$y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} y_\infty \neq y^\circ$ con costante di tempo $T = \dfrac{c}{\sigma + K}$

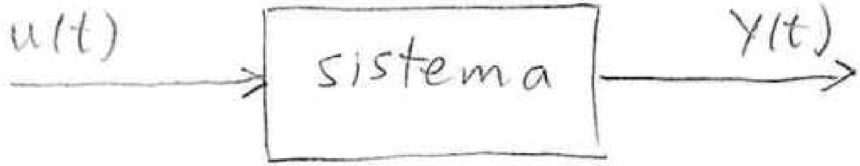
$$\left.\begin{array}{l} \text{l'errore } y^\circ - y_\infty \\ \text{l'effetto di } d \text{ su } y^\circ \\ \text{la costante di tempo} \end{array}\right\} \text{diminuiscono con } K$$

K grande → prestazione buone (precisione e velocità)
→ costi elevati, problemi di implementazione

Il controllo in anello chiuso
- è in generale <u>robusto</u> (il controllore C_c non fa uso di misure di c e σ)
- richiede una misura accurata della variabile controllata

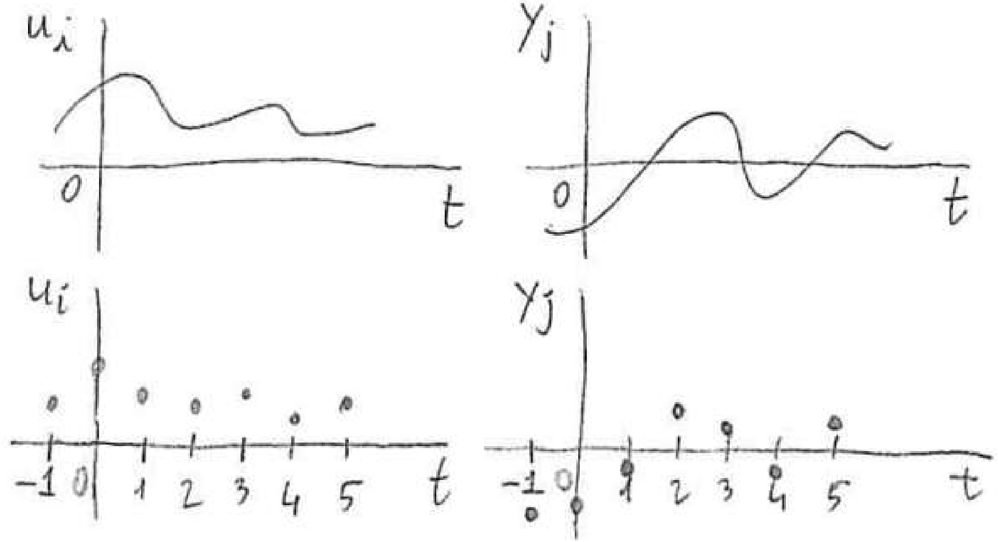
Il progetto di un sistema di controllo è tipicamente un problema <u>multiobiettivo</u> (prestazioni, costi, vincoli legislativi). Non esistono quindi soluzioni ottime ma solo di compromesso o al più <u>dominanti</u> (nel senso di Pareto)

<u>Nota</u>: p e m sono numeri interi ≥ 0 caratteristici del sistema



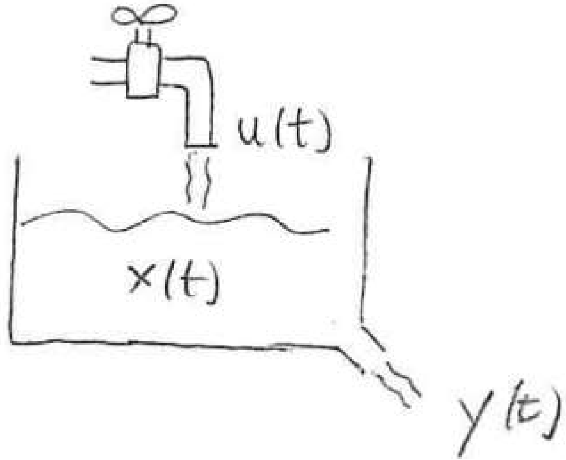
$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{equivalentemente} \\ u(t) \in \mathbb{R}^m,\ y(t) \in \mathbb{R}^p,\ \forall t \end{array} \right)$$

t
- continuo (t.c.), $t \in \mathbb{R}$
- discreto (t.d.), $t \in \mathbb{Z}$



Le variabili d'ingresso $u(t)$ e d'uscita $y(t)$ sono dette <u>variabili esterne</u> del sistema

Esempio 2 : serbatoio $(n = m = p = 1)$



t : continuo

$u(t)$: portata entrante $[kg/s]$

$y(t)$: portata uscente $[kg/s]$

$x(t)$: massa d'acqua contenuta $[kg]$

$$y(t) = k\,x(t) \longrightarrow g(x,u,t) = k\,x \quad \text{(non dipende da } u \text{ e } t\text{)}$$

($y(t)$ è proporzionale alla pressione sul fondo che è proporzionale alla massa d'acqua contenuta nel serbatoio)

Sistemi lineari

$f(x,u,t)$ e $g(x,u,t)$ sono combinazioni lineari di x e u

o, equivalentemente,

$$f(x,u,t) = A(t)\,x + B(t)\,u$$
$$g(x,u,t) = C(t)\,x + D(t)\,u$$

$A(t) = [\,a_{ij}(t)\,]$ matrice $n \times n$ di funzioni del tempo

$B(t) = [\,b_{ij}(t)\,]$ matrice $n \times m$ di funzioni del tempo

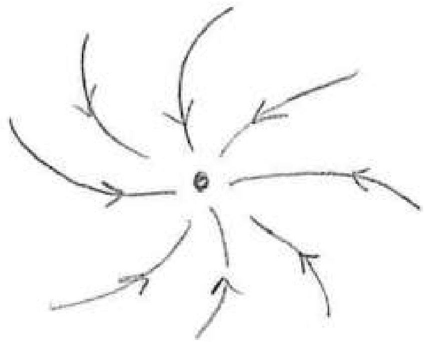
$C(t) = [\,c_{ij}(t)\,]$ matrice $p \times n$ di funzioni del tempo

$D(t) = [\,d_{ij}(t)\,]$ matrice $p \times m$ di funzioni del tempo

4 possibili regimi asintotici

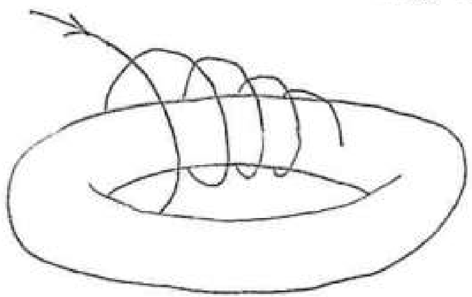
Se $x(t)$ resta limitato (come spesso accade nelle applicazioni) $x(t)$ converge per $t \to \infty$ a un sottoinsieme dello spazio di stato che può essere un

equilibrio (regime stazionario)

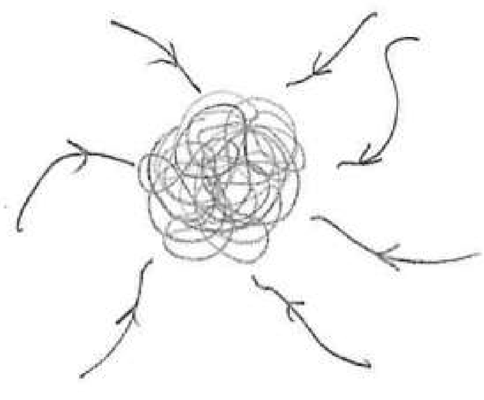


ciclo limite (regime periodico)
(sistemi non lineari e $n \geq 2$ a t.c.)

toro (regime quasi-periodico)
(sistemi non lineari e $n \geq 3$ a t.c.
$n \geq 2$ a t.d.)



strano attrattore (regime caotico)
(sistemi non lineari e $n \geq 3$ a t.c.)



Teorema 6 *(criterio di Hurwitz)*

Sia

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

il polinomio caratteristico di un sistema lineare a tempo continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$.
Si consideri la seguente matrice di dimensioni $n \times n$ (detta *matrice di Hurwitz*)

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \cdots \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \cdots \\ \alpha_7 & \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

in cui $\alpha_{n+i} = 0$ per $i > 0$. Allora, condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema è che siano positivi tutti i primi minori principali della matrice di Hurwitz. Cioè, posto

$$D_1 = \alpha_1 \quad D_2 = \det \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 \\ \alpha_3 & \alpha_2 \end{vmatrix} \quad D_3 = \det \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 \end{vmatrix} \quad \ldots$$

condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema è che $D_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$.

Cascata

Due sistemi sono collegati in cascata (*Fig. 3*) quando l'uscita del primo sistema è l'ingresso del secondo.

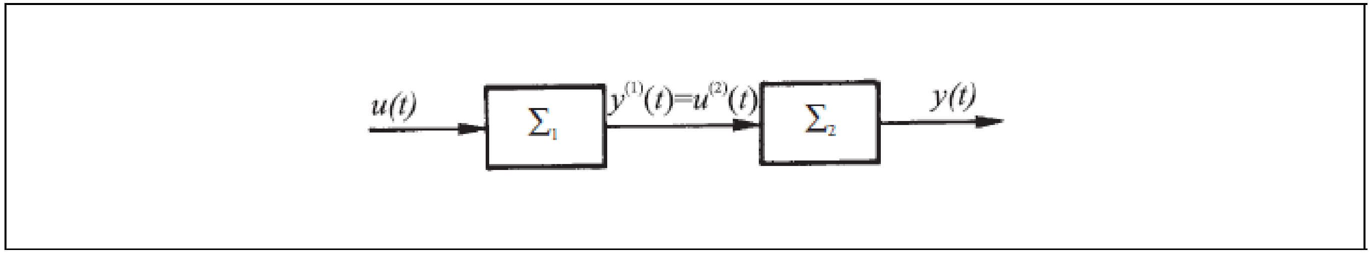


Figura 3 Due sistemi collegati in cascata

Le equazioni di stato di Σ sono pertanto

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)}(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \mathbf{b}_1 u(t)$$
$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)}(t) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}^{(2)}(t) + \mathbf{b}_2\left(\mathbf{c}_1^T\mathbf{x}^{(1)}(t) + d_1 u(t)\right)$$

mentre la trasformazione di uscita è data da

$$y(t) = \mathbf{c}_2^T\mathbf{x}^{(2)}(t) + d_2\left(\mathbf{c}_1^T\mathbf{x}^{(1)}(t) + d_1 u(t)\right)$$

In conclusione, Σ è individuato dalla seguente quaterna

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_2\mathbf{c}_1^T & \mathbf{A}_2 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 d_1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{vmatrix} d_2\mathbf{c}_1^T & \mathbf{c}_2^T \end{vmatrix} \qquad d = \begin{vmatrix} d_1 d_2 \end{vmatrix}$$

Si noti che la matrice $\mathbf{A}$ è triangolare a blocchi, per cui i suoi autovalori sono quelli delle matrici $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$.

Parallelo

Due sistemi sono collegati in parallelo (*Fig. 4*) quando hanno l'ingresso in comune e le loro uscite si sommano.

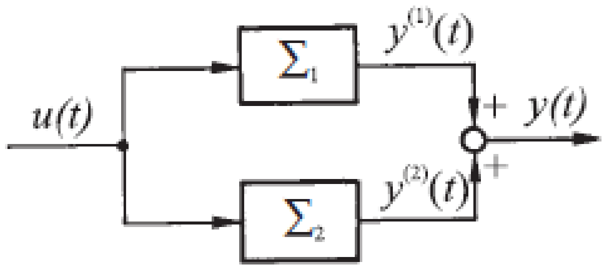


Figura 4 Due sistemi collegati in parallelo

È immediato verificare che l'aggregato Σ è individuato dalle seguenti quattro matrici

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{vmatrix} \mathbf{c}_1^T & \mathbf{c}_2^T \end{vmatrix} \qquad d = \begin{vmatrix} d_1 + d_2 \end{vmatrix}$$

Anche in questo caso la matrice $\mathbf{A}$ è triangolare (anzi diagonale) a blocchi così che i suoi autovalori sono quelli delle matrici $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$.

Retroazione

Due sistemi sono collegati in retroazione (*Fig. 5*) quando l'ingresso del primo è la somma di un ingresso esterno u e dell'uscita del secondo e l'ingresso del secondo è l'uscita del primo.

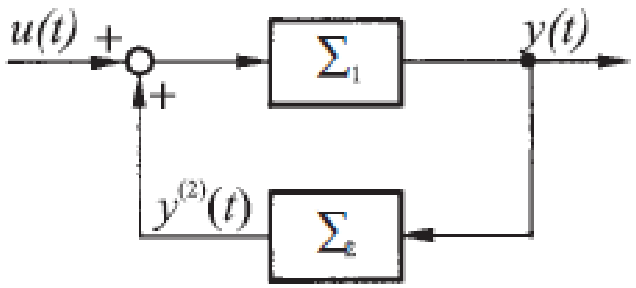


Figura 5 Due sistemi collegati in retroazione (Σ_1 è in linea di andata e Σ_2 in linea di retroazione)

Cascata

Con riferimento alla *Fig. 3* supponiamo che $\Sigma_1 = (N_1(p), D_1(p))$ e $\Sigma_2 = (N_2(p), D_2(p))$. Ciò significa che il modello ARMA del primo sottosistema è

$$D_1(p)y^{(1)}(t) = N_1(p)u(t)$$

Applicando, allora, a entrambi i membri di questa relazione l'operatore $N_2(p)$ e notando che $y^{(1)} = u^{(2)}$ otteniamo

$$N_2(p)D_1(p)u^{(2)}(t) = N_2(p)N_1(p)u(t)$$

Ma $N_2D_1 = D_1N_2$ e $N_2N_1 = N_1N_2$ perché derivare (o anticipare) una funzione prima r volte e poi s volte è equivalente a derivarla (o anticiparla) prima s volte e poi r volte, per cui si può scrivere

$$D_1(p)N_2(p)u^{(2)}(t) = N_1(p)N_2(p)u(t)$$

D'altra parte, la relazione ARMA del secondo sottosistema è

$$D_2(p)y(t) = N_2(p)u^{(2)}(t)$$

per cui, in definitiva, si ottiene

$$D_1(p)D_2(p)y(t) = N_1(p)N_2(p)u(t)$$

In altre parole, se due sistemi Σ_1 e Σ_2 sono collegati in cascata, il sistema risultante Σ è caratterizzato da un modello ARMA individuato dai seguenti due polinomi

$$N(p) = N_1(p)N_2(p) \qquad D(p) = D_1(p)D_2(p)$$

Ciò significa che la funzione di trasferimento $G(p) = N(p)/D(p)$ di Σ si ottiene moltiplicando tra loro le due funzioni di trasferimento $G_1(p)$ e $G_2(p)$ dei due sottosistemi, cioè

Esempio 4 *(ammortamento)*

Se un debito iniziale D viene ammortizzato restituendo per N anni consecutivi una cifra pari ad A, il debito x varia negli anni secondo l'equazione

$$x(t+1) = (1+\rho)x(t) - A$$

dove ρ è il fattore di interesse annuo. Si può allora applicare la formula di Lagrange (22) con $t = N$ e $u(i) = A$ a questo sistema ottenendo

$$x(N) = (1+\rho)^N D - A\sum_{i=0}^{N-1}(1+\rho)^{N-i-1}$$

Imponendo la condizione terminale $x(N) = 0$ e risolvendo rispetto ad A si ottiene la famosissima formula dell'ammortamento

$$A = \frac{\rho}{1-(1+\rho)^{-N}} D$$

♣

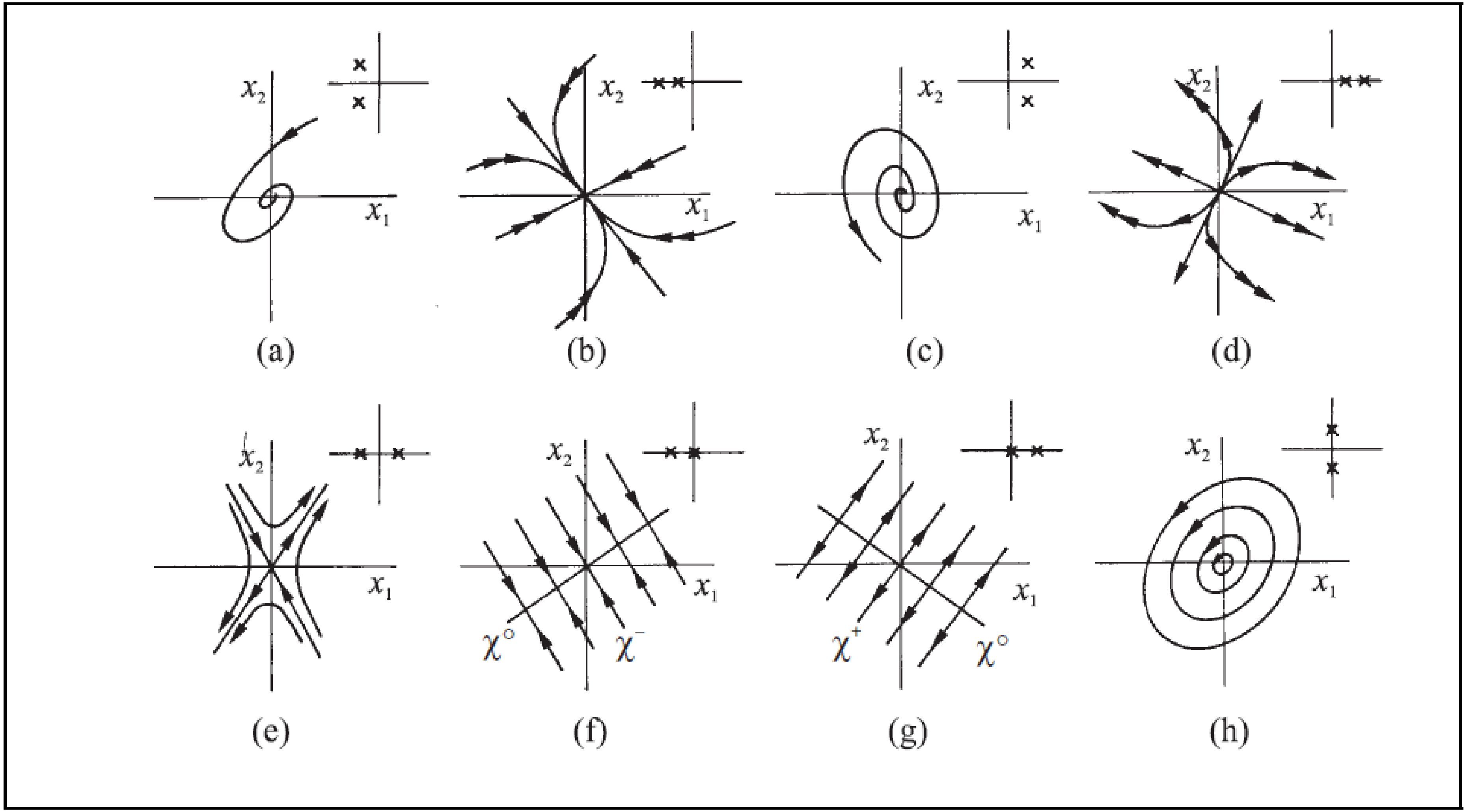


Figura 7 Traiettorie corrispondenti al movimento libero di sistemi del secondo ordine a tempo continuo: (a) (fuoco stabile) e (b) (nodo stabile) sono attrattori; (c) (fuoco instabile) e (d) (nodo instabile) sono repulsori; (e) è una sella; (f), (g) e (h) (centro) sono sistemi con varietà centro $\mathbf{X}^0$. Le traiettorie rettilinee corrispondono ad autovettori associati ad autovalori reali. La doppia freccia indica parti delle traiettorie percorse più rapidamente. Gli autovalori associati a ognuno degli otto quadri sono rappresentati in alto a destra nello spazio complesso.

Teorema 8 *(criterio della traccia e del determinante (valido solo per n=2))*

Un sistema a tempo continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ del secondo ordine è asintoticamente stabile se e solo se

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} < 0 \qquad \det \mathbf{A} > 0$$

Analogamente, un sistema a tempo discreto $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ del secondo ordine è asintoticamente stabile se e solo se

$$|\mathrm{tr}\mathbf{A}| < 1 + \det \mathbf{A} \qquad \det \mathbf{A} < 1$$

Teorema 7 *(criterio di Routh)*

Sia

$$\Delta_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

il polinomio caratteristico di un sistema lineare a tempo continuo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. Si costruisca la seguente tabella (detta *tabella di Routh*) di dimensioni $(n+1)\times(n+1)$

$$\begin{vmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & \cdots & r_{0n} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n0} & r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{vmatrix}$$

dove gli elementi della prima e della seconda riga sono, rispettivamente, i coefficienti con indice pari $(\alpha_0, \alpha_2, \ldots)$ e dispari $(\alpha_1, \alpha_3, \ldots)$ del polinomio caratteristico ($\alpha_0 = 1$ va considerato un coefficiente con indice pari e $\alpha_i = 0$ per $i > n$) mentre tutti gli altri elementi vanno calcolati con la formula

$$r_{i+1,j} = -\frac{1}{r_{i0}} \det \begin{vmatrix} r_{i-1,0} & r_{i-1,j+1} \\ r_{i0} & r_{i,j+1} \end{vmatrix}$$

Condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema è che siano positivi tutti gli elementi r_{i0} della prima colonna della tabella di Routh.

Inoltre, se nella prima colonna non esistono elementi nulli, il numero di autovalori con parte reale positiva coincide con il numero di volte in cui scorrendo dall'alto verso il basso (o dal basso verso l'alto) gli elementi della prima colonna si passa da un elemento positivo a uno negativo e viceversa.

$$y_{for}(t) = \int_0^t g(t-\xi)u(\xi)d\xi \tag{35}$$

è nota come *integrale di convoluzione* e mostra come la conoscenza della risposta all'impulso sia necessaria e sufficiente a determinare l'uscita forzata del sistema in corrispondenza di un qualsiasi ingresso. In altre parole, nella risposta all'impulso è contenuta tutta la descrizione del sistema per quanto riguarda la relazione tra ingresso e uscita con stato iniziale nullo. Questo fatto sarà ulteriormente dettagliato nel prossimo paragrafo.

Teorema 19 (*derivata nell'origine delle risposte canoniche*)

La prima derivata non nulla per $t = 0$ della risposta allo scalino [all'impulso] [alla rampa] di un sistema proprio a tempo continuo con eccesso di poli pari a $r \geq 1$ con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\beta_r s^{n-r} + \ldots + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_n}$$

è la r-esima [$(r-1)$-esima] [$(r+1)$-esima] ed è pari a β_r.

Teorema 22 (*regime periodico dei sistemi a tempo discreto*)

Si consideri il sistema lineare a tempo discreto $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$ sottoposto a ingresso periodico $u_T(\cdot)$ (T è un numero intero) e si supponga che gli autovalori λ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, della matrice $\mathbf{A}$ siano tali che

$$\lambda_j \neq e^{i\frac{2k\pi}{T}}$$

per ogni k intero. Esiste allora uno e un solo regime periodico dell'uscita $y_T(\cdot)$ dato da

$$\begin{vmatrix} y_T(0) \\ y_T(1) \\ \vdots \\ y_T(T-1) \end{vmatrix} = \left[\mathbf{O}_{T-1}\left(\mathbf{I} - \mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{R}_T + \mathbf{D}^*\right]\begin{vmatrix} u_T(T-1) \\ u_T(T-2) \\ \vdots \\ u_T(0) \end{vmatrix} \qquad (39)$$

dove

$$\mathbf{O}_{T-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A}^{T-1} \end{vmatrix} \qquad \mathbf{R}_T = \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \cdots & \mathbf{A}^{T-1}\mathbf{b} \end{vmatrix}$$

mentre $\mathbf{D}^*$ è la seguente matrice di dimensione $T \times T$

$$\mathbf{D}^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & g(0) \\ 0 & 0 & \cdots & g(0) & g(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & g(0) & \cdots & g(T-3) & g(T-2) \\ g(0) & g(1) & \cdots & g(T-2) & g(T-1) \end{vmatrix}$$

dove $g(\cdot)$ è la risposta all'impulso del sistema.

Teorema 9 *(condizione di completa raggiungibilità)*

Un sistema lineare $(\mathbf{A},\mathbf{b})$ di ordine n è completamente raggiungibile se e solo se gli n vettori $\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$, detti vettori di raggiungibilità, sono linearmente indipendenti. Inoltre, in un sistema completamente raggiungibile ogni stato è raggiungibile dall'origine in un tempo qualsiasi se il sistema è a tempo continuo e in al più n transizioni se il sistema è a tempo discreto.

dove $N_b(p)$ e $\Delta_b(p)$ sono i polinomi che individuano il modello ARMA della parte raggiungibile e osservabile. Gli zeri dei polinomi $N_b(p)$ e $\Delta_b(p)$ si chiamano, rispettivamente, *zeri* e *poli* della funzione di trasferimento (o del sistema) e sono indicati con z_i e p_i. La funzione di trasferimento di un sistema proprio con parte raggiungibile e osservabile di dimensione n (per non appesantire la notazione scriviamo n anziché n_b) può allora essere scritta nella forma

$$G(p) = \frac{\beta_r p^{n-r} + \beta_{r+1} p^{n-r-1} + \ldots + \beta_n}{p^n + \alpha_1 p^{n-1} + \ldots + \alpha_n}$$

dove $r \geq 1$ è il cosiddetto *grado relativo* (o eccesso di poli), oppure nella forma

$$G(p) = \rho \frac{(p - z_1)(p - z_2)\ldots(p - z_{n-r})}{(p - p_1)(p - p_2)\ldots(p - p_n)}$$

dove ρ si chiama *costante di trasferimento*. Poli e zeri hanno grande importanza in tutta una serie di problemi relativi alla teoria dei sistemi e del controllo. In particolare, vedremo che è di grande interesse sapere se in un sistema a tempo continuo [discreto] poli e zeri hanno parte reale negativa [modulo minore di 1]. Come si dice in gergo, interessa cioè sapere se poli e zeri sono "stabili".

Teorema 15 *(condizione di stabilità esterna)*

> Un sistema è esternamente stabile se e solo se la sua parte raggiungibile e osservabile è asintoticamente stabile, cioè se e solo se i suoi poli sono stabili ($\mathrm{Re}(p_i) < 0$ nei sistemi a tempo continuo e $|p_i| < 1$ nei sistemi a tempo discreto).

Questo risultato è dovuto al fatto che solo la parte (b) è responsabile delle relazioni intercorrenti tra ingresso e uscita qualora lo stato iniziale sia nullo. Nel caso, invece, lo stato iniziale non sia nullo, l'uscita risente anche del contributo della parte (d), contributo che è però, per definizione, limitato se tale parte è stabile (semplicemente o asintoticamente). Si può così concludere che l'uscita di un sistema è limitata per qualsiasi stato iniziale e qualsiasi ingresso limitato se e solo se la sua parte raggiungibile e osservabile (b) è asintoticamente stabile e la sua parte non raggiungibile e osservabile (d) è stabile.

Nel caso (frequentissimo) dei sistemi completamente raggiungibili e osservabili, i poli coincidono con gli autovalori e stabilità esterna e interna sono equivalenti. Sui tempi lunghi, l'uscita di un sistema completamente raggiungibile e osservabile con poli stabili si può quindi calcolare a partire dall'ingresso anche senza conoscere lo stato iniziale: per questo è sufficiente, ad esempio, simulare il comportamento del sistema fissando arbitrariamente le condizioni iniziali.