Risposte Canoniche

Ingredienti

Teorema del valore iniziale e finale (e corollari)

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to\infty} sY(s) \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

Da questo teorema deriva direttamente che la prima derivata non nulla all'istante iniziale della risposta allo scalino del sistema è r, il grado relativo del sistema stesso.

Risposta allo scalino, zeri superiori e mal inquadrati

Sia dato un sistema proprio con tutti i poli reali negativi. Siano:

- m_s: numero di zeri superiori
- δ: numero di zeri malinquadrati
- N: numero di estremanti (massimi e minimi) della risposta allo scalino

Allora:

$$m_s \leq N \leq m_s + \delta$$

e inoltre N è dispari [pari] se m_s è dispari [pari].

Antitrasformata di Laplace e sviluppo di Heaviside

$$sca(t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \frac{1}{s} \qquad \delta(t) \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} 1 \qquad e^{-t/\tau} \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} \frac{\tau}{1+s\tau}$$

Esercizio 1

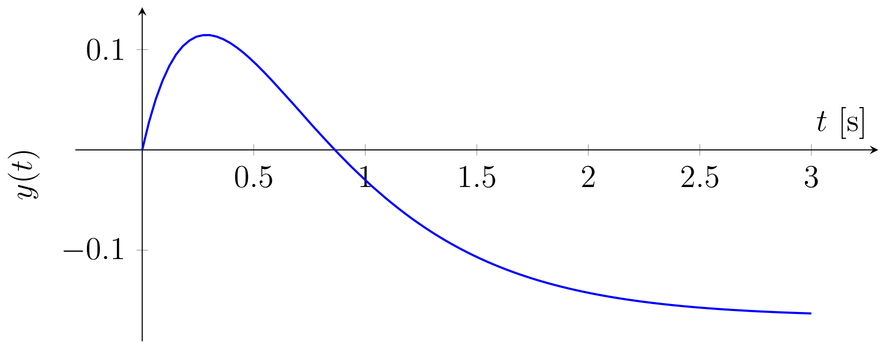
Tracciare qualitativamente la risposta allo scalino dei seguenti sistemi

$$G_1(s) = \frac{s-1}{(s+3)(s+2)} \qquad G_2(s) = \frac{s-1}{(s+2)}$$

$$G_1(s) = \frac{s-1}{(s+3)(s+2)}$$

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D = -2 \Rightarrow T_D = \frac{1}{2} \Rightarrow T_R = 2.5s$.
3. $r = 1 \Rightarrow y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$.
4. $G(0) = -\frac{1}{6}$.
5. $m_s = 1, \delta = 0 \Rightarrow N = 1$.

La soluzione è quindi:



$$G_2(s) = \frac{s-1}{(s+2)}$$

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D = -2 \Rightarrow T_D = \frac{1}{2} \Rightarrow T_R = 2.5s$.
3. $r = 0 \Rightarrow y(0) = 1$.
4. $G(0) = -\frac{1}{2}$.
5. Il sistema è improprio, quindi non si può applicare la regola degli zeri superiori.

In questo caso per il calcolo della risposta allo scalino dobbiamo utilizzare l'antitrasformata:

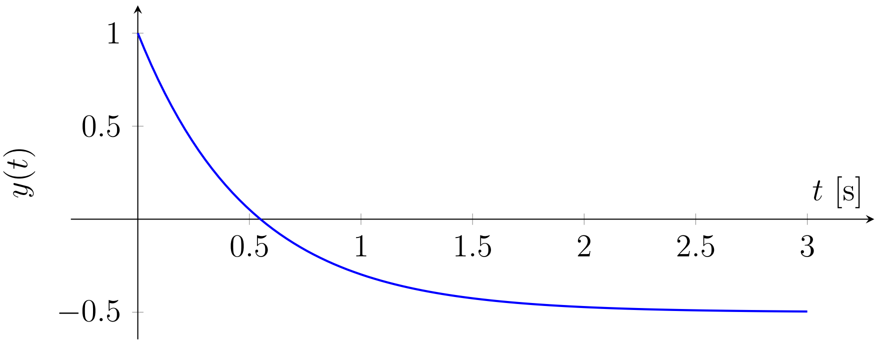
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s-1}{s+2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{s+2} \cdot \frac{1}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s+2} + \frac{B}{s}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} A+B & = & 1 \\ 2B & = & -1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} A & = & \frac{3}{2} \\ B & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

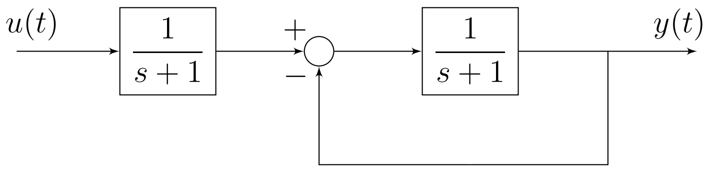
$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}$$

Ottenendo quindi:



Esercizio 2

Tracciare qualitativamente la risposta allo scalino e all'impulso del seguente sistema



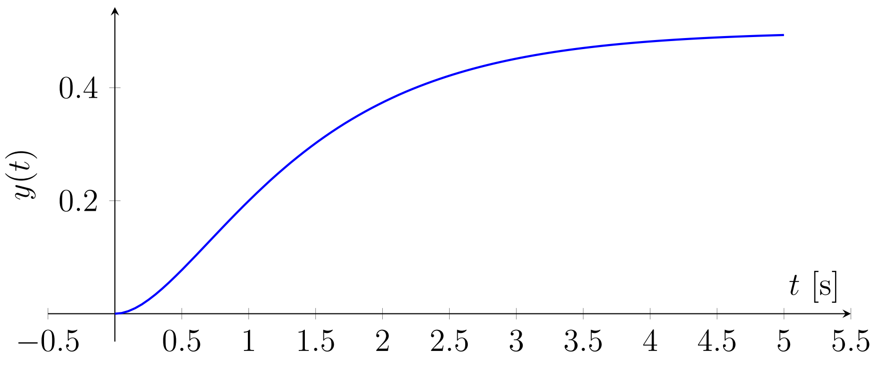
Calcoliamo la funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

A questo punto possiamo tracciare la risposta allo scalino con le solite regole:

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D = -1 \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow T_R = 5s$.
3. $r = 2 \Rightarrow y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0,\ \ddot{y}(0) = 1$.
4. $G(0) = \frac{1}{2}$.
5. $m_s = 0, \delta = 0 \Rightarrow N = 0$.

La risposta allo scalino del sistema è quindi



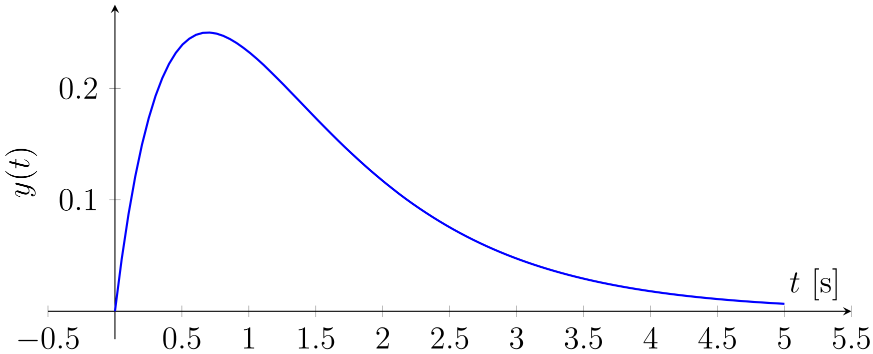
Per la risposta all'impulso non abbiamo criteri definiti. Utilizziamo quindi il teorema del valore iniziale e finale

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} sG(s)U(s) = \lim_{s\to\infty} s \cdot \frac{1}{(s+1)(s+2)} = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}(\dot{y}) = \lim_{s\to\infty} s(sY(s) - y(0)) = \lim_{s\to\infty} s^2 \cdot \frac{1}{(s+1)(s+2)} = 1$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \lim_{s\to 0} sG(s)U(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{(s+1)(s+2)} = 0$$

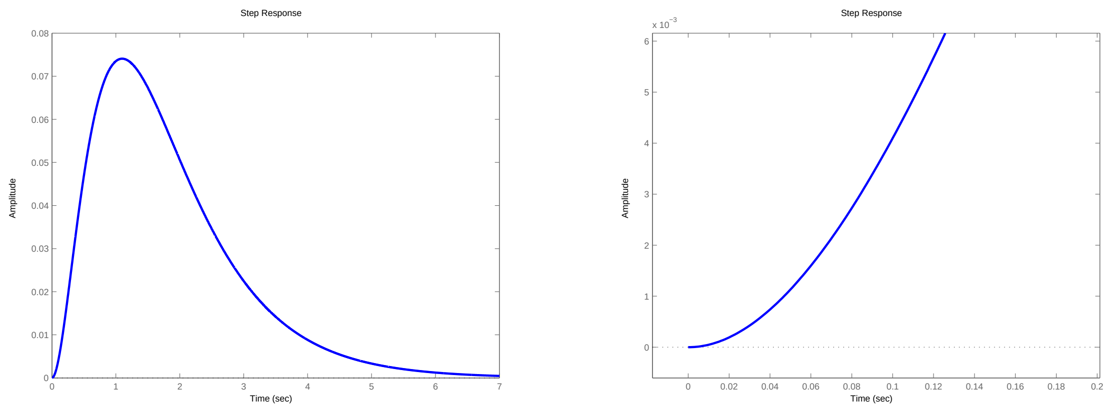
La risposta all'impulso del sistema è quindi



Si noti che era possibile, essendo il sistema proprio, ricavare la risposta all'impulso come la derivata della risposta allo scalino.

Esercizio 3

Qual'è la più semplice funzione di trasferimento che abbia come risposta allo scalino unitario quello rappresentato in figura? Si noti che $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) > 0$.



Utilizziamo le solite regole della risposta allo scalino, in maniera inversa:

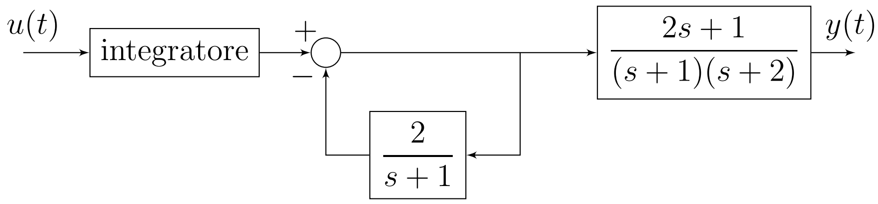
1. Il sistema non diverge $\Rightarrow$ I poli sono stabili.
2. $T_R \sim 5s \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow \lambda_D = -1$.
3. $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) > 0 \Rightarrow r = 2$.
4. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \Rightarrow G(0) = 0$, c'è uno zero nell'origine.
5. $N = 1, m_s \geq 1 \Rightarrow m_s = 1, \delta = 0$.

Una possibile soluzione è quindi

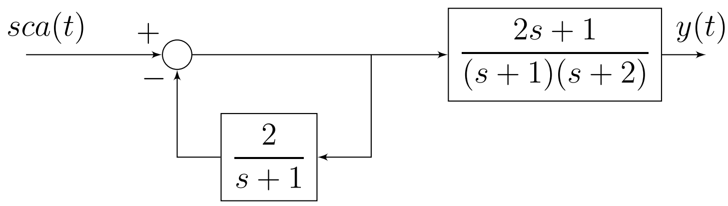
$$G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Esercizio 4

Indicare l'andamento qualitativo della risposta all'impulso del sistema



La risposta all'impulso del sistema proposto è la risposta allo scalino del sistema



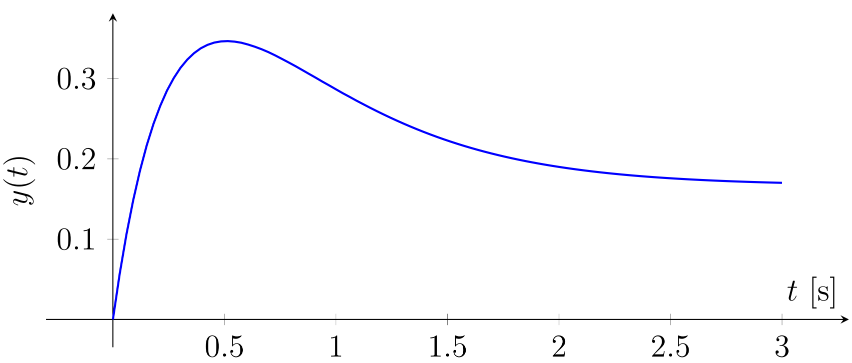
Calcoliamo la sua funzione di trasferimento:

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{1 + \dfrac{2}{s+1}} \cdot \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{2s+1}{(s+2)(s+3)}$$

A questo punto utilizziamo le solite regole:

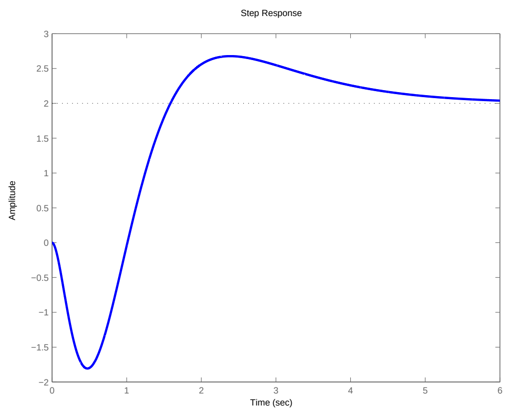
1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D = -2 \Rightarrow T_D = \frac{1}{2} \Rightarrow T_R = 2.5s$.
3. $r = 1 \Rightarrow y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 2$.
4. $G(0) = \dfrac{1}{6}$.
5. $m_s = 1, \delta = 0 \Rightarrow N = 1$.

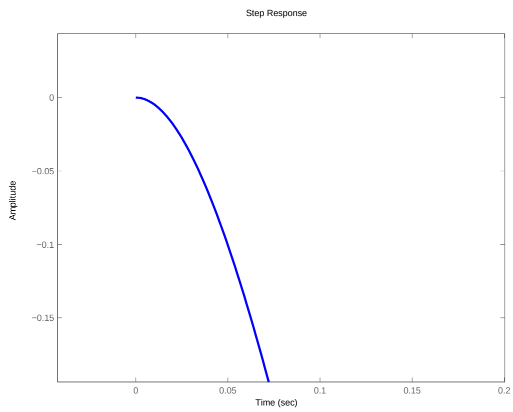
La risposta all'impulso del sistema è quindi



Esercizio 5

Qual'è la più semplice funzione di trasferimento che abbia come risposta allo scalino unitario quello rappresentato in figura? Si noti che $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) < 0$.





Utilizziamo le solite regole della risposta allo scalino, in maniera inversa:

1. Il sistema non diverge $\Rightarrow$ I poli sono stabili.
2. $T_R \sim 5s \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow \lambda_D = -1$.
3. $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, \ddot{y}(0) < 0 \Rightarrow r = 2$.
4. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 2 \Rightarrow G(0) = 2$.
5. $N = 2, \Rightarrow m_s = 2, \delta = 0$ oppure $m_s = 0, \delta = 2$.

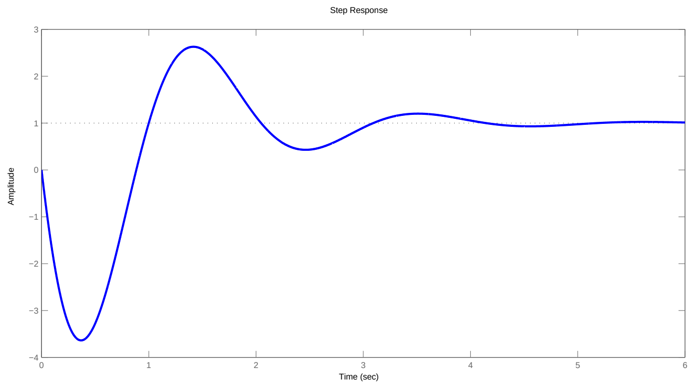
Per decidere tra le due possibilità bisogna notare che $\ddot{y}(0) < 0$, mentre $G(0) > 0$. Ho quindi bisogno di avere uno zero instabile, per cui $m_s \geq 1$.

Una possibile soluzione è quindi

$$G(s) = 96 \cdot \frac{(s+0.5)(-s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Esercizio 6

Qual'è la più semplice funzione di trasferimento che abbia come risposta allo scalino unitario quello rappresentato in figura? Si noti che $\dot{y}(0) = -20$ e che il sistema si assesta dopo circa 5 secondi di tempo.



Utilizziamo le solite regole della risposta allo scalino, in maniera inversa:

1. Il sistema non diverge $\Rightarrow$ I poli sono stabili.
2. $T_R \sim 5s \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow \lambda_D = -1$.
3. $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -20 \Rightarrow r = 1$.
4. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1 \Rightarrow G(0) = 1$.
5. Ci sono oscillazioni persistenti $\Rightarrow$ Poli complessi. $T \sim 2s \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} \sim 3$

Come prima, $\dot{y}(0) < 0$, mentre $G(0) > 0$. Lo zero presente è quindi instabile.
Una possibile soluzione è perciò

$$G(s) = \alpha \frac{-20/\alpha s + 1}{(s - (-1 + 3i))(s - (-1 - 3i))} = 10 \frac{(-2s + 1)}{(s^2 + 2s + 10)}$$

dove $\alpha = 10$ è stato ottenuto imponendo $G(0) = 1$.

Risposte Canoniche 2

Esercizio 1

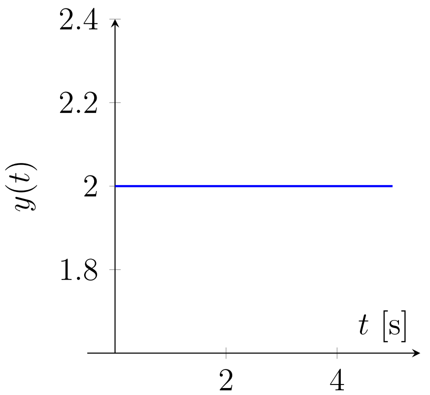
Ricavare la funzione di trasferimento di una rete idrica composta da due serbatoi in cascata con costanti di svuotamento $k_1 = 5s^{-1}$ e $k_2 = 10s^{-1}$, in cui l'ingresso entra nel primo serbatoio e l'uscita del sistema è l'uscita del secondo serbatoio. Si disegni poi qualitativamente l'uscita nel caso in cui all'ingresso all'istante 0 venga applicato per la durata $T = 2s$ secondi un flusso costante di portata $U = 2m^3/s$.

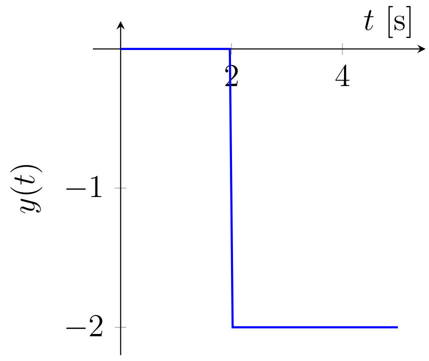
Ricaviamo anzitutto il modello ingresso-uscita del sistema:

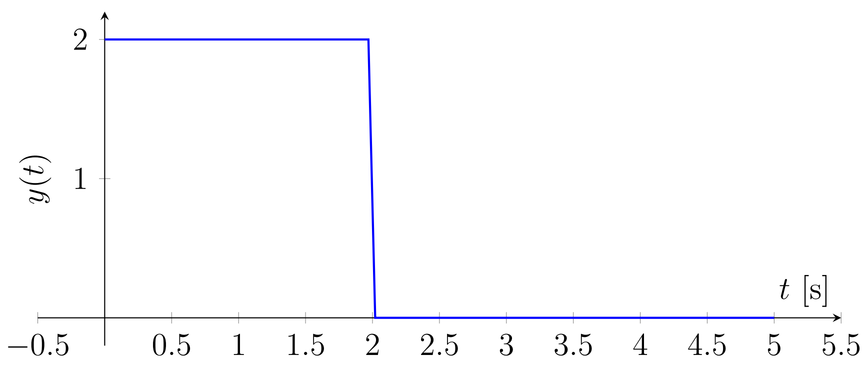
$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= u - k_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= k_1 x_1 - k_2 x_2 \\ y &= k_2 x_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow G(s) = \frac{k_1 k_2}{(s+k_1)(s+k_2)}$$

Notiamo poi che l'ingresso proposto non è altro che la somma di due scalini

$$u(t) = Usca(t) - Usca(t-T)$$





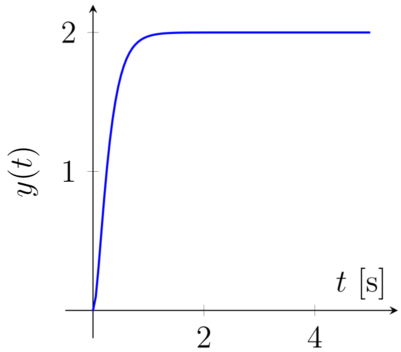


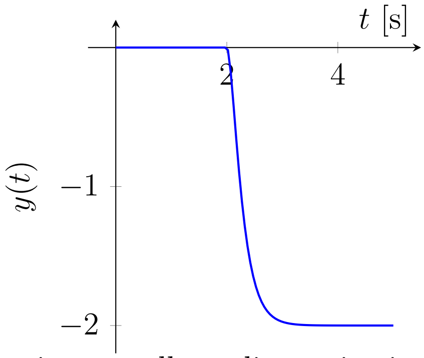
La risposta del sistema sarà quindi la somma di due risposte allo scalino (moltiplicate per le opportune ampiezze).

Utilizziamo le solite regole per capire come sarà la risposta allo scalino:

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D = -k_2 = -5 \Rightarrow T_D = \frac{1}{5} \Rightarrow T_R = 1s$.
3. $r = 2 \Rightarrow y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0,\ \ddot{y}(0) = k_1 k_2 > 0$.
4. $G(0) = 1$.
5. $m_s = 0, \delta = 0 \Rightarrow N = 0$.

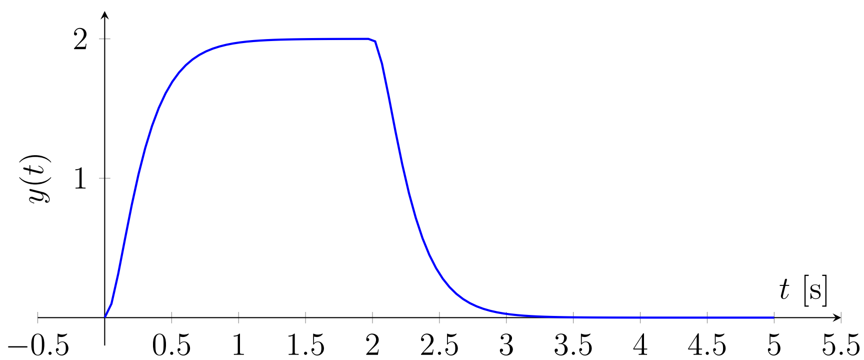
La risposta ai due scalini del sistema a riposo sarà quindi:





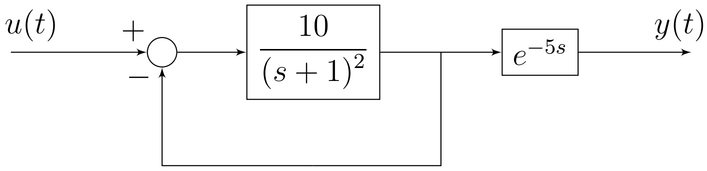
Si noti che le due risposte sono dedotte dalla risposta allo scalino unitario grazie alla linearità (moltiplicando per una costante l'ingresso, l'uscita viene moltiplicata per la medesima costante). In particolare, si noti che i risultati derivanti dal teorema del valore iniziale e finale (punti 3 e 4) seguno anch'essi questa regola. Se il sistema in risposta allo scalino unitario converge al guadagno del sistema, in risposta allo scalino di ampiezza α convergerà ad α volte il guadagno del sistema. De la derivata seconda della risposta allo scalino unitario all'istante iniziale ha un determinato valore, essa avrà tale valore moltiplicato per α qual'ora in ingresso sia applicato uno scalino di ampiezza α.

Sovrapponendo gli effetti delle due soluzioni si ottiene quindi:



Esercizio 2

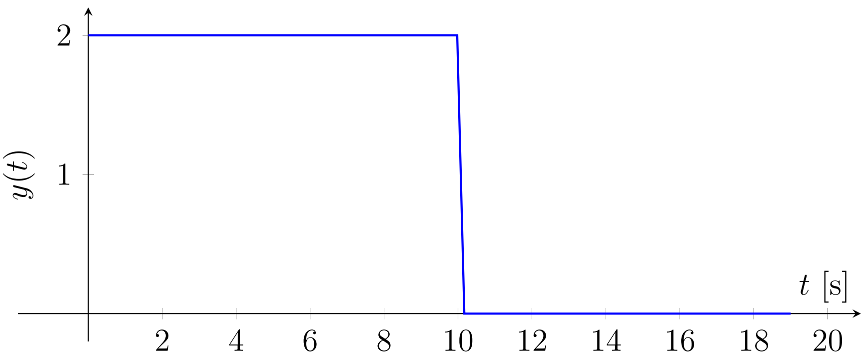
Si consideri il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi



a) Determinare la funzione di trasferimento complessiva

b) Discutere la stabilità esterna del sistema

c) Determinare (qualitativamente) l'andamento di $y(t)$ quando l'ingresso è la funzione rappresentata nella figura seguente



La funzione di trasferimento del secondo blocco è un ritardatore puro. L'entità del ritardo è pari all'opposto del coefficiente di s, dunque $5s$.
La funzione di trasferimento complessiva la calcoliamo con le regole di retroazione e cascata:

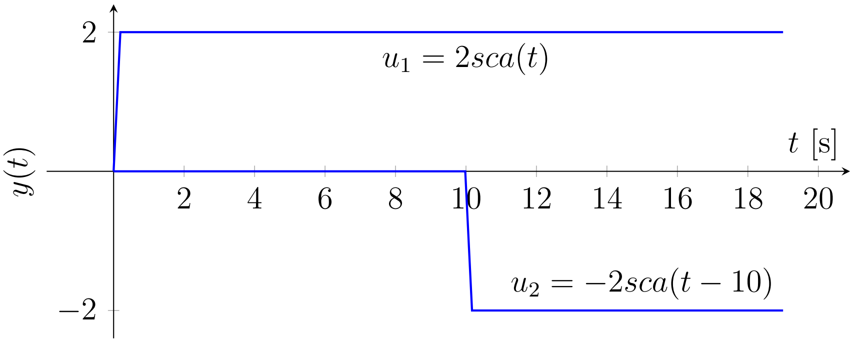
$$G_{TOT} = \frac{\frac{10}{(s+1)^2}}{1 + \frac{10}{(s+1)^2}} e^{-5s} = \frac{10e^{-5s}}{s^2 + 2s + 11}$$

Il ritardatore non influenzerà la stabilità esterna del sistema, ma causerà semplicemente un ritardo di $5s$ sulle uscite. La stabilità esterna del sistema è quindi riconducibile alla stabilità dei poli di G_{TOT}

$$p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 11} = -1 \pm i\sqrt{10}$$

L'ingresso è non canonico, ma può essere ottenuto come sovrapposizione di due scalini di ampiezza 2

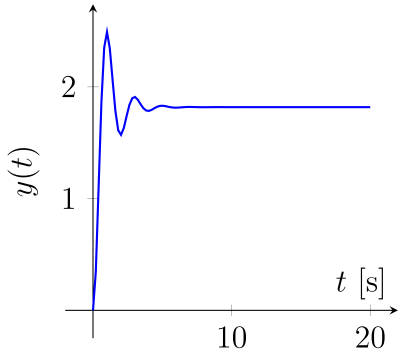
$$u(t) = 2sca(t) - 2sca(t - 10)$$

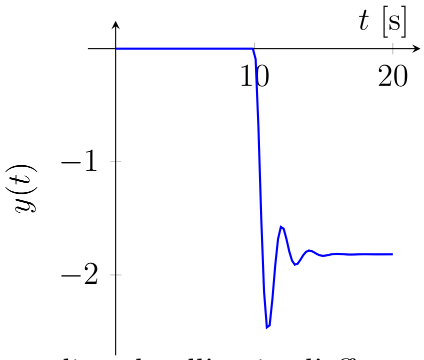


La risposta del sistema sarà quindi la sovrapposizione delle risposte ai due ingressi canonici. Il blocco del ritardatore ha come unico effetto quello di ritardare (di 5 unità di tempo) l'uscita che si registra dalla prima parte. Per la risposta allo scalino dela prima parte del sistema:

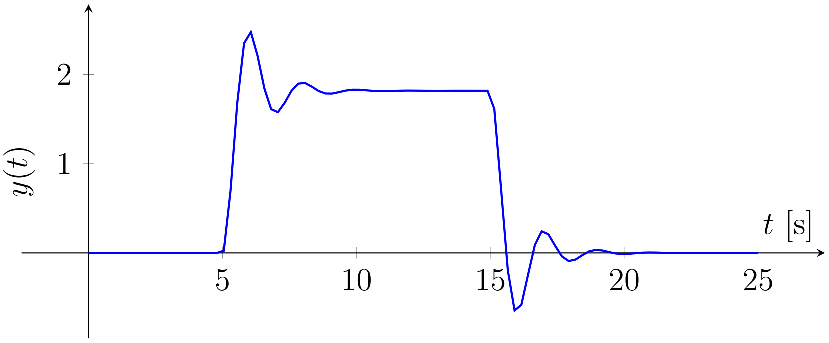
1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D = -1 \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow T_R = 5s$.
3. $r = 2 \Rightarrow y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) = 10 > 0$.
4. $G(0) = 20/11$.
5. I poli sono complessi coniugati $\Rightarrow$ Oscillazioni persistenti con pulsazione pari a $\sqrt{10}$ (di periodo $2\pi/\sqrt{10} \sim 2$.

Il grafico che si ottiene per la risposta ai due scalini è quindi:



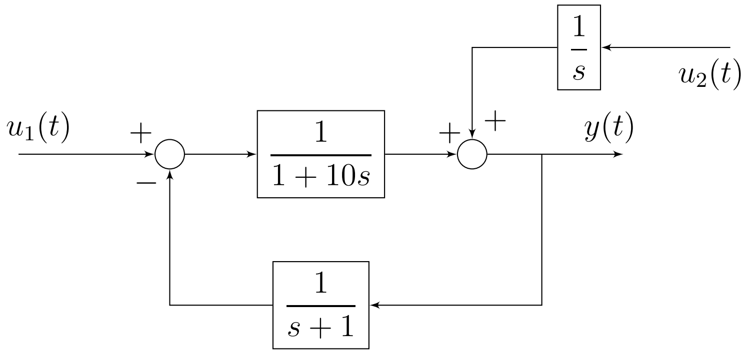


Sovrapponendo gli effetti dei due ingressi, e applicando all'uscita l'effetto del ritardatore puro otteniamo che la risposta del sistam $y(t)$ è



Esercizio 3

Si consideri il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi

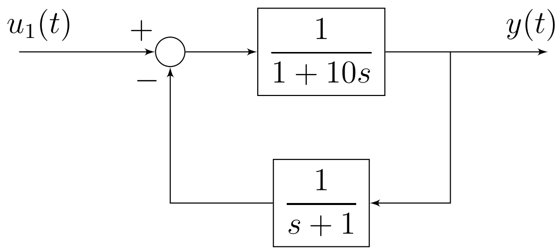


a) Determinare (qualitativamente) $y(t)$ quando $u_1(t) = sca(t)$ e $u_2(t) = 0$.

b) Determinare (qualitativamente) $y(t)$ quando $u_1(t) = 0$ e $u_2(t) = imp(t)$.

c) Determinare (qualitativamente) $y(t)$ quando $u_1(t) = 2sca(t)$ e $u_2(t) = imp(t-5)$.

Per rispondere al primo punto notiamo che $u_2(t) = 0$, quindi il suo effetto sul sistema è nullo. Dobbiamo quindi analizzare la risposta allo scalino unitario del sistema



La funzione di trasferimento del sistema si ricava con le usuali regole della retroazione

$$G_1 = \frac{\dfrac{1}{1+10s}}{1 + \dfrac{1}{1+10s} \cdot \dfrac{1}{s+1}} = \frac{1+s}{10s^2+11s+2}$$

I poli del sistema sono

$$s_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{41}}{20} \qquad s_1 \sim -0.23,\ s_2 \sim -0.87$$

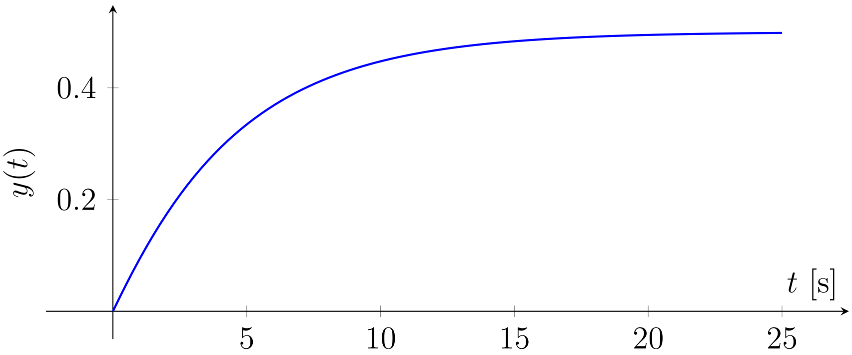
per cui

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D \sim \frac{1}{4} \Rightarrow T_D = 4 \Rightarrow T_R = 20s$.
3. $r = 1 \Rightarrow y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = \frac{1}{10}$.

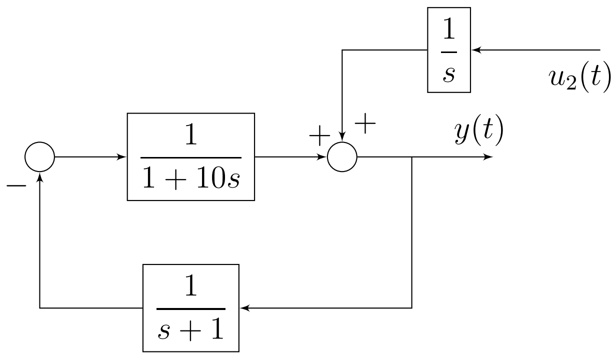
4. $G(0) = 1/2$.

5. $m_s = 0, \delta = 0 \Rightarrow N = 0$.

La risposta allo scalino del sistema sarà quindi



Per rispondere al secondo punto notiamo che $u_1(t) = 0$, quindi il suo effetto sul sistema è nullo. Inoltre il primo blocco che incontra l'ingresso è un integratore. Dobbiamo quindi analizzare la risposta allo scalino unitario del sistema



La funzione di trasferimento del sistema si ricava con le usuali regole della retroazione

$$G_2 = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1+10s} \cdot \dfrac{1}{s+1}} = \frac{(1+s)(1+10s)}{10s^2 + 11s + 2}$$

I poli del sistema sono sempre quelli di prima (poichè l'anello non è cambiato), mentre gli zeri sono cambiati. La risposta allo scalino possiamo dedurla nel solito modo

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.

2. $\lambda_D \sim \frac{1}{4} \Rightarrow T_D = 4 \Rightarrow T_R = 20s$.

3. $r = 2 \Rightarrow y(0) = 1$. Il sistema è improprio

4. $G(0) = 1/2$.

Per capire se la risposta allo scalino del sistema ha massimi o minimi non possiamo applicare la regola degli zeri superiori, essendo il sistema improprio, ma dobbiamo calcolare effettivamente la risposta tramite l'antitrasformata.

$$
\begin{aligned}
y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(1+s)(1+10s)}{10s^2+11s+2}\cdot\frac{1}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10s^2+11s+1}{10s(s-s_1)(s-s_2)}\right) &= \\
= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{A}{s}+\frac{B}{s-s_1}+\frac{C}{s-s_2}\right)\right)&
\end{aligned}
$$

A questo punto impostiamo il sistema

$$
\begin{cases}
A+B+C & = & 10 \\
-As_1 - Cs_1 - As_2 - Bs_2 & = & 11 \\
As_1s_2 & = & 1
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
A & = & \frac{1}{s_1s_2} \\
s_2B & = & 11 + A(s_1+s_2) + Cs_1 \\
10 & = & \frac{1}{s_1s_2} + \frac{11s_1s_2+(s_1+s_2)+Cs_1^2s_2}{s_1s_2^2} + C
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
A & = & \frac{1}{s_1s_2} = 5 \\
B & = & \frac{10s_1^2+11s_1+1}{s_1(s_1-s_2)} \sim -1.8 \\
C & = & -\frac{10s_2^2+11s_2+1}{s_2(s_1-s_2)} \sim 6.8
\end{cases}
$$

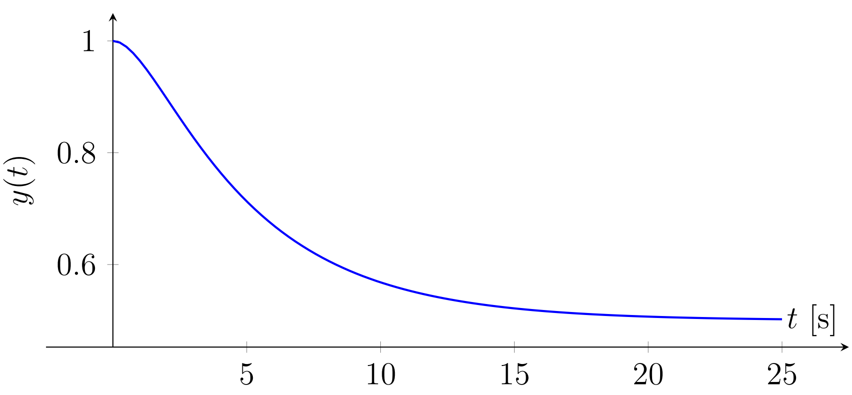
e otteniamo che la risposta allo scalino che stiamo cercando è

$$
y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{10}\left(\frac{5}{s} - \frac{1.8}{s+0.87} + \frac{6.8}{s+0.23}\right)\right) = 0.5 - 0.18e^{-0.87t} + 0.68e^{-0.23t}.
$$

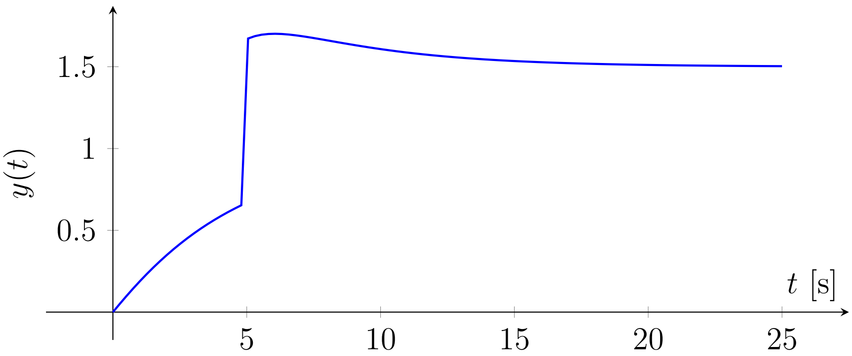
L'uscita del sistema parte quindi con un esponenziale negativo veloce, per essere poi bilanciata da un esponenziale positivo più lenta. Parte comunque lentamente, difatti $y'(0) = 0$. Questo fatto si poteva verificare anche con il teorema del valore iniziale

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \dot{y}(t) &= \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}\left(\dot{y}(t)\right) = \lim_{s\to\infty} s\left(s\mathcal{L}\left(y(t)\right) - y(0)\right) \\
&= \lim_{s\to\infty} s\left(sG(s)U(s) - y(0)\right) = \lim_{s\to\infty} s\left(\frac{(1+s)(1+10s)}{10s^2+11s+2} - 1\right) \\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{s}{10s^2+11s+2} = 0.
\end{aligned}
$$

La risposta del sistema sarà quindi

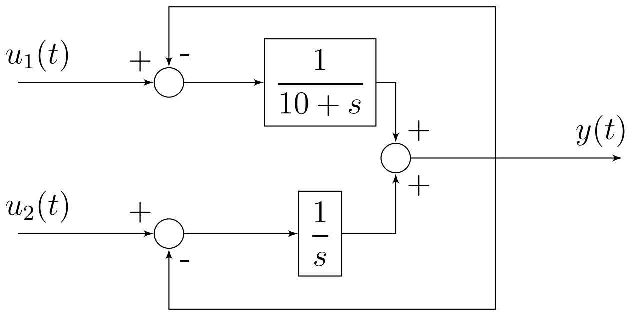


La terza risposta si ottiene semplicemente sovrapponendo gli effetti dei due ingressi, grazie alla linearità. La prima risposta sarà moltiplicata per 2 (poichè l'ingresso è doppio rispetto a quello che avevamo studiato noi) e la seconda risposta sarà semplicemente ritardata di 5 s, poichè l'impulso arriva all'istante $t = 5$ e non $t = 0$.



Esercizio 4

Si consideri il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi



Determinare (qualitativamente) $y(t)$ quando $u_1(t) = 5sca(t)$ e $u_2(t) = -5sca(t)$.

Per calcolare la funzione di trasferimento complessiva del sistema chiamo w_1 e w_2 l'uscita rispettivametne del blocco superiore e inferiore. Quindi

$$y = w_1 + w_2 = \frac{1}{10+s}(u_1 - y) + \frac{1}{s}(u_2 - y)$$

da cui posso ricavare le due funzioni di trasferimento $G_{u_1 \to y}$ e $G_{u_2 \to y}$

$$y = \frac{s}{s^2 + 12s + 10} u_1 + \frac{s+10}{s^2 + 12s + 10} u_2$$

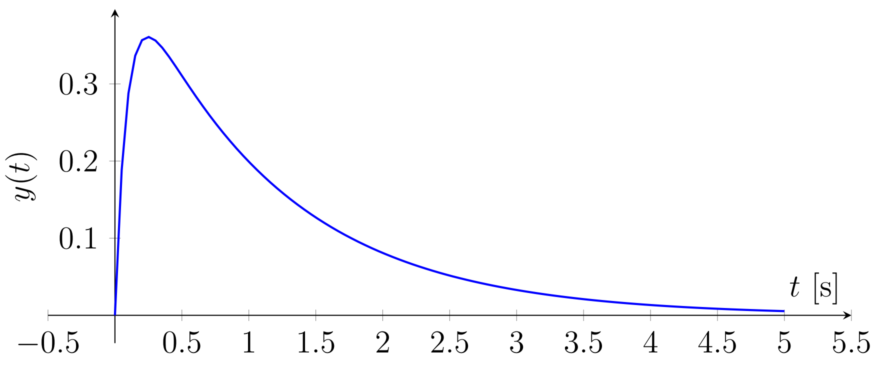
I poli del sistema sono $s_{1,2} = -6 \pm \sqrt{36 - 10} = -6 \pm \sqrt{26}$, cioè $s_1 \sim -1$ e $s_2 \sim -11$.

L'uscita del sistema sarà la sovrapposizione degli effetti dei due ingressi.

Per quanto riguarda la risposta allo scalino di $G_{u_1 \to y}$

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D \sim -1 \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow T_R = 5s$.
3. $r = 1 \Rightarrow y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$.
4. $G(0) = 0$.
5. $m_s = 1, \delta = 0 \Rightarrow N = 1$.

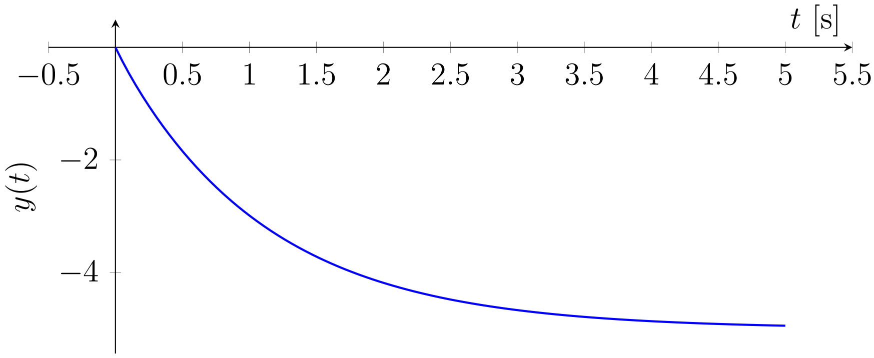
Siccome u_1 è uno scalino di ampiezza 5, la derivata iniziale sarà quintuplicata, e otterremo quindi



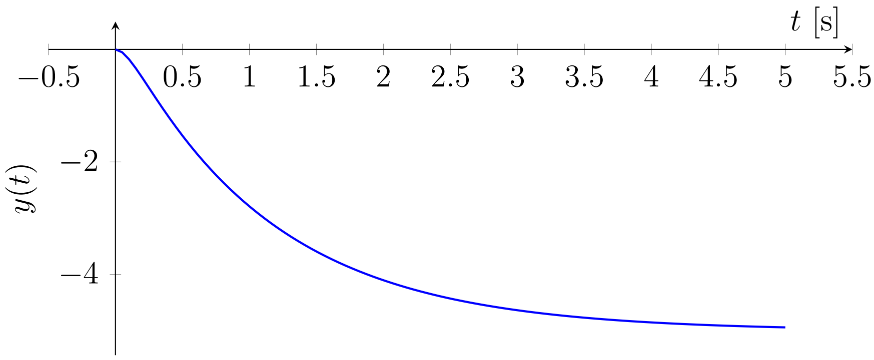
Per quanto riguarda la risposta allo scalino di $G_{u_2 \to y}$

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema non diverge.
2. $\lambda_D \sim -1 \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow T_R = 5s$.
3. $r = 1 \Rightarrow y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$.
4. $G(0) = 1$.
5. $m_s = 0, \delta = 0 \Rightarrow N = 0$.

Siccome u_2 è uno scalino di ampiezza -5, la derivata iniziale varrà -5 e il sistema convergerà a -5, ottenendo quindi



Sovrapponendo gli effetti dei due ingressi otteniamo quindi (si noti che la $y'(0) = 0$)



Risposta in frequenza

Esercizio 1

Un sistema a tempo continuo è descritto dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d = 0$$

Ipotizzando il sistema inizialmente a riposo, si discuta il comportamento dell'uscita per $t \to \infty$ nel caso in cui l'ingresso applicato a partire da $t = 0$ sia

1. $u(t) = -2$;
2. $u(t) = 10\sin(2t)$;
3. $u(t) = -2 + 10\sin(2t)$.

Calcoliamo anzitutto la funzione di trasferimento del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sx_1 + x_1 = u \\ sx_2 + x_2 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{s+1}u \\ (s+1)x_2 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{(s+1)^2}u$$

Il sistema ha due poli in -1 (i due autovalori di A) ed è quindi esternamente stabile. Il sistema quindi convergerà effettivamente ad una uscita di regime.

Se $u = -2$ il sistema convergerà ad una soluzione costante di valore

$$y_\infty(t) = G(0) \cdot -2 = -2$$

Se $u = 10\sin(2t)$, utilizzando il teorema della risposta in frequenza, otteniamo

$$y_\infty(t) = |G(i2)| 10 \sin(2t + arg(G(i2)))$$

$$G(i2) = \frac{1}{(1+2i)^2} = \frac{1}{4i-3} = \frac{1}{4i-3}\frac{4i+3}{4i+3} = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

da cui ricaviamo

$$|G(i2)| = \frac{1}{25}\sqrt{3^2+4^2} = \frac{1}{5} \qquad arg(G(i2)) = \text{atan}\left(\frac{4}{3}\right) = 0.9273 \sim 53^\circ$$

Quindi l'uscita a regime del sistema sarà

$$y_\infty(t) = 2\sin(2t + 53°) = 2\sin(2t - 127°).$$

Lo stesso risultato poteva essere ottenuto senza bisogno di passare dalla razionalizzazione ricordando la forma esponenziale dei numeri complessi:

$$z_i = |z_i|e^{iarg(z_i)} \quad \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{iarg(z_1)}}{|z_2|e^{iarg(z_2)}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(arg(z_1)-arg(z_2))}$$

da cui ricaviamo

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2), \text{ e } arg(z_1^2) = 2arg(z_1)$$

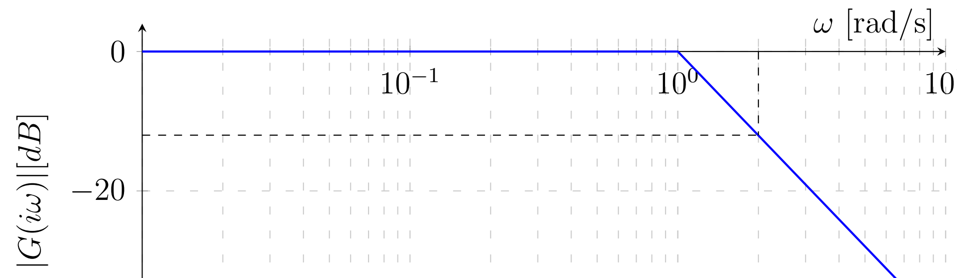
che nel nostro caso ci permette di ricavare

$$G(i2) = \frac{1}{(1+2i)^2} \Rightarrow |G(i2)| = \frac{|1|}{|1+2i|^2} = \frac{|1|}{(\sqrt{4+1})^2} = \frac{1}{5},$$
$$arg(G(i2)) = arg(1) - 2arg(1+2i) = 0 - 2\text{atan}(2) \sim -127°$$

Se $u = -2 + 10\sin(2t)$, utilizziamo la sovrapposizione degli effetti, per cui

$$y_\infty(t) = -2 + 2\sin(2t - 127°)$$

Si noti che i risultati che abbiamo ottenuto potevano essere ricavati anche tramite il tracciamento del diagramma di Bode del modulo. Nel caso in esame ci sono solo 2 poli in -1, per cui in bassa frequenza l'unico termine rilevante sarà il guadagno statico: il diagramma di Bode parte con pendenza 0 dB/dec al valore di guadagno (1) fino a $\omega = 1$, per poi iniziare a scendere di 40 dB/dec.



Per il calcolo della fase invece l'utilizzo del diagramma di Bode è troppo approssimativo, quindi, dopo aver riscritto la funzione di trasferimento come

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g}\frac{\Pi_i(1+s\tau_i)}{\Pi_j(1+sT_l)}$$

possiamo ricorrere alla formula

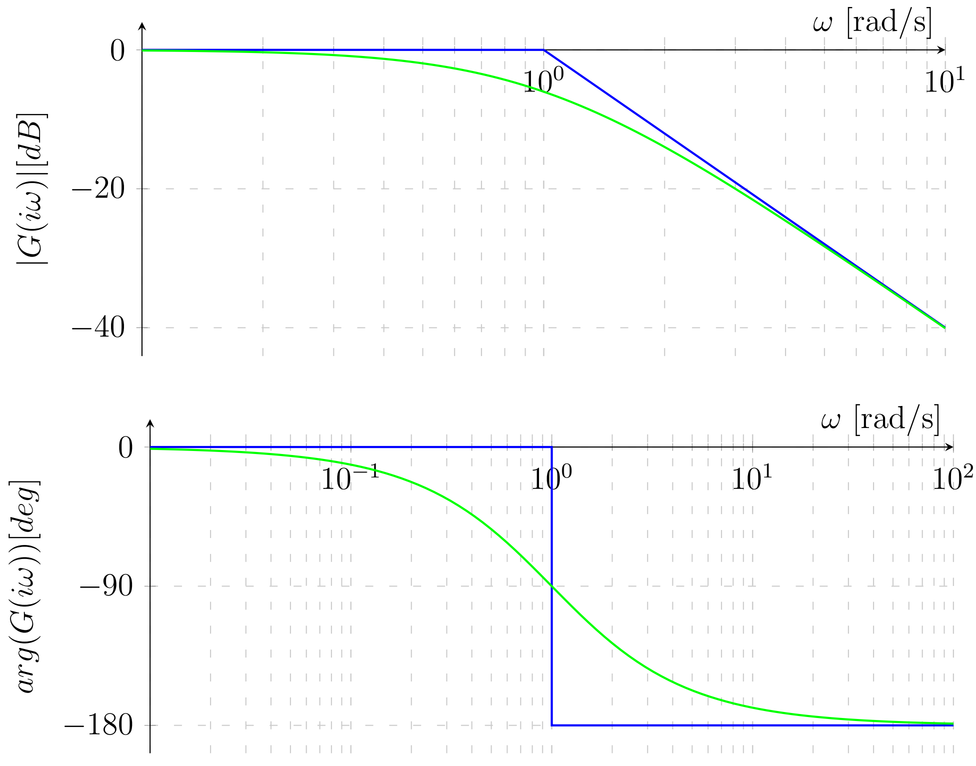
$$\varphi(\omega) = arg(\mu) - g\frac{\pi}{2} + \sum_i \text{atan}(\omega\tau_i) - \sum_j \text{atan}(\omega T_j)$$

Si noti che nel caso di poli e zeri instabili (τ_i o T_j negativi), il loro contributo alla fase è uguale in modulo ma di segno opposto (l'arcotangente è una funzione dispari!).

Nel nostro caso quindi otteniamo dal diagramma di bode del modulo che il segnale costante ($\omega = 0$) passa con guadagno unitario, mentre il segnale a pulsazione $\omega = 2$ ha uno smorzamento di circa -12 dB, da cui il guadagno

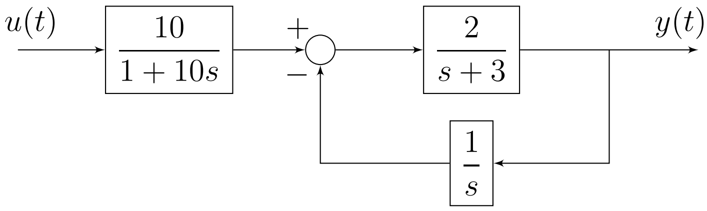
$$|G(i2)| = -12dB = 10^{-12/20} \sim 1/4.$$

Si noti che anche il diagramma di Bode asintotico del modulo ci da un risultato approssimato, poichè la pulsazione che stiamo andando ad analizzare è a meno di una decade di distanza rispetto ai poli. Di seguito sono riportati in verde i diagrammi di Bode reali, per capire al meglio questa differenza.



Esercizio 2

Si consideri il sistema:



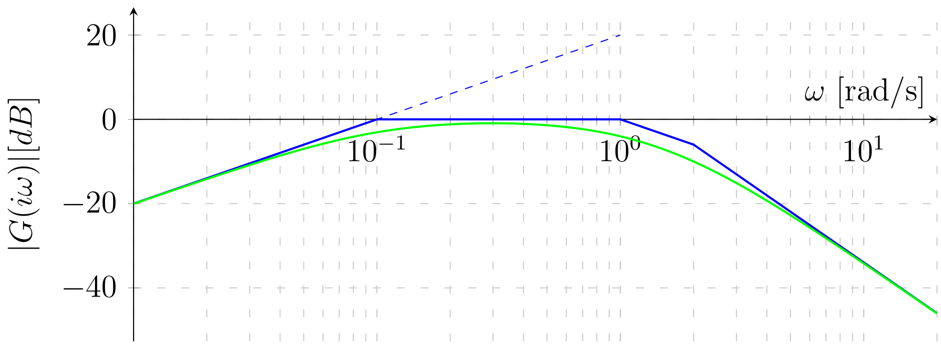
Si traccino i diagrammi di Bode di modulo e fase e si dica quanto vale approssimativamente l'uscita se l'ingresso vale $u(t) = -5+20\cos(t)$. Si verifichino poi i risultati ottenuti tramite il teorema della risposta in frequenza.

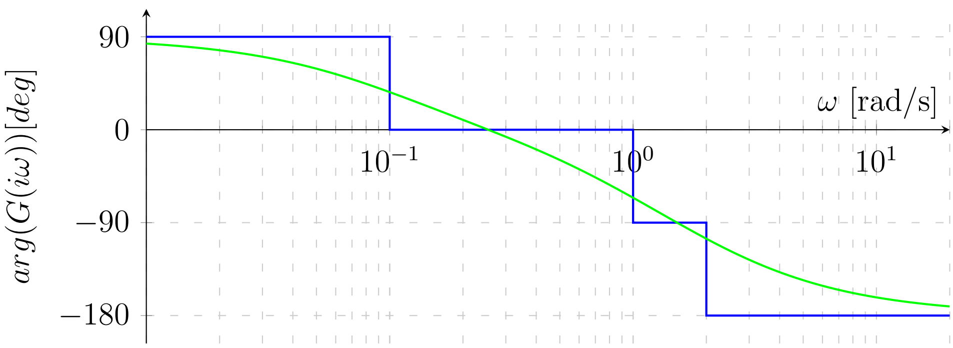
Calcoliamo anzitutto la funzione di trasferimento del sistema

$$G(s) = \frac{10}{1+10s} \cdot \frac{\frac{2}{s+3}}{1+\frac{1}{s}\,\frac{2}{s+3}} = \frac{10s}{(1+10s)(1+s)(1+s/2)}$$

Il sistema ha uno zero nell'origine. Per tracciare il diagramma di Bode del modulo dobbiamo approssimare la funzione di trasferimento per ω piccole alla funzione con il solo zero nell'origine e lo stesso guadagno generalizzato (funzione di trasferimento in bassa frequenza), e poi utilizzare le solite regole di tracciamento.

Il diagramma che si ottiene è





All'ingresso $u(t) = -5 + 20\cos(t)$ otterremo un'uscita di regime poichè i poli del sistema sono $p = \{-0.1, -1, -2\}$ stabili. Possiamo quindi applicare il teorema della risposta in frequenza ottenendo

$$y_\infty(t) = -5G(0) + |G(i)| 20 \cos(t + arg(G(i)))$$

Dal diagramma di Bode otteniamo:

$$G(0) = 0, \quad |G(i)| = 1, \quad arg(G(i)) = 0.$$

Se invece li calcolassimo correttamente otterremmo il medesimo guadagno e ad $\omega = 1$

$$|G(i)| = \left| \frac{10i}{(1+10i)(1+i)(1+i/2)} \right| = \frac{10}{\sqrt{1+100}\sqrt{1+1}\sqrt{1+1/4}} \sim 0.63,$$
$$arg(G(i)) = 90° - \text{atan}(10) - \text{atan}(1) - \text{atan}(1/2) = 90° - 84° - 45° - 26° = -65°$$

da cui otteniamo come uscita a regime

$$y_\infty(t) = 12.5 \cos(t - 65°).$$

Si noti come l'approssimazione del diagramma di Bode asintotico (soprattutto per la fase) non è particolarmente buona: biò è dovuto al fatto che stiamo calcolando modulo e fase vicino (anzi proprio) ad una delle pulsazioni del sistema.

Esercizio 3

Si traccino i diagrammi di Bode di modulo e fase del sistema

$$G(s) = \frac{10+s}{(10s^2+0.1s+10)(1+10s)}.$$

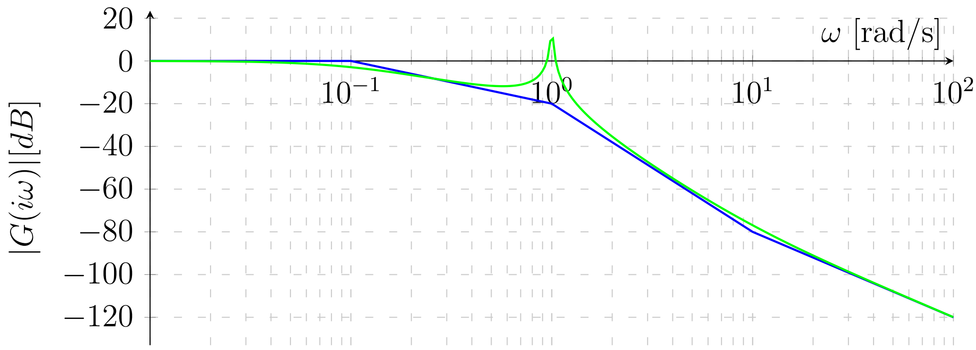
Si calcolino quindi la risposta allo scalino del sistema e l'uscita a regime con ingresso $u(t) = 10\sin(t)$.

Per disegnare i diagrammi di Bode di questo sistema riscriviamo anzitutto la funzione di trasferimento in forma standard

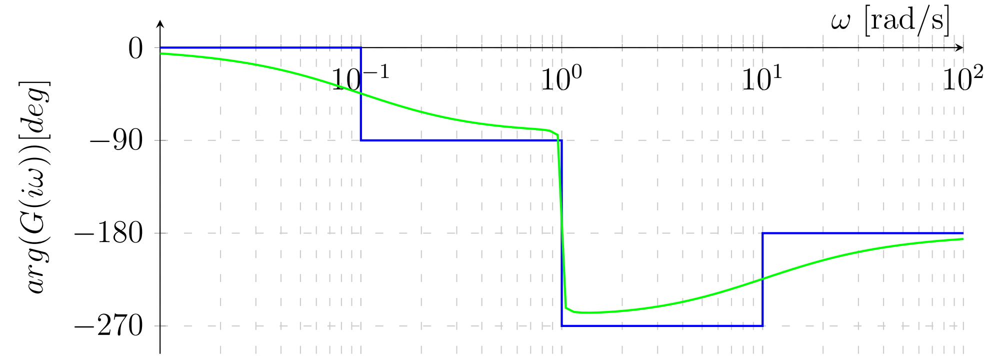
$$G(s) = \frac{1+s/10}{(1+10s)} \cdot \frac{1}{s^2+2\cdot 0.005\cdot 1s+1}.$$

Il diagramma di Bode del modulo del sistema partirà quindi ad $\omega = 0$ al valore del guadagno (1), poi incontrerà il polo reale a $\omega = 0.1$ e quindi inizierà a scendere di -20 dB/dec, poi inconterà i due poli complessi alla pulsazione naturale $\omega_n = 1$ e la pendenza scenderà di altri 40 dB/dec, e infine incontrerà lo zero a $\omega = 10$ e la pendenza risalirà di 20 dB/dec.

Si noti inoltre che i poli complessi coniugati hanno uno smorzamento molto piccolo ($\xi = 0.005$), e quindi ci sarà un picco di risonanza a $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \sim \omega_n$ molto alto (l'errore che commettiamo alla pulsazione naturale è dell'ordine di $1/2\xi = 100$, quindi se il diagramma di Bode asintotico ci dice che il segnale a ω_n è ridotto di 10, in realtà è amplificato di 10!).



Il diagramma di Bode della fase del sistema partirà con fase nulla essendo il guadagno positivo, poi incontrerà il polo reale a $\omega = 0.1$ e quindi la fase scenderà a $-90°$, poi inconterà i due poli complessi alla pulsazione naturale e la fase scenderà di altri 180°, e infine incontrerà lo zero stabile a $\omega = 10$ e la fase risalirà di 90°.



Per la risposta allo scalino notiamo che

1. I poli sono $\{-1/10, -0.005 \pm i\}$, tutti a parte reale negativa $\Rightarrow$ Il sistema è asintoticamente stabile.

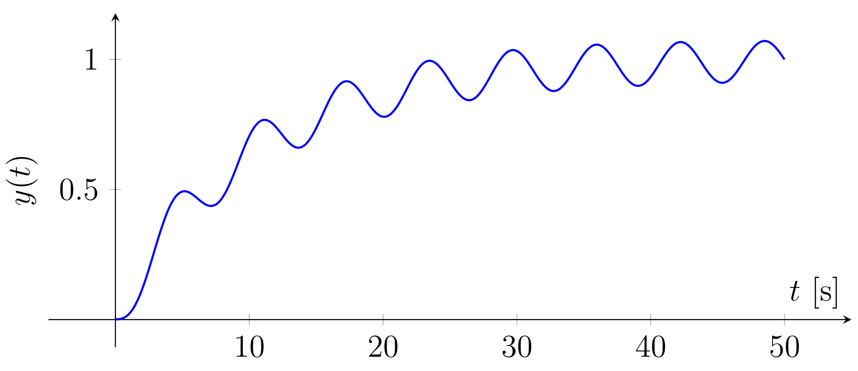
2. $\lambda_D = -0.005 \pm i20 \Rightarrow T_D = 200s \Rightarrow T_R = 1000s$.

3. $r = 2 \Rightarrow y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0,\ \ddot{y}(0) = 1000 > 0$.

4. $G(0) = 1$.

5. I poli sono complessi coniugati $\Rightarrow$ Oscillazioni persistenti con pulsazione pari a $\omega_o = 20$ (di periodo $2\pi/1 \sim 6s$).

La risposta allo scalino del sistema sarà quindi (mostriamo i primi 50 s, le oscillazioni poi si smorzeranno una volta arrivati a T_R)



Si noti come per la risposta allo scalino sia importante ω_o, la pulsazione delle oscllazioni del sistema. Ricordiamo che ω_o è la parte immaginaria degli autovalori del sistema, e può essere quindi dedotta come $\omega_o = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$.

Infine, l'uscita a regime con ingresso $u(t) = 10\sin(t)$, essendo il sistema asintoticamente stabile, si calcola con il teorema della risposta in frequenza,

$$y(t) = |G(i)|10\sin(t + arg(G(i))).$$

La pulsazione che stiamo considerando è una delle pulsazioni dove il nostro diagramma di Bode asintotico sbaglia maggiormente: difatti, come già detto, sappiamo che l'errore nel modulo a $\omega = \omega_n$ è $1/2\xi = 100$, e che l'errore della fase (essendo gli altri poli e zeri distanti una decade) sarà di $2 \cdot -45°$

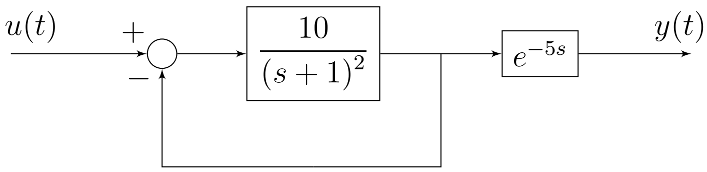
$$|G(i)| = 100 \cdot 0.1 = \left| \frac{1 + i/10}{(1 + 10i)(0.01i)} \right| = 10, \quad arg(G(i)) = -90 - 2 \cdot 45 = -180.$$

L'uscita a regime è quindi

$$y_\infty(t) = 100 \sin(t - 180°).$$

Esercizio 4

Si consideri il sistema:



1. Determinare la funzione di trasferimento complessiva.
2. Disegnare il diagramma di Bode del modulo.
3. Determinare qualitativamente l'andamento dell'uscita per l'ingresso $u(t) = 1 + 2\sin(0.1t)$.

La funzione di trasferimento del secondo blocco è un ritardatore puro. L'entità del ritardo è pari all'opposto del coefficiente di s, dunque $5s$.
La funzione di trasferimento complessiva la calcoliamo con le regole di retroazione e cascata:

$$G_{TOT} = \frac{\frac{10}{(s+1)^2}}{1+\frac{10}{(s+1)^2}} e^{-5s} = \frac{10}{s^2+2s+11} e^{-5s} = G_1(s) e^{-5s}$$

Analizziamo anzitutto l'effetto del ritardatore nella risposta in frequenza. Nel caso del modulo notiamo che

$$|G_{TOT}(i\omega)| = |G_1(i\omega)e^{-5i\omega}| = |G_1(i\omega)| \cdot |e^{-5i\omega}| = |G_1(i\omega)|,$$

quindi il ritardatore non cambia il modulo del segnale (cosa che ci aspettavamo, visto che l'unico effetto è quello di ritardare l'uscita di $5s$). Nel calcolo della fase invece

$$arg(G_{TOT}(i\omega)) = arg(G_1(i\omega)e^{-5i\omega}) = arg(G_1(i\omega)) + arg(e^{-5i\omega}) = arg(G_1(i\omega)) - 5\omega,$$

ovvero se dobbiamo aspettare $5s$ per ottenere l'uscita, la fase che perdiamo in questo modo è $5s \cdot \omega$, la velocità del nostro segnale.

In definitiva, il ritardatore pure $e^{-\tau s}$ non ha effetto sul modulo della risposta in frequenza, mentre aggiunge uno sfasamento $-\tau\omega$ (ritardo) alla fase.

Volendo disegnare il diagramma di Bode del modulo, ci concentriamo quindi sulla funzione di trasferimento G_1. Essa ha poli

$$p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-11} = -1 \pm i\sqrt{10}$$

complessi coniugati, e quindi dobbiamo riscriverla in forma canonica

$$G_1(s) = \frac{10}{s^2+2s+11} = \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{s^2 + 2\frac{1}{\sqrt{11}}\sqrt{11}s + 11} = \mu\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2}$$

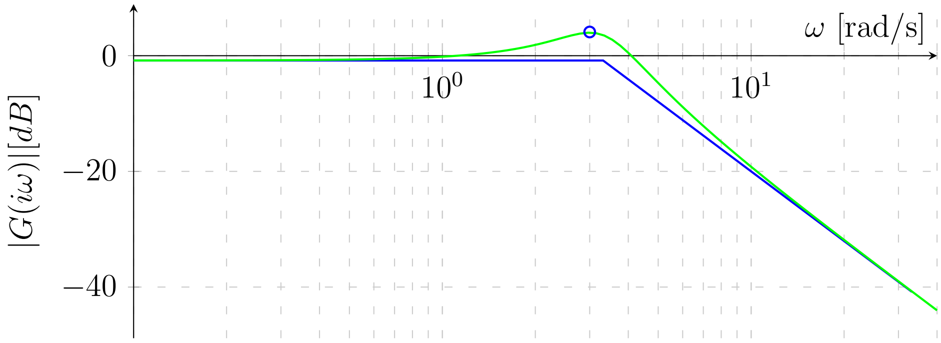
con $\mu = 10/11$, $\omega_n = \sqrt{11} \sim 3.3$ e $\xi = 1/\sqrt{11} \sim 0.3$. Il diagramma di Bode del modulo sarà quindi piatto al valore del guadagno μ prima di ω_n, e da lì inizierà a scendere di 40 dB/dec. Si noti che lo smorzamento è piccolo, quindi ci aspettiamo un picco di risonanza in

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \sqrt{11} \sqrt{9/11} = 3$$

Il valore assunto al picco di risonanza è

$$|G(i3)| = |\frac{10}{(3i)^2 + 2(3i) + 11}| = \frac{10}{|2 + 6i|} \sim 1.6 \sim 5dB.$$

Possiamo quindi disegnare il diagramma di Bode approssimato del modulo (in verde l'andamento effettivo)



Essendo il sistema asintoticamente stabile (i poli del sistema hanno tutti parte reale negativa), per calcolare la risposta asintotica del sistema all'ingresso $u(t) = 1 + 2\sin(0.1t)$ possiamo utilizzare il teorema della risposta in frequenza

$$y(t) = G_{TOT}(0) + |G_{TOT}(0.1i)| 2 \sin(0.1t + arg(G_{TOT}(0.1i))$$

Per il modulo utilizziamo il diagramma di Bode appena prodotto (visto che $\omega = 0.1$ è ben distante dalla pulsazione naturale dei poli), ottenendo che

$$G_{TOT}(0) \sim |G_{TOT}(0.1i)| \sim 1$$

Per la fase, ricordiamo che

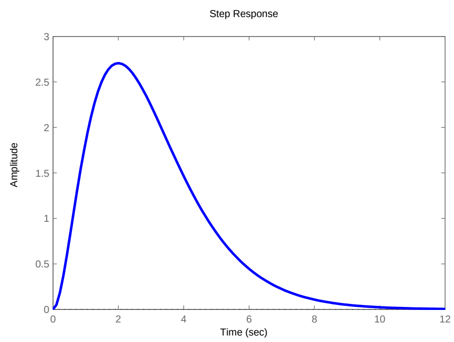
$$arg(G_{TOT}(i\omega)) = arg(G_1(i\omega)) - 5\omega.$$

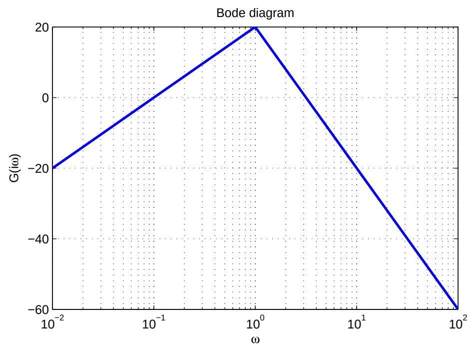
La perdita di fase dovuta ai due poli complessi coniugati è trascurabile, poichè siamo a due decadi prima della loro pulsazione naturale. La perdita di fase invece dovuta al ritardo è di $0.5rad \sim 30°$. Per cui l'uscita del sistema sarà

$$y_\infty(t) = 1 + 2\sin(0.1t - 30°)$$

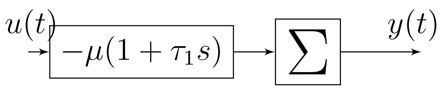
Esercizio 5

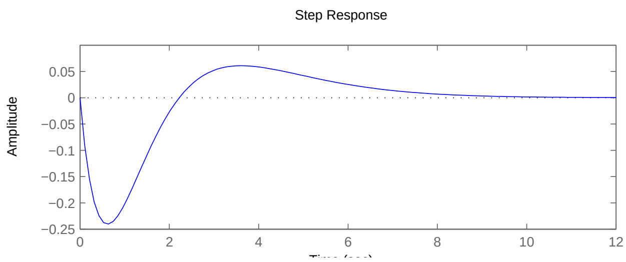
Un sistema Σ ha risposta allo scalino unitario e diagramma di Bode approssimato rappresentati in figura:





Determinare una possibile funzione di trasferimento compatibile con i due diagrammi. Il sistema Σ viene poi collegato in cascata con un nuovo sistema, ottenendo lo schema a blocchi in figura (pannello sinistro). Determinare $\mu > 0$ e τ_1 del nuovo sistema affinchè il sistema aggregato abbia risposta allo scalino presentata nel pannello destro (si noti che $\dot{y}(0) = -1$) e tracciare i diagrammi di Bode dell'aggregato.





Analizzando il solo diagramma di Bode del modulo, possiamo dedurre che il sistema ha uno zero nell'origine (la pendenza in bassa frequenza è 20 dB/dec), che il guadagno generalizzato del sistema è 10 (il valore assunto a $\omega = 1$), e che a $\omega = 1$ tale pendenza passa a -40 dB/dec. La perdita di pendenza sappiamo essere dovuta alla presenza di poli stabili o instabili. Guardando la risposta allo scalino ci accorgiamo che essa non diverge: il sistema è asintoticamente stabile, e la sua funzione di trasferimento è quindi:

$$G_1(s) = \frac{10s}{(s+1)^3},$$

La funzione di trasferimento dell'aggregato sarà quindi:

$$G = -10\mu \frac{(s\tau_1 + 1)s}{(s+1)^3}$$

Volendo la risposta allo scalino proposta, notiamo che

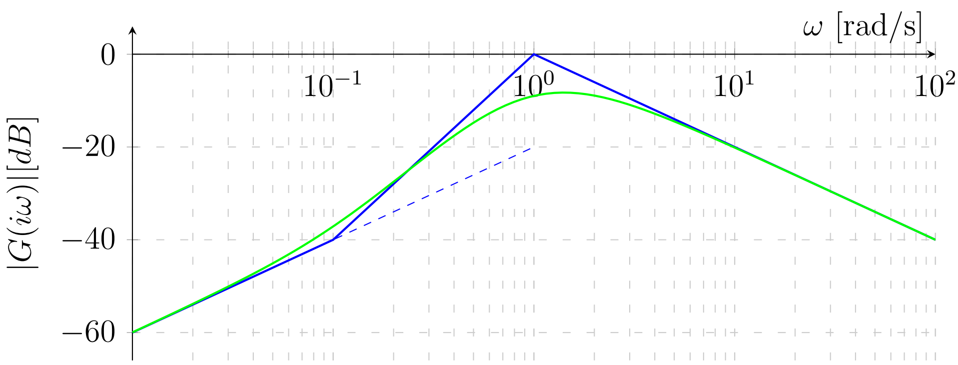
1. Il sistema converge, infatti non stiamo cambiandone i poli.

2. T_R è rimasto come quello di prima, sempre per lo stesso motivo.
3. $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -1, \Rightarrow r = 1, -10\mu\tau_1 = -1$, quindi $\mu\tau_1 > 0$, ed essendo $\mu > 0$ dovrà essere $\tau_1 > 0$ (lo zero è "stabile").
4. $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \Rightarrow G(0) = 0$, difatti c'è uno zero nell'origine.
5. $N = 2, m_s \geq 1 \Rightarrow m_s = 2, \delta = 0$, poichè se lo zero che inseriamo non fosse superiore, il numero di massimi sarebbe dispari.

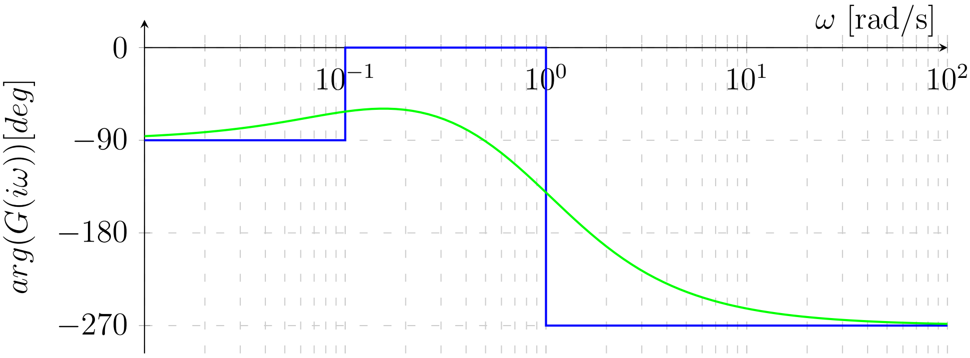
Dobbiamo quindi collocare lo zero a bassa frequenza, in modo che sia superiore. Scegliamo di metterlo ad esempio ad $\omega = 0.1$, quindi $\tau_1 = 10$ e $\mu = 0.01$. La funzione di trasferimento sarà quindi

$$G = -0.1\frac{(10s+1)s}{(s+1)^3}$$

Possiamo quindi tracciare il diagramma di Bode: avendo uno zero nell'origine, a basse frequenze gli altri poli hanno un effetto trascurabile, e quindi il sistema si comporta come $-0.1s$. Utilizzando poi le solite regole (incontriamo prima uno zero, quindi la pendenza passa da 20 db/dec a 40 db/dec, poi incontriamo 3 poli coincidenti, quindi la pendenza passa a -20 db/dec), riusciamo a tracciare l'intero diagramma di Bode del modulo.



Per il diagramma di Bode della fase, notiamo anzitutto che il guadagno dell'aggregato è negativo, (fase $-180°$) e abbiamo poi uno zero nell'origine (guadagniamo 90° di fase, quindi partiamo con fase -90°), incontriamo un'altro zero "stabile" a $\omega = 0.1$, quindi la fase sale a 0°, e poi riscende a $-270°$ incontrati i tre poli a $\omega = 1$.



Esercizio 7

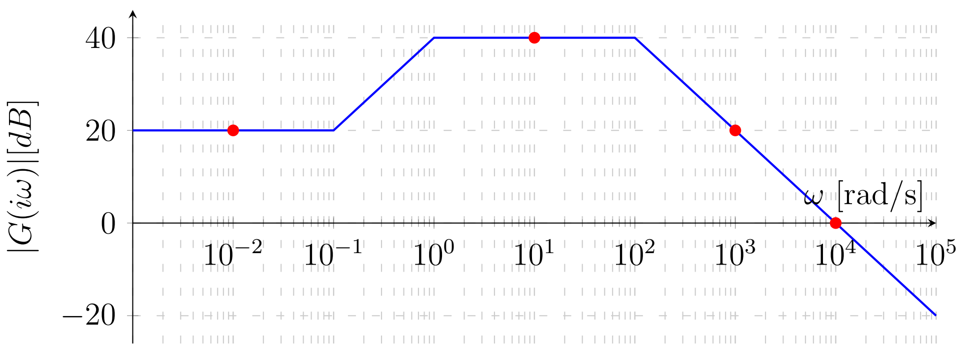
Un sistema elettrico è sottoposto a prove per ricavarne la funzione di trasferimento. Le prove consistono nell'applicare una tensione di ingresso $v_{in}(t)$ e nel rilevare la corrispondente tensione d'uscita $v_{out}(t)$.

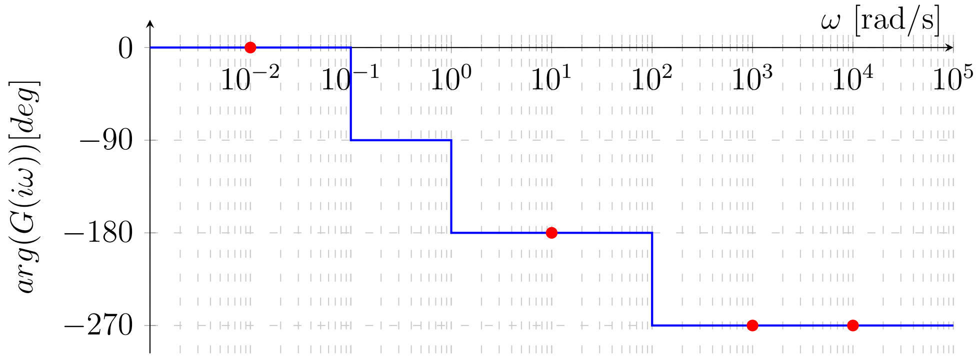
- Prova statica: applicando uno scalino $v_{in}(t) = \bar{v}\text{sca}(t)$, l'uscita $v_{out}(t)$ tende al valore di regime $10\bar{v}$ qualunque sia il valore $\bar{v}$.
- Prova in regime sinusoidale: applicando ingressi sinusoidali di ampiezza unitaria ed aventi varie pulsazioni ω (cioè $v_{in}(t) = \sin(\omega t)$), si sono rilevate l'ampiezza e lo sfasamento dell'uscita a transitorio esaurito ($v_{out}(t) = V\sin(\omega t + \varphi)$):

ω	0.01	10	1000	10 000
V	10	100	10	1
φ	0°	-180°	-270°	-270°

1. Determinare una funzione di trasferimento tra tensione d'ingresso e tensione d'uscita compatibile con i risultati delle prove.
2. Determinare qualitativamente la risposta allo scalino del sistema, discutendo in particolare il tempo di risposta.

Anzitutto cerchiamo di costruire i diagrammi di Bode compatibili con le informazioni che ci sono state date. Notiamo che le fasi sono tutte multipli di 90°: utilizziamo questa informazione per piazzare i poli (in modo che il diagrammi di Bode effettivo - non quello asintotico - della fase passi vicino ai punti misurati). Inoltre sappiamo, dal risultato della risposta allo scalino, che il guadagno statico del sistema è 10 (quindi non ho poli o zeri nell'origine): il diagramma di Bode dovrà partire a 20 dB. Un possibile diagramma di Bode è quindi





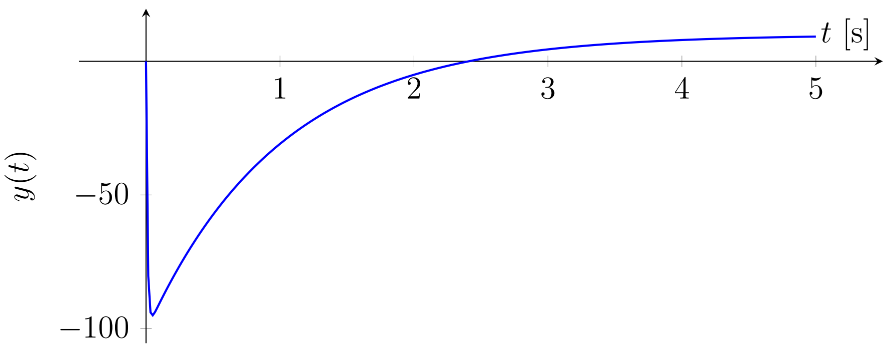
da cui ricaviamo la funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\frac{1-10s}{(1+s)(1+0.01s)}$$

Per la risposta allo scalino analizziamo i soliti 5 punti:

1. I poli sono stabili $\Rightarrow$ Il sistema è asintoticamente stabile.
2. $p_D = -1 \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow T_R = 5s$.
3. $r = 1 \Rightarrow y(0) = 0,\, \dot{y}(0) = -10000$.
4. $G(0) = 10$.
5. $m_s = 1,\, \delta = 0 \Rightarrow N = 1$.

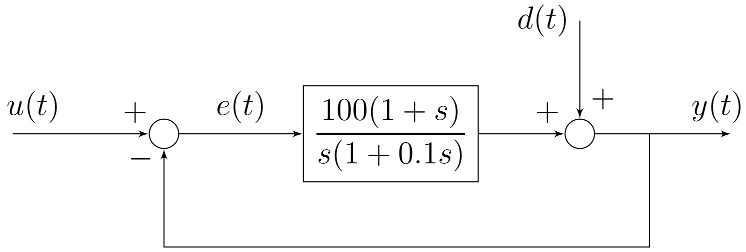
quindi la risposta allo scalino del sistema sarà



Criterio di Bode e sintesi del controllore

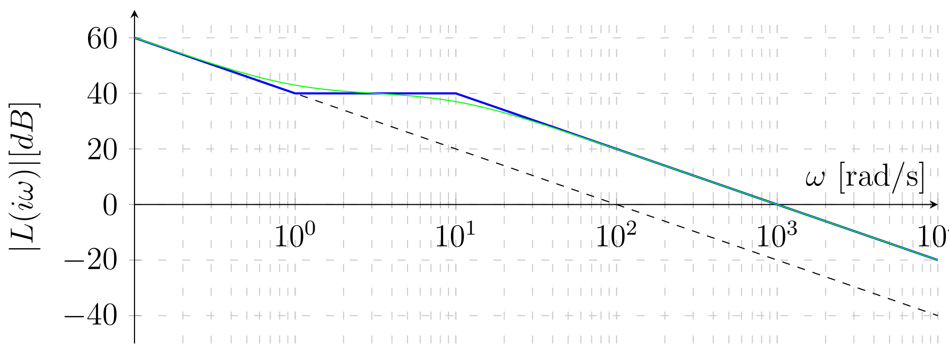
Esercizio 1

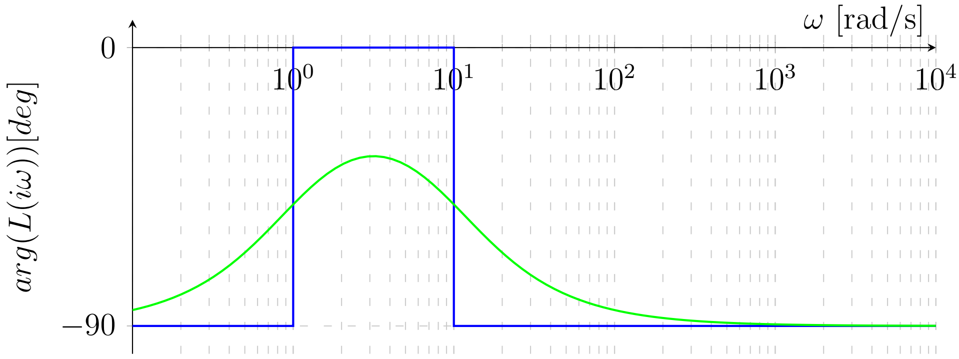
Si consideri il sistema



1. Studiare la stabilità esterna del sistema senza calcolare la funzione di trasferimento.
2. Determinare l'effetto sull'uscita di un disturbo $d(t)$ costante di ampiezza 1.
3. Determinare $|e(t)|$ a transitorio esaurito in assenza di disturbo e con ingresso $u(t)$ di ampiezzza unitaria e pulsazione pari a 0, 10^2, 10^4.

Tracciamo il diagramma di Bode della funzione d'anello. Essa è già scritta in forma standard, possiamo quindi procedere al tracciamento del diagramma. La funzione d'anello ha uno zero nell'origine: se non ci fossero altri poli o zeri, passerebbe quindi per $(1, 40dB)$ con pendenza -20 dB/dec. Utilizziamo questa come approssimazione in bassa frequenza, quindi incontriamo uno zero stabile a $\omega = 1$ e un polo stabile a $\omega = 10$. I diagrammi di Bode risultano quindi:



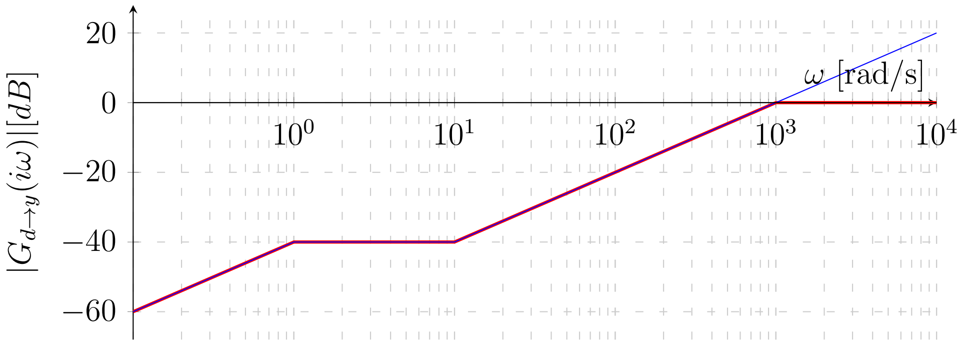


$\omega_c = 10^3$, $arg(L(i\omega_c)) = -90°$, quindi $\varphi_m = 90° > 0$. Siccome siamo sotto le ipotesi del criterio di Bode ($L(s)$ non ha poli instabili, il suo diagramma di Bode del modulo parte sopra l'asse 0 dB e taglia l'asse una volta sola), questo ci garantisce la stabilità del sistema di controllo.

Per determinare l'effetto dell'uscita di un disturbo costante dobbiamo calcolare la funzione di trasferimento dal disturbo all'uuscita, che è

$$G_{d\to y} = \frac{1}{1+L}$$

Per cui il diagramma di Bode del modulo si può ottenere graficamente come il minimo tra l'asse 0 dB e il diagramma di Bode di $1/L$ (ovvero, in scala logaritmica, il diagramma di Bode in anello aperto cambiato di segno).



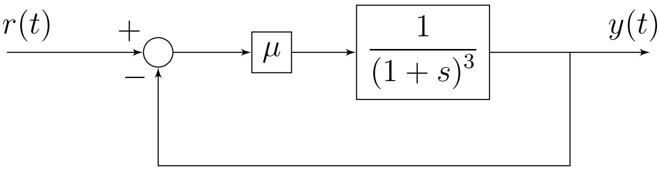
Dal diagramma di Bode deduciamo immediatamente che disturbi costanti vengono rigettati. Questa cosa la potevamo dedurre immediatamente anche notando la presenza di un polo nell'origine della funzione d'anello.

Per determinare $|e_\infty(t)|$ possiamo utilizzare il teorema della risposta in frequenza. Si noti che $G_{u\to e} = G_{d\to y}$, per cui:

- $\omega = 0$: $e_\infty(t) = 0$, ovvero l'uscita è uguale all'ingresso
- $\omega = 10^2$: $|e_\infty(t)| = 1/10$, ovvero l'uscita, benchè uguale all'ingresso ($\omega = 100$ è in banda!), è un po' sfasata: se $u(t) = sin(100t)$ $y(t) = sin(100t - 5\,°)$, per cui $e(t) = u(t) - y(t) = sin(100t) - sin(100t - 5\,°) = 2cos(100t - 2.5°)sin(+2.5°) = 0.087cos(100t - 2.5°)$ (nota: $sin(\alpha) + sin(\beta) = 2sin(\frac{\alpha+\beta}{2})cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$)
- $\omega = 10^4$: $|e_\infty(t)| = 1$, ovvero il nostro sistema di controllo non riesce a seguire l'ingresso

Esercizio 2

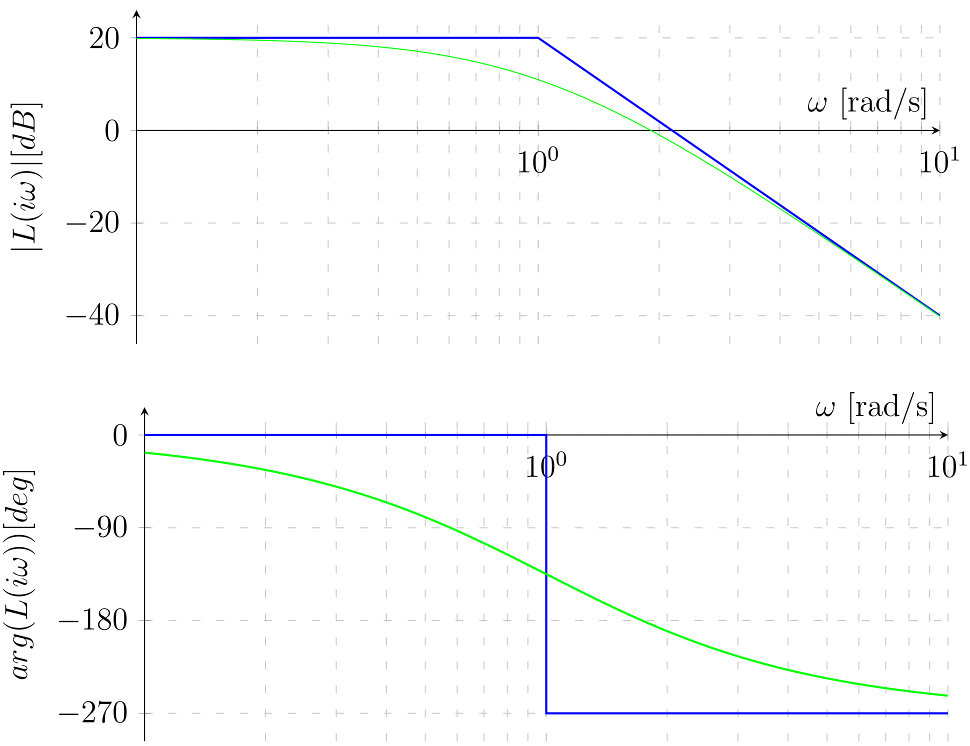
Dato il sistema retroazionato



Calcolare i valori positivi che possono essere assunti dal parametro μ affinchè:

- Il sistema retroazionato sia esternamente stabile;
- La pulsazione di taglio sia più grande di 4/3;
- Il margine di fase sia maggiore di 20°.

Tracciamo il diagramma di Bode della funzione d'anello. Essa è già scritta in forma standard, possiamo quindi procedere al tracciamento del diagramma. La funzione d'anello ha guadagno in bassa frequenza pari a μ. Come primo esempio, assumiamo $\mu = 10$ (poi lo cambieremo per soddisfare i requisiti richiesti). Il diagramma di Bode procederà piatto fino a che non incontro la pulsazione $\omega = 1$, dove inizierà a scendere di 60 dB/dec.



Si noti che con $\mu = 10$ il criterio di Bode ci garantisce che il sistema di controllo è instabile, poichè $\omega_c \sim 2$ (la leggo dal grafico) e $\varphi(\omega_c) < -180°$, ovvero il margine di fase è negativo. Volendo calcolare ω_c del diagramma di Bode in maniera corretta, possiamo analizzare il triangolo rettangolo che scende da μ di 60 db/dec. Da cui

$$60(Log(\omega_c/1)) = 20 \Rightarrow Log(\omega_c) = 1/3 \Rightarrow \omega_c \sim 2.15$$

e

$$\phi(\omega_c) = 3atan(\omega_c) \sim 195°.$$

Per risolvere il problema possiamo variare μ e provare a rispettare le specifiche guardando il diagramma di Bode, oppure imporle rifacendo un conto analogo. Il limite superiore di ω_c, per avere $\varphi_m > 20$ è dato da

$$3atan(\omega_c) = 160°$$

Si noti che l'approssimazione asintotica del diagramma di Bode non è buona tanto piu' ω_c si avvicina a 1. Per calcolare il limite inveriore per μ ricorriamo quindi al caloclo diretto:

$$\left|\frac{\mu}{(1+\mathrm{i}\ \omega_c)^3}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu = (1+\ \omega_c^2)^{3/2} = (1+\ tan(160/3)^2)^{3/2}$$

ovvero $\mu < 4.696$.

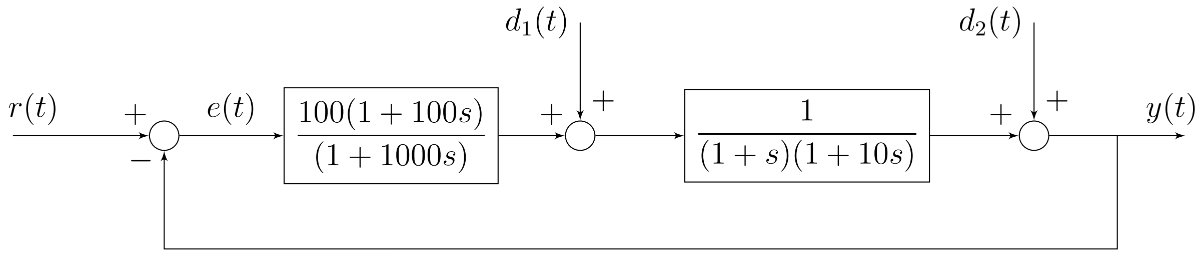
Siccome il limite inferiore alla banda mi è dato dalle specifiche $\omega_c > 4/3$, il limite inferiore per μ si può ottenere come

$$\mu = (1+\ \omega_c^2)^{3/2} = (1+\ (4/3)^2)^{3/2} \Rightarrow \mu > 4.63.$$

Viste le specifiche posso quindi scegliere $\mu = 4.65$.

Esercizio 3

Si consideri il sistema di controllo



1. Studiarne la stabilità senza calcolare la funzione di trasferimento.

2. Determinare la pulsazione di taglio e il margine di fase.

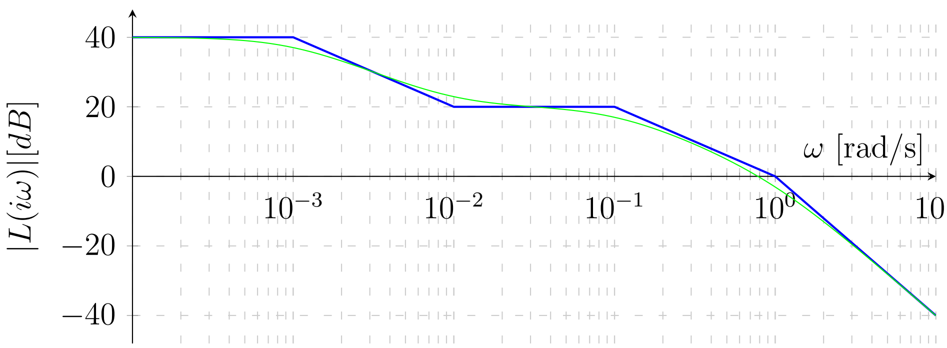
3. Disegnare i diagrammi di Bode delle funzione di trasferimento dal riferimento r e dai disturbi d_1 (sull'attuatore) e d_2 (sull'uscita) all'uscita.

4. Si dica quanto vale il modulo dell'uscita a transitorio esaurito quando il segnale di riferimento e i disturbi sono scalini unitari e quando sono sinusoidi di ampiezza 10 e pulsazione 0.02.

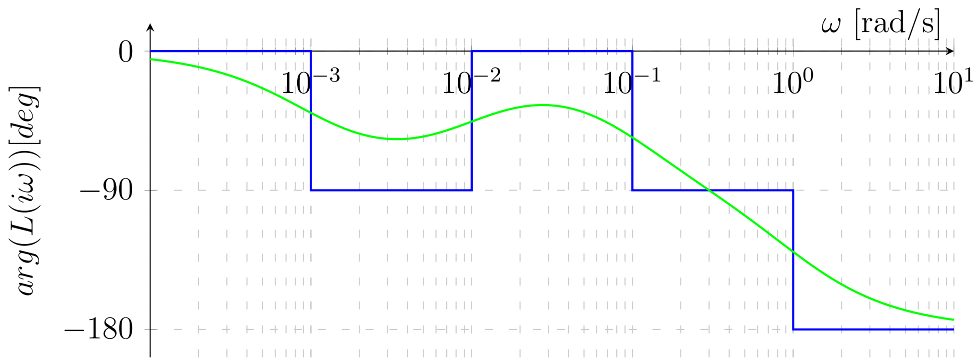
La funzione d'anello, scritta in forma standard, risulta:

$$L(s) = 100\frac{1+100s}{(1+1000s)(1+10s)(1+s)}$$

ed ha guadagno in bassa frequenza pari a 100 (40 dB). Il diagramma di Bode procederà piatto fino a che non incontro la pulsazione $\omega = 10^{-3}$, dove inizierà a scendere di -20 dB/dec, poi a $\omega = 10^-2$ tornerà piatta, quindi tornerà a scendere di -20 dB/dec e -40 dB/dec dopo aver incontroto i poli in $\omega = 10^{-1}$ e $\omega = 1$ rispettivamente.

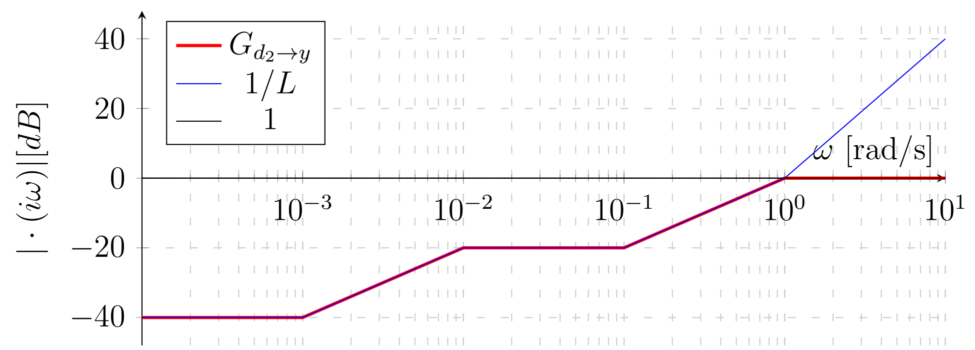


Il diagramma di bode della fase risulterà invece

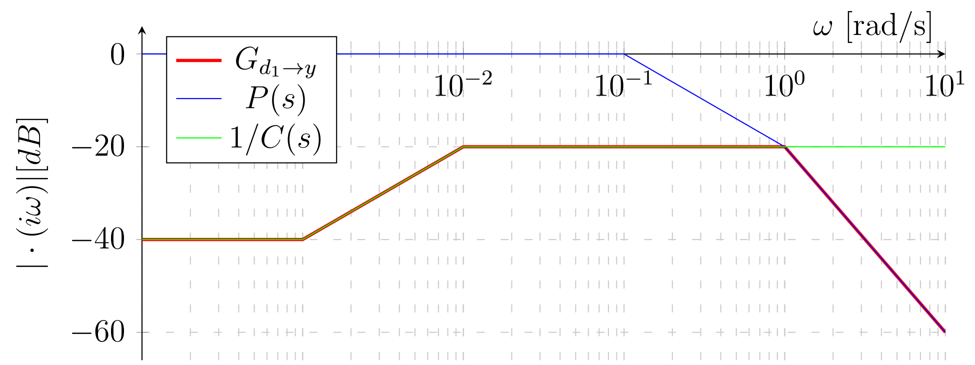


Dai diagrammi di Bode ricaviamo che la pulsazione di taglio $\omega_c = 1$ (siccome è in corrispondenza di un polo sarà un pochino meno), e quindi il margine di fase $\varphi_m \sim 180 - (90° + 45°) \sim 45° > 0$. Siccome sono rispettate le ipotesi di applicabilità del criterio di Bode (i poli di $L(s)$ sono tutti stabili, il suo diagramma di Bode del modulo parte sopra l'asse 0 dB e lo taglia una volta sola, il guadagno generalizzato e il margine di fase sono positivi), possiamo dedurre che il sistema di controllo è esternamente stabile.

La funzione di trasferimento $G_{d_2 \to y}$ dal disturbo sull'uscita d_2 all'uscita ha in linea di andata 1 e in linea di retroazione $L(s)$. Il suo diagramma di Bode del modulo si otterrà prendendo il minimo tra 1 e $1/L$, ovvero



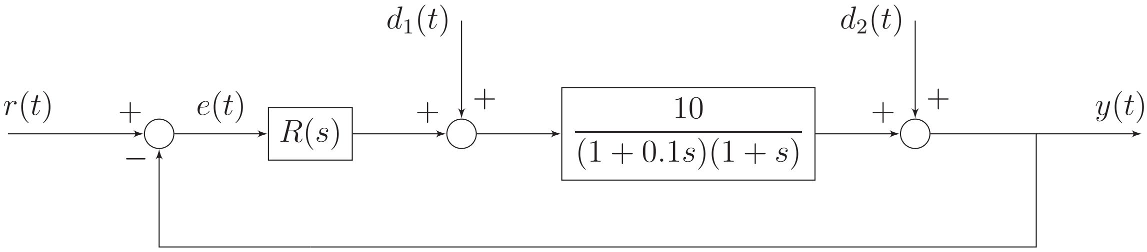
Per tracciare invece il diagramma di Bode $G_{d_1 \to y}$ dal disturbo sull'attuazione d_1 all'uscita in linea di andata abbiamo la funzione di trasferimento $P(s)$ (processo) del secondo blocco, mentre in linea di retroazione abbiamo la funzione di trasferimento $C(s)$ (controllore) del primo blocco. Il diagramma di Bode del modulo di $G_{d_1 \to y}$ si otterrà quindi prendendo il minimo tra $P(s)$ e $1/C(s)$, ovvero



Per rispondere all'ultimo quesito utilizziamo il teorema della risposta in frequenza, leggendo i dati dai diagrammi di Bode che abbiamo tracciato.
Se $r(t) = d_1(t) = d_2(t) = 1$, $|G_{r\to y}(0)| = 1$, mentre $|G_{d_1\to y}(0)| = |G_{d_2\to y}(0)| = 0.01$, per cui $|y_\infty(t)| = 1.02$.
Se $r(t) = d_1(t) = d_2(t) = 10sin(0.02)$, $|G_{r\to y}(0.02)| = 1$, mentre $|G_{d_1\to y}(0.02)|$=$|G_{d_2\to y}(0.02)| = 0.1$, per cui $|y_\infty(t)| = 1.2$.

Esercizio 4

Dato il sistema di controllo



Progettare due controllori $R(s)$ il più semplici possibile tali per cui:

1. $\varphi_m \geq 26.6°$, l'uscita sia uguale al riferimento nel caso di riferimenti e disturbi costanti e la pulsazione di taglio sia la più grande possibile.

2. Il sistema retroazionato sia esternamente stabile, il margine di fase sia almeno 30° e il sistema sia robusto ad un ritardo non modellizzato di 5 millesimi di secondo, l'uscita sia uguale al segnale di riferimento ed un eventuale disturbo sul processo d_1 sia cancellato se costante e comunque sempre attenuato ad almeno un decimo.

Calcolare, per i due controllori appena progettati, l'effetto sull'uscita di d_1 e d_2 nel caso in cui essi siano segnali di ampiezza unitaria e con pulsazione pari a 0, 1, 10, 100.

Affinchè l'uscita sia uguale al riferimento nel caso di disturbi costanti, nell'anello abbiamo bisogno di un polo nell'origine. Il regolatore più semplice possibile è quindi del tipo $R(s) = \mu/s$. In questo caso, la funzione d'anello

$$L(s) = \frac{10\mu}{s}\frac{1}{(1+s)(1+0.1s)}.$$

Il requisito sul margine di fase ci dà un upper-bound al valore della pulsazione di taglio. In particolare

$$\varphi(\omega_c) = -90 - atan(\omega_c) - atan(0.1\omega_c) < 180 - 26.6$$

Per risolvere questa equazione (con due arcotangenti) possiamo procedere un po' a tentativi (per bisezione) oppure cercare su Wikipedia le formule di prostaferesi dell'arcotangente (soluzione ovviamente non percorribile in sede d'esame), che recitano

$$atan(\alpha) + atan(\beta) = atan\left(\frac{\alpha+\beta}{|1-\alpha\beta|}\right)$$

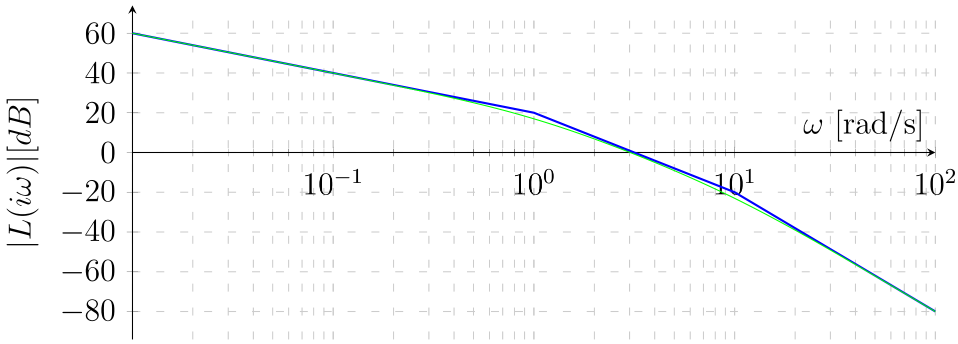
quindi nel nostro caso

$$atan\left(\frac{1.1\omega_c}{|1-0.1\omega_c^2|}\right) = -243.4° \sim atan(2)$$

Da cui, supponendo $\omega_c < 10$ (poi lo verificheremo) otteniamo

$$0.2\omega_c^2 + 1.1\omega_c - 2 = 0 \Rightarrow \omega_c = \frac{-1.1 + \sqrt{1.1^2 + 1.6}}{0.4} = 1.44.$$

A questo punto dobbiamo ricavare μ in modo tale da avere pulsazione di taglio $\omega_c = 1.44$. Per far questo tracciamo il diagramma di Bode della funzione d'anello $L(s)$ com $\mu = 1$, ricordandoci che cambiare μ significa alzare o abbassare il diagramma di Bode di μ_{dB}.



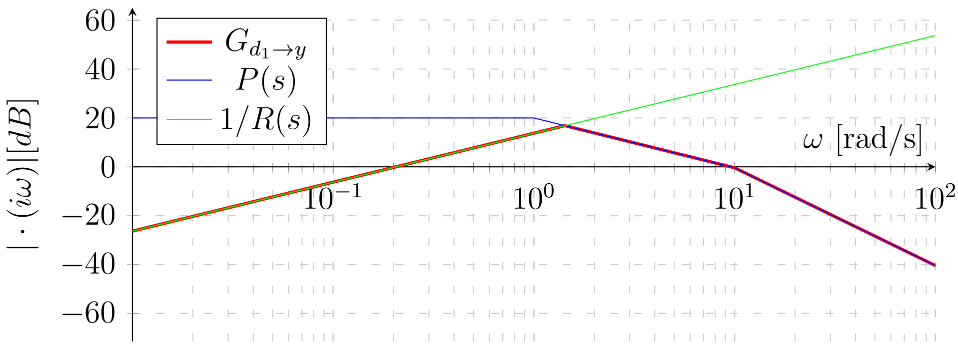
Dal diagramma di Bode leggiamo che se $\mu = 1$ $\omega_c \sim 3$, da cui deduciamo che possiamo alzare ancora il diagramma di Bode se vogliamo massimizzare la pulsazione di taglio. Per sapere di quanto risolviamo la proporzione

$$20 + \mu_{dB} - 40dB/dec(log_{10}(\omega_c)) = 0 \Rightarrow \mu_{dB} = -20 + 40log_{10}(\omega_c) \sim -13.7$$

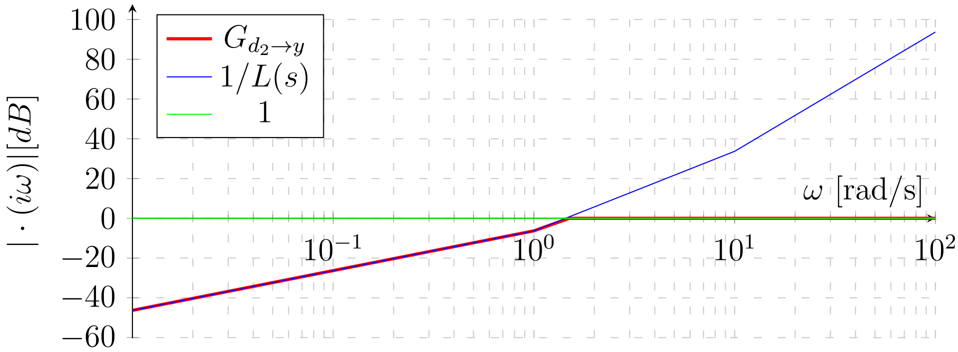
da cui ricaviamo $\mu = 10^{-13.7/20} \sim 0.2$.

Per rispondere alla seconda richiesta, ovvero calcolare l'effetto sull'uscita dei distubi, dobbiamo calcolare i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento dai disturbi all'uscita.

Per $G_{d_1 \to y}$, in linea di andata abbiamo il processo $P(s)$, mentre in linea di retroazione abbiamo $R(s)$: $G_{d_1 \to y} = P/(1 + PR)$, e quindi il suo diagramma di Bode si trova scegliendo il minimo tra P e $1/R$



Per $G_{d_2 \to y}$, in linea di andata abbiamo 1, mentre in linea di retroazione abbiamo $L(s)$, quindi il suo diagramma di Bode si trova scegliendo il minimo tra 1 e $1/L$



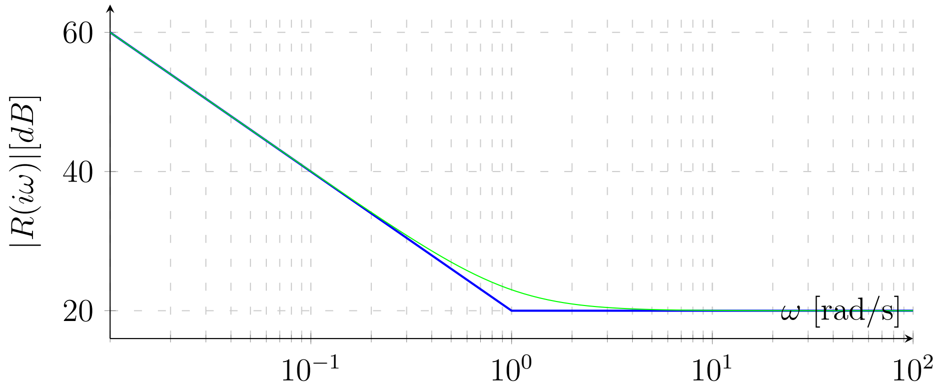
Per cui:

- $\omega = 0$: $y_\infty(t) = 0$, come da progetto i disturbi vengono cancellati
- $\omega = 1$: $|y_\infty(t)| = 4.84 + 0.48$, ovvero il disturbo sul processo viene amplificato, mentre quello sull'uscita viene dimezzato
- $\omega = 10$: $|y_\infty(t)| = 0.1 + 1$, ovvero il disturbo di processo viene decimato (è il passaggio tramite il processo stesso che lo decima!), mentre quello sull'uscita passa inalterato (il nostro controllore non è in grado di rispondere a quelle frequenze)
- $\omega = 100$: $|y_\infty(t)| = 0.001 + 1$, ovvero il disturbo di processo viene ridotto di mille (è il passaggio tramite il processo stesso che lo riduce!), mentre quello sull'uscita passa inalterato (il nostro controllore non è in grado di rispondere a quelle frequenze)

Per rispettare le specifiche richieste al punto 2, ancora una volta il nostro regolatore avrà bisogno di avere un polo nell'origine (nella linea di retroazione c'è $R(s)$, che quindi nel diagramma di Bode di $G_{d_1 \to e}$ viene ribaltato e poi si prende il minimo...) perchè il disturbo d_1 costante venga cancellato. Inoltre, affinchè il sistema retroazionato sia robusto ad un ritardo non modellizzato di $\tau = 0.005$ secondi è necessario che, alla pulsazione di taglio, il margine di fase sia tale da compensare l'effetto del ritardo. Ad esempio, se la pulsazione di taglio del mio regolatore fosse $\omega = 1$, la perdita di fase dovuta al ritardo sarebbe $\omega\tau = 0.005$ rad $= 0.28°$, per cui $\varphi_m > 0.28°$. Infine, se voglio che il disturbo sia sempre attenuato di almeno un decimo, ho bisogno che $1/R(s) < -20dB$.
Mettendo insieme tutti questi ingredienti, un possibile regolatore potrebbe essere

$$R(s) = \frac{10}{s}(1 + s)$$

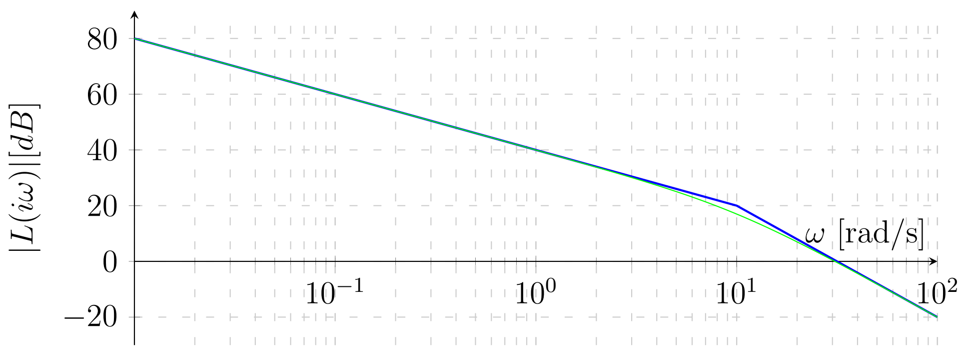
(si noti che è stato utilizzato lo zero del regolatore per cancellare il polo più lento del sistema). Il regolatore proposto sicuramente rispetta i requisiti rispetto alla cancellazione dei disturbi, controlliamo che il sistema retroazionato abbia il margine di fase richiesto, difatti il suo diagramma di Bode è



che è sempre sopra a 20 dB (quindi il suo ribaltato è sempre sotto i 20 dB).

Tracciamo il diagramma di Bode della funzione d'anello

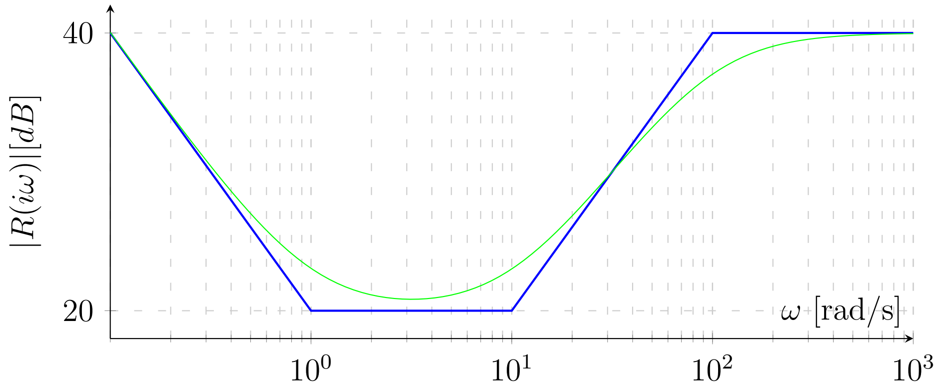
$$L(s) = \frac{100}{s}\frac{1}{1+0.1s}$$



La pulsazione di taglio si può leggere dal diagramma, circa 30 rad/s, e col regolo dell fasi calcoliamo $\varphi(\omega_c) = -90° - 71° = -161° \Rightarrow \varphi_m = 19°$, che non rispetta la specifica $\varphi_m > 30°$.Si noti invece che la specifica dovuta alla robustezza al ritardo è soddisfatta, difatti la fase che perdiamo dovuta al ritardo è $\omega_c\tau = 30\ rad/s\ 0.005\ s = 8.6° < \varphi_m$. Volendo migliorare il margine di fase rispettando il vincolo che il diagramma di Bode del regolatore sia sempre sopra i 20 dB (molto stringente), dobbiamo utilizzare un regolatore con prestazioni migliori, che abbia quindi qualche zero in più in bassa frequenza (e quindi qualche polo in più in alta frequenza).
Avendo due zeri a disposizione, una possibile soluzione è cancellare con il regolatore la dinamica del sistema, ovvero

$$R(s) = \frac{10}{s}\frac{(1+s)(1+0.1s)}{(1+0.01s)}.$$

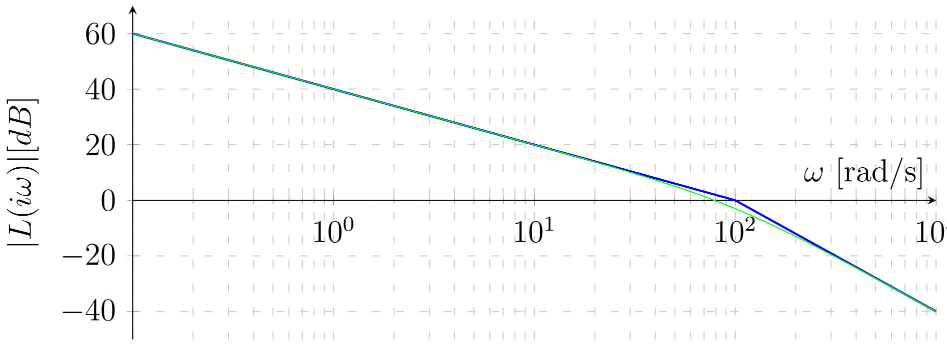
Il diagramma di Bode del regolatore è



che rimane sempre sopra 20 dB, mentre il diagramma di Bode della funzione d'anello, che con questo regolatore diventa

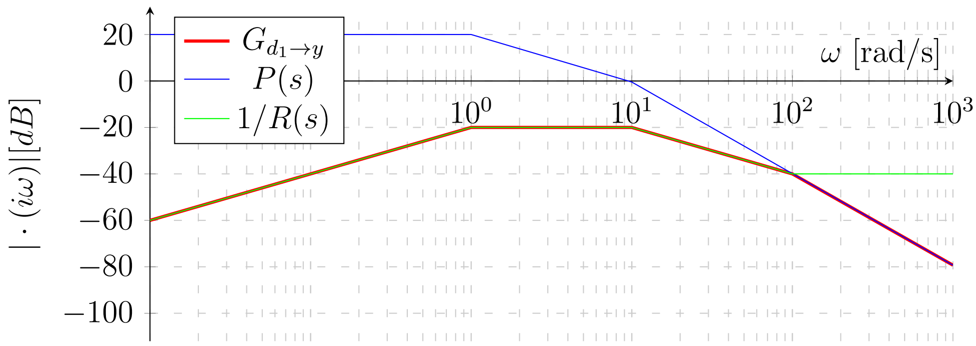
$$L(s) = \frac{100}{s}\frac{1}{(1+0.01s)}$$

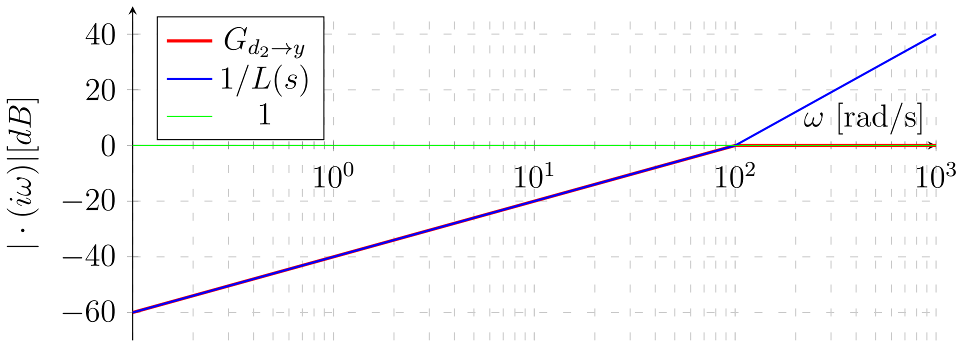
ha diagramma di Bode



per cui $\omega_c = 100$ e $\varphi(\omega_c) = -90° - 45° \Rightarrow \varphi_m = 45° > 30°$. Controlliamo infine che il sistema sia robusto al ritardo: la fase persa a causa del ritardo è $\omega_c\tau = 100\ rad/s\ 0.005\ s = 28.6° < \varphi_m$.

Per rispondere alla seconda richiesta, ovvero calcolare l'effetto sull'uscita dei disutbi, dobbiamo calcolare i diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento dai disturbi all'uscita.





Da cui:

- $\omega = 0$: $y_\infty(t) = 0$, come da progetto i disturbi vengono cancellati
- $\omega = 1$: $|y_\infty(t)| = 0.1{+}0.01$, ovvero il disturbo sul processo viene decimato (come da progetto), mentre quello sull'uscita viene ridotto dal regolatore a 1/100.
- $\omega = 10$: $|y_\infty(t)| = 0.1 + 0.1$, ovvero entrambi i disturbi vengono decimati (si noti che questo regolatore ha prestazioni–e costi– maggiori del precedente)
- $\omega = 100$: $|y_\infty(t)| = 0.001 + 1$, ovvero il disturbo di processo viene ridotto di mille (come prima, è il passaggio tramite il processo stesso che lo riduce!), mentre quello sull'uscita passa inalterato (il nostro controllore non è in grado di rispondere a quelle frequenze)