Lez 02

giovedì 17 febbraio 2022 18:23

sistemi lineari

$x_i(t)$

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}_i(t)\\ x_i(t+1)\end{array}\right. = f_i\big(x(t), u(t), t\big)$$

$$= \overbrace{a_{i1}}^{a_{i1}(t)} x_1(t) + a_{i2}\, x_2(t) + \dots + a_{in}\, x_n(t) +$$

$$+ b_{i1}\, u_1(t) + \dots + b_{im}\, u_m(t) \quad , \; i = 1, \dots, n$$

$$= [a_{i1} \dots a_{in}]\, x(t) + [b_{i1} \dots b_{im}]\, u(t)$$

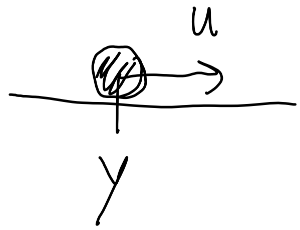
$$y_i(t) = c_{i1}\, x_1(t) + \dots + c_{in}\, x_n(t) +$$

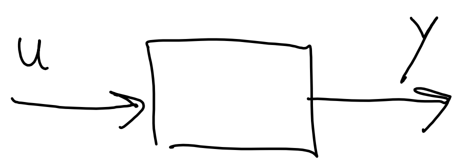
$$+ d_{i1}\, u_1(t) + \dots + d_{im}\, u_m(t) \quad , \; i = 1, \dots, p$$

$$= [c_{i1} \dots c_{in}]\, x(t) + [d_{i1} \dots d_{im}]\, u(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = [b_{ij}] \, , \; C = [c_{ij}]$$

$$D = [d_{ij}]$$





x_1 = posizione $\Rightarrow$ $y(t) = g(x(t), u(t), t) = x_1(t)$

$$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}_1 \cancel{(t)} = \underbrace{\text{velocità}}_{\parallel \; x_2 \cancel{(t)}} = f(x_1(t), u(t), t) = \;?$$

$$\dot{x}_1 = f_1(\underbrace{x_1, x_2, u, t}) = x_2$$

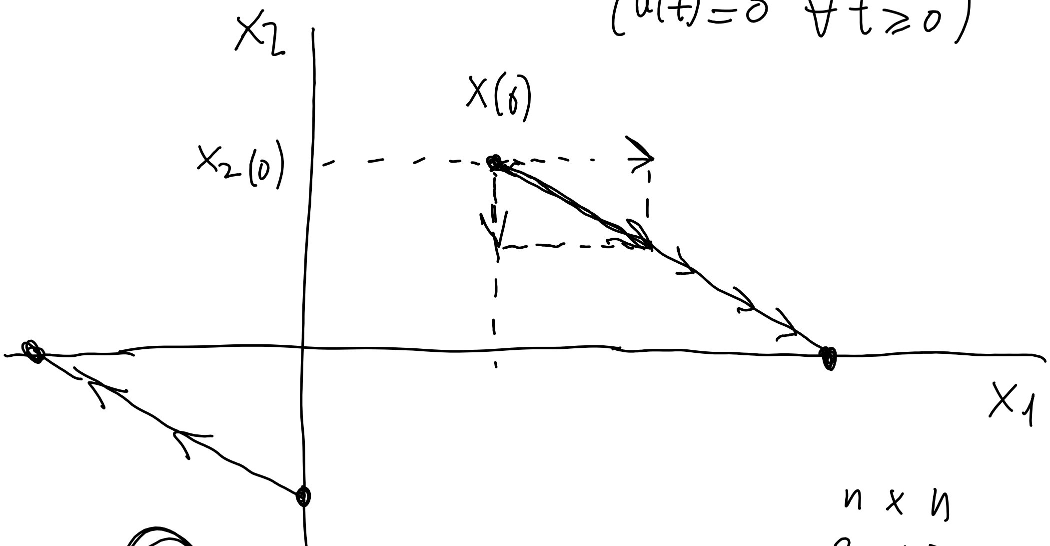
Newton

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u, t) = \text{accelerazione} \overset{\downarrow}{=} \frac{u - h x_2}{m}$$

parametri costitutivi del sistema (massa, coeff. d'attrito, ...)

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$ è una buona def. di stato

$(u(t) = 0 \;\; \forall t \geq 0)$



$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(u - h x_2)$

$n \times n$
2×2

$n \times m$
2×1

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dots \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \end{bmatrix}$

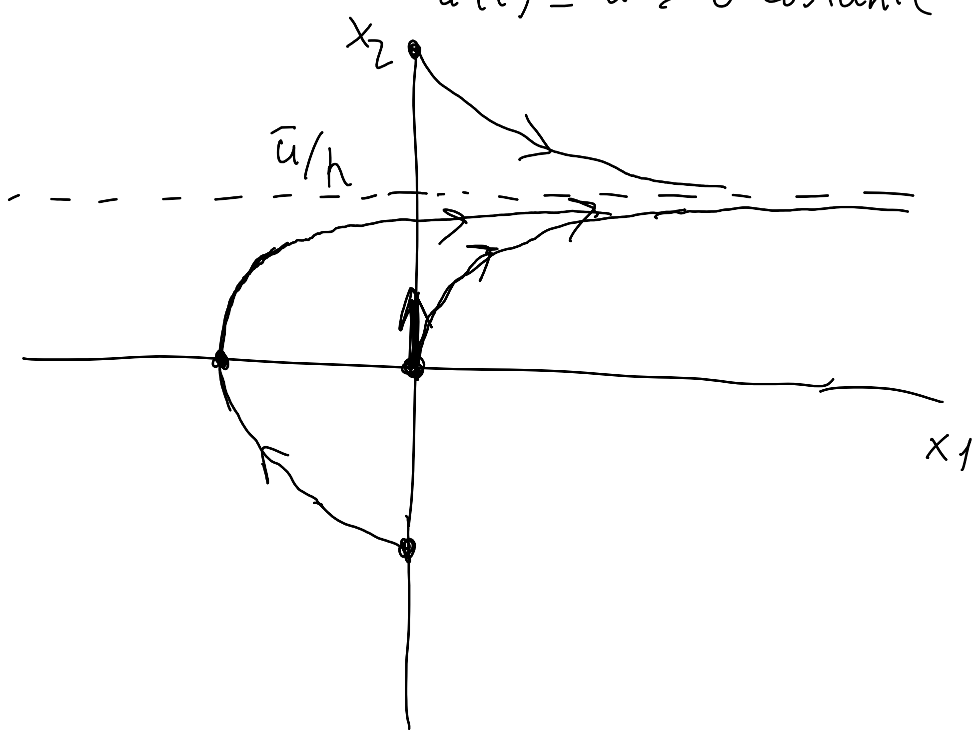
$m(u - h x_2)$ $\quad\quad \begin{bmatrix} 0 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} \quad\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \end{bmatrix}$

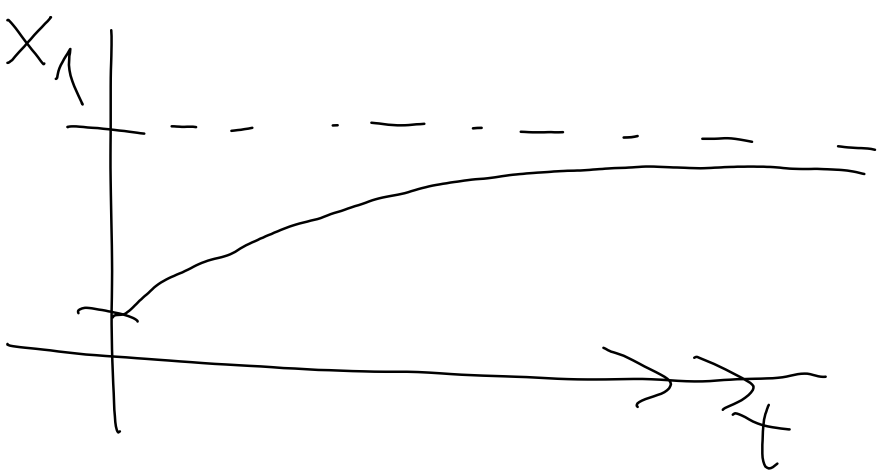
$y = x_1$ $\quad\quad c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

$\dot{x} = Ax + bu$

$y = c^T x + du$ $\quad\quad p \times n \;\; (1 \times 2) \quad\quad p \times m \;\; 1 \times 1$

$u(t) = \bar{u} > 0$ costante





Allevamento di Fibonacci

$u(t)$: prelievo di coppie adulte (a fine anno)

$y(t)$: totale coppie nell'anno t

$x_1(t)$: num di coppie giovani nell'anno t

$x_2(t)$: " " " adulte " " "

$$\cancel{x_1(t)} + x_2(t) - \cancel{x_1(t)}$$

$$x_1(t+1) = x_2(t)$$

$$x_2(t) + x_1(t) - u(t)$$

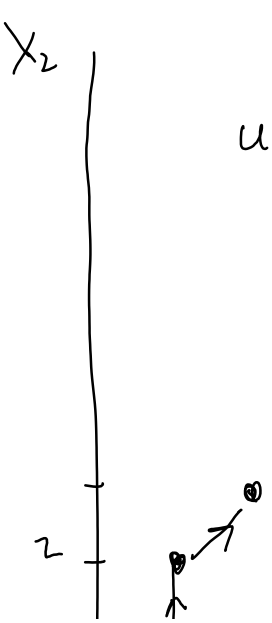
$$x_2(t+2) = x_1(t) + x_2(t) - u(t)$$

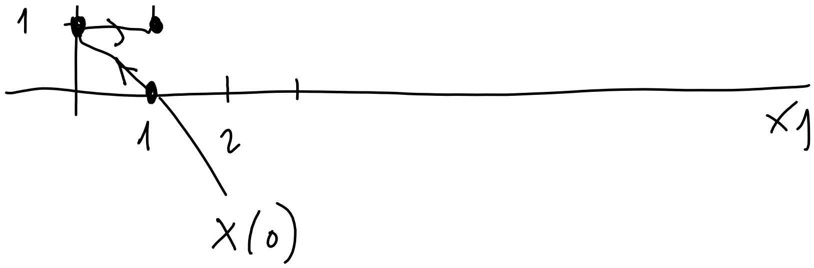
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

eq. stato a t.d. $\Rightarrow$ "fotografia a $t+1$"

$\Rightarrow$ $x(t)$ + aggiunta − prelievo

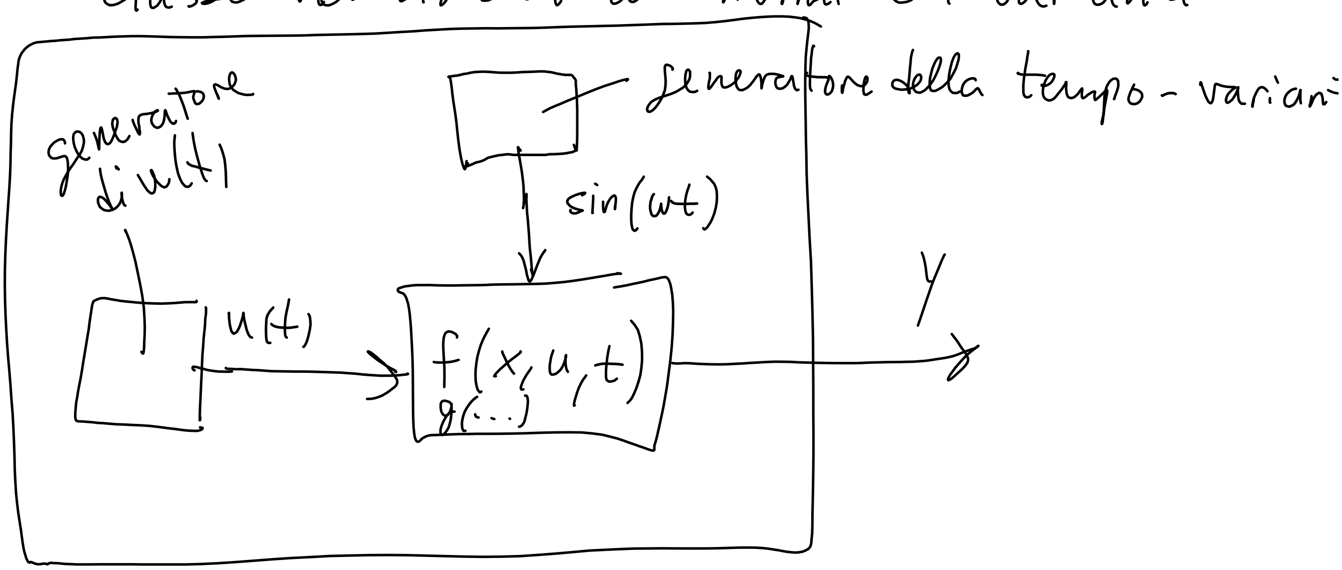
$u(t) = 0 \ \forall t \geq 0$





t	0	1	2	3	4	5	6	...
x_1	1	0	1	1	2	3	5	...
x_2	0	1	1	2	3	5	8	...
y	1	1	2	3	5	8	13	...

Classe dei sistemi autonomi e invarianti

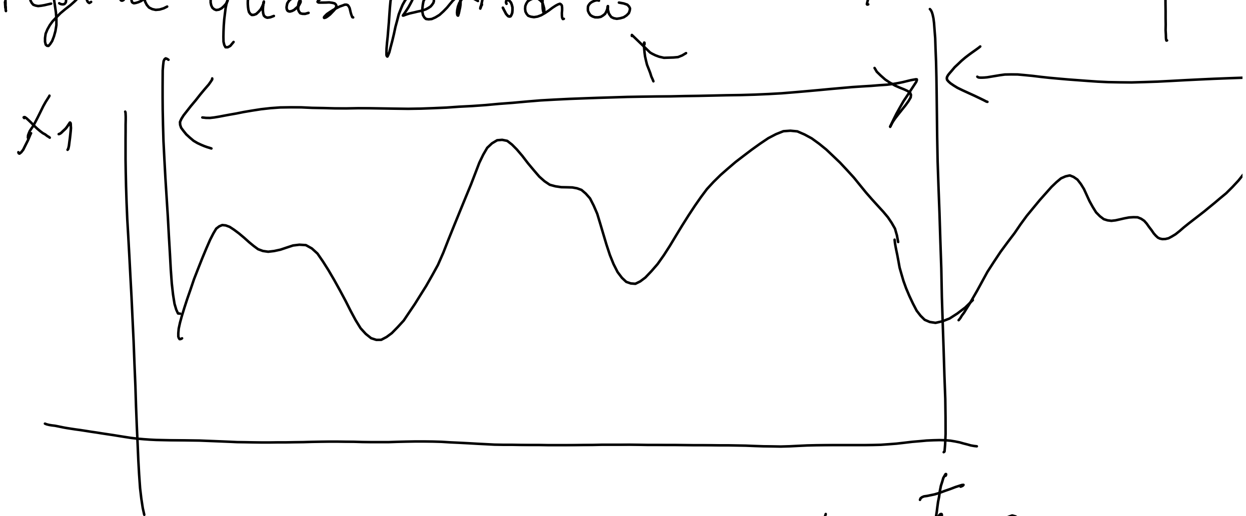


$$z = \begin{bmatrix} x \\ \text{stato dei generatori} \end{bmatrix}$$

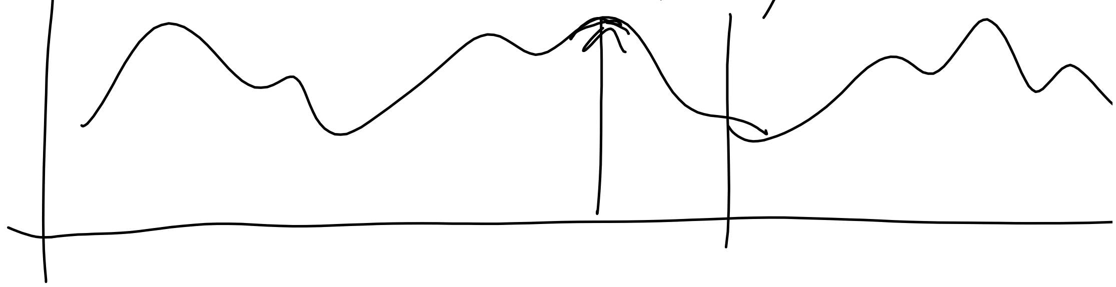
$\downarrow$ stato "allargato"

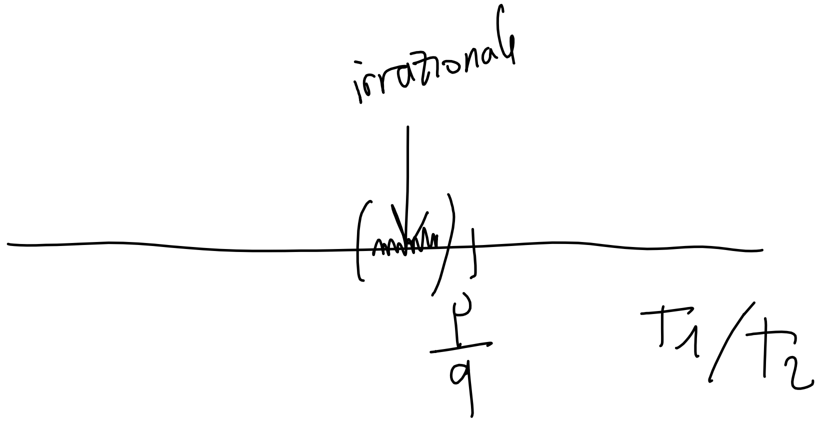
regime quasi periodico

$T_1/T_2 = p/q$ (

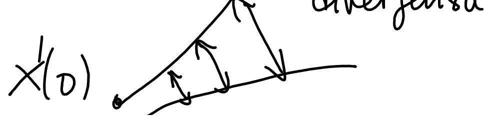


$T_1/T_2 \notin \mathbb{Q}$ irrazion





Regime caotico



$X''(0)$

Lez 03

giovedì 24 febbraio 2022 14:50

$$\dot{x} = \underbrace{-\frac{\sigma}{c}}_{a} x + \underbrace{\frac{\sigma}{c}}_{b} d$$

$$x(t) = e^{at} x(0) + \int_0^t \underbrace{e^{a(t-\tau)} b}\, d(\tau)\, d\tau$$

cost

Esempio di sistema non-lineare

Modello epidemiologico "standard": S

$$\dot{S} = -\beta I S + wR$$

β: trans

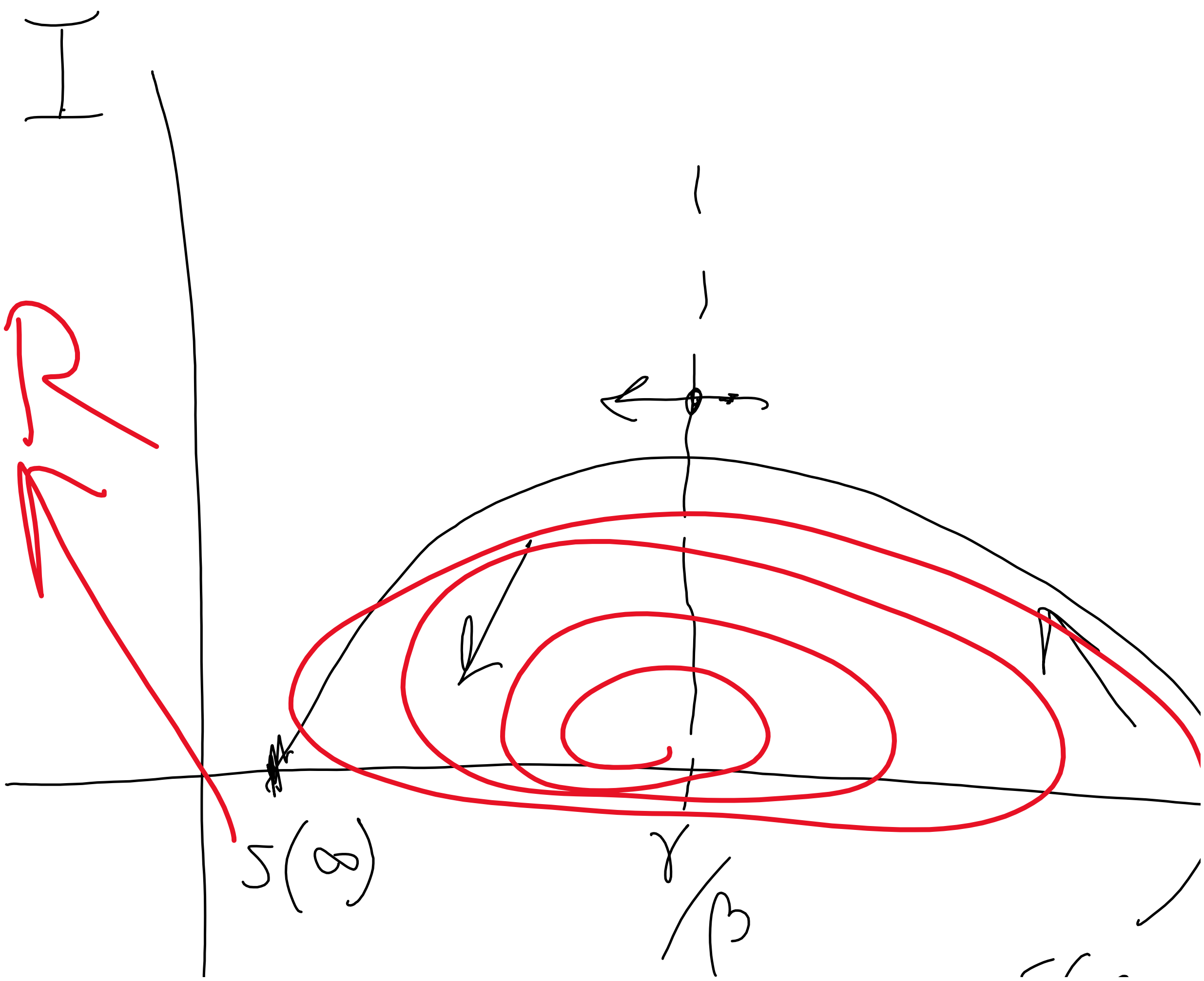
I $\dot{}$

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = \dot{I} = \beta I S - \gamma I} \longrightarrow =$$

$$\dot{R} = \gamma I - \omega R$$

$S + I + R = N$ costante

$N = 1 \Rightarrow S, I, R$ sono frazioni d



$s(0) = c$

Lez 04

lunedì 28 febbraio 2022 11:21

$$pI - A = \begin{bmatrix} p-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & \\ -a_{21} & p-a_{22} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & p-a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_A(p) = p^n + \cdots$$

$$\underbrace{\underbrace{[\quad]}_{c^T} \underbrace{[\quad]}_{cof^T}}_{} \underbrace{[\quad]}_{b}$$

$$[\quad] \underbrace{[\quad]}_{b} = 1 \text{ polinomio in } p \text{ di grado al max } n-1$$

$$[k_1 \ 0] \begin{bmatrix} s+k_2 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

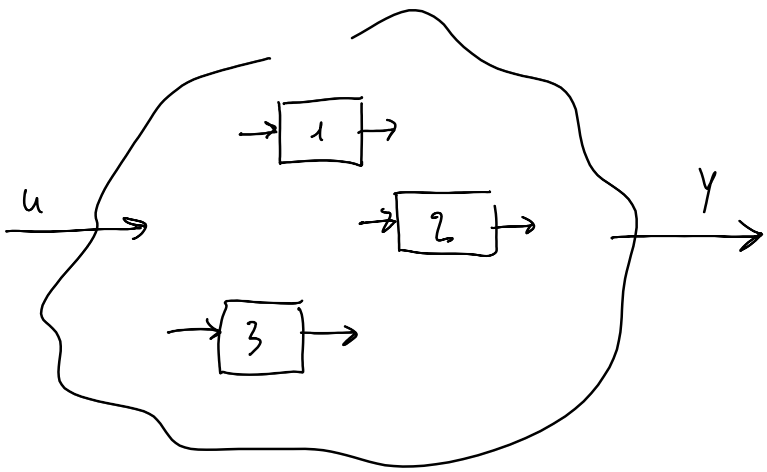
$$\underbrace{\begin{matrix} 0 & s+k_1 \end{matrix}\Big]}\Big[\begin{matrix} 0 \end{matrix}\Big]$$

$$\begin{bmatrix} k_1(s+k_2) & k_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = k_1(s+k_2)$$

Lez 05

martedì 1 marzo 2022 16:34

Aggregati di sottosistemi



$x^{(i)}$: vett. di stato del sistema i

$$x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

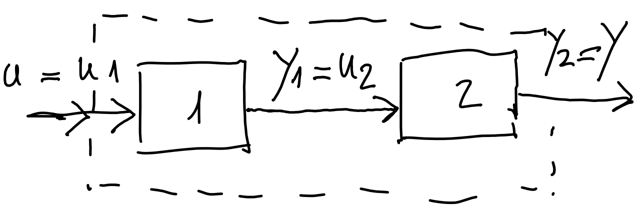
mod. interno
$$px = Ax + bu$$
$$y = c^T x + du$$

ARMA: $D(p)\, y = N(p)\, u$

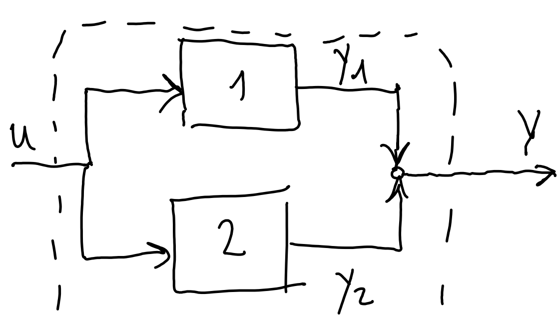
f.d.t.: $G(p) = \dfrac{n(p)}{d(p)}$

3 collegamenti particolari $(m=1, p=1)$

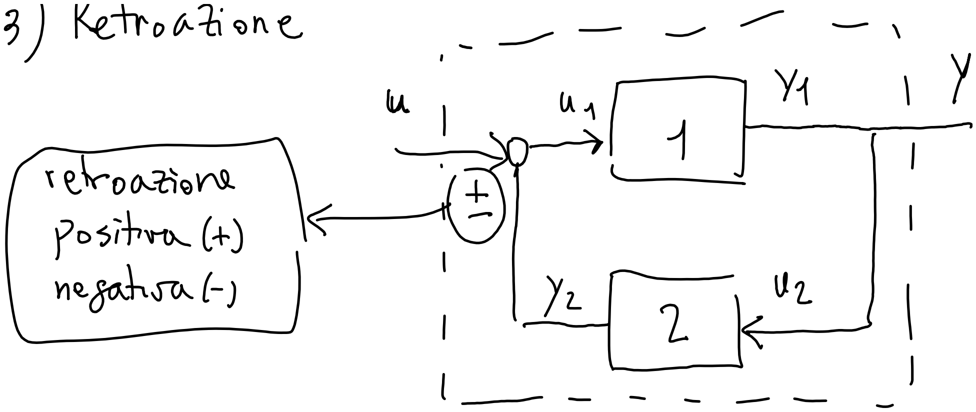
1) Serie



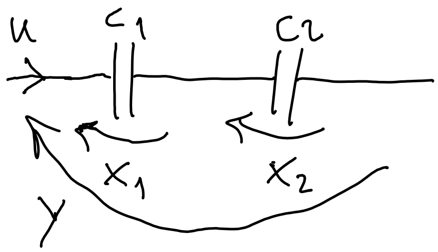
2) Parallelo

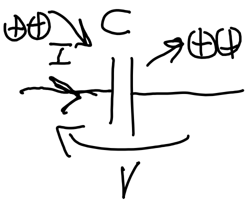


3) Retroazione

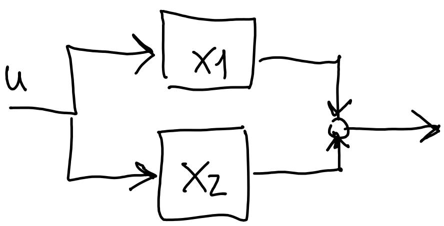


Nota: serie e parallelo tra sistemi dinamici non sempre corrispondono ai collegamenti serie e parallelo dell'elettrotecnica





$$C \dot{V} = I$$



quindi sono due sistemi in parallelo

Serie | mod. interno

$$p x^{(1)} = A_1 x^{(1)} + b_1 u$$

$$p x^{(2)} = A_2 x^{(2)} + b_2 y_1 = A_2 x^{(2)} + b_2 c_1^T x^{(1)} + d_1 b_2 u$$

$$y_1 = c_1^T x^{(1)} + d_1 u$$

$$y = y_2 = c_2^T x^{(2)} + d_2 y_1 = c_2^T x^{(2)} + d_2 c_1^T x^{(1)} + d_1 d_2 u$$

$$\begin{array}{l} n_1\Big\{ \\ n_2\Big\{ \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} p\, x^{(1)} \\ \hline p\, x^{(2)} \end{bmatrix}}_{p x} = \begin{array}{l} n_1\Big\{ \\ n_2\Big\{ \end{array} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline b_2 c_1^T & A_2 \end{array}\right]}_{A} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \hline x^{(2)} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \hline d_1 b_2 \end{bmatrix}}_{b} u$$

$$\begin{array}{c} \\ i \rightarrow \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ b_{2i} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\substack{b_2 \\ (n_2 \times 1)}} \; \begin{array}{c} j \\ \downarrow \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \cdots & c_{1,j} & \cdots \end{bmatrix}}_{\substack{c_1^T \\ (1 \times n_1)}} \end{array} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & b_{2i} \cdot c_{1j} & \cdots \\ & & \end{bmatrix}$$

$$y = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} d_2 c_1^T & c_2^T \end{array}\right]}_{c^T} \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 d_2 \end{bmatrix}}_{d} u$$

ARMA

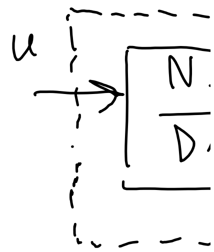
sist. 1) $D_1 y_1 = N_1 \overset{u_1}{\overset{\shortparallel}{u}}$ sist 2) $D_2 \overset{y_2}{\overset{\shortparallel}{y}} = N_2 \overset{u_2}{\overset{\shortparallel}{y_1}}$

obiettivo: $D y = N u$

moltiplico l'ARMA del s. 2 per D_1

$$D_1 D_2 y = N_2 D_1 y_1 = N_1 N_2 u$$

F.d.t. $G = \dfrac{N_1 N_2}{D_1 D_2} = G_1 \cdot G_2$ $\boxed{G = G_1 G_2}$



1) $D = D_1 D_2$, $N = N_1 N_2$?

Si se N_2 e D_1 sono coprimi, altrimenti

$N_2 = (p-\lambda)\tilde{N}_2$, $D_1 = (p-\lambda)\tilde{D}_1$

moltiplico l'ARMA del s.2 per $\tilde{D}_1$ invece che per D_1

$$\underbrace{\tilde{D}_1 D_2}_{D} y = \underbrace{\tilde{N}_2 (p-\lambda)}_{N_2} \tilde{D}_1 \, y_1 = \underbrace{\tilde{N}_2 N_1}_{N} u$$

Conclusione: le radici in comune tra D_1 e N_2 NON vanno u

2) restano radici in comune ?

(oltre a quelle eventualmente in comune nei singoli s

Si, sono quelle in comune tra N_1 e D_2

Parallelo

$$p x^{(1)} = A_1 x^{(1)} + b_1 u$$
$$p x^{(2)} = A_2 x^{(2)} + b_2 u$$
$$y = y_1 + y_2 = c_1^T x^{(1)} + d_1 u + c_2^T x^{(2)} + d_2 u$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right] \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$c^T = \left[\begin{array}{c|c} c_1^T & c_2^T \end{array}\right] \qquad d = \left[d_1 + d_2 \right]$$

---

matrici triangolari e diagonali "a blocchi"

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & & & A_4 \end{bmatrix}$$

diagonale di blocchi quadrati

$$\text{autovalori}(A) = \text{unione di quelli di } A_1, A_2, \dots$$

ARMA

5.1) $D_1 Y_1 = N_1 u$ 5.2) $D_2 Y_2 = N_2 u$

$$Y = Y_1 + Y_2$$

$$D_1 D_2 Y = D_2 \, D_1 Y_1 + D_1 \, D_2 Y_2 = \left(N_1 D_2 + D_1 N_2 \right) u$$

$D = ?$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $N = ?$

1) Si, se D_1 e D_2 sono coprimi, altrimenti

$D_1 = (p-\lambda)\tilde{D}_1$, $D_2 = (p-\lambda)\tilde{D}_2$

allora, basta moltiplicare per $\tilde{D}_1 \tilde{D}_2 (p-\lambda)$ invece che per

$$\underbrace{\tilde{D}_1 \tilde{D}_2 (p-\lambda)}_{D} y = \tilde{D}_2 \underbrace{(p-\lambda)\tilde{D}_1}_{D_1} y_1 + \tilde{D}_1 \underbrace{(p-\lambda)\tilde{D}_2}_{D_2} y_2 = (\underbrace{N_1\tilde{D}_2 +}_{N}$$

$$G = \frac{N_1 D_2 + D_1 N_2}{D_1 D_2} = \frac{N_1}{D_1} + \frac{N_2}{D_2} = G_1 + G_2$$

2) Ci possono essere radici in comune tra N e D?
(oltre a quelle in comune nei singoli sottosistemi)

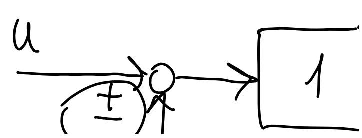
Si, se λ, oltre ad essere radice in comune a D_1 e D_2 è anch

$N_1\tilde{D}_2 + \tilde{D}_1 N_2$

(fatto molto particolare)

Retroazione

$$p x^{(1)} = A_1 x^{(1)} + b_1 (u \pm y_2)$$



$$p x^{(2)} = A_2 x^{(2)} + b_2 y$$

retroaz pos. o neg.

$$y = c_1^T x^{(1)} + d_1 (u \pm y_2)$$

$$y_2 = c_2^T x^{(2)} + d_2 y$$

$$y = c_1^T x^{(1)} + d_1 \left(u \pm c_2^T x^{(2)} \pm d_2 y\right)$$

$$(1 \mp d_1 d_2)\, y = \underbrace{c_1^T x^{(1)} \pm d_1 c_2^T x^{(2)} + d_1 u}$$

$$y = \frac{1}{1 \mp d_1 d_2} \left(\cdots \right)$$

$1 \mp d_1 d_2 \rightarrow$ supposta $\neq 0$ (altrimenti c'è un assurdo nel mo…
ovvero un "anello algebrico (istantan…

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 + \frac{d_2}{1 \mp d_1 d_2} b_1 c_1^T & b_1 c_2^T + \frac{d_1 d_2}{1 \mp d_1 d_2} \ \text{t…} \\ \hline \frac{b_2 c_1^T}{1 \mp d_1 d_2} & A_2 \pm \frac{d_1}{1 \mp d_1 d_2} b_2 \ldots \end{array}\right.$$

$$c^T = \left[\; \ldots \; \middle| \; \ldots \right.$$

ARMA

5.1) $D_1 y = N_1(u \pm y_2)$ 5.2) $D_2 y_2$

moltiplico per D_2

$D_1 D_2 y = N_1 D_2 u \pm N_1 D_2 y_2 = N_1 D$

$\underbrace{(D_1 D_2 \mp N_1 N_2)}_{} y = \underbrace{N_1 D_2}_{} u$ $\Big((1 \pm d_1 d_2$

1) $D = ?$ $N ?$

$\Big(\frac{D_1 D_2 \mp N_1}{1 \mp d_1 d}$

D

si, se N_1 e D_2 sono coprimi, altrimenti

$N_1 = (p-\lambda)\tilde{N}_1$, $D_2 = (p-\lambda)\tilde{D}_2$

moltiplico per $\tilde{D}_2$ invece che per D_2, ottenendo

$D_1 \tilde{D}_2 y = \tilde{N}_1 \underbrace{(p-\lambda)\tilde{D}_2}_{} (u \pm y_2) = \tilde{N}_1 \tilde{D}_2 (p-$

$$\underbrace{\frac{\left(D_1 \check{D}_2 \mp \tilde{N}_1 N_2\right)}{1 \mp d_1 d_2}}_{D} y = \underbrace{\frac{\tilde{N}_1 \overset{D_2}{\tilde{D}_2} (p-\lambda)}{1 \mp d_1 d_2}}_{N} u$$

2) Ci possono essere radici in comune (oltre a quelle presenti nei singoli sotto-sistemi)

si, se λ, oltre ad essere comune a N_1 e D_2 è

$$G = \frac{N_1 D_2}{D_1 D_2 \mp N_1 N_2} = \frac{\cancel{N_1 D_2} / \cancel{D_1 D_2}}{1 \mp \frac{N_1 N_2}{D_1 D_2}} = \frac{}{1}$$

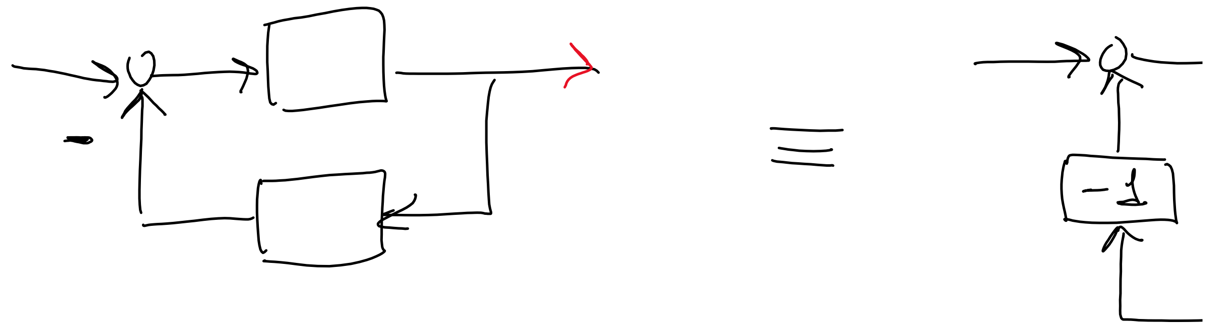
$$\boxed{G = \frac{G_1}{1 \mp G_1 G_2}}$$

ret. pos (+) $\dfrac{G}{1 -}$

ret. neg (−) $\dfrac{G}{1 +}$

$L = G_1 G_2$ è detto "anello" (serie dei blocchi d

Nota: nell'anello c'è anche il segno di retroaz.
nel caso di ret neg



Considerando anche il segno nella definizione di
si può ricordarsi solo la formula della ret. pos.

$$\boxed{G = \frac{G_{andata}}{1 - G_{anello}}}$$

Cancellazioni "critiche"

I) da X a ARMA (genererazione di parti

Serie : D_1 e N_2

Parallelo : D_1 e D_2

Retroaz : N_1 e D_2

II) da ARMA alla F.d.t. (generazione parti

Serie : N_1 e D_2

Parallelo: $N_1\tilde{D}_2 \pm \tilde{D}_1 N_2$ e $(p-\lambda)$ con λ co

Retroazione: $(p-\lambda)$ e $D_1\tilde{D}_2 \mp \tilde{N}_1 N_2$ (

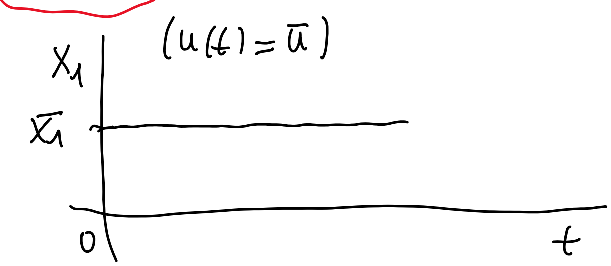
Movimento : soluzione $x(t) = \dots$ dell'eq. di stato

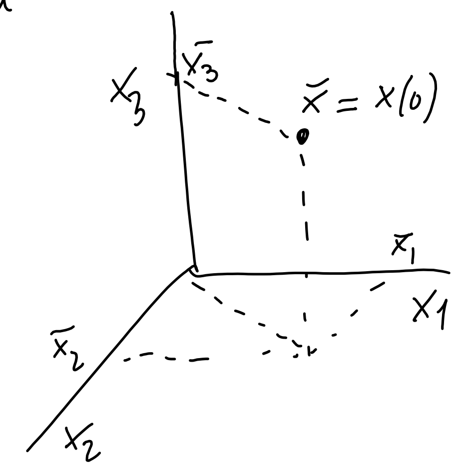
e il conseguente andamento dell'uscita $y(t) = c^T x(t) + d u(t)$

Equilibrio : movimento costante $x(t) = \bar{x}$ a fronte di un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$

$\equiv$

$(\bar{u}, \bar{x})$





t.c.	t.d.
$\dot{x} = Ax + bu$	$x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$
$\boxed{0 = A\bar{x} + b\bar{u}}$ $\quad -A\bar{x} = b\bar{u}$	$\boxed{\bar{x} = A\bar{x} + b\bar{u}}$
1) A è non singolare (non ha autovalori nulli ; $\det A \neq 0$) $\quad \bar{x} = -A^{-1} b\bar{u}$	1) $\underbrace{(I-A)}$ $\bar{x} = b\bar{u}$ $\quad$ $I-A$ è non singolare $\equiv$ A non ha autoval. $= 1$ $\quad \bar{x} = (I-A)^{-1} b\bar{u}$
Nota : se $\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$	
2) A è singolare $\quad$ rango $(A) \leq$ rango $([A \mid b\bar{u}])$	2) A ha autovalori $= 1$ $\quad$ 2.1) $\bar{u} = 0 \rightarrow \infty$ soluz (T

Nota:
autov $(M +$

autov $(-M)$

$=$ ∞ soluzioni

$<$ no soluz.

2.1) $\bar{u}=0 \rightarrow \infty$ soluz. $A\bar{x}=0$

$\bar{x}$ è autovett. di A associato all'autoval $=0$

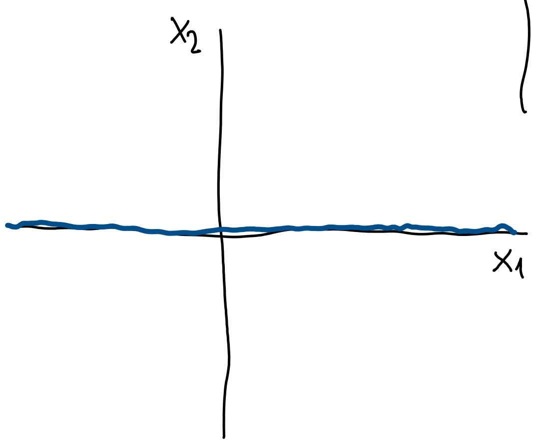
Newton $(\bar{u}=0)$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$\lambda=0$

$A\bar{x}=0, \bar{x}=\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \boxed{\bar{x}_2=0} \\ -\frac{h}{m}\bar{x}_2=0 \end{cases}$$



2.2) $\bar{u}\neq 0$

rango$(A)<$ rango$([A|b])$ No soluz

$\dots = \dots$ ∞ soluz

dove?

se $\bar{x}'$ è soluz $\rightarrow \bar{x}'+\alpha v$ è soluz.

v autovett. associato a $\lambda=0$

$A\bar{x}'+b\bar{u}=0$

$$\underbrace{A(\bar{x}'+\alpha v)}_{\text{è soluz.}} = \underbrace{A\bar{x}'}_{-b\bar{u}}+\alpha \underbrace{Av}_{=0} = -b\bar{u}$$

$\bar{x}$ è autovett di A associato a $\lambda=1$ | $A\bar{x}$ … $A\bar{x}$ …

2.2) $\bar{u}\neq 0$ rango$(I-A)<$ rango$($…

$\dots = \dots$

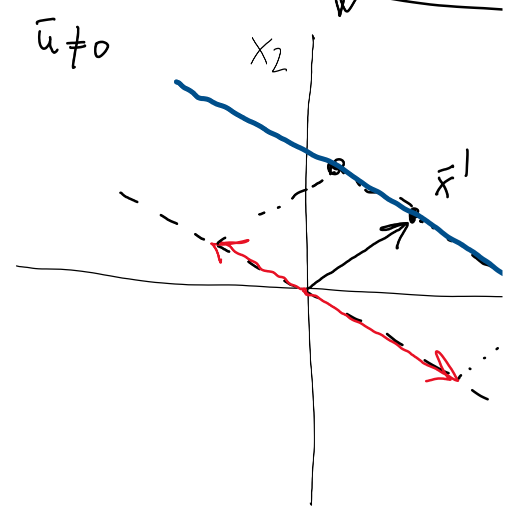
se $\bar{x}'$ è equilibrio $(I-A)$…

anche $\bar{x}'+\alpha v$, con $Av=$…

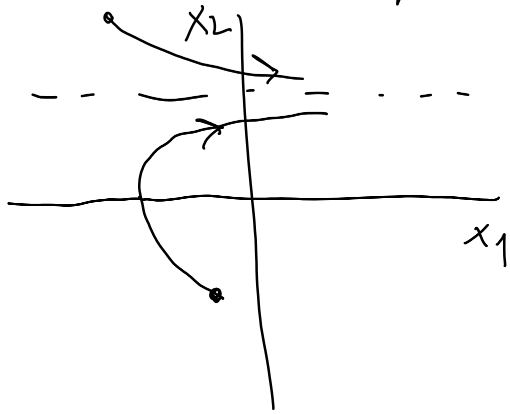
Infatti $\bar{x}'+\alpha v$ soddisfa l'eq…

$$(I-A)(\bar{x}'+\alpha v) = \underbrace{(I-A)\bar{x}'}_{b\bar{u}}+\dots$$

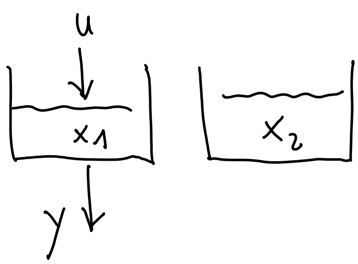
$\bar{u}\neq 0$



Newton $(\bar{u} \neq 0) \rightarrow$ No equilibri



Es con $\bar{u} \neq 0$ e ∞ equilibri



$\dot{x}_1 = u - k_1 x_1$

$\dot{x}_2 = 0$

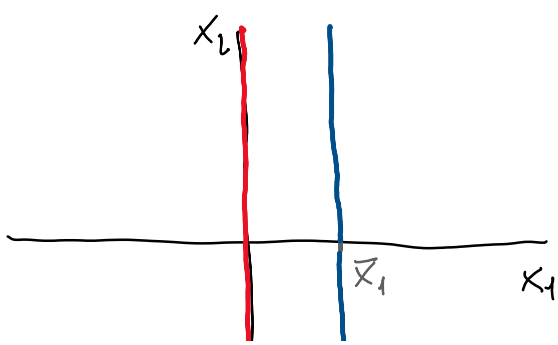
$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\det A = 0$, autov. di $A = \{-k_1, 0\}$

rango$(A) = 1$, rango$([A|b]) = 1$

<u>Equilibri</u>

$$\begin{cases} 0 = \bar{u} - k_1 \bar{x}_1 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \bar{x}_1 = \frac{\bar{u}}{k_1}, \ \bar{x}_2 \text{ qualsiasi}$$



Fibonacci

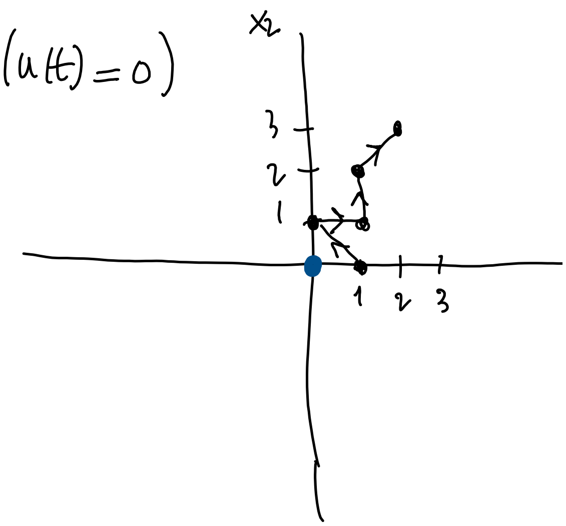
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

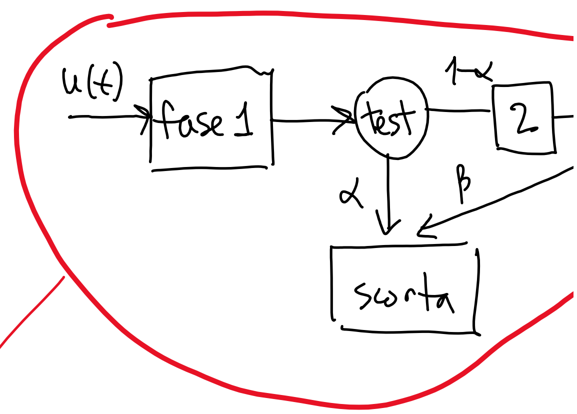
$\bar{x} = (I - A)^{-1} b \bar{u} = \dots$

$\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0$ (unico)

$(u(t) = 0)$



Es: t.d con autov $= 1$ di A, p



Non è uno schema a blocchi ma è una rappresentazione grafi autovettore v, $Av = 0$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} -k_1 v_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} v_1 = 0 \\ v_2 \text{ qualsiasi} \end{matrix}}$$

del processo di produzione

$$x_1(t+1) = u(t)$$
$$x_2(t+1) = (1-\alpha)\, x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = x_3(t) + \alpha\, x_1(t$$
$$y(t) = (1-\beta)\, x_2(t)$$

λ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix} \qquad b =$$

$\bar{u} = 0 \rightarrow \infty$ equilibri sull

$Av = 1v$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 0 = v_1 \\ (1-\alpha) v_1 = v_2 \\ \alpha v_1 + \beta v_2 + \cancel{v_3} = \cancel{v_3} \end{cases} \longrightarrow$$

$\bar{u} \neq 0$, partiamo dall'eq. di e

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = (1-\alpha)x_1 \\ \cancel{\bar{x}_3} = \alpha \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2 + \cancel{\bar{x}_3} \end{cases}$$

Uscita di equilibrio (è anch'essa costante)

$$\bar{y} = c^T \bar{x} + d\bar{u}$$

1) equilibrio unico

$$\bar{y} = \begin{cases} \xrightarrow{t.c.} \underbrace{\left(-c^T A^{-1} b + d\right)}_{\mu\,:\ \text{guadagno del sistema: è il r}} \bar{u} \\ \xrightarrow{t.d.} \left(c^T (I-A)^{-1} b + d\right) \bar{u} \end{cases}$$

$$\boxed{G(p) = \frac{c^T \operatorname{Cof}(p)^T b + d\Delta_A(p)}{\Delta_A(p)} = c^T(pI-}$$

$$\mu \begin{cases} \overset{t.c.}{} & G(0) = G(p)\big|_{p=0} = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} \\ \overset{t.d.}{} & G(1) = G(p)\big|_{p=1} = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} \beta_i}{1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \end{cases}$$

2) se ci sono 0 o ∞ equilibri $\Rightarrow$ il guadagn

Nota: a volte diremo che il guadagno è "∞"

Nota: guadagno degli aggregati serie, parallelo (nel caso 1) - equilibrio unico)

Serie: $G(p) = G_1(p)\, G_2(p) \longrightarrow \mu = \mu$

parallelo: $G(p) = G_1(p) + G_2(p) \longrightarrow \mu = \mu$

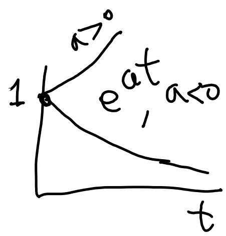
retroaz. pos/neg: $G(p) = \dfrac{G_1(p)}{1 \mp G_1(p)\, G_2(p)} \longrightarrow \mu = \dfrac{}{1 \mp}$

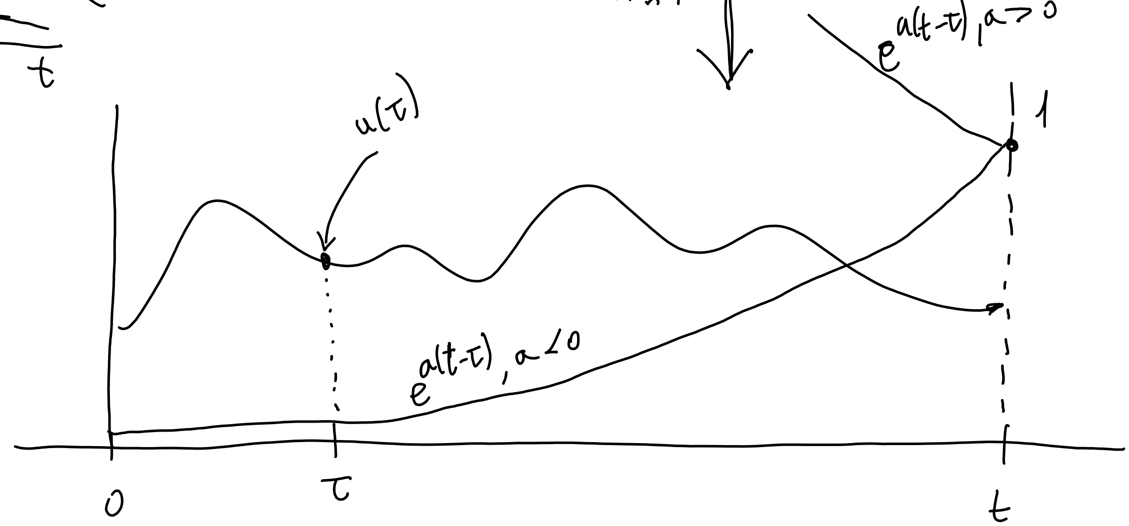
Movimento del sistema $x(t)$ = soluzione dell'eq. di stato dato

cause di movimento
1) lo stato iniziale $x(0)$
2) l'ingresso $u(t)$ da $t=0$ in p.

t.c.

$$x(t) = \underbrace{e^{At}}_{n \times n} x(0) + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} b\, u(\tau)\, d\tau}_{n \times 1}$$





(n = 1)

esponenziale di matrice

$$e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^M = I + M + \frac{M \cdot M}{2} + \frac{M \cdot M \cdot M}{6} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$$

M: matrice quadrata

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \frac{A^3 t^3}{6} + \dots$$

$$x(t) = \underbrace{e^{At}}_{\text{matrice "soluz. fondamentale del problema omogeneo"}} x(0) + \boxed{\int_0^t e^{A(t-\tau)} b\, u(\tau)\, d\tau}$$

matrice "Soluz. fondamentale del problema omogeneo"

matrice di transizione $= \Phi(t)$

---

t.d. eq. stato: $x(t+1) = A x(t) + b u(t)$

$$x(1) = A x(0) + b u(0)$$

$$x(2) = A x(1) + b u(1) = A^2 x(0) + A b u(0) + b u(1)$$

$$\vdots$$

$$x(t) = A^t x(0) + \underbrace{A^{t-1} b u(0)}_{k=0} + \underbrace{A^{t-2} b u(1)}_{k=1} + \dots + A b u(t-2)$$

$$x(t) = \underbrace{A^t}_{\text{matrice di transizione } \Phi(t)} x(0) + \boxed{\sum_{k=0}^{t-1} A^{t-1-k} b u(k)}$$

matrice di transizione

$\Phi(t)$

Nota: $n=1$, $\phi(t) = a^t \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ se $|a| < 1$ il sistema "

cause le c

Unificando t.c. e t.d.

operatore $\begin{cases} \int & \text{t.c.} \\ \sum & \text{t.d.} \end{cases}$

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t)\, x(0)}_{\substack{(n \times 1) \\ \text{movimento libero}}} + \underbrace{\boxed{\Psi(t)\, u_{[0,t)}(\cdot)}}_{\substack{(n \times 1) \\ \text{movimento forzato}}}$$

movimento dell'uscita

$$y(t) = \underbrace{c^T \phi(t)\, x(0)}_{\text{uscita libera}} + \underbrace{c^T \Psi(t)\, u_{[0,t)}(\cdot) + d\,u(t)}_{\text{uscita forzata}}$$

Principio di sovrapposizione delle cause (di movimento) e degli effetti (enunciato: vedi dispensa)

Applichiamolo al calcolo della f.d.t $G_{u_i y}$ (per es da uno sche… $m > 1$ ingressi)

supponendo $u_j(t) = 0$ per tutti i $j \neq i$

esperimento 1 : $u^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^{(1)}(0) = 0$
($i = 1$)

esp. 2 : $u^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^{(2)}(0) = 0$

$\vdots$

esp m - - - - - - -

esp $m+1$ $u^{(m+1)}(t) = 0$, $x^{(m+1)}(0) = x_0$ d'interesse

Cosa succede se applico tutti gli ingressi contemporaneamente e i parte da $x(0) = x_0$?

Risposta: la da il principio di sovrapp. combinando gli $m+1$ esp. tu

$$x(0) = \sum_{k=1}^{m+1} \mathbb{1}\, x^{(k)}(0) = x_0 \quad , \quad u(t) = \sum_{k=1}^{m+1} \mathbb{1} \cdot u^{(k)}(t) = \begin{bmatrix} u_1(\\ u_2(\\ \vdots \\ u_m(\end{bmatrix}$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^{m+1} \mathbb{1}\, y^{(k)}(t)$$

Matrice di transizione $\Phi(t)$ — $\exp(At)$ t.c. ; A^t t.d.

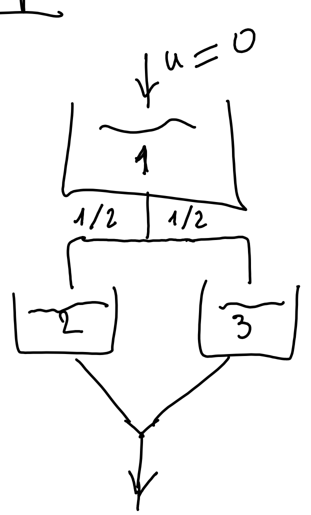
Vediamo un'interpretazione "fisica" dei suoi elementi, attraverso n esperim
(a volte chiamati "metodo delle n-simulazioni") ↓ di movim

esperimento $j = 1, \dots, n$

$$x(0) = \underbrace{v^{(j)}}_{\text{versore dell'asse } j} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j \;\Rightarrow\; x(t) = \Phi(t) \cdot x(0) = \begin{array}{l} i \rightarrow \end{array}\begin{bmatrix} \phi_{i1} & \phi_{i2} & \cdots \\ & & \end{bmatrix}$$

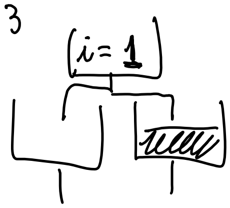
Esempio (t.c., rete di serbatoi)

$$\boxed{\phi_{ij}(t) \text{ è l'andamento di } x_i(t) \text{ durante l'esperimento } j}$$



$\phi_{13}(t) = ?$

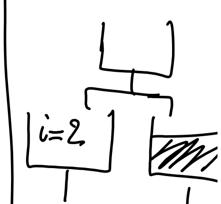
$j = 3$

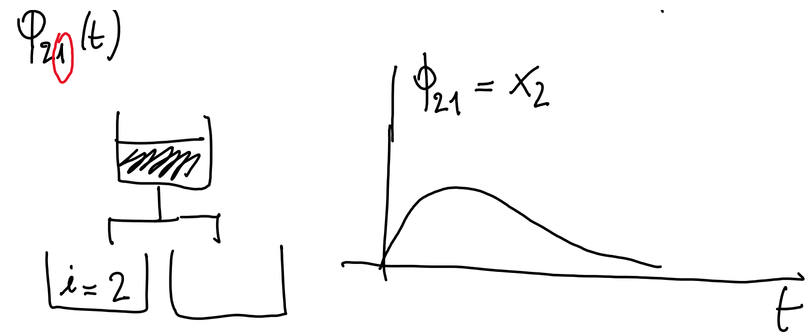


$\phi_{23} = x_2$

$\phi_{13} = x_1$

$\phi_{23}(t) =$





Esempio (d'uso della f. di Lagrange a t. d.) : il <u>mutuo</u> a tasso fisso

D : debito iniziale

A : rata (mensile, pagata a fine mese)

ρ : tasso d'interesse mensile (tasso annuale /12)

N : durata (in mesi), cioè num di rate

$A = ?$

$x(t)$: debito nel mese t, con $x(0) = D$

$$x(t+1) = x(t) + \rho\, x(t) - A = \underbrace{(1+\rho)}_{\substack{a \\ (1\times 1)}} x(t) - A \qquad (b=$$

condizione di estinzione

$$X(N) = 0$$

$$\llcorner = a^N x(0) + \sum_{k=0}^{N-1} a^{N-1-k} b u(k) = (1+\rho)^N D - A \sum_{k=0}^{N-1} (1+\rho)^{N-}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1 \quad \text{serie geometrica}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} (1+\rho)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} q^k = \frac{1-q^N}{1-q}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\rho(1+\rho)^N}{(1+\rho)^N - 1} D = \frac{\rho}{1-(1+\rho)^{-N}} D$$

$Y(t) = x(t)$ debito residuo

$Y(t) =$ quota capitale della rata $= A - \rho\, x(t) > 0$

Reversibilità

Possiamo seguire il movimento all'indietro nel tempo?

$$\underset{\uparrow \atop \text{noto}}{x(t)} = \phi(t)\, \underset{\downarrow \atop ?}{x(0)} + \underbrace{\Psi(t)\, u_{[0,t)}(\cdot)}_{\text{noto}}$$

esiste un unico stato iniziale da cui il sistema è partito?

SI, se (e solo se) posso invertire la matrice di transizione

$$x(0) = \phi(t)^{-1}\left[x(t) - \Psi(t)\, u_{[0,t)}(\cdot)\right]$$

---

t.c.

$$\phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{6} + \dots$$

$$\phi(t)^{-1} = e^{-At} = I - At + \frac{A^2t^2}{2} - \frac{A^3t^3}{6} + \dots$$

$$\phi(t)\phi(t)^{-1} = \left(I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \frac{A^3t^3}{6} + \dots\right)\left(I - At + \frac{A^2t^2}{2} - \dots\right)$$

$= I +$ tutti gli altri termini si cancellano

$\Rightarrow$ i sistemi a t.c. sono sempre reversibili
(la formula di Lagrange vale anche per $t < 0$)

---

t.d.

$\phi(k) = A^k$

$\Psi(t) = A$

Nota: gli autovalori di A^t sono quelli di A, ciascuno alla potenza

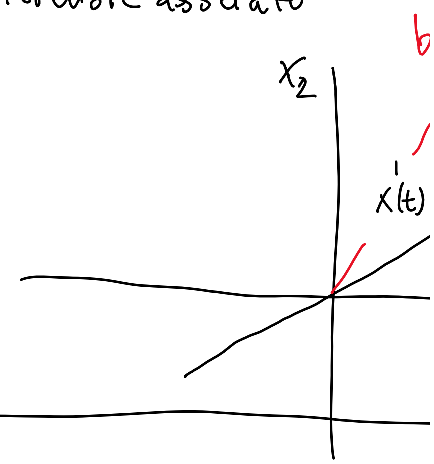
$\Rightarrow$ il sistema è reversibile $\longleftrightarrow$ A è non-singolare (non ci sono auto

---

Se esiste $\lambda = 0$ di A, $Av = 0$, $v \neq 0$ autovettore associato

se $x(t) = \alpha v$, $x(t)$ sta sull'autovettore

allora $x(t+1) = \underbrace{Ax(t)}_{0} + bu(t)$



Esempio: aula computer

$u(t)$: PC acquistati alla fine dell'anno t

$y(t)$: totale PC nell'anno t

$x_i(t)$: PC nell'i-esimo anno di funzionamento nell'anno t

anno di funzionamento	1	2
prob. rottura	0	0.2

$$x_1(t+1) = u(t)$$
$$x_2(t+1) = (1-0)\, x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = (1-0{,}2)\, x_2(t)$$
$$x_4(t+1) = (1-0{,}4)\, x_3(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)$$

$\Rightarrow$ il sistema non è reversibile

Nota: sistemi (a t.d.) a "memoria finita" tecnicamente, sono quelli con tutti gli autov di A nulli

Più fisicamente, sono quelle che "dimenticano completamente" lo
in tempo finito, cioè, quelli per cui esiste t, tale che $A^t =$

teorema di Caley-Hamilton: una matrice quadrata, A, soddisfa il

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

$$\Delta_A(A) = A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n \underset{A^0}{I} = \underbrace{[0]}_{n \times n}$$

$$\to A^n = -\alpha_1 A^{n-1} + \dots - \alpha_{n-1} A - \alpha_n I$$

Se $\lambda_i = 0$ per ogni i, $\Delta_A(\lambda) = \lambda^n \Rightarrow A^n = 0$

$\Rightarrow A^t = 0$ sicuramente per $t \geq n$

Stabilità

studia la "memoria" che il sistema ha dello stato iniziale sui tempi "
per t -

$\Rightarrow$ è una proprietà del movimento libero

$$x(t) = \phi(t)\, x(0) \xrightarrow[t \to +\infty]{} ? \qquad \text{con } x(0) \neq 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \phi(t)\cdot x(0)$$

4 classi di stabilità

1) sistemi asintoticamente stabili (as. stab.)

$$\phi(t)\,x(0) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \qquad \forall\, x(0)$$

Nota: sono quelli per cui tutti i $\phi_{ij}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

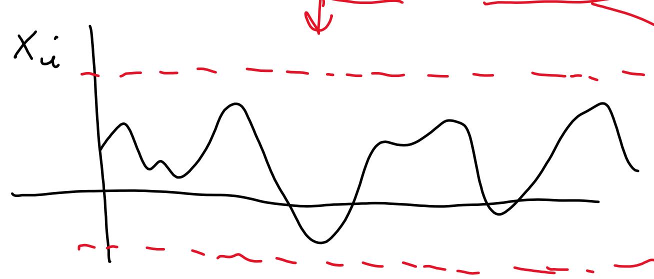
altrimenti posso scegliere $x(0)$ in modo da avere qualche $x(t)$ c

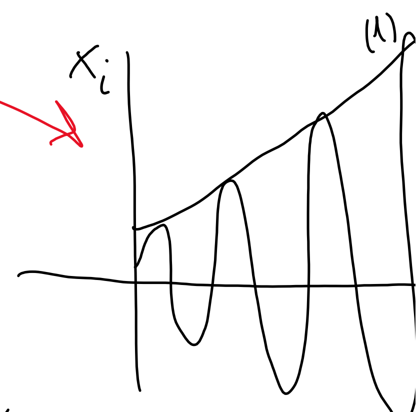
2) sistemi semplicemente stabili

$\phi(t)\,x(0)$ è limitato $\forall\, x(0)$

ma esistono stati iniziali per cui $x(t)$ non tende a zero

Nota: segnali limitati e illimitati





(1) $\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = +\infty$

(2) " non esist

Nota: sono quelli per cui tutti i $\phi_{ij}(t)$ sono segnali limita
e ne esiste almeno uno che non tende a zero

3,4) sistemi instabili

$\phi(t)\,x(0)$ è illimitato per qualche $x(0)$

Nota: sono quelli per cui almeno un elemento $\phi_{ij}(t)$ è ill

3) sistemi debolmente instabili

tutti i $\phi_{ij}(t)$ illimitati, lo sono a causa di un andamen

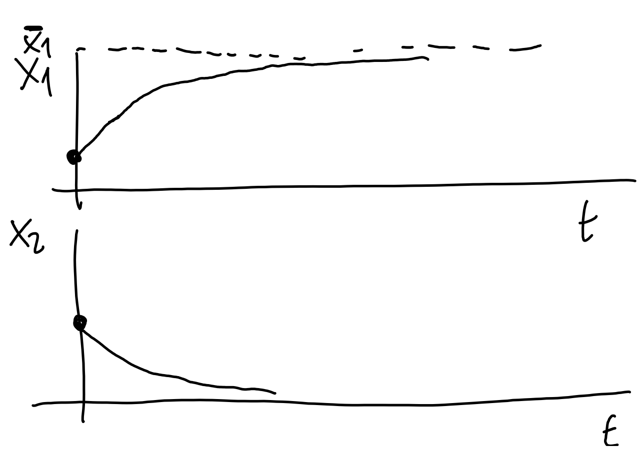
4) sistemi (fortemente / esponenzialmente) instabili

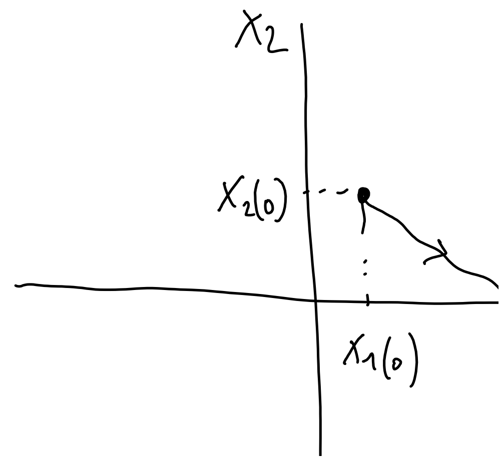
almeno un elemento $\phi_{ij}(t)$ è illimitato con andamento

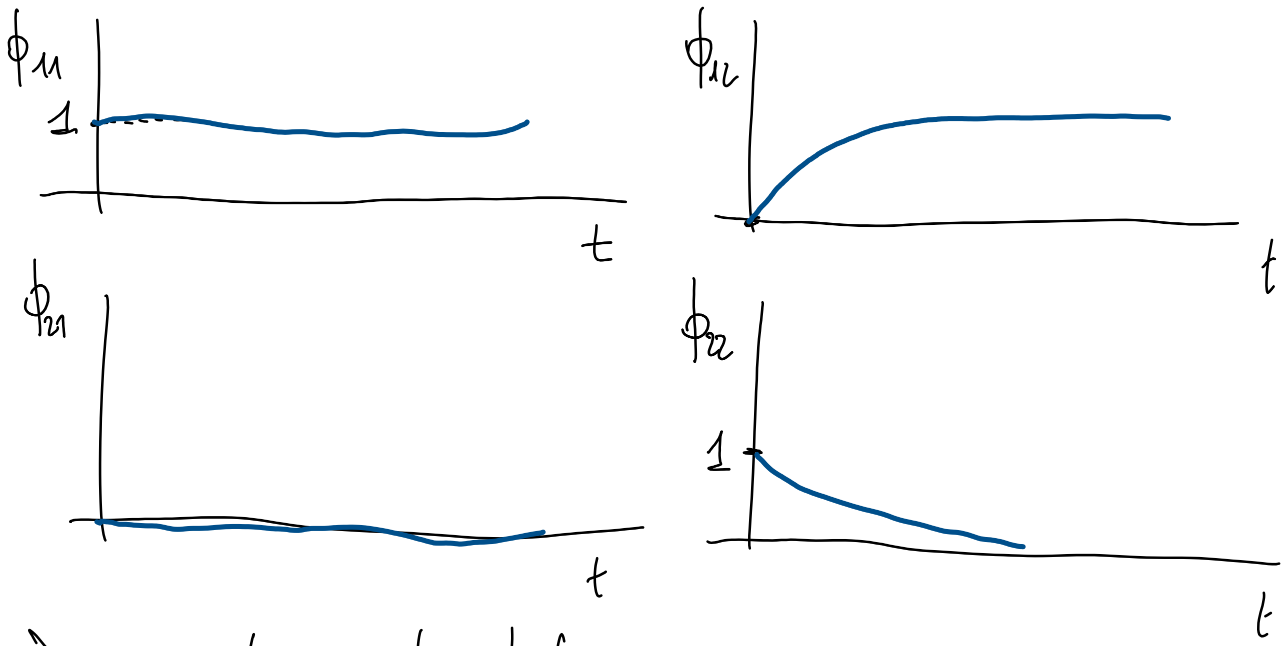
(t.c.: esponenziale e^{at}; t.d. geometrico a^t)

Newton: $u=0$

con attrito

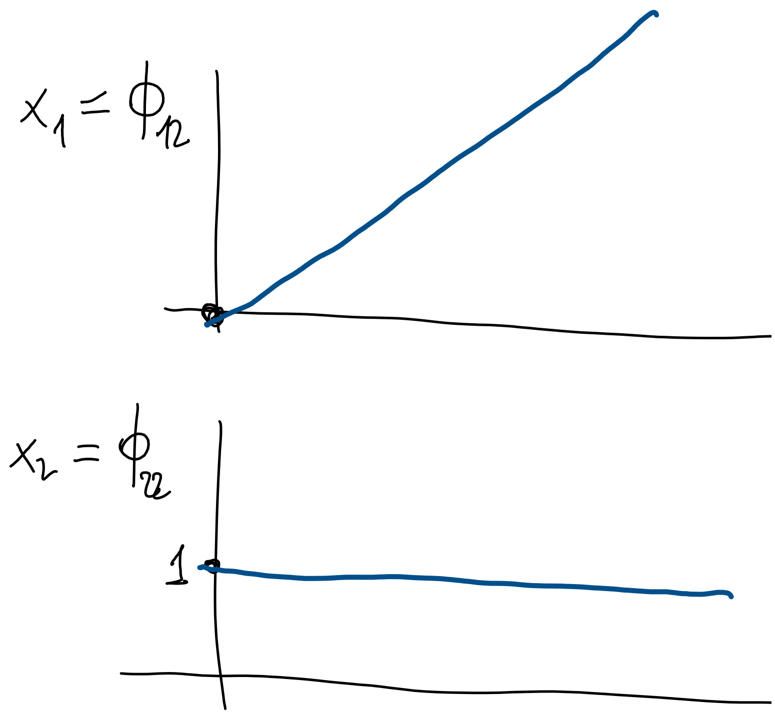






$\Rightarrow$ semplicemente stab.

<u>senza attrito</u>



$\Rightarrow$ debolmente instab.

Lez09

lunedì 21 marzo 2022 10:41

Legame tra stabilità e matrice A del sistema

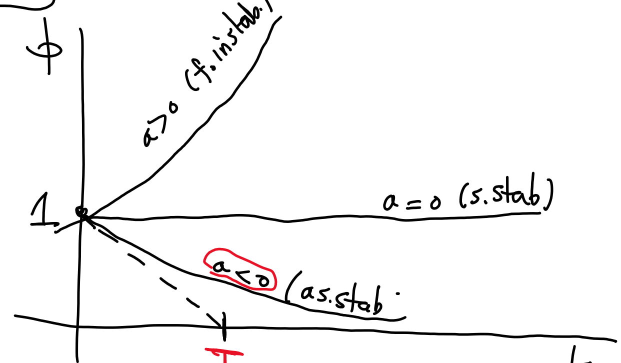
un caso semplicissimo: i sist. del primo ordine $(n=1)$

t.c. $\dot{x} = a x \longrightarrow x(t) = \underbrace{e^{at}}_{\phi(t)} x(0)$ esponenziale

t.d. $x(t+1) = a x(t) \longrightarrow x(t) = \underbrace{a^{t}}_{\phi(t)} x(0)$ geometrica

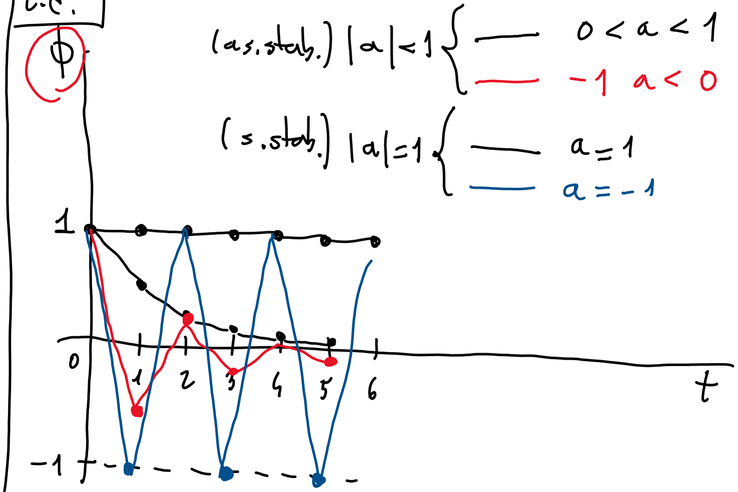
a: matrice 1x1 = autovalore

t.c.

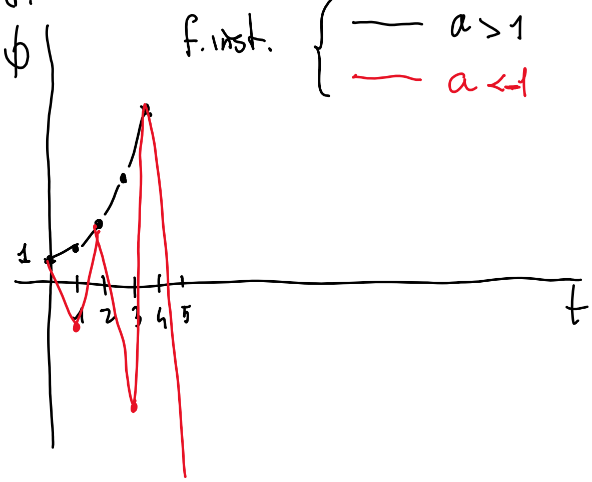


$$e^{at} = e^{-\frac{t}{T}} \Rightarrow T = -\frac{1}{a}$$

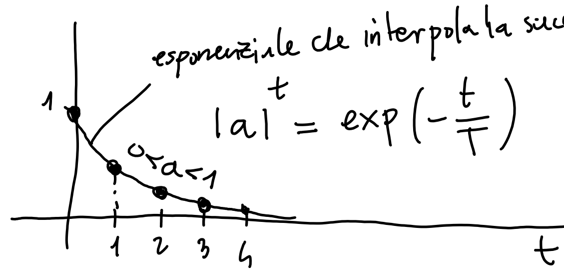
t.d.



t.d.



costante di tempo



$$|a|^{t} = \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \quad t = 0, 1, 2, 3$$

$$\log\left(|a|^{t}\right) = \log\left(\exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right)$$

$$\cancel{t} \log|a| = -\frac{\cancel{t}}{T} \Rightarrow \boxed{T = -\frac{1}{\log|a|}}$$

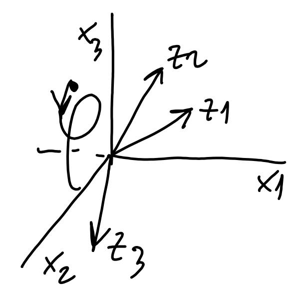
Sist. del I ordine								
t.c.	a	< 0	as. stab.		t.d.	$\lvert a \rvert$	< 1	as. stab
		$= 0$	s. stab				$= 1$	s. stab
		> 0	(f.) instab				> 1	(f.) instab

Sist. di ordine $n > 1$

Idea fondamentale: quali sono le variabili $z = Tx$ (cost. e invertibile) "comode" per studiare la stabilità.

$$pz = \left|\begin{matrix} \dot z & (t.c.) \\ z(t+1) & (t.d.) \end{matrix}\right| = pTx = T\,px = TAT^{-1}z$$

eq. di stato: $px = Ax + \cancel{bu}$, $x = T^{-1}z$



$$pz = \boxed{TAT^{-1}}\,z$$

"nuova A" $= \tilde{A}$ è "simile" ad A, cioè ha gli stessi autovalori

Idea: se $\tilde{A}$ fosse diagonale (avrebbe gli autovalori λ_i di A sulla diag.)

$\Rightarrow$ il sistema, visto nelle variabili z, sarebbe scomposto in n sistemi del I ordine. Infatti

$$pz = Dz, \qquad \begin{array}{c} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \end{array}\left|\begin{matrix} pz_1 \\ pz_2 \\ pz_i \\ pz_n \end{matrix}\right| = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \lambda_i z_i \\ \\ \end{bmatrix}$$

eq. stato i-esima $\quad p z_i = \lambda_i z_i$

t.c. $z_i(t) = \boxed{\exp(\lambda_i t)} z_i(0)$

t.d. $z_i(t) = \boxed{\lambda_i^t} z_i(0)$

Se A è diagonalizzabile, otteniamo questo criterio di stabilità

A (il sistema) è

- as. stab. $\longleftrightarrow$ tutti λ_i: $Re(\lambda_i) < 0$ (t.c.), $|\lambda_i| < 1$ (t.d.)
- s. stab $\longleftrightarrow$ tutti λ_i: $Re(\lambda_i) \leq 0$ (t.c.), $|\lambda_i| \leq 1$ (t.d.)

  e esiste (almeno) un λ_i con $Re(\lambda_i) = 0$ (t.c), $|\lambda_i| = 1$ (t.d.)

  autovalori "critici"
- (f.) instab esiste (almeno) un λ_i con $Re(\lambda_i) > 0$ (t.c.), $|\lambda_i| > 1$ (t.d.)

Form. Eulero, $\lambda = a + ib = \rho e^{i\theta}$

(t.c) $e^{\lambda t} = e^{at} \cdot e^{ibt} = e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt))$, $\quad a = Re(\lambda)$

$b = Im(\lambda) =$ pulsazione dell'oscillazione

(t.d.) $\lambda^t = (\rho e^{i\theta})^t = \rho^t \cdot e^{i\theta t} = \rho^t(\cos(\theta t) + i \sin(\theta t))$

(pulsaz = 2π freq.)

Come si diagonalizza A?

si usano gli autovettori di A come nuovi assi

$$T^{-1} = \Big[\; | \; | \; | \; | \; | \;\Big] \Rightarrow TAT^{-1} = D$$

ne abbiamo n ?
(indipenti)

Ripasso sugli autovettori

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

$$= (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_d)^{m_d} \quad , \quad \sum m_i = n$$

d : numero di autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$, $d \leq n$

m_i : molteplicità algebrica

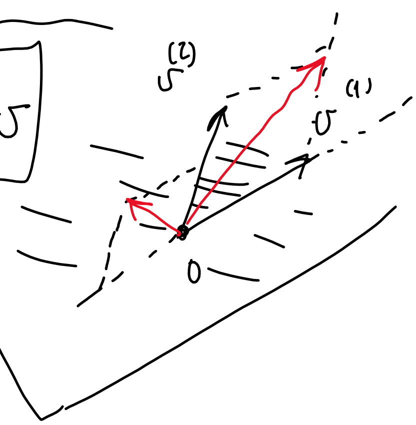
autovettori associati a λ_i sono le soluzioni $v \neq 0$ di $Av = \lambda_i v$

$$\boxed{\underbrace{(A - \lambda_i I)}\, v = 0}$$

$\det(A - \lambda_i I) = 0$ per definizione di autovalore $\Rightarrow \exists$ sempre una (infinita) di soluzioni $v \neq 0$

Ma se $m_i > 1$, quanti autovett. (indipendenti) esistono

cioè qual'è la dim del sotto-spazio di soluzioni per v



g_i : molteplicità geometrica

$$1 \leq g_i = \boxed{n - \text{rango}(A - \lambda_i I)} \leq m_i$$

$\ast$ se $m_i = 1 \Rightarrow g_i = 1$ (autovalori distinti)

A è diagonalizzabile $\longleftrightarrow$ $\underbrace{g_i = m_i}_{\lambda_i \text{ è "regolare"}} \quad \forall i$

Newton

con attrito $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_i = \{0, -\frac{h}{m}\}$ sono distinti $\rightarrow$ 2 autovettori

senza attrito $(h=0)$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_i = \{0, m=2\}$

$A v \overset{0}{=} \lambda v \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} \boxed{v_2 = 0} \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\text{rango}(A - \lambda I) = \text{rango}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$

$g = n - \text{rango}(A - \lambda I)$

$= 2 - 1 = 1$

A non diagonalizzabile

$\exists\, i$ per cui $\boxed{g_i < m_i} \geq 2$

colonne associate a λ_i e in tutto sono m_i - e sono indipendenti

$$T^{-1} = \Bigg[\cdots \Bigg| \overbrace{v^{(i,1)} \,\Big|\, \underbrace{w^{(i,1,1)} \,,\; w^{(i,1,2)}}_{} \,\Big|\, v^{(i,2)} \,\Big|\, w^{(i,2,1)} \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, v^{(i,g_i)} \,\Big|\, w^{(i,g_i,1)}}^{} \Bigg| .$$

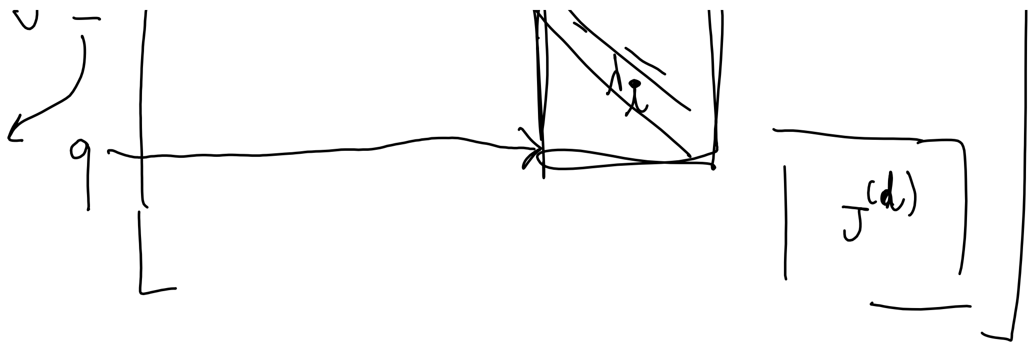
5ª

$v^{(i,1)}$ genera 2 "autovettori generalizzati"

$\hookrightarrow$ primo (in un ordine arbitrario) autovettore associato a λ_i

$$TAT^{-1} = J = \begin{bmatrix} J^{(1)}_{(m_1 \times m_1)} & & \\ & J^{(2)} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

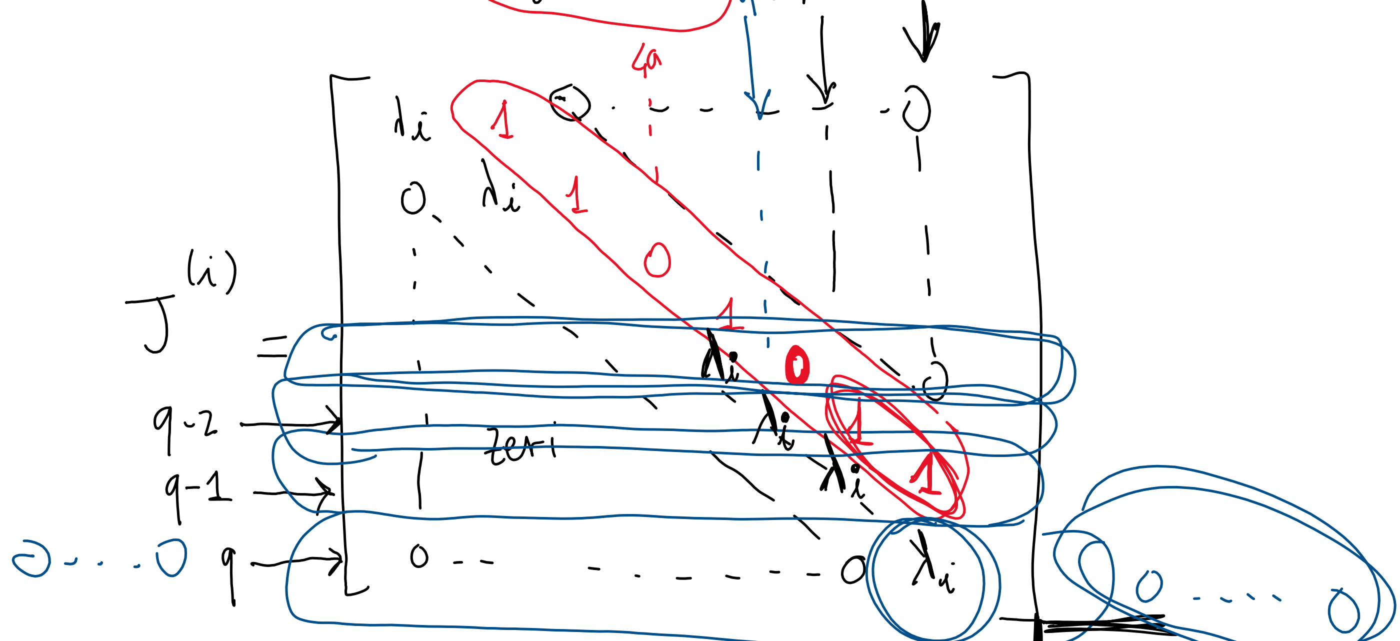
diagonale "a blocchi" di $(m_i \times m_i)$ con d blocchi



Nota: se $g_i = m_i \Rightarrow J^{(i)} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_i & \ddots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$

λ_i è regolare

Se λ_i non è regolare $g_i < m_i$



il "numero di elementi "1"" è pari al num di autovett. mancanti ovvero $m_i - g_i$

$$\left(\overset{\shortparallel}{n - \operatorname{rang}(A - \lambda_i I)} \right)$$

Costruzione della soluzione del mov libero a $\boxed{t_0 \, c_0}$

eq. stato q-esima (ultima riga del blocco $J^{(i)}$)

$\dot{z}_q$ = riga q di J $\cdot$ vett z $= \lambda_i \cdot z_q \Rightarrow$ è un sotto-sist. del I ordine

$\to z_q(t) = \exp(\lambda_i t)\, z_q(0)$

$\dot{z}_{q-1} = \lambda_i z_{q-1} + 1\, z_q$

$= \underbrace{a\, z_{q-1} + b\, u(t)}$ $\Rightarrow$ è un sist. del I ordine con ingr (che viene dalla z_q)

$\to z_{q-1}(t) = \exp(\lambda_i t)\, z_{q-1}(0) + \underbrace{\int_0^t e^{a(t-\tau)}\, b\, u(\tau)\, d\tau}$

$\int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)}\, z_q(0) \exp(\lambda_i \tau)\, d\tau$

$z_q(0)\, e^{\lambda_i t} \underbrace{\int_0^t \cancel{e^{-\lambda_i \tau}}\, \cancel{e^{\lambda_i \tau}}\, d\tau}$

$\int_0^1 d\tau = t$

$= \exp(\lambda_i t)\left(z_{q-1}(0) + z_q(0)\, t \right)$

$\dot{z}_{q-2} = \lambda_i z_{q-2} + z_{q-1} \Rightarrow$ sist. del I-ordine con z_{q-1} come i

$$= a\, z_{q-2} + \underbrace{b u(t)}_{b u(t)}$$

$$z_{q-2}(t) = \exp(\lambda_i t)\, z_{q-2}(0) + \int_0^t \exp(\lambda_i (t-\tau))\, z_{q-1}(\tau)\, d\tau$$

$$= \dots\dots = \exp(\lambda_i t)\Big[\underbrace{z_{q-2}(0) + z_{q-1}(0)t + z_q(\dots}$$

grado del polinomio in t

||

numero di "1" consecuti[vi]

Nota: $\lim_{t\to+\infty} e^{at} \cdot \text{polinomio}(t) = 0$, $a<0$

Nota: debole instabilità $\equiv e^{\lambda t}\, \text{pol}(t) = \underbrace{e^{0t}}_{1} \cdot \left[\cos(\text{Im}(\lambda)t) + i \sin(\text{Im}(\dots\right. \cdot \text{pol}(t)$

$Re(\lambda) = 0$

1

$||$

Lez 10

mercoledì 23 marzo 2022 10:42

Criterio di stabilità

1) as. stab. $\longleftrightarrow$ $Re(\lambda_i) < 0$ (t.c.) $\forall i = 1, \dots, n$

$|\lambda_i| < 1$ (t.d.)

2) semplic. stab. $\longleftrightarrow$ $Re(\lambda_i) \leq 0$ $\forall i$

$|\lambda_i| \leq 1$

esiste i per cui (λ_i "critico") $Re(\lambda_i) = 0$

$|\lambda_i| = 1$

e tutti questi λ_i devono essere "regolari" (

3) debol. instab. $\longleftrightarrow$ $Re(\lambda_i) \leq 0$ $\forall i$

$|\lambda_i| \leq 1$

esiste λ_i "critico" $\begin{pmatrix} Re(\lambda_i) = 0 \\ |\lambda_i| = 1 \end{pmatrix}$ e "non regola

($g_i <$ n

4) (fort. instab.) $\longleftrightarrow$ esiste λ_i con $Re(\lambda_i) > 0$ (t.c.)

$|\lambda_i| > 1$ (t.d.)

Commento su λ_i complessi

$$T^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & p+iq & p-iq \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} | & | & | & | \end{array} \right] \end{array} \Longrightarrow z_{j+1}(t) = \overline{z_j(t)}$$

autovett

colonne j e j+1

$\lambda = a \pm ib$

$Av = \lambda v$

↳ autovett. associato $a+ib$

↳ anche l'autovett è complesso $v = p + iq = \begin{vmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{vmatrix}$

$$A(p+iq) = (a+ib)(p+iq)$$

$$\begin{array}{l} Re(\dots) \rightarrow \\ Im(\dots) \end{array} \begin{cases} Ap = ap - bq \\ Aq = bp + aq \end{cases}$$

2n equaz in 2n incognite (p, q) → se v è sol., anche però, con α complesso

notei $p - iq$ risolve

$$A(p-iq) = \underbrace{(a-ib)}_{\bar{\lambda}}(p-iq)$$

⇒ anche gli autovett. associati a $a \pm ib$ sono tra loro coniugati $\bar{v} = \bar{p}$

Quando torniamo nelle variabili x

$$x = T^{-1} z$$

$$\underbrace{x_i(t)}_{\text{mov. libero}} = [\text{riga i-esima di } T^{-1}] \cdot z(t) = \text{reale}$$

= Combinazione lineare (con coefficienti che dipendono dalla riga iesima di T^{1}, quindi dagli autovettori di A, ma anche dalla condiz. iniziale $x(0)$, $z(0) = Tx(0)$) dei segnali "base" ottenuti nelle soluzioni $z(t)$, anche detti "modi" del sistema lineare

"modi" dell'autovalore λ_i
$i = 1, \dots, d$
↳ num autoval. distinti

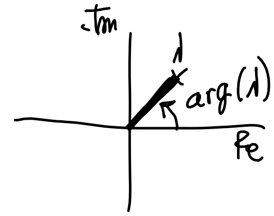
t.c: $\exp(\lambda_i t) \cdot \frac{t^k}{k!}$

se λ_i complesso $\exp(Re(\lambda_i)t)\left[\cos(Im(\lambda_i)t) + i \sin(Im(\lambda_i)t)\right]$

t.d.: $\underbrace{\lambda_i^t}_{} \cdot \frac{t^k}{k!}$

se λ_i è complesso $|\lambda_i|^t \left[\cos(\arg(\lambda_i)t) + i \sin(\arg(\lambda_i)t)\right]$

$k = 0, 1, 2 \dots$ fino al valore pari alla lunghezza della più lunga "catena" di "1" nel blocco di Jordan $J^{(i)}$



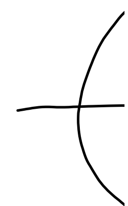
Costante di tempo dominante

$$T_i \begin{cases} \text{t.c.} & -\dfrac{1}{Re(\lambda_i)} \\ \text{t.d.} & -\dfrac{1}{\ln(|\lambda_i|)} \end{cases}$$

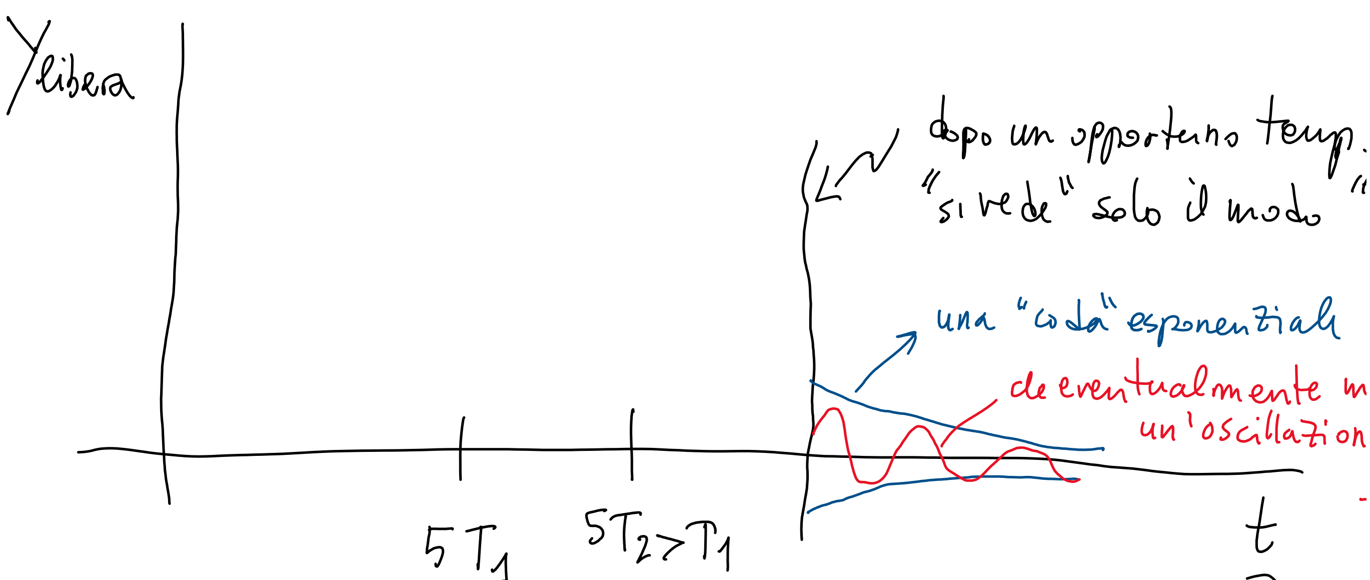
$$\left[\exp(Re(\lambda_i)t) = e^{-t/T}\right]$$

$$\left[|\lambda_i|^t = e^{-t/T}\right]$$

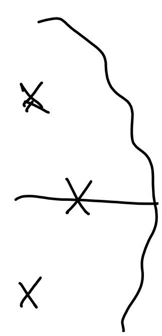
interpolazione sui valori interi di t



Per un sistema as. stab



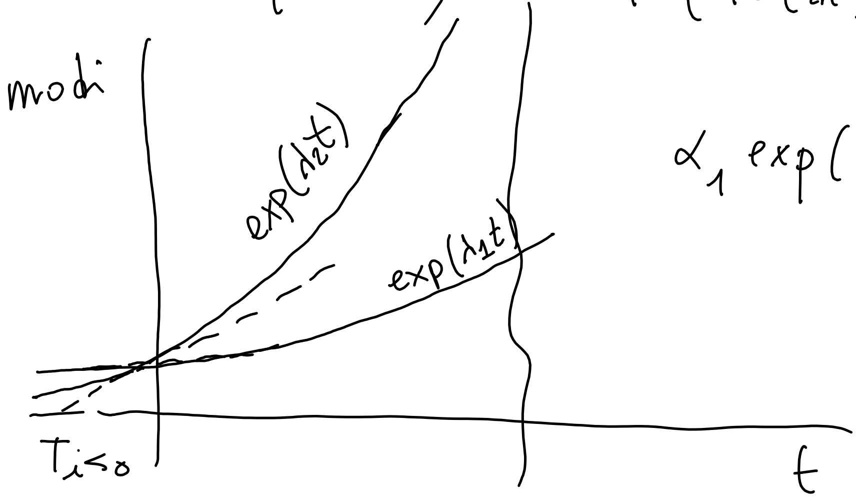
↳ da qui in poi, il modo 1 lo posso trascurare (lo ritengo esaurito)



tra modi (autovalori) "stabili" ($Re(\lambda_i)<0$, $|\lambda_i|<1$)
"domina" il più lento, ovvero quello con T_i maggiore,
ovvero gli autovalori con $Re(\lambda_i)$ massima, cioè più a de

---

tra modi (autov.) instabili ($Re(\lambda_i)>0$, $|\lambda_i|>1$)



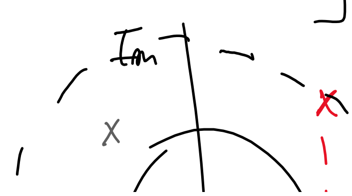
$$\alpha_1 \exp(\lambda_1 t) + \alpha_2 \exp(\lambda_2 t)$$

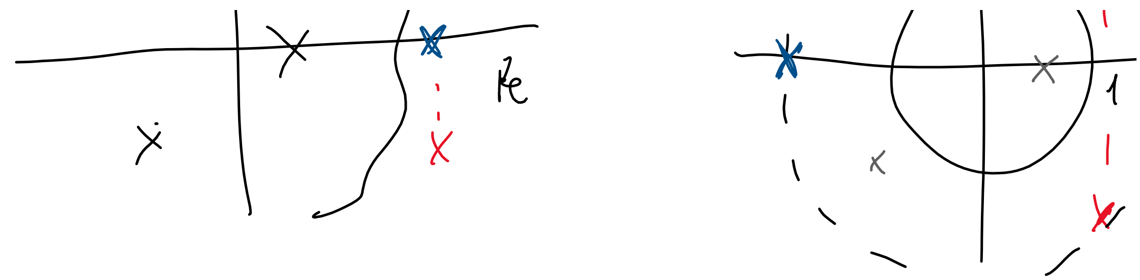
do

t su

$$\frac{\alpha_1 \exp(\lambda_1 t)}{\alpha_1 \exp(\lambda_1 t) + \alpha_2 \exp(\lambda_2 t)}$$

$\Rightarrow$ tra modi "instabili" domina il più veloce
è ancora quello con $Re(\lambda_i)$ massima [$|\lambda_i|$ massima
quello più a destra [quello più lontano dall'origine]





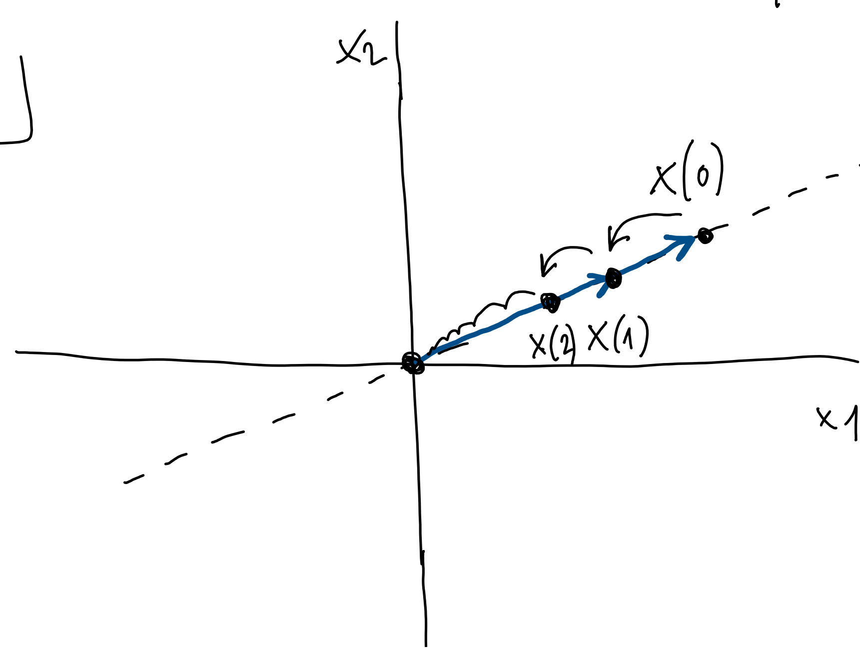
$\Rightarrow T_d$ è quella associata al modo

Geometria del movimento libero

↳ impariamo a disegnare "qualitativamente" l
... in casi semplici (principalmente quelli con

OSS 1: gli autovettori reali sono particolari traie

t. d



v autovett. d

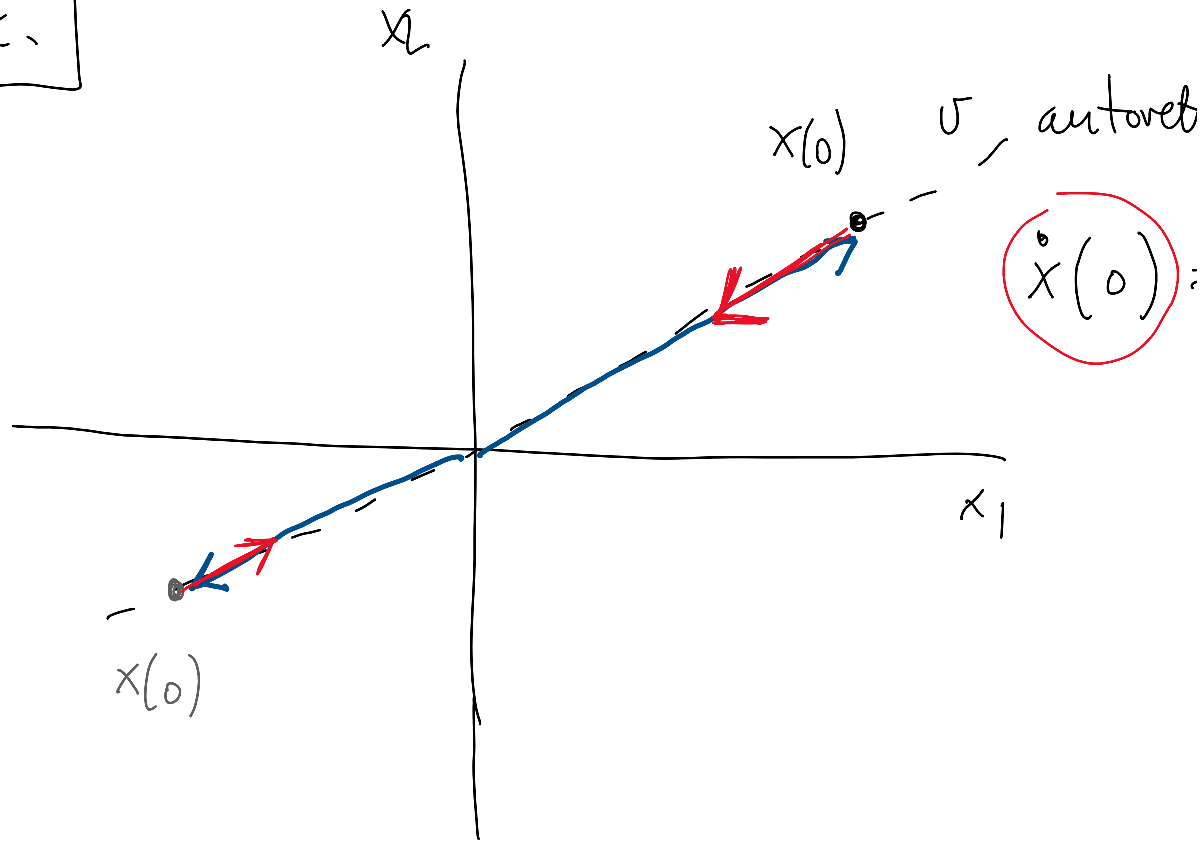
$x(0) =$

$x(1) = $

$x(2) = $

in altre parole, gli autovettori sono inva

t.c.

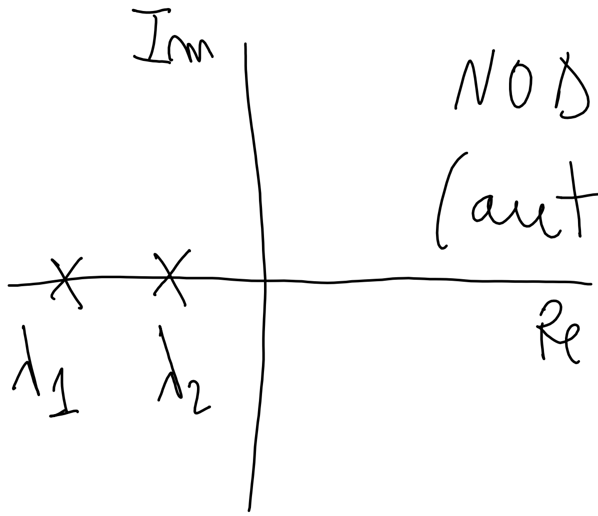


OSS2 : usare gli autovett. come "
in componenti lungo gli a
sovrapposizione

Andiamo "per esempi"

Consideriamo ...

casi a t.c. $n = 2$



NODO STABILE

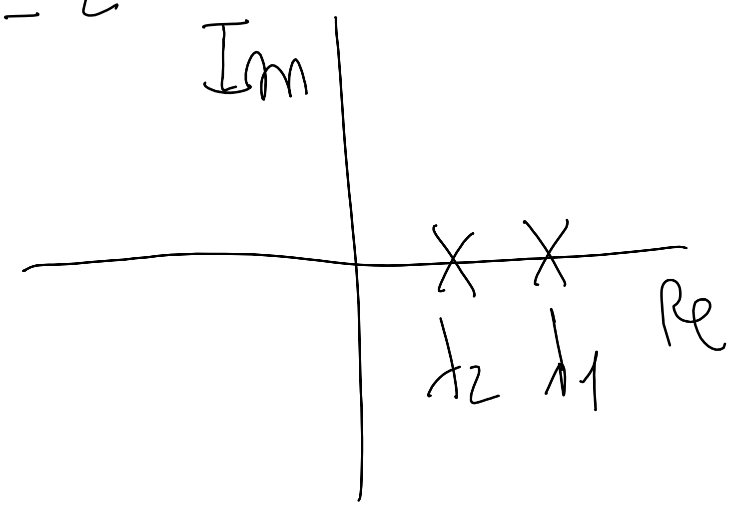
(autoval. reali stabili

λ_2 è dominante

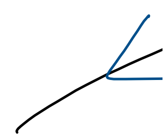
NODO INSTABILE

(tutti λ_i reali instabili)

$n=2$



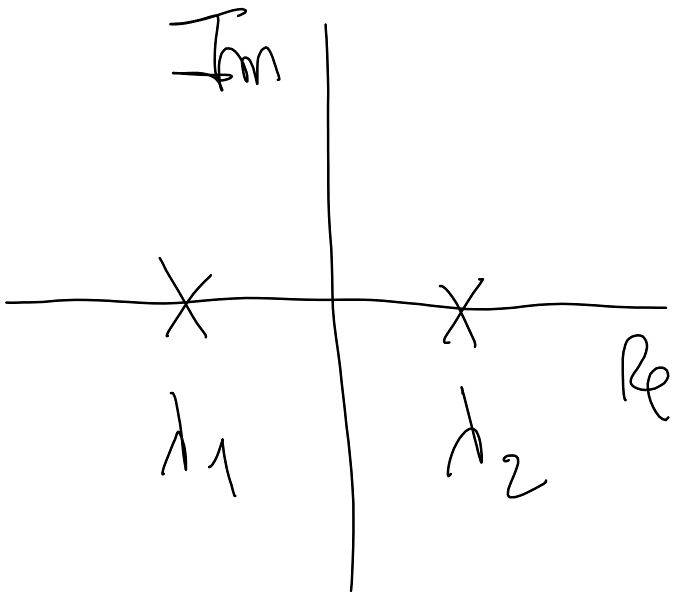
λ_1 dominante



SELLA

i autov. reali alcuni stab. alcuni i

$n = 2$



vari
st

$$\dot{x} = Ax$$

$\|\dot{x}\|$ è la "velocità" di percorrenza della traiet

i sottospazi degli autovettori

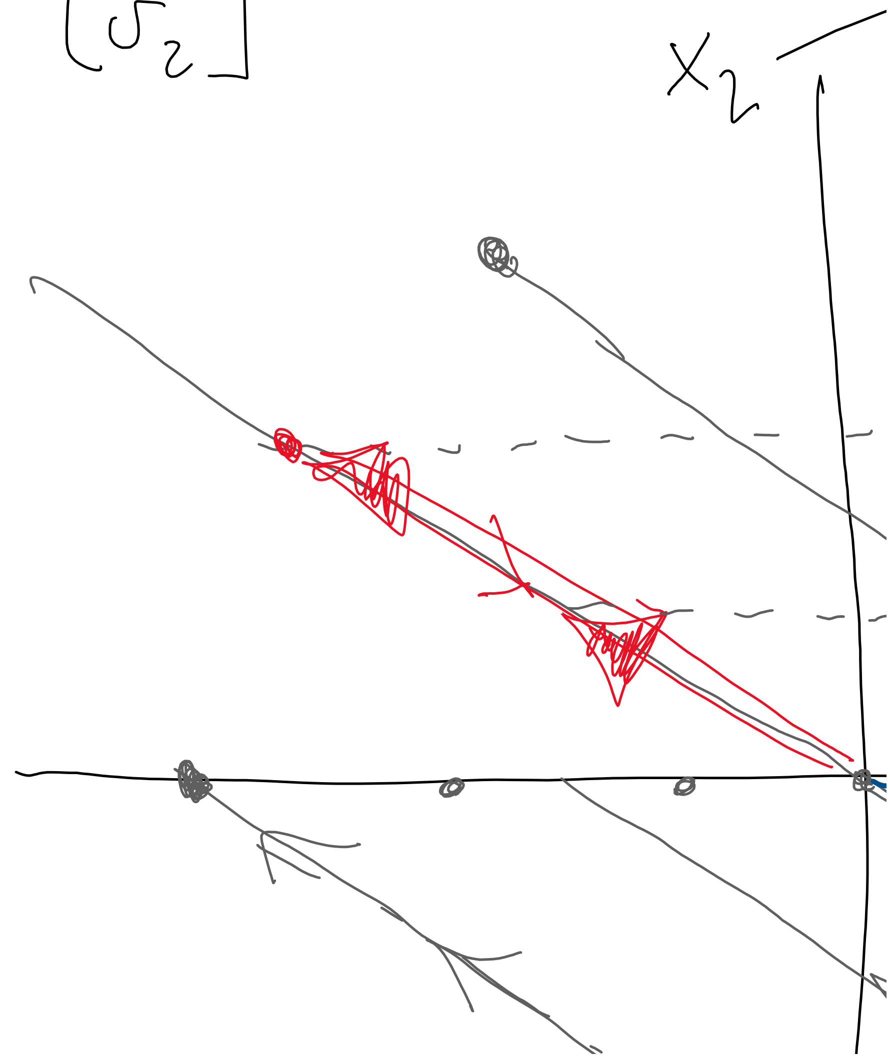
Es: Newton con attrito con ese

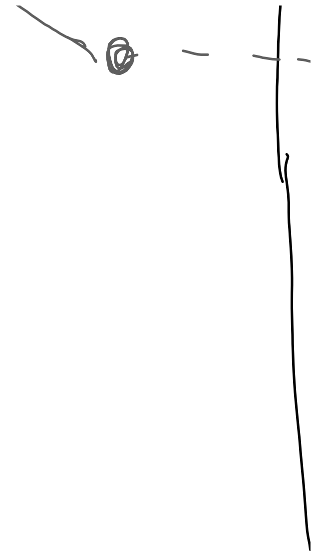
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{m} \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1,2} =$$

Calcoliamo $v^{(2)}$

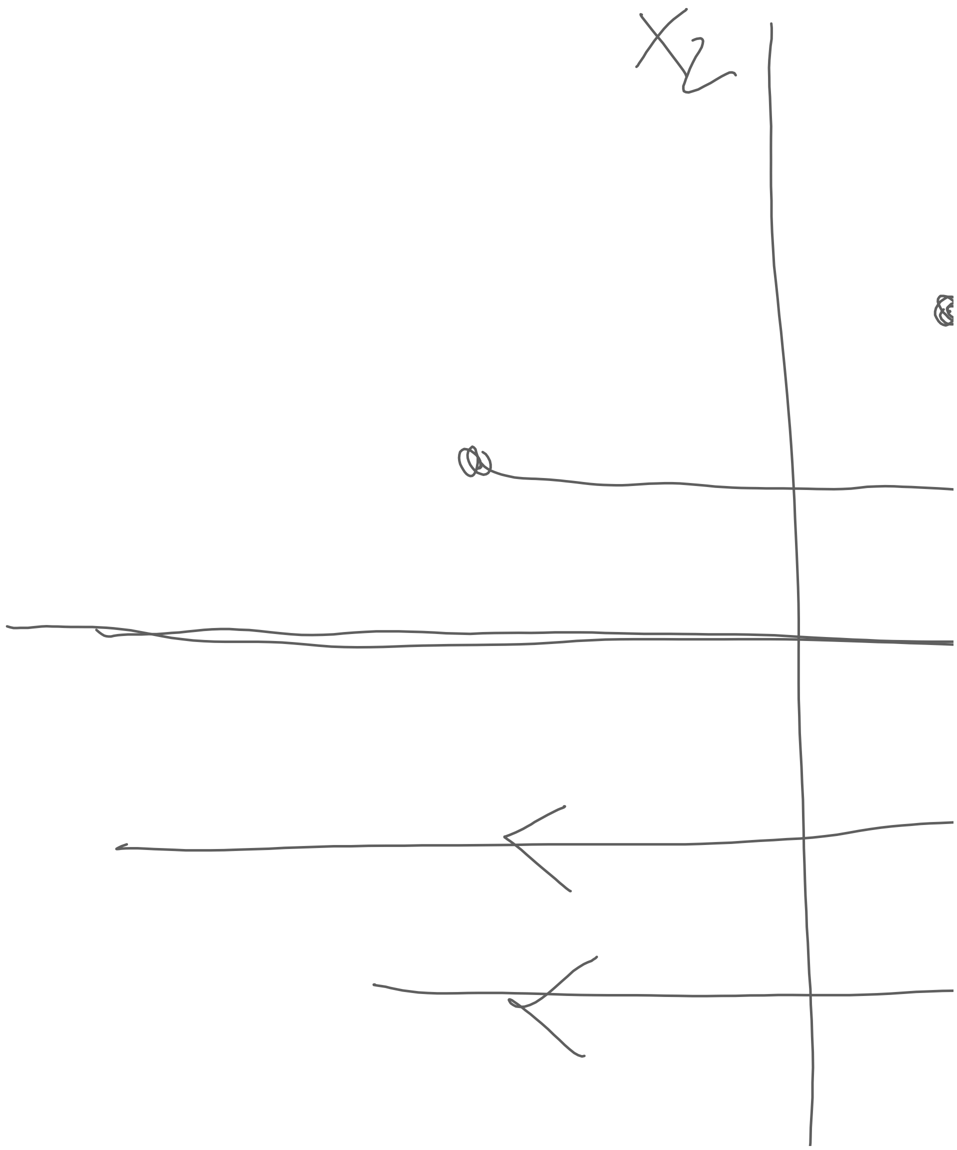
$$Av = -\frac{h}{m} v \qquad \begin{cases} v_2 = \\ -\frac{h}{m} \end{cases}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

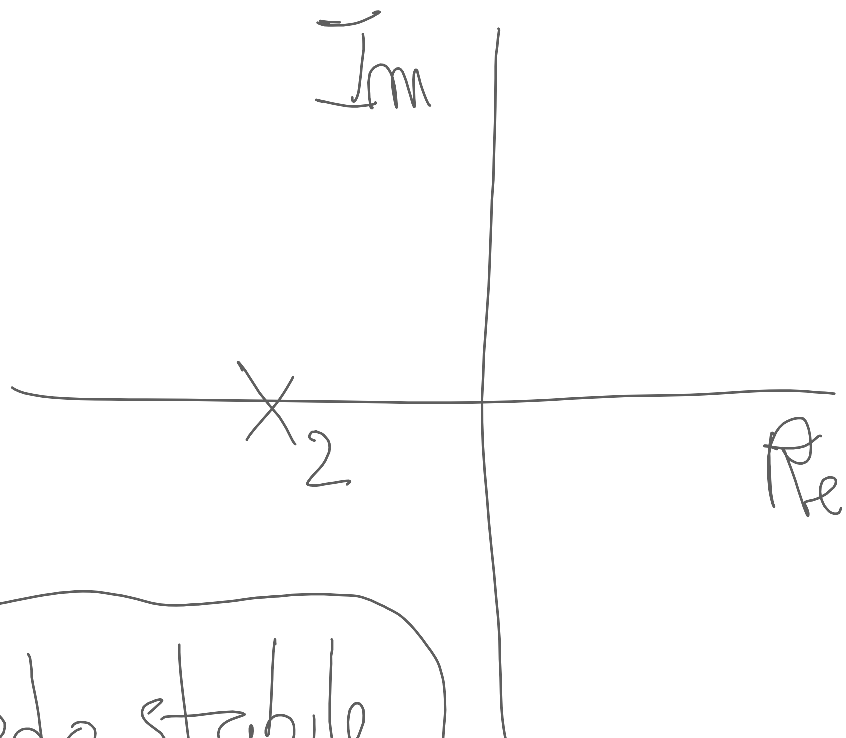




Newton senza attrito



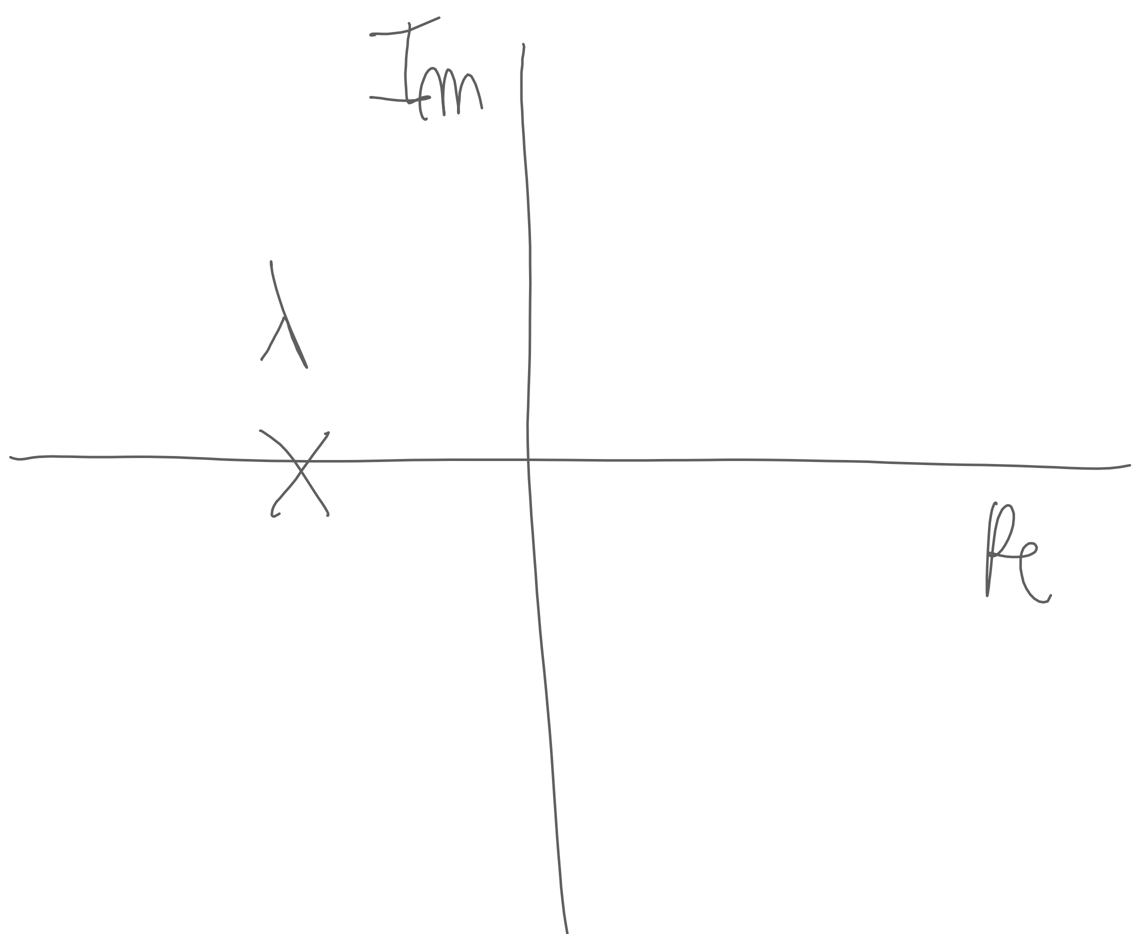
caso $g_1 = 1 < m_i$



nodo stabile

$\lambda < 0$ non regolare

орфик



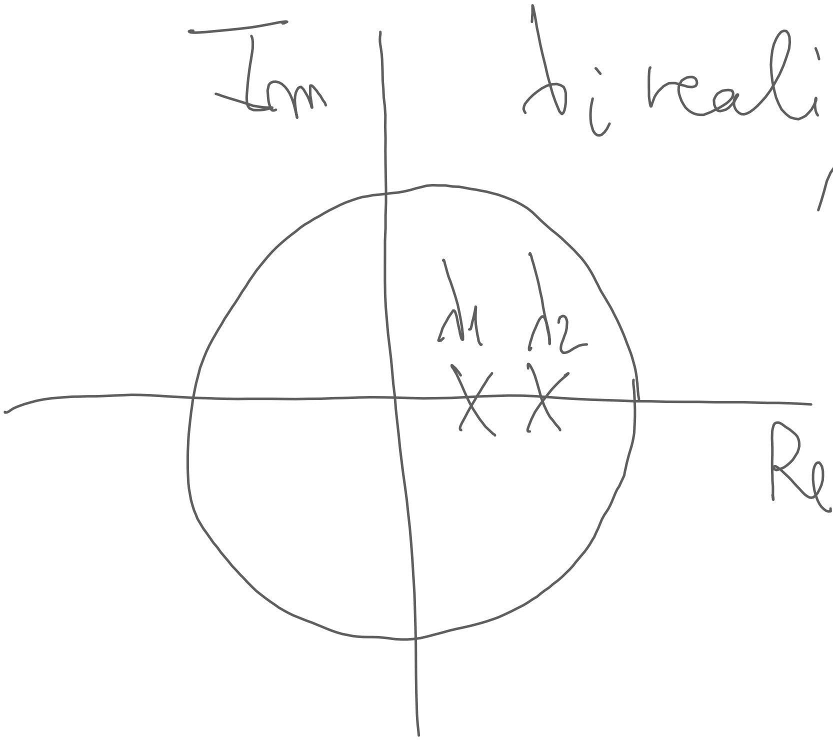
stella

nodo stabile, con

λ doppio e regolare

Casi a tempo discreto

λ_i reali, $0 < \lambda_i < 1$

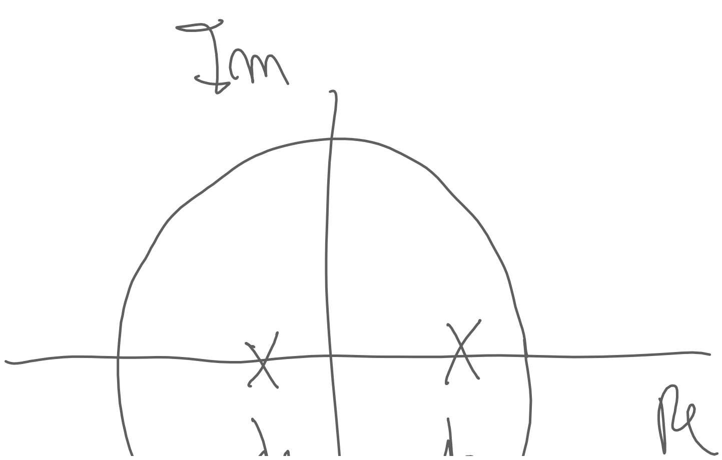


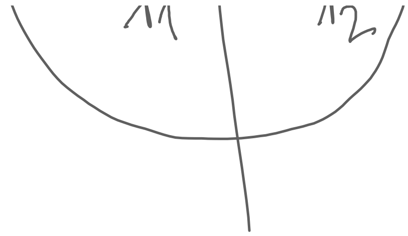
nodo stabile

λ_2 dominante

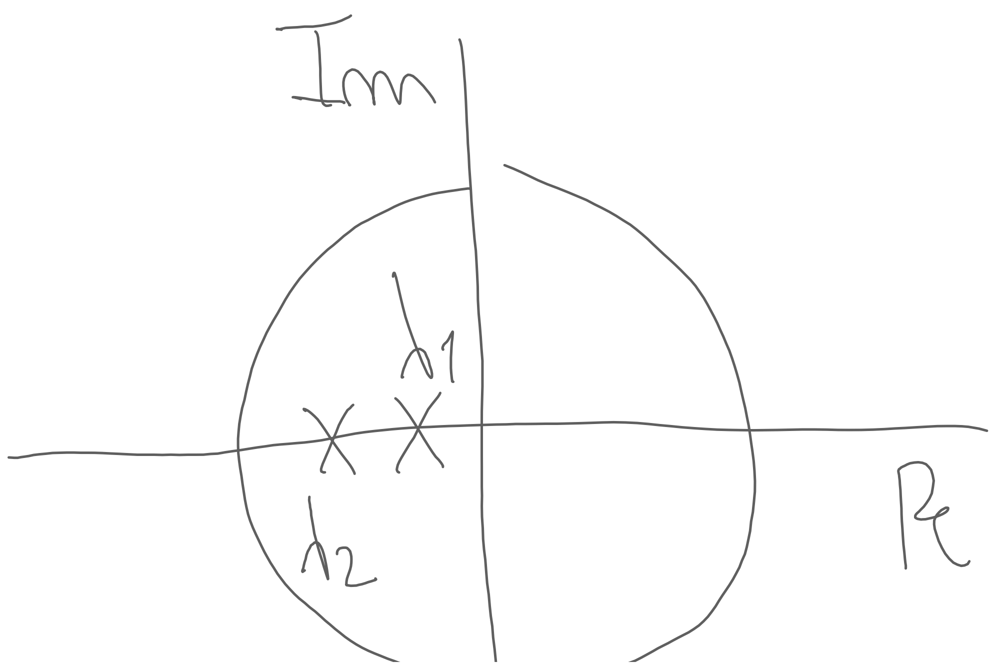
([illegible])

(pen lento)





nodo stabile



nodo stabile

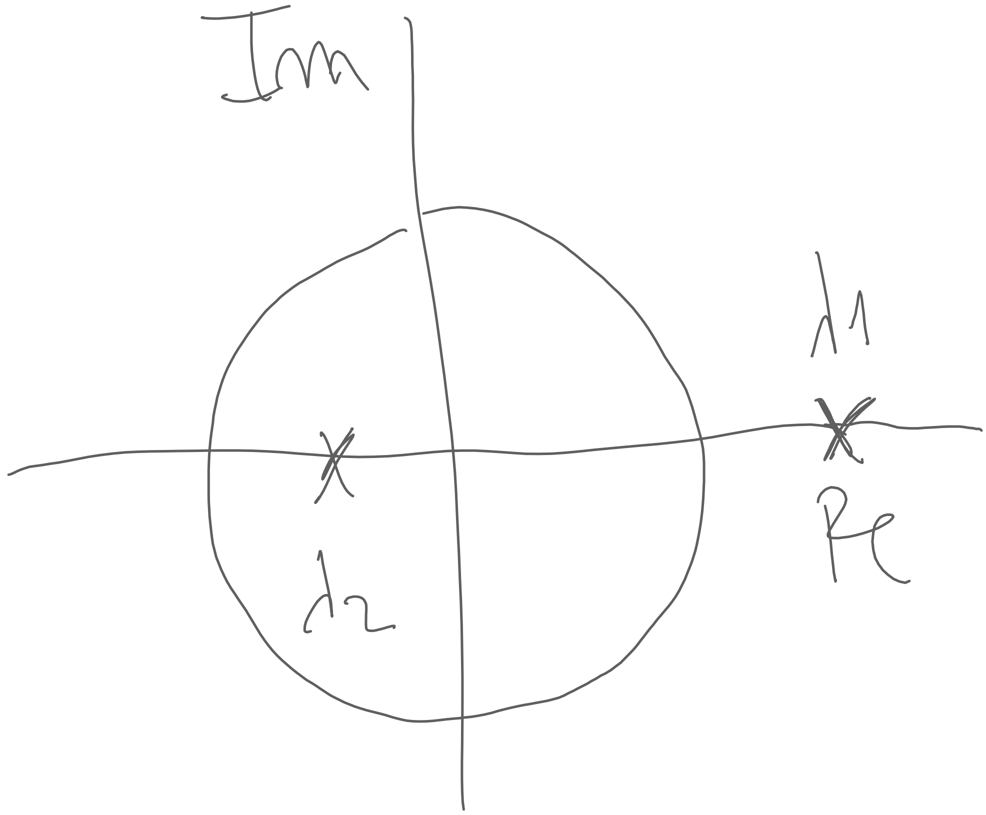
λ_2 dominante

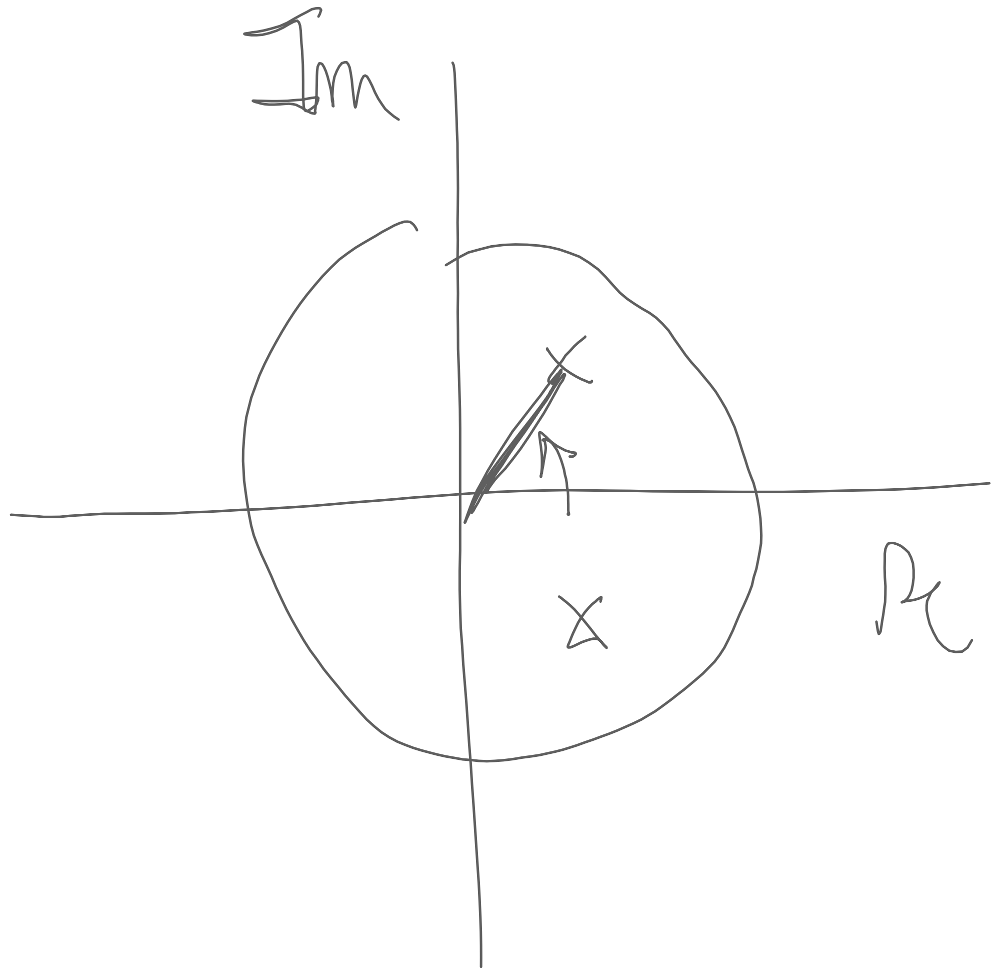
(più lento)

---

nodi instabili $\Rightarrow$ vedi qu

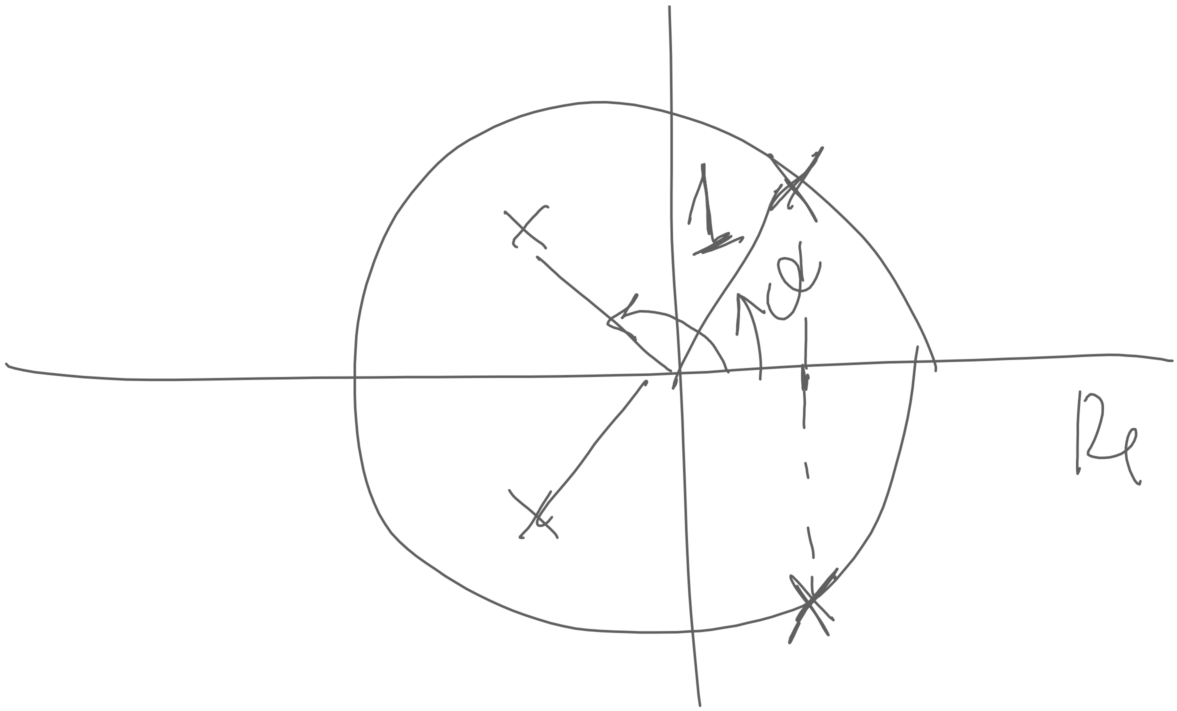
Un caso sella


Im
λ1
Re
λ2



Fuoco stabile

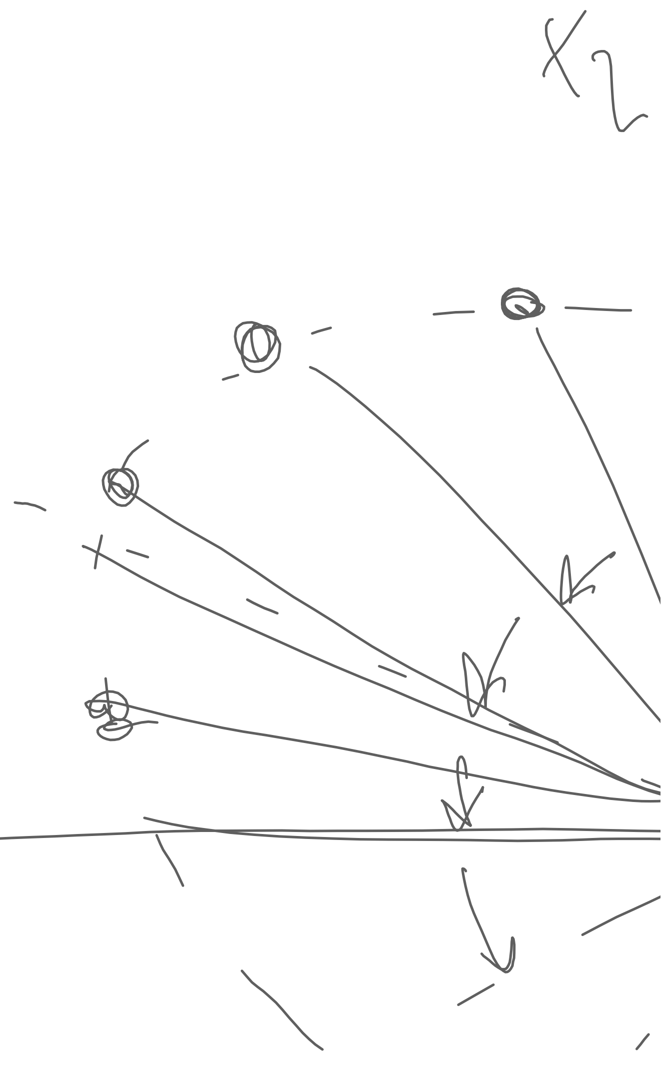
Im



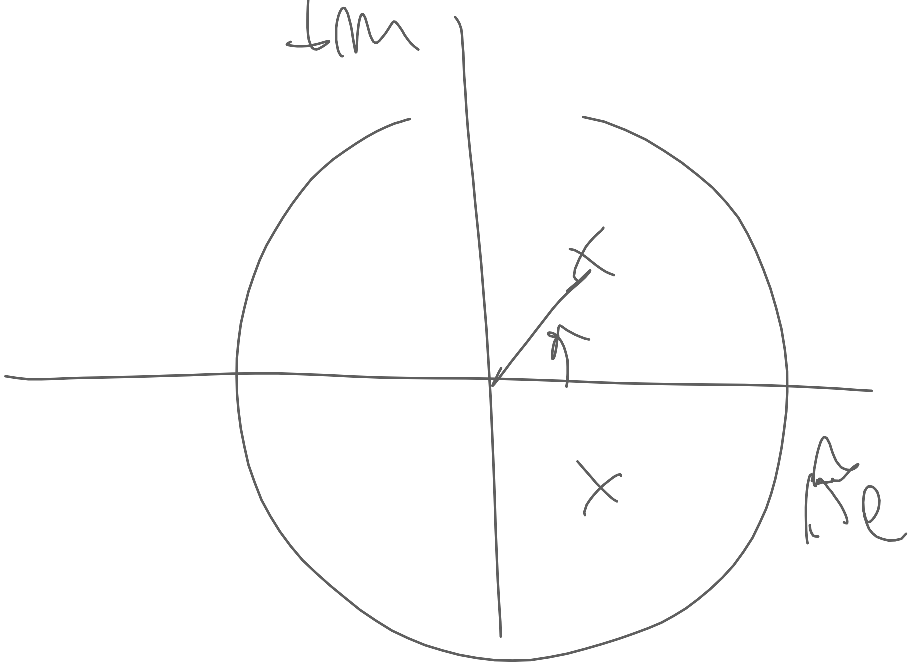
Centro

Zq

nelle var X



fuocostable



traiett. quasi-p

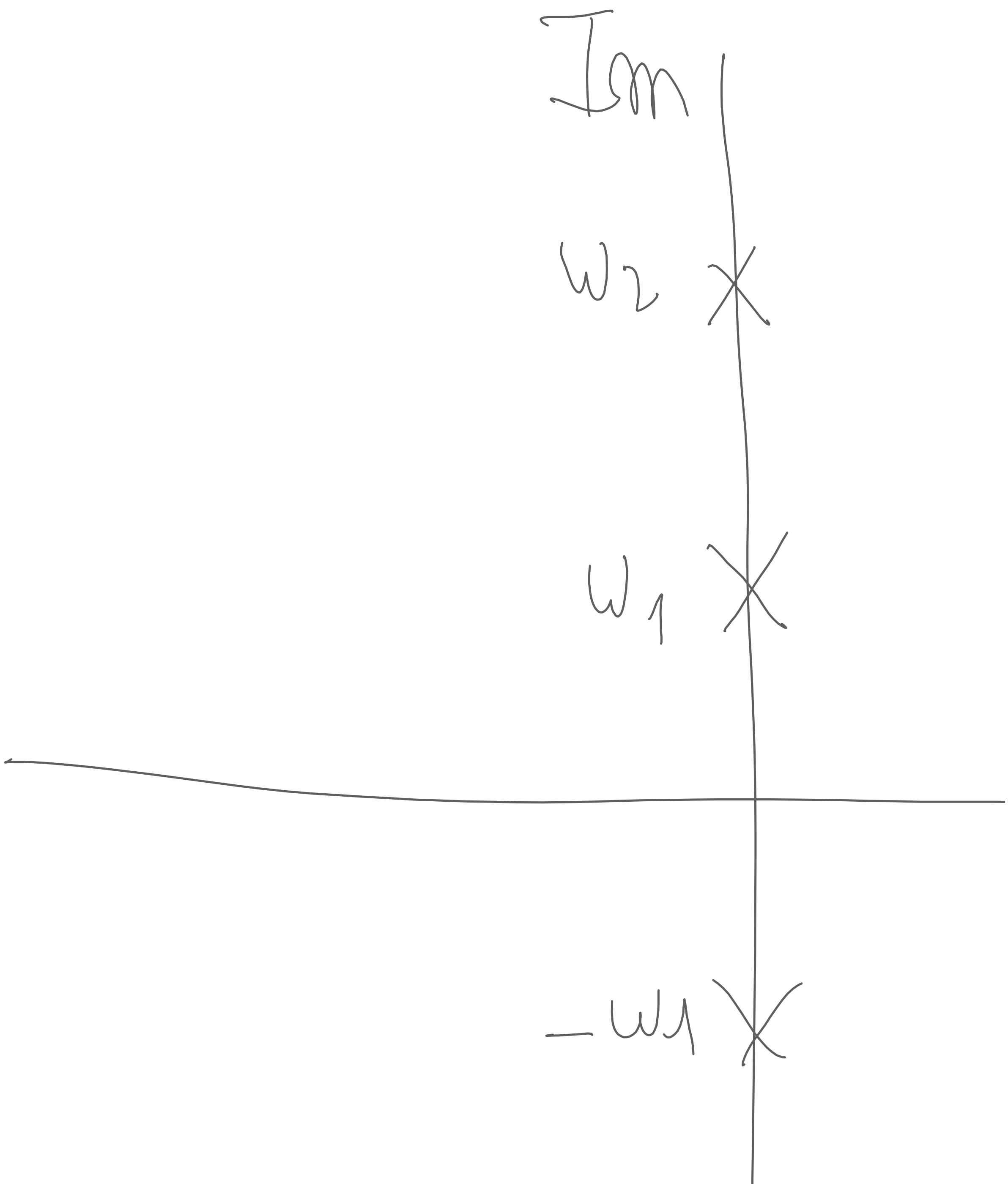
$$X_i(t) = \ldots$$

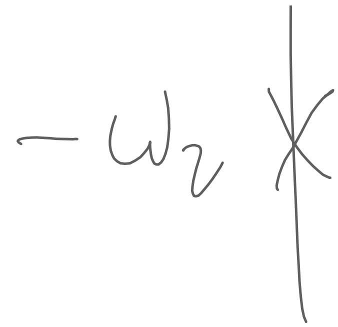
è periodico

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

k_1 k

$$\frac{\quad}{\omega_2} =$$




$-\omega_2$