# ⚠️ Importante ⚠️

Thursday, 23 June 2022 13:22

## STABILITÀ

1) $Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i$ — ASINTOTICA

2) $Re(\lambda_i) \leq 0 \ \forall i$, $\exists \lambda_i = 0$ RADICE SINGOLA — SEMPLICE

3) $\exists \lambda_i : Re(\lambda_i) > 0$ — INSTABILE

SE DISCRETO $|\lambda_i| \lessgtr 1$

---

## VERIFICA RADICE SINGOLA

$Re(\lambda_i) \leq 0$ E $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ RADICE MULTIPLA

<u>ESEMPIO</u> $\lambda_A = \{\underset{0}{\lambda}, \underset{0}{\lambda}, \underset{-1}{\lambda+1}, \underset{-1}{\lambda+1}\}$

DEVO VERIFICARE

$\theta = (\lambda+1)^2 \lambda$ (TOLGO UNA RADICE)

$\theta(A) = (A+1)^2 A$

SE $\theta(A) = ZEROS(A)$ ALLORA RADICE SINGOLA

---

## TEMPO DI RISPOSTA

$\exists!$ SOLO PER I SISTEMI <u>AS</u> (ASINTOTICAMENTE STABILI)

UN SISTEMA TENDE PIÙ VELOCEMENTE A REGIME SE HA UN $T_R$ MINORE

$$T_R = 5T_D = \begin{cases} 5\frac{-1}{\lambda_D} & \text{CONTINUO} \\ 5\frac{-1}{\ln \lambda_D} & \text{DISCRETO} \end{cases}$$

---

## MATRICE A BLOCCHI

$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_1} \cup \{\lambda\}_{A_2}$

---

## CONDIZIONE D'EQUILIBRIO

CONTINUO $\dot{x}_i = 0 \ \forall i$

DISCRETO $x_i(t+1) = x_i(t) \ \forall i$

---

## INTERESSE ANNUO

$\gamma = 10\% = 0.1$

$x(t+1) = (1+\gamma)\,x(t) = 1.1\,x(t)$

---

## OSCILLAZIONI PERMANENTI

$\exists$ COPPIA $\lambda_i \in \mathbb{C} \rightarrow \infty$ OSCILLAZIONI

---

## TRASFERIMENTO GENERICO (GRADO 1)

$G_x(s) = \frac{\alpha}{\beta + s}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

---

## DERIVATA E TRASFERIMENTO

$\dot{y} = \underline{\alpha}x + \underline{\beta}u$ $\qquad y = G(\underline{\alpha}x + \underline{\beta}u)$

---

## QUATERNA

A STATI INTERNI

B INGRESSO

C D USCITA

---

## NON OSSERVABILITÀ

NON SEMPRE L'USCITA FA VEDERE TUTTI I MODI DI FUNZIONARE DI $\Sigma$

---

## SCHEMA A BLOCCHI

MODO DI RAPPRESENTARE RELAZIONI ED EQUAZIONI $\quad \xrightarrow{\dot{x}} \boxed{\phantom{x}} \xrightarrow{x}$

$\xrightarrow[L(u)]{u(t)} \boxed{\begin{matrix} g \\ G \end{matrix}} \xrightarrow[L(y)]{y(t)}$

$y(t) = u * g = \int_0^t u(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$ — TEMPO

$L(y) = Y(s) = L(u)\,G(s) = U(s)\,G(s)$ — LAPLACE

EQUAZIONE FONDAMENTALE $L(y) = L(u) \cdot G(s)$

---

## GRADO RELATIVO R

<u>$R > 0$</u> SISTEMA PROPRIO

- INGRESSO NON INFLUENZA DIRETTAMENTE USCITA
- USCITA NON CAMBIA REPENTINAMENTE
- $y(t=0) = 0$ SEMPRE

<u>$R = 0$</u> INGRESSO HA SUBITO INFLUENZA SU USCITA

<u>$R < 0$</u> INGRESSO INFLUENZA SIA FUTURO CHE PASSATO

---

## REVERSIBILITÀ

CONTINUO LINEARE $\rightarrow$ REV

DISCRETO ($\det A \neq 0$) $\rightarrow$ REV

---

## CRITERI TRACCIA-DETERMINANTE

$$AS \longleftrightarrow \begin{cases} TR(A) < 0 \\ DET(A) > 0 \end{cases} \quad \text{CONTINUO}$$

$$AS \longleftrightarrow \begin{cases} |TR(A)| < 1 + DET\,A \\ |DET(A)| < 1 \end{cases} \quad \text{DISCRETO}$$

INSTABILE NEGLI ALTRI CASI

---

## CRITERIO DI HURWITZ

$$\sum_{K=0}^{N} a_K x^{N-K} = a_0 x^N + a_1 x^{N-1} + \dots + a_N$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_2 > a_3/a_1 \\ a_3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \rightarrow a_1 a_2 - a_3 > 0$$

---

## TRACCIA E DETERMINANTE

$TR(A) = \sum(\lambda_i)$

$DET(A) = \prod(\lambda_i)$

---

## EVIDENZIARE IL COMPLESSO

$\alpha + \sqrt{\beta} = \alpha + i\sqrt{-\beta}$ CON $\beta < 0$

---

## TEOREMI VALORE INIZIALE E FINALE

$y(0) = \lim_{s \to \infty} sL(y)$

$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sL(y)$

$\dot{y}(0) = \lim_{s \to \infty} s(sL(y) - y(0))$

RICORDATI $L(y) = L(u) \cdot G(s)$

---

## RISPOSTA ALLO SCALINO

$y(0) = G(\infty)$ — 0 SE $R > 0$

$y(\infty) = G(0)$ — GAIN

$\dot{y}(0) = \lim_{s \to \infty} s\,G(s)$ — RAPPORTO COEFFICIENTI DI GRADO MAX TRA N E D

---

## COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

$R = |b, Ab, A^2b, \dots, A^{N-1}b|$

$DET(R) \neq 0 \rightarrow CR$

# VAR NON RAGGIUNGIBILI $= N - RANK(R)$

---

## COMPLETAMENTE OSSERVABILE

$$\Theta = \begin{vmatrix} c^T \\ Ac^T \\ A^2c^T \\ \vdots \\ A^{N-1}c^T \end{vmatrix} \qquad DET(\Theta) \neq 0 \rightarrow CO$$

# VAR NON OSSERVABILI $= N - RANK(\Theta)$

---

## IL TRANSITORIO SI ANNULLA IN TEMPO FINITO

$Re(\lambda_i) = 0 \ \forall i \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (COMODITÀ)

---

## MODELLISTICA CIRCUITI RLC

RESISTENZA $V = RI$

CONDENSATORE $I = C\dot{V}$

INDUTTANZA $V = L\dot{I}$

---

## RETROAZIONI

R. STATICA DELLO STATO $u = K\hat{x} + v$

R. STATICA DELL'USCITA $u = Ky$

---

## REGOLATORE ASINTOTICO

CONTROLLO $u = K\hat{x} + v$ $\qquad \dot{x} = Ax + bu = Ax + bK\hat{x} + bv$

1) $\hat{x} = x$ A REGIME (PROGETTANDO $\ell$ A. STABILE)

$\dot{x} = Ax + bKx + bv = (A+bK)x + bv$

2) $\dot{x} = 0$ IMPOSTO (PROGETTANDO K A. STABILE)

QUINDI $(A+bK)\begin{vmatrix} v \\ 0 \end{vmatrix} + bv = 0$

---

## STABILITÀ INTERNA ED ESTERNA

<u>INTERNA</u> $\rightarrow$ DIPENDE DA A

<u>ESTERNA</u> $\rightarrow$ CAMBIA $\forall y$ SCELTA $G(s)$

u LIMITATO $\rightarrow y_{FOR}$ LIMITATA + POLI STABILI

INTERNA = ESTERNA SE <u>CO + CR</u>

---

## MOLTIPLICAZIONE MATRICE VETTORE

$$\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} K_1 & K_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aK_1 & aK_2 \\ bK_1 & bK_2 \end{vmatrix}$$

---

## EQUILIBRI E MATRICI SINGOLARI

$\dot{x} = A\bar{x} + b\bar{u} = 0$ — CONTINUO

1) $DET(A) = 0$ $\quad \exists \infty\ \bar{x}$ SOLUZIONI

2) $DET(A) \neq 0$ $\quad \exists!\ \bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$

$x(t+1) = A\bar{x} + b\bar{u} = \bar{x}$ — DISCRETO

$DET(I - A) = 0 \longleftrightarrow \lambda_A = \{\dots, +1\}$

1) $\lambda = +1$ $\quad \exists \infty\ \bar{x}$ SOLUZIONI

2) $\lambda \neq +1$ $\quad \exists!\ \bar{x} = (I-A)^{-1}b\bar{u}$

CASI $u = 0$, $u \neq 0$ DA STUDIARE

---

## MODELLAZIONE ACCUMULO

$$y(t+1) = \underbrace{y(t)}_{\text{ACCUMULO}} + \underbrace{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)}_{\text{ENTRATE}}$$

IL SISTEMA HA MEMORIA DEL PASSATO

---

## EQUILIBRIO USCITA

$\bar{y} = G(s=0)$ — CONTINUO

$\bar{y} = G(z=1)$ — DISCRETO

---

## CAUSE DEL MOVIMENTO $x(t)$

1) STATO INIZIALE $x(0)$

2) INGRESSO $u(t) \neq 0$

---

## LAGRANGE

$x(t) = \underline{e^{At}x(0)} + \underline{\int_0^t e^{A(t-\tau)}\, b\,u(\tau)\, d\tau}$ — CONTINUO

$x(t) = \underline{A^t x(0)} + \underline{\sum_{K=0}^{t-1} A^{t-1-K}\, b\,u(K)}$ — DISCRETO

$x(t) = \underbrace{\phi(t) \cdot x(0)}_{\text{LIBERO}} + \underbrace{\psi(t) \cdot u_{[0,t)}}_{\text{FORZATO}}$ — GENERALIZZATO

---

## SISTEMI A MEMORIA FINITA

SISTEMI TEMPO DISCRETI CON $\lambda_i = 0 \ \forall i$

TUTTI AUTOVALORI NULLI $\rightarrow$ DIMENTICANO STATO $x(0)$

---

## STABILITÀ

PROPRIETÀ DEL MOVIMENTO LIBERO

MEMORIA CHE IL SISTEMA HA DI $x(0)$ PER $t \rightarrow \infty$

$\lim_{x \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} \phi(t) \cdot x(0)$

---

## TIPI DI INSTABILITÀ

DEBOLE ANDAMENTO POLINOMIALE $\sum a_N x^N$

FORTE ANDAMENTO ESPONENZIALE

---

## AUTOVALORI E POLINOMIO CARATTERISTICO

$\Delta_A(\lambda) = DET(\lambda I - A) = 0 \rightarrow \{\lambda\}_A$

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA

$m_a(\lambda_i)$ QUANTE VOLTE $\lambda_i$ ANNULLA $\Delta_A(\lambda)$

MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA

$m_g(\lambda_i)$ DIMENSIONE AUTOSPAZIO

---

## STABILITÀ ED EQUILIBRIO

AS $\longleftrightarrow \exists!$ EQUILIBRIO $\bar{x}$ $\forall$ INGRESSO $u$

---

## ISOCLINE

$\dot{x}_i = 0 \ \forall i$ COMODO IN $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

---

## LINEARIZZAZIONE

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{vmatrix} \qquad \text{JACOBIANO}$$

LINEARIZZIAMO ATTORNO AI PUNTI DI EQUILIBRIO UN SISTEMA NON LINEARE PER STUDIARLO

DESCRIVE BENE LA DINAMICA LOCALE

CORRISPONDENZA TRA STABILITÀ TRA SISTEMA NON LINEARE E SISTEMA LINEARIZZATO

---

## RADICI IN COMUNE

$$\underbrace{d(p)\,\pi(p)}_{D} \cdot y(t) = \underbrace{m(p)\,\pi(p)}_{N} \cdot u(t)$$

$\exists \pi(p) \rightarrow$ ALCUNE $x_i$ NON SONO INFLUENZATE DA $u$

---

## DENOMINATORE INCOMPLETO

$D(p)$ È SOLO UN 'PEZZO' DI $\Delta_A(\lambda)$

$\rightarrow \exists$ ALCUNE $x_i$ CHE NON INFLUENZANO $y$

---

## LEGGI DI REGOLAZIONE

ANELLO APERTO $u(t) = \dots$

ANELLO CHIUSO $u(t) = K^T x(t) + v(t)$

$\Delta_{A+bK^T}(\lambda)$ A PIACERE $\longleftrightarrow \Sigma$ CR

RICOSTRUZIONE $\lim_{t \to \infty} \hat{x} - x = 0$

$\Delta_{A+\ell c^T}(\lambda)$ A PIACERE $\longleftrightarrow \Sigma$ CO

RAGGIUNGIBILITÀ $\rightarrow$ CONTROLLO

OSSERVABILITÀ $\rightarrow$ RICOSTRUZIONE

---

## RISPOSTE CANONICHE

$IMP = \delta(t)$

$SCA = \int IMP$

$RAMP = t = \int SCA$

$PAR = \frac{t^2}{2} = \int RAMP$

---

## STABILITÀ ASINTOTICA

$\lim_{t \to \infty} \phi(t) = 0$ MOVIMENTO LIBERO

$\exists!\ \bar{x}\ \forall \bar{u}$ INDIPENDENTE DA $x(0)$

UNICO EQUILIBRIO RAGGIUNTO DA QUALSIASI STATO INIZIALE

$Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i$ — CONTINUO

$|\lambda_i| < 1 \ \forall i$ — DISCRETO

---

## TRASFERIMENTO E IMPULSO

$G(z) = \sum_0^\infty \frac{g(t)}{z^t}$

$g(t+N) = \alpha_{N-1}\, g(t-N+1) + \dots\ \alpha_0\, g(0)$

$g(t-N) = z^{-N} g(t)$

---

## RISPOSTA IN FREQUENZA

$$\begin{cases} u(t) = K \\ y(t) = K \cdot G(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) = A \sin(\omega t) \\ y(t) = |G(i\omega)| \cdot A \cdot \sin(\omega t + \arg(G(i\omega))) \end{cases}$$

---

## BODE RETROAZIONE

$$|G_{RETRO}| = \frac{|G_1|}{1 + |G_1||G_2|} \sim \min\left(|G_1|, \frac{1}{|G_2|}\right)$$

$|G_{DIRETTA}|$ $\quad (G_2 = 1) \sim \min(|G_1|, 1)$

---

## STABILITÀ IN RETROAZIONE

<u>NYQUIST</u>

STABILITÀ $G_{APERTO} \rightarrow$ STABILITÀ $G_{CHIUSO}$ SE NON CONTIENE $(-1, 0)$

<u>BODE</u>

$|G(s)|$ INIZIA POSITIVA E TAGLIA UNA SOLA VOLTA

POLI STABILI

STABILE SE $\varphi_{TAGLIO} < 180°$

<u>$\pi$ E TAGLIO</u>

$\omega_\pi \rightarrow$ STABILE SE $|G| < 0$

$\omega_{TAGLIO} \rightarrow$ STABILE SE $|ARG| \geq -180$

<u>MARGINE</u>

$\gamma = 180 - \varphi_T$

$\gamma > 0 \rightarrow$ STABILE