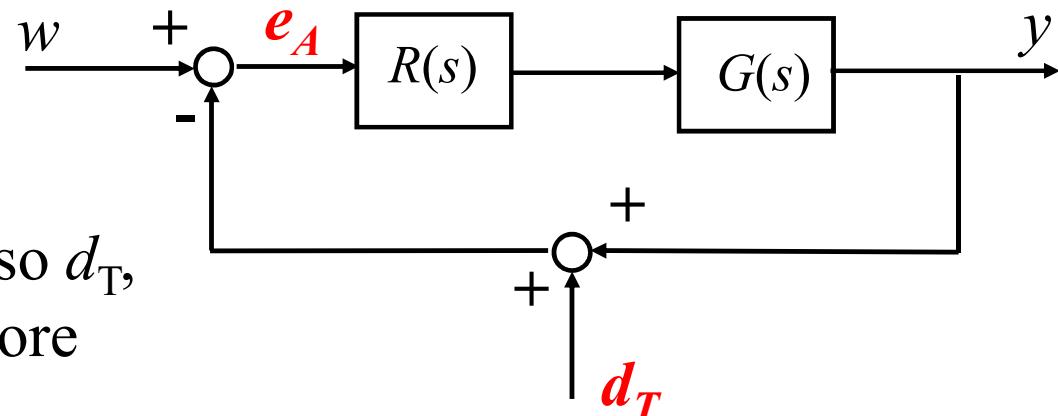




## Disturbi sul trasduttore



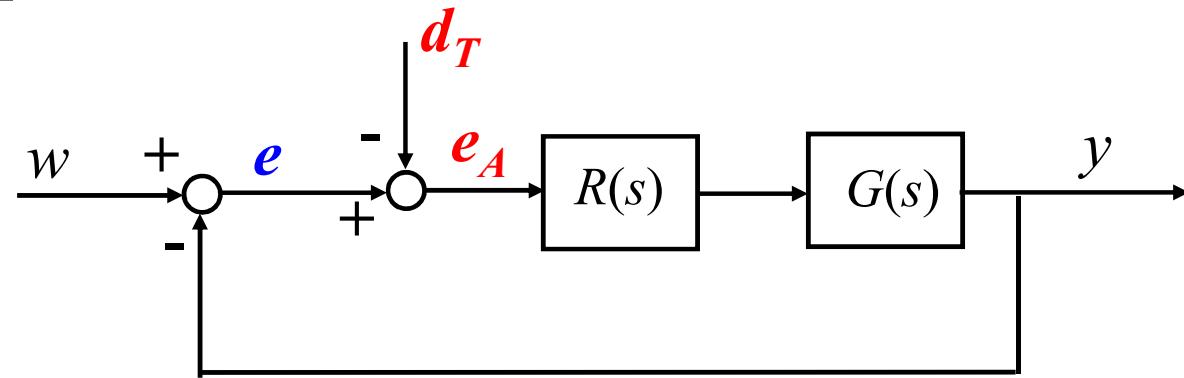
Qual'è la funzione di trasferimento da  $d_T$  a  $e$ ?



Quando è attivo l'ingresso  $d_T$ ,  
a valle del nodo sommatore  
non c'è l'errore!

$$e_A(t) = w(t) - (d_T(t) + y(t)) = w(t) - y(t) - d_T(t) = \underbrace{e(t) - d_T(t)}_{\text{errore apparente}}$$

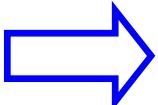
Come si può calcolare la funzione di trasferimento da  $d_T$  a  $e$ ?



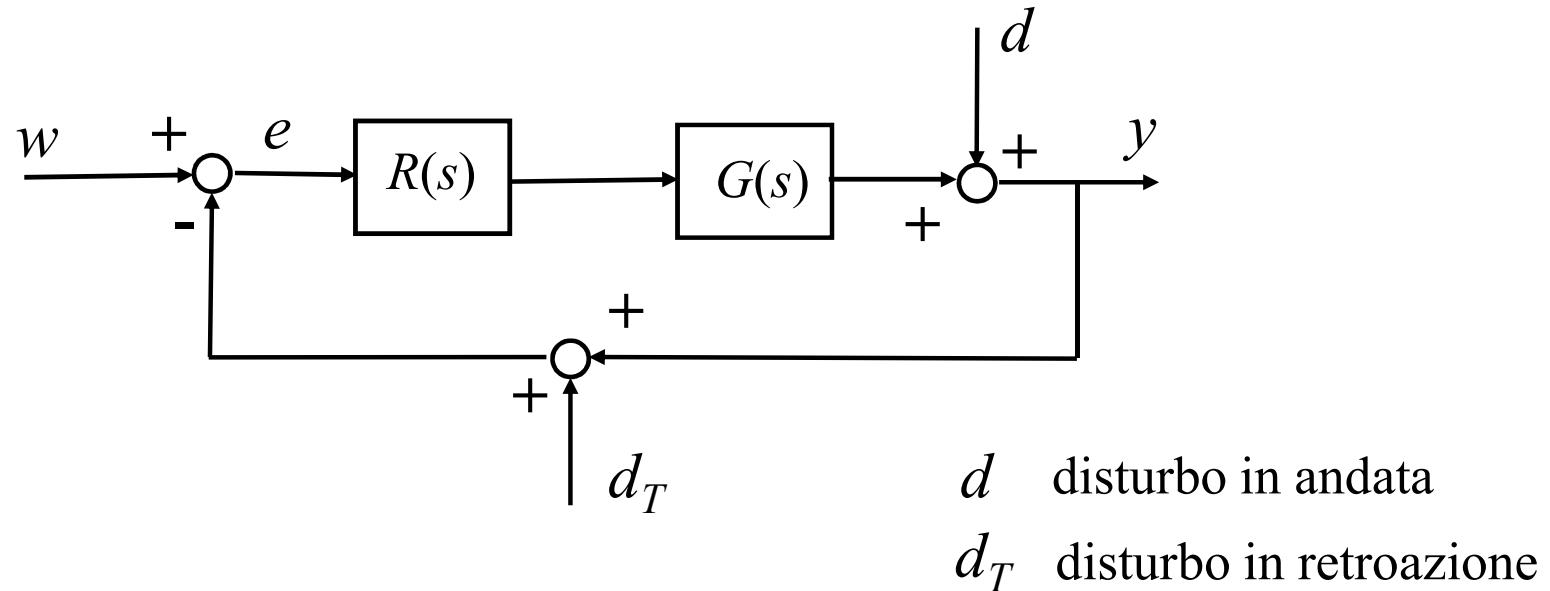
$$\frac{E(s)}{D_T(s)} = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = F(s)$$

$$\frac{Y(s)}{D_T(s)} = \frac{-R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} = -\frac{L(s)}{1 + L(s)} = -F(s)$$

E' un filtro passa-basso con banda passante  $B_F \cong [0, \omega_c]$

- il disturbo  $d_T$  viene attenuato solo in  $[\omega_c, \infty]$
  - l'attenuazione in questa banda è circa uguale a  $|L(j\omega)|$
-  attenzione ai disturbi “lenti” sul trasduttore!  
(Il controllore elimina automaticamente il “rumore” sul sensore,  
ma non può compensare un “offset” – cattiva taratura etc...)

## Riepilogo sull'attenuazione dei disturbi



il sistema di controllo è capace di attenuare

- le componenti “lente” di  $d$        $(\omega < \omega_c)$
- le componenti “veloci” di  $d_T$        $(\omega > \omega_c)$

# Lezione 25.

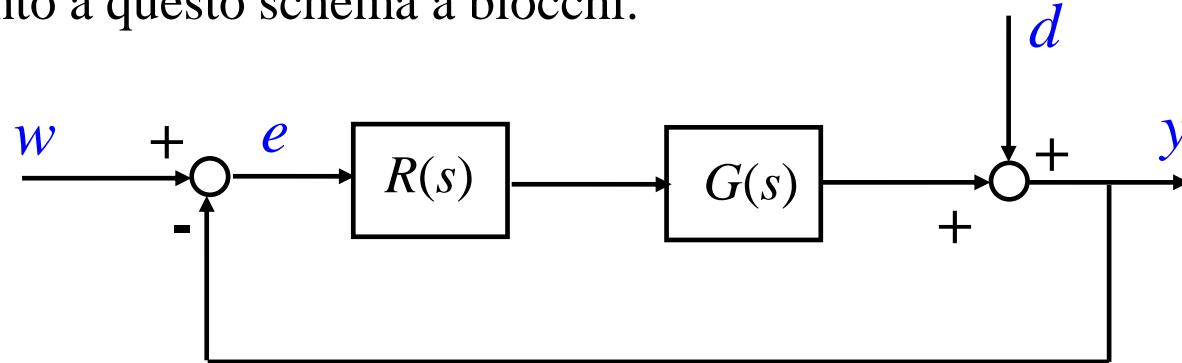
# Introduzione al progetto

# **Schema**

1. Il problema del progetto
2. Specifiche di progetto
3. Formulazione delle specifiche
4. Loop shaping
5. Progetto statico
6. Progetto dinamico

# 1. Il problema del progetto

Per presentare i metodi di progettazione dei sistemi di controllo, faremo riferimento a questo schema a blocchi.



$G(s)$  è la **funzione di trasferimento del sistema sotto controllo (NOTA)**  
 $R(s)$  è la **funzione di trasferimento del controllore (NON NOTA)**.

L'obiettivo è determinare  $R(s)$  in modo che il sistema retroazionato soddisfi alcune specifiche assegnate a fronte di andamenti assegnati degli ingressi.

Nel seguito si assumerà che la funzione di trasferimento d'anello

$$L(s) = R(s)G(s)$$

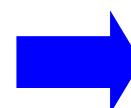
soddisfi le condizioni di applicabilità del criterio di Bode.

## 2. Specifiche di Progetto

Facendo riferimento alla funzione d'anello  $L(s)$  ed in particolare:

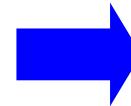
- al suo **guadagno  $\mu$** ,
- al suo **tipo  $g$** ,
- alla sua **pulsazione critica  $\omega_C$**
- al **marginе di fase  $\varphi_m$**  ed al **marginе di guadagno  $k_m$**  del sistema retroazionato

✓ As. stabilità del sistema retroazionato  
(in condizioni nominali)



Criterio di Bode  
 $\mu > 0$  &  $\varphi_m > 0^\circ$

✓ Stabilità robusta



$\varphi_m$  e/o  $k_m$  elevati

✓ Precisione statica



$g > 0$  e/o  $\mu$  elevato

✓ Precisione dinamica

- velocità

- smorzamento



$\omega_c$  elevata

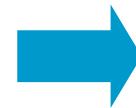
$\varphi_m$  elevato

✓ Attenuazione disturbi  
in andata



$|L(j\omega)| \gg 0$  dB  
per  $\omega < \omega_c$   
( $\omega_c$  elevata)

✓ Realizzabilità del regolatore



$R(s)$  almeno  
propria

### 3. Formulazione delle specifiche di progetto

#### Specifiche statiche

$$|e(\infty)| \leq \bar{e} \quad \text{con } w(t) \text{ e } d(t) \text{ dati}$$

$$e(\infty) = 0 \quad (\text{di solito scalini e/o rampe})$$

#### Specifiche dinamiche

✓  $\omega_{\min} \leq \omega_c \leq \omega_{\max}$   specifica di velocità

✓  $\varphi_m \geq \bar{\varphi}_m$    specifica di robustezza

✓  $k_m \geq \bar{k}_m$

Altre formulazioni delle specifiche  
possono essere trasformate nelle precedenti.

## Specifiche dinamica di velocità

✓ Tempo di assestamento della risposta allo scalino  
del sistema retroazionato  $t_a < \bar{t}$

□ Se  $F(s)$  ha poli dominanti complessi

$$\omega_c > \frac{500}{\bar{\varphi}_m \bar{t}}$$

$$\text{Infatti } t_a \cong \frac{5}{\xi \omega_n} \cong \frac{500}{\bar{\varphi}_m \omega_c} < \bar{t} \quad \rightarrow \quad \omega_c > \frac{500}{\bar{\varphi}_m \bar{t}}$$

Quale valore per  $\varphi_m$ ?

Se c'è una specifica di robustezza ( $\varphi_m \geq \bar{\varphi}_m$ ) si sceglie il limite di tale specifica

□ Se  $F(s)$  ha polo dominante reale

$$\text{Infatti } t_a \cong \frac{5}{\omega_c} < \bar{t} \quad \rightarrow \quad \omega_c > \frac{5}{\bar{t}}$$

$$\omega_c > \frac{5}{\bar{t}}$$



## Esempio

Progettare un controllore  $R(s)$  per una assegnata  $G(s)$  in modo che:

- ✓ la risposta allo scalino del sistema retroazionato  
abbia tempo di assestamento  $t_a < 5$  s
- ✓ il margine di fase del sistema retroazionato sia  $\varphi_m \geq 30^\circ$

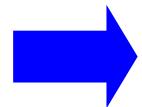
La specifica sul tempo di assestamento si può tradurre  
nella seguente

$$\omega_c > \frac{500}{\bar{\varphi}_m \bar{t}} = \frac{500}{30 \cdot 5} = \frac{10}{3} \text{ rad/s}$$



## Specifica dinamica di robustezza

- ✓ Massima sovraelongazione percentuale  $S\% < \bar{S}$



Infatti  $S\% = 100 e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$  &  $\xi \cong \frac{\varphi_m}{100}$

$$\ell - \frac{\xi \omega_n \pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

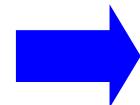
$$\varphi_m > \frac{100 \ln\left(\frac{100}{\bar{S}}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln\left(\frac{100}{\bar{S}}\right)\right)^2}}$$



E' possibile dare specifiche più precise per la reiezione dei disturbi.

Per esempio è possibile richiedere uno specifico valore di attenuazione ( $N$  dB) di disturbi in una certa banda  $[\omega_1, \omega_2]$ .

- ❑ Disturbo sulla linea di andata nella banda  $[\omega_1, \omega_2]$  attenuato di almeno  $N$  dB

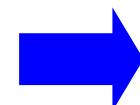


$$|L(j\omega)| \geq N \text{ dB}$$

per  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$

(con  $\omega_c \geq \omega_2$ )

- ❑ Disturbo sulla linea di retroazione nella banda  $[\omega_1, \omega_2]$  attenuato di almeno  $N$  dB



$$|L(j\omega)| \leq -N \text{ dB}$$

per  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$

(con  $\omega_c \leq \omega_1$ )

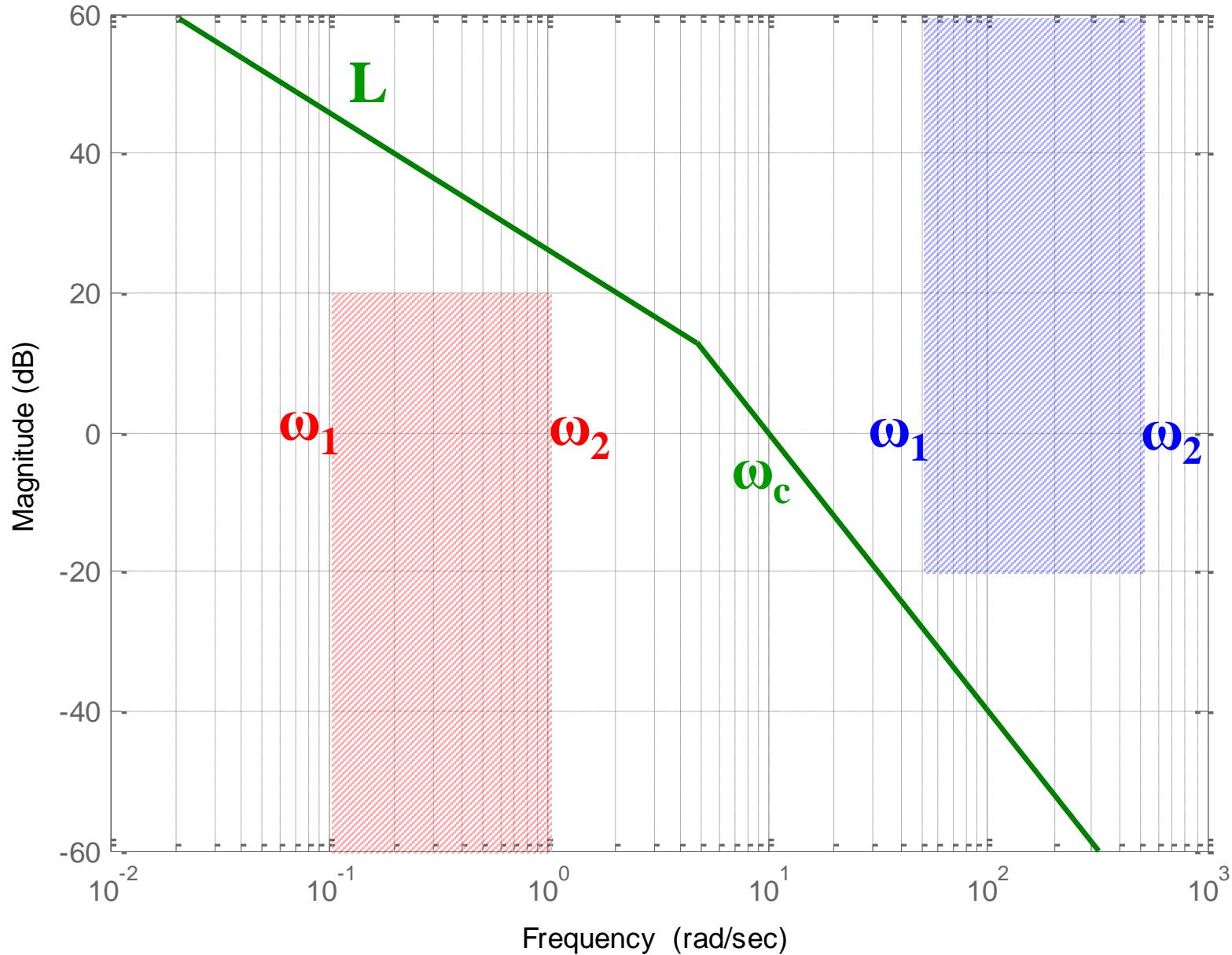
## Esempio

Progettare un controllore  $R(s)$  per una assegnata  $G(s)$  in modo tale che:

- attenui un disturbo **in andata** con banda [0.1,1] di almeno 20 dB;
- attenui un disturbo **in retroazione** con banda [50,500] di almeno 20 dB.

Come deve essere fatta la  $L(s)$ ? Dove è ragionevole cercare di mettere la  $\omega_c$ ?





## 4. Loop Shaping

1. Trasformare le specifiche di progetto in vincoli su  $L(s)$ .
2. Progetto statico (rispetto delle specifiche statiche)
3. Progetto dinamico (rispetto delle specifiche dinamiche)
  - a. Si procede per tentativi
  - b. Al termine di ogni tentativo si verifica se il controllore scelto rispetta le specifiche dinamiche

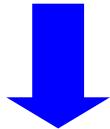
## Progetto statico e progetto dinamico

La funzione di trasferimento del controllore viene fattorizzata

$$R(s) = R_1(s)R_2(s)$$

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^r}$$

Parte statica



Progetto statico

(soddisfare le specifiche statiche)

$$R_2(s) = \frac{\prod_i(1 + sT_i)}{\prod_i(1 + s\tau_i)}$$

Parte dinamica  
(rete stabilizzatrice)



Progetto dinamico

(soddisfare le specifiche dinamiche)

## 5. Progetto statico

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^r} \quad \text{Parte statica}$$

La specifica statica viene formulata mediante valori desiderati per l'**errore a transitorio esaurito  $e(\infty)$** .

Bisogna garantire la specifica statica **a fronte di andamenti assegnati per gli ingressi** (nel nostro caso il riferimento  $w(t)$  ed il disturbo sulla linea di andata  $d(t)$ ).

L'obiettivo è **scegliere il tipo del controllore  $r$**  ed eventualmente, se necessario, **calcolare il valore di  $\mu_R$**  minimo per il rispetto delle specifiche (applicando il teorema del valore finale o le «tabelline» delle lezioni precedenti).

L'errore a transitorio esaurito, per il principio di sovrapposizione degli effetti, è dato dalla somma dei contributi dovuti agli ingressi (riferimento e disturbo sulla linea di andata)

$$e(\infty) = e_w(\infty) + e_d(\infty)$$

Di norma, per avere un po' di margine, ci si mette nel caso pessimo, per cui vale sempre la seguente diseguaglianza

$$|e(\infty)| = |e_w(\infty) + e_d(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)|$$

Ci si riconduce quindi a **calcolare i valori del modulo dell'errore a transitorio esaurito dovuti a ciascun ingresso**. Tali valori si possono leggere nelle tabelle delle lezioni precedenti oppure calcolare applicando il teorema del valore finale.

Di norma, nell'ambito dei problemi presentati in questo corso, si procede come segue.

1) Si calcola la funzione di trasferimento d'anello con  $G(s)$  nota e  $R(s)$  non nota

$$L(s) = R(s)G(s) = \color{blue}{R_1(s)R_2(s)} G(s) = \frac{\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)} G(s) =$$

$$= \frac{\mu_R}{s^r} \frac{\mu_G}{s^m} \frac{\prod_i(1+sT_i)}{\prod_i(1+s\tau_i)} \frac{\prod_k(1+sT_k)}{\prod_k(1+s\tau_k)}$$

dove

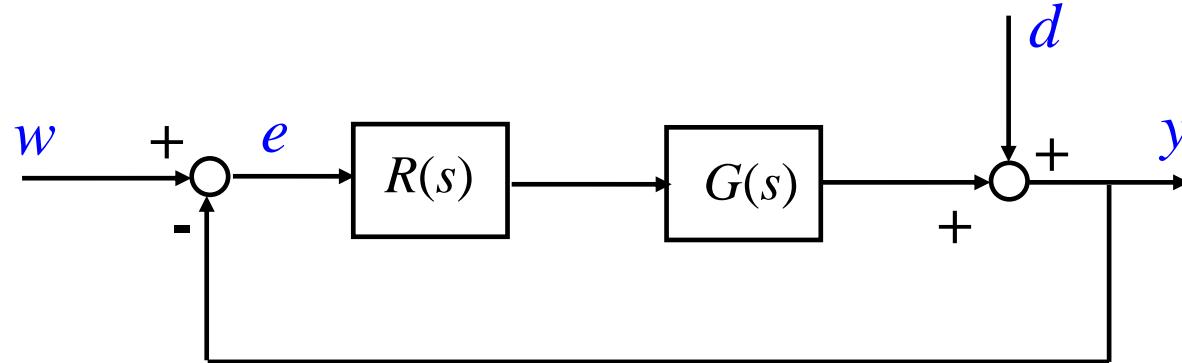
$\mu = \color{blue}{\mu_R}\mu_G$  è il **guadagno d'anello** (con  $\mu_G$  noto e  $\color{blue}{\mu_R}$  da scegliere)

$g = \color{blue}{r} + m$  è il **tipo della funzione d'anello** (con  $m$  noto e  $\color{blue}{r}$  da scegliere)

- 2) Ai fini del progetto statico è utile solo la parte statica della funzione d'anello, (la parte dinamica non conta, siamo nel limite per  $s \rightarrow 0$  ! ) e quindi, sulla base delle caratteristiche degli ingressi (**riferimento** e **disturbo sulla linea di andata**), si sceglieranno i valori più opportuni per il **tipo dell'anello  $q$**  (e di conseguenza per  $r$ , dal momento che  $m$  è noto) e **per il guadagno d'anello  $\mu$**  (e di conseguenza per  $\mu_R$  dal momento che  $\mu_G$ ) utilizzando le «tabelline» o applicando il teorema del valore finale.
- 3) Nel caso ci fossero altri ingressi, per esempio disturbi di carico o disturbi sulla linea di retroazione, bisogna calcolare anche il loro contributo (di norma applicando il teorema del valore finale).

# Alcuni esempi

Gli esempi qui presentati faranno sempre riferimento a questo schema di controllo.



Le funzioni di trasferimento sono

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = \frac{\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)}$$
 **Non  
NOTA**

$$G(s) = \frac{\mu_G}{s^m} \frac{\prod_k (1 + sT_k)}{\prod_k (1 + s\tau_k)}$$
 **NOTA**

## Esempio 1

Sistema sotto controllo

$$G(s) = \frac{10(1 + 0.1s)}{(1 + s)^2}$$

Quindi, guadagno del sistema  $\mu_G = 10$  e tipo del sistema  $m = 0$ .

**Specifiche statiche:**

$$|e(\infty)| \leq 0.1 \quad \text{per } w(t) = sca(t) \text{ e } d(t) = -2sca(t)$$

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello

$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)G(s) = \color{blue}{R_1(s)R_2(s)} G(s) = \frac{\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \frac{10(1 + 0.1s)}{(1 + s)^2} = \\ &= \frac{10\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \frac{(1 + 0.1s)}{(1 + s)^2} \end{aligned}$$

Il **guadagno d'anello** è  $\mu = 10\mu_R$ .

Il **tipo dell'anello** è  $g = r$ .

Riprendiamo la «tabellina» che ci fornisce il valore del modulo dell'errore a regime a fronte di ingressi a scalino e rampa.

|  | $A \text{ sca}(t)$             | $A \text{ ram}(t)$ |
|--|--------------------------------|--------------------|
| Valore di regime $ e(\infty) $<br>in risposta a $w(t)$ oppure a $d(t)$ | $g = 0$<br>$\frac{A}{1 + \mu}$ | $\infty$           |
|  | $g = 1$<br>0                   | $\frac{A}{\mu}$    |
|  | $g = 2$<br>0                   | 0                  |
|  | $g = 3$<br>0                   | 0                  |



Gli ingressi sono scalini, quindi guardo la **prima colonna**.

**Scegliendo  $g = r = 0$  (prima riga)** avrò

$$|e_w(\infty)| = \frac{1}{1 + 10\mu_R}$$

$$|e_d(\infty)| = \frac{2}{1 + 10\mu_R}$$

Per rispettare la specifica deve essere

$$|e(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)| \leq 0.1$$

cioè

$$\frac{3}{1 + 10\mu_R} \leq 0.1$$

da cui

$$\mu_R \geq 2.9$$

Quindi il progetto statico si conclude con le scelte di  $r = 0$  e di un valore di  $\mu_R$  che rispetti il vincolo  $\mu_R \geq 2.9$  (per esempio  $\mu_R = 4$ ).

**Scegliendo  $g = r = 1$  (seconda riga)** avrò

$$e_w(\infty) = 0$$

$$e_d(\infty) = 0$$

per qualsiasi valore del guadagno d'anello  $\mu = 10\mu_R$ .

**La presenza di un integratore nell'anello mi garantisce errore nullo a transitorio esaurito a fronte di andamento a scalino (di qualunque ampiezza) degli ingressi (riferimento e disturbo sulla linea di andata).**

La specifica

$$|e(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)| \leq 0.1$$

è quindi sempre rispettata per qualunque valore di  $\mu_R$  si voglia scegliere.

Quindi il progetto statico si conclude con la scelta di  $r = 1$ .

Il guadagno del controllore  $\mu_R$  verrà scelto durante il progetto dinamico (è una «carta in più da giocare» dopo).

Quindi, concludendo, ci sono due possibili scelte per il progettista.

### **Progetto statico A**

$$r = 0 \quad \& \quad \mu_R = 4$$

$$R_1(s) = 4$$

### **Progetto statico B**

$$r = 1$$

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

## Esempio 2

Sistema sotto controllo

$$G(s) = \frac{8(1 + 0.5s)}{s(1 + 2s)(1 + 0.1s)}$$

Quindi, guadagno del sistema  $\mu_G = 8$  e tipo del sistema  $m = 1$ .

**Specifiche statiche:**

$$|e(\infty)| < 0.05 \quad \text{per } w(t) = 4sca(t) \text{ e } d(t) = sca(t)$$

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello

$$\begin{aligned} L(s) = R(s)G(s) &= R_1(s)R_2(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \frac{8(1 + 0.5s)}{s(1 + 2s)(1 + 0.1s)} = \\ &= \frac{8\mu_R}{s^{r+1}} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \frac{(1 + 0.5s)}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)} \end{aligned}$$

Il **guadagno d'anello** è  $\mu = 8\mu_R$ .

Il **tipo d'anello** è  $g = r + 1$ .

Riprendiamo la «tabellina» che ci fornisce il valore del modulo dell'errore a regime a fronte di ingressi a scalino e rampa.

|  | $A \text{ sca}(t)$             | $A \text{ ram}(t)$ |
|--|--------------------------------|--------------------|
| Valore di regime $ e(\infty) $<br>in risposta a $w(t)$ oppure a $d(t)$ | $g = 0$<br>$\frac{A}{1 + \mu}$ | $\infty$           |
|  | $g = 1$<br>0                   | $\frac{A}{\mu}$    |
|  | $g = 2$<br>0                   | 0                  |
|  | $g = 3$<br>0                   | 0                  |



Gli ingressi sono scalini, quindi guardo la **prima colonna**.

Però so che  $g = r + 1$  e quindi **è sufficiente scegliere  $r = 0$  per essere sulla seconda riga** ed avere quindi valori nulli per i contributi all'errore a regime.

Quindi il progetto statico si conclude con la scelta di  $r = 0$ , mentre il guadagno del controllore  $\mu_R$  verrà scelto durante il progetto dinamico.

## Esempio 3

Sistema sotto controllo

$$G(s) = \frac{22}{(1 + 5s)(1 + 0.1s)^2}$$

Quindi, guadagno del sistema  $\mu_G = 22$  e tipo del sistema  $m = 0$ .

**Specifiche statiche:**

$$e(\infty) = 0 \quad \text{per } w(t) = 3sca(t) \text{ e } d(t) = \pm sca(t)$$

Per prima cosa si scrive la funzione di trasferimento d'anello

$$\begin{aligned} L(s) &= R(s)G(s) = \color{blue}{R_1(s)} \color{red}{R_2(s)} G(s) = \frac{\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \frac{22}{(1 + 5s)(1 + 0.1s)^2} = \\ &= \frac{22\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \frac{1}{(1 + 5s)(1 + 0.1s)^2} \end{aligned}$$

**Il guadagno d'anello** è  $\mu = 22\mu_R$ .

**Il tipo dell'anello** è  $g = r$ .

Riprendiamo la «tabellina» che ci fornisce il valore del modulo dell'errore a regime a fronte di ingressi a scalino e rampa.

|  | $A \text{ sca}(t)$             | $A \text{ ram}(t)$ |
|--|--------------------------------|--------------------|
| Valore di regime $ e(\infty) $<br>in risposta a $w(t)$ oppure a $d(t)$ | $g = 0$<br>$\frac{A}{1 + \mu}$ | $\infty$           |
|  | $g = 1$<br>0                   | $\frac{A}{\mu}$    |
|  | $g = 2$<br>0                   | 0                  |
|  | $g = 3$<br>0                   | 0                  |



Gli ingressi sono scalini, quindi guardo la **prima colonna**.

La specifica statica mi impone  $e(\infty) = 0$  e quindi **sono obbligato ad andare sulla seconda riga**, sono obbligato a scegliere  $g = r = 1$  se voglio contributi nulli all'errore a regime.

Quindi il progetto statico si conclude con la scelta di  $r = 1$ , mentre il guadagno del controllore  $\mu_R$  verrà scelto durante il progetto dinamico.

## 6. Progetto dinamico

$$R_2(s) = \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \quad \text{Parte dinamica}$$

La scelta della parte dinamica avviene per tentativi e di norma il primo tentativo è

$$R_2(s) = 1$$

cioè non si inserisce una parte dinamica.

Si verifica quindi se le specifiche dinamiche sono rispettate e, in caso negativo, si procede ad inserire poli e zeri cercando di ottenere una funzione d'anello che rispetti le specifiche date, avendo cura di rispettare sempre le seguenti condizioni:

**1) Non modificare la parte statica del controllore**

(cioè il guadagno  $\mu_R$ , se scelto precedentemente, ed il tipo  $r$ ).

**2) Il controllore  $R(s)$  ottenuto deve essere almeno proprio**

(non può avere più zeri che poli)

Dal momento che, di solito, le specifiche dinamiche riguardano la pulsazione critica  $\omega_C$  ed il margine di fase  $\varphi_m$ , per verificare se esse sono rispettate:

- 1) si traccia il **diagramma di Bode del modulo** della risposta in frequenza della funzione d'anello  $L(s)$  e, dopo aver individuato sul grafico la **pulsazione critica**  $\omega_C$ ,
- 2) si calcola la fase critica  $\varphi_C$  ed infine il margine di fase  $\varphi_m$ .

# Lezione 26.

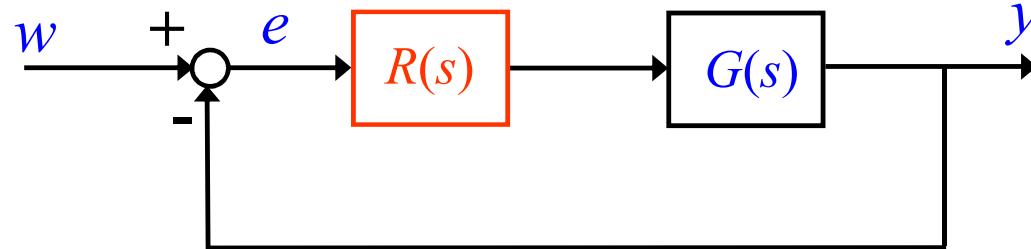
## Progetto per sistemi a fase minima

# Introduzione

Il progetto di controllori mediante “loop shaping” lascia al progettista molti gradi di libertà, in particolare nella scelta della parte dinamica del controllore.

In questa lezione saranno presentate alcune strategie e delle linee guida attraverso esempi (senza alcuna pretesa di esaustività).

# Esempio 1 – cancellazione del polo dominante



$$G(s) = \frac{10}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)}$$

- Specifiche di progetto
- $e(\infty) = 0$  a fronte di variazioni a scalino del riferimento
  - $\omega_c \geq 10 \text{ rad/s}$
  - $\varphi_m \geq 30^\circ$

## Progetto statico

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = \frac{\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)}$$

**parte statica**  
**parte dinamica**

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{10\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \frac{1}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)}$$

- guadagno d'anello  $10\mu_R > 0$
- tipo **r**

La scelta è obbligata.

Solo introducendo un polo nell'origine nella funzione d'anello si può avere errore nullo a regime a fronte di variazioni a scalino del riferimento.

$$e(\infty) = 0 \quad \text{se } \mathbf{r} > 0$$

scegliendo  $\mathbf{r} = 1$

$$e(\infty) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

$\mu_R$  verrà scelto dopo

**parte statica**

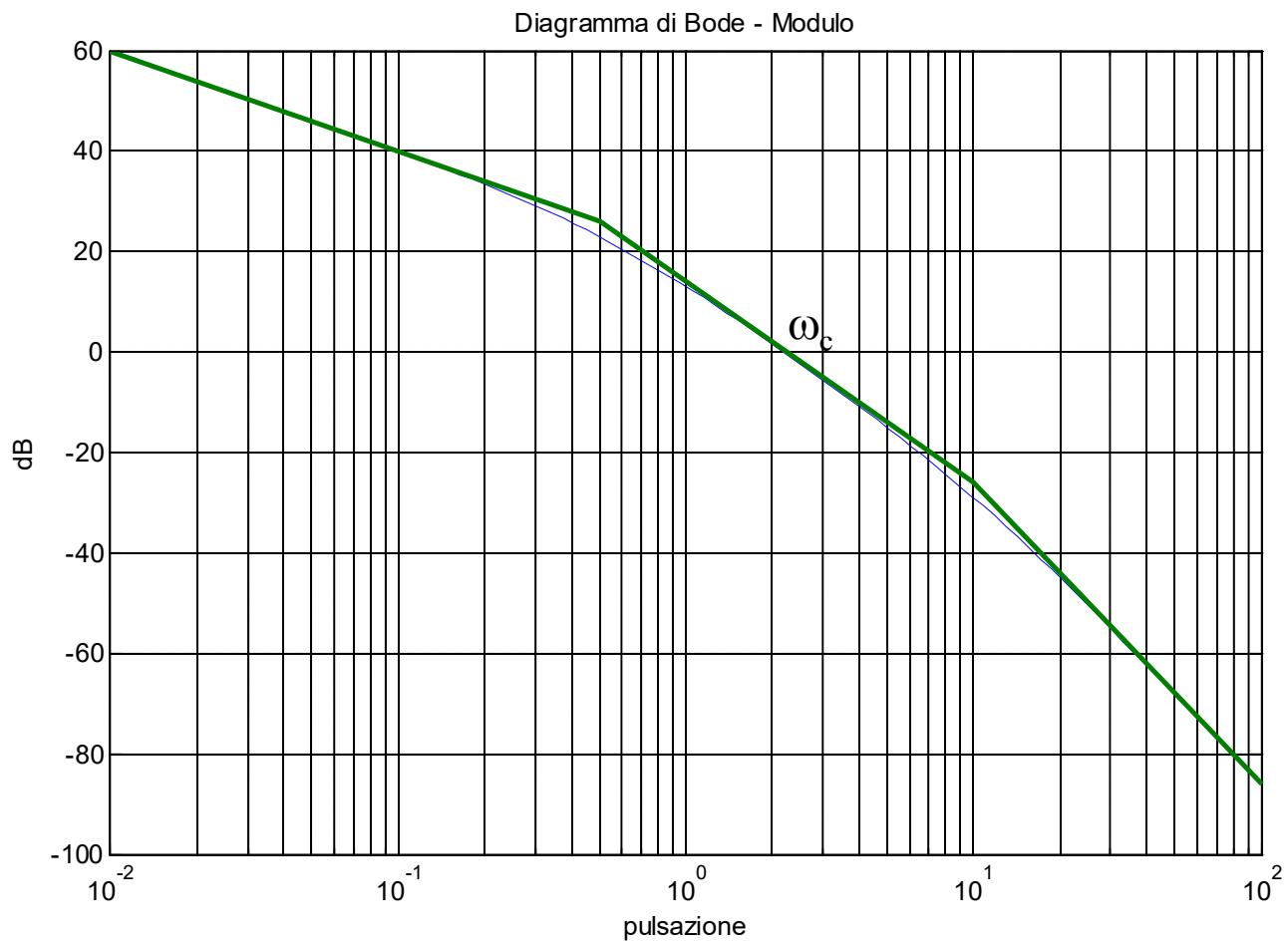
## Progetto dinamico

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{\mu_R}{s} R_2(s) \frac{10}{(1+2s)(1+0.1s)}$$

**Primo tentativo** :  $R_2(s) = 1 \quad \mu_R = 1$

$$L'(s) = \frac{10}{s(1+2s)(1+0.1s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di  $L'(j\omega)$



$\omega_c \approx 2,2 \text{ rad/s}$  no !

Fase critica  
sicuramente  
superiore a  $150^\circ$  no !

**Secondo tentativo** :  $R_2(s) = 1 + 2s \quad \mu_R = 1$

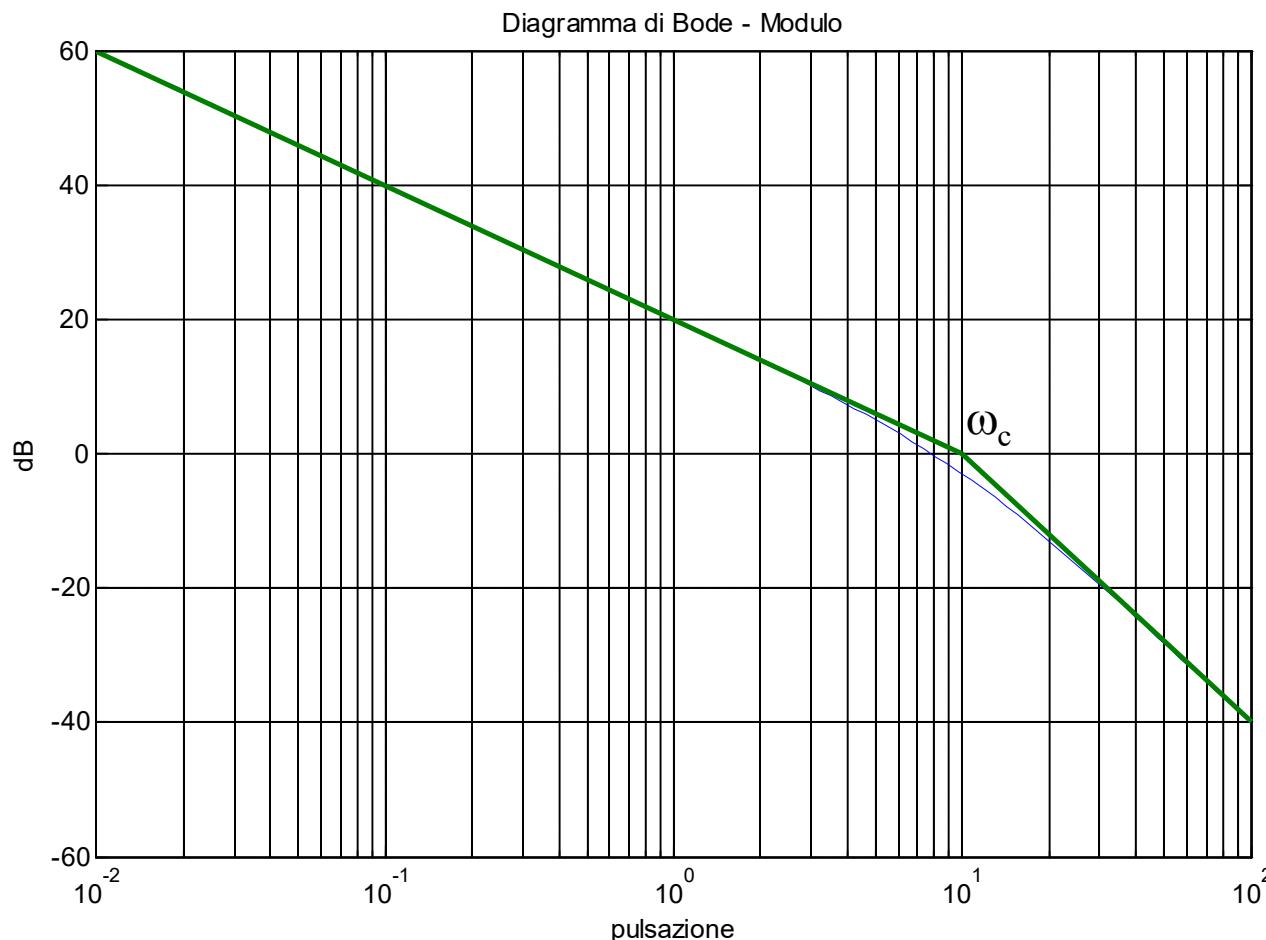
$$L''(s) = \frac{\mu_R}{s} R_2(s) G(s) = \frac{(1 + 2s)}{s} \frac{10}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)} = \frac{10}{s(1 + 0.1s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di  $L''(j\omega)$

### Nota bene

E' lecito scegliere uno zero soltanto come parte dinamica del regolatore?

Sì perché c'è un polo (nell'origine) nella parte statica e quindi il regolatore sarà proprio (un polo ed uno zero).



$$\omega_c \approx 10 \text{ rad/s} \quad \checkmark$$

Fase critica pari  
a  $-135^\circ$  quindi  
margini di fase

$$\varphi_m = 45^\circ \quad \checkmark$$

Non serve scegliere un valore del guadagno del regolatore  $\mu_R$  diverso da 1. Quindi la soluzione è

$$R(s) = \frac{1 + 2s}{s}$$

## Nota bene (per i “puristi”)

Ai fini delle attività didattiche fa fede il diagramma asintotico.

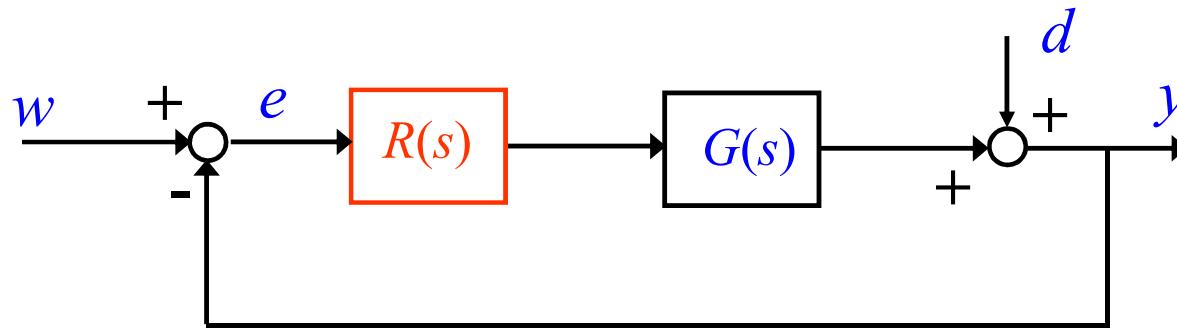
E’ però evidente che la pulsazione critica effettiva sarà inferiore a 10 rad/s.

E’ quindi lecito (per i “puristi”, appunto) correggere il progetto scegliendo un valore del guadagno del regolatore  $\mu_R$  tale che la pulsazione critica effettiva sia superiore a 10 rad/s.

Il valore minimo necessario perché ciò accada è (ovviamente)

$$\mu_R = 3 \text{ dB} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \mu_R = 1.41$$

## Esempio 2 – raccordi in AF e BF



$$G(s) = \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

- Specifiche di progetto
- $|e(\infty)| \leq 0.1$  con  $w(t) = \text{sca}(t)$
  - $d(t) = 5\text{sca}(t)$
  - $\omega_c \geq 0.2 \text{ rad/s}$
  - $\varphi_m \geq 60^\circ$

## Progetto statico

$$R(s) = R_1(s) R_2(s) = \frac{\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)}$$

**parte statica**  
**parte dinamica**

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{10\mu_R}{s^r} \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \frac{1}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

- guadagno d'anello  $10\mu_R > 0$
- tipo **r**

L'errore è dato dalla somma dei contributi di riferimento e disturbo

$$e(\infty) = e_w(\infty) + e_d(\infty)$$

Nel “caso pessimo” vale certamente la seguente disegualanza

$$|e(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)| \leq 0.1$$

I singoli contributi valgono (vedi tabella):

$$|e_w(\infty)| = \begin{cases} \frac{1}{1+10\mu_R} & \text{se } \mathbf{r} = 0 \\ 0 & \text{se } \mathbf{r} > 0 \end{cases}$$

$$|e_d(\infty)| = \begin{cases} \frac{5}{1+10\mu_R} & \text{se } \mathbf{r} = 0 \\ 0 & \text{se } \mathbf{r} > 0 \end{cases}$$

- scegliendo  $r = 1$

$$e(\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1(s) = \frac{\mu_R}{s} \quad \mu_R \text{ verrà scelto dopo}$$

- scegliendo  $r = 0$

$$\frac{6}{1+10\mu_R} \leq 0.1 \quad \Rightarrow \quad \mu_R \geq 5.9$$

$$\text{sceglio } \mu_R = 10 \quad \Rightarrow \quad R_1(s) = 10$$

## Progetto dinamico

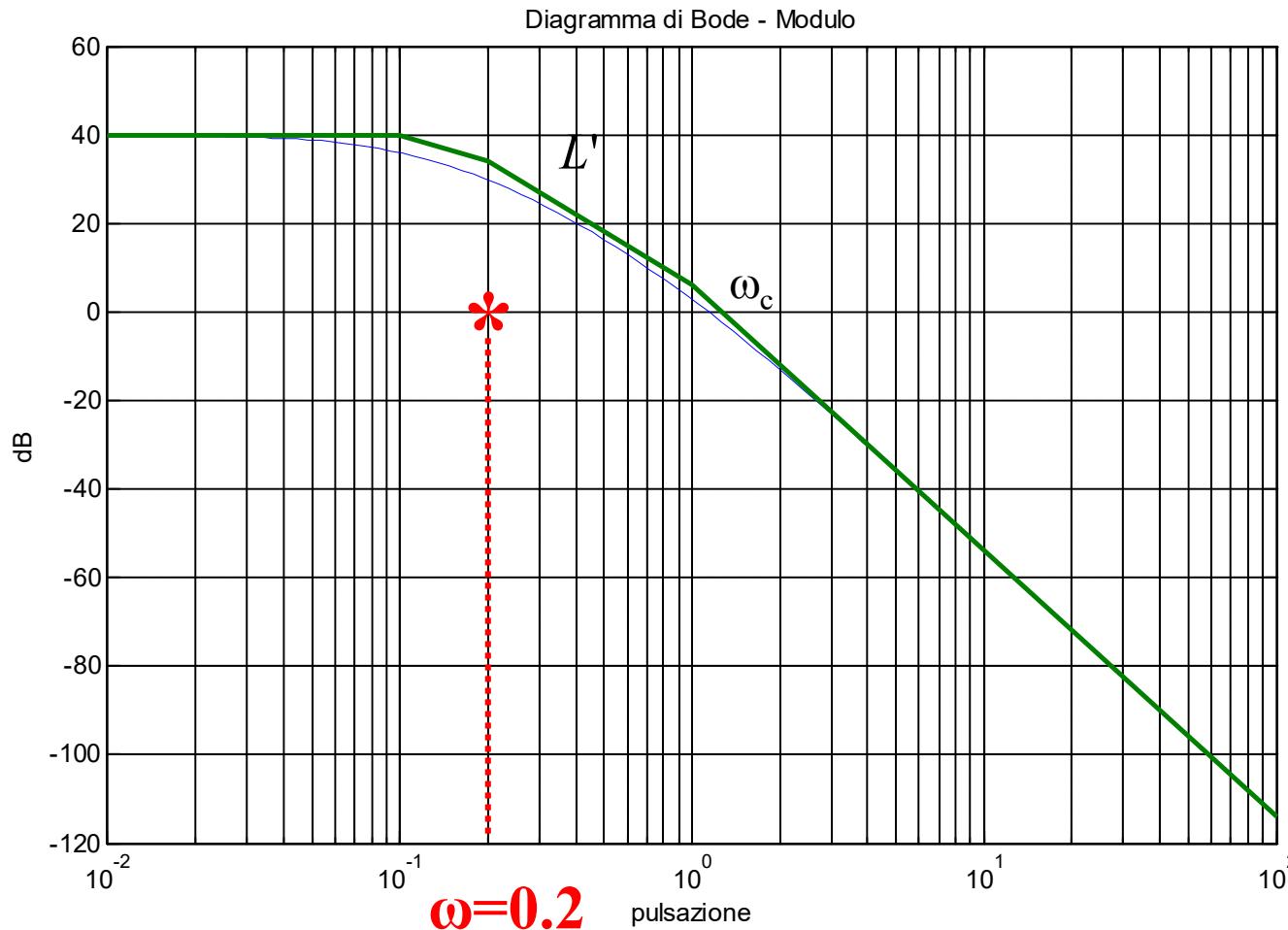
Si scelga  $R_1(s) = 10$

$$L(s) = R(s)G(s) = 10R_2(s) \frac{10}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

**Primo tentativo :**  $R_2(s) = 1$

$$L'(s) = \frac{100}{(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di  $L'(j\omega)$



$$\omega_c \approx 1,3 \text{ rad/s} \quad \checkmark$$

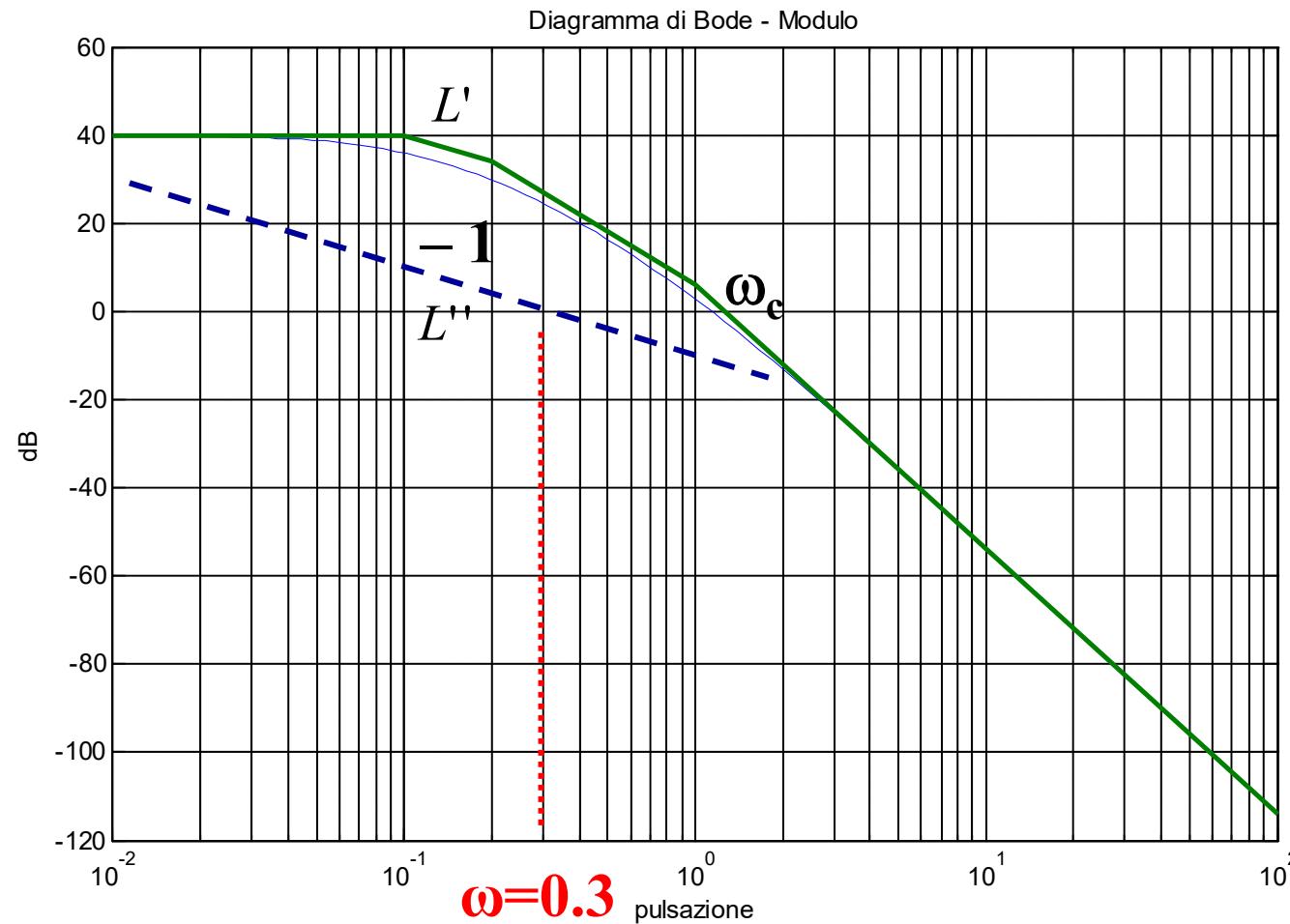
Fase critica  
sicuramente no !  
superiore a  $120^\circ$

### Nota bene

Sarebbe un errore gravissimo modificare il guadagno d'anello, perché si altererebbe il progetto statico.

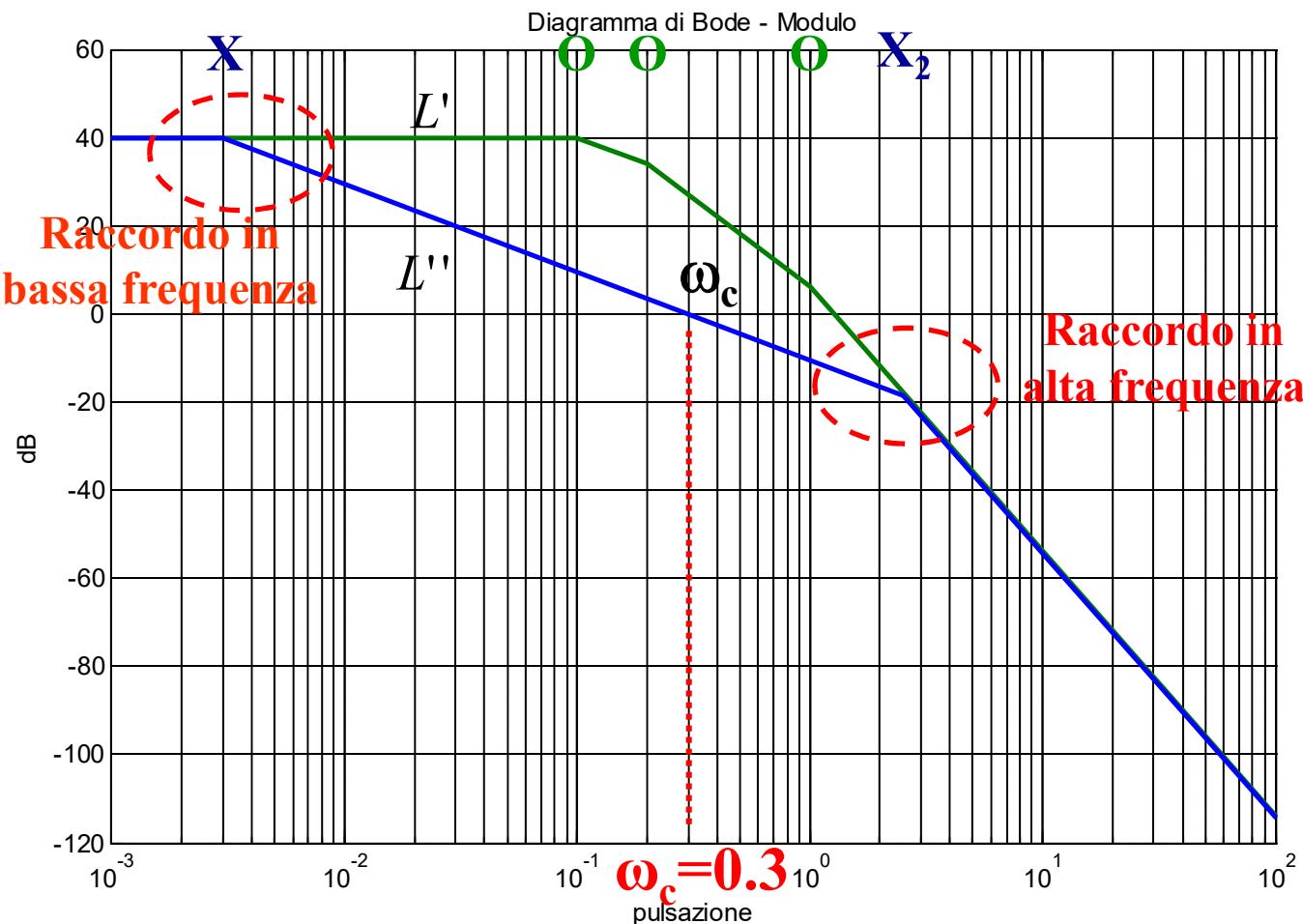
## Secondo tentativo

Costruire  $L''(s)$  in modo che  $|L''(j\omega)|$  tagli l'asse a 0 dB in  $\omega_c \approx 0.3$  con pendenza  $-1$  (-20 dB/dec)



Ciò si può ottenere:

- ✓ cancellando (con **tre zeri**) i tre poli di  $G(s)$
- ✓ raccordando il diagramma di  $|L''(j\omega)|$  con il diagramma di  $|L'(j\omega)|$  in bassa frequenza ed in alta frequenza, mediante l'introduzione in  $L''(s)$  di **tre poli** in posizioni opportune.



Quindi:

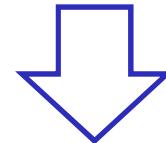
$$R_2(s) = \frac{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + \tau_{bf}s)(1 + \tau_{af}s)^2}$$

La posizione dei poli di raccordo si desume dal grafico:

- il polo in bassa frequenza non può che essere in 0.003;
- la coppia di poli in alta frequenza è in circa 2.5.

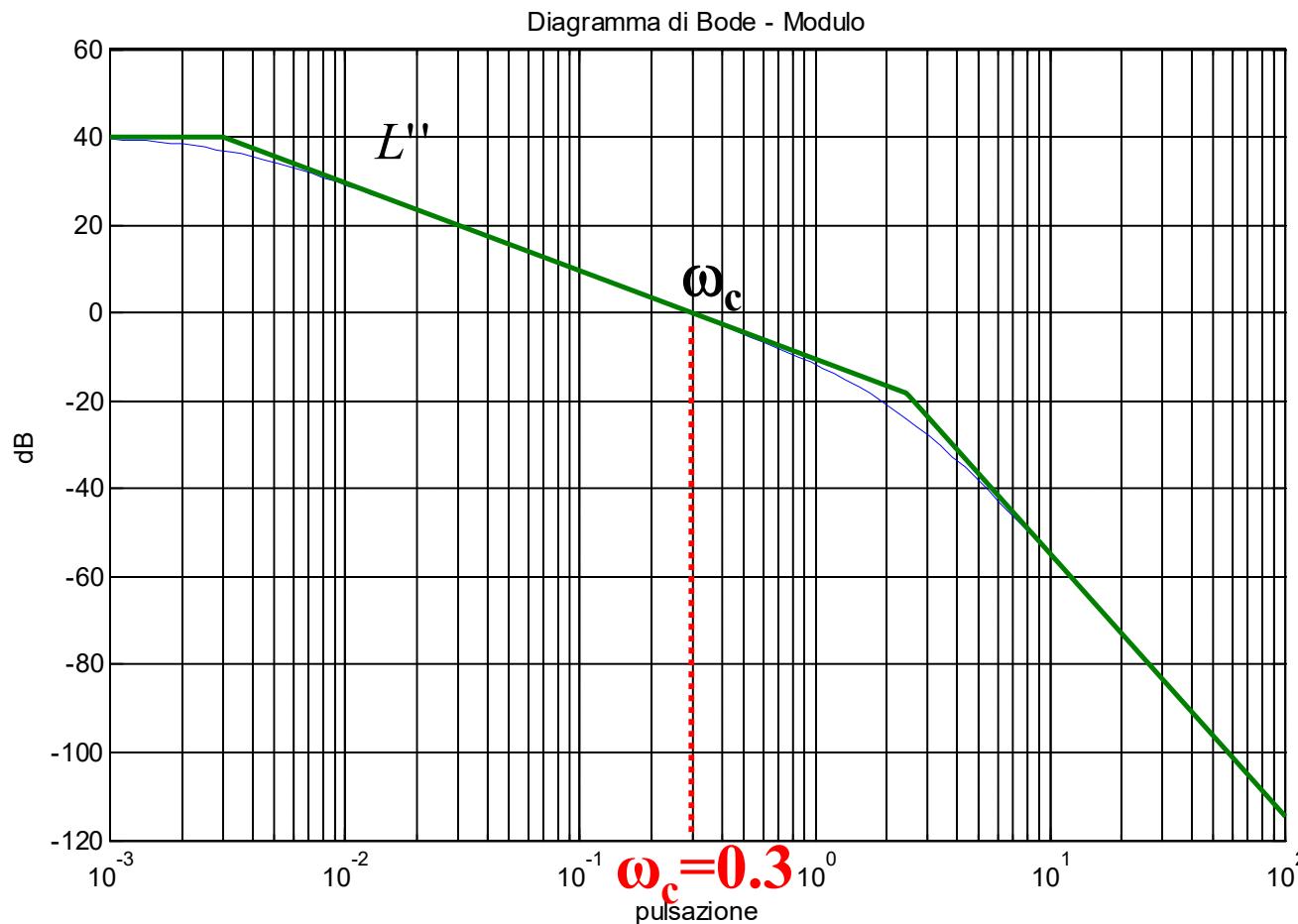
Cioè:

$$R_2(s) = \frac{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 333s)(1 + 0.4s)^2}$$



$$\begin{aligned} L''(s) &= R_1(s)R_2(s)G(s) = 10 \frac{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 333s)(1 + 0.4s)^2} \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)} = \\ &= \frac{100}{(1 + 333s)(1 + 0.4s)^2} \end{aligned}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di  $L''(j\omega)$



$$\omega_c \approx 0.3 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}\varphi_c &= -\text{atan}(333 \cdot 0.3) - 2\text{atan}(0.4 \cdot 0.3) = \\ &= -89.4^\circ - 2 \cdot 6.8^\circ = -103^\circ\end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\varphi_m = 77^\circ \quad \checkmark$$

$$R(s) = 10 \frac{(1+10s)(1+5s)(1+s)}{(1+333s)(1+0.4s)^2}$$

Nel progetto statico era possibile scegliere di inserire un polo nell'origine nella funzione d'anello. Quindi...

## Progetto dinamico (seconda opzione)

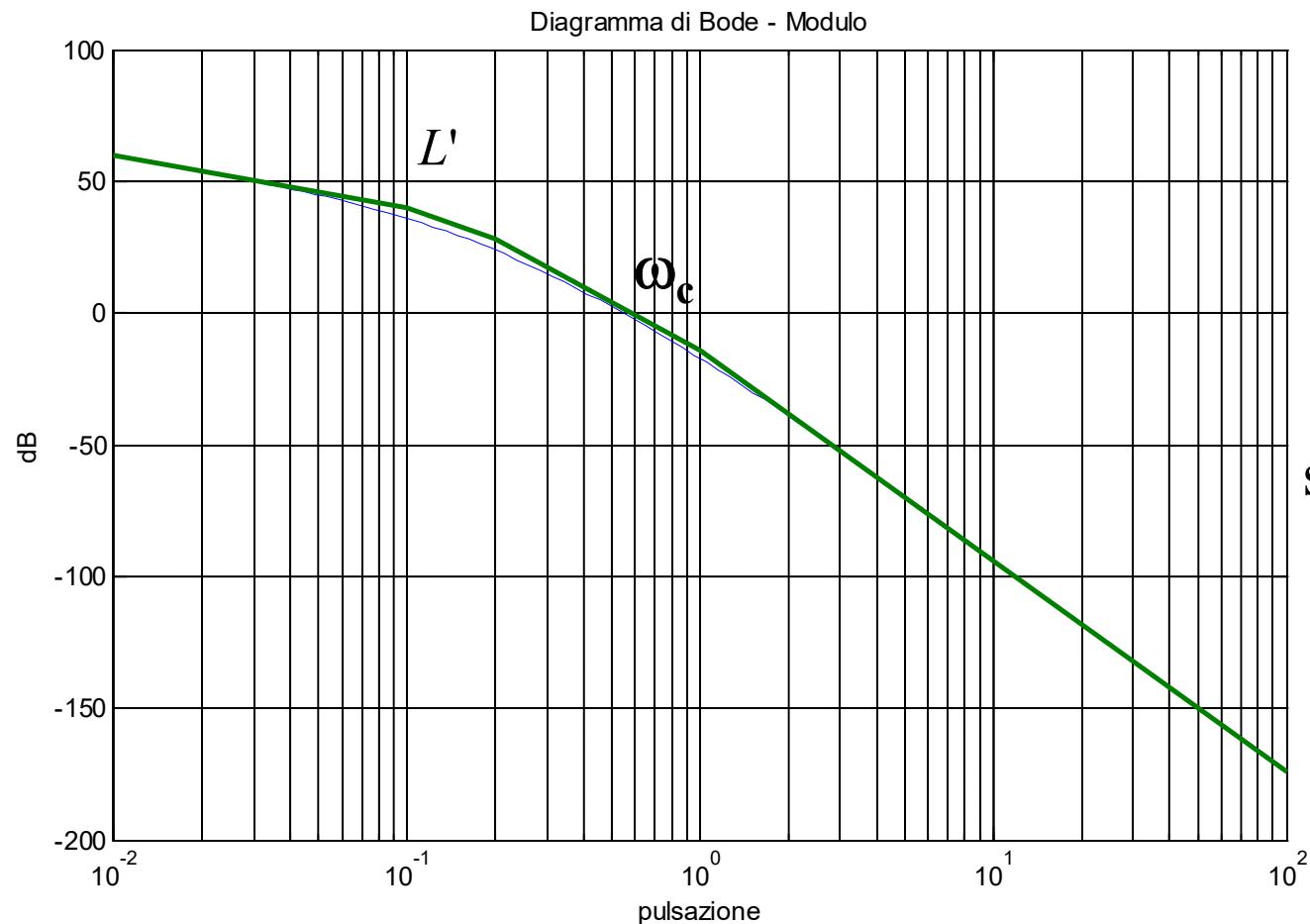
$$\text{Si scelga } R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$$

$$L(s) = R(s)G(s) = \mu_R R_2(s) \frac{10}{s(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

**Primo tentativo**  $R_2(s) = 1 \quad \mu_R = 1$

$$L'(s) = \frac{10}{s(1+10s)(1+5s)(1+s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di  $L'(j\omega)$



$$\omega_c \approx 0.6 \quad \checkmark$$

Fase critica  
sicuramente no !  
superiore a  $120^\circ$

**Secondo tentativo**  $R_2(s) = 1 + 10s$        $\mu_R = 1$

Si elimini il polo di  $G(s)$  in bassa frequenza

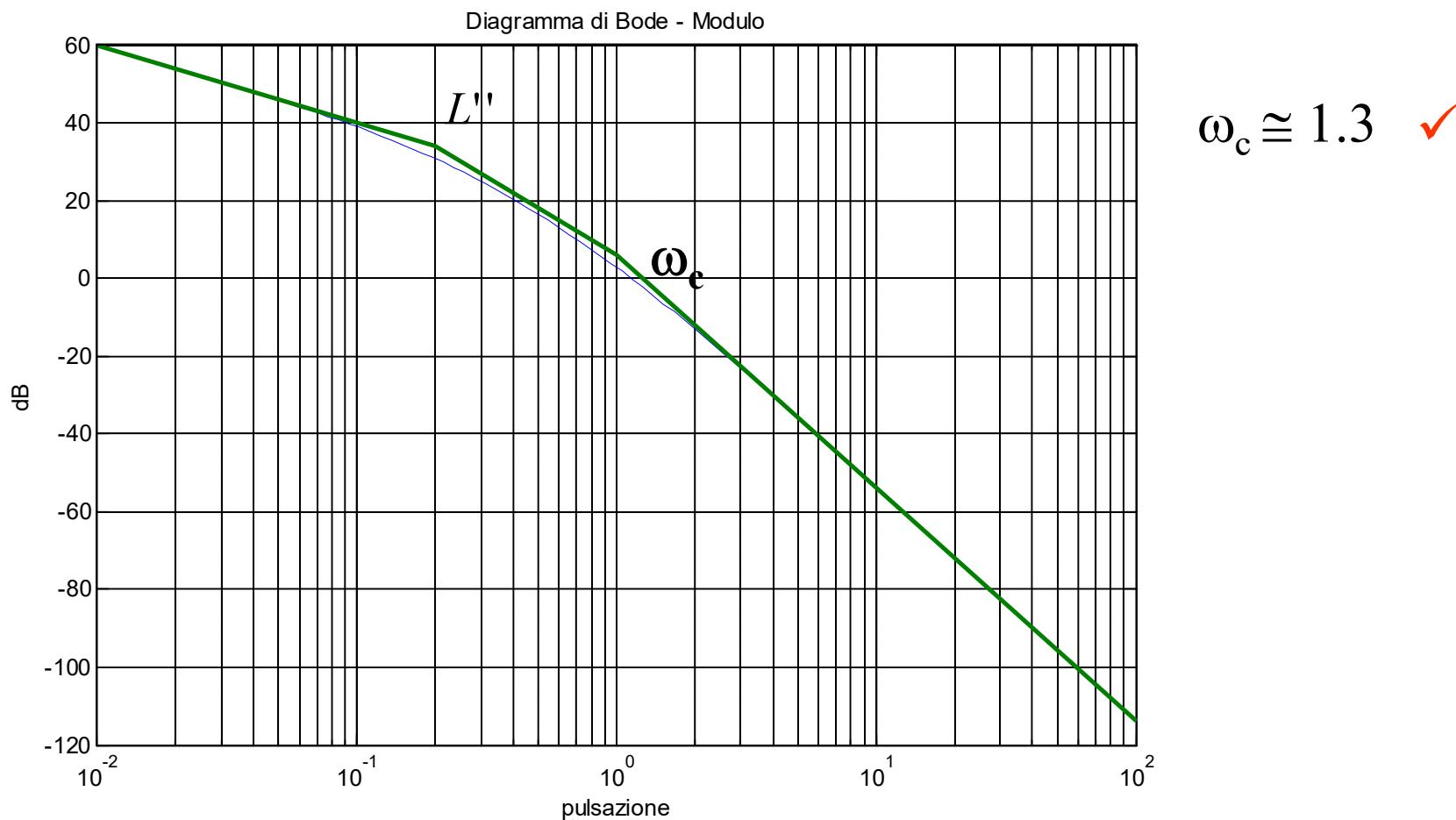
$$L''(s) = \frac{1}{s} (1 + 10s) \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)} = \frac{10}{s(1 + 5s)(1 + s)}$$

Si tracci il diagramma di Bode del modulo di  $L''(j\omega)$

### Nota bene

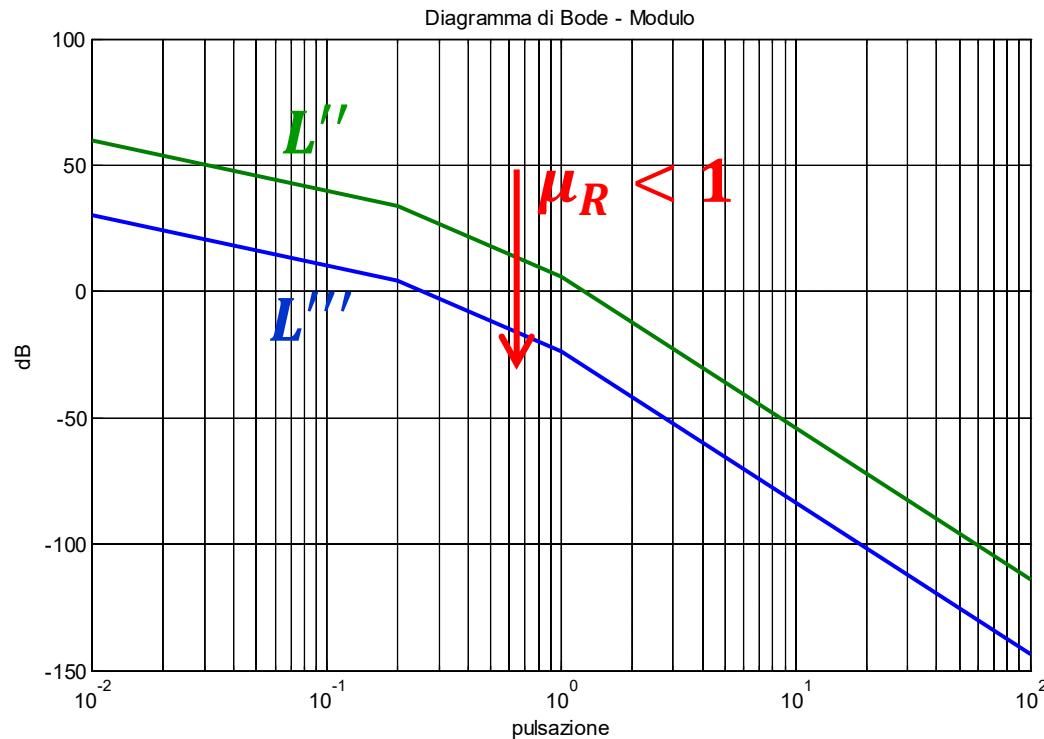
E' lecito scegliere uno zero soltanto come parte dinamica del regolatore?

Sì perché c'è un polo (nell'origine) nella parte statica e quindi il regolatore sarà proprio (un polo ed uno zero).



$$\begin{aligned}\varphi_c &= -90^\circ - \arctg(6.5) - \arctg(1.3) = \\ &= -90^\circ - 81.2^\circ - 52.4^\circ = -223.6^\circ \quad \text{sistema instabile}\end{aligned}$$

Ora bisogna decidere se **cancellare un altro polo** oppure **scegliere un valore del guadagno  $\mu_R$**  tale che le specifiche siano rispettate.



$$\begin{aligned}\varphi_c &= -90^\circ - \arctg(1) - \arctg(0.2) = \\ &= -90^\circ - 45^\circ - 11.3^\circ = -146.3^\circ \\ \varphi_m &= 33.7^\circ < 60^\circ\end{aligned}$$

Supponiamo di scegliere  $\mu_R$  tale che  $\omega_c = 0.2 \text{ rad/s}$  che è esattamente il limite della specifica.

Quanto vale il margine di fase?

**Non è possibile rispettare le specifiche modificando solo il guadagno.**

### Terzo tentativo

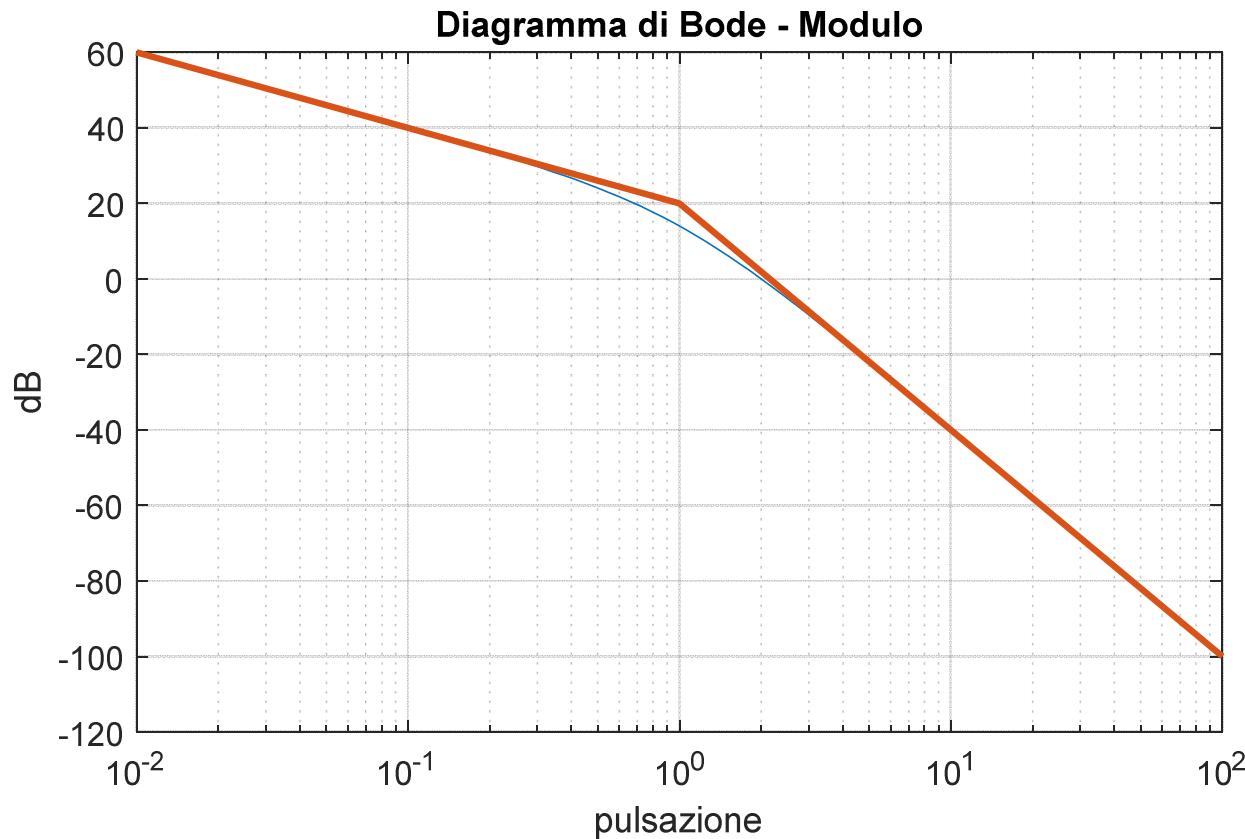
$$R_2(s) = \frac{(1 + 10s)(1 + 5s)}{1 + s}$$

Si elimina un ulteriore polo di  $G(s)$  aggiungendo un polo in alta frequenza (perché  $R(s)$  sia propria).

$$L^{iv}(s) = \frac{1}{s} \frac{(1 + 10s)(1 + 5s)}{1 + s} \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)} = \frac{10}{s(1 + s)^2}$$

$$\Rightarrow L^{iv}(s) = \frac{10}{s(1 + s)^2}$$

Si traccino i diagrammi di Bode di  $L^{iv}(j\omega)$



$$\omega_c \cong 2 \text{ rad/s} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}\varphi_c &= -90^\circ - 2\arctg(2) = \\ &= -90^\circ - 126.9^\circ = -216.9^\circ \quad \text{sistema instabile}\end{aligned}$$

Ora possiamo scegliere un valore di  $\mu_R$  (se esiste) tale da rispettare le specifiche. Quale valore scegliere?

Osserviamo che con  $L^{iv}(s) = \frac{10}{s(1+s)^2}$  per avere  $\varphi_m > 60^\circ$ , cioè  $\varphi_c > -120^\circ$ , deve valere questa relazione

$$\varphi_c = L^{iv}(j\omega_c) = -90^\circ - 2\arctg(\omega_c) > -120^\circ$$

da cui si ottiene

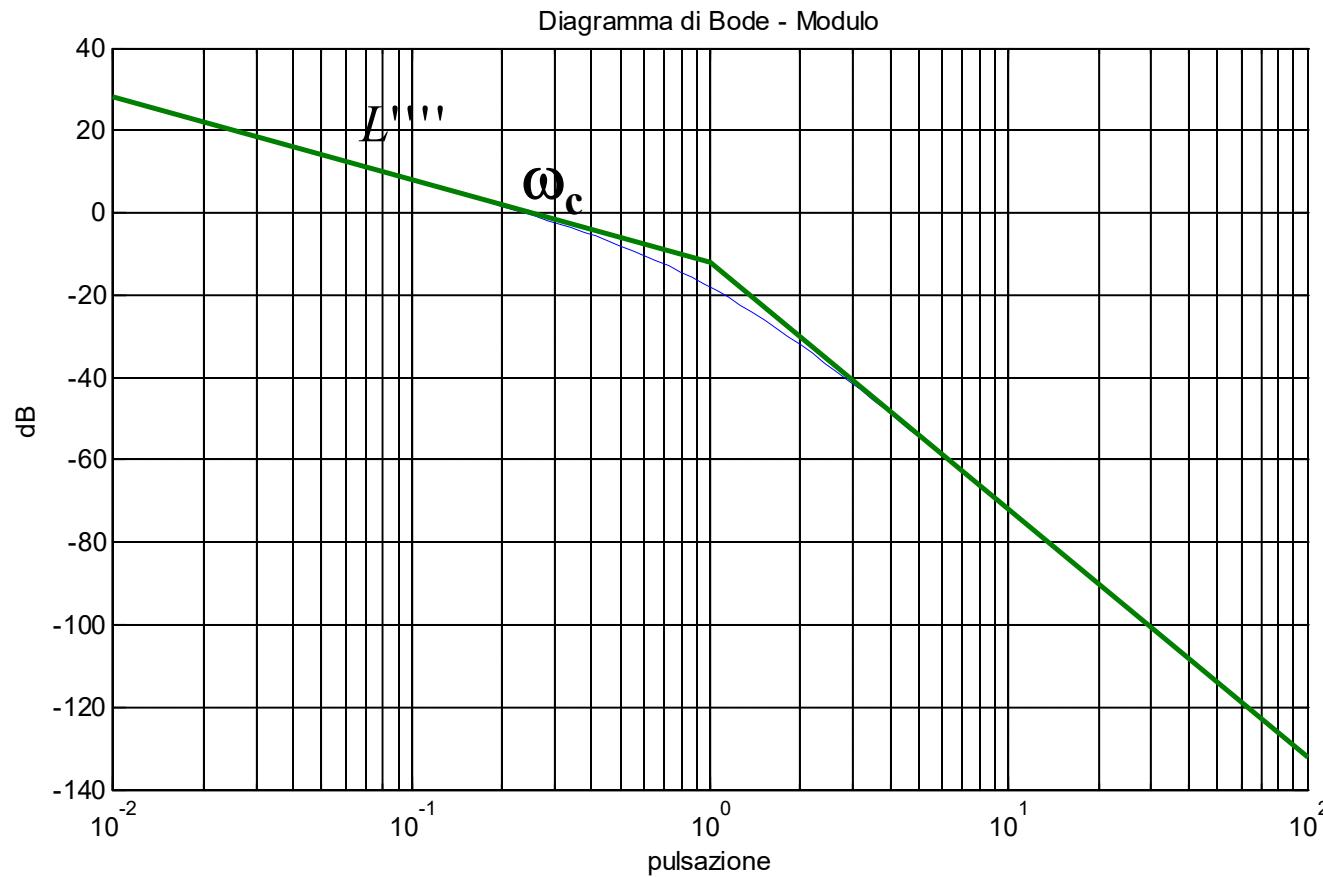
$$\arctg(\omega_c) < 15^\circ$$

cioè

$$\omega_c < 0.27 \text{ rad/s}$$

Quindi bisogna scegliere  $\mu_R$  tale che la pulsazione critica sia inferiore a questo valore.

Scegliendo  $\mu_R = 0.025$  si ha  $\omega_c = 0.25 \text{ rad/s}$



$$\omega_c \approx 0.25 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}\varphi_c &= -90^\circ - 2\arctg(0.25) = \\ &= -90^\circ - 28.1^\circ = -118.1^\circ\end{aligned}$$

$$R(s) = 0.025 \frac{(1+10s)(1+5s)}{s(1+s)}$$

↗  $\varphi_m = 61.9^\circ \quad \checkmark$

# Lezione 27.

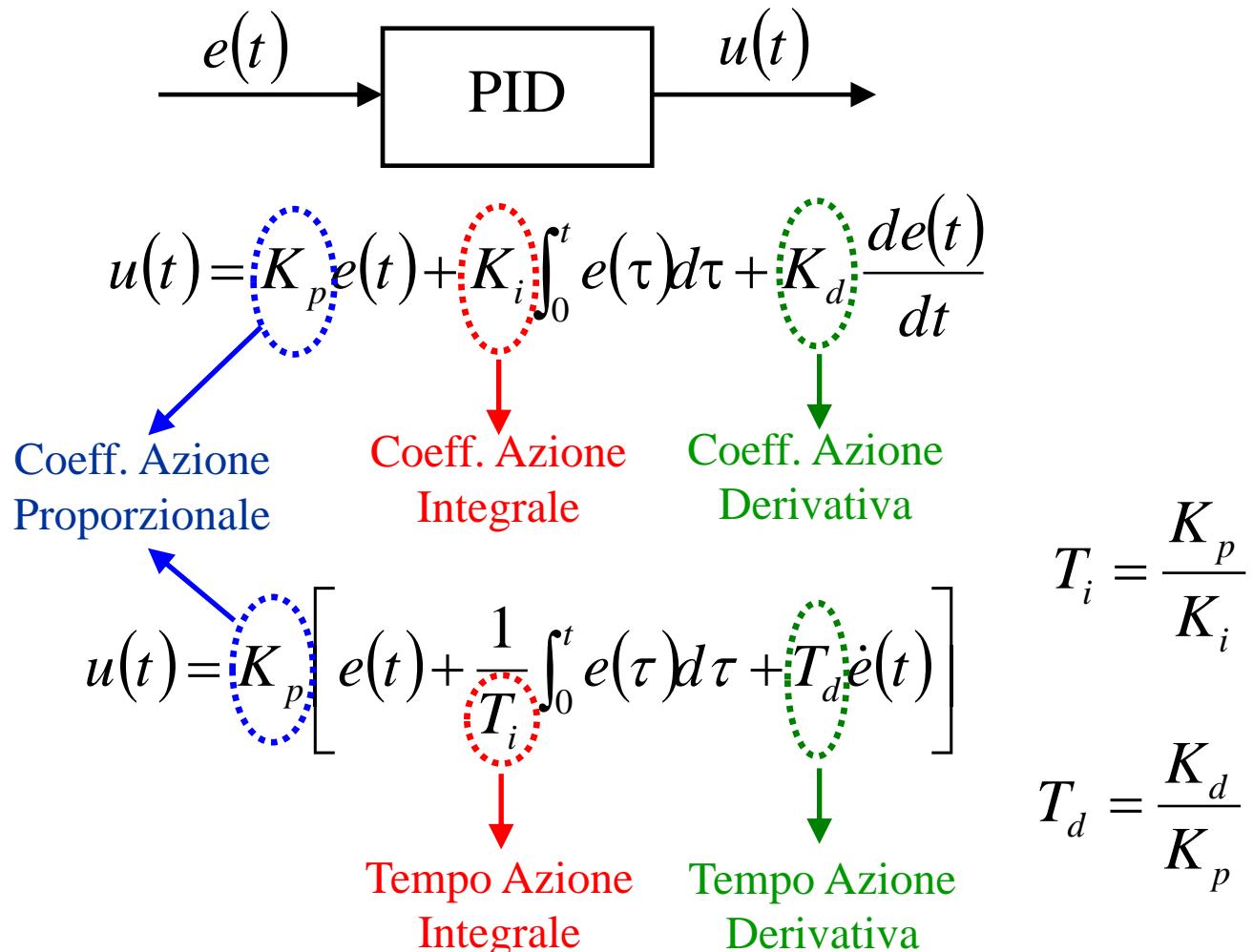
# Legge di controllo PID

# Schema

1. Definizione
2. Funzione di trasferimento di un PID “ideale”
3. Funzione di trasferimento di un PID “reale”
4. Diagrammi di Bode di un PID “reale”
5. Casi particolari
6. Metodi di taratura per un controllore PID
  - 6.1 Procedura di progetto teorica
  - 6.2 Metodi di taratura empirica
    - 6.2.1 Metodo di Ziegler & Nichols in anello chiuso
    - 6.2.2 Metodo di Ziegler & Nichols in anello aperto
7. Limitazione dell’azione derivativa
8. Saturazione dell’azione integrale (wind up) e implementazione “anti-windup”
9. Matlab

# 1. Definizione

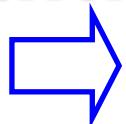
Controllori **PID** → ad azione **Proporzionale**, **Integrale**, **Derivativa**.



## Interpretazione delle tre azioni

**P** → **entità dell'errore**

più errore



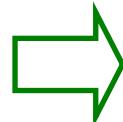
più controllo

**I** → **valor medio dell'errore**

polarizzazione (storia passata)

**D** → **tendenza dell'errore**

errore crescente



più controllo (storia futura)

## 2. Funzione di trasferimento di un PID “ideale”

L’azione di controllo nel dominio del tempo è

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \dot{e}(t) \right]$$

Applicando la trasformazione di Laplace si ha

$$U(s) = K_p \left[ E(s) + \frac{1}{T_i s} E(s) + T_d s E(s) \right]$$

Derivatore ideale

da cui

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{1 + T_i s + T_i T_d s^2}{T_i s} = K_i \frac{1 + T_i s + T_i T_d s^2}{s}$$

Se  $T_i^2 - 4T_i T_d \geq 0$  cioè se  $T_i \geq 4T_d$  i due zeri sono reali e quindi

$$R(s) = K_i \frac{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}{s}$$

Funzione di trasferimento  
del PID “ideale”

- ✓ un polo nell’origine  $\Rightarrow$  precisione statica
- ✓ due zeri  $\Rightarrow$  precisione dinamica
- ✓ guadagno  $\Rightarrow$  guadagno d’anello

### 3. Funzione di trasferimento di un PID “reale”

☐ azione derivativa “ideale”   $T_d s$  **Non realizzabile**

☐ azione derivativa “reale”   
 $\frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}}$  **Realizzabile**  
polo in  
alta frequenza

$$s = -\frac{N}{T_d}, N = 5 \div 20$$

$$U(s) = K_p \left[ 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{\frac{T_d s}{N}}{1 + \frac{T_d s}{N}} E(s) \right]$$

**Derivatore reale**

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{T_i s \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right) + \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right) + T_i T_d s^2}{T_i s \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right)} = K_i \frac{1 + \left(\frac{T_d}{N} + T_i\right) s + \left(\frac{1}{N} + 1\right) T_i T_d s^2}{s \left(1 + \frac{T_d}{N} s\right)}$$

$$R(s) = K_i \frac{(1 + s\bar{\tau}_1)(1 + s\bar{\tau}_2)}{s(1 + s\bar{\tau}_3)}$$

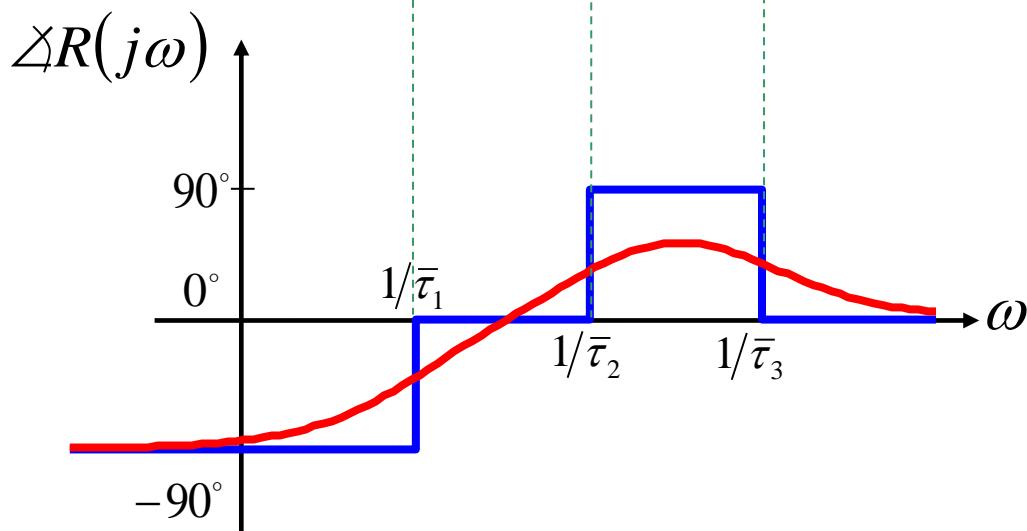
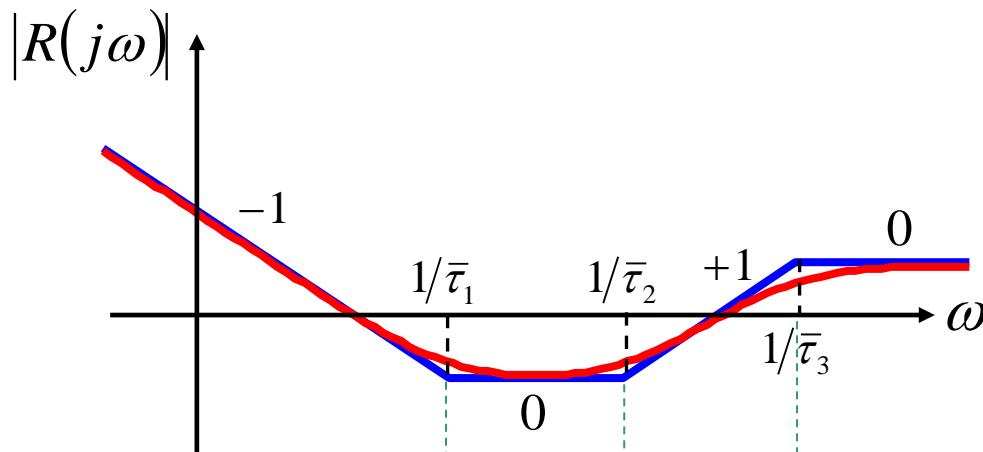
**Funzione di trasferimento  
del PID “reale”**

Con una scelta opportuna di  $N$  (grande) :

$\bar{\tau}_3 \ll \bar{\tau}_1, \bar{\tau}_3 \ll \bar{\tau}_2$  **polo in alta frequenza**

$\bar{\tau}_1 \cong \tau_1, \bar{\tau}_2 \cong \tau_2$  **zeri prossimi a quelli del PID “ideale”**

## 4. Diagrammi di Bode di un PID “reale”



Rete “a sella” o  
Rete a ritardo e anticipo

## 5. Casi particolari

P  $\longrightarrow$  controllore proporzionale

$$R(s) = K_p$$

I  $\longrightarrow$  controllore integrale

$$R(s) = \frac{K_i}{s}$$

PI  $\longrightarrow$  controllore proporzionale-integrale

$$R(s) = K_i \frac{(1 + sT_i)}{s}$$

PD  $\longrightarrow$  controllore proporzionale-derivativo

$$R(s) = K_p (1 + sT_d)$$

FdT “ideale”

# 6. Metodi per la taratura di un controllore PID

PID:  $K_p, T_i, T_d$

6.1 **Teorica** (loop shaping)

6.2 **Empirica** (taratura basata su esperimenti, in assenza di informazioni a priori sul sistema) → utile per taratura automatica

***Ad autosintonia*** (*self tuning*)

## 6.1 Procedura di progetto teorica

### Esempio

Tarare un controllore PI per un sistema con fdt  $G(s) = \frac{100}{1+s}$  in modo tale da avere  $1 \leq \omega_c \leq 10$

La funzione di trasferimento del controllore è:

$$R(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K_p \frac{1 + s T_i}{T_i s} = \frac{K_p}{T_i} \frac{1 + s T_i}{s} = K_i \frac{1 + s T_i}{s}$$

Quindi la funzione d'anello è:

$$L(s) = R(s)G(s) = K_i \frac{1 + s T_i}{s} \frac{100}{1 + s}$$

La scelta è “obbligata”: si usa lo zero del regolatore per cancellare il polo dominante del sistema. Scelgo  $T_i = 1$  da cui ottengo

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{100 K_i}{s}$$

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{100K_i}{s} \quad \Rightarrow \quad \omega_c = 100K_i \text{ rad/s}$$

Per es. per avere  $\omega_c = 5$  rad/s bisogna scegliere  $K_i = 0.05$

Essendo  $K_i = \frac{K_p}{T_i}$  si avrà  $K_p = 0.05$

Quindi i parametri del controllore (quelli da scrivere nel codice del PLC) sono  $K_p = 0.05$   $K_i = 0.05$



## 6.2 Metodi di taratura empirica

Il PID è un regolatore “semplice” (con pochi gradi di libertà) e quindi può tenere conto solo delle principali caratteristiche dinamiche del processo.

Ciò significa però che si può fare un progetto adeguato anche senza una conoscenza profonda del sistema sotto controllo.

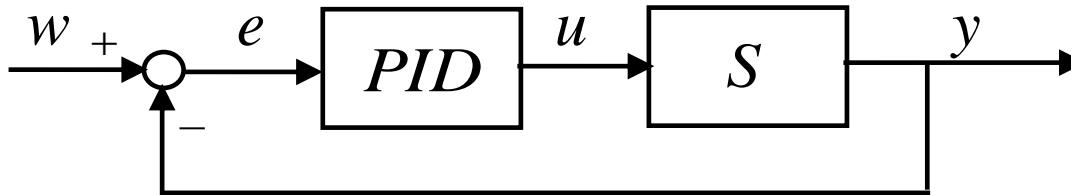
I metodi di taratura empirica si basano sui risultati di opportuni esperimenti presupponendo nessuna conoscenza sul sistema sotto controllo oppure la conoscenza di un modello molto semplice.

Due esempi sono:

**Regola di Ziegler-Nichols in anello aperto**

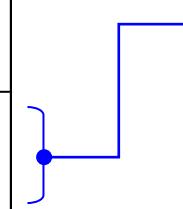
**Regola di Ziegler-Nichols in anello chiuso**

## 6.2.1 Regola di Ziegler-Nichols in anello chiuso



- (i). inserire il controllore con  $K_i = K_d = 0$  e  $K_p$  = “piccolo”
- (ii). osservare la risposta a  $w(t) = \text{sca}(t)$
- (iii). aumentare  $K_p$  finché  $y(t)$  diventa un’oscillazione permanente di **periodo  $\bar{T}$**  in corrispondenza di un valore di  $K_p$  detto **guadagno critico  $\bar{K}_p$**
- (iv). Si determinano  $K_p, T_i, T_d$  in funzione di  $\bar{T}, \bar{K}_p$  consultando un’apposita tabella

|     | $K_p$           | $T_i$        | $T_d$          |
|-----|-----------------|--------------|----------------|
| P   | $0.5\bar{K}_p$  | -            | -              |
| PI  | $0.45\bar{K}_p$ | $0.8\bar{T}$ | -              |
| PID | $0.6\bar{K}_p$  | $0.5\bar{T}$ | $0.125\bar{T}$ |



$$T_i = 4T_d$$

zeri coincidenti in  $\frac{-4}{\bar{T}}$

regole ottimizzate per ottenere  $\begin{cases} \omega_c \max \\ \varphi_m \cong 30^\circ \end{cases}$

Più che regole rigide vanno intese come procedure per individuare valori indicativi dei parametri (intorno ai quali operare una taratura manuale fine).

## Interpretazione

◊  $\bar{K}_p \equiv k_m = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|}$  (il guadagno critico è il margine di guadagno)

cioè: trovare  $\bar{K}_p$  corrisponde a trovare  $|G(j\omega_\pi)|$

◊  $\bar{T} = \frac{2\pi}{\omega_\pi}$  (le oscillazioni hanno pulsazione  $\omega_\pi$ )

cioè: trovare  $\bar{T}$  corrisponde a trovare la pulsazione  $\omega_\pi$

◊ Quindi:

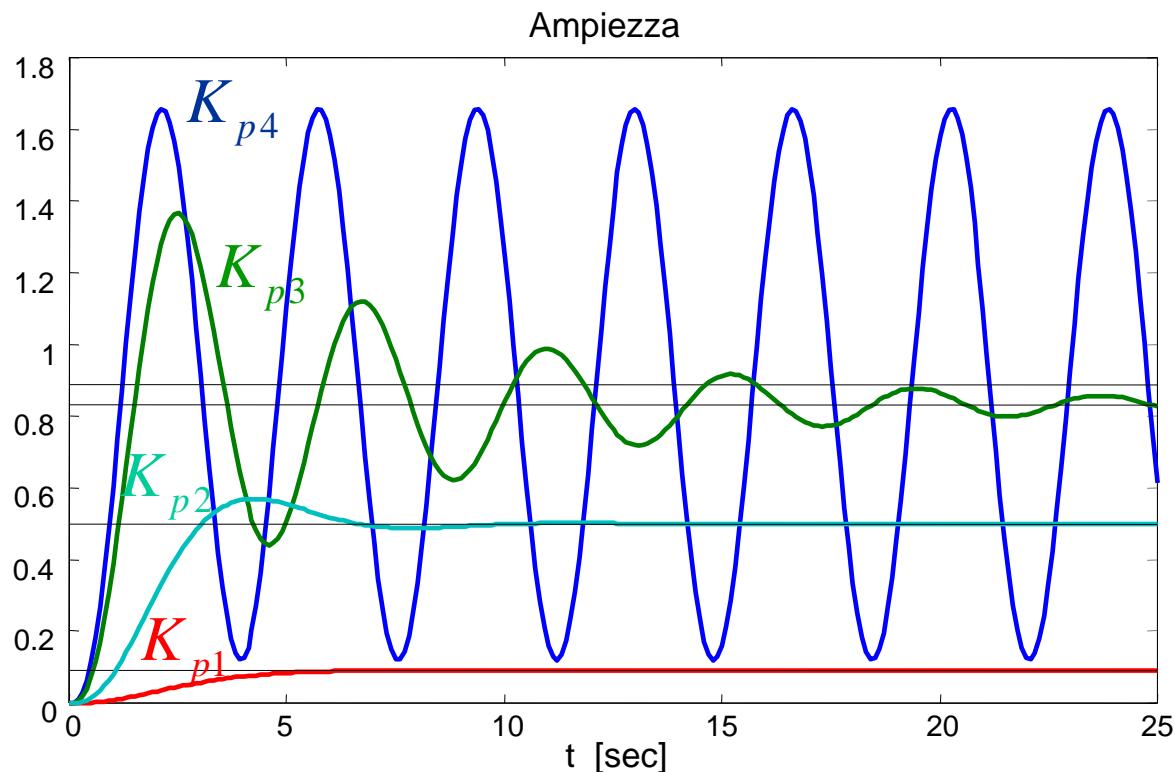
$\bar{K}_p, \bar{T} \Rightarrow G(j\omega_\pi)$  Modello usato = un punto di  $G(j\omega)$

**Nota.** La procedura non è applicabile quando:

- non si raggiunge mai il limite di stabilità ( $k_m = \infty$ )
- la presenza di oscillazioni può danneggiare l'impianto



# Esempio



$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$K_{p1} = 0.1$$

$$K_{p2} = 1$$

$$K_{p3} = 5$$

$$K_{p4} = 8 \leftarrow \bar{K}_p$$

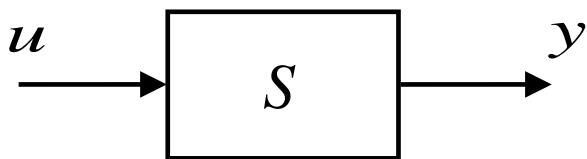
$$\bar{T} \cong 3.6$$

$$(s+1)^3 + \bar{K}_p = (s+\alpha)(s^2 + \bar{\omega}^2) \rightarrow \bar{K}_p = 8, \alpha = 3, \bar{\omega}^2 = 3 \rightarrow \bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} = 3.6276$$

PID “ideale”

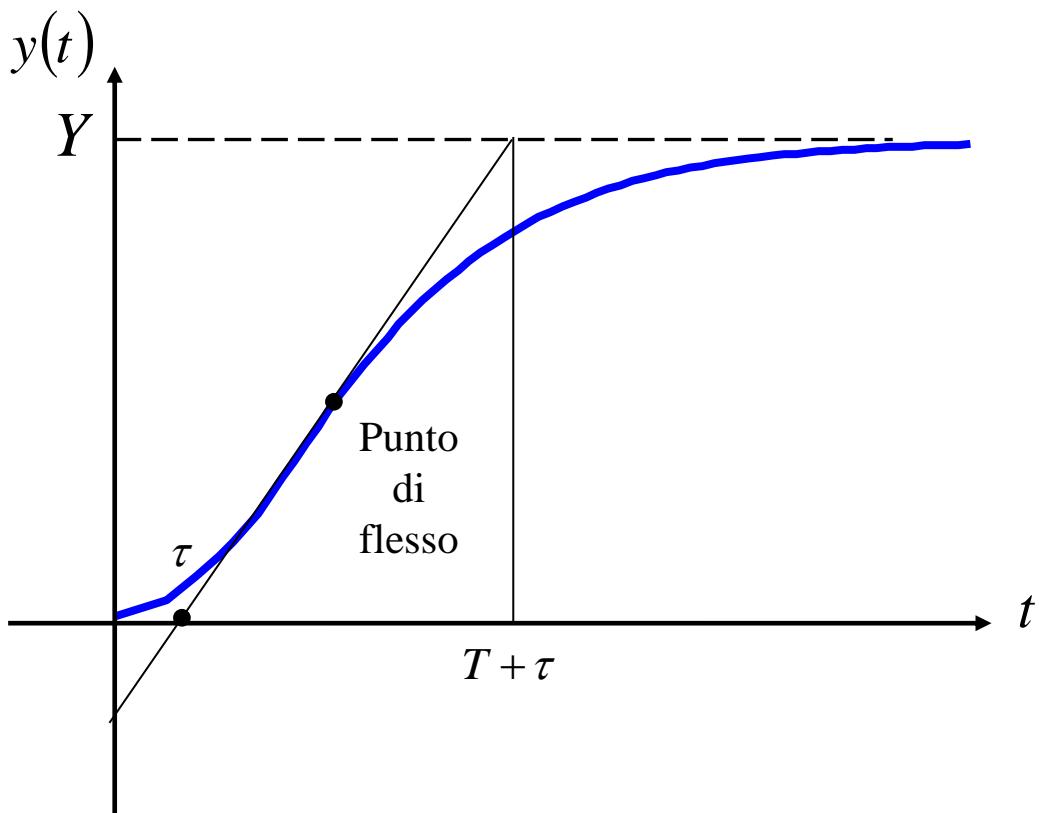
$$\begin{cases} K_p = 0.6 \bar{K}_p = 4.8 \\ T_i = 0.5 \bar{T} = 1.8138 \\ T_d = 0.125 \bar{T} = 0.4534 \end{cases} \Rightarrow \omega_c \cong 1.6, \varphi_m \cong 37^\circ$$

## 6.2.2 Regola di Ziegler-Nichols in anello aperto



- (i). Applicare  $u(t) = U_{\text{sc}}(t)$
- (ii). Registrare la risposta  $y(t)$  e ricavare  
alcuni parametri caratteristici (metodo della tangente)  
 **$\tau$  = ritardo equivalente**  
 **$T$  = costante di tempo equivalente**  
 **$\mu = Y/U = \text{guadagno}$**  ( $Y$  = valore di regime di  $y(t)$ )
- (iii). Determinare  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  in funzione di  $\mu$ ,  $\tau$ ,  $T$   
consultando un'apposita tabella.





## Metodo della tangente

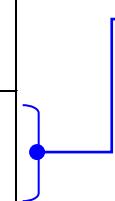
approssimazione:  $G(s) = \frac{\mu}{1+Ts} e^{-\tau s}$   $(\mu = Y/U)$

Altri metodi:

- metodo delle aree
- metodo dei momenti

E' un metodo di identificazione!

|     | $K_p$          | $T_i$   | $T_d$     |
|-----|----------------|---------|-----------|
| P   | $T/\mu\tau$    |         |           |
| PI  | $0.9T/\mu\tau$ | $3\tau$ |           |
| PID | $1.2T/\mu\tau$ | $2\tau$ | $0.5\tau$ |



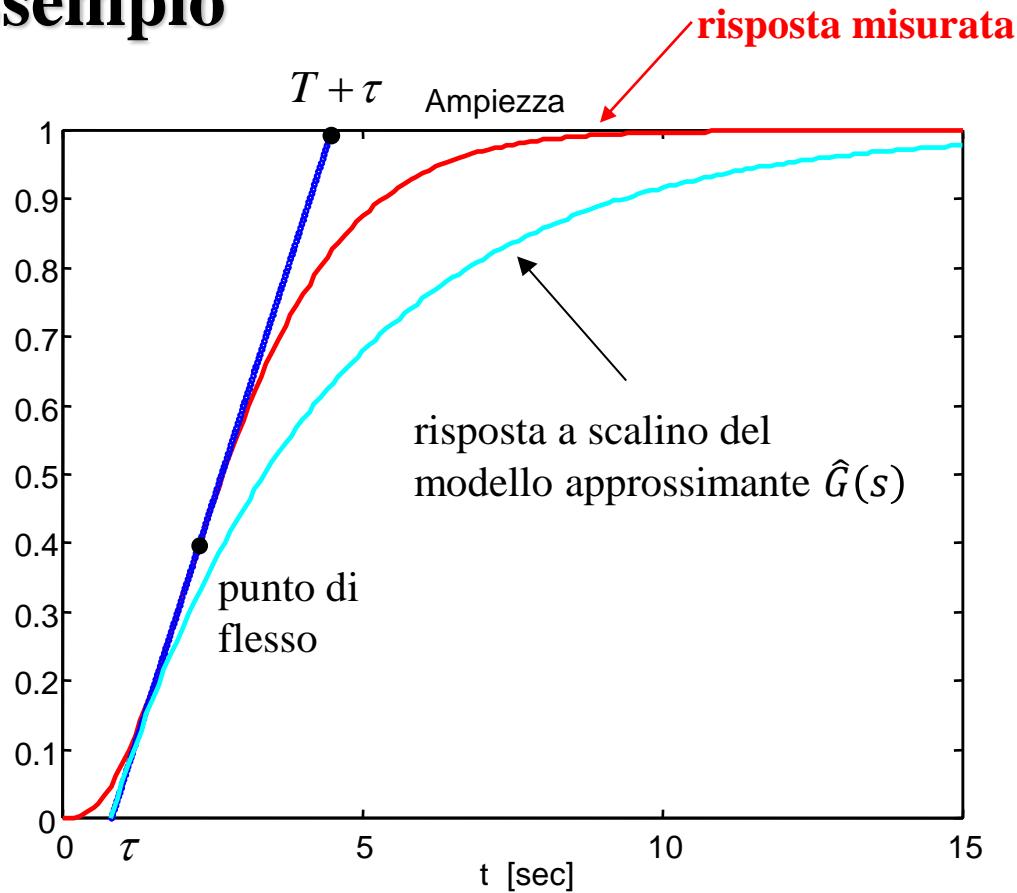
$$T_i = 4T_d$$

zeri coincidenti in  $\frac{-1}{\tau}$

- risultati analoghi alle regole in anello chiuso
- necessaria una taratura “manuale” fine
- procedura applicabile solo se la risposta è del tipo illustrato



# Esempio



$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

modello approssimante  
(metodo della tangente):

$$\hat{G}(s) = \frac{1}{3.7s+1} e^{-0.8s}$$

$$\mu = 1, T = 3.7, \tau = 0.8$$

PID “ideale”:

$$K_p = 5.55, T_i = 1.6, T_d = 0.4$$

$$\Rightarrow \omega_c \cong 1.5, \varphi_m \cong 22^\circ$$

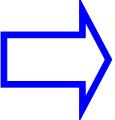
modello approssimante (metodo delle aree):  $\mu = 1, T = 1.83, \tau = 1.17$

PID “ideale”:  $K_p = 1.877, T_i = 2.34, T_d = 0.59 \Rightarrow \omega_c \cong 0.75, \varphi_m \cong 63^\circ$



## 7. Limitazione dell'azione derivativa

$$u(t) = \dots + K_d \frac{de(t)}{dt} = \dots + K_d \frac{d}{dt} (w(t) - \cancel{y(t)})$$

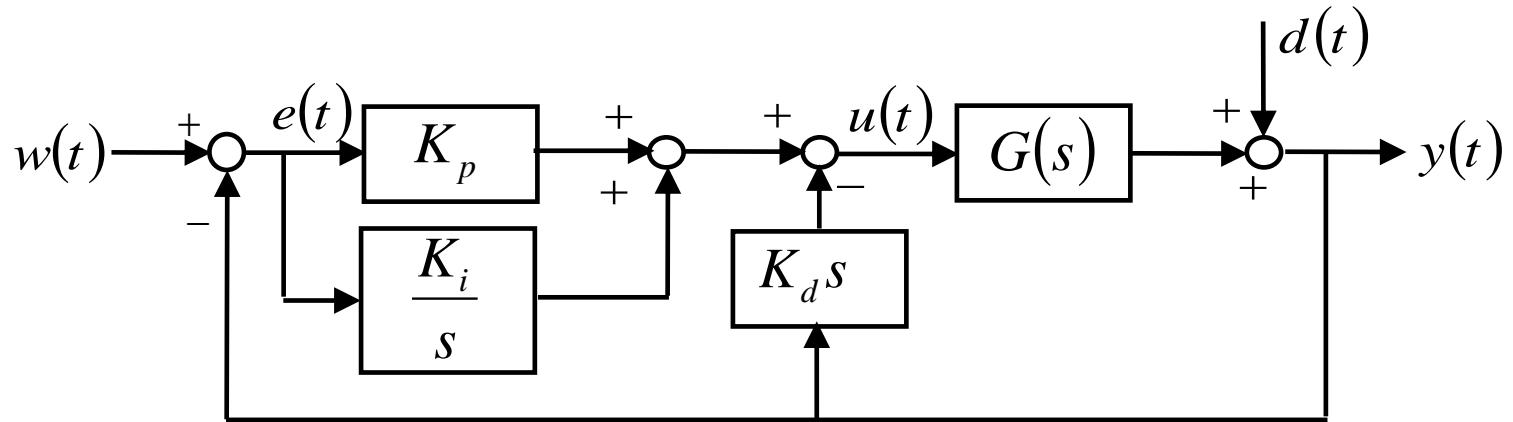
Se  $w(t) = \underbrace{\text{sca}(t)}$    $u(t) = \underbrace{\text{imp}(t)}$  Indesiderabile!

Alternativa:  $u(t) = \dots + K_d \frac{d}{dt} (\cancel{w(t)} - y(t)) = \dots + K_d \frac{dw(t)}{dt} - K_d \frac{dy(t)}{dt}$

La fdt d'anello è un filtro passa-basso.  
Quindi l'uscita non ha mai variazioni a scalino!



## Schema a derivazione dell'uscita



- La funzione di trasferimento da  $d(t)$  a  $y(t)$  non cambia
- Nella funzione di trasferimento da  $w(t)$  a  $y(t)$  cambiano solo gli zeri
- Non cambiano le proprietà di stabilità e il comportamento statico.



## Generalizzazione

$$U(s) = K_p E_p(s) + \frac{K_i}{s} E(s) + K_d s E_d(s)$$

dove  $E(s) = W(s) - Y(s)$

$$E_p(s) = \alpha W(s) - Y(s)$$

$$E_d(s) = \beta W(s) - Y(s)$$

$\alpha = \beta = 1 \rightarrow$  PID standard

$\alpha = \beta = 0 \rightarrow$  azioni derivativa e proporzionale calcolate solo su  $y(t)$

**Nota.**  $\alpha$  e  $\beta$  non influiscono su stabilità  
e comportamento statico del sistema in anello chiuso.

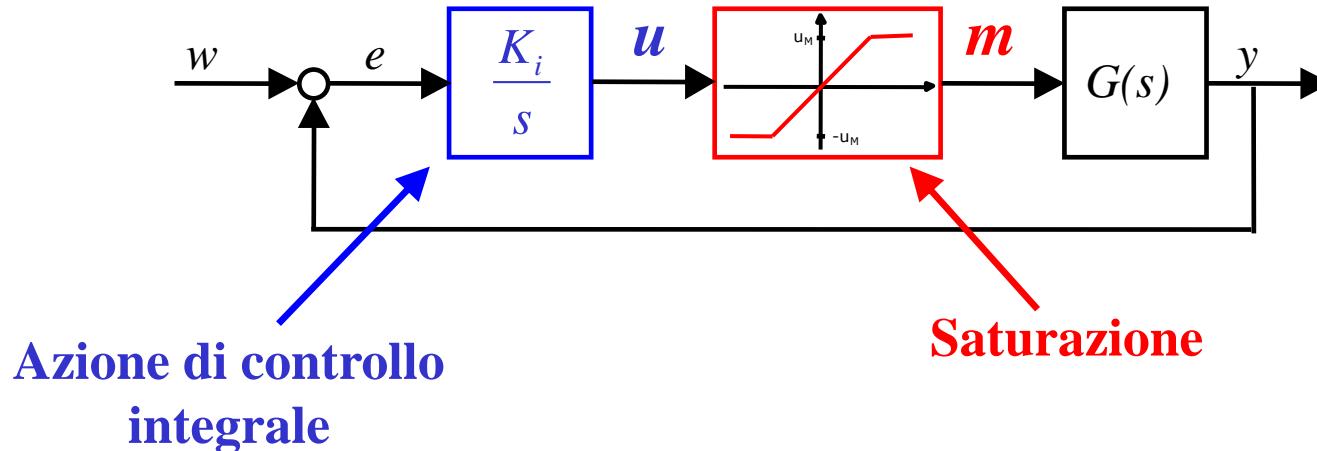


## 8. Saturazione dell'azione integrale (wind-up)

Tutti gli attuatori hanno dei limiti sull'azione di controllo che possono esercitare sul sistema sotto controllo.

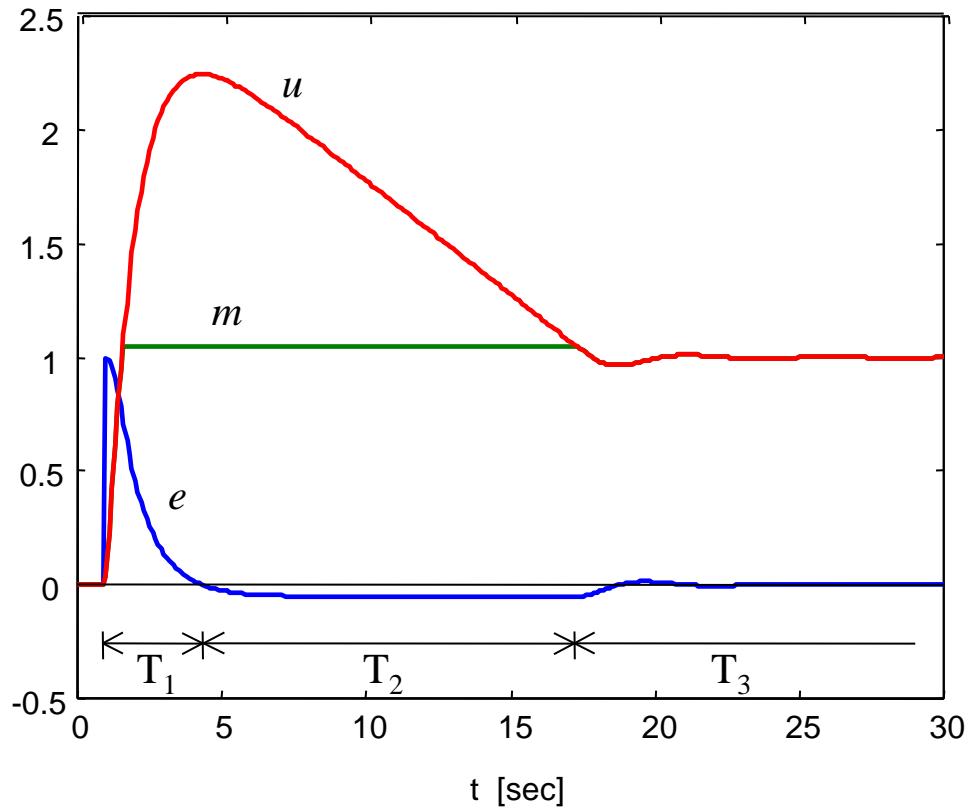
Tali limiti sono ben modellabili mediante **saturazione**.

Quando la legge di controllo contiene un'**azione integrale**, la presenza della saturazione può causare un effetto indesiderato noto come **wind-up**.



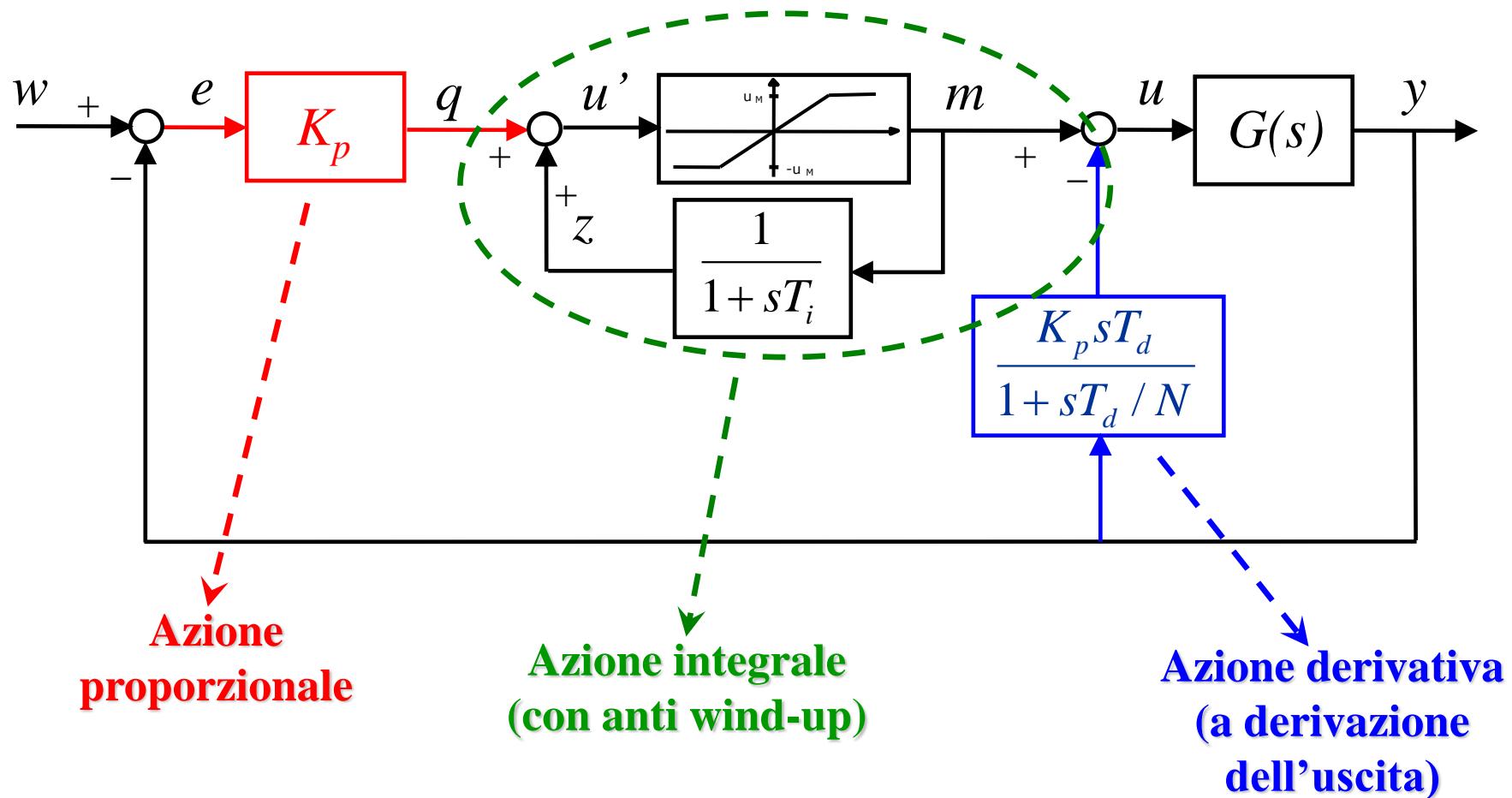
Equazione della saturazione

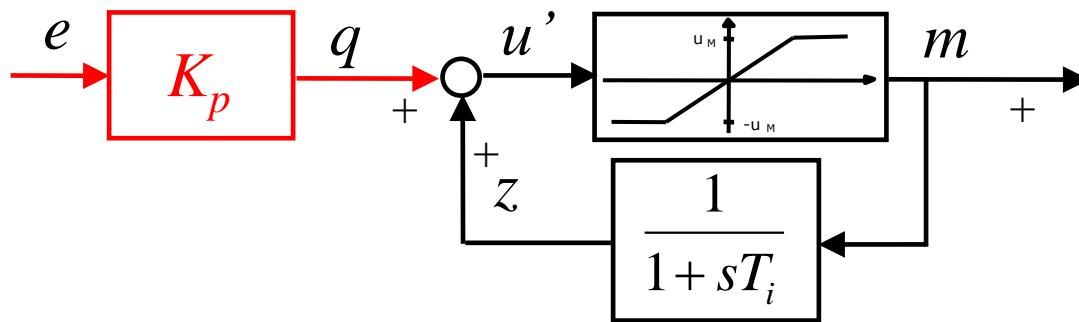
$$m(t) = \begin{cases} -u_M & u(t) < -u_M \\ u(t) & |u(t)| \leq u_M \\ u_M & u(t) > u_M \end{cases}$$



- $T_1)$   $e(t) > 0 \rightarrow u(t)$  cresce senza limiti mentre  $m(t)$  cresce solo fino a  $u_M$
- $T_2)$   $e(t) < 0 \rightarrow m(t)$  dovrebbe diminuire, ma bisogna prima attendere che  $u(t)$  decresca fino a  $u_M$
- $T_3)$  quando finalmente  $u(t)$  raggiunge la soglia  $u_M$  allora anche  $m(t)$  può diminuire. Si noti che basta un breve transitorio per portare  $e(t)$  a 0

## Implementazione anti wind-up (a derivazione dell'uscita)



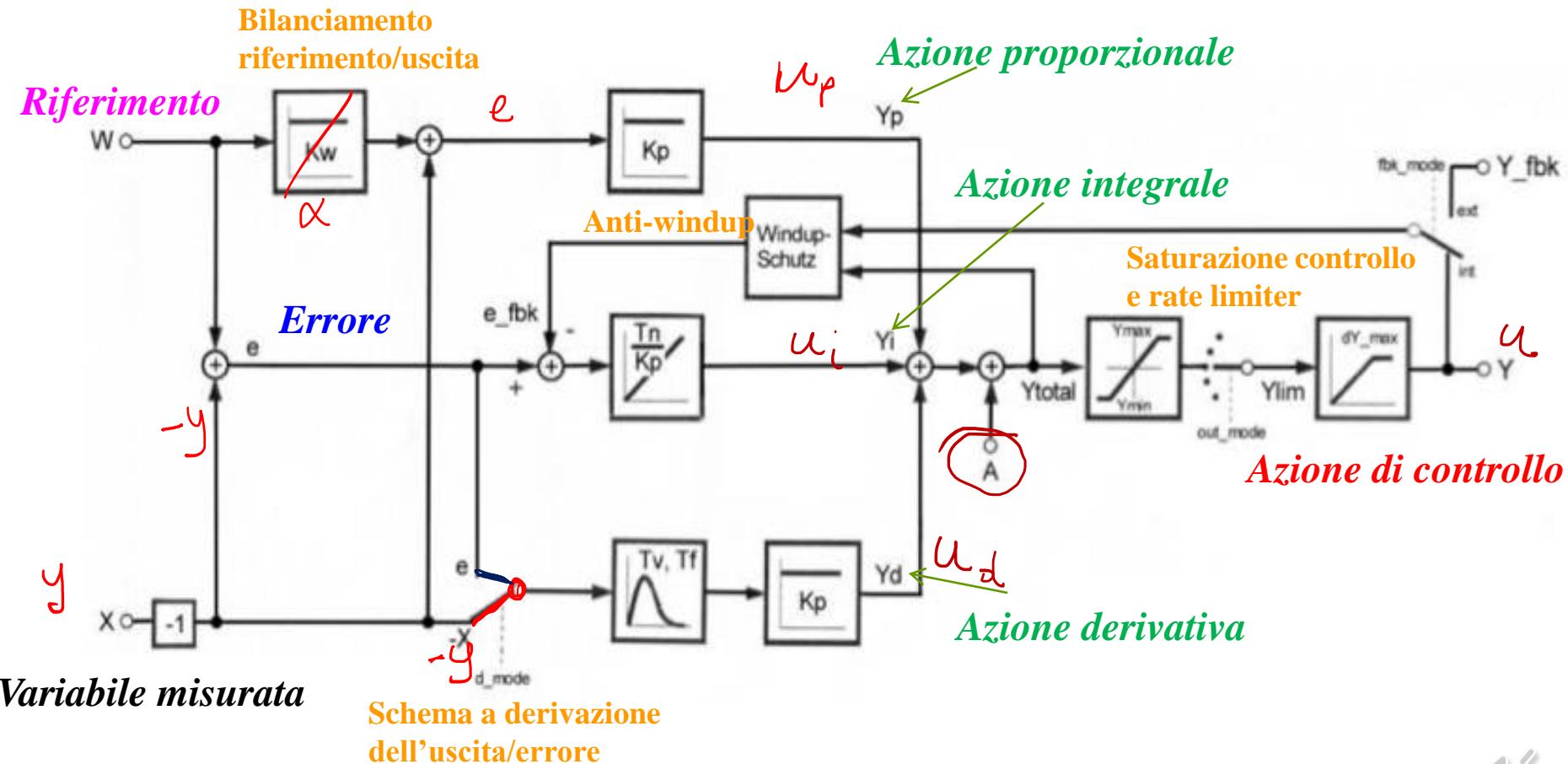


- Quando il controllore opera nella zona lineare della saturazione si ha:  $m(t) = u'(t)$

$$\frac{M(s)}{E(s)} = K_p \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + sT_i}} = K_p \left( \frac{1 + sT_i}{sT_i} \right) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad \text{Controllore PI}$$

- Si supponga di operare in saturazione nelle seguenti condizioni:  
 $m(t) = u_M$  con  $e(t) > 0$  e  $q(t) > 0$   
Dopo un transitorio si ha :  $z(t) = u_M$

- Però, appena l'errore cambia segno si ha:  
 $e(t) < 0, q(t) < 0 \rightarrow u'(t) = q(t) + u_M < u_M$  e si torna nella zona lineare.



# 9. Matlab

**pid** Create a pid controller in parallel form.

Construction:

**SYS = pid(Kp,Ki,Kd,Tf)** creates a continuous-time pid controller in **parallel form** with a first-order derivative filter:

$$K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{T_f s + 1}$$

The scalars  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ , and  $T_f$  specify the proportional gain, integral gain, derivative gain, and filter time constant. The  $T_f$  value must be nonnegative for stability.

**pidstd** Create a PID controller in standard form.

Construction:

**SYS = pidstd(Kp,Ti,Td,N)** creates a continuous-time PID controller in **standard form** with a first order derivative filter:

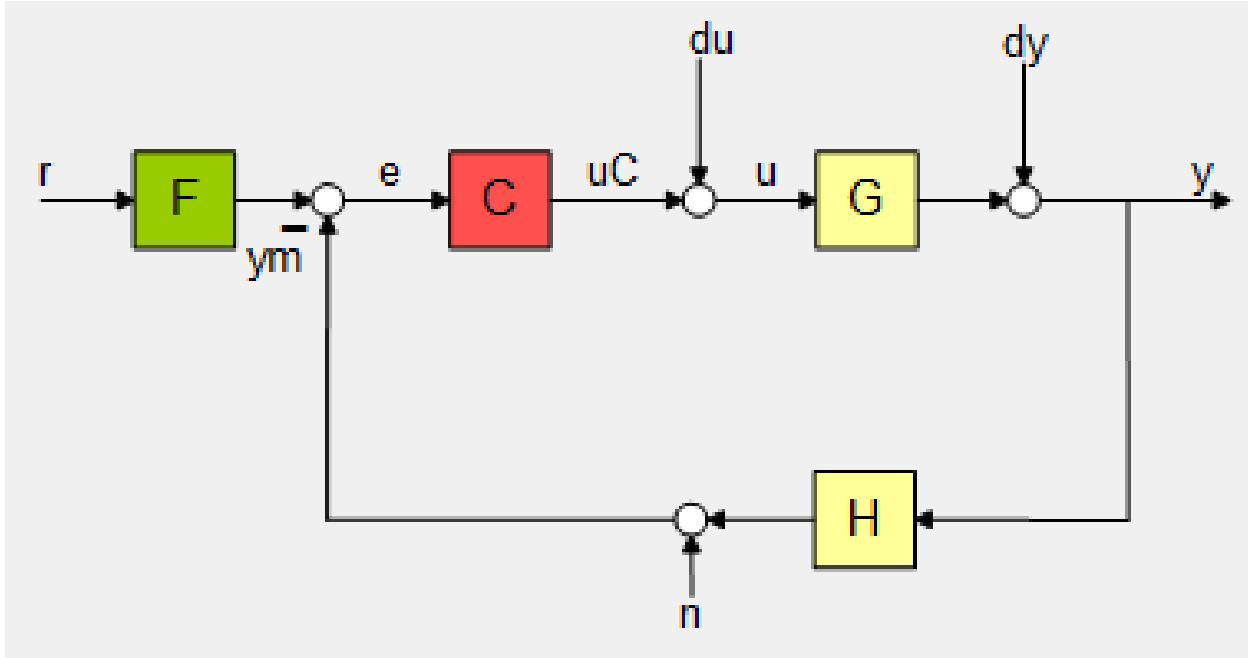
$$K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{(T_d/N) s + 1} \right)$$

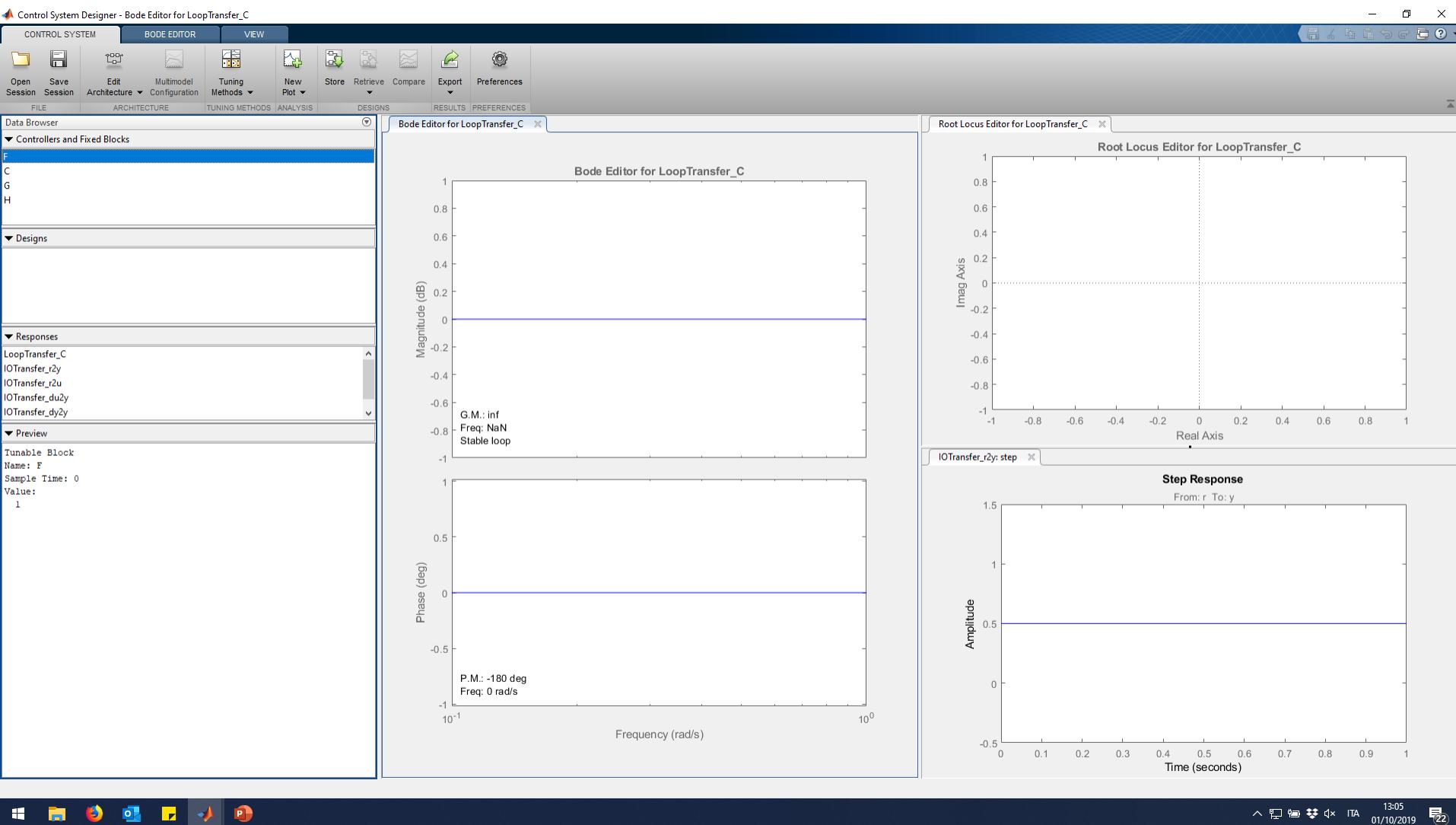
Esiste una GUI per la progettazione di sistemi di controllo retroazionati SISO.

**sisotool** SISO Design Tool.

sisotool opens the SISO Design Tool. This Graphical User Interface lets you design single-input/single-output (SISO) compensators by graphically interacting with the root locus, Bode, and Nichols plots of the open-loop system. To import the plant data into the SISO Tool, select the **Import** item from the **File menu**.

Questa è l'architettura di riferimento





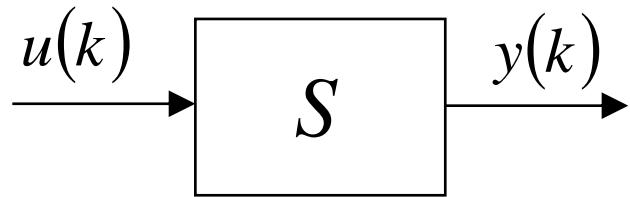
# Lezione 28.

## Sistemi dinamici a tempo discreto (approccio in variabili di stato)

# Schema

1. Introduzione
2. Segnali a tempo discreto
3. Rappresentazione di stato
4. Classificazione
5. Movimento
6. Equilibrio (per sistemi tempo invarianti)
7. Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI) (caso SISO)
8. Equilibrio di sistemi LTI (caso SISO)
9. Movimento di sistemi LTI (caso SISO)
10. Linearizzazione di sistemi non lineari
11. Stabilità dell'equilibrio nei sistemi LTI
12. Stabilità dei sistemi LTI

# 1. Introduzione



Esprimono relazioni causa/effetto (come i sistemi a tempo continuo) tra **segnali discreti**.

Ingresso ed uscita dipendono **dall'indice (temporale) discreto  $k$** .

Essi sono definiti mediante **equazioni alle differenze**.

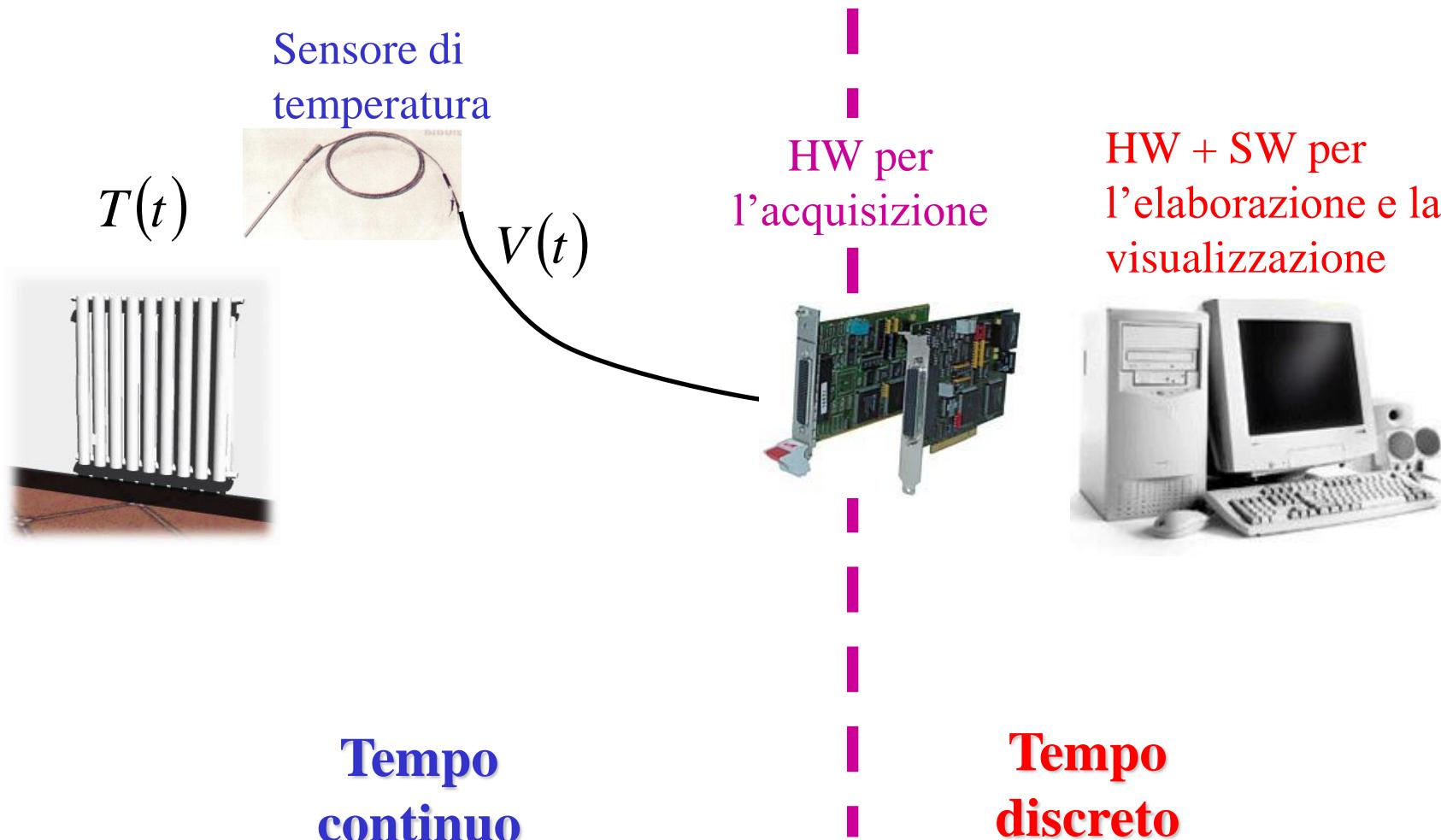
## 2. Segnali a tempo discreto

Il tempo evolve con continuità. Ciò significa che non è possibile definire un intervallo di tempo minimo: sarà sempre possibile concepire un intervallo di tempo più breve.

Coerentemente con questo fatto è stata definita e studiata la teoria dei sistemi a tempo continuo, dove le variabili in gioco (ingresso, stato, uscita) sono funzioni del tempo continuo, cioè: ad ogni istante  $t$  reale è possibile definire e assegnare il valore della variabile in quell'istante.

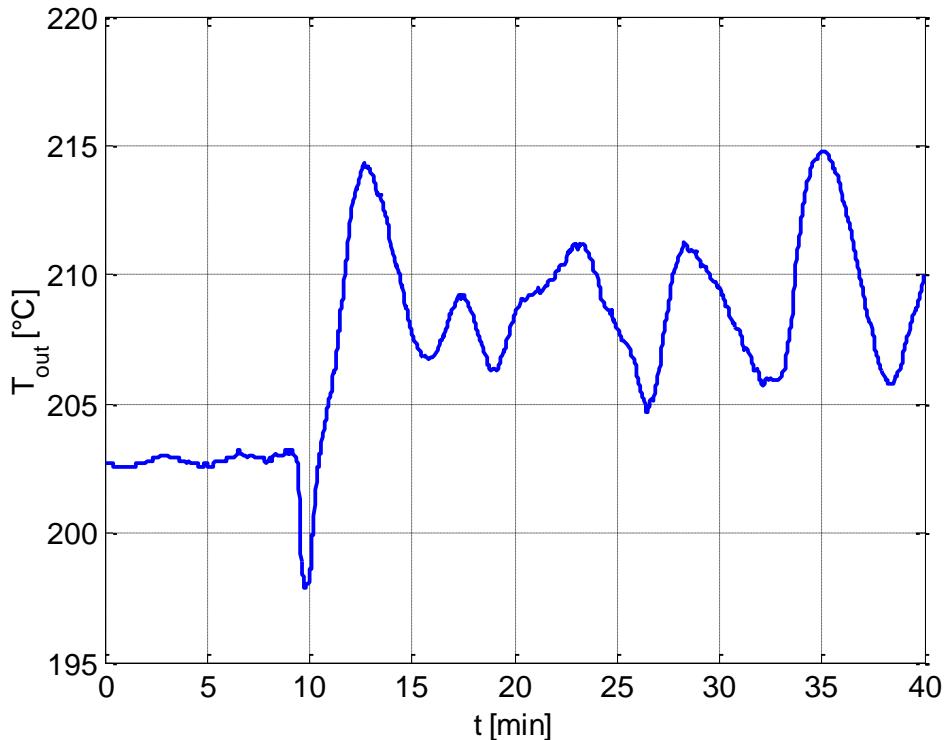
E' possibile definire delle variabili che assumono valori solo in corrispondenza di un indice discreto.

C'è una motivazione molto forte (per le applicazioni di natura ingegneristica) che richiede l'uso di variabili che assumono valori solo in corrispondenza di precisi istanti di tempo.

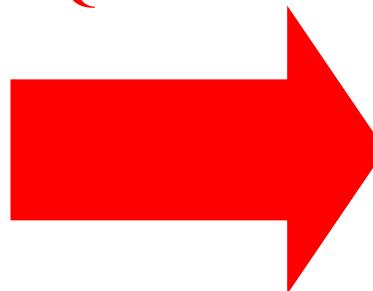


## Valori numerici acquisiti

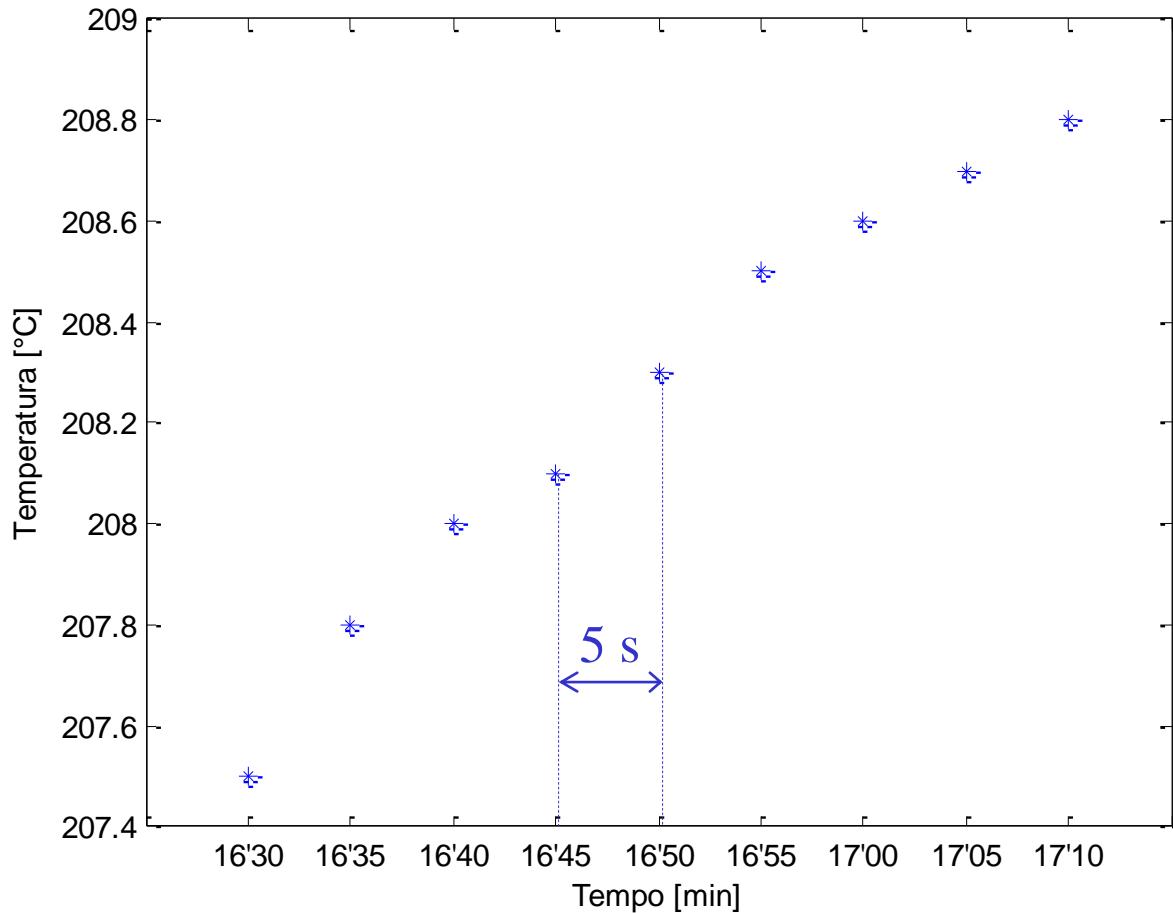
### Andamento temporale continuo della temperatura



ACQUISIZIONE



| Tempo [min] | T [°C] |
|-------------|--------|
| ...         | ...    |
| 16'30"      | 207.5  |
| 16'35"      | 207.8  |
| 16'40"      | 208.0  |
| 16'45"      | 208.1  |
| 16'50"      | 208.3  |
| 16'55"      | 208.5  |
| 17'00"      | 208.6  |
| 17'05"      | 208.7  |
| 17'10"      | 208.8  |
| ...         | ...    |



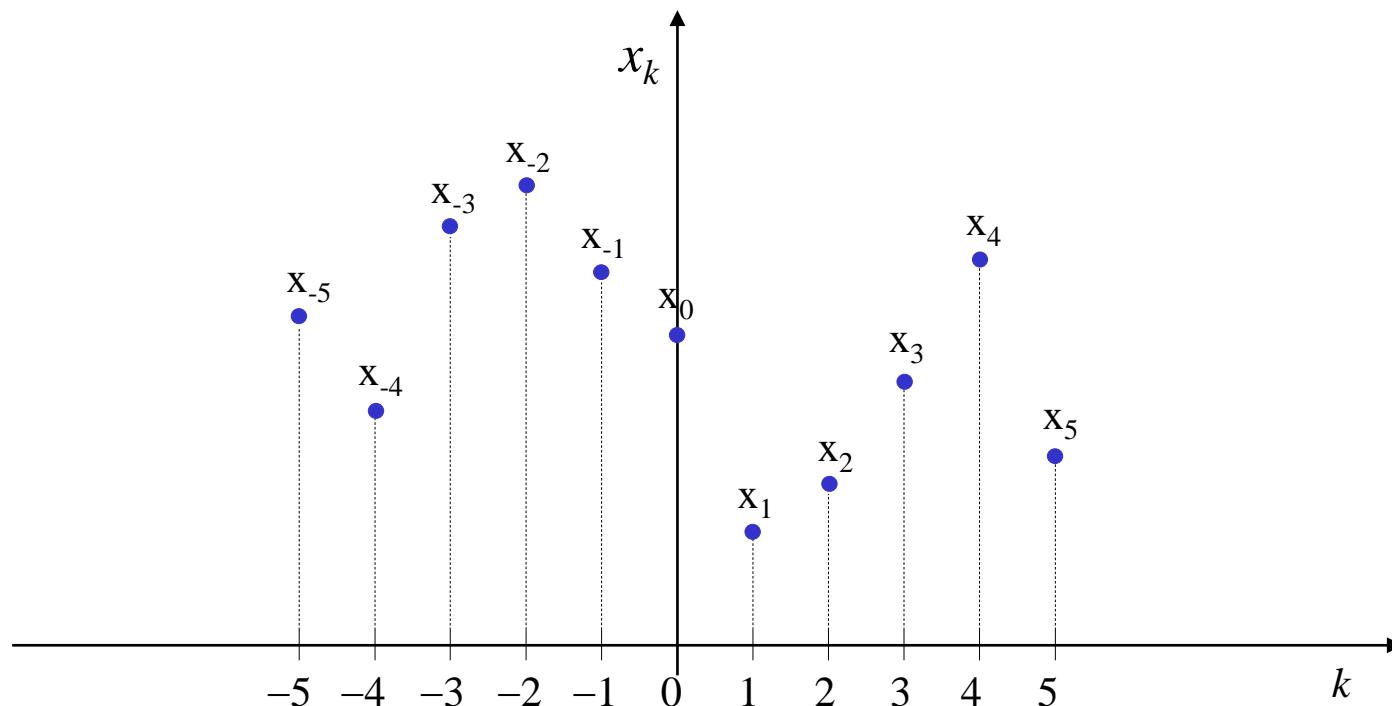
Ogni 5'' è stato acquisito un valore di temperatura.

Il segnale di temperatura che è stato acquisito e memorizzato nel calcolatore assume valori solo ogni 5 s.  
E' un **segnale campionato**.

I segnali a tempo discreto sono sequenze di valori reali, ordinate secondo un indice (temporale) intero (relativo).

Vengono usati (come si vedrà) anche per descrivere segnali campionati.

$$x_k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{R}$$



Normalmente l'indice temporale parte da 0, cioè  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

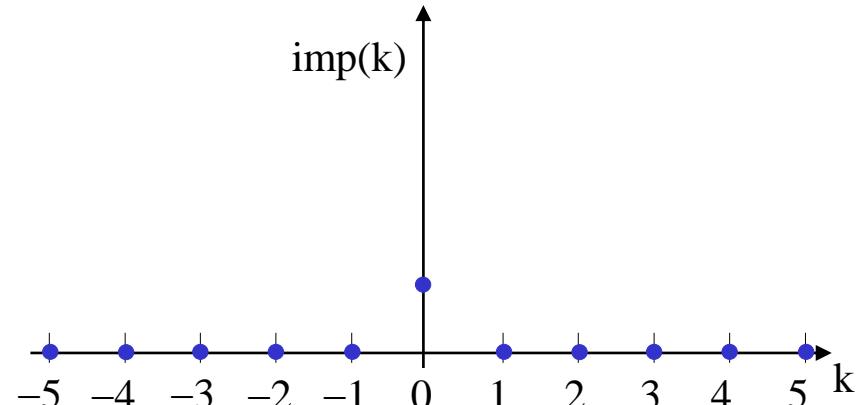
Sono utilizzate ugualmente le seguenti due notazioni:

$$x_k \ u_k \ y_k$$

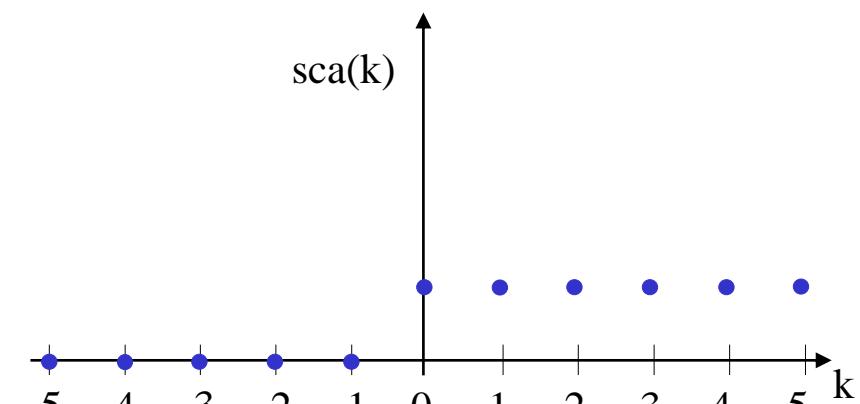
$$x(k) \ u(k) \ y(k)$$

## Segnali canonici

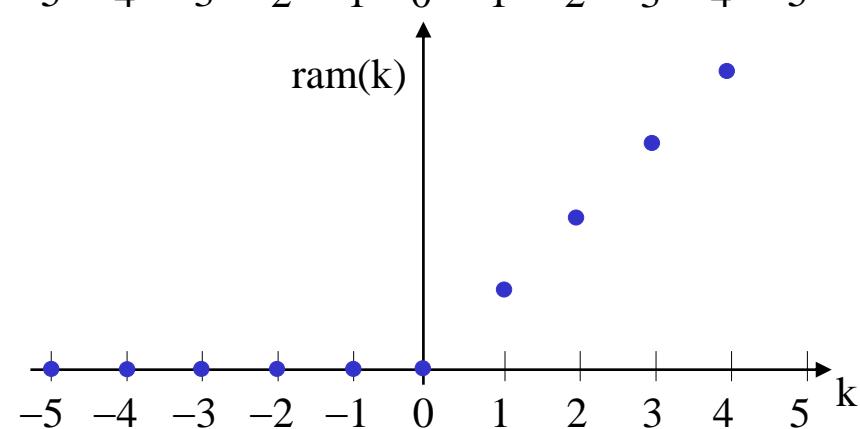
$$\text{imp}(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$



$$\text{sca}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$



$$\text{ram}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ k & k \geq 0 \end{cases}$$



### 3. Rappresentazione di stato (sistemi SISO tempo invarianti)

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k)) & \text{equazione di stato} \\ y(k) = g(\mathbf{x}(k), u(k)) & \text{trasformazione di uscita} \end{cases}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad \text{condizione iniziale}$$

$$\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}, y(k) \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Un sistema dinamico a tempo discreto è descritto da **equazioni alle differenze**.

In un'equazione alle differenze, il valore delle variabili all'indice  $k+1$  viene calcolato sulla base del valore delle variabili a valori precedenti dell'indice  $k$ .

## Esempio

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 3x_1(k) - x_2^2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = -\log x_1(k) + x_2(k) - 2u(k) \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

con  $\begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = -1 \end{cases}$

## 4. Classificazione

Sistema tempo  
invariante

$f$  e  $g$  non dipendono esplicitamente  
dalla variabile temporale  $k$

Sistema lineare

$f$  e  $g$  sono lineari in  $x(k)$  e  $u(k)$

Sistema strettamente  
proprio

$g$  non dipende esplicitamente da  $u(k)$

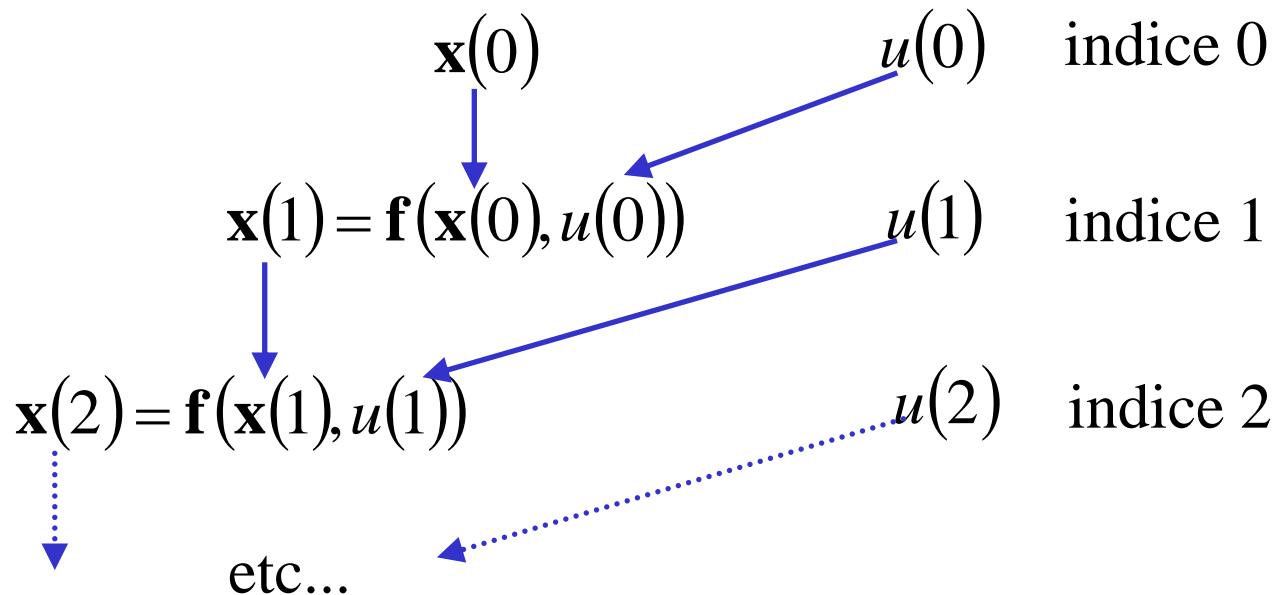
Sistema SISO

l'ingresso e l'uscita sono scalari

## 5. Movimento

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}(0) \\ u(k), \ k \geq 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\quad} \left. \begin{array}{l} \mathbf{x}(k), \ k \geq 0 \\ y(k), \ k \geq 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Movimento dello stato} \\ \text{Movimento dell'uscita} \end{array}$$

Il movimento dello stato può essere calcolato iterativamente.  
Per esempio, considerando un sistema tempo invariante con  $k_0=0$ :



## Esempio

Si consideri un problema di gestione delle scorte di un magazzino. Le variabili in gioco sono le seguenti:

$s(k)$  scorte all'inizio del mese  $k$ -esimo

$v(k)$  vendite nel mese  $k$ -esimo

$p(k)$  produzione nel mese  $k$ -esimo

$\alpha$  tasso mensile di deperimento della merce

Le scorte all'inizio del mese  $k+1$ -esimo sono date dalla seguente equazione:

$$s(k+1) = s(k) - \alpha s(k) - v(k) + p(k)$$

scorte all'inizio del mese  $k$

scorte deperite nel mese  $k$

merce venduta nel mese  $k$

merce prodotta nel mese  $k$

La produzione durante il mese  $k$  dipende dalle vendite durante il mese precedente:

$$p(k) = \beta v(k-1)$$

Da cui si ottiene:

$$s(k+1) = (1 - \alpha)s(k) - v(k) + \beta v(k-1)$$

Si scelgano le seguenti variabili di stato

$$\begin{cases} x_1(k) = s(k) \\ x_2(k) = v(k-1) \end{cases}$$

Si scelgano come ingresso ed uscita, rispettivamente

$$\begin{cases} u(k) = v(k) \\ y(k) = s(k) \end{cases}$$

Si ottiene quindi il seguente sistema

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (1-\alpha)x_1(k) + \beta x_2(k) - u(k) \\ x_2(k+1) = u(k) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases}$$

Lineare, Tempo-Invariante, Strett. Proprio, SISO,  $n=2$

Si fissi per esempio:  $\alpha = 0.1, \beta = 2$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.9x_1(k) + 2x_2(k) - u(k) \\ x_2(k+1) = u(k) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases}$$

E' possibile calcolare il movimento dello stato e dell'uscita a partire da condizioni iniziali assegnate, noto l'andamento dell'ingresso:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad u(k) = 4\text{sca}(k-2) - 3\text{sca}(k-7)$$

Per iterazioni successive otteniamo i valori delle variabili di stato e dell'uscita ad ogni istante di tempo (cioè i movimenti dello stato e dell'uscita).

$$\begin{cases} x_1(1) = 0.9x_1(0) + 2x_2(0) - u(0) = 0.9 \cdot 5 + 2 \cdot 0 - 0 = 4.5 \\ x_2(1) = u(0) = 0 \\ y(0) = x_1(0) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(2) = 0.9x_1(1) + 2x_2(1) - u(1) = 0.9 \cdot 4.5 + 2 \cdot 0 - 0 = 4.05 \\ x_2(2) = u(1) = 0 \\ y(1) = x_1(1) = 4.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(3) = 0.9x_1(2) + 2x_2(2) - u(2) = 0.9 \cdot 4.05 + 2 \cdot 0 - 4 = -1.355 \\ x_2(3) = u(2) = 4 \\ y(2) = x_1(2) = 4.05 \end{cases}$$

etc... etc...

## 6. Equilibrio (sistemi SISO tempo invarianti)

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k)) \\ y(k) = g(\mathbf{x}(k), u(k)) \end{cases}$$

$\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$  stato iniziale

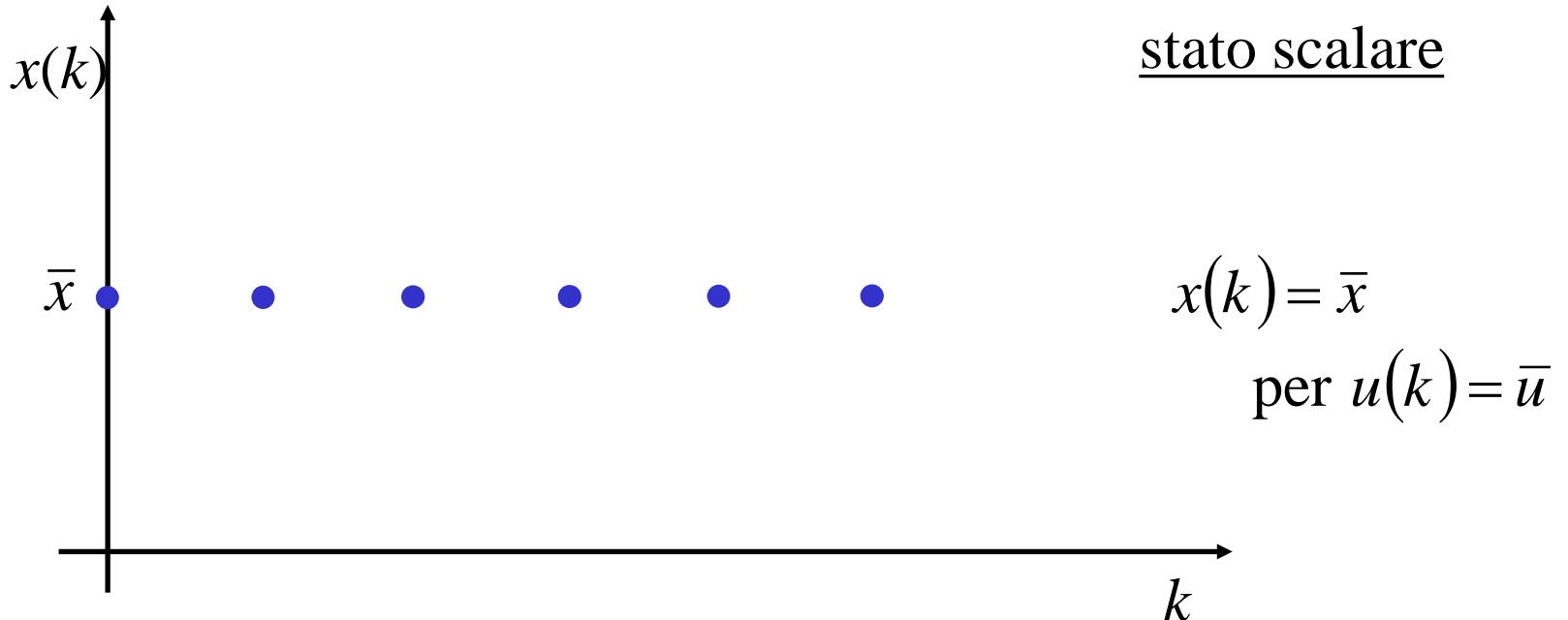
$u(k) = \bar{u}, k \geq 0$  ingresso costante

### Stato di equilibrio

Movimento dello stato  $\mathbf{x}(k) = \bar{\mathbf{x}}$  costante nel tempo in corrispondenza di  $u(k) = \bar{u}$

### Uscita di equilibrio

Movimento dell'uscita  $y(k) = \bar{y}$  costante nel tempo in corrispondenza di  $u(k) = \bar{u}$



Calcolo dell'equilibrio (per sistemi a tempo discreto)

$$x(k+1) = x(k) = \bar{x} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \end{cases} \quad \text{Eq. algebrica}$$

## Esempio

$$\begin{cases} x(k+1) = -0.5x(k) + 0.25u(k) \\ y(k) = 3x(k) - u(k) \end{cases}$$

Calcolare stato ed uscita di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante  $u(k) = 2, k \geq 0$

Bisogna risolvere l'equazione algebrica

$$\bar{x} = -0.5\bar{x} + 0.25 \cdot 2 \quad \longrightarrow \quad \bar{x} = \frac{1}{3} \quad \text{Stato di equilibrio} \\ (\text{per } \bar{u} = 2)$$

Se si applica l'ingresso costante  $\bar{u} = 2$  con condizione iniziale  $x(0) = \bar{x} = \frac{1}{3}$ , il movimento dello stato è

$$x(k) = \bar{x} = \frac{1}{3}, \quad k \geq 0$$

L'uscita di equilibrio è  $\bar{y} = 3\bar{x} - \bar{u} = -1$

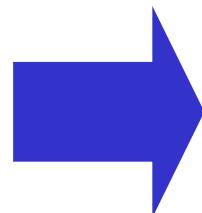
## Esempio

Si consideri nuovamente il problema della gestione delle scorte di un magazzino e si calcoli l'uscita di equilibrio (cioè le scorte all'equilibrio) in corrispondenza di un ingresso costante (cioè vendite costanti).

$$u(k) = \bar{u} \text{ Ingresso (vendite) costante}$$

All'equilibrio si ha:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = (1 - \alpha)\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2 - \bar{u} \\ \bar{x}_2 = \bar{u} \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{\beta - 1}{\alpha} \bar{u} \\ \bar{x}_2 = \bar{u} \\ \bar{y} = \bar{x}_1 = \frac{\beta - 1}{\alpha} \bar{u} \end{cases}$$

## 7. Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI) (caso SISO)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]_{1 \times n} \quad D = [d]_{1 \times 1}$$

**Nota** Frequentemente si trovano  $F, G, H, D$

## 8. Equilibrio di sistemi LTI (caso SISO)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

In corrispondenza di  $u(k) = \bar{u}$  si imponga  $x(k+1) = x(k) = \bar{x}$

$$\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u} \quad \longrightarrow \quad (I - A)\bar{x} = B\bar{u}$$

**Se**  $\det(I - A) \neq 0$

$$\bar{x} = (I - A)^{-1} B\bar{u}$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} = \underbrace{\left( C(I - A)^{-1} B + D \right)}_{\mu} \bar{u}$$

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} \quad \boxed{\text{guadagno statico}}$$

**Se**  $\det(I - A) = 0$

Il sistema  $(I - A)\bar{x} = B\bar{u}$  può avere infinite o nessuna soluzione.

## 9. Movimento di sistemi LTI (caso SISO)

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) & x(0) = x_0 \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) & u(k), \quad k \geq 0 \end{cases}$$

Iterando l'equazione di stato:

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = Ax_0 + Bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A(Ax_0 + Bu(0)) + Bu(1) = A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1)$$

$$\begin{aligned} x(3) = Ax(2) + Bu(2) &= A(A^2x_0 + ABu(0) + Bu(1)) + Bu(2) = \\ &= A^3x_0 + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \end{aligned}$$

$$x(k) = \underbrace{A^k x_0}_{x_l(k)} + \underbrace{\sum_{j=1}^k A^{k-j} Bu(j-1)}_{x_f(k)} \quad k = 1, 2, \dots$$

Movimento libero  
dello stato

Movimento forzato  
dello stato

Per calcolare il movimento dell'uscita basta inserire l'espressione del movimento dello stato nella trasformazione d'uscita.

$$y(k) = \underbrace{CA^k x_0 + C \sum_{j=1}^k A^{k-j} Bu(j-1)}_{y_l(k)} + Du(k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Movimento libero dell'uscita

Movimento forzato dell'uscita

# 10. Linearizzazione di sistemi non lineari (caso SISO)

Si consideri un sistema non lineare stazionario

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k)) \\ y(k) = g(\mathbf{x}(k), u(k)) \end{cases}$$

Si supponga che questo sistema abbia uno stato di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  in corrispondenza di un ingresso costante  $\bar{u}$  cioè:

$$f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \bar{\mathbf{x}}$$

E' possibile definire un **sistema lineare** che **approssimi** il comportamento dinamico del sistema non lineare vicino all'equilibrio sfruttando la medesima logica usata per i sistemi a tempo continuo.

Definendo le "piccole variazioni":  $\delta\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}$   
 $\delta u(k) = u(k) - \bar{u}$

Si può scrivere il seguente sistema lineare approssimante:

$$\begin{cases} \delta \mathbf{x}(k+1) \cong \mathbf{f}_x(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \delta \mathbf{x}(k) + \mathbf{f}_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \delta u(k) \\ \delta y(k) \cong g_x(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \delta \mathbf{x}(k) + g_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) \delta u(k) \end{cases}$$

$$\mathbf{f}_x(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}}$$

matrice  $A$   $n \times n$

$$\mathbf{f}_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial u \\ \vdots \\ \partial f_n / \partial u \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}}$$

vettore  $B$   $n \times 1$

$$g_x(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = [\partial g / \partial x_1 \quad \dots \quad \partial g / \partial x_n]_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}}$$

vettore  $C$   $1 \times n$

$$g_u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}) = \partial g / \partial u \Big|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}} \\ u=\bar{u}}}$$

scalare  $D$   $1 \times 1$

# 11. Stabilità dell'equilibrio nei sistemi LTI

Consideriamo un sistema LTI SISO

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

Sia  $(\bar{x}, \bar{u})$  un equilibrio per il sistema.

$$\begin{cases} u(k) = \bar{u}, k \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} \end{cases}$$



movimento nominale

$$x(k) = \bar{x}, k \geq 0$$

Usando l'espressione del movimento dello stato

movimento  
nominale

$$x(k) = A^k \bar{x} + \sum_{j=1}^k A^{k-j} B \bar{u} = \bar{x} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} u(k) = \bar{u}, k \geq 0 \\ x(0) = \bar{x} + \delta \bar{x} \end{cases}$$

perturbazione della  
condizione iniziale

Usando l'espressione del movimento dello stato

movimento  
perturbato

$$x(k) = A^k(\bar{x} + \delta \bar{x}) + \sum_{j=1}^k A^{k-j} B \bar{u}$$

$$= A^k \bar{x} + A^k \delta \bar{x} + \sum_{j=1}^k A^{k-j} B \bar{u} =$$

$$= \boxed{A^k \bar{x} + \sum_{j=1}^k A^{k-j} B \bar{u}} + \boxed{A^k \delta \bar{x}}$$

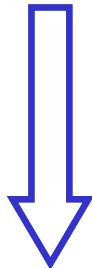
movimento nominale

perturbazione del  
movimento

Quindi:

$$\delta x(k) = x(k) - \bar{x} = A^k \delta \bar{x}$$

perturbazione del  
movimento



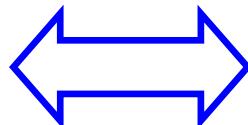
perturbazione della  
condizione iniziale

La perturbazione del movimento che si ottiene in seguito ad una perturbazione della condizione iniziale:

- non dipende dal particolare stato di equilibrio  
quindi si può parlare di stabilità del sistema
- dipende solo dalla matrice  $A^k$
- la stabilità (nei sistemi lineari) è una proprietà “globale”  
(non dipende dall’entità della perturbazione)

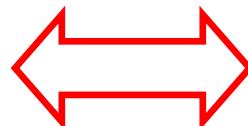
Si può quindi dedurre che

**Asintotica  
stabilità**



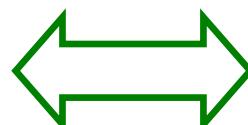
$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$$

**Instabilità**



$$A^k \text{ diverge per } k \rightarrow \infty$$

**Stabilità**



$$A^k \text{ limitata } \forall k$$

E' possibile ripetere l'analisi modale della matrice  $A$  in stretta analogia con quanto fatto per i sistemi a tempo continuo (di cui saranno mostrate le sole conclusioni).

## 12. Stabilità dei sistemi LTI

Siano  $\lambda_i$  gli autovalori della matrice  $A$ .

E' possibile discutere la stabilità sfruttando considerazioni simili a quelle fatte per i sistemi dinamici a tempo continuo.

## Teorema 1

Un sistema LTI è **asintoticamente stabile** se e solo se tutti gli autovalori della matrice  $A$  hanno **modulo strettamente minore di 1**.

$$|\lambda_i| < 1, \forall i \quad \longleftrightarrow \quad \text{Asintotica stabilità}$$

## Teorema 2

Un sistema LTI è **instabile** se la matrice  $A$  ha almeno un autovalore con **modulo strettamente maggiore di 1**.

$$\exists i^* : |\lambda_{i^*}| > 1 \quad \longrightarrow \quad \text{Instabilità}$$

## Teorema 3

Un sistema LTI è **stabile** se la matrice  $A$  ha tutti gli autovalori con **modulo strettamente minore di 1 ed uno solo con modulo unitario** (o una sola coppia c.c. con modulo unitario).

$$|\lambda_i| \leq 1, \forall i \quad \exists ! i^* : |\lambda_{i^*}| = 1 \quad \longrightarrow \quad \text{Stabilità}$$

## Osservazione 1 (sul Teorema 3)

Una coppia di autovalori complessi coniugati “conta” come uno solo. Quindi, un sistema con una sola coppia di autovalori complessi coniugati con modulo unitario (e tutti gli altri con modulo inferiore ad 1) è stabile (semplicemente).

## Osservazione 2 (sui Teoremi 2 & 3)

Quel che si deduce dall’Osservazione 1 è che ci sono sistemi con più di un autovalore con modulo unitario (e tutti gli altri con modulo inferiore ad 1) che sono **stabili (semplicemente)** ed altri sistemi con più di un autovalore con modulo unitario (e tutti gli altri con modulo inferiore ad 1) che sono **instabili**.

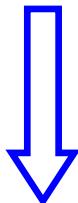
## Schema riassuntivo per autovalori con modulo unitario

$$|\lambda_i| \leq 1, \forall i$$

$$\exists i^* : |\lambda_{i^*}| = 1$$



**non asintoticamente stabile**  
(ma stabile o instabile?)

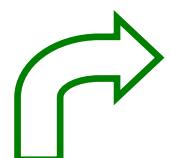


- \* **singolo** autovalore con  $|\lambda_i| = 1$   
(o una sola coppia di autovalori  
complessi coniugati con modulo unitario)



**semplicemente stabile**

- \* **più** autovalori con  $|\lambda_i| = 1$



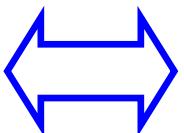
**semplicemente stabile**



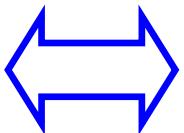
? *Non affrontiamo questo caso*

**instabile**

**Asintotica  
stabilità**

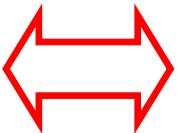


$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$$



$$|\lambda_i| < 1, \forall i$$

**Instabilità**



$A^k$  diverge  
per  $k \rightarrow \infty$

**approfondimento**

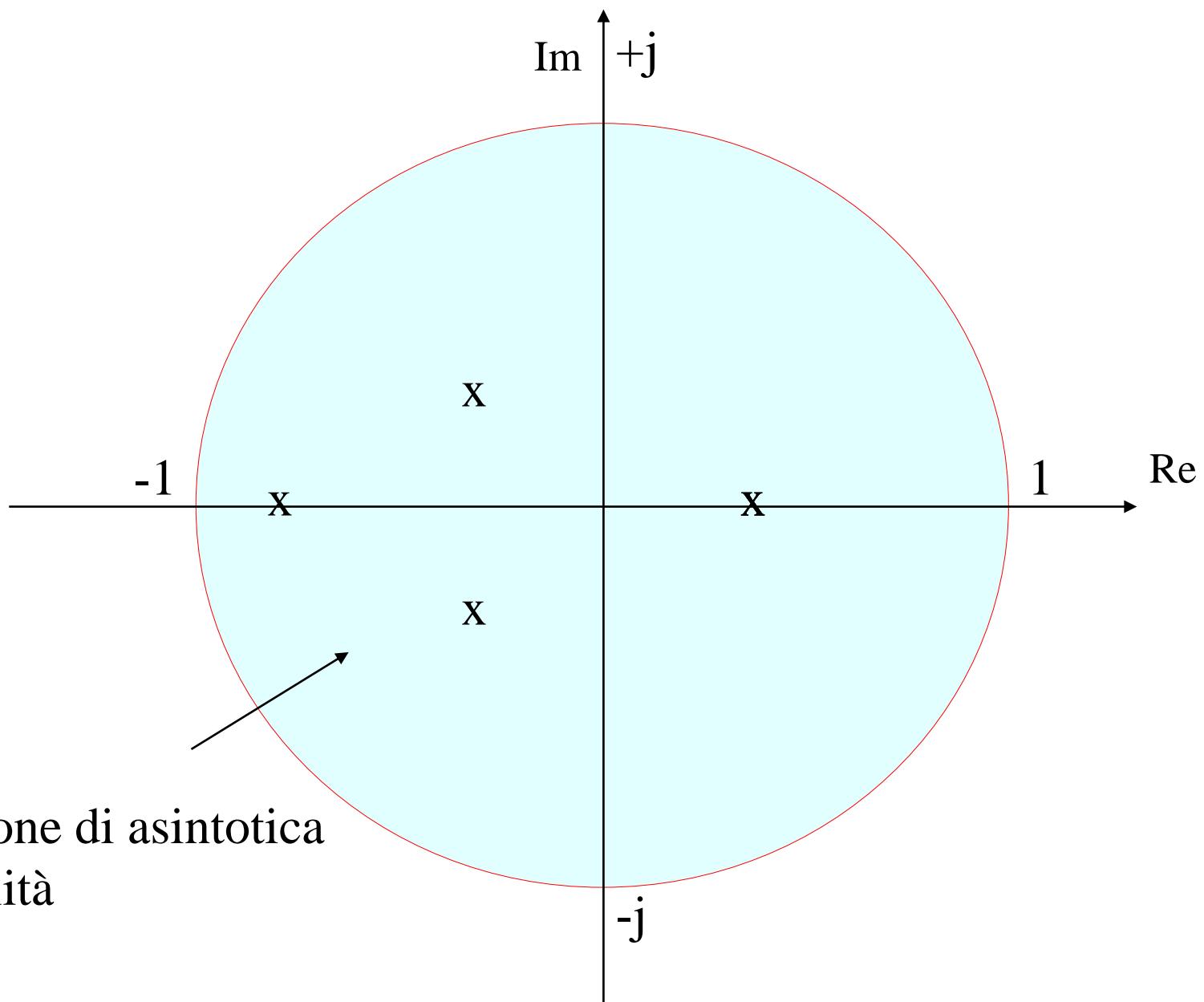
**Stabilità**

$$|\lambda_i| \leq 1, \forall i \quad \exists ! i : |\lambda_i| = 1$$

**oppure**

$$|\lambda_i| \leq 1, \forall i$$

$A$  ha autovalori multipli  
con modulo unitario la cui  
**molteplicità geometrica è uguale**  
alla molteplicità algebrica.



Regione di asintotica  
stabilità

## Esempio

Si consideri nuovamente il problema della gestione delle scorte di un magazzino e se ne discuta la stabilità.

$$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 0 < \alpha < 1$$
$$C = [1 \quad 0] \quad D = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 - \alpha \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}} \quad |\lambda_i| < 1 \quad \text{per} \quad i = 1, 2 \quad \xrightarrow{\hspace{2cm}} \quad \begin{array}{l} \text{Sistema} \\ \text{As. stabile} \end{array}$$

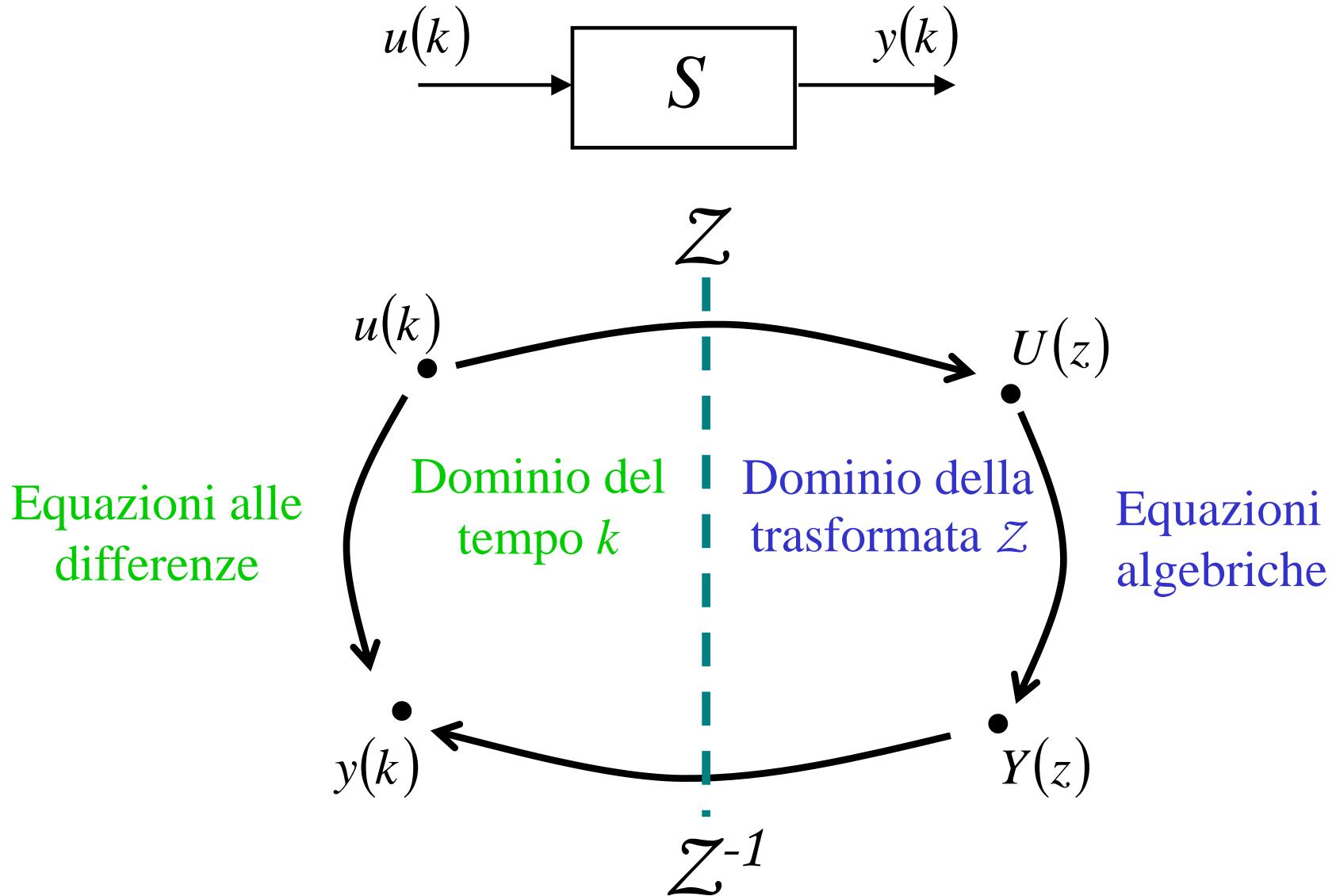
# Lezione 29.

## Trasformazione $Z$

# Schema

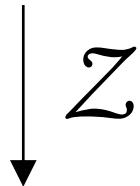
1. Introduzione
2. Definizione
3. Proprietà
4. Calcolo dell'antitrasformata  $Z$

# 1. Introduzione



## 2. Definizione

$$f(k): \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$



$$F(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

Trasforma una funzione reale di variabile intera in una funzione complessa di variabile complessa.

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$$

## Esempio - Trasformata dello scalino

$$f(k) = \text{sca}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

## Esempio - Trasformata dell'impulso

$$f(k) = \text{imp}(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) = 1$$

## Esempio - Trasformata dell'esponenziale

$$f(k) = \lambda^k$$

$$F(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda z^{-1})^k = \frac{1}{1 - \lambda z^{-1}} = \frac{z}{z - \lambda}$$

### 3. Proprietà

#### 3.1 Linearità

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

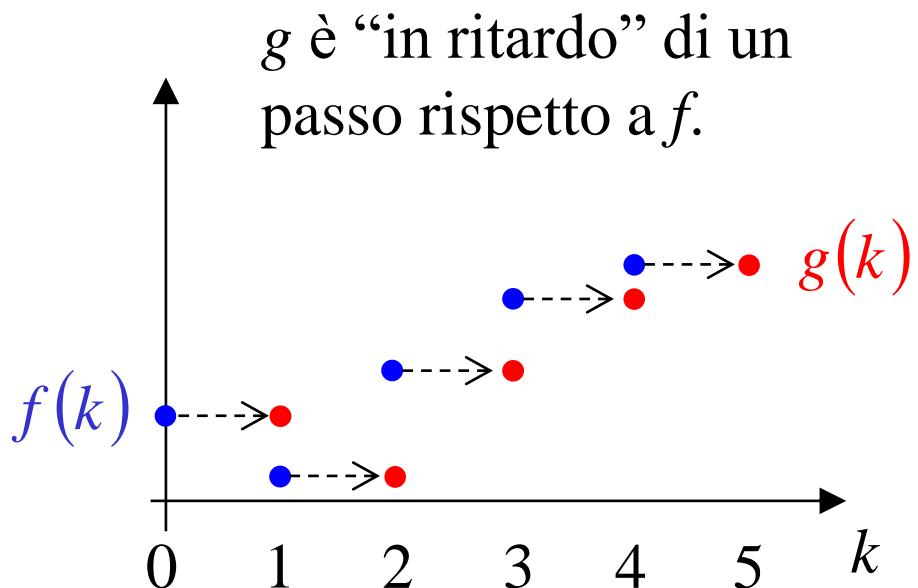
$$G(z) = \mathcal{Z}[g(k)]$$

$$\mathcal{Z}[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha F(z) + \beta G(z) \quad \forall \alpha, \beta \in C$$

## 3.2 Ritardo

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

Sia  $g(k) = f(k-1)$



Allora

$$G(z) = z^{-1}F(z)$$

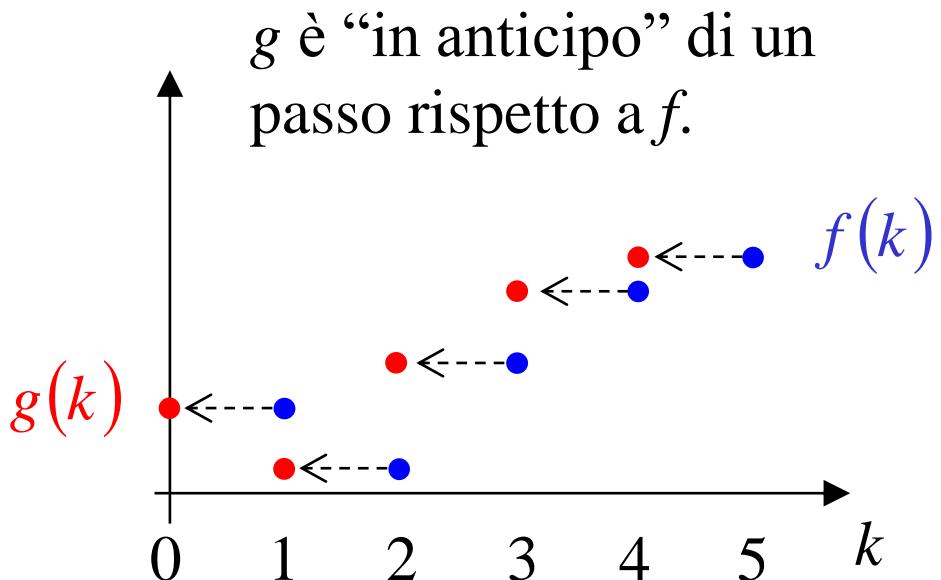
Infatti:

$$\begin{aligned} G(z) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-1)z^{-k} = f(-1) + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \dots = \\ &= 0 + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \dots = z^{-1}(f(0) + f(1)z^{-1} + \dots) = \\ &= z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = z^{-1}F(z) \end{aligned}$$

### 3.3 Anticipazione

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$$

Sia  $g(k) = f(k+1)$   
con  $f(0) = 0$



Allora

$$G(z) = zF(z)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} G(z) &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-k} = f(1) + f(2)z^{-1} + f(3)z^{-2} + \dots \\ &= z(f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots) = z \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = zF(z) \end{aligned}$$

## Tabella trasformate notevoli

$$\text{imp}(k)$$

$$1$$

$$\text{sca}(k)$$

$$\frac{z}{z-1}$$

$$\text{ram}(k)$$

$$\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\text{par}(k)$$

$$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$a^k \text{sca}(k)$$

$$\frac{z}{z-a}$$

$$\sin(\vartheta k) \text{sca}(k)$$

$$\frac{z \sin(\vartheta)}{z^2 - 2 \cos(\vartheta) z + 1}$$

$$\cos(\vartheta k) \text{sca}(k)$$

$$\frac{z(z - \cos(\vartheta))}{z^2 - 2 \cos(\vartheta) z + 1}$$

## 4. Calcolo dell'antitrasformata

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$$

- ✓ ~~Formula esplicita~~
  - ✓ Teorema del valore iniziale  $\longrightarrow f(0)$
  - ✓ Teorema del valore finale  $\longrightarrow f(\infty)$
  - ✓ Sviluppo di Heaviside
  - ✓ Lunga divisione
- } (solo per  $F(z)$  razionali)
- 

## 4.1 Teorema del valore iniziale

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Infatti:

$$F(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = f(0) + f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} + \dots \xrightarrow[z \rightarrow \infty]{} f(0)$$

## 4.2 Teorema del valore finale

**Ipotesi**: i poli di  $F(z)$  devono avere tutti modulo  $< 1$   
oppure essere in  $z=1$

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z)$$

## 4.3 Antitrasformata $\mathcal{Z}$ mediante lunga divisione

Si consideri una  $F(z)$  razionale

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \text{ con } n \leq m$$

Facendo la divisione di polinomi si ottengono tanti campioni di  $f(k)$  quanti sono i “colpi” di lunga divisione che si fanno.

Infatti:

$$\begin{array}{c|c} N(z) & D(z) \\ \hline & f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \end{array}$$

Con la lunga divisione non si ottiene un’espressione analitica di  $f(k)$ , ma solo i suoi primi campioni.

# Esempio

$$F(z) = \frac{4z^2 - z + 2}{z^2 + 2z + 2}$$

$$\begin{array}{r}
 4z^2 - z + 2 \\
 \hline
 -4z^2 - 8z - 8 \\
 \cancel{-} \qquad \qquad \qquad -9z - 6 \\
 \\ 
 \hline
 9z + 18 + 18z^{-1} \\
 \cancel{-} \qquad \qquad \qquad 12 + 18z^{-1} \\
 \\ 
 \end{array}
 \quad
 \left| \begin{array}{l}
 z^2 + 2z + 2 \\
 \hline
 4 - 9z^{-1} + 12z^{-2} + \dots \\
 \\ 
 \end{array} \right.$$

$f(2) = 12$   
 $f(1) = -9$   
 $f(0) = 4$

## 4.4 Sviluppo di Heaviside

Si consideri il problema dell'antitrasformazione della funzione razionale

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

con grado di  $N(z)$  inferiore od uguale a quello di  $D(z)$ .

L'obiettivo è scomporre  $F(z)$  in una somma di termini di cui conosco la trasformata. Osservando la tabella delle trasformate notevoli si nota che tutte hanno un fattore  $z$  al numeratore.

Quindi, si applicherà il metodo di Heaviside a  $\frac{F(z)}{z}$

Si consideri il caso in cui  $F(z)$  abbia **tutti i poli distinti e non nulli**, cioè:

$$D(z) = \prod_{i=1}^n (z - p_i) \quad p_i \neq p_j \quad p_i \neq 0 \quad \forall i$$

Si scomponga  $\frac{F(z)}{z}$  come segue:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{(z - p_1)} + \frac{\alpha_2}{(z - p_2)} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(z - p_n)}$$

da cui:

$$F(z) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{z}{(z - p_1)} + \alpha_2 \frac{z}{(z - p_2)} + \cdots + \alpha_n \frac{z}{(z - p_n)}$$

E quindi infine

$$f(k) = \alpha_0 \text{imp}(k) + \alpha_1 p_1^k + \alpha_2 p_2^k + \cdots + \alpha_n p_n^k \quad k \geq 0$$

## Esempio

$$F(z) = \frac{4z^2 - z + 2}{z^2 - 0.75z + 0.125} \quad \Rightarrow \quad F(z) = \frac{4z^2 - z + 2}{(z - 0.25)(z - 0.5)}$$

$$\begin{aligned} \frac{F(z)}{z} &= \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{(z - 0.25)} + \frac{\alpha_2}{(z - 0.5)} = \frac{\alpha_0(z - 0.25)(z - 0.5) + \alpha_1 z(z - 0.5) + \alpha_2 z(z - 0.25)}{z(z - 0.25)(z - 0.5)} = \\ &= \frac{(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)z^2 + (-0.75\alpha_0 - 0.5\alpha_1 - 0.25\alpha_2)z + 0.125\alpha_0}{z(z - 0.25)(z - 0.5)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 4 \\ 0.75\alpha_0 + 0.5\alpha_1 + 0.25\alpha_2 = 1 \\ 0.125\alpha_0 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_0 = 16 \\ \alpha_1 = -32 \\ \alpha_2 = 20 \end{cases}$$

$$F(z) = 16 - 32 \frac{z}{(z - 0.25)} + 20 \frac{z}{(z - 0.5)}$$

$$f(k) = 16 \text{imp}(k) - 32 \cdot (0.25)^k + 20(0.5)^k \quad k \geq 0$$

# Lezione 30.

Sistemi dinamici a tempo discreto  
(approccio ingresso/uscita)

# Schema

1. Funzione di trasferimento
2. Ricorsione
3. Filtri FIR
4. Metodi di rappresentazione di un sistema  
LTI SISO a tempo discreto

# 1. Funzione di trasferimento

Si consideri un sistema LTI  $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$

Eseguendo la trasformazione  $Z$  si ottiene a partire da condizioni iniziali nulle si ottiene:

$$\begin{cases} zX(z) = AX(z) + BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1}BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

Infine:

$$Y(z) = \underbrace{\left[ C(zI - A)^{-1}B + D \right]}_{G(z)} U(z)$$

**Funzione di trasferimento**

## 1.1 Interpretazione della funzione di trasferimento (per sistemi SISO)

Si consideri un sistema con funzione di trasferimento  $G(z)$

Siano

$$u(k) = \text{imp}(k) \xrightarrow{\mathcal{Z}} U(z) = 1$$
$$x(0) = 0$$

Allora

$$Y(z) = G(z)U(z) = G(z)$$

La funzione di trasferimento è la trasformata  $\mathcal{Z}$  della risposta all'impulso del sistema

## 1.2 Proprietà

$$G(z) \text{ è razionale} \longrightarrow G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

- ★  $D(z) = \varphi(z) = \det(zI - A)$  è un polinomio in  $z$  di grado  $n$   
(è il polinomio caratteristico!)
- ★  $N(z)$  è un polinomio in  $z$  :
  - ✓ di grado  $n$  se  $D$  è diverso da zero
  - ✓ di grado  $< n$  se  $D$  è nullo

Salvo cancellazioni

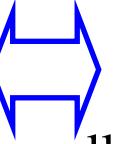
## In caso di cancellazioni

- ★  $D(z)$  è un fattore di  $\varphi(z)$  di grado  $r < n$
- ★  $N(z)$  ha grado  $v < n$  ( $v = r$  solo se  $D$  è diverso da zero)

Una cancellazione in  $G(z)$  è un indicatore dell'esistenza di **parti “nascoste”** (**non raggiungibili** e/o **non osservabili**) del sistema (cioè che esistono nella rappresentazione di stato e che “si perdono” passando alla rappresentazione ingresso/uscita).

## 1.3 Poli e zeri di una funzione di trasferimento

- ★ I poli sono tutti autovalori
- ★ Un autovalore può non essere un polo in caso di cancellazioni
- ★ La stabilità dipende dai poli

As. stabilità   $|\lambda_i| < 1$   
(salvo cancellazioni)

- ★ Numero di zeri  $\leq$  numero di poli

## 1.4 Guadagno statico e funzione di trasferimento

Si consideri un sistema LTI

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

**Se la matrice  $I-A$  è invertibile**, ovvero la matrice  $A$  non ha autovalori in  $z=1$ , cioè  $G(z)$  non ha poli in  $z=1$ , il **guadagno statico** del sistema è

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \left( C(I - A)^{-1} B + D \right)$$

E' facile verificare che

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \left( C(I - A)^{-1} B + D \right) \equiv G(1)$$

**Se invece la matrice  $I-A$  non è invertibile**, ovvero la matrice  $A$  ha autovalori in  $z=1$ , cioè  $G(z)$  ha poli in  $z=1$ , è possibile definire un **guadagno generalizzato** della funzione di trasferimento:

$$\mu = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)^g G(z)$$

dove  $g$  è il tipo di  $G(z)$ .

## 2. Equazione ricorsiva

I sistemi a tempo discreto hanno una rappresentazione ingresso/uscita alternativa alla funzione di trasferimento, detta equazione ricorsiva.

La rappresentazione ricorsiva è molto utilizzata nell'Identificazione di Modelli (IMAD).

L'equazione ricorsiva consente di calcolare rapidamente i primi campioni delle risposte tipiche (all'impulso ed allo scalino) di un sistema dinamico LTI a tempo discreto.

## Esempio illustrativo

Si consideri un sistema LTI con ingresso  $u(k)$  ed uscita  $y(k)$  descritto mediante la seguente funzione di trasferimento

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{4z^2 - z + 2}{z^2 + 2z + 2}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} Y(z)(z^2 + 2z + 2) &= (4z^2 - z + 2)U(z) \\ z^2Y(z) + 2zY(z) + 2Y(z) &= 4z^2U(z) - zU(z) + 2U(z) \end{aligned}$$

Antitrasformando e ricordando la proprietà di anticipo:

$$y(k+2) + 2y(k+1) + 2y(k) = 4u(k+2) - u(k+1) + 2u(k)$$

Da cui:

$$y(k+2) = -2y(k+1) - 2y(k) + 4u(k+2) - u(k+1) + 2u(k)$$

$$y(k) = -2y(k-1) - 2y(k-2) + 4u(k) - u(k-1) + 2u(k-2)$$

## Esempio

Calcolare  $y(0), y(1), y(2), y(3)$  della risposta impulsiva del sistema con funzione di trasferimento  $W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}$

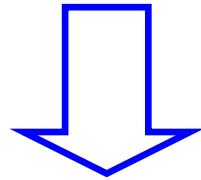
Si scriva l'equazione ricorsiva

$$\left( z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8} \right) Y(z) = (z^2 + z + 1) U(z)$$

$$y(k+2) + \frac{1}{4}y(k+1) + \frac{1}{8}y(k) = u(k+2) + u(k+1) + u(k)$$

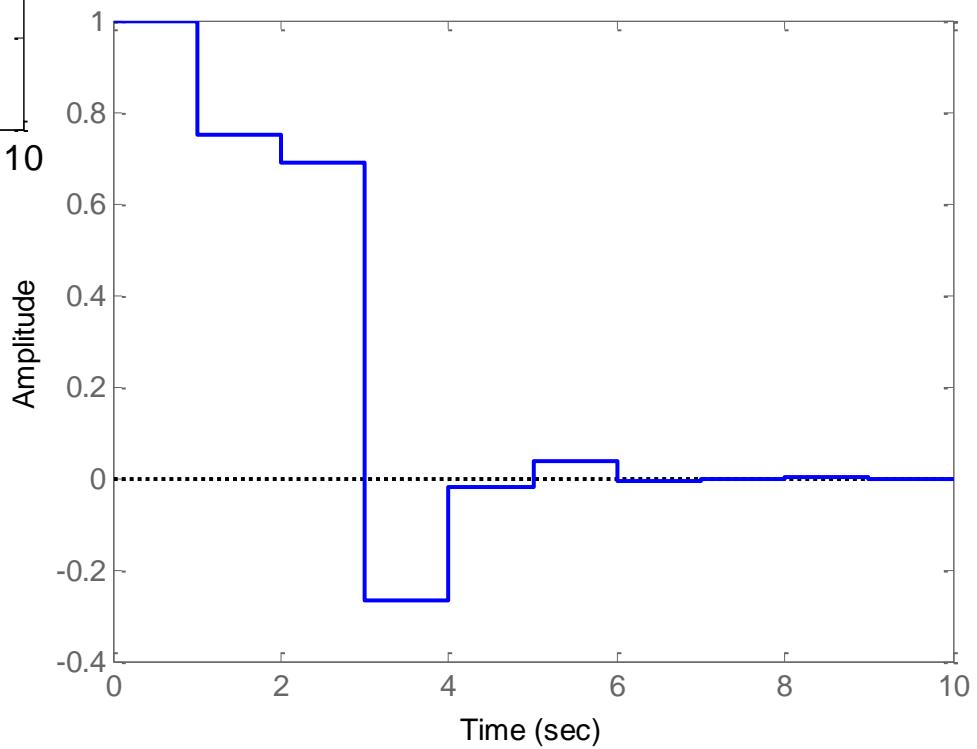
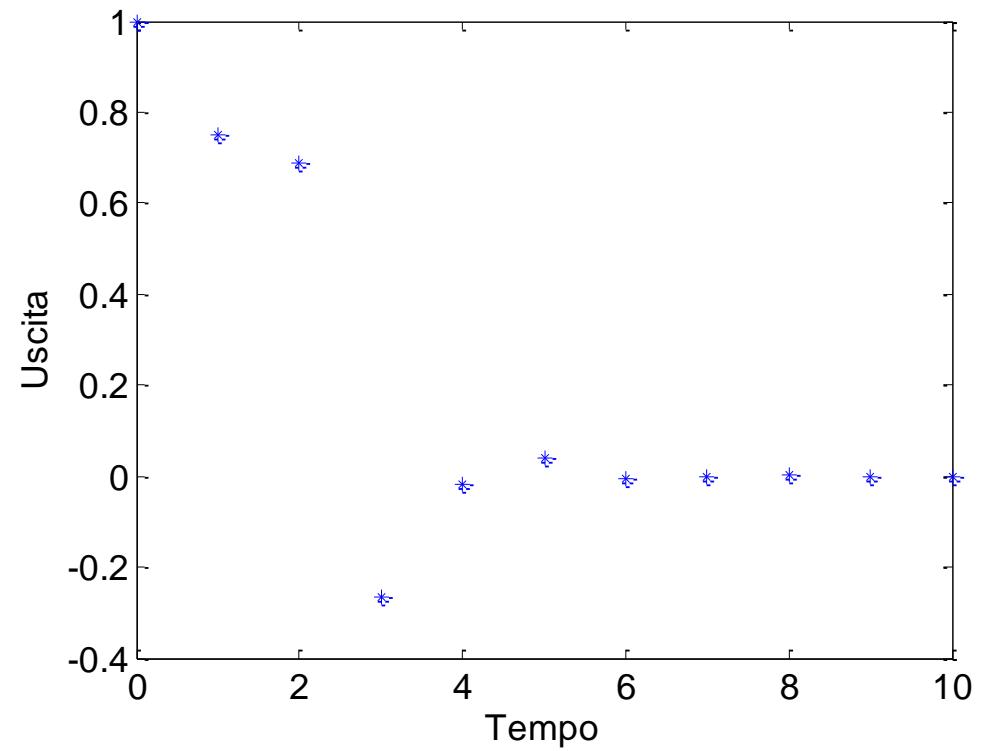
$$y(k) = -\frac{1}{4}y(k-1) - \frac{1}{8}y(k-2) + u(k) + u(k-1) + u(k-2)$$

$$u(k) = \text{imp}(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$



$$y(k) = -\frac{1}{4}y(k-1) - \frac{1}{8}y(k-2) + u(k) + u(k-1) + u(k-2)$$

| $k$ | $u(k)$ | $y(k)$   |
|-----|--------|--|
| 0   | 1      | $y(0) = -\frac{1}{4}y(-1) - \frac{1}{8}y(-2) + u(0) + u(-1) + u(-2) = 1$   |
| 1   | 0      | $y(1) = -\frac{1}{4}y(0) - \frac{1}{8}y(-1) + u(1) + u(0) + u(-1) = \frac{3}{4}$                                   |
| 2   | 0      | $y(2) = -\frac{1}{4}y(1) - \frac{1}{8}y(0) + u(2) + u(1) + u(0) = -\frac{3}{16} - \frac{1}{8} + 1 = \frac{11}{16}$ |
| 3   | 0      | $y(3) = -\frac{1}{4}y(2) - \frac{1}{8}y(1) + u(3) + u(2) + u(1) = -\frac{11}{64} - \frac{3}{32} = -\frac{17}{64}$  |



### 3. Sistemi FIR (Finite Impulse Response)

Sono sistemi dinamici LTI a tempo discreto  
con **tutti e soli i poli nell'origine**.

Questi sistemi hanno la caratteristica che **la loro risposta allo scalino raggiunge il valore di regime in un tempo finito**.

In particolare, se  $n$  è l'ordine del sistema, il valore di regime viene raggiunto dopo  $n$  passi.

Tale proprietà non vale per i sistemi LTI a tempo continuo, la cui risposta a scalino non raggiunge mai il valore di regime, ma vi tende asintoticamente.

Un sistema FIR di ordine  $n$  è quindi definito dalla seguente funzione di trasferimento:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n}$$

$$z^n Y(z) = (b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0) U(z)$$

$$y(k+n) = b_n u(k+n) + b_{n-1} u(k+n-1) + \cdots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$$

$$y(k) = b_n u(k) + b_{n-1} u(k-1) + \cdots + b_1 u(k-n+1) + b_0 u(k-n)$$

L'uscita al tempo  $k$  dipende dai campioni dell'ingresso fino al più al tempo  $k-n$ .

Si calcoli la risposta allo scalino:

$$u(k) = \text{sca}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

$$y(0) = b_n u(0) = b_n$$

$$y(1) = b_n u(1) + b_{n-1} u(0) = b_n + b_{n-1}$$

$$y(2) = b_n u(2) + b_{n-1} u(1) + b_{n-2} u(0) = b_n + b_{n-1} + b_{n-2}$$

⋮

$$y(n) = b_n u(n) + b_{n-1} u(n-1) + \cdots + b_1 u(1) + b_0 u(0) = b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1 + b_0 = F(1) = \mu$$

$$y(n+1) = b_n u(n+1) + b_{n-1} u(n) + \cdots + b_1 u(2) + b_0 u(1) = b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1 + b_0 = F(1) = \mu$$

⋮

$$y(n+m) = b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1 + b_0 = F(1) = \mu \quad \forall m \geq 1$$

## Esempio

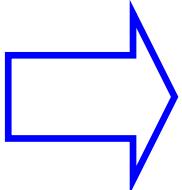
$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + \frac{5}{4}z + \frac{3}{8}}{z^3}$$

$$z^3 Y(z) = \left( z^2 + \frac{5}{4}z + \frac{3}{8} \right) U(z)$$

$$y(k+3) = u(k+2) + \frac{5}{4}u(k+1) + \frac{3}{8}u(k)$$

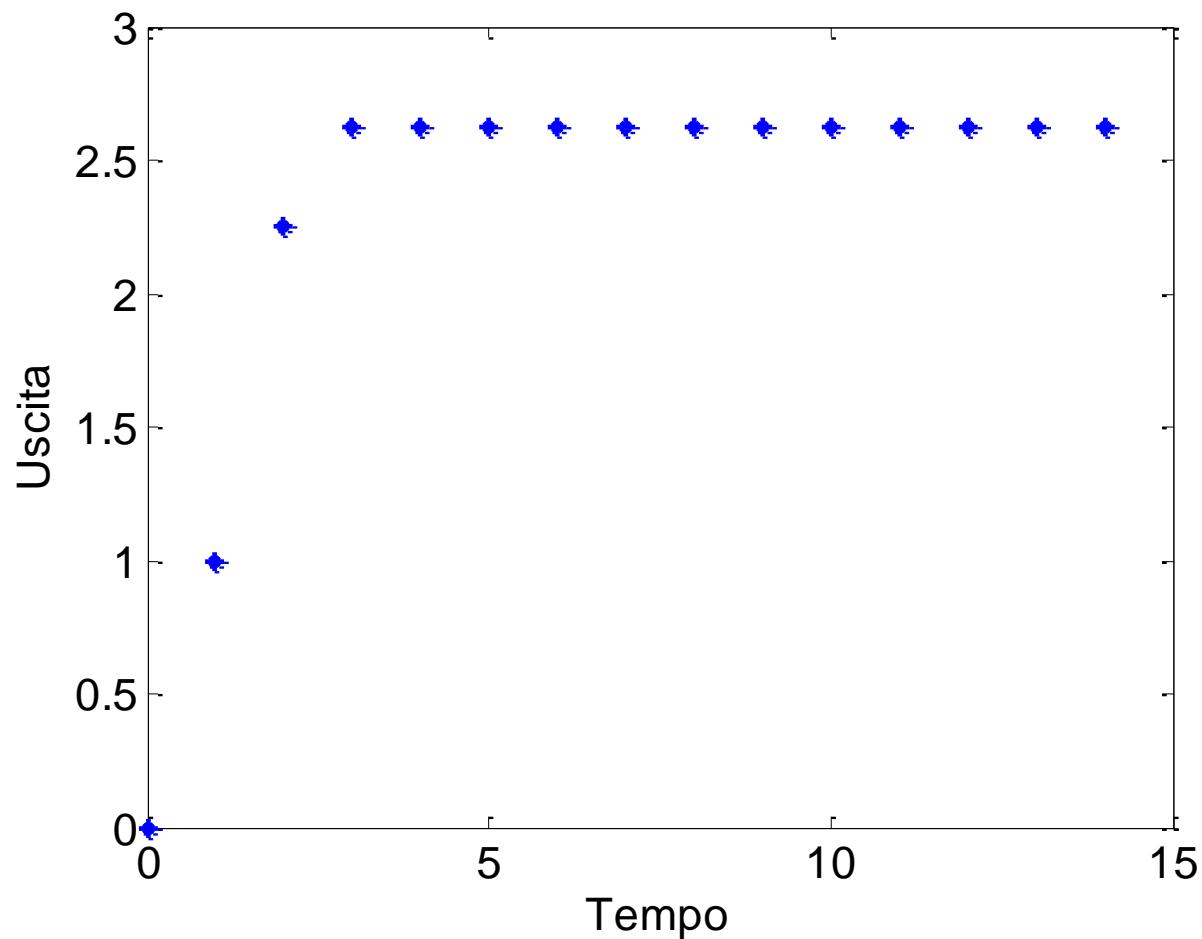
$$y(k) = u(k-1) + \frac{5}{4}u(k-2) + \frac{3}{8}u(k-3)$$

$$u(k) = \text{sca}(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$



Calcolare i primi quattro campioni della risposta allo scalino del sistema.

| $k$ | $u(k)$ | $y(k)$  |
|-----|--------|---|
| 0   | 1      | $y(0) = 0 + \frac{5}{4} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 0 = 0$            |
| 1   | 1      | $y(1) = 1 + \frac{5}{4} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 0 = 1$            |
| 2   | 1      | $y(2) = 1 + \frac{5}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 0 = \frac{9}{4}$  |
| 3   | 1      | $y(3) = 1 + \frac{5}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{21}{8}$ |
| 4   | 1      | $y(4) = 1 + \frac{5}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{21}{8}$ |



# 4. Metodi di rappresentazione di sistemi LTI SISO a tempo discreto

approfondimento

- 1 Funzione di trasferimento

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

- 2 Equazione ricorsiva

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \cdots + a_{n_a} y(k-n_a) + b_0 u(k-n_k) + \cdots + b_{n_b} u(k-n_k - n_b)$$

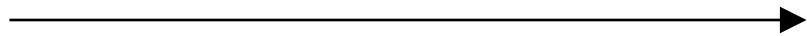
- 3 Rappresentazione di stato

$n_k \geq 0$  ritardo puro

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Come si passa da una rappresentazione all'altra?

3



1

Rappresentazione di stato

Funzione di trasferimento

$$G(z) = [C(zI - A)^{-1} B + D]$$

2

1

Equazione ricorsiva

Funzione di trasferimento

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \cdots + a_{n_a} y(k-n_a) + b_0 u(k-n_k) + \cdots + b_{n_b} u(k-n_k - n_b)$$

$$Y(z) = a_1 z^{-1} Y(z) + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a} Y(z) + b_0 z^{-n_k} U(z) + \cdots + b_{n_b} z^{-n_k - n_b} U(z)$$

$$Y(z) \left(1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_{n_a} z^{-n_a}\right) = z^{-n_k} \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_b-1} z^{-n_b+1} + b_{n_b} z^{-n_b}\right) U(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-n_k} \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_b-1} z^{-n_b+1} + b_{n_b} z^{-n_b}\right)}{1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_{n_a} z^{-n_a}} =$$

$$= z^{n_a - n_b - n_k} \frac{b_0 z^{n_b} + b_1 z^{n_b-1} + \cdots + b_{n_b-1} z + b_{n_b}}{z^{n_a} - a_1 z^{n_a-1} - \cdots - a_{n_a}}$$

# Esempio

$$y(k) = 0.25y(k-1) + 0.25y(k-3) + u(k-3) + 0.5u(k-4) + 0.75u(k-5)$$

$n_a$        $n_k$        $n_k + n_b$

$$Y(z) = 0.25z^{-1}Y(z) + 0.25z^{-3}Y(z) + z^{-3}U(z) + 0.5z^{-4}U(z) + 0.75z^{-5}U(z)$$

$$(1 - 0.25z^{-1} - 0.25z^{-3})Y(z) = z^{-3}(1 + 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2})U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-3}(1 + 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2})}{(1 - 0.25z^{-1} - 0.25z^{-3})}$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(z^2 + 0.5z + 0.75)}{z^2(z^3 - 0.25z^2 - 0.25)} - (n_a - n_k - n_b)$$

$n_b$   
 $n_a$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + 0.5z + 0.75}{z^5 - 0.25z^4 - 0.25z^2}$$

1

2

Funzione di trasferimento

Equazione ricorsiva

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^{m_b} + b_1 z^{m_b-1} + \cdots + b_{m_b-1} z + b_{m_b}}{z^{m_a} - a_1 z^{m_a-1} - \cdots - a_{m_a}} = \quad m_a \geq m_b \\
 &= \frac{z^{m_b} (b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_b-1} z^{-n_b+1} + b_{n_b} z^{-n_b})}{z^{m_a} (1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_{n_a} z^{-n_a})}
 \end{aligned}$$

$$Y(z) (1 - a_1 z^{-1} - \cdots - a_{n_a} z^{-n_a}) = z^{m_b - m_a} (b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_b-1} z^{-n_b+1} + b_{n_b} z^{-n_b}) U(z)$$

$$m_b - m_a = -n_k \leq 0 \quad \text{Ritardo puro}$$

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \cdots + a_{n_a} y(k-n_a) + b_0 u(k-n_k) + \cdots + b_{n_b} u(k-n_k-n_b)$$

# Esempio

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2 + 0.5z + 0.75}{z^5 - 0.25z^4 - 0.25z^2}$$

*m<sub>b</sub>*  
↓  
*m<sub>a</sub>*

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^2(1 + 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2})}{z^5(1 - 0.25z^{-1} - 0.25z^{-3})}$$

$$m_b - m_a = -n_k$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-3}(1 + 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2})}{(1 - 0.25z^{-1} - 0.25z^{-3})}$$

$$(1 - 0.25z^{-1} - 0.25z^{-3})Y(z) = z^{-3}(1 + 0.5z^{-1} + 0.75z^{-2})U(z)$$

$$Y(z) - 0.25z^{-1}Y(z) - 0.25z^{-3}Y(z) = z^{-3}U(z) + 0.5z^{-4}U(z) + 0.75z^{-5}U(z)$$

$$y(k) - 0.25y(k-1) - 0.25y(k-3) = u(k-3) + 0.5u(k-4) + 0.75u(k-5)$$

$$y(k) = 0.25y(k-1) + 0.25y(k-3) + u(k-3) + 0.5u(k-4) + 0.75u(k-5)$$



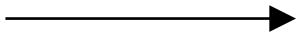
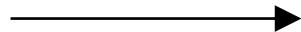
Rappresentazione di stato



Equazione ricorsiva

Non c'è passaggio diretto immediato.

Di solito si passa per la funzione di trasferimento.





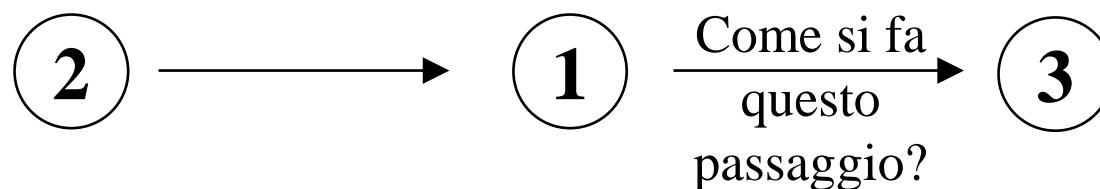
Equazione ricorsiva



Rappresentazione di stato

Non c'è passaggio diretto immediato.

Di solito si passa per la funzione di trasferimento.



**1****3**

Funzione di trasferimento

Rappresentazione di stato

E' il problema della **realizzazione**.  
(non affrontato)

# Lezione 31.

## Cenni di controllo digitale

# Schema

1. Introduzione
2. Campionamento e Tenuta
3. Aliasing
4. Teorema del campionamento
5. Progetto mediante discretizzazione di controllori analogici

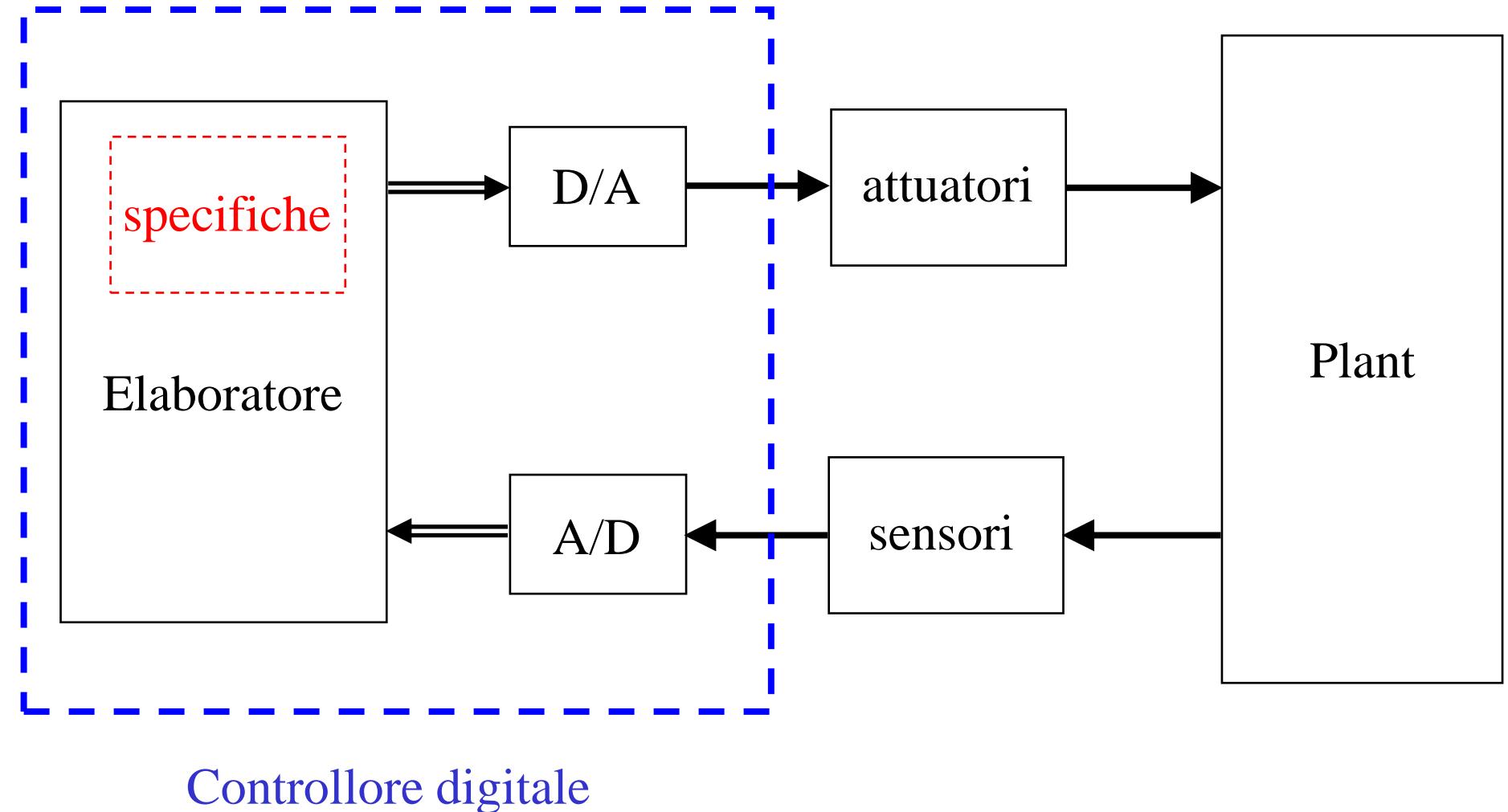
# 1. Introduzione

I moderni sistemi di controllo sono ormai tutti basati su elaboratori elettronici per (ovvie) ragioni:

- Costi (bassi)
- Flessibilità (indipendenti dalla tecnologia del sistema)
- Algoritmi (possibilità di utilizzarne di molto complicati)
- Integrazione con supervisione e diagnostica

Lo schema tipico di un sistema di controllo in retroazione è il seguente:

- i **sensori** trasformano le variabili misurate sul plant in variabili elettriche facilmente manipolabili (tipicamente tensioni);
- queste variabili vengono **campionate** (convertite in segnali a tempo discreto) e trasmesse ad un elaboratore;
- l'**elaboratore** è la sede dell'algoritmo di controllo che, note le specifiche (riferimento), sulla base dei segnali misurati, genera i segnali di controllo (tipicamente tensioni o correnti);
- i **segnali di controllo** vengono **convertiti in segnali analogici** (a tempo continuo), eventualmente amplificati, ed inviati agli attuatori;
- gli **attuatori** trasformano le variabili generate dal controllo nelle azioni di controllo da esercitare sul plant.



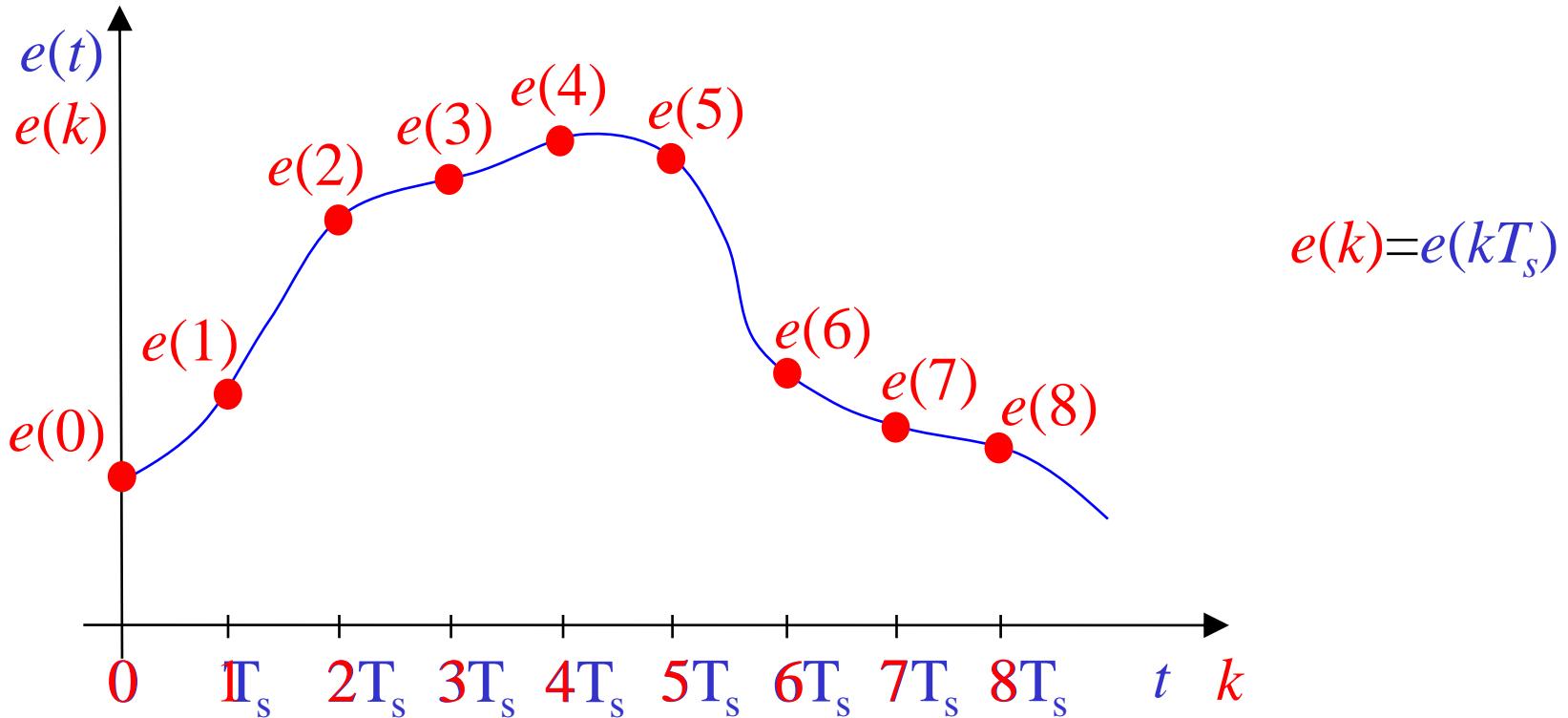
## 2. Campionamento e tenuta

Il **campionamento** è l'operazione che trasforma un segnale a tempo continuo (analogico) in un segnale a tempo discreto (digitale/numerico). Il “blocco” che effettua tale operazione è il **campionatore** (convertitore A/D).

La **tenuta** è l'operazione che trasforma un segnale a tempo discreto in un segnale a tempo continuo. Il “blocco” che effettua tale operazione è il **mantenitore** (convertitore D/A).

E' importante disporre di **modelli** che descrivano tali operazioni.

## Campionatore (Convertitore A/D)



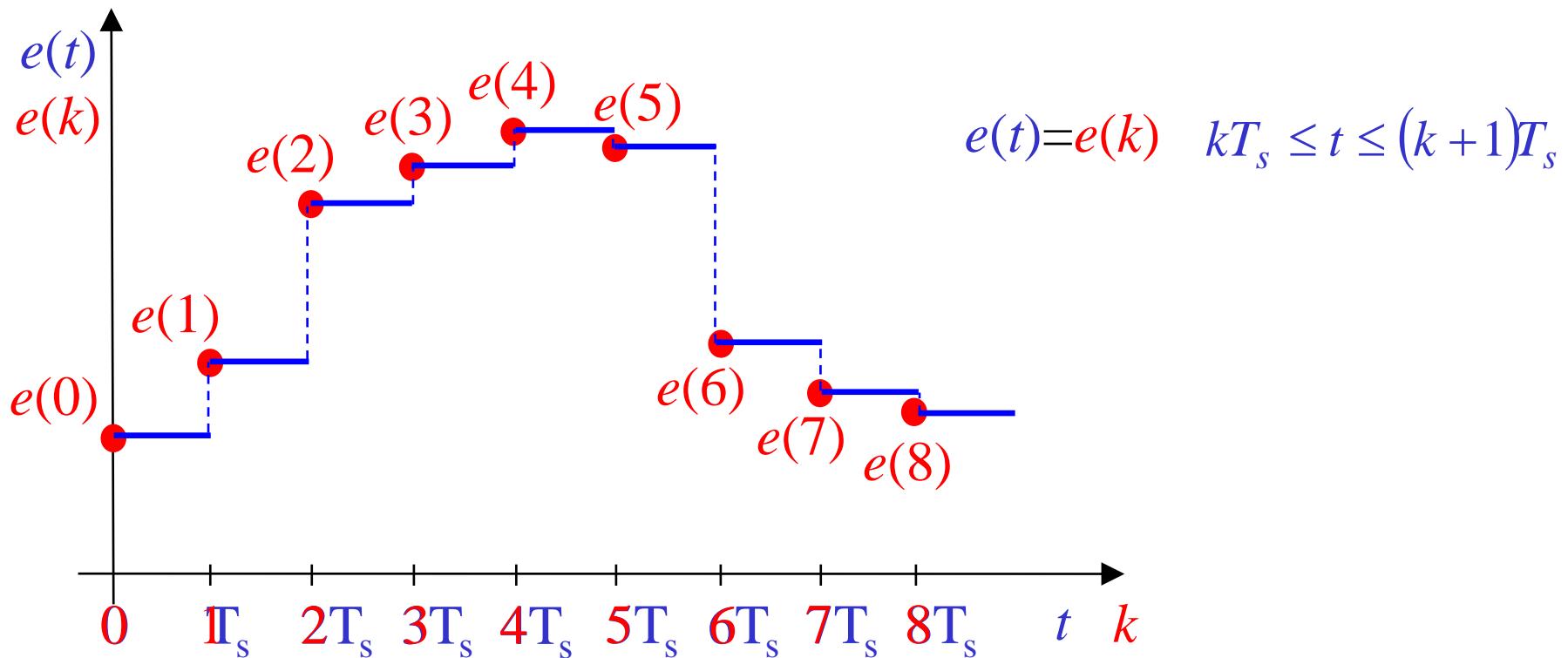
$e(k)$  è un numero reale per ogni  $k$

$T_s$  è il periodo (o tempo) di campionamento

## Note

- E' evidente che l'operazione di campionamento comporta una perdita di informazione.
- Si parla di **campionatore ideale**, perchè si suppone che i campioni siano **numeri reali**. In realtà, sono numeri rappresentati in codice binario con un numero finito di bit. Ciò comporta una ulteriore perdita di informazione rappresentata dal cosiddetto **errore (o rumore) di quantizzazione**.
- Frequenza di campionamento  $f_s = \frac{1}{T_s}$
- Pulsazione di campionamento  $\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$

## Mantenitore (Convertitore D/A)



Mantenitore di ordine zero

Zero Order Holder (ZOH)

## Note

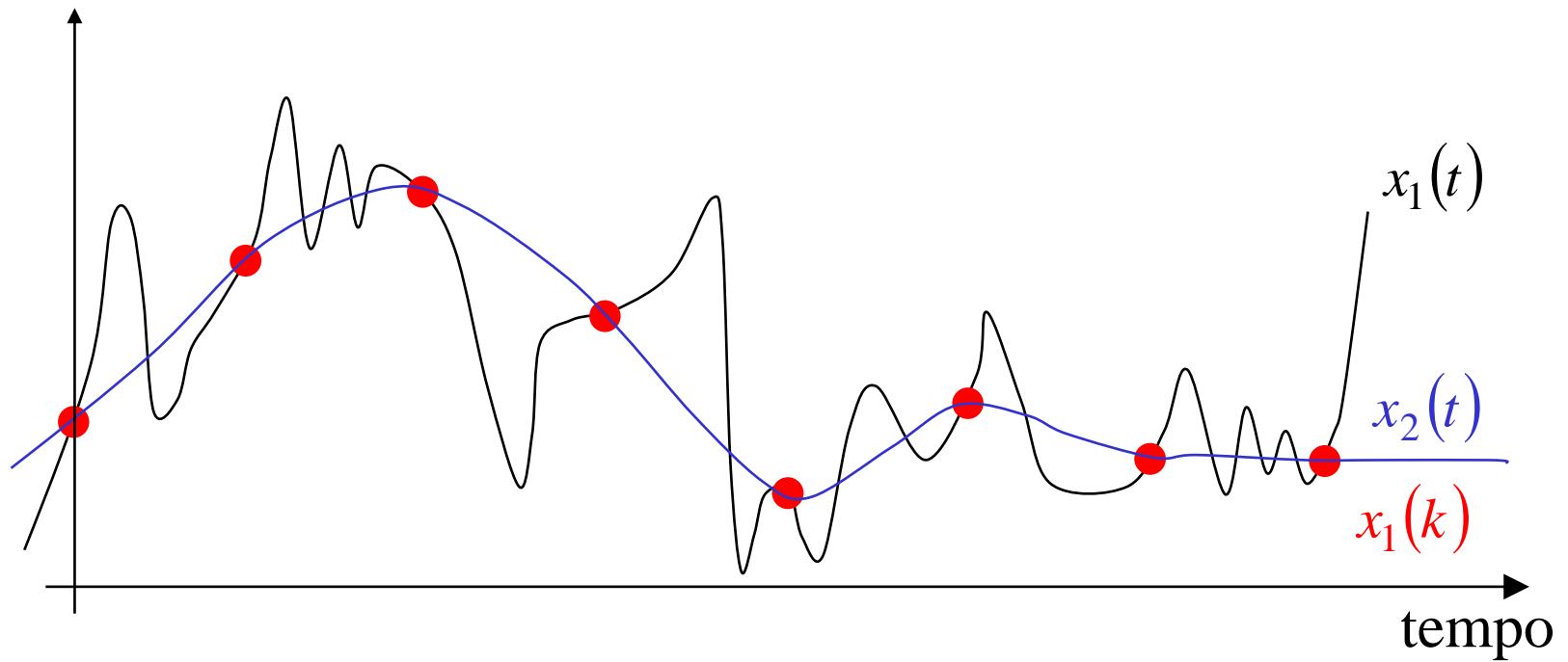
- Il ZOH è il prototipo dei mantenitori polinomiali.
- Il mantenitore deve essere sempre sincronizzato con il campionatore (e con il regolatore).

### 3. Aliasing

E' evidente che l'operazione di campionamento comporta una **perdita di informazione** perchè “pretende” di concentrare l'infomazione di infiniti numeri reali (una porzione di un segnale a tempo continuo) in un numero finito di numeri reali (i campioni del corrispondente segnale campionato).

Tale perdita di informazione può essere “sostanziale” cioè: nel passaggio dal continuo al discreto si perdono alcune “caratteristiche essenziali del segnale”. In questo caso non è possibile ricostruire il segnale continuo originale partendo dai suoi campioni.

# Introduzione “intuitiva”

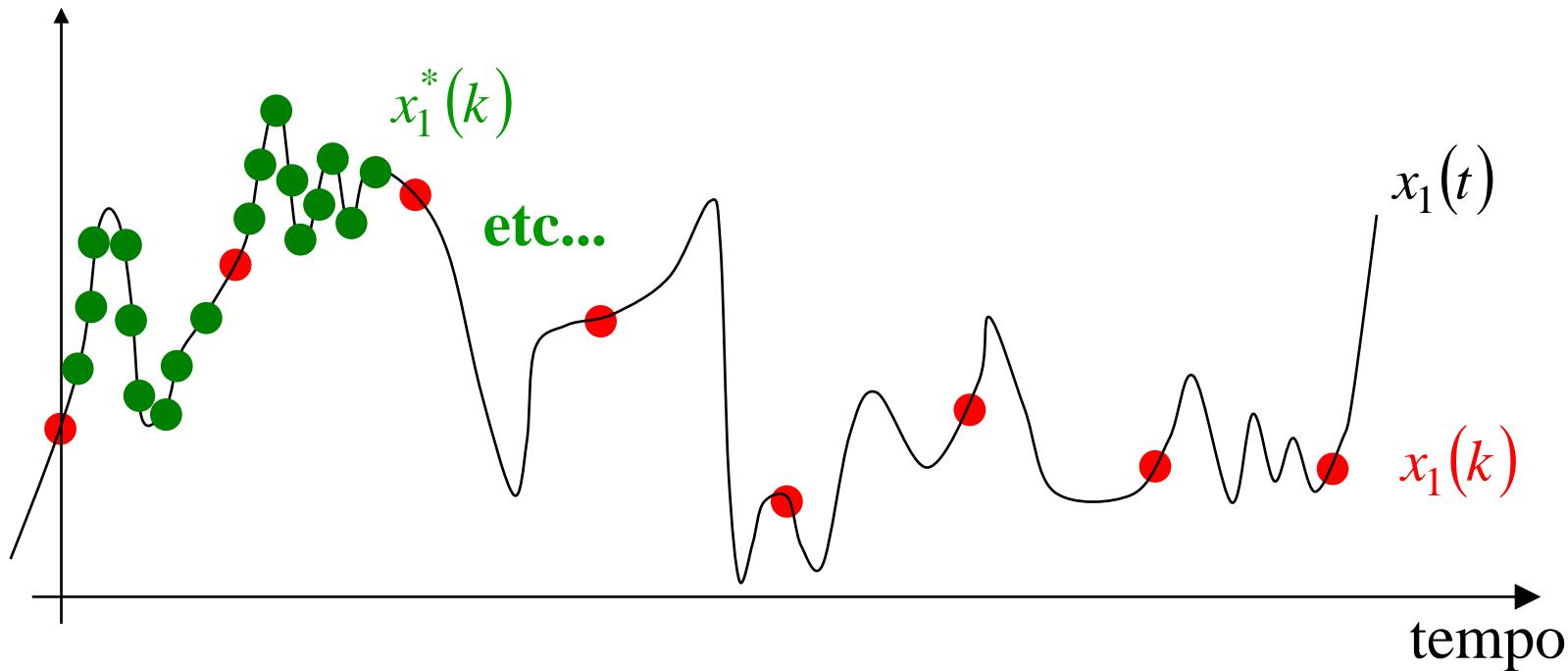


Si eseguono le seguenti operazioni:

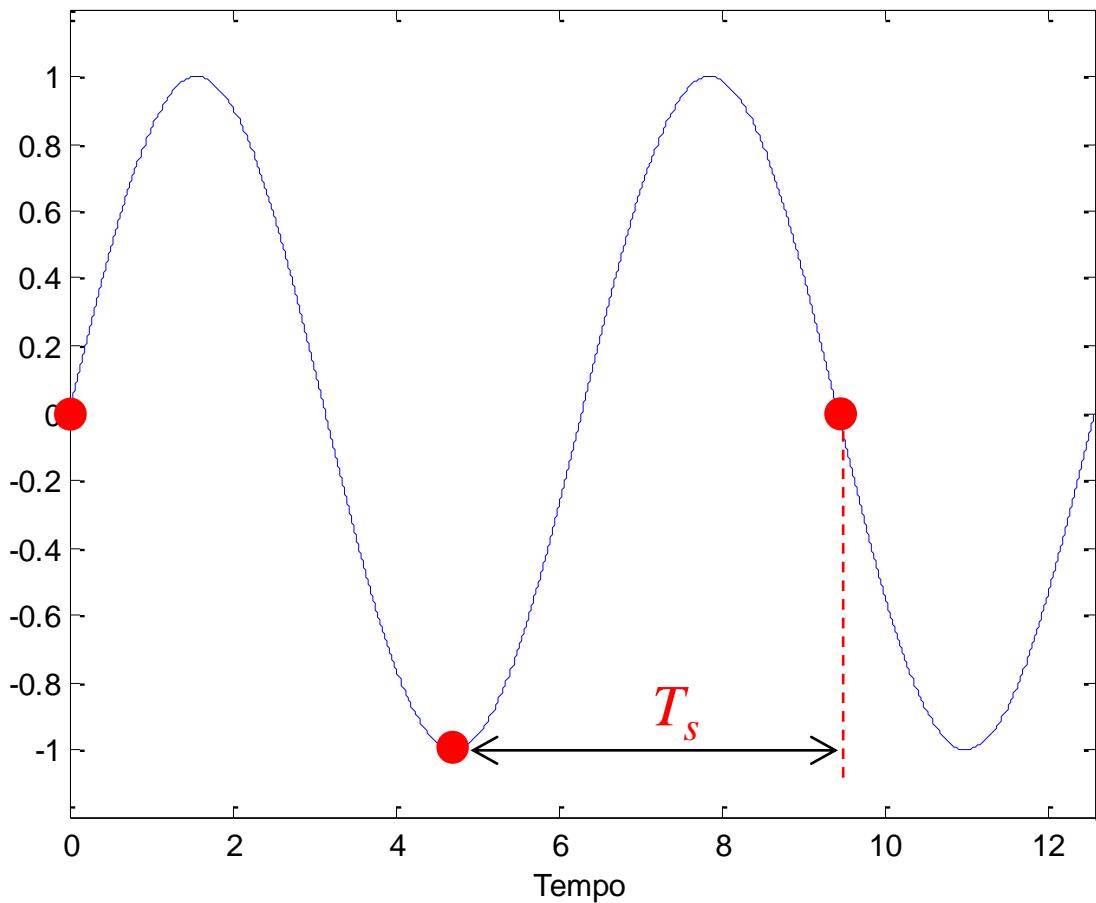
- campionare  $x_1(t)$  ottenendo i campioni  $x_1(k)$
- interpolare i campioni con una curva continua  $x_2(t)$  “la più regolare possibile” (per esempio con un certo numero di derivate continue)

Il risultato ottenuto non sorprende: per quei campioni passano infinite funzioni continue “molto regolari”.

E' stato commesso un errore nel campionamento: è stato usato un periodo di campionamento troppo lungo rispetto alla “variabilità” del segnale  $x_1$  da campionare. E' evidente che il tempo di campionamento vada scelto in base a “quanto rapidamente varia” il segnale da campionare.



# Esempio illustrativo



In figura:  $x(t) = \sin(t)$   $\rightarrow P = 2\pi$   $\rightarrow T_s = \frac{3}{2}\pi$

Si consideri il segnale

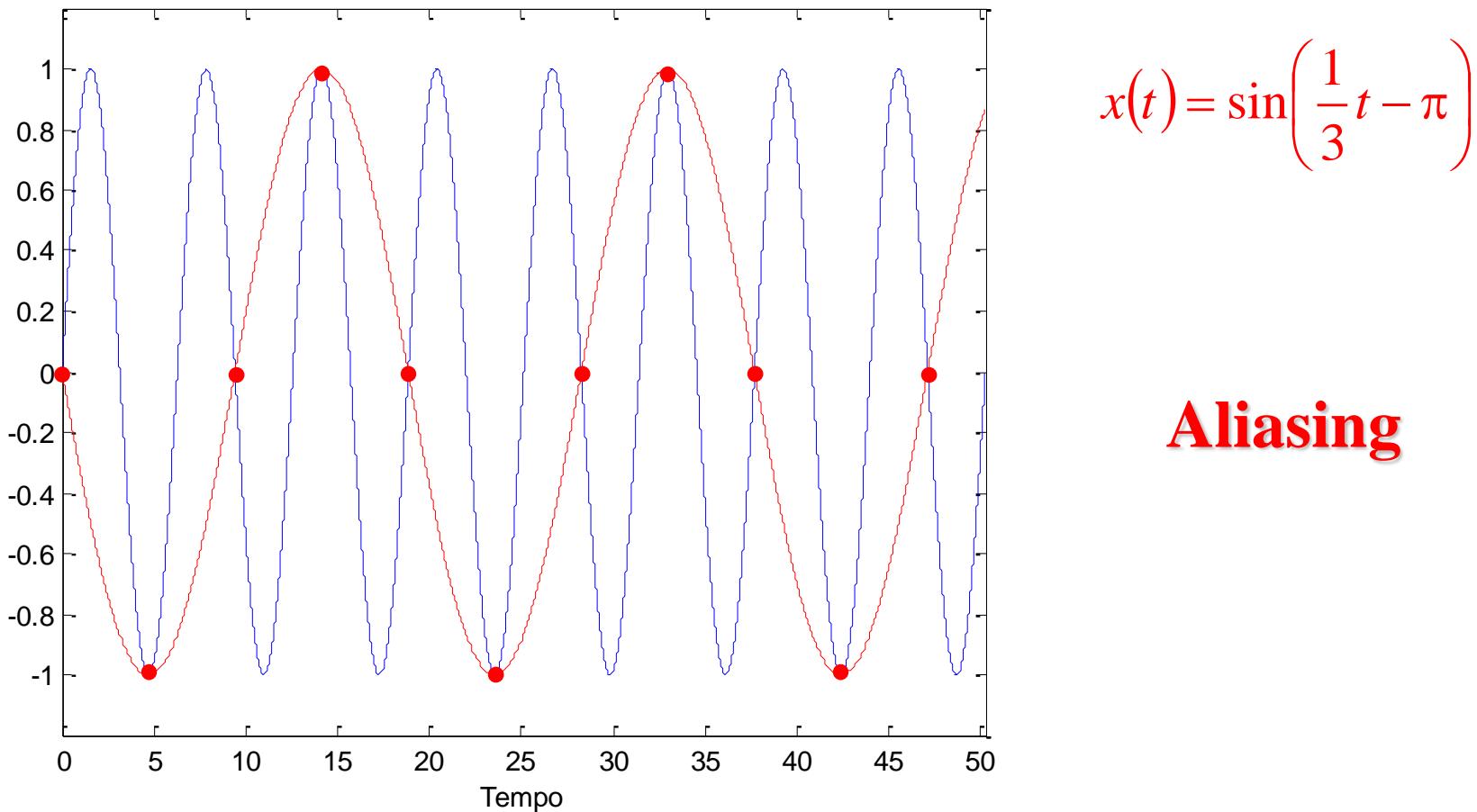
$$x(t) = \sin(\bar{\omega}t)$$

Esso ha periodo  $P = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$

Si scelga il periodo di campionamento

$$T_s = \frac{3}{4}P$$

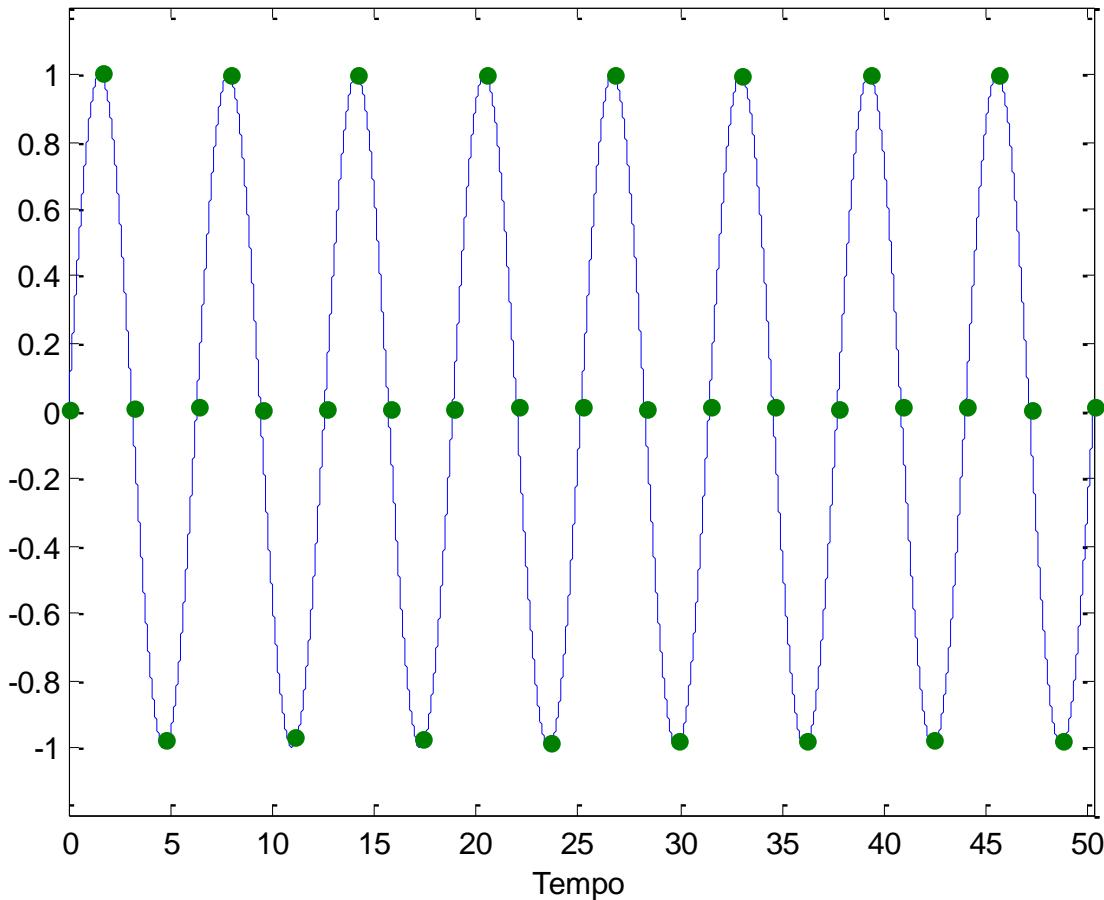
Cercando di tornare dalla sinusoide campionata ad una sinusoide a tempo continuo, si nota che esiste una sinusoide che passa per i medesimi campioni **a pulsazione più bassa** di quella originale.



**Aliasing**

Se il periodo di campionamento è troppo lungo rispetto al periodo della sinusoide da campionare si ha **aliasing**.

**Contromisura:** campionare con periodo di campionamento più breve.



Scegliendo  $T_s = \frac{1}{4} P$   
si può osservare che  
non esiste una  
sinusoide a pulsazione  
inferiore a quella che  
ha generato i campioni.

## 4. Teorema del campionamento

Sia  $x(t)$  un segnale a banda limitata con pulsazione massima  $\omega_{\max}$  (cioè un segnale con spettro nullo per  $\omega > \omega_{\max}$ ).

Si campioni  $x(t)$  con tempo di campionamento  $T_s$ .

Sia  $\omega_N = \frac{\omega_s}{2} \equiv \frac{\pi}{T_s}$  la **pulsazione di Nyquist**.

Se  $\omega_N > \omega_{\max}$  allora è possibile ricostruire il segnale a tempo continuo a partire dai suoi campioni (mediante la formula di ricostruzione di Shannon).

### Nota

Il segnale in ingresso viene spesso “forzato” ad essere a banda limitata mediante **filtri antialiasing** (realizzati con elettronica analogica!)

## 5. Progetto di controllori digitali mediante discretizzazione di controllori analogici

La progettazione segue i seguenti passi:

- Definizione di un modello a tempo continuo per il plant ✓
- Progettazione del controllore analogico mediante metodi ✓  
a tempo continuo (noti)
- Scelta del tempo di campionamento
- Discretizzazione della legge di controllo a tempo continuo

## 6.1 Scelta del periodo di campionamento

E' necessario tenere conto dei seguenti fattori:

### **1. Costo dei dispositivi**

Più breve è il periodo di campionamento, più elevato è il costo dei dispositivi (con il rischio di dover ricorrere a tecnologie non standard).

### **2. Problemi numerici**

Più breve è il periodo di campionamento, più elevato è l'errore dovuto alla quantizzazione.

### **3. Banda passante**

La pulsazione di campionamento va scelta tenendo conto della banda passante ( $\omega_c$ ) del sistema retroazionato. La pulsazione critica può identificare efficacemente il limite di banda di tutti i segnali circolanti nell'anello di controllo.

### **4. Teorema del campionamento**

Se i segnali in gioco nel sistema di controllo sono a banda limitata a  $\omega_c$  allora vanno campionati a  $\omega_s > 2\omega_c$ .

Un criterio empirico per la scelta del periodo di campionamento può quindi essere formalizzato come segue:

$$\alpha\omega_c \leq \omega_s \leq 10\alpha\omega_c \quad \text{con } \alpha \approx 5 \div 10$$

Rispettare il teorema del campionamento con un po' di margine

Non usare una pulsazione di campionamento troppo elevata.

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \rightarrow \alpha\omega_c \leq \frac{2\pi}{T_s} \leq 10\alpha\omega_c \rightarrow \frac{2\pi}{10\alpha\omega_c} \leq T_s \leq \frac{2\pi}{\alpha\omega_c}$$

Per es. scegliendo  $\alpha = 2\pi$  si ha  $\frac{1}{10\omega_c} \leq T_s \leq \frac{1}{\omega_c}$

**N.B.** Questo criterio va opportunamente modificato nel caso sia presente un filtro anti-aliasing oppure vi siano significativi ritardi di conversione e/o elaborazione.

## Nota

Il criterio precedentemente esposto è (giustamente) basato sulla **velocità del sistema retroazionato**. Tanto più veloce è il sistema ad anello chiuso, tanto maggiore sarà la pulsazione critica e quindi tanto più piccolo dovrà essere scelto il periodo di campionamento.

Per meglio comprendere il legame con la velocità del sistema, si supponga di avere un sistema retroazionato ben smorzato (poli dominanti ad anello chiuso con  $\xi \approx 0.7$ ). Il tempo di assestamento della risposta allo scalino unitario sarà dunque (approssimativamente)

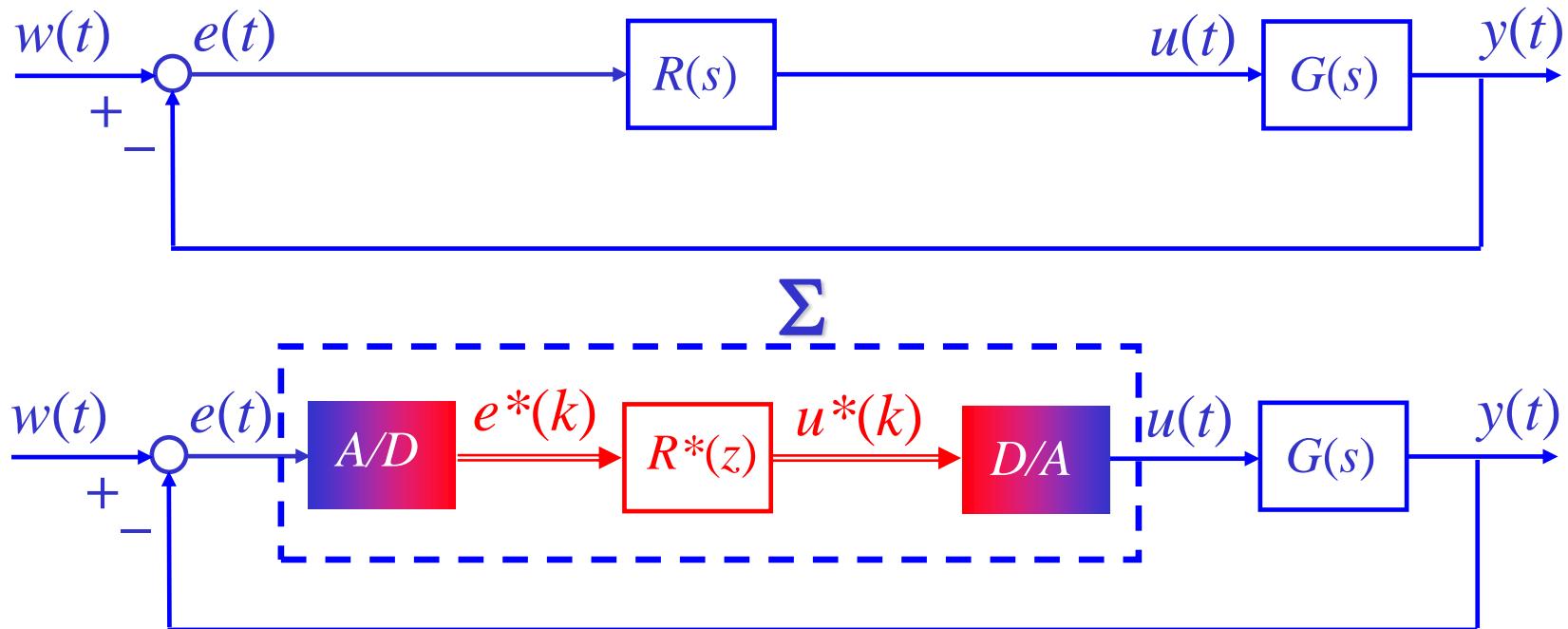
$$t_a \approx \frac{5}{\xi \omega_c} \rightarrow t_a \approx \frac{5}{0.7 \omega_c} \rightarrow t_a \approx \frac{7}{\omega_c} \rightarrow \omega_c \approx \frac{7}{t_a}$$

Scegliendo  $\frac{1}{10\omega_c} \leq T_s \leq \frac{1}{\omega_c}$

$$\frac{t_a}{70} \leq T_s \leq \frac{t_a}{7}$$

**Bisogna scegliere il periodo di campionamento in modo tale da avere un numero sufficiente di campioni in un transitorio.**

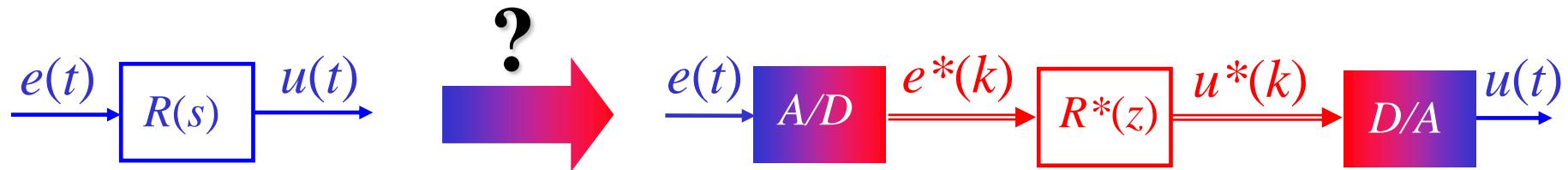
## 6.2 Discretizzazione della legge di controllo a tempo continuo



Il procedimento di discretizzazione consiste nel calcolare la funzione di trasferimento a tempo discreto  $R^*(z)$  in modo tale che il sistema  $\Sigma$  mostri un comportamento I/O approssimativamente uguale a quello di  $R(s)$ , progettata a tempo continuo.

In questa sede si presenta il metodo della trasformazione bilineare.

## Metodo della trasformazione bilineare



$$R(s) = c(sI - A)^{-1}b + d$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + be(t) \\ u(t) = cx(t) + de(t) \end{cases}$$



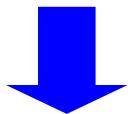
Il controllore a tempo discreto sarà descritto mediante equazioni alle differenze. E' quindi sensato provare ad usare **metodi di integrazione numerica**.

Si integri l'equazione di stato lungo un tempo pari al tempo di campionamento.

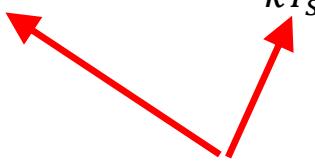
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + be(t)$$



$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \dot{x}(t) dt = \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} Ax(t) dt + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} be(t) dt$$

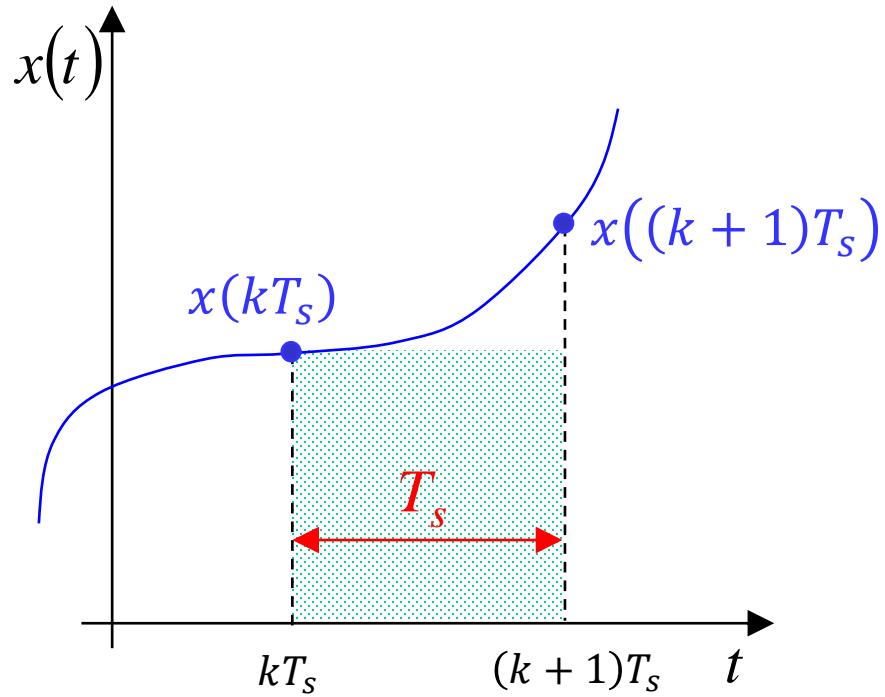


$$x((k+1)T_s) - x(kT_s) = A \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} x(t) dt + b \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e(t) dt$$



Questi integrali vanno calcolati in modo approssimato con un metodo numerico

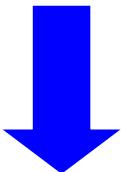
Si approssimino gli integrali mediante il metodo di integrazione di **Eulero in avanti**.



$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} x(t) dt \cong T_s x(kT_s)$$

Si approssima l'integrale con l'area del rettangolo evidenziato.

$$x((k+1)T_s) - x(kT_s) = A \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} x(t) dt + b \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e(t) dt$$

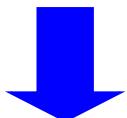


Integrando con il metodo di Eulero in avanti

$$x((k+1)T_s) - x(kT_s) \cong AT_s x(kT_s) + bT_s e(kT_s)$$

Si osservi che, con campionamento ideale, si ha:

$$x((k+1)T_s) \equiv x(k+1) \quad x(kT_s) \equiv x(k) \quad e(kT_s) \equiv e(k)$$



$$x(k+1) - x(k) \cong AT_s x(k) + bT_s e(k) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x(k+1) = (I + AT_s)x(k) + bT_s e(k) \\ u(k) = cx(k) + de(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = (I + AT_s)\mathbf{x}(k) + bT_s\mathbf{e}(k) \\ u(k) = cx(k) + d\mathbf{e}(k) \end{cases}$$

Calcolando la funzione di trasferimento si ha

$$R^*(z) = c[\mathbf{z}I - (I + AT_s)]^{-1}bT_s + d = c\left(\frac{\mathbf{z} - 1}{T_s}I - A\right)^{-1}b + d$$

La funzione di trasferimento a tempo continuo di partenza è:

$$R(s) = c(sI - A)^{-1}b + d$$

Quindi:

$$R^*(z) = R\left(\frac{\mathbf{z} - 1}{T_s}\right)$$

**Discretizzazione  
mediante  
Eulero in avanti**

Scegliendo differenti metodi di integrazione approssimata, si ottengono differenti relazioni tra la funzione di trasferimento a tempo discreto e la sua corrispondente a tempo continuo.

In generale:

$$\int_{kT_s}^{(k+1)T_s} x(t) dt \cong \left( (1 - \alpha)x(kT_s) + \alpha x((k + 1)T_s) \right) T_s$$

con  $0 \leq \alpha \leq 1$

$\alpha = 0$  Eulero in avanti

$\alpha = 1$  Eulero indietro

$\alpha = \frac{1}{2}$  Trapezio (metodo di Tustin)

In generale:

$$\textcolor{blue}{s} \rightarrow \frac{1}{T_s} \frac{\textcolor{red}{z} - 1}{\alpha z + (1 - \alpha)}$$

$$\alpha = 0 \quad \textcolor{blue}{s} \rightarrow \frac{1}{T_s} (\textcolor{red}{z} - 1) \quad \text{Eulero in avanti}$$

$$\alpha = 1 \quad \textcolor{blue}{s} \rightarrow \frac{1}{T_s} \frac{\textcolor{red}{z} - 1}{\textcolor{red}{z}} \quad \text{Eulero indietro}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \textcolor{blue}{s} \rightarrow \frac{2}{T_s} \frac{\textcolor{red}{z} - 1}{\textcolor{red}{z} + 1} \quad \text{Trapezio (metodo di Tustin)}$$

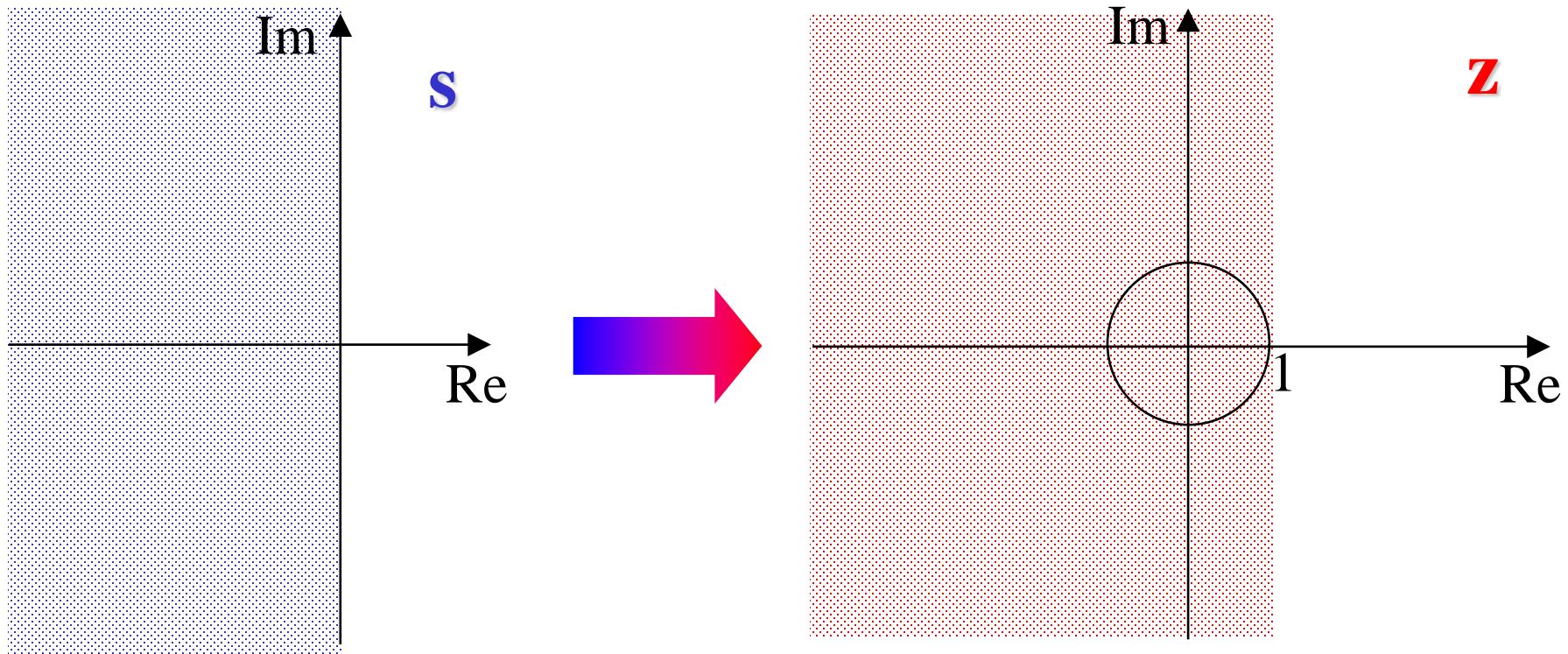
## Nota

- Queste relazioni trasformano funzioni di trasferimento razionali in funzioni di trasferimento razionali.
- Si può dimostrare che se  $R(s)$  ha  $n$  poli, anche  $R^*(z)$  ha  $n$  poli. Ma dove finiscono i poli? In particolare: dove finiscono i poli a parte reale negativa di  $R(s)$ ?

## Posizione dei poli: Eulero in avanti

Il semipiano reale negativo nel dominio  $s$ , cioè  $\Re(s) < 0$

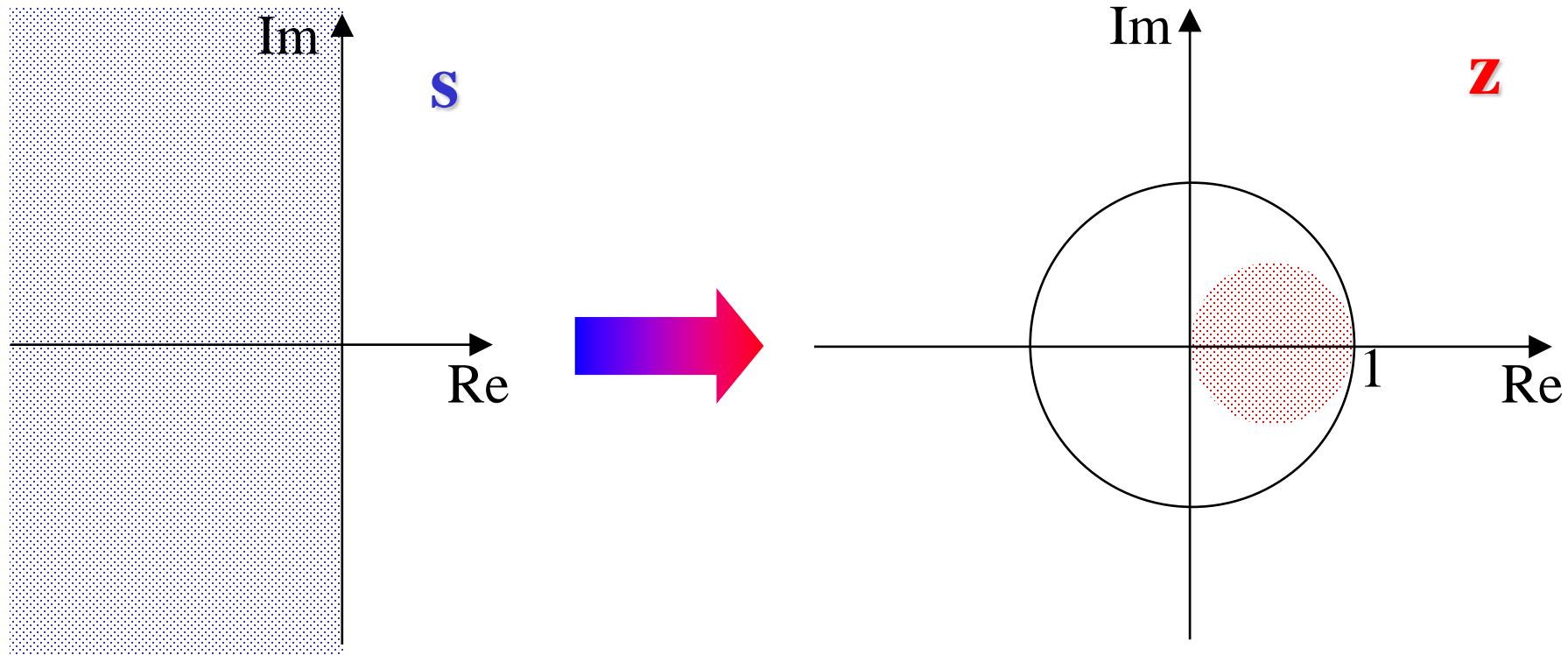
viene trasformato nel semipiano  $\Re(z) < 1$



## Posizione dei poli: Eulero indietro

Il semipiano reale negativo nel dominio  $s$ , cioè  $\Re(s) < 0$

viene trasformato nel cerchio di raggio 0.5 e centro 0.5



## Posizione dei poli: Tustin

Il semipiano reale negativo nel dominio  $s$ , cioè  $\Re(s) < 0$

viene trasformato nel cerchio di raggio 1 e centro l'origine

