MODELLO INTERNO ($m = 1, p = 1$)

t.c.: $\dot{x} = A\,x + b\,u$

t.d.: $x(t+1) = A\,x(t) + b\,u(t)$

$y(t) = c^T x(t) + d\,u(t)$

MODELLO ESTERNO (ARMA) ($m = 1, p = 1$ oppure ce n'è uno per ogni coppia (y_i, u_j))

t.d.: $$y(t) + \alpha_1\,y(t-1) + \alpha_2\,y(t-2) + \cdots + \alpha_n\,y(t-n) =$$
$$\beta_0\,u(t) + \beta_1\,u(t-1) + \beta_2\,u(t-2) + \cdots + \beta_n\,u(t-n)$$

$$y(t) = \underbrace{-\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y(t-i)}_{\text{AR (auto-regressive)}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \beta_i u(t-i)}_{\text{MA (moving average)}}$$

n è l'ordine del modello ARMA (≤ dell'ordine del modello interno)

$$y(t+n) + \alpha_1\,y(t+n-1) + \alpha_2\,y(t+n-2) + \cdots + \alpha_n\,y(t) =$$
$$\beta_0\,u(t+n) + \beta_1\,u(t+n-1) + \beta_2\,u(t+n-2) + \cdots + \beta_n\,u(t)$$

t.c.: $$y^{(n)}(t) + \alpha_1\,y^{(n-1)}(t) + \alpha_2\,y^{(n-2)}(t) + \cdots + \alpha_n\,y^{(0)}(t) =$$
$$\beta_0\,u^{(n)}(t) + \beta_1\,u^{(n-1)}(t) + \beta_2\,u^{(n-2)}(t) + \cdots + \beta_n\,u^{(0)}(t)$$

$$y^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} y(t)$$

NEWTON (y: posizione, u: forza motrice)

$$y^{(2)} = \frac{1}{m}(-hy^{(1)} + u) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{h}{m},\ \alpha_2 = 0,\ \beta_0 = 0,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = \frac{1}{m}$$

FIBONACCI ($y(t)$: totale coppie, $u(t)$: prelievo coppie adulte)

$y(t) = y(t-1) - u(t-1)\ +$ coppie nate nell'anno $t-1$

coppie adulte nell'anno $t-1$

totale coppie nell'anno $t-2$ $-$ prelievo a fine anno

$y(t-2) - u(t-2)$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = -1,\ \beta_0 = 0,\ \beta_1 = -1,\ \beta_2 = -1$$

NOTA: solitamente, ci viene più naturale ragionare sulla formulazione interna

NOTAZIONE POLINOMIALE

simbolo p

s (t.c.): rappresenta la derivata rispetto al tempo, $s\,y(t) = \frac{d}{dt}y(t) = y^{(1)}(t)$

$$s^k y(t) = \frac{d^k}{dt^k}y(t) = y^{(k)}(t)$$

z (t.d.): rappresenta l'anticipo di un passo, $z\,y(t) = y(t+1)$, $z^k y(t) = y(t+k)$

$$p^n y(t) + \alpha_1 p^{n-1} y(t) + \cdots + \alpha_n y(t) = \beta_0 p^n u(t) + \beta_1 p^{n-1} u(t) + \cdots + \beta_n u(t)$$

$$\underbrace{(p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \cdots + \alpha_n)}\, y(t) = \underbrace{(\beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \cdots + \beta_n)}\, u(t)$$

$$D(p)\, y(t) = N(p)\, u(t)$$

NOTA 1: $D(p)$ è un polinomio di grado n *monico* (coefficiente del monomio di grado massimo = 1)
$N(p)$ è un polinomio di grado $\leq n$

NOTA 2: notazione sintetica ARMA: $D\,y = N\,u$

NEWTON: $D(s) = s^2 + \frac{h}{m}s$, $N(p) = \frac{1}{m}$

FIBONACCI: $D(z) = z^2 - z - 1$, $N(p) = -z - 1$

PASSAGGIO DA MODELLO INTERNO A ESTERNO

$$p\,x = A\,x + b\,u$$
$$y = c^T x + d\,u$$

NOTA: grazie all'operatore p l'equazione di stato è (formalmente) diventata algebrica

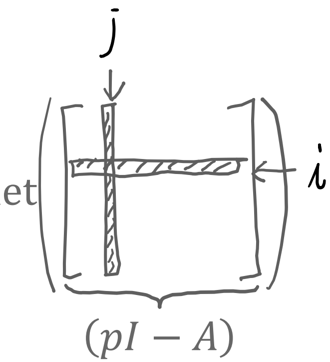
OBIETTIVO: eliminare la x dalla trasformazione d'uscita, sfruttando l'equazione di stato

$$(pI - A)x = b\,u \quad \Rightarrow \quad x = (pI - A)^{-1} b\,u$$

NOTA: la matrice n x n $(pI - A)$ è sempre invertibile perché p è un simbolo

$\det(pI - A) = \Delta_A(p)$ polinomio caratteristico di A nella variabile p

$(pI - A)^{-1} = \dfrac{\mathrm{Cof}^T(p)}{\Delta_A(p)}$, $\mathrm{Cof}(p)$: matrice dei cofattori, $\mathrm{Cof}_{ij}(p) = (-1)^{i+j}\det$



$\mathrm{Cof}_{ij}(p)$ è un polinomio di grado al più $n - 1$

$\Rightarrow$ $\Delta_A\,y = (c^T \mathrm{Cof}^T b + d\Delta_A)\,u$ ma è il modello ARMA corretto?

No se si riesce ad eliminare la x dalla trasformazione d'uscita moltiplicando entrambi i membri per un polinomio di grado inferiore a Δ_A (ovvero esiste una relazione d'ordine inferiore a n tra u e y)

$\Rightarrow$ il modello corretto è quello che fa uso del polinomio D di grado minimo

Vediamolo attraverso due semplici esempi

ESEMPIO 1

$$\dot{x}_1 = u - k_1 x_1$$
$$\dot{x}_2 = k_1 x_1 - k_2 x_2$$
$$y = k_1 x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$c^T = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Invertendo $(sI - A)$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+k_1 & 0 \\ -k_1 & s+k_2 \end{bmatrix} \quad \mathrm{Cof}^T = \begin{bmatrix} s+k_2 & 0 \\ k_1 & s+k_1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_A(s) = (s+k_1)(s+k_2) = D\ ?$$

$$c^T \mathrm{Cof}^T b + d\Delta_A = k_1(s+k_2) = N\ ?$$

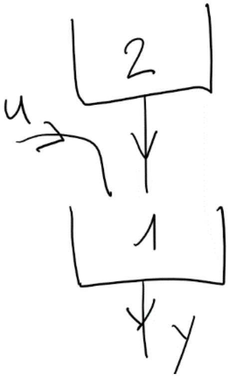
Conti "per sostituzione"

$$s x_1 = u - k_1 x_1 \rightarrow (s+k_1) x_1 = u$$
$$s x_2 = k_1 x_1 - k_2 x_2$$
$$y = k_1 x_1$$

$$\underbrace{(s+k_1)}_{D} y = (s+k_1) k_1 x_1 = \underbrace{k_1 u}_{N}$$

Idea: se a conti fatti trovo radici comuni a N e D posso eliminarle per ottenere i polinomi corretti?
NO, vedi prossimo esempio

ESEMPIO 2



$$\dot{x}_1 = u + k_2 x_2 - k_1 x_1$$

$$\dot{x}_2 = -k_2 x_2$$

$$y = k_1 x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & k_2 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Invertendo $(sI - A)$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+k_1 & -k_2 \\ 0 & s+k_2 \end{bmatrix} \quad \mathrm{Cof}^T = \begin{bmatrix} s+k_2 & k_2 \\ 0 & s+k_1 \end{bmatrix}$$

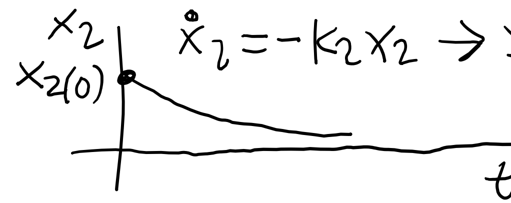
$$\Delta_A(s) = (s+k_1)(s+k_2) = \text{es. } 1$$

$$c^T \mathrm{Cof}^T b + d\Delta_A = k_1(s+k_2) = \text{es. } 1$$

Conti "per sostituzione"

$$(s+k_1)x_1 = u + k_2 x_2$$

$$\underbrace{(s+k_2)x_2 = 0} \not\Rightarrow x_2 = 0$$



$$\dot{x}_2 = -k_2 x_2 \rightarrow x_2(t) = x_2(0)e^{-k_2 t}$$

$$(s+k_1)y = k_1(s+k_1)x_1 = k_1 u + k_1 k_2 x_2$$

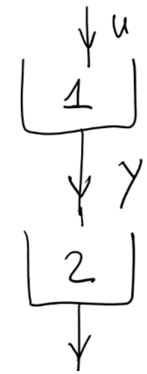
$$\underbrace{(s+k_1)(s+k_2)}_{D}\, y = \underbrace{k_1(s+k_2)}_{N}\, u + k_1 k_2 \underbrace{\cancel{(s+k_2)x_2}}_{0}$$

CONCLUSIONI GENERALI

1) L'ordine del modello ARMA (grado di D) è ≤ di quello del modello interno (dim. matrice A)
D è "contenuto" in (divide) Δ_A, ovvero le sue radici sono autovalori di A

$$D \subseteq \underbrace{\Delta_A}_{D \cdot R}, \quad N \subseteq \underbrace{c^T Cof^T b + d\Delta_A}_{N \cdot R}$$

$\rightarrow R$: polinomio (monico) delle radici "sbagliate"

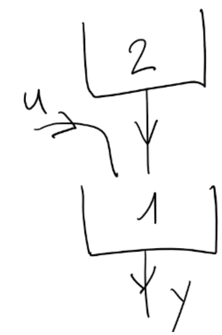


Vale il "contenuto stretto" (vedi es.1) quando nel sistema ci sono delle variabili di stato (o loro combinazioni) che non hanno influenza sull'uscita.
Il loro numero coincide con il grado di R.
Si dice che ci sono variabili (o parti) del sistema *non osservabili.*

2) Ci possono essere radici in comune tra N e D

$$\rightarrow N = n \cdot r, \quad D = d \cdot r$$

r : polinomio (monico) delle radici comuni



Ciò accade (vedi es.2) quando nel sistema ci sono delle variabili di stato (o loro combinazioni) che influenzano l'uscita ma non sono influenzate dall'ingresso.
Il loro numero coincide con il grado di r.
Si dice che ci sono variabili (o parti) del sistema *osservabili ma non raggiungibili.*

3) Le radici "sbagliate" aggiungono delle soluzioni al modello che non esistono nel sistema fisico.
Infatti, il modello ARMA "sbagliato" dell'es.1 ha le soluzioni dell'es.2. Se $x_2(0) \neq 0$, la soluzione non esiste nel sistema fisico.

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO (f.d.t., ce n'è una per ogni coppia (y_i, u_j)))

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{n(p)}{d(p)} \quad \left(= \frac{c^T \mathrm{Cof}^T(p)\, b + d\Delta_A(p)}{\Delta_A(p)} = c^T(pI - A)^{-1}b + d \right)$$

NOTA: il modello ARMA $d\, y = n\, u$ è detto (per analogia) *di trasferimento*

coincide col modello ARMA se N e D sono *coprimi* (senza radici in comune)

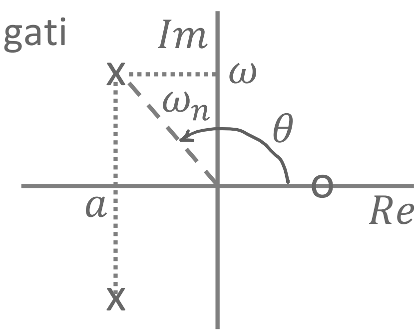
zeri e *poli*: radici di $n(p)$ e $d(p)$. In particolare, i poli sono autovalori di A (non necessariamente tutti!)

grado relativo: $r =$ #*poli* $-$ #*zeri*

indicando con n il #*poli* (sebbene possa essere < ordini di modello interno e ARMA), possiamo scrivere

$$G(p) = \frac{\beta_r p^{n-r} + \beta_{r+1} p^{n-r-1} + \cdots + \beta_{n-1} p + \beta_n}{p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} p + \alpha_n} = \beta_r \frac{(p-z_1)(p-z_2)\ldots(p-z_{n-r})}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)}$$

NOTA: *zeri* (pallini) e *poli* (crocette) possono essere a coppie complessi coniugati



$$p_k = a + i\omega = \omega_n e^{i\theta} = \omega_n\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

t.c.: smorzamento $\xi = \cos(\pi - \theta)$, *pulsazione naturale* $\omega_n = |p_k|$

$$(s - p_k)(s - \bar{p}_k) = s^2 - 2as + |p_k|^2 = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

NEWTON: $G(s) = \frac{1}{ms(s+h/m)}$ zeri: nessuno, poli: $p_1 = 0$ e $p_2 = -\frac{h}{m}$

FIBONACCI: $D(z) = -\frac{z+1}{z^2-z-1}$ zeri: $z_1 = -1$, poli: $p_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$ (+: sezione aurea)

PASSAGGIO DA MODELLO ESTERNO A INTERNO (*Realizzazione* del modello ARMA)

UN CASO PARTICOLARE: $\beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_{n-1} = 0$ (no derivate/anticipi dell'ingresso)

ARMA: $p^n y + \alpha_1 p^{n-1} y + \cdots + \alpha_n y = \beta_n u$

Realizzazione "naturale":

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y \\
p x_1 &= p y = x_2 \\
p x_2 &= p^2 y = x_3 \\
&\ \ \vdots \\
p x_{n-1} &= p^{n-1} y = x_n \\
p x_n &= p^n y = -\alpha_1 x_n + \cdots - \alpha_n x_1 + \beta_n u
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -\alpha_n & \cdots & \cdots & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_n \end{bmatrix}
$$

$$
c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad d = 0
$$

NEWTON ($x_1 = y$: posizione; $x_2 = \dot{y}$: velocità)

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}
$$

$$
c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad d = 0
$$

IL CASO GENERALE: La forma canonica di *ricostruzione*

ARMA: $p^n y + \alpha_1 p^{n-1} y + \dots + \alpha_n y = \beta_0 p^n u + \beta_1 p^{n-1} u + \dots + \beta_n u$

$$\mathbf{A}_r = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b}_r = \begin{vmatrix} \gamma_n \\ \gamma_{n-1} \\ \gamma_{n-2} \\ \vdots \\ \gamma_1 \end{vmatrix} \qquad \gamma_i = \beta_i - \beta_0 \alpha_i$$

$$\mathbf{c}_r^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathrm{d}_r = \begin{vmatrix} \beta_0 \end{vmatrix}$$

$$y = x_n + \beta_0 u \rightarrow x_n = y - \beta_0 u$$

$$p x_n = p y - \beta_0 p u = x_{n-1} - \alpha_1 y + \beta_1 u = x_{n-1} - \alpha_1 x_n + \underbrace{(\beta_1 - \beta_0 \alpha_1)}_{\gamma_1} u$$

$$\hookrightarrow x_{n-1} = (p + \alpha_1) y - (\beta_0 p + \beta_1) u$$

$$p x_{n-1} = (p^2 + \alpha_1 p) y - (\beta_0 p^2 + \beta_1 p) u = x_{n-2} - \alpha_2 y + \beta_2 u = x_{n-2} - \alpha_2 x_n + \gamma_2 u$$

$$\hookrightarrow x_{n-2} = (p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2) y - (\beta_0 p^2 + \beta_1 p + \beta_2) u$$

$$\vdots$$

$$p x_1 = (p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} p) y - (\beta_0 p^n + \beta_1 p^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} p) u = -\alpha_n y + \beta_n u = -\alpha_n x_n + \gamma_n u$$

IL CASO GENERALE: La forma canonica di *ricostruzione*

NEWTON:
chiamiamo z_1 e z_2 le variabili di stato della forma canonica di ricostruzione, per distinguerle da x_1 e x_2

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_2 \\ 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} \qquad b_r = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_r^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad d_r = \beta_0 = 0$$

$$z_1 = \dot{y} + \alpha_1 y = \dot{y} + \frac{h}{m} y$$

$$z_2 = y$$

NOTA: z_1 è la velocità + quella persa per attrito a partire dalla posizione nulla. Infatti, indipendentemente dalla traiettoria, la velocità persa per attrito (rispetto al caso senza attrito) vale

$$\int_0^t \frac{h}{m} x_2(\tau)d\tau = \frac{h}{m}\left(x_1(t) - x_1(0)\right) = \frac{h}{m} y(t) - \frac{h}{m} y(0)$$

Non è una scelta "naturale"!

FIBONACCI

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b_r = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$c_r^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad d_r = 0$$

FORMA CANONICA DI CONTROLLO

$$A_c = A_r^T, \quad b_c = c_r, \quad c_c^T = b_r^T, \quad d_c = d_r$$

$$\mathbf{A}_c = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b}_c = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{c}_c^T = \begin{vmatrix} \gamma_n & \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \dots & \gamma_1 \end{vmatrix} \quad d_c = \begin{vmatrix} \beta_0 \end{vmatrix}$$

NOTA 1: si può usare solo se i polinomi N e D non hanno radici in comune, altrimenti a conti fatti, si ottiene il modello ARMA $d\, y = n\, u$

NOTA 2: coincide con la realizzazione naturale nel caso $\beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_{n-1} = 0$ (per es. per Newton)

IL CAMBIO DI VARIABILI (DI STATO)

NEWTON:

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{h}{m} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Tx \,, \quad x = T^{-1} z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

⇨ Ci sono infinite realizzazioni!

IN GENERALE:

$$z = e^{(i)} = \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \leftarrow i \;\Rightarrow\; x = \text{versore asse } z_i \text{ espresso nelle coordinate } x$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} = \nabla z_i = \text{riga } i\text{-esima di } T$$

$\perp$ alle linee di livello di z_i

$\perp$ agli assi z_j, $j \neq i$