9 - Regolatore

Monday, 27 June 2022 12:34

SISTEMA 1

$\dot{x} = Ax + bu \qquad A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$

STABILITÀ

$\Delta_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - (2) = \lambda^2 - 3 = 0$

$\rightarrow \lambda^2 = +3 \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ INSTABILE

RAGGIUNGIBILITÀ

$R = |b \;\; Ab| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ DET $R \neq 0 \rightarrow$ COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE (CR)

$X^R = \mathbb{R}^2$ SPAZIO RAGGIUNGIBILITÀ

STABILIZZAZIONE CON $u = Kx + v$

(A, b) CR $\longleftrightarrow \forall \Delta^* \; \exists K : \Delta_{A+bK} = \Delta^*$ ASINT. STABILE

TRANSITORI ≤ 10 ? DETERMINA K

SI POICHÈ CR

$T_R = 5 < 10 \rightarrow \lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = -2$

$TR(A^R) = -1 - 2 = -3$

$DET(A^R) = -1 \cdot -2 = +2$

$A^R = A + bK = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot |K_1 \;\; K_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_1 & K_2 \\ K_1 & K_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+K_1 & 1+K_2 \\ 2+K_1 & -1+K_2 \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{l|l} TR & \cancel{1}+K_1 \cancel{-1}+K_2 = -3 \\ DET & (1+K_1)(-1+K_2) - (1+K_2)(2+K_1) = 2 \end{array} \quad \begin{array}{|l} K_1 = -3 - K_2 = -2 \\ K_2 = -1 \end{array}$$

$-1 + K_2 - K_1 + K_1K_2 - (2 + K_1 + 2K_2 + K_1K_2) = 2$

$-1 + K_2 - K_1 + \cancel{K_1K_2} - 2 - K_1 - 2K_2 - \cancel{K_1K_2} = 2$

$-3 - 2K_1 - K_2 = 2$

$-3 - 2(-3 - K_2) - K_2 = 2$

$-3 + 6 + 2K_2 - K_2 - 2 = 0$

SISTEMA 2

$x(t+1) = Ax(t) + bu(t) \qquad A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

STABILITÀ

$TR(A) = 3 + 2 = 5 > 0 \longrightarrow$ INSTABILE

$DET(A) = 6 + 1 = 7 > 0$

RAGGIUNGIBILITÀ

$R = |b \;\; Ab| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ DET $R \neq 0 \rightarrow$ CR

STABILIZZABILE CON RETROAZIONE STATO ?

SI POICHÈ CR

TROVA K AFFINCHÈ TRANSITORIO SI ANNULLI IN TEMPO FINITO

TRANSITORIO FINITO $\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$A^R = A + bK = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot |K_1 \;\; K_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_1 & K_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+K_1 & -1+K_2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{l} TR = 0 \\ DET = 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|l} 2 + K_1 + 3 = 0 \\ 3(2+K_1) + 1(-1+K_2) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} K_1 = -5 \\ K_2 = +10 \end{array}$$

$6 + 3K_1 - 1 + K_2 = 0$

$K_2 = -5 - 3K_1 = -5 - 3(-5) = +10$

SISTEMA 3

SISTEMA TEMPO CONTINUO (A, c)

$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad c^T = |1 \;\; 1|$

OSSERVABILITÀ

$Ac^T = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} |1 \;\; 1| = |-1 \;\; +3|$

$\Theta = \begin{vmatrix} c^T \\ c^TA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ $DET(\Theta) \neq 0 \rightarrow$ CO

RICOSTRUZIONE ASINTOTICA STATO?

POSSIBILE POICHÈ SISTEMA CO

$A^O = A + \ell c^T = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{vmatrix} |1 \;\; 1| = \begin{vmatrix} -1+\ell_1 & +2+\ell_2 \\ \ell_1 & +1+\ell_2 \end{vmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} TR(A^O) < 0 \\ DET(A^O) > 0 \end{array}\right\} \text{CONDIZIONI PER AS}$$

UN POSSIBILE RICOSTRUTTORE ASINTOTICO HA $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

$TR(A^O) = -1 - 1 = -2$

$DET(A^O) = -1 \cdot -1 = +1$

RISOLVO PER I COEFFICIENTI $\ell_1 \; \ell_2$

$$\begin{array}{|l} \cancel{-1}+\ell_1 \cancel{+1}+\ell_2 = -2 \\ (-1+\ell_1)(+1+\ell_2) - \ell_1(2+\ell_2) = 1 \end{array} \quad \begin{array}{|l} \ell_1 = -1 \\ \ell_2 = -2 - \ell_1 = -1 \end{array}$$

$-1 \cancel{-\ell_2} \cancel{+\ell_2} + \cancel{\ell_1\ell_2} - 2\ell_1 \cancel{-\ell_1\ell_2} - 1 = 0 \qquad \ell = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$

$-2 - 2\ell_1 = 0 \rightarrow \ell_1 = -1$

SISTEMA 4

$x(t+1) = Ax(t) \qquad A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad c = |0 \;\; 1|$

$y(t) = cx(t)$

È POSSIBILE PROGETTARE UN RICOSTRUTTORE DI x ?

OSSERVABILITÀ

$\Theta = \begin{vmatrix} c^T \\ c^TA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ DET $\Theta \neq 0 \rightarrow$ CO

COMPLETAMENTE OSSERVABILE

RICOSTRUTTORE (IN TEMPO FINITO)

$A^O = A + \ell c^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{vmatrix} \cdot |0 \;\; 1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \ell_1 \\ 0 & \ell_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \ell_1+1 \\ -1 & \ell_2+1 \end{vmatrix}$

DET = TR = 0 $\rightarrow$ SS PER ESEMPIO $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$\begin{array}{l|l} TR & 2 + \ell_2 + 1 = 0 \\ DET & 2\ell_2 + 2 + \ell_1 + 1 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} \ell_1 = +3 \\ \ell_2 = -3 \end{array} \qquad \ell = \begin{vmatrix} 3 \\ -3 \end{vmatrix}$$

SISTEMA 5

$\dot{x} = Ax + bu \qquad A = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad c = |0 \;\; 1|$

$y = cx$

$\exists$ UN RICOSTRUTTORE STABILIZZANTE ?
I TRANSITORI FINISCONO A T=5s

STABILITÀ

$$\left.\begin{array}{ll} TR(A) = -4 + 1 = -3 & < 0 \\ DET(A) = -4 - 6 = -10 & < 0 \end{array}\right\} \text{INSTABILE}$$

RAGGIUNGIBILITÀ

$R = |b \;\; Ab| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ $DET(R) \neq 0 \rightarrow$ CR

OSSERVABILITÀ

$\Theta = \begin{vmatrix} c^T \\ Ac^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ $DET(\Theta) \neq 0 \rightarrow$ CO

AUTOVETTORI

I TRANSITORI SI ESAURISCONO A $T_R = +5 = 5 \frac{-1}{\lambda_D}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ PER COMODITÀ

$DET(A^O) = DET(A^R) = 1$

$TR(A^O) = TR(A^R) = -2$

CONTROLLORE

$A^R = A + bK = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot |K_1 \;\; K_2| = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3+K_1 & 1+K_2 \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{l|l} DET & -4 - 4K_2 - 6 + 2K_1 = +1 \\ TR & -4 + 1 + K_2 = -2 \end{array} \quad \begin{array}{|l} K_1 = 15/2 \\ K_2 = +1 \end{array}$$

RICOSTRUTTORE

$A^O = A + \ell c^T = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{vmatrix} \cdot |0 \;\; 1| = \begin{vmatrix} -4 & -2+\ell_1 \\ -3 & 1+\ell_2 \end{vmatrix}$

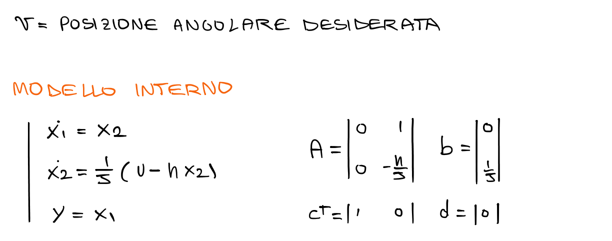
$$\begin{array}{l|l} DET & -4 - 4\ell_2 - 6 + 3\ell_1 = +1 \\ TR & -4 + 1 + \ell_2 = -2 \end{array} \quad \begin{array}{|l} \ell_1 = 15/3 = 5 \\ \ell_2 = +1 \end{array}$$

REGOLATORE

$\exists K, \ell : \Delta_{REG} = \Delta_{A+bK} \cdot \Delta_{A+\ell c} = (\lambda + 1)^4$

$K = \begin{vmatrix} \frac{15}{2} \\ 1 \end{vmatrix} \qquad \ell = \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix}$

EQUILIBRIO DI UNA ANTENNA



$\sum M_o = J\alpha = u - h\omega$

u = COPPIA D'ENTRATA

$x_1 = \theta$ POSIZIONE ANGOLARE

$x_2 = \omega$ VELOCITÀ ANGOLARE

v = POSIZIONE ANGOLARE DESIDERATA

MODELLO INTERNO

$$\begin{array}{|l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{J}(u - hx_2) \\ y = x_1 \end{array} \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{vmatrix}$$

$c^T = |1 \;\; 0| \quad d = |0|$

OSSERVABILITÀ

$\Theta = \begin{vmatrix} c^T \\ Ac^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $DET(\Theta) \neq 0 \rightarrow$ CO

RAGGIUNGIBILITÀ

$R = |b \;\; Ab| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{J} & \frac{-h}{J^2} \end{vmatrix}$ $DET(R) = -\frac{1}{J^2} \neq 0 \rightarrow$ CR (POICHÈ $J \in \mathbb{R}^+ - (0)$)

REGOLATORE

CONTROLLO $u = K\hat{x} + v$

$\dot{x} = Ax + bu = Ax + bK\hat{x} + bv$

1) $\hat{x} = x$ A REGIME (PROGETTANDO ℓ A. STABILE)

$\dot{x} = Ax + bKx + bv = (A + bK)x + bv$

2) $\dot{x} = 0$ IMPOSTO (PROGETTANDO K A. STABILE)

IN CONCLUSIONE $(A + bK)\begin{vmatrix} v \\ 0 \end{vmatrix} + bv = 0$

TRANSITORIO

NO OSCILLAZIONI PERMANENTI $\qquad \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

DEVE ESSERE ASINT. STABILE $\qquad Re(\lambda_{1,2}) < 0$

SI ESAURISCE IN $T_R = 5$ $\qquad \exists \lambda_i = -1$

AUTOVETTORI PER COMODITÀ

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \qquad TR = -2 \qquad DET = +1$

CARATTERISTICA $\Delta_{REG} = \Delta_K \Delta_\ell = (\lambda + 1)^2(\lambda + 1)^2$

PARAMETRI $h = 1 \quad J = 1$

CONTROLLORE

$A + Kb = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{vmatrix} \cdot |K_1 \;\; K_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K_1}{J} & -\frac{h}{J} + \frac{K_2}{J} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ K_1 & -1+K_2 \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{l|l} DET & -K_1 = 1 \\ TR & -1 + K_2 = -2 \end{array} \quad \begin{array}{|l} K_1 = -1 \\ K_2 = -1 \end{array} \qquad K = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

RICOSTRUTTORE

$A + \ell c^T = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{vmatrix} \cdot |1 \;\; 0| = \begin{vmatrix} \ell_1 & 1 \\ \ell_2 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_1 & 1 \\ \ell_2 & -1 \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{l|l} DET & -\ell_1 - \ell_2 = 1 \\ TR & \ell_1 - 1 = -2 \end{array} \quad \begin{array}{|l} \ell_1 = -1 \\ \ell_2 = 0 \end{array} \qquad \ell = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

LEGGE DI CONTROLLO

$u = K\hat{x} - v = (\bar{v} - \hat{x}_1) + (0 - \hat{x}_2)$