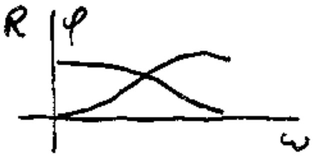
DIAGRAMMI POLARI

Risposta in frequenza $= \{ R(\cdot), \varphi(\cdot) \}$

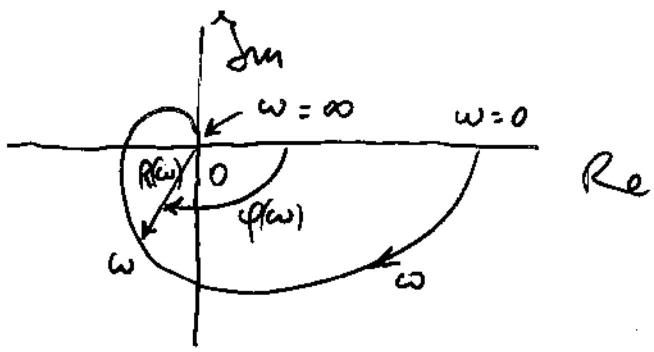
Rappresentazione cartesiana



Rappresentazione polare

$$G(i\omega) = |G(i\omega)|\, e^{i(\arg G(i\omega))} = R(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)}$$

$$0 \le \omega < \infty$$



un esempio di diagramma polare

Per ogni $\omega \geq 0$ si è in un punto del diagramma polare.
Di solito si indica, con una freccia sul diagramma, il verso delle ω crescenti.

Di solito si evidenzia il punto corrispondente a $\omega = 0$. Se

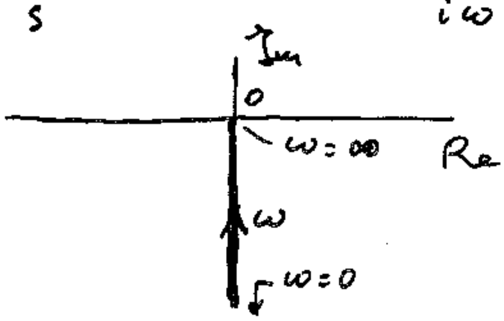
$$G(s) = \mu \frac{\prod (1 + s t_i)}{\prod (1 + s T_i)}$$

allora per $\omega = 0$ si ha $G(0) = \mu$ e il punto da cui parte il diagramma polare è sull'asse reale.

Di solito si evidenzia il punto corrispondente a $\omega = \infty$.

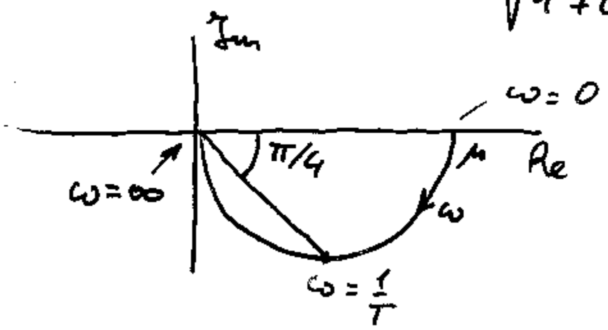
Esempio

$$G(s) = \frac{1}{s} \qquad G(i\omega) = \frac{1}{i\omega} = \frac{1}{\omega}(-i) = \frac{1}{\omega}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$$



Esempio

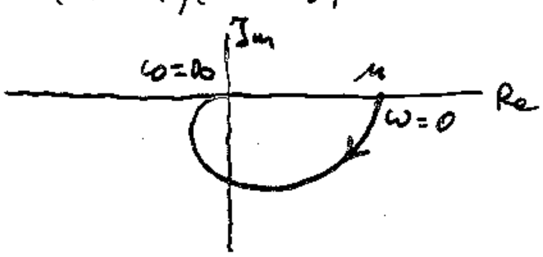
$$G(s) = \frac{\mu}{1+sT} \qquad G(i\omega) = \frac{|\mu|}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}\, e^{-i\,\mathrm{arctg}\,\omega T}$$



$\mu > 0$

Esempio

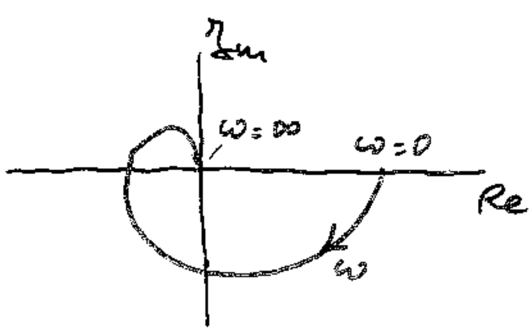
$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \qquad G(i\omega) = \frac{|\mu|}{\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}\, e^{i\varphi}$$



$$\varphi = -\mathrm{arctg}\,\omega T_1 - \mathrm{arctg}\,\omega T_2$$

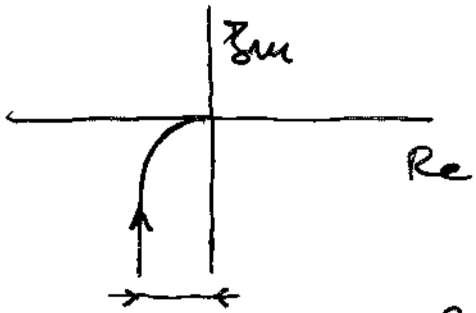
Esempio

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$$



Esempio

$$G(s) = \frac{\mu}{s(1+sT)}$$

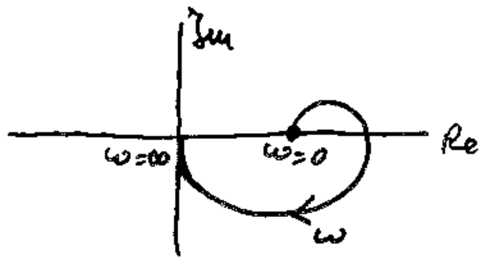


$-\mu T$ perché $\left. \mathrm{Re}\left[G(i\omega)\right]\right|_{\omega=0} = -\mu T$

Esempio

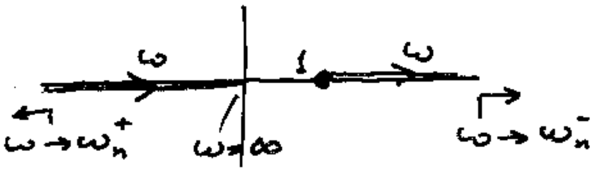
$$G(s) = \mu \frac{(1+s\tau_1)}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

con $\tau_1 > T_1 > T_2$



Esempio

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+\omega_n^2} \qquad G(i\omega) = \frac{\omega_n^2}{(i\omega)^2+\omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2-\omega^2} \text{ (reale)}$$



Esempio

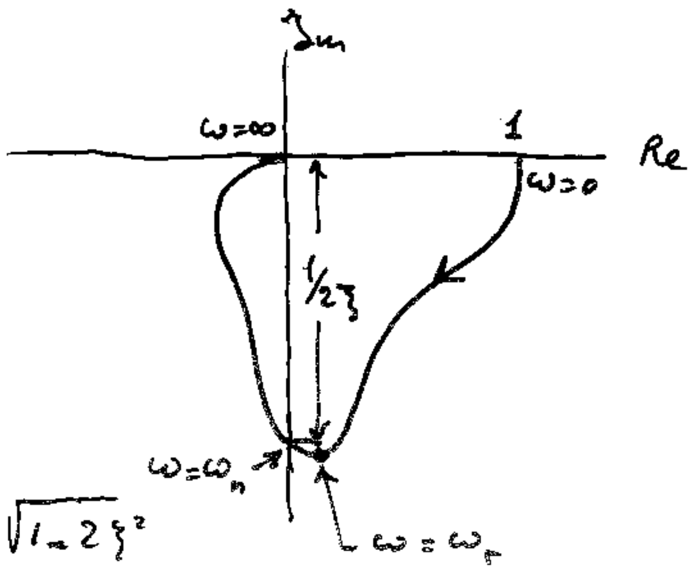
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$G(0) = 1$

$G(i\omega_n) = \frac{\omega_n^2}{i\,2\xi\omega_n^2} = -\frac{i}{2\xi}$

$G(\infty) = 0$

$|G(i\omega)| = \max$ per $\omega = \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$



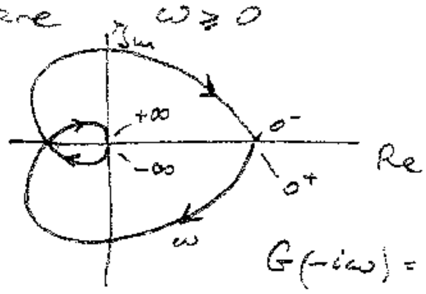
Diagrammi, regola e criterio di Nyquist

[1] $G(s) \rightarrow G(i\omega) \rightarrow$ diagramma polare $\omega \geq 0$

$\downarrow$

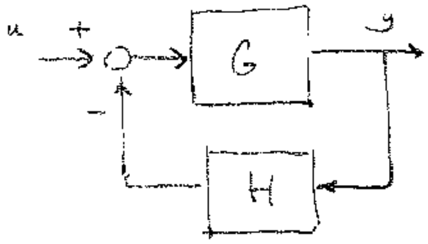
diagramma di Nyquist

$-\infty \leq \omega \leq +\infty$



$G(-i\omega) = \bar{G}(i\omega)$

[2] regola di Nyquist



$$F = \frac{G}{1+GH}$$

$$P^+_F = P^+_{GH} - \overset{\curvearrowleft}{N}_{GH/-1}$$

P^+_F: numero di poli instabili ad anello chiuso

P^+_{GH}: numero di poli instabili ad anello aperto

$\overset{\curvearrowleft}{N}_{GH/-1}$: numero di giri in senso antiorario del diagramma di Nyquist dell'anello aperto ~~intorno~~ al punto -1

Osservazione : anche il criterio di Routh permette di calcolare P^+_F

[3] criterio di stabilità di Nyquist

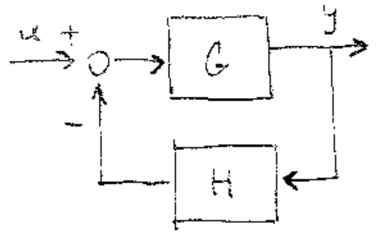
Il sistema ad anello chiuso è esternamente stabile se e solo se

$$\boxed{\overset{\curvearrowleft}{N}_{GH/-1} = P^+_{GH}}$$

Osservazione nel caso di sistemi con anello aperto stabile il criterio di stabilità del sistema in anello chiuso è

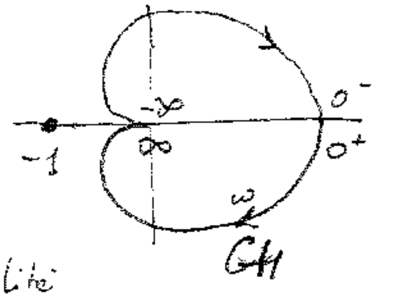
$$\boxed{\overset{\curvearrowleft}{N}_{GH/-1} = 0}$$

Esempi di uso di regola e criterio di Nyquist



$$F = \frac{G}{1+GH} \qquad P^+_F = P^+_{GH} - \overset{\curvearrowleft}{N}_{GH/-1}$$

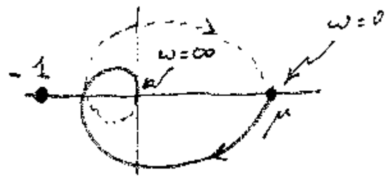
① $GH = \dfrac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$ $\qquad P^+_{GH} = 0$

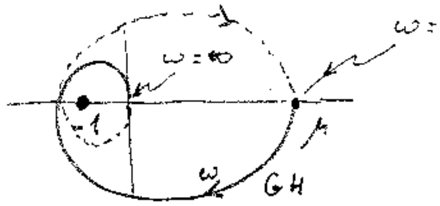


$\overset{\curvearrowleft}{N}_{GH/-1} = 0$

Quindi $P^+_F = 0 - 0 \Rightarrow$ ett. stabilità

② $GH = \dfrac{\mu}{(1+sT)^3}$





μ piccolo

$\overset{\curvearrowleft}{N}_{GH/-1} = 0$

$P^+_F = 0 - 0 = 0 \Rightarrow$ stab.

μ grande

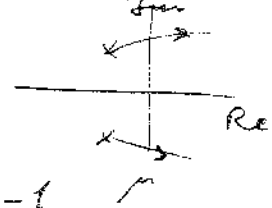
$\overset{\curvearrowleft}{N}_{GH/-1} = -2$

$P^+_F = 0 - (-2) = 2$

instabilità (con due poli instabili)

<u>Domanda</u>

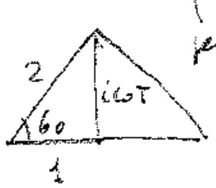
Qual'è il valore critico di μ ?



$$\frac{\mu}{|1+i\omega T|^3} = \frac{\mu}{2^3} = 1$$

per passare per il punto -1

per avere $60° \times 3 = 180°$

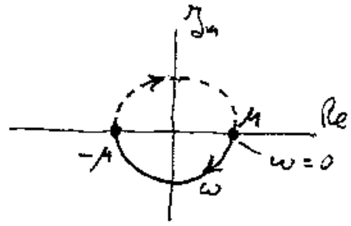


conclusione $\mu_{crit} = 8$

<u>Osservazione</u> : entrambi i problemi ① e ② si potevano risolvere in altro modo (autovalori della matrice A, criterio di Routh o Hurwitz simulazione)

(3) $GH = \mu \dfrac{1 - sT}{1 + sT}$ (sfasatore puro)

$P^+_{GH} = 0$



$\mu < 1 \Rightarrow$ il punto -1 è esterno al cerchio $\Rightarrow \overset{\curvearrowleft}{N}_{GH/-1} = 0$

$\Downarrow$

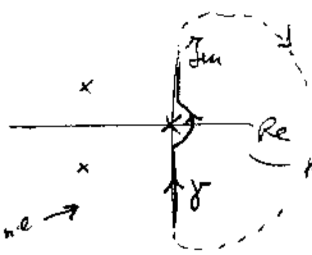
stabilità

$\mu > 1 \Rightarrow$ il punto -1 è interno al cerchio $\Rightarrow \overset{\curvearrowleft}{N}_{GH/-1} = -1$

$\Downarrow$

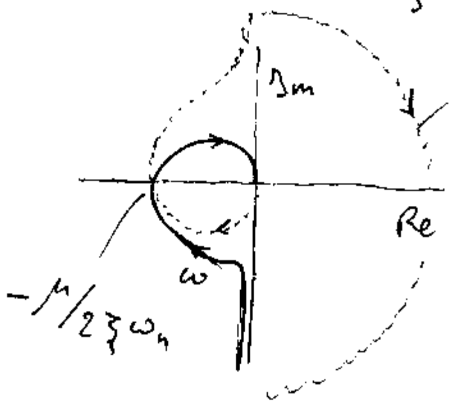
instabilità

(4) $GH = \mu \dfrac{1}{s} \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$



$P^+_{GH} = 0$

poli ad anello aperto (il polo nell'origine va evitato con un cerchietto)



cerchio all'infinito corrispondente al cerchietto nell'origine

$$GH(i\omega) = \frac{\mu}{i\omega} \frac{\omega_n^2}{\underbrace{(i\omega)^2}_{-\omega^2} + i2\xi\omega\omega_n + \omega_n^2}$$

per ω piccolo $GH \cong \dfrac{\mu}{i\omega} = -i\dfrac{\mu}{\omega}$

per $\omega \to \infty$ $GH \to 0$ con $3 \times \frac{\pi}{2}$ ritardo

per $\omega = \omega_n$ $GH = -\dfrac{\mu}{2\xi\omega_n}$

Quindi $\boxed{\mu < 2\xi\omega_n} \Rightarrow$ punto -1 esterno $\Rightarrow \overset{\curvearrowleft}{N}_{GH/-1} = 0$

$\Downarrow$

stabilità

<u>Risolviamo con il metodo di Hurwitz</u>

$$1 + GH = 0 \Rightarrow s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) + \mu\omega_n^2 = 0$$

$$s^3 + 2\xi\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + \mu\omega_n^2 = 0$$

$$H = \begin{vmatrix} 2\xi\omega_n & 1 & 0 \\ \mu\omega_n^2 & \omega_n^2 & 2\xi\omega_n \\ 0 & 0 & \mu\omega_n^2 \end{vmatrix}$$

$D_1 = 2\xi\omega_n > 0$ sempre

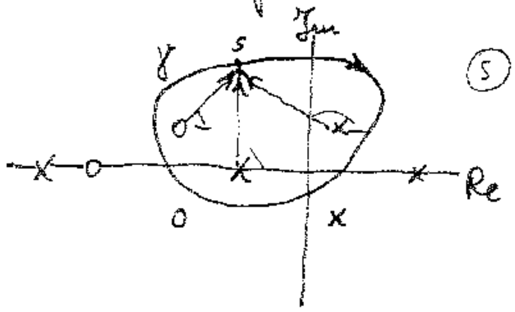
$D_2 = 2\xi\omega_n^3 - \mu\omega_n^2 > 0$ per $\boxed{\mu < 2\xi\omega_n}$

$D_3 = \dots > 0$ se $D_2 > 0$

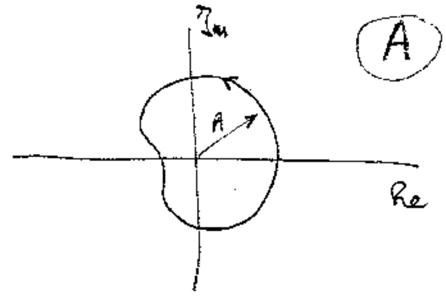
Dimostrazione della regola di Nyquist

Premessa

$A(s)$ = funzione di trasferimento



$\xRightarrow{A(s)}$

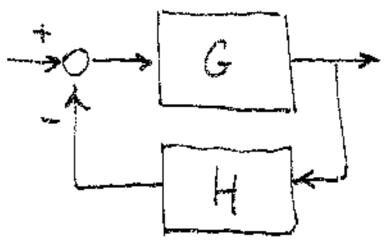


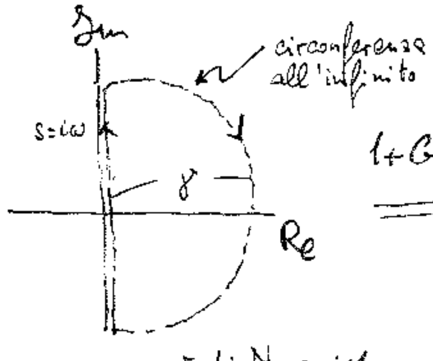
poli e zeri di $A(s)$
e linea chiusa qualsiasi γ
percorsa in senso orario

$\gamma \Rightarrow \Gamma$: i giri in senso orario di $A(s)$ sono pari al numero di zeri meno il numero di poli all'interno di γ, cioè

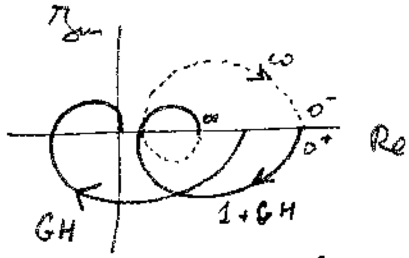
$$\overset{\curvearrowleft}{N}_{A/0} = P_{A/\gamma} - Z_{A/\gamma} \quad \Leftarrow \quad \overset{\curvearrowright}{N}_{A/0} = Z_{A/\gamma} - P_{A/\gamma}$$

Applicazione ai sistemi retroazionati





$\xRightarrow{1+GH}$



percorso γ di Nyquist

diagramma polare di GH e diagramma di Nyquist di $1+GH$

$$F = \frac{G}{1+GH}$$

$$P_F^+ = Z_{1+GH}^+$$

poli positivi di F — zeri positivi di $1+GH$

$$\overset{\curvearrowleft}{N}_{1+GH/0} = P_{1+GH}^+ - Z_{1+GH}^+$$

$$\overset{\curvearrowleft}{N}_{GH/-1} = P_{GH}^+ - P_F^+$$

per cui, risolvendo rispetto a P_F^+, si ottiene la regola di Nyquist

$$P_F^+ = P_{GH}^+ - \overset{\curvearrowleft}{N}_{GH/-1}$$

PROBLEMI

T. II

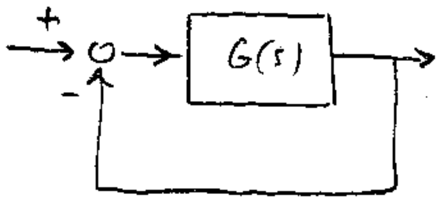
Si verifichi che se il diagramma di Nyquist di GH passa per il punto -1

(a) $\overset{\curvearrowleft}{N}_{GH/-1}$ non è definito

(b) il sistema ad anello chiuso ha due poli immaginari e, pertanto, non è esternamente stabile.

T. II

Si consideri il sistema di figura



con

$$G(s) = \rho \, \frac{s}{s^2+1}$$

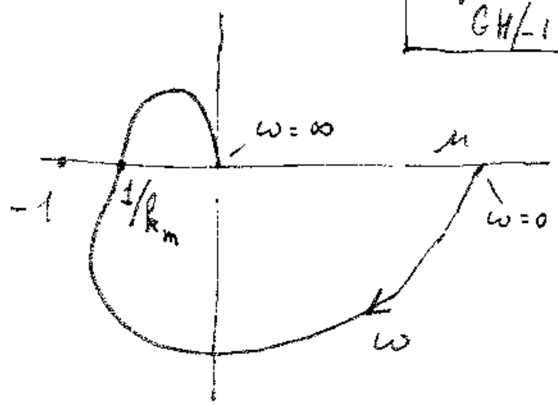
e si mostri che tale sistema è esternamente stabile per tutti i valori di $\rho > 0$. Per verificare la correttezza della soluzione si suggerisce di risolvere il problema anche con il metodo di Hurwitz.

Margine di guadagno e margine di fase

Ipotesi anello aperto stabile

$$\Downarrow$$

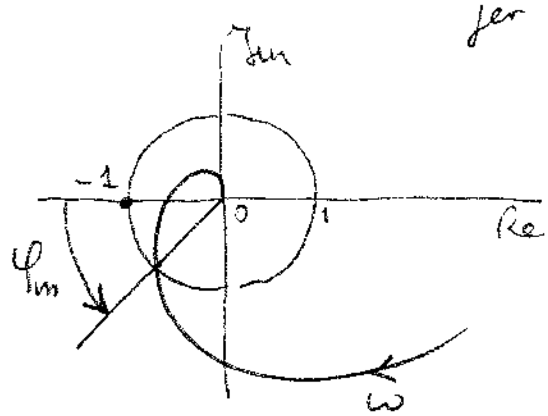
$\boxed{\hat{N}_{GH/-1} = 0}$ ⇔ esterna stabilità anello chiuso



$\boxed{k_m = \text{margine di guadagno}}$

Per mandare il sistema in instabilità si deve moltiplicare il guadagno per k_m

Osservazione : se il valore del guadagno è molto incerto è bene che k_m sia grande per garantire la stabilità



$\boxed{\varphi_m = \text{margine di fase}}$

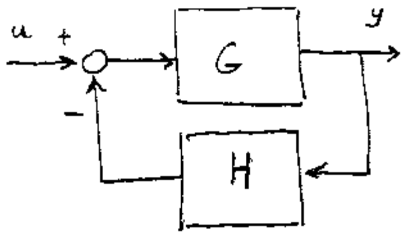
di solito è espresso in gradi

$\left(\varphi_m \frac{\pi}{180}\right)$ è il margine di fase in radianti

Osservazione se c'è incertezza sulle costanti di tempo o se esistono ritardi ($e^{-\tau s}$) ~~[illegible]~~ qua e là nell'anello che sono stati trascurati nella modellizzazione è bene che φ_m sia grande (per esempio pari a 60°)

k_m e φ_m grandi ⇒ robustezza (cioè stabilità garantita anche per parametri diversi dai nominali)

Come calcolare k_m



μ = guadagno d'anello

k_m = margine di guadagno

μ_{crit} = valore critico del guadagno

($\mu < \mu_{crit}$ esterna stabilità

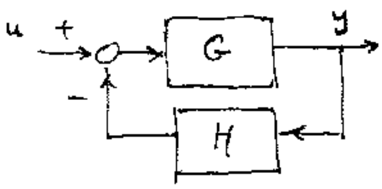
$\mu > \mu_{crit}$ esterna instabilità)

$k\mu = \mu_{crit}$

μ_{crit} può essere normalmente calcolato con facilità con il metodo di Hurwitz (o con quello di Routh) per cui si ha

$$\boxed{k_m = \frac{\mu_{crit}}{\mu}}$$

Esistono un gran numero di casi in cui μ_{crit} è noto (perché calcolabile analiticamente) in funzione delle costanti di tempo del sistema in anello aperto. Due di questi casi li abbiamo già visti:

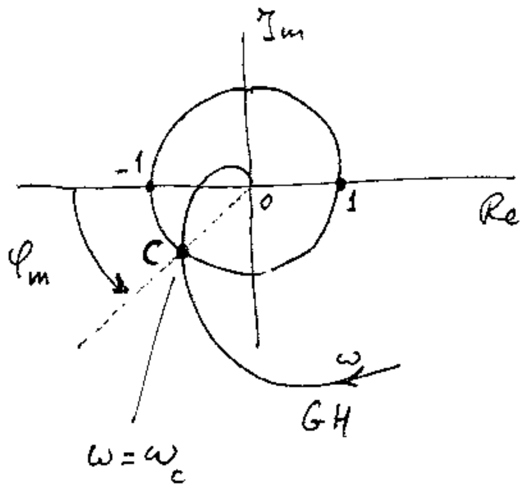


$$GH = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)} \qquad \mu_{crit} = (T_1+T_2+T_3)\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}\right) - \dots$$

$$GH = \frac{\mu}{s}\,\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad \mu_{crit} = 2\xi\omega_n$$

Un altro caso interessante, che studieremo in seguito, è $GH = \mu \dfrac{e^{-\tau s}}{(1+sT)}$

Come calcolare φ_m



Per $\omega = \omega_c$ deve essere

$$|GH(i\omega_c)| = 1$$

$$\arg GH(i\omega_c) = -\pi + \varphi_m \frac{\pi}{180} \qquad (*)$$

(ricordiamo che φ_m è in gradi)

Dalle $(*)$ segue che

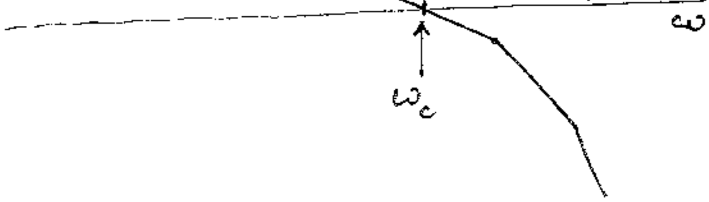
$$\varphi_m = 180^\circ + \frac{180}{\pi} \arg GH(i\omega_c)$$

negativo nel caso della figura

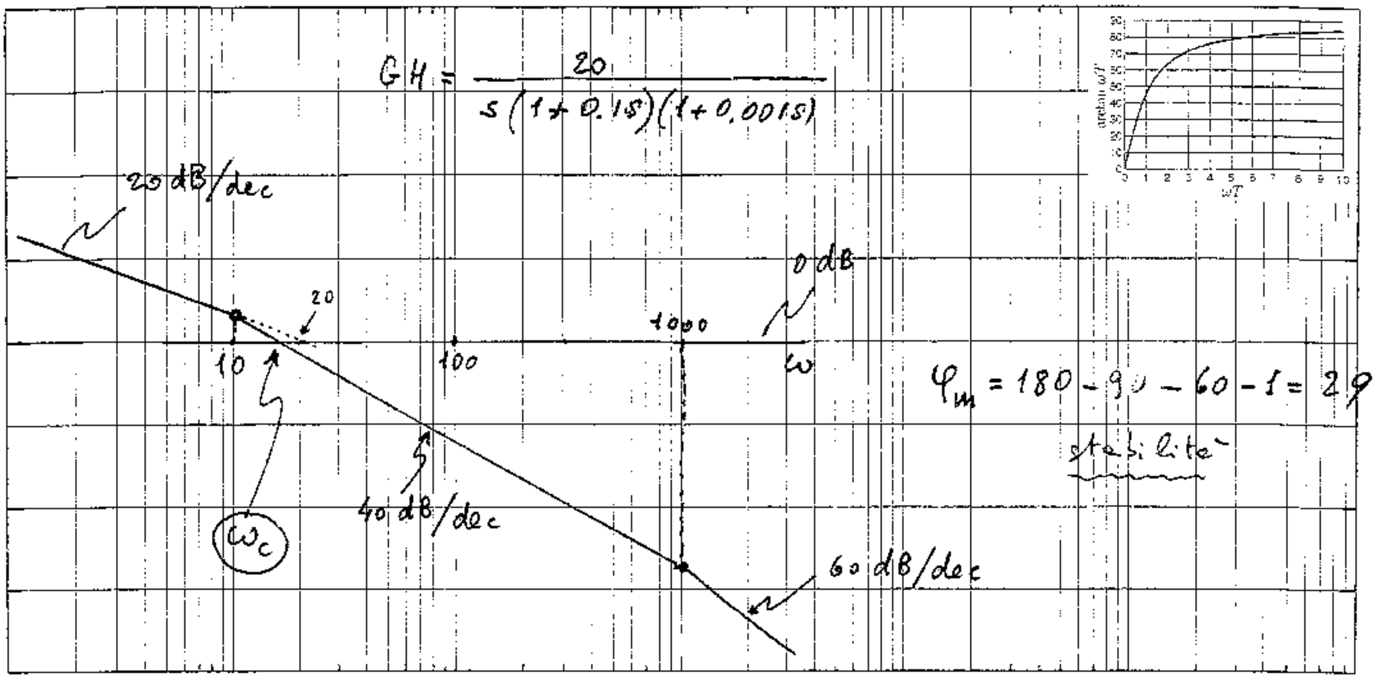
Si ricorda che se

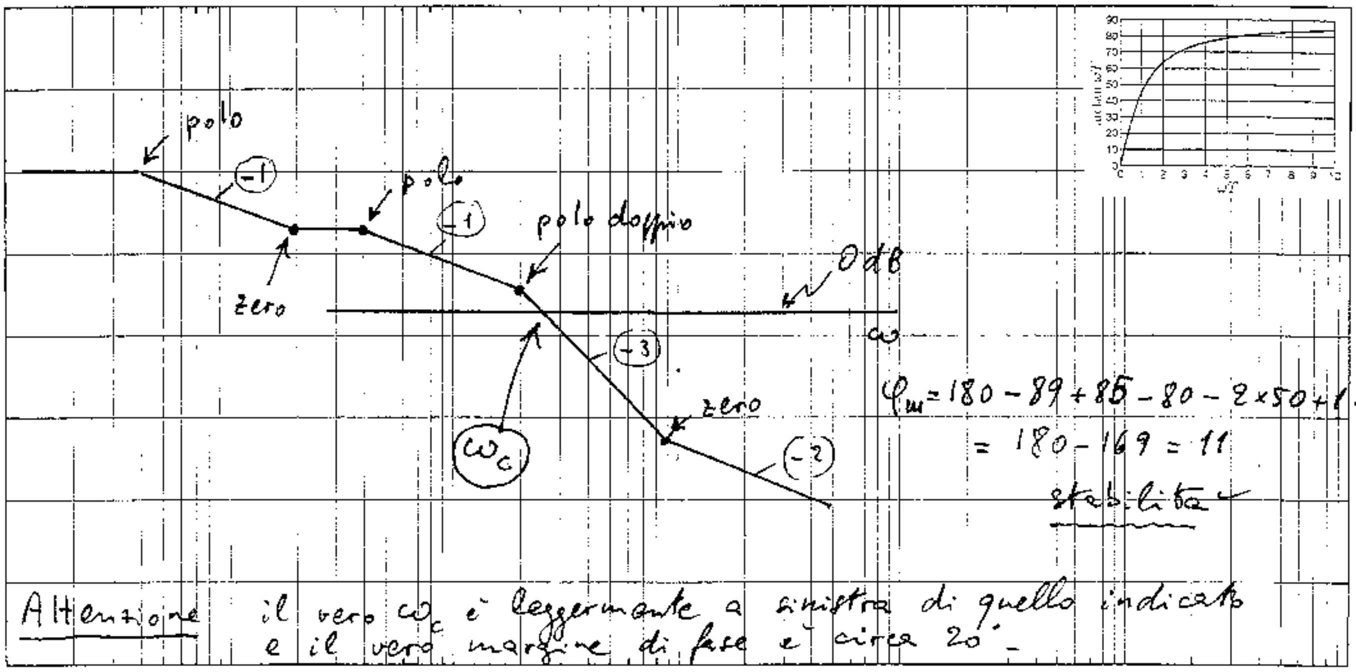
$$GH(s) = \frac{\mu}{s^h} \frac{\prod (1 + s\tau_j)}{\prod (1 + sT_j)} \Rightarrow \arg GH(i\omega) = \arg \mu - h\frac{\pi}{2} + \sum \operatorname{arctg}(\omega \tau_j) - \sum \operatorname{arctg}(\omega T_j)$$

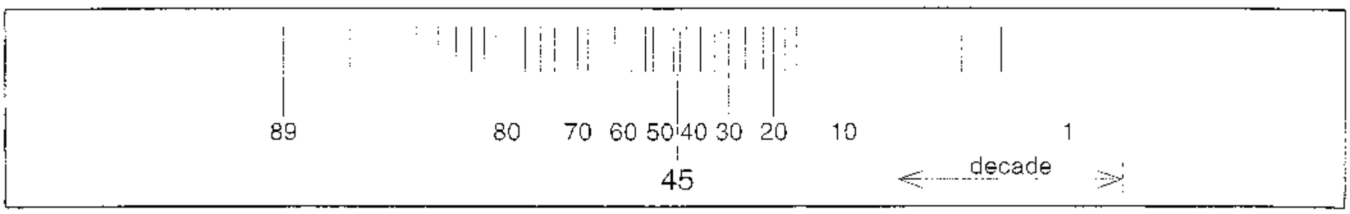
Per quanto riguarda il calcolo di ω_c è utile usare i diagrammi di Bode approssimati



Calcolo di φ_m

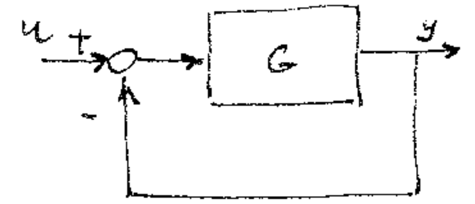




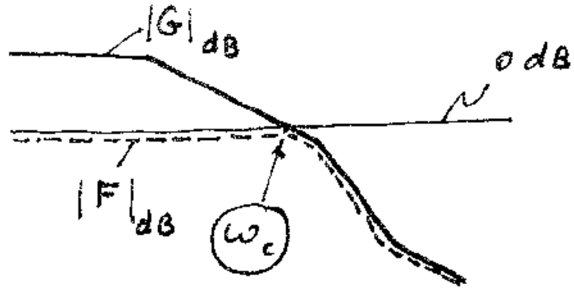


φ_m e risonanza dell'anello chiuso

Consideriamo il sistema di controllo con $H = 1$



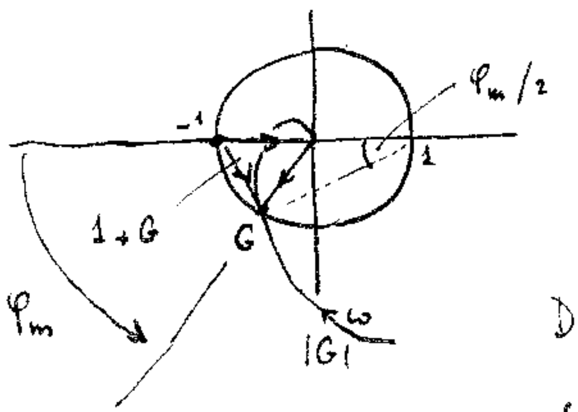
$$F = \frac{G}{1+G}$$



—— $|G|_{dB}$ anello aperto

- - - - $|F|_{dB}$ anello chiuso

Il sistema ad anello chiuso è un passa-basso con $B = [0 ; \omega_c]$



margine di fase in radianti

$$\frac{|1+G|}{2} = \operatorname{sen}(\varphi_m^r/2) \qquad \text{per } \omega = \omega_c \quad (*)$$

D'altra parte, se supponiamo che il sistema ad anello chiuso abbia due poli complessi coniugati come poli dominanti, possiamo scrivere

$$F = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Infine, supponendo $\omega_n \cong \omega_c$, si ottiene

$$|F(i\omega_c)| = \left| \frac{\omega_c^2}{\cancel{-\omega_c^2} + 2\xi\omega_c^2 i + \cancel{\omega_c^2}} \right| = \frac{1}{2\xi} \qquad (**)$$

Poiché

$$|F(i\omega_c)| = \frac{\overbrace{|G(i\omega_c)|}^{1}}{|1+G(i\omega_c)|} = \frac{1}{|1+G(i\omega_c)|}$$

dalle (*) e (**) otteniamo

$$\frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2\,\mathrm{sen}(\varphi_m^r/2)} \Longrightarrow \boxed{\xi = \mathrm{sen}(\varphi_m^r/2)}$$

Approssimando $\mathrm{sen}(\varphi_m^r/2)$ con $\varphi_m^r/2$ ed esprimendo il margine di fase in gradi, si ottiene

$$\xi = \frac{\varphi_m^r}{2} = \frac{\varphi_m^\circ\,\pi}{2\cdot 180}$$

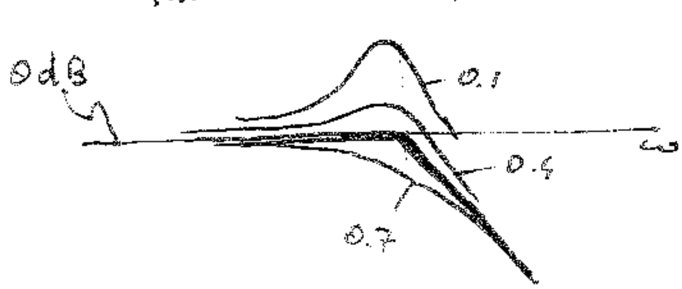
Questa relazione è, a volte, approssimata con la semplice regola

$$\boxed{\xi = \frac{\varphi_m^\circ}{100}}$$

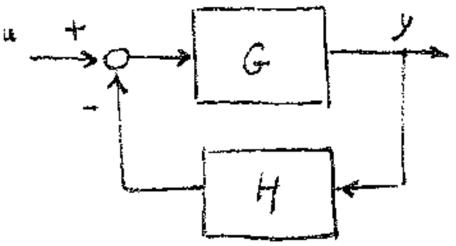
$\varphi_m = 70^\circ \Rightarrow \xi = 0.7$ non c'è risonanza

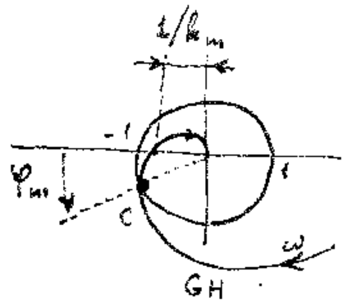
$\varphi_m = 40^\circ \Rightarrow \xi = 0.4$ debole risonanza

$\varphi_m = 10^\circ \Rightarrow \xi = 0.1$ forte risonanza



Robustezza



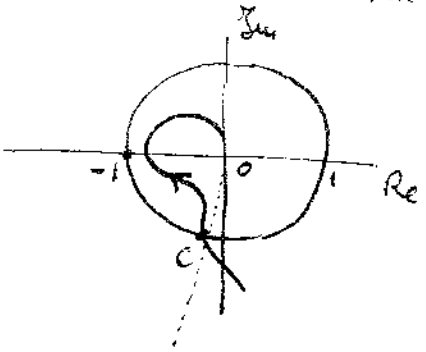


$\left.\begin{matrix}\varphi_m \\ k_m\end{matrix}\right\}$ "grandi"

Ipotesi : $P^+_{GH} = 0$, un solo punto C

$\varphi_m = 0 \iff k_m = 1$

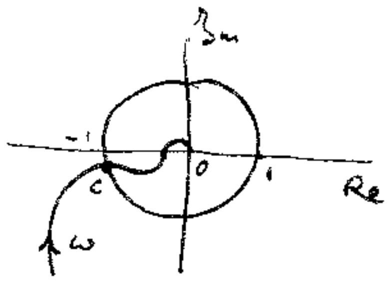
Non basta che φ_m sia grande



φ_m grande

robustezza bassa (perché k_m basso)

Non basta che k_m sia grande



k_m grande

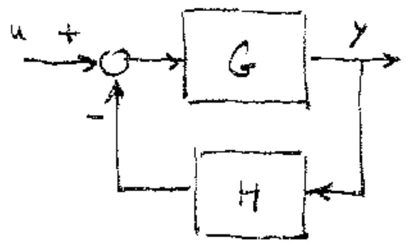
robustezza bassa (perché φ_m basso)

$k_m \mu = \mu_{crit}$

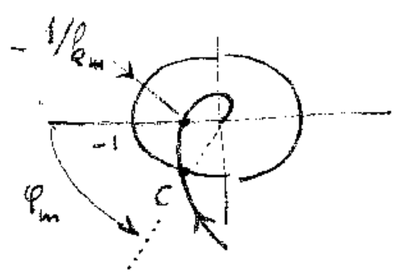
guadagno nominale anello aperto ($\mu = GH(0)$)

k_m grande $\iff$ μ piccolo

Criterio di Bode della pendenza -1



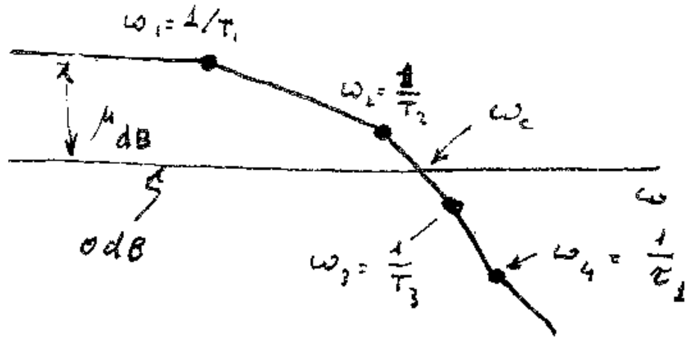
Ipotesi : $P^{+}_{GH} = 0$, un solo punto C



$\varphi_m > 0$

$k_m > 1$

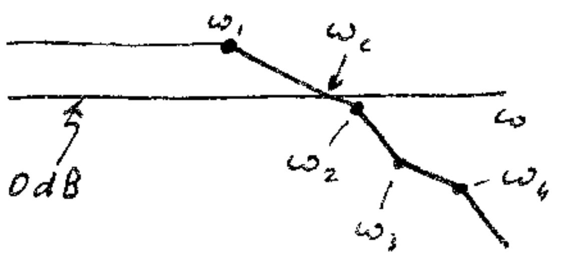
Taglio con pendenza -2



$$GH = \mu \frac{(1+s\tau_1)}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1 \text{ e } \omega_2 \longrightarrow \sim 90^\circ \text{ ritardo a testa se lontane da } \omega_c \\ \omega_3 \longrightarrow \sim 0^\circ \text{ ritardo se lontane da } \omega_c \\ \omega_4 \longrightarrow \sim 0^\circ \text{ ritardo se lontane da } \omega_c \end{array}\right\} \varphi_m \cong 0$$

Taglio con pendenza -1



$$\left.\begin{array}{l} \omega_1 \to 90^\circ \text{ di ritardo} \\ \omega_2 \to 40^\circ \text{ di ritardo} \\ \omega_3 \to \sim 0^\circ \text{ di ritardo} \\ \omega_4 \to \sim 0^\circ \text{ di anticipo} \end{array}\right\} \varphi_m \cong 50^\circ$$

Criterio di Bode

L'anello chiuso è stabile se il diagramma di Bode di GH taglia l'asse a 0 dB con pendenza -1

Osservazione : esistono molte eccezioni (vedi problemi), in particolare se l'anello aperto non è a sfasamento minimo

PROBLEMI

N. II

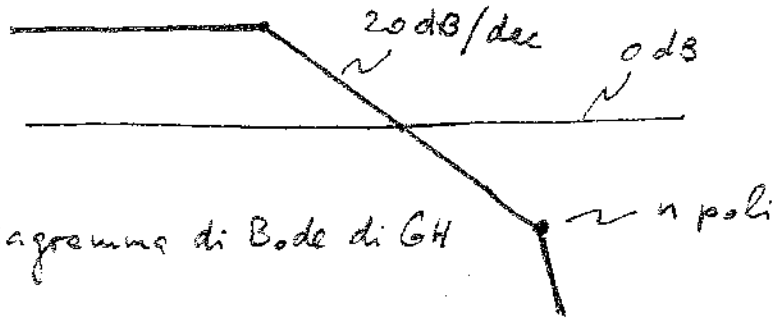


diagramma di Bode di GH

Dire perché per n sufficientemente grande il sistema ad anello chiuso è instabile anche se è soddisfatto il criterio di Bode

N. II

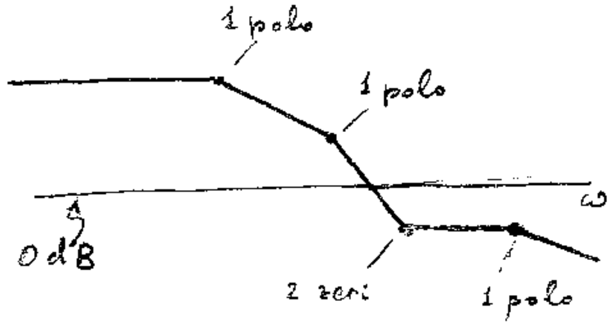
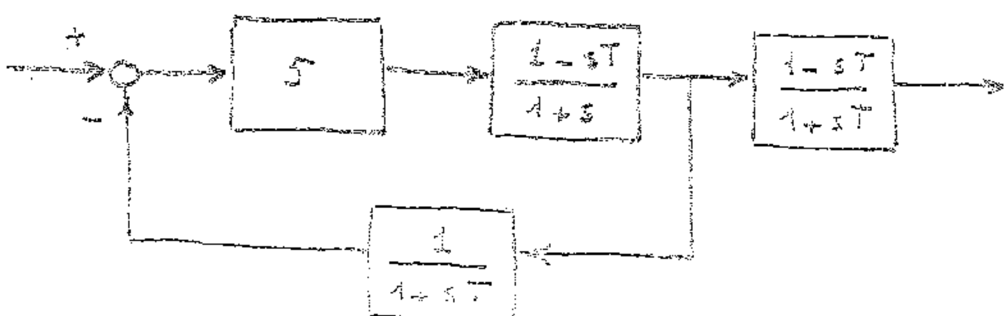


diagramma di Bode di GH

Dire perché il sistema ad anello chiuso è stabile anche se il criterio di Bode non è soddisfatto

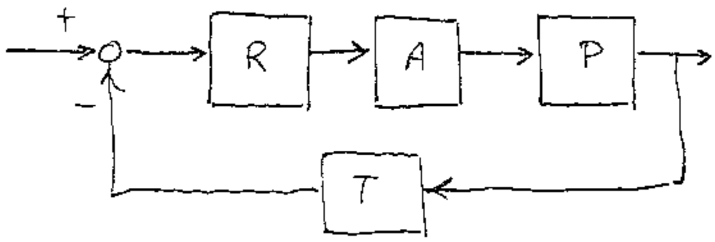
N. II

Si dica per quali valori della costante di tempo T il sistema di figura è esternamente stabile



N. II

Si consideri il sistema di controllo descritto in figura



con

$$R(s) = \mu \frac{1+s}{s}$$

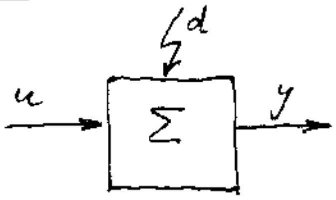
$$A(s) = \frac{5}{1+0.1 \cdot s}$$

$$P(s) = 2 \frac{1-s}{1+s \cdot 10}$$

$$T(s) = \frac{1}{1+s}$$

Si determini il guadagno μ del regolatore in modo che il margine di fase sia almeno di $50°$.

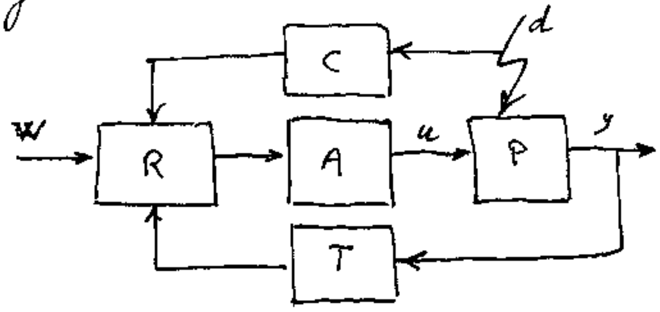
Finalità dei sistemi di controllo



Problema : variare u in modo che y vari nel modo desiderato anche in presenza di disturbi d

- Non esiste soluzione ideale
- Spesso u non può essere variato a piacere (costo del controllo)
- Va distinto il caso in cui si conoscano d e/o y da quello in cui non li si conoscano (ruolo dell'informazione)

Schema generale



P è di solito assegnato
R, C, A, T sono invece da progettare

Esempi

- P = <u>sala cinematografica</u>
  u = flusso di calore (riscaldamento o ventilazione)
  y = temperatura in sala
  d = temperatura esterna e numero di spettatori
  obiettivi : mantenere y a 20° ($y = \bar{w}$) e spendere poco
- P = <u>lago</u>
  u = posizione paratoie diga di regolazione
  y = livello del lago
  d = condizioni meteorologiche
  obiettivi : evitare le piene e le fallanze

Progetti accettabili

Progetto : scelta tra varie possibili decisioni al fine di realizzare al meglio alcuni obiettivi

☒ h obiettivi di solito incommensurabili
Es. min [costo, ingombro, rischio]

$g_1, g_2, \dots, g_h$ indicatori da minimizzare (uno per obiett.)

☒ k variabili di decisione (parametri di progetto)

$p_1, p_2, \dots, p_k$

☒ vincoli

$g_i \in G_i \quad i = 1, \dots, h$ vincoli sugli obiettivi (prescrizioni)

$p_i \in P_i \quad i = 1, \dots, k$ vincoli sulle decisioni

Problema (a obiettivi multipli)

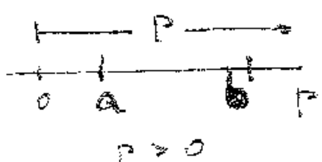
$$\min_{\{p_1, \dots, p_k\}} [g_1, g_2, \dots, g_h] \qquad \text{con } g_i = g_i(p_1, \dots, p_k)$$

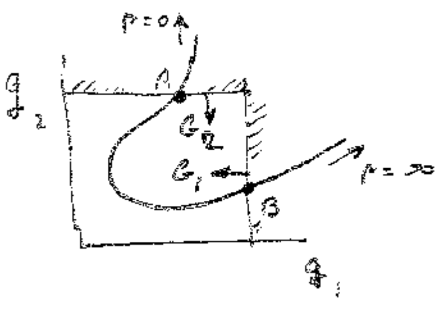
$$p_i \in P_i \qquad g_i \in G_i$$

Soluzione ammissibile (progetto accettabile)

$(p_1, \dots, p_k)$ tale che $g_i \in G_i \quad i = 1, \dots, h$

Esempio





$a < p < b$
soluzioni accettab.

Progetti efficienti

$$\min_{\{p_1,\dots,p_k\}} [g_1, g_2, \dots, g_h] \qquad \text{con } g_i = g_i(p_1,\dots,p_k)$$

$$p_i \in P_i \qquad i = 1,\dots,k$$

$$g_i \in G_i \qquad i = 1,\dots,h$$

Le soluzioni ammissibili si dividono in efficienti (o non dominate) e non efficienti (o dominate).

I progetti efficienti sono quelli non migliorabili

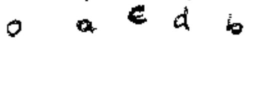
Soluzione efficiente (progetto non migliorabile)
Una soluzione accettabile $(p_1^*,\dots,p_k^*)$ si dice *efficiente* se non esiste un'altra soluzione accettabile $(p_1,\dots,p_k)$

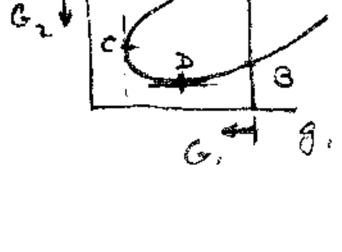
con

$$g_i(p_1,\dots,p_k) \le g_i(p_1^*,\dots,p_k^*) \qquad i = 1,\dots,h$$

e la disuguaglianza verificata strettamente in almeno una delle relazioni.

Esempio

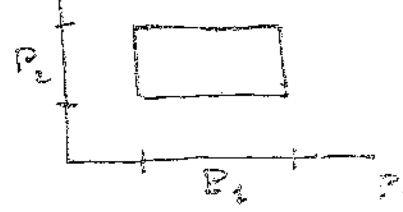




$a < p < b$ accett.

$c < p < d$ efficienti

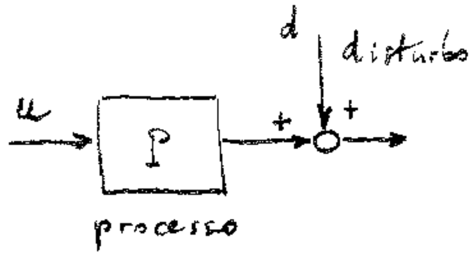
Esempio



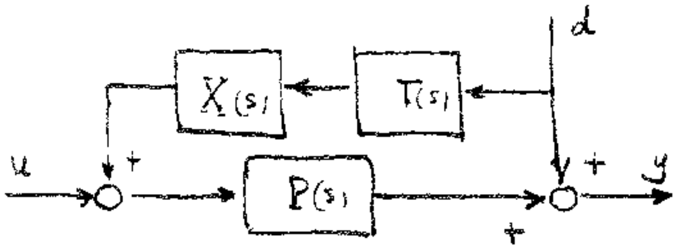
soluzioni efficienti

soluzioni accettabili

Compensazione



se d è misurabile si può cercare di compensare il suo effetto sull'uscita con lo schema seguente



$X(s)$ = f.d.t. del compensatore

compensazione "perfetta" $\quad XTP + 1 = 0$

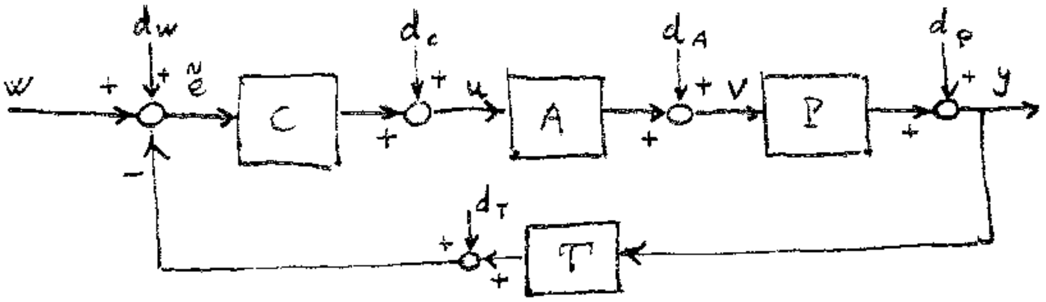
$$\boxed{X(s) = -\frac{1}{T(s)\,P(s)}} \qquad (*)$$

Osservazione 1 : non è necessario che la compensazione sia perfetta; in realtà basta che la (*) sia valida per $s = i\omega$ con ω nella banda del disturbo d.

Osservazione 2 : se T e P non sono entrambi impropri la (*) non è realizzabile; rimedio: aggiungere poli fuori banda.

Osservazione 3 (importante) : se P è a sfasamento non minimo (zeri instabili) X risulta instabile; in questo caso la compensazione è puramente teorica perché i poli instabili di X non si cancelleranno mai esattamente con gli zeri instabili di P e la variabile di controllo sarà esplosiva.

Retroazione



P = processo o impianto o sistema da controllare

A = attuatore
T = trasduttore
C = controllore (regolatore)

} strumentazione (spesso integrata con l'impianto)

w = segnale di riferimento (set-point quando costante)

u = variabile di controllo

v = variabile manipolabile (ingresso del processo)

y = variabile controllata (uscita del processo)

$d_\cdot$ = disturbi (non sempre tutti presenti, o, meglio, non sempre tutti rilevanti)

e = errore = w − y (diverso da $\tilde{e}$ se c'è il disturbo d_w)

- La tipologia dei disturbi non è sempre nota
- La funzione di trasferimento del processo non è sempre nota
- Il processo è a volte non lineare e i suoi parametri sono a volte lentamente variabili
- Se un disturbo è misurabile si può cercare di compensarlo

Obiettivi

Obiett.
- statici (alle basse frequenze) : $e(\infty)$ piccolo (o nullo) (precisione statica)
- dinamici : robustezza, rapidità di risposta, precisione dinamica (banda larga), parsimonia controllo
  ⋮

Precisione statica (errori piccoli in condizioni stazionarie)

Anello aperto di "tipo 0"

$$\frac{\bar{e}}{\bar{w}} = \frac{1}{1+\mu_{anello}} \qquad \frac{\bar{e}}{\bar{d}_A} = \frac{\mu_P \mu_T}{1+\mu_{anello}} \qquad \frac{\bar{e}}{\bar{d}_P} = \frac{\mu_T}{1+\mu_{anello}} \Rightarrow \mu_{anello} \text{ grande}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mu_c \text{ grande}}$$

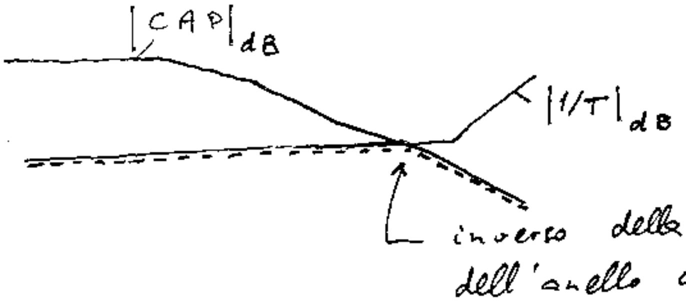
Anello aperto di "tipo 1" (1 integratore in C o nella linea di andata)

$\bar{e} = 0$

Robustezza (il sistema rimane stabile anche se perturbato)

φ_m e k_m grandi

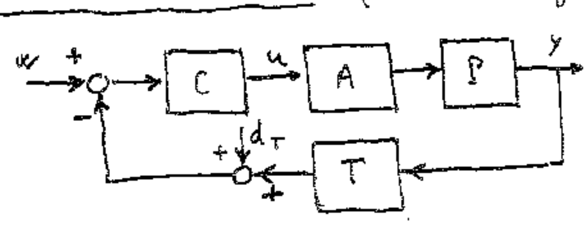
Rapidità di risposta (per variazioni a scalino di w)

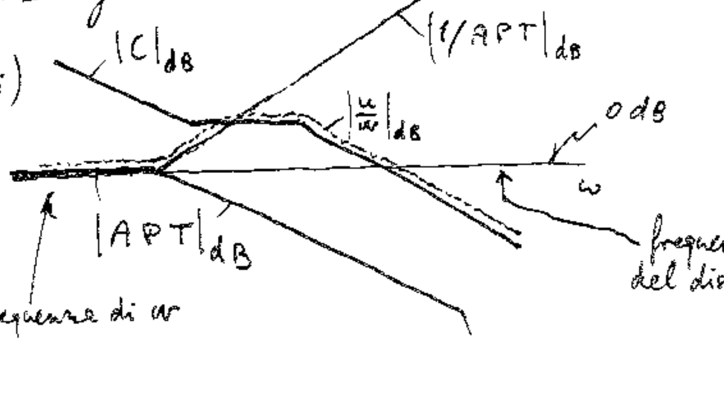


Precisione dinamica (y segue fedelmente w)

Banda del sistema ad anello chiuso grande → vedi obiettivo precedente

Parsimonia nel controllo (evitare u grandi)





Parametri del controllore

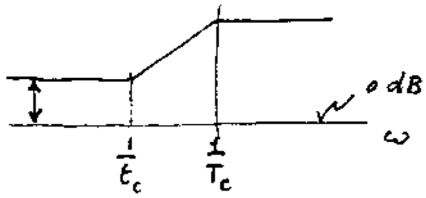
Spesso si usano regolatori industriali che hanno struttura fissata (azione proporzionale, integrale e derivativa (PID)). Questi regolatori hanno tipicamente <u>tre parametri</u>

Normalmente in fase di progetto si limita a priori la struttura del regolatore

<u>Esempi</u>

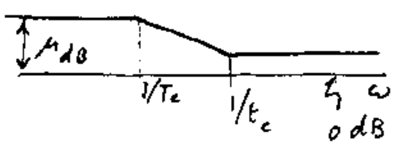
$$C(s) = \mu$$

$$C(s) = \mu \, \frac{1 + s t_c}{1 + s T_c}$$



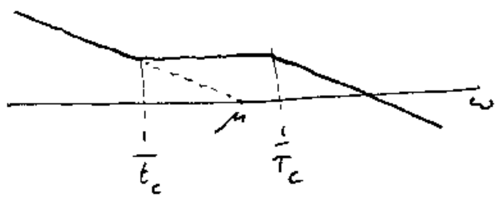
rete anticipatrice $t_c > T_c$

$$C(s) = \mu \, \frac{1 + s t_c}{1 + s T_c}$$



rete ritardatrice $T_c > t_c$

$$C(s) = \frac{\mu}{s} \, \frac{1 + s t_c}{1 + s T_c}$$

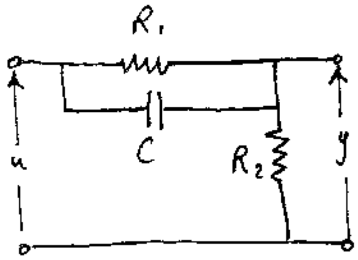


Spesso nella sintesi del regolatore si effettua una cancellazione di un polo del processo con lo zero del regolatore. In altre parole, spesso si sceglie $t_c = T_p$ dove T_p è la costante di tempo (o una delle costanti di tempo) del processo.

PROBLEMI

A . II

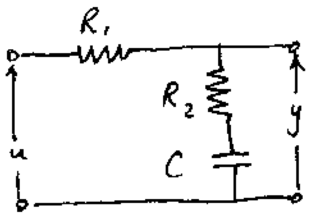
Si calcoli la funzione di trasferimento della rete elettrica mostrata in figura e si verifichi che



tale rete è anticipatrice, cioè è del tipo $\mu \frac{1+st}{1+sT}$ con $t > T$

A . II

Si calcoli la funzione di trasferimento della rete elettrica mostrata in figura e si verifichi che



tale rete è ritardatrice, cioè è del tipo $\mu \frac{1+st}{1+sT}$ con $T > t$

T. I

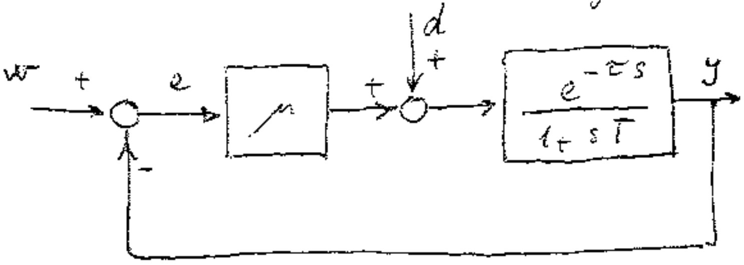
Una rete si dice "a sella" quando la sua funzione di trasferimento è

$$\mu \frac{(1+st_1)(1+st_2)}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \qquad e \quad T_1 > t_1 \geq t_2 > T_2$$

Si giustifichi il nome dato a questa rete tracciandone il diagramma di Bode

UN ESEMPIO: RITARDO E COSTANTE DI TEMPO

Un certo numero di sistemi di regolazione possono essere modellizzati dal seguente schema



3 parametri: μ, τ, T

Gli obiettivi della regolazione sono spesso riducibili a dei vincoli imposti ai seguenti quattro indicatori

ρ = fattore di riduzione dell'impatto del disturbo sull'uscita all'equilibrio $\geq \rho^*$

ω_c = banda passante del sistema $\geq \omega_c^*$

k_m = margine di guadagno $\geq k_m^*$

φ_m = margine di fase $\geq \varphi_m^*$

Come già detto, ρ individua la precisione statica, ω_c la rapidità di risposta e k_m e φ_m la robustezza.

Mostriamo che

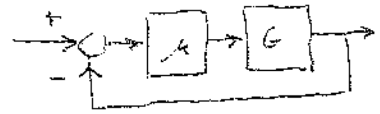
$\rho = \rho(\mu)$, $\omega_c = \omega_c(\mu, T)$, $k_m = k_m\left(\mu, \frac{\tau}{T}\right)$ $\varphi_m = \varphi_m\left(\mu, \frac{\tau}{T}\right)$

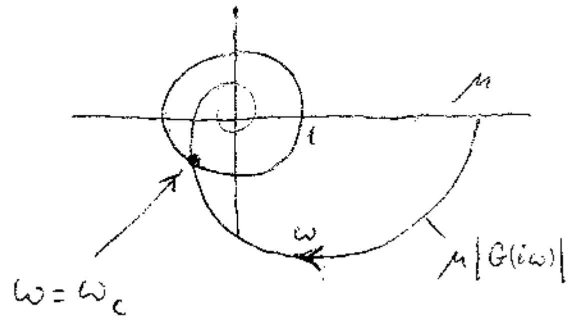
Calcolo di $\rho(\mu)$

All'equilibrio $\begin{cases} \text{senza regolazione} & \bar{y} = \bar{d} \\ \text{con regolazione} & \bar{y} = \dfrac{1}{1+\mu}\,\bar{d} \end{cases}$

Pertanto $\boxed{\rho = 1+\mu}$ l'effetto del disturbo è ridotto di $(1+\mu)$ volte

Calcolo di $\omega_c(\mu, T)$





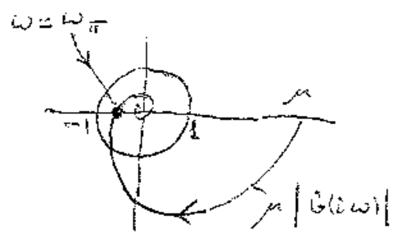
Per $\omega=\omega_c$ si ha $|G| = 1/\mu \Rightarrow \left|\dfrac{e^{-i\omega_c\tau}}{1+i\omega_c T}\right| = \dfrac{1}{\mu}$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{1+\omega_c^2T^2} = \mu \quad \Leftarrow \quad |1+i\omega_c T| = \mu$$

$$\boxed{\omega_c = \frac{\sqrt{\mu^2-1}}{T}}$$

Calcolo di $k_m\left(\frac{\tau}{T}, \mu\right)$



$$\mu\,|G(i\omega_\pi)| = \frac{1}{k_m} \Rightarrow \frac{\mu}{\sqrt{1+\omega_\pi^2T^2}} = \frac{1}{k_m}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_\pi T = \sqrt{k_m^2\mu^2-1}$$

$$\arg G(i\omega_\pi) = -\pi \Rightarrow \omega_\pi\tau + \operatorname{arctg}\omega_\pi T = \pi$$

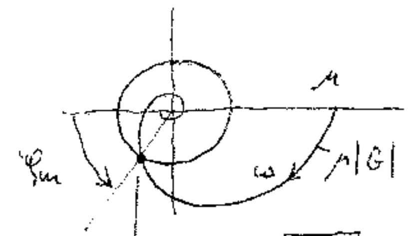
per cui

$$\boxed{\frac{\tau}{T}\sqrt{k_m^2\mu^2-1} + \operatorname{arctg}\sqrt{k_m^2\mu^2-1} = \pi}$$

$$\Downarrow$$

$$k_m = k_m\left(\frac{\tau}{T}, \mu\right)$$

Calcolo di $\varphi_m\left(\frac{\tau}{T}, \mu\right)$



$\omega = \omega_c = \dfrac{\sqrt{\mu^2-1}}{T}$ (vedi sopra)

$$\arg G(i\omega_c) = -\pi + \varphi_m$$

$$\omega_c\tau + \operatorname{arctg}\omega_c T = \pi - \varphi_m$$

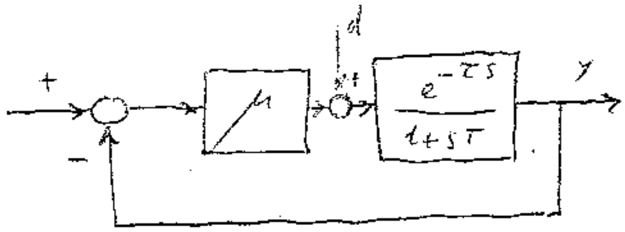
$$\frac{\tau}{T}\sqrt{\mu^2-1} + \operatorname{arctg}\sqrt{\mu^2-1} = \pi - \varphi_m$$

$$\boxed{\varphi_m = \pi - \frac{\tau}{T}\sqrt{\mu^2-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\mu^2-1}}$$

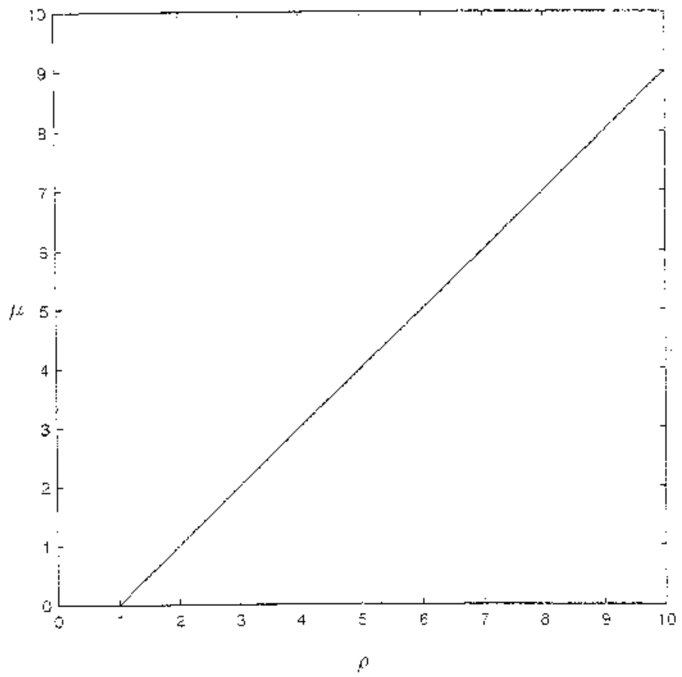
$$\varphi_m = \varphi_m\left(\frac{\tau}{T}, \mu\right)$$

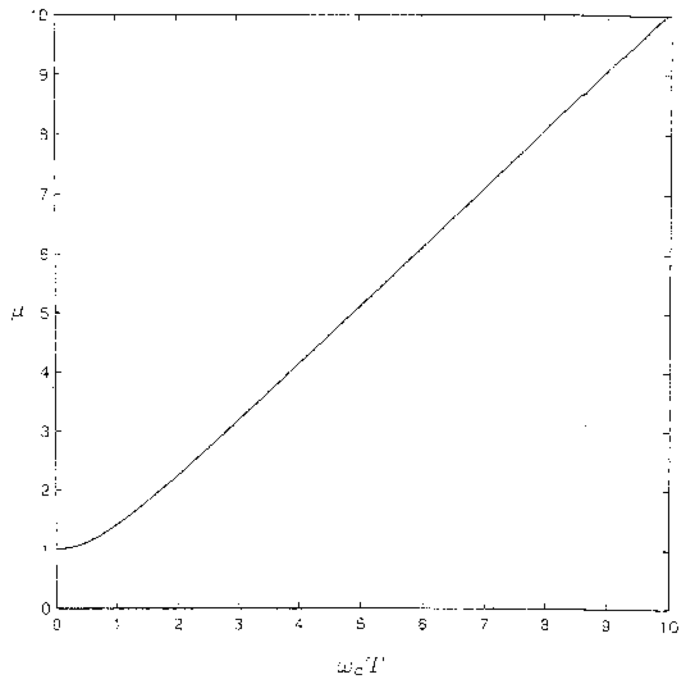
QUATTRO DIAGRAMMI UTILI

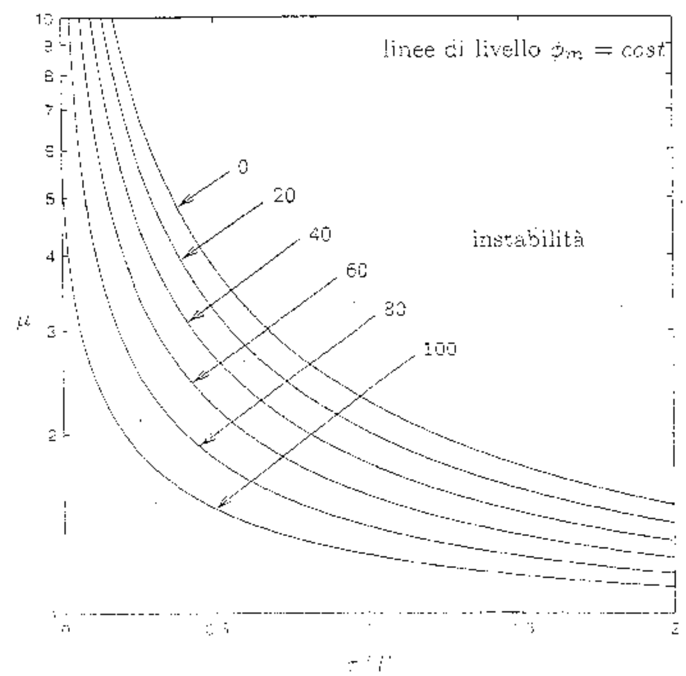
Le quattro relazioni trovate per ρ, ω_c, k_m e φ_m riguardanti il sistema di controllo

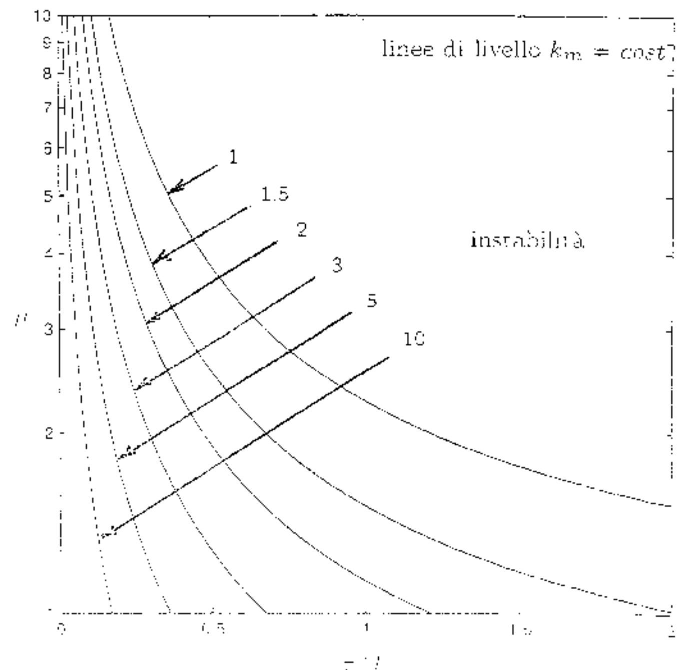


possono essere utilmente diagrammate









Lista di sistemi di controllo in retroazione

1. controllo della portata di alimentazione di un impianto chimico
2. controllo del moto di un convoglio
3. controllo di un satellite geostazionario
4. controllo della temperatura del cervello nei mammiferi
5. controllo dello spessore di un laminato in PVC
6. controllo di posizione angolare di un apparato di trasmissione
7. controllo della velocità di uno yacht
8. controllo del rilascio di un lago ad uso irriguo

I primi 4 esempi sono stati già trattati (con tecniche diverse e con enfasi al problema della stabilità del sistema retroazionato).

Gli esempi 5, 6 e 7 verranno trattati qui di seguito.
Lo scopo è quello di mostrare come si possa procedere per progettare, per tentativi, un regolatore accettabile.

Con l'ultimo esempio verrà mostrato un caso in cui ci si preoccupa di determinare un controllore efficiente.

Regolazione dello spessore di un laminato

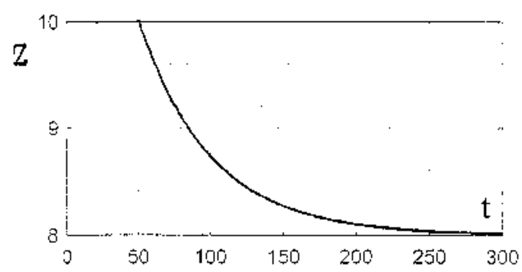
Un apparato di estrusione produce tubi in PVC secondo lo schema mostrato in figura.

Il tubo è prodotto in continuo a partire da materia prima in forma granulare. Questa viene fusa per riscaldamento e prende la sezione desiderata attraversando una testa di estrusione opportunamente sagomata. Il tubo esce dalla testa di estrusione ancora in stato semiplastico e attraversa una camera di calibrazione nella quale diventa definitivamente solido. All'uscita della camera di calibrazione, dove è posto un sistema di traino (a velocità costante) per agevolare lo scorrimento del tubo via via prodotto, lo spessore z del tubo è misurato in continuo con un sensore a raggi infrarossi. Lo spessore del tubo è funzione della potenza elettrica P dissipata dalla resistenza della testa di estrusione e della temperatura ambiente T.

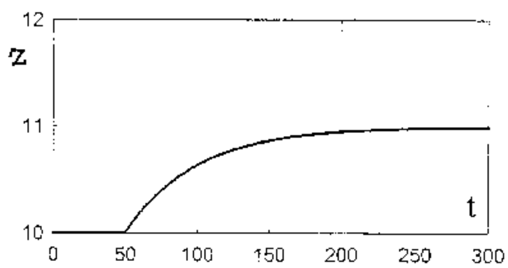
L'obiettivo è di produrre un tubo con spessore z costante nel tempo e il più possibile vicino al valore nominale prefissato. In particolare, lo spessore deve essere pari a 10 [mm] con tolleranza ±0.2 [mm]. Sull'apparato sono state effettuate due prove a partire dalla situazione di regime nominale:

$$\overline{P} = 1000\,[\mathrm{w}] \qquad \overline{T} = 20\,[°\mathrm{C}] \qquad \overline{z} = 10\,[\mathrm{mm}]$$

I risultati ottenuti (andamento nel tempo dello spessore misurato) sono i seguenti (spessori in [mm], tempo in [s]):



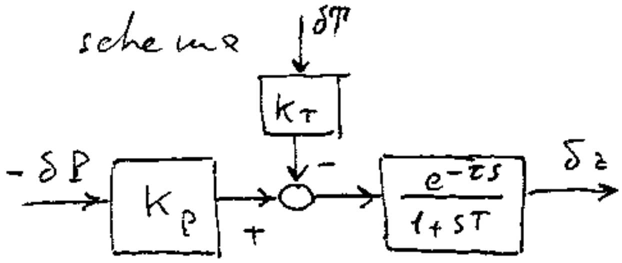
Variazione a scalino di P da 1000 [w] a 1100 [w]



Variazione a scalino di T da 20 [°C] a 15 [°C]

Descrizione del sistema

Poichè le due risposte allo scalino sono quelle di un sistema costituito dalla cascata di un ritardatore puro $\left(e^{-\tau s}\right)$ e di una costante di tempo $\left(1/(1+sT)\right)$ con $\tau = T = 50$ [sec], il sistema è descritto dal seguente schema

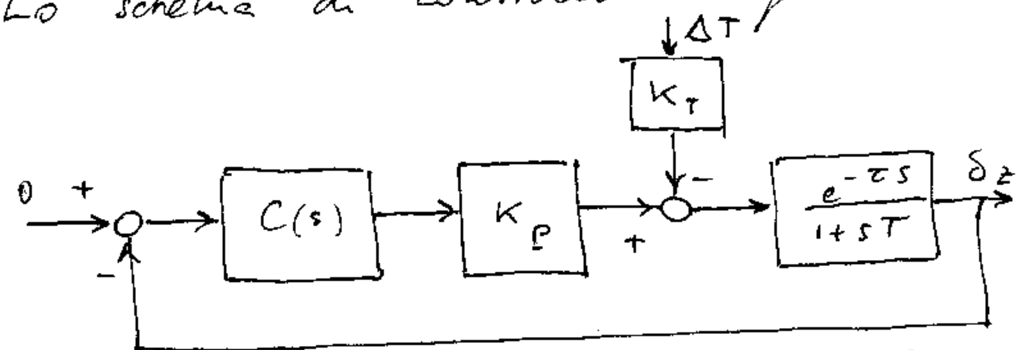


$K_P = 0.02$
$K_T = 0.2$

dove δP, δT e δz sono le variazioni di P, T e z rispetto alle condizioni nominali.

Schema di controllo

Lo schema di controllo è pertanto il seguente



dove la f.d.t. del trasduttore (in linea di retroazione) è stata approssimata con $G_T = 1$ visto che il sensore a raggi infrarossi ha dinamica molto rapida.

Per quanto riguarda il controllore (che è da progettare) possiamo limitarci a quelli con f.d.t.

$$C(s) = K_c \frac{1+s t_c}{1+sT_c} \qquad \text{(tre parametri)}$$

Prescrizioni

Per garantire che il sistema di controllo sia stabile anche in condizioni perturbate (ad esempio, velocità di trascinamento diverse da quella nominale, ...) richiediamo che

$$\varphi_m \geq 50^\circ \qquad k_m > 1.5$$

Inoltre, deve essere

$$|\delta z| \leq 0.2$$

per variazioni anche consistenti (diciamo $|\Delta T| = 10\,[^\circ C]$) della temperatura.

Infine, possiamo auspicare che la banda passante del sistema ad anello chiuso sia paragonabile a quella del sistema ad anello aperto che è pari solo a 0.02 Hz.

Progetto statico (calcolo del guadagno d'anello)

L'errore massimo a regime $|\delta \bar{z}|$ è quello corrispondente a $|\delta T| = 10\,[^\circ C]$ e (notando che $e^{-\tau s}/(1+sT) = 1$ per $s=0$) esso è dato da

$$|\delta \bar{z}| = \frac{K_T}{1 + K_c K_p} \cdot 10$$

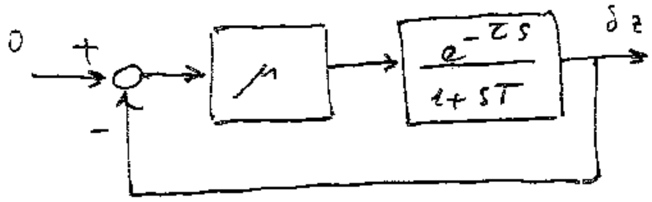
guadagno d'anello μ

La condizione $|\delta \bar{z}| \leq 0.2$ fornisce, quindi, $K_c \geq 450$

Scegliamo $K_c = 500$ per cui $\mu = 10$

Progetto dinamico con controllore proporzionale

Se supponiamo che il controllore sia semplicemente proporzionale, cioè $C(s) = K_C$, otteniamo il seguente sistema retroazionato

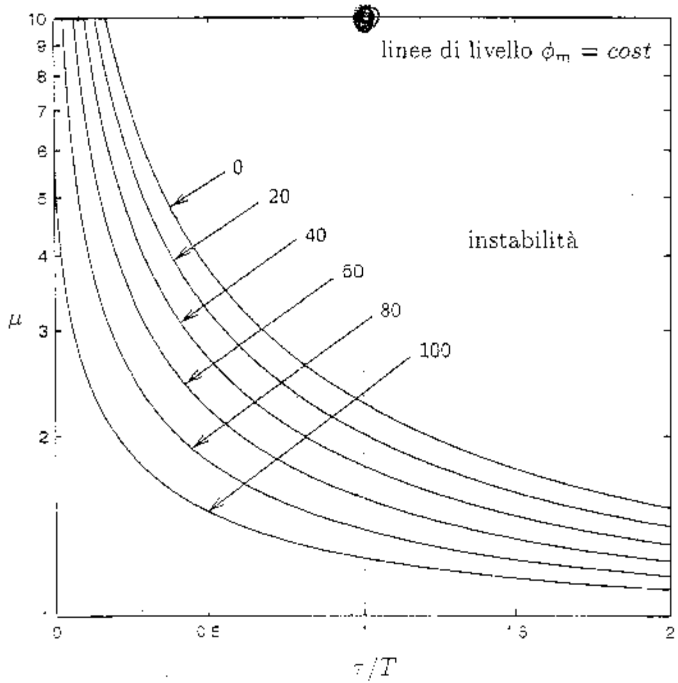


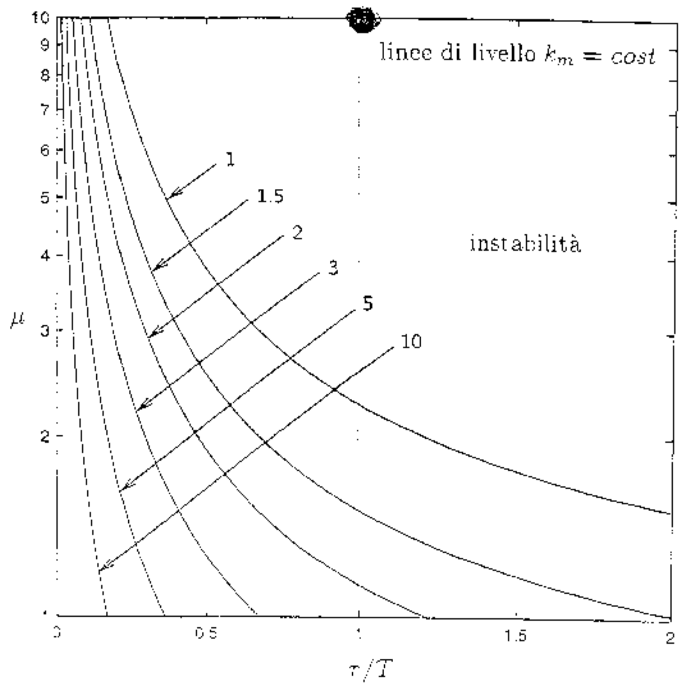
$\mu = 10$

$\tau = T = 50$

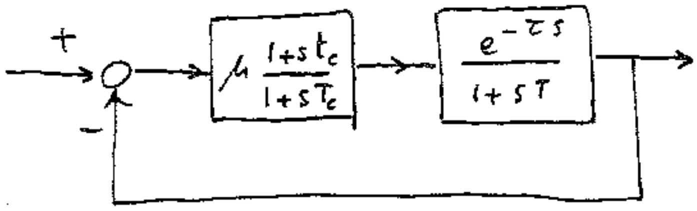
Questo sistema non solo non verifica le condizioni sui margini di fase e guadagno ma è addirittura instabile.

Infatti nei due diagrammi che seguono i punti $\left(\frac{\tau}{T} = 1,\ \mu = 10\right)$ cadono nelle zone di instabilità





Progetto dinamico con controllore a tre parametri

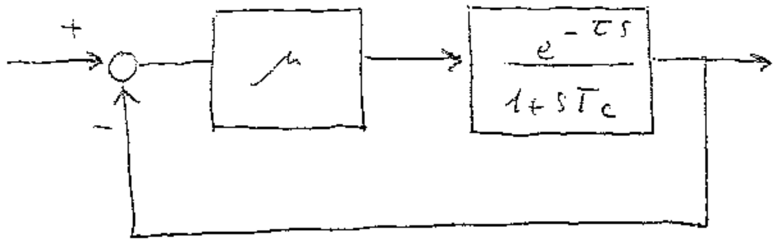


$\mu = 10$ per soddisfare le prescrizioni sulle tolleranze

Possiamo a priori fissare

$$t_c = T$$

in modo da cancellare il polo del processo con lo zero del controllore. Così facendo otteniamo



$\mu = 10$

$\tau = 50$

che è il solito schema discusso in precedenza.
Il parametro T_c è da scegliere in modo che

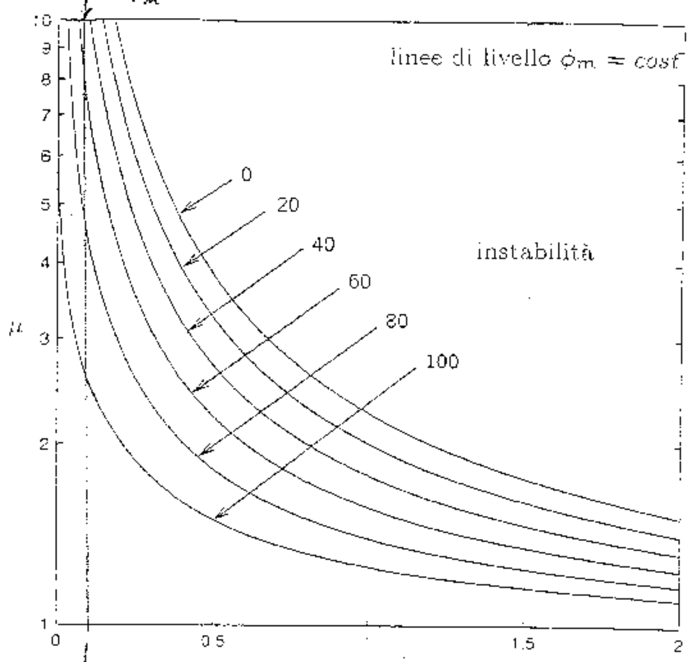
$$\varphi_m \geq \varphi_m^* = 50 \qquad (*)$$

$$k_m \geq k_m^* = 1.5$$

Per questo si può far ricorso ai soliti diagrammi per ricavare un valore di T_c che soddisfi le (*)

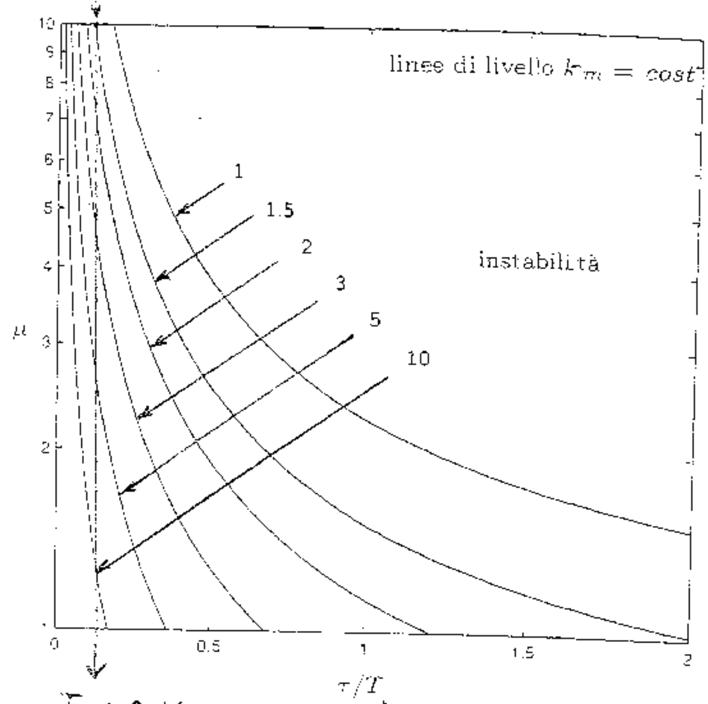
Poi con il diagramma di $\omega_c = \omega_c(\mu, \underset{T_c}{T})$ si può ricavare ω_c e vedere se non differisce troppo dal valore della banda ad anello aperto che è $B = [0; \frac{1}{\tau}] = [0; 1/50]$.

$\varphi_m = 50$



T_c

$k_m = 1.5$



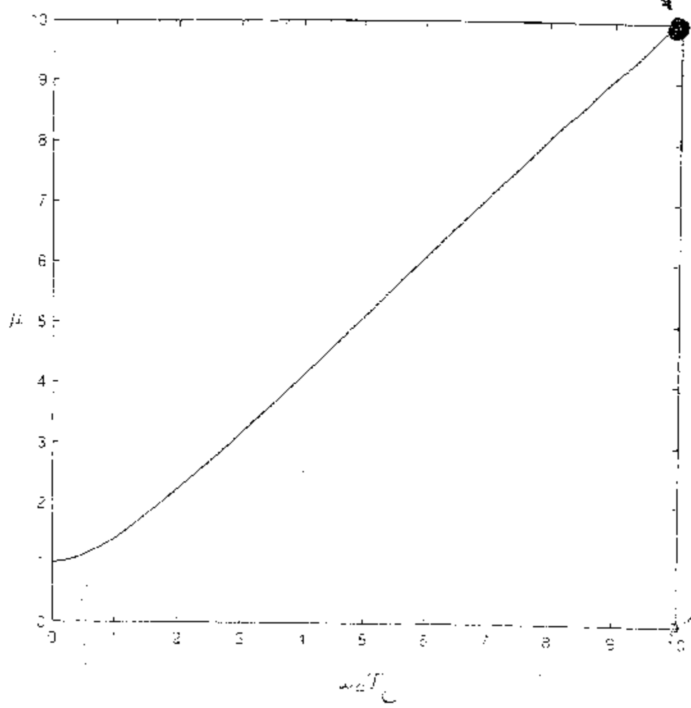
T_c

$\frac{\tau}{T_c} \le 0.07$

$\frac{\tau}{T_c} \le 0.11$

$$\frac{\tau}{T_c} \le 0.07 \Rightarrow T_c \ge \frac{\tau}{0.07} \Rightarrow T_c \ge 714 \Rightarrow T_c = 750$$

$\mu = 10$



$$\omega_c T_c = 10$$

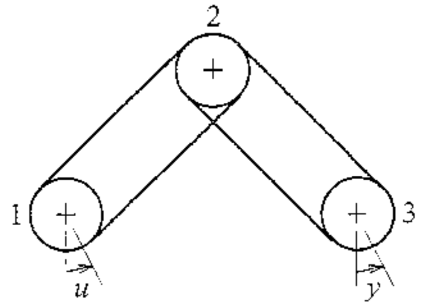
$$\Downarrow$$

$$\omega_c = \frac{10}{750} = \frac{1}{75}$$

accettabile perché poco diverso da $\frac{1}{T} = \frac{1}{50}$

Controllo di posizione angolare

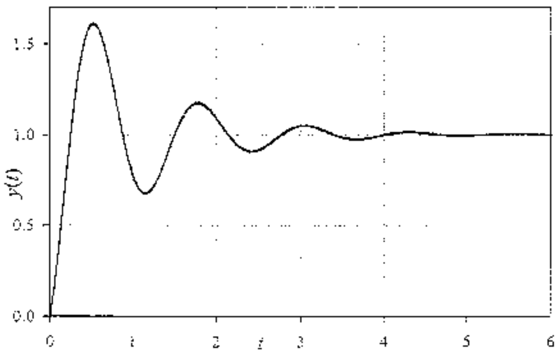
Un apparato di trasmissione meccanica è composto da tre pulegge orizzontali collegate da due cinghie elastiche.



La puleggia 1 è comandata da un motore che ne impone la posizione angolare u. La puleggia 3 è connessa a un carico: la sua posizione angolare y è misurata da un sensore.

Sul sistema sono state effettuate le seguenti prove:

1) **Risposta allo scalino**: all'ingresso u è stato applicato all'istante $t = 0$ uno scalino di ampiezza 1 [rad]. La risposta rilevata in uscita è stata la seguente:



2) **Risposta in frequenza**: l'ingresso u è stato posto pari a $u(t) = U\,\mathrm{sen}(\omega t)$ per vari valori di ω. La risposta rilevata in uscita, esaurito il transitorio, è stata del tipo $y(t) = Y\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$, con Y/U dato dalla tabella seguente:

ω [rad/s]	1	2	5	10	20	50	100	200	500	1000
Y/U	1.04	1.18	2.89	0.47	0.15	0.05	0.02	0.012	0.004	0.0018

A) Formulare un modello matematico dell'apparato nel dominio delle frequenze, basandosi sui risultati delle prove sopra descritte.

B) Si voglia progettare un sistema di controllo per l'apparato di trasmissione. Formulare requisiti di progetto ragionevoli, tenendo conto che si desiderano alta precisione di posizionamento a regime (idealmente $y = u$), risposte veloci con ridotte oscillazioni, stabilità robusta.

C) Determinare un controllore che soddisfi i requisiti formulati al punto B.

(A) Modello del processo

La risposta allo scalino evidenzia quanto segue

(a) $y_\infty = 1 \Rightarrow \mu_p = 1$

(b) $\dot{y}(0) > 0 \Rightarrow$ surplus di poli $= 1$

(c) esistenza di poli complessi coniugati con basso smorzamento

Una possibile funzione di trasferimento è, pertanto,

$$P(s) = \mu_p \omega_n^2 \frac{1 + s\tau}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\mu_p \omega_n^2 \tau s + \mu_p \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\beta_1 s + \beta_2}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2}$$

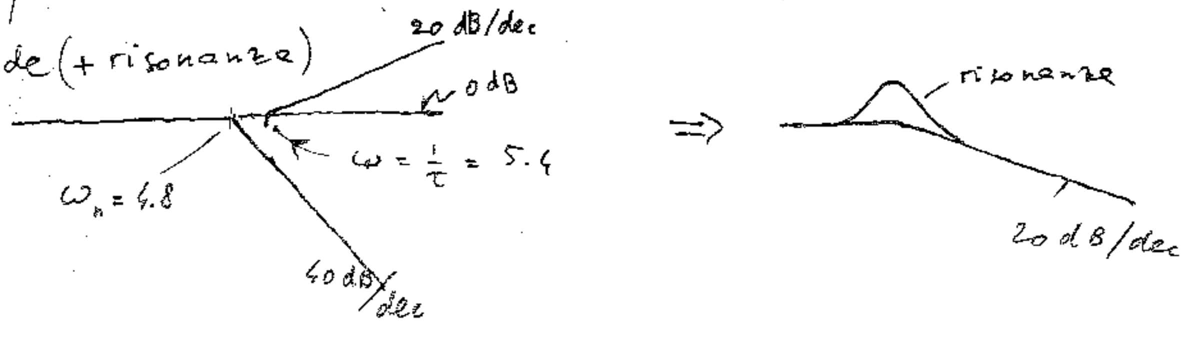
Poichè $\dot{y}(0) = \beta_1$ e dalla figura risulta $\dot{y}(0) = 4.25$ deve essere $\mu_p \omega_n^2 \tau = 4.25$. D'altra parte, sempre dalla figura, si può valutare il periodo di oscillazione T_{osc} che è circa uguale a $2\pi/\omega_n$ (perchè la pulsazione ω_{osc} è circa uguale a ω_n), per cui

$$\omega_n \cong \frac{2\pi}{T_{osc}} \cong \frac{6.28}{1.3} = 4.8$$

In conclusione, una stima di τ è

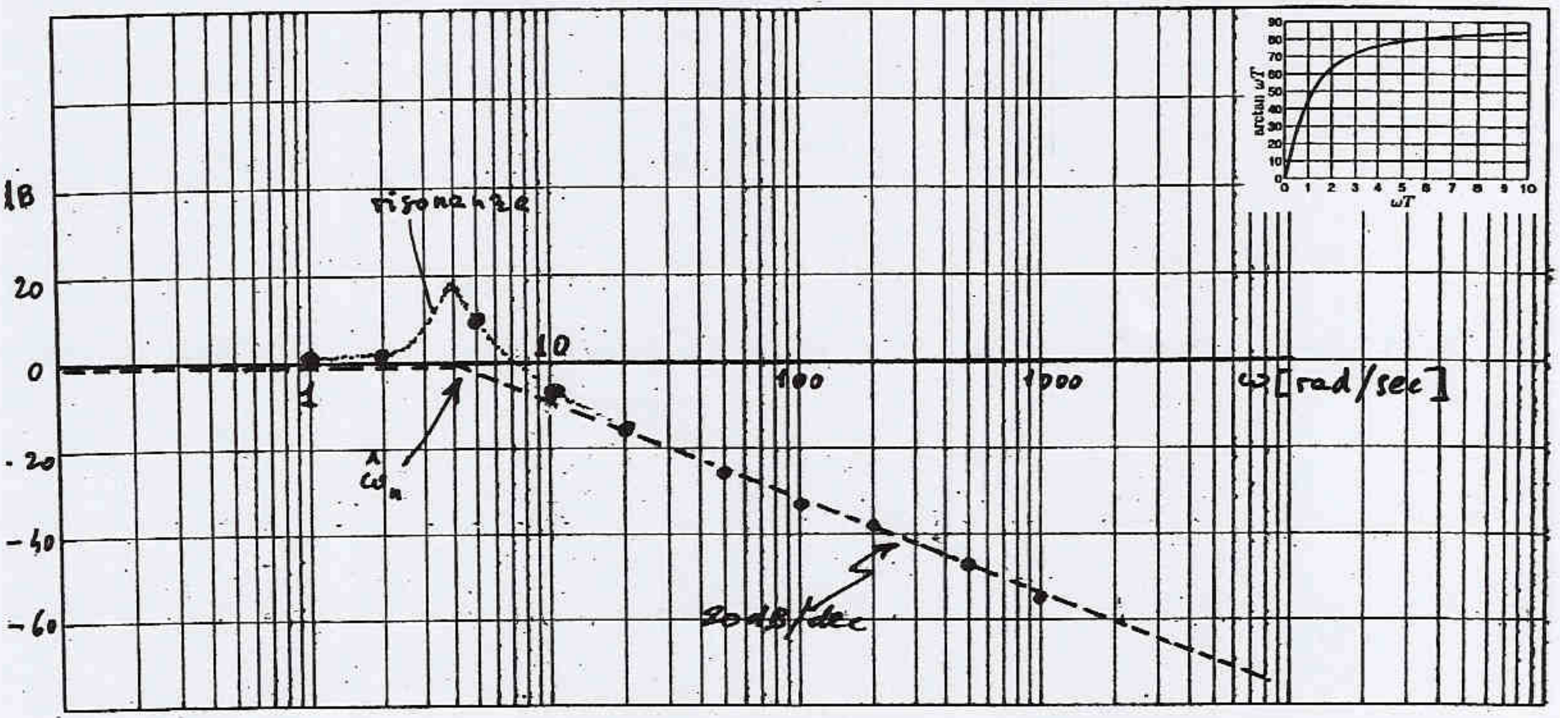
$$\tau = \frac{4.25}{\mu_p \omega_n^2} = \frac{4.25}{(4.8)^2} = 0.184$$

La risposta in frequenza che ci si può aspettare è, quindi, la somma dei due seguenti diagrammi di Bode (+ risonanze)



(A) Modello del processo (continua)

Per confermare quanto dedotto nella pagina precedente possiamo sfruttare i dati di risposta in frequenza. Calcolando $(Y/U)_{dB}$ e riportando tali valori su carta logaritmica otteniamo quanto segue



In conclusione, i dati raccolti con le due prove permettono di dedurre che la funzione di trasferimen[to] del processo è, con buona approssimazione, data d[a]

$$P(s) = \mu_p \hat{\omega}_n^2 \frac{1+s\tau}{s^2+2\xi\hat{\omega}_n s+\hat{\omega}_n^2}$$ con $\mu_p = 1$, $\hat{\omega}_n = 4.2$, $\tau = 0.184$ e ξ basso (non stimato)

Poiché $\tau \simeq \frac{1}{\hat{\omega}_n}$, tale funzione di trasferimento è approssimabile (a parte il picco di risonanza) da

$$\underline{P}(s) = \frac{1}{1+sT} \quad \text{con} \quad T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\hat{\omega}_n}+\tau\right) \cong 0.20$$

(B) Prescrizioni

- Alta precisione di posizionamento ⇒ errore nullo ⇒ tipo 1 (cioè un integratore $\frac{1}{s}$ nel regolatore)

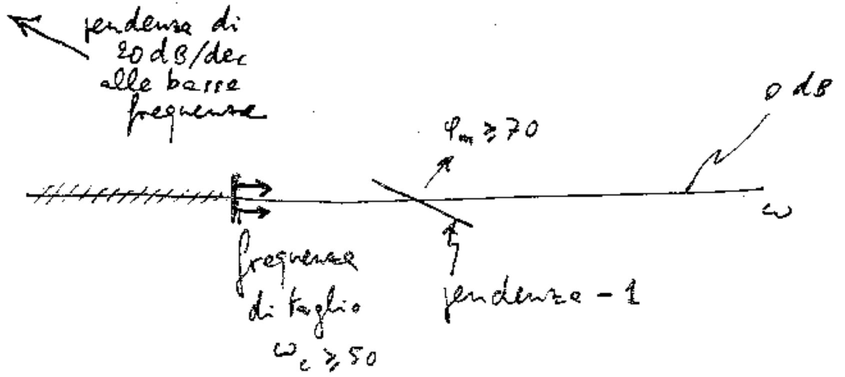
- Risposte veloci ⇒ bassa costante di tempo dominante del sistema ad anello chiuso, per esempio 10 (o più) volte più piccola della costante di tempo del sistema controllato ($T = 0.20$) ⇒ $\omega_c \geq \frac{10}{T} \cong 50 \left[\frac{rad}{sec}\right]$

- Ridotte oscillazioni ⇒ polo dominante reale o poli dominanti complessi con $\xi_{an.ch.}$ elevato (0.7) ⇒ diagramma di Bode che taglia l'asse a 0 dB con pendenza −1 e $\varphi_m \geq 100 \cdot \overset{0.7}{\xi_{min}} = 70°$

- Stabilità robusta φ_m grande, k_m grande

  per esempio $\varphi_m \geq 60°$ $k_m \geq 2$

Riassumendo



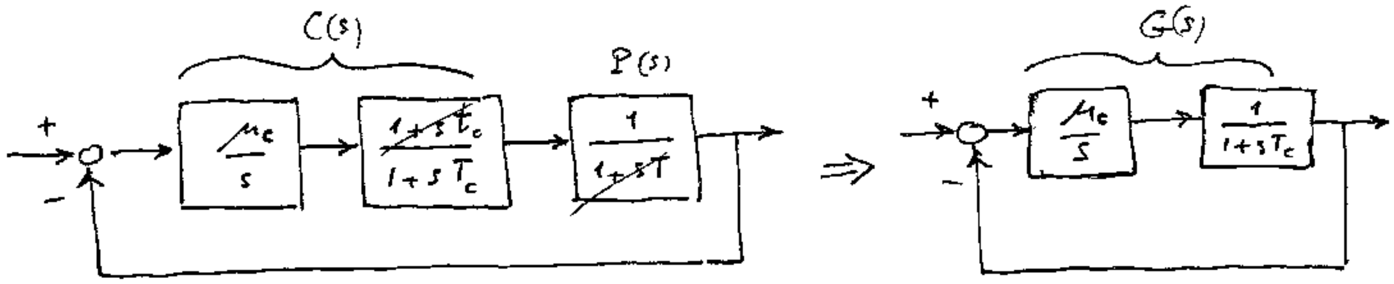
C) Sintesi del controllore

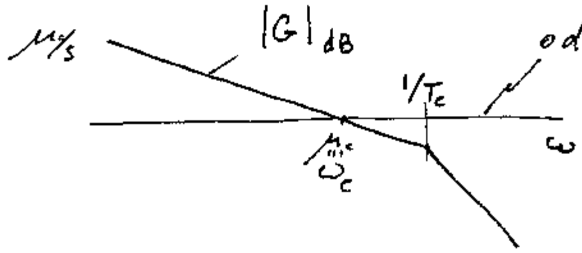
Si può considerare un controllore con funzione di trasferimento

$$C(s) = \frac{\mu_c}{s} \; \frac{1 + s\,t_c}{1 + s\,T_c} \quad (*)$$

(integratore in cascata a una rete anticipatrice)

e usare lo zero $(-1/t_c)$ per cancellare il polo $(-1/T)$ del processo





$$\arg G(i\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega T_c$$

$\Downarrow$

al max 20° per avere $\varphi_m \geq 70°$

$$T_c \leq \frac{0.33}{\mu_c} \Leftarrow \omega_c T_c \leq 0.33 \Leftarrow$$

$\uparrow$ $\omega_c : 50$

$$T_c \leq \frac{0.33}{50} \Rightarrow T_c \leq 0.0066$$

Scegliamo $T_c = 0.005$

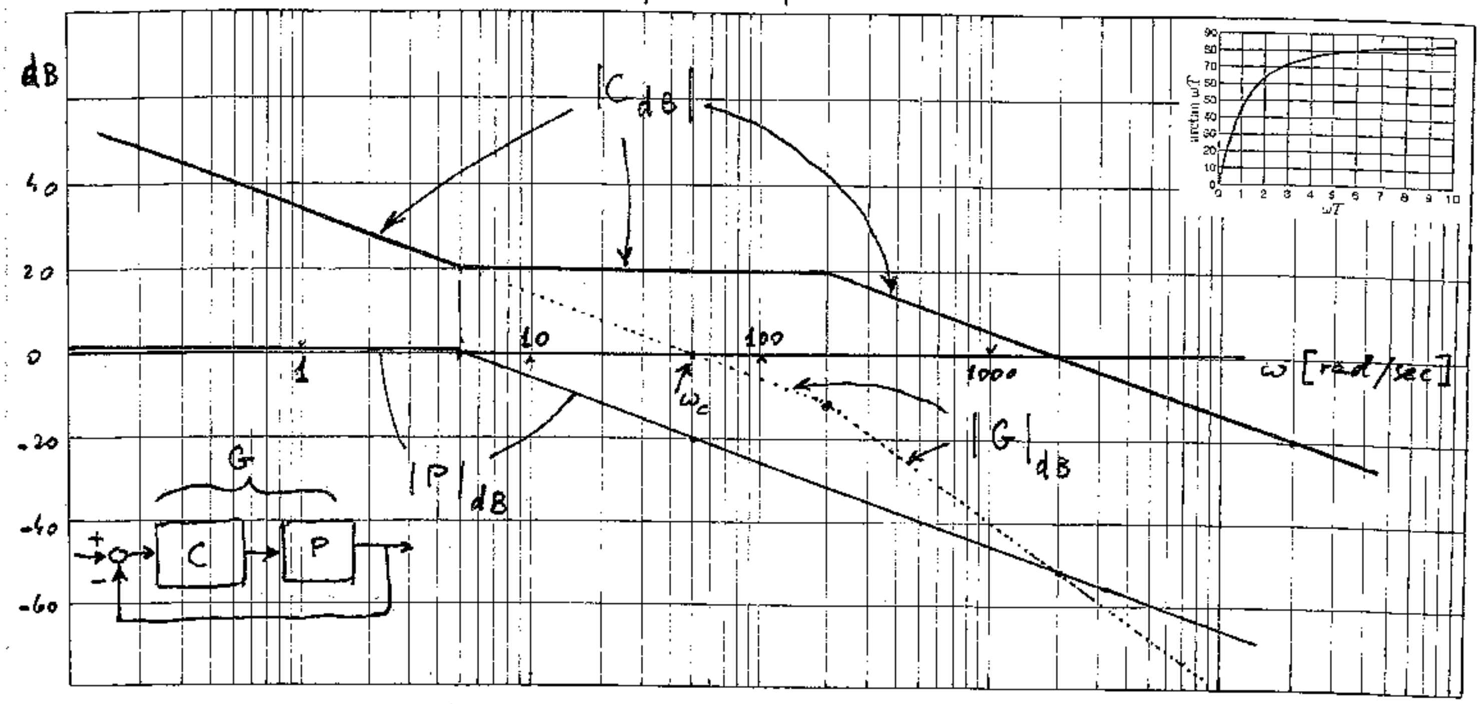
Pertanto, la f. d. t. del regolatore è la (*) con

$\mu_c = 50 \qquad t_c = 0.20 \qquad T_c = 0.005$

In conclusione, tutte le prescrizioni sono soddisfatte (il margine di guadagno k_m è addirittura infinito perché $\mu_{crit} = \infty$)

Per sicurezza si possono fare delle simulazioni come mostrato nella pagina seguente, insieme a un riassunto di questo fatto.

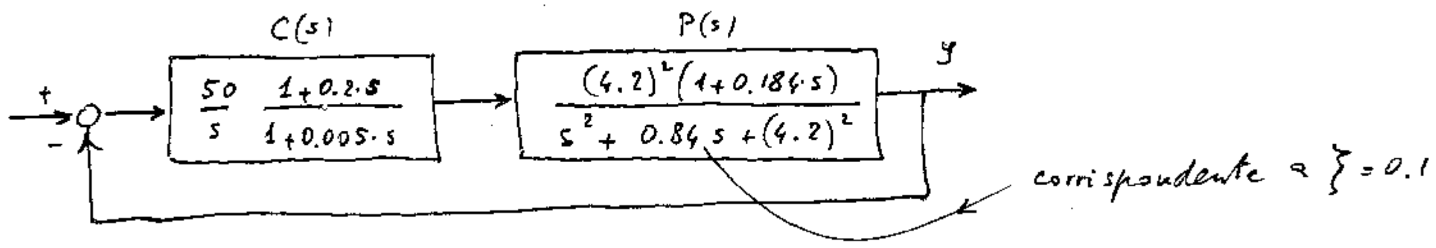
Riassunto di quanto fatto

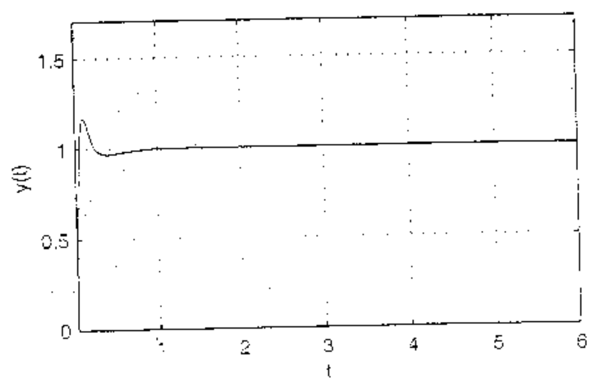


banda passante del sistema ad anello chiuso $B = [0, \omega_c] = [0, 50]$

costante di tempo dominante ad anello chiuso $T_{dom} = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{50} = 0.02$

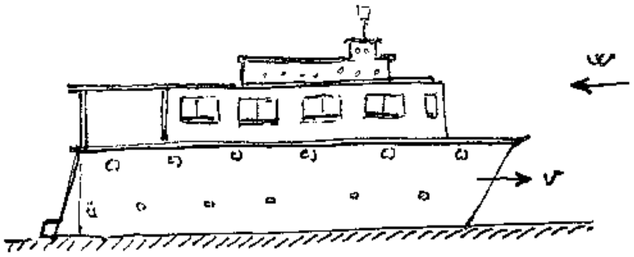
Simulazione (su Matlab) della risposta allo scalino del sistema ad anello chiuso





Questa figura, confrontata con la risposta allo scalino del processo non regolato (prima pagina), mostra i vantaggi della regolazione. Si può verificare che il valore attribuito a ζ è ininfluente (perché?)

CONTROLLO DELLA VELOCITA' DI UNO YACHT



Requisiti :

(a) ridurre di 20 volte l'effetto del vento

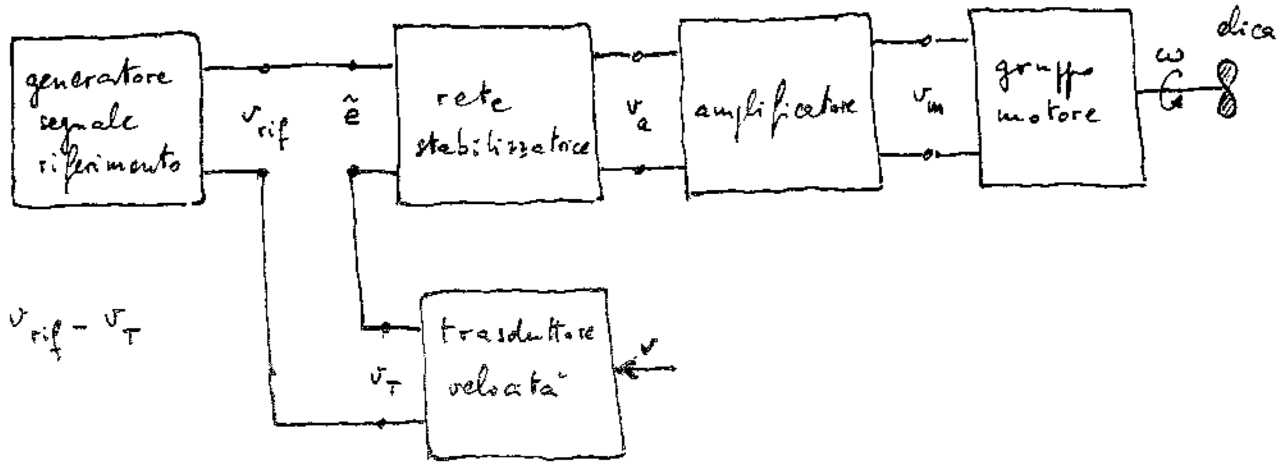
(b) andare a regime 3 volte più in fretta

(c) margine di fase di 60°

Dati

- A motori spenti lo scafo si ferma in 2 minuti
- La costante di tempo elettrica del motore (dato di targa) è $T'_m = 0.1$ sec.
- L'elica va a regime in 10 sec.
- Il trasduttore di velocità ha guadagno unitario (10 V = = 10 m/sec) e costante di tempo $T_T = 0.01$ sec
- L'amplificatore che alimenta il motore ha banda passante di 1000 Hz.

Schema di controllo



$\tilde{e} = v_{rif} - v_T$

Dinamica dello yacht

$$m\,\dot{v} = \text{spinta} - \text{forza d'attrito}$$

massa

proporzionale alla velocita' angolare ω dell'elica

due componenti: acqua ($\equiv v$) e aria ($\equiv v + w$)

velocita' del vento

$$m\,\dot{v} = K\omega - h'v - h''(v + w)$$

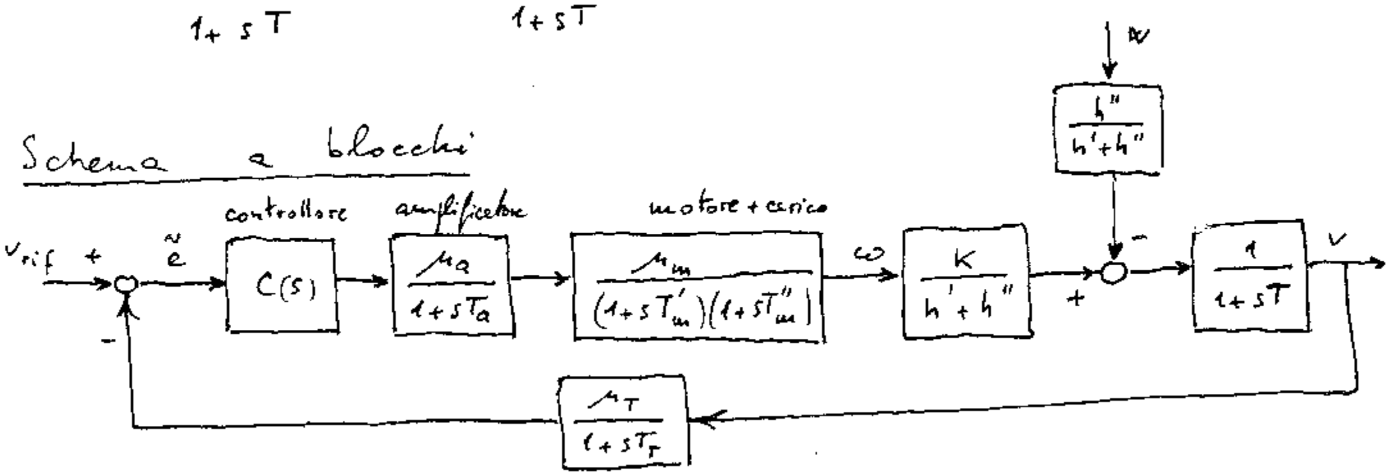
$$m\,s\,V = K\Omega - h'V - h''V - h''W$$

$$(m\,s + h' + h'')\,V = K\,\Omega - h''\,W$$

$$\left(1 + s\,\frac{m}{h'+h''}\right) V = \frac{K\,\Omega}{h'+h''} - \frac{h''}{h'+h''}\,W$$

$$V = \frac{\frac{K}{h'+h''}}{1 + sT}\,\Omega - \frac{\frac{h''}{h'+h''}}{1+sT}\,W$$

Schema a blocchi



Dai dati segue che $\quad T_a = 0.001$ sec. $\quad T'_m = 0.1$ sec.

$$T''_m = \frac{1}{5}\cdot 10 = 2 \text{ sec.} \qquad T = \frac{1}{5}\,60\times 2 = \frac{120}{5} = 24 \text{ sec.}$$

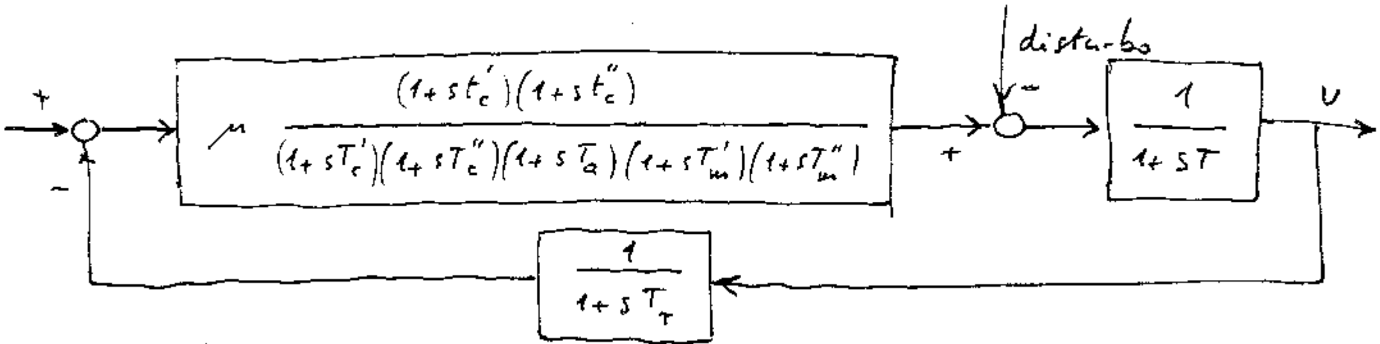
$$\mu_T = 1 \qquad T_T = 0.01 \text{ sec.}$$

Inoltre, poniamo

$$\mu = \mu_c \cdot \mu_a \cdot \mu_m \cdot \frac{K}{h'+h''}$$

Per quanto riguarda il controllore consideriamo la famiglia delle reti a sella

$$C(s) = \mu_c \frac{(1+s\,t_c')(1+s\,t_c'')}{(1+s\,T_c')(1+s\,T_c'')}$$



<u>Progetto statico</u>

A regime il disturbo è ridotto di $(1+\mu)$ volte

$$\Downarrow$$

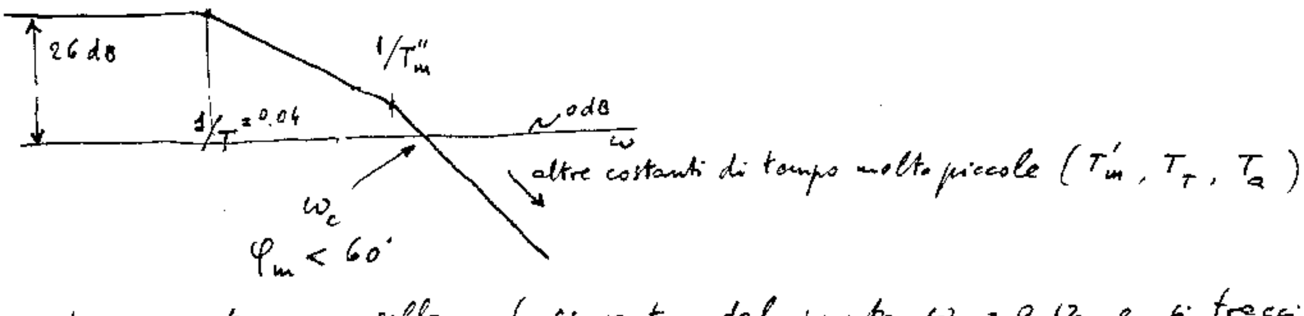
$$\mu = 20$$

$$\Downarrow$$

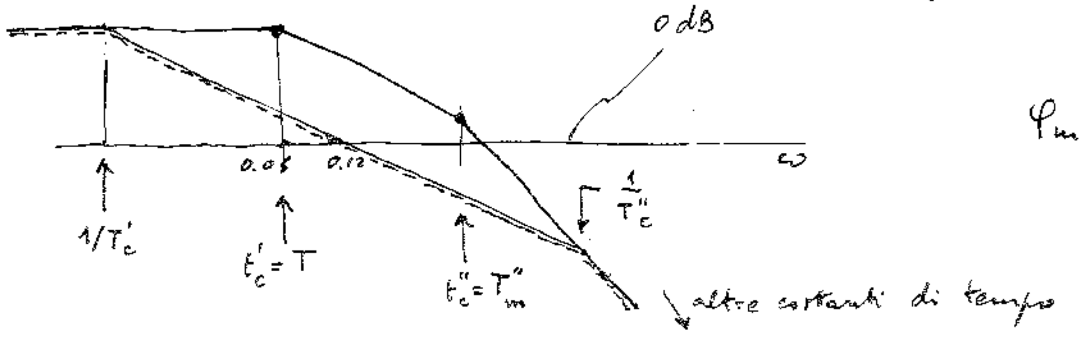
$$\mu_{dB} = 26$$

<u>Progetto dinamico</u> $(\omega_c \geq 0.12 \;,\; \varphi_m \geq 60^\circ)$

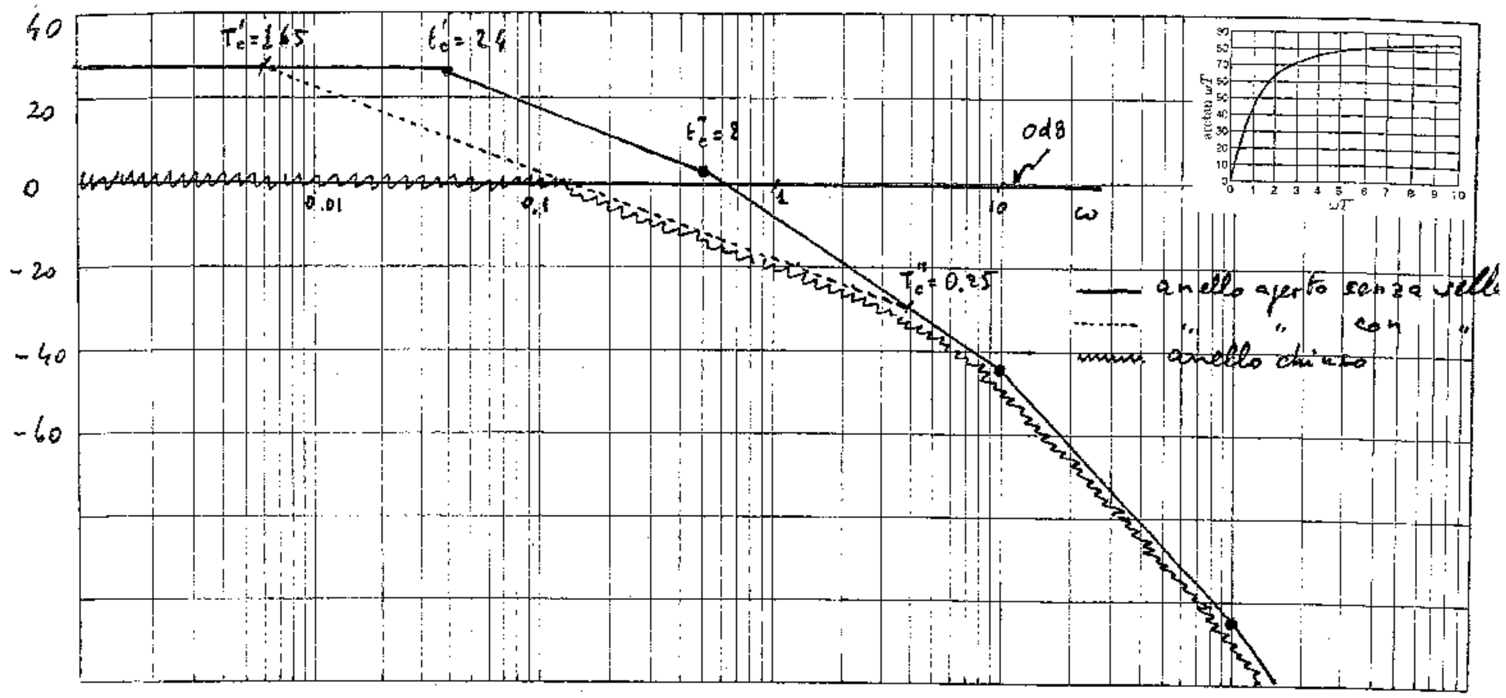
<u>I ipotesi</u>: solo $\mu_c = 20$



<u>II ipotesi</u>: rete a sella (si parte dal punto $\omega_c = 0.12$ e si traccia il diagramma desiderato)

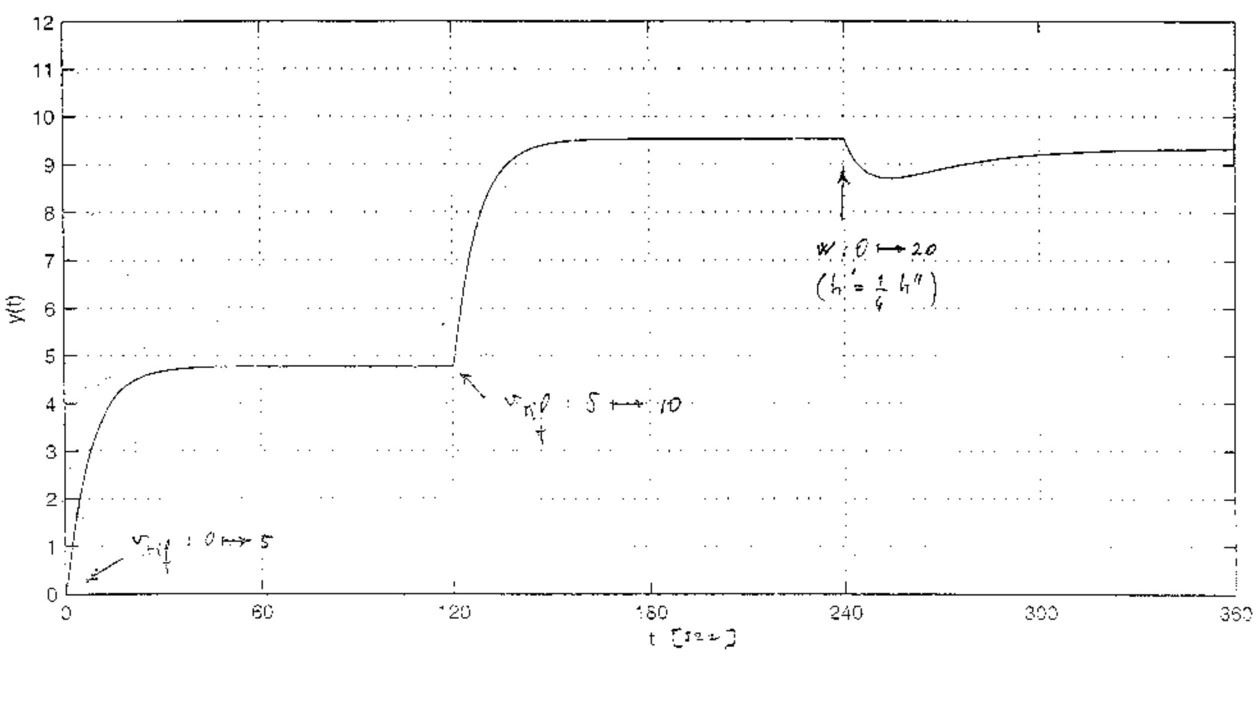


$\varphi_m \gg 60^\circ$!

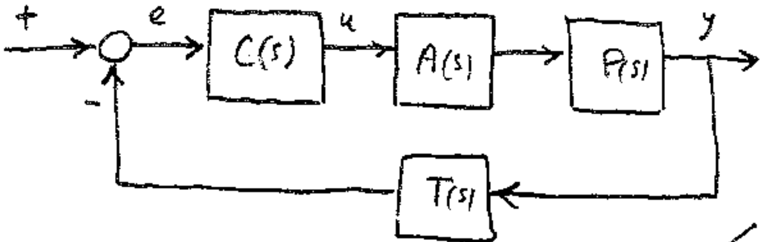


In pratica abbiamo cancellato due poli del sistema (yacht e elica) con due zeri della rete a sella.

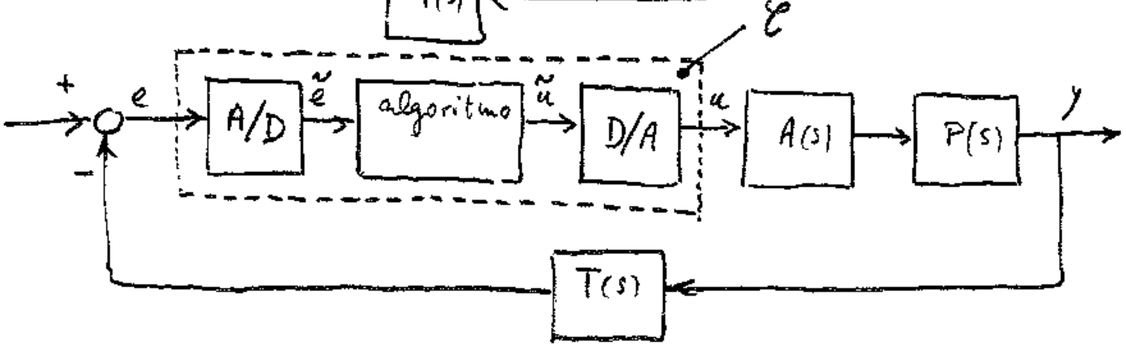
Per sicurezza, si possono effettuare alcune simulazioni come la risposta a una variazione a scalino della velocità di riferimento e della velocità del vento.



REALIZZAZIONE DIGITALE DEL CONTROLLORE

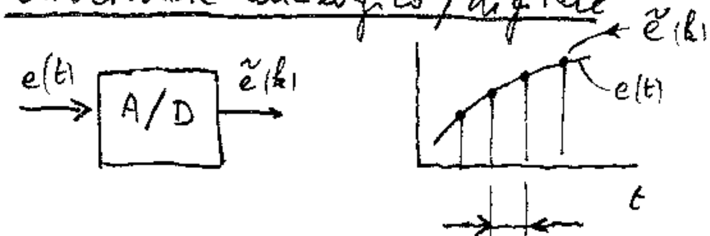


abbiamo visto come si possa determinare $C(s)$



$\mathcal{C}$ è la realizzazione digitale di C

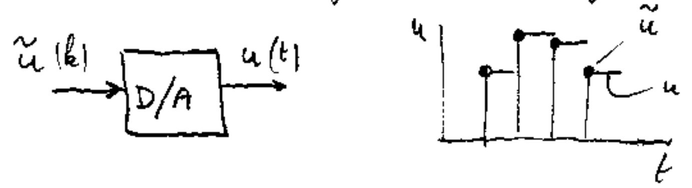
Convertitore analogico/digitale



$$\tilde{e}(k) = e(kT)$$

T = periodo di campionamento

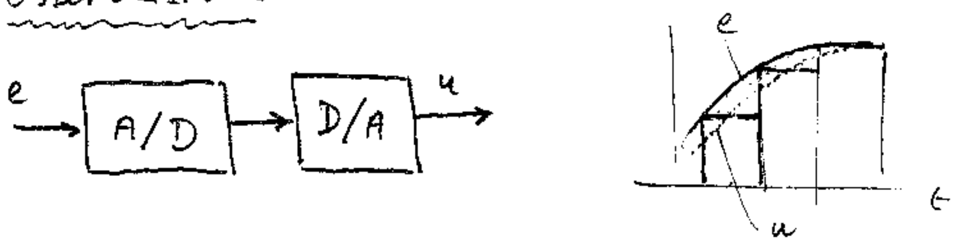
Convertitore digitale/analogico



$u(t) = \tilde{u}(k)$ per $kT \leq t < (k+1)T$

Zero Order Holding (ZOH) = circuito di mantenimento di ordine zero

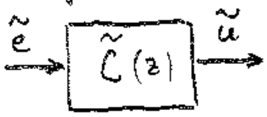
Osservazione



$$u(t) = e\left(t - \frac{T}{2}\right) +$$

+ rumore con prima armonica $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Algoritmo



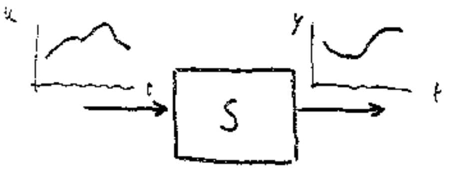
$\tilde{u} = \tilde{C}(z)\,\tilde{e}$ cioè $\tilde{u}(k) = -\tilde{\alpha}_1 \tilde{u}(k-1) - \dots - \tilde{\alpha}_n \tilde{u}(k-n) + \tilde{\beta}_0 \tilde{e}(k) + \dots + \tilde{\beta}_n \tilde{e}(k-n)$

$$\tilde{C} = \frac{\tilde{\beta}_0 z^n + \dots + \tilde{\beta}_n}{z^n + \tilde{\alpha}_1 z^{n-1} + \dots + \tilde{\alpha}_n}$$

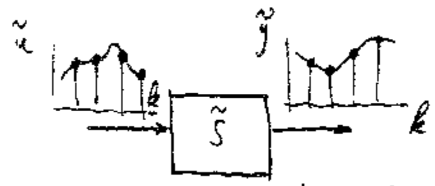
Problema 1 : come determinare $\tilde{C}(z)$ da $C(s)$ e T ?

Problema 2 : come determinare T

DISCRETIZZAZIONE DEL TEMPO



sistema a tempo continuo



sistema discretizzato

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x} = Ax + bu \\ y = c^T x + du\end{array}\right\} \Rightarrow G(s) \qquad\qquad \tilde{G}(z)$$

Come si può passare da G a $\tilde{G}$ (e viceversa)? La risposta dipende dal metodo di discretizzazione usato. Consideriamo solo due metodi (classici) a passo di discretizzazione (T) fisso.

metodo di Eulero

$$\frac{\tilde{x}(k+1)-\tilde{x}(k)}{T} = A\tilde{x}(k) + b\tilde{u}(k)$$

$$\begin{cases}\dfrac{z-1}{T}\tilde{x} = A\tilde{x} + b\tilde{u} \\ \tilde{y} = c^T\tilde{x} + d\tilde{u}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{G}(z)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = c^T x(t) + du(t)$$

$$\begin{cases}sX = AX + bu \\ y = c^T x + du\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$G(s)$$

metodo di Tustin

$$\frac{\tilde{x}(k+1)-\tilde{x}(k)}{T} = A\,\frac{\tilde{x}(k+1)+\tilde{x}(k)}{2} + b\,\frac{\tilde{u}(k+1)+\tilde{u}(k)}{2}$$

$$\frac{z-1}{T}\tilde{x} = A\,\frac{z+1}{2}\tilde{x} + b\,\frac{z+1}{2}\tilde{u}$$

$$\begin{cases}\dfrac{2}{T}\dfrac{z-1}{z+1}\tilde{x} = A\tilde{x} + b\tilde{u} \\ \tilde{y} = c^T\tilde{x} + d\tilde{u}\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{G}(z)$$

$$s = \frac{z-1}{T} \quad\Updownarrow\quad z = 1+sT$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\tilde{G}(z) = G\left(\frac{z-1}{T}\right) \\ G(s) = \tilde{G}(1+sT)\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\tilde{G}(z) = G\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right) \\ G(s) = \tilde{G}\left(\frac{1+sT/2}{1-sT/2}\right)\end{array}}$$

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \quad\Updownarrow\quad z = \frac{1+sT/2}{1-sT/2}$$

Più in generale: un metodo è caratterizzato da

$$s = \varphi(z) \quad \text{e} \quad z = \varphi^{-1}(s)$$

per cui

$$\tilde{G}(z) = G(\varphi(z))$$

$$G(s) = \tilde{G}(\varphi^{-1}(s))$$

STABILITÀ DEI METODI DI DISCRETIZZAZIONE

$$\tilde{G}(z) = G(\varphi(z)) \qquad z = \varphi^{-1}(s)$$

Se G è stabile bisogna che sia stabile anche $\tilde{G}$. Altrimenti significa che il metodo si "inventa" un'instabilità (dovuta all'approssimazione numerica).

Se $G(s)$ ha un polo in p (cioè se per $s=p$ si ha $G(s)=\infty$) significa che $\varphi(z)=p \Rightarrow G=\infty \Rightarrow \tilde{G}(\varphi^{-1}(p))=\infty$, cioè

$$\boxed{\tilde{p} = \varphi^{-1}(p)}$$ è la legge di trasformazione dei poli

Quindi, un metodo è stabile se

$$Re(p) < 0 \Leftrightarrow |\tilde{p}| < 1$$

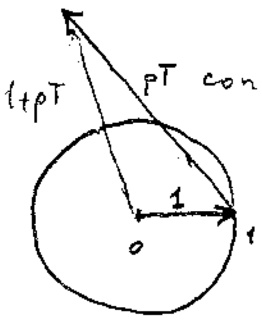
cioè se

$$|\varphi^{-1}(p)| < 1 \quad \text{per } Re(p) < 0$$

<u>metodo di Eulero</u>

$$\varphi^{-1}(p) = 1 + pT$$

$$|\varphi^{-1}(p)| = |1 + pT|$$

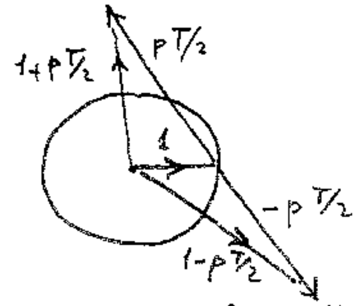


se T è grande (come in figura) il modulo di $1+pT$ può essere >1

<u>metodo di Tustin</u>

$$\varphi^{-1}(p) = \frac{1 + pT/2}{1 - pT/2}$$

$$|\varphi^{-1}(p)| = \left|\frac{1 + pT/2}{1 - pT/2}\right| = \frac{|1 + pT/2|}{|1 - pT/2|}$$



quindi $|\varphi^{-1}(p)| < 1$ sempre (per $Re(p) < 0$) perché il vettore $(1 - p\frac{T}{2})$ ha sempre modulo maggiore del modulo del vettore $(1 + pT/2)$.

SCELTA DELL'ALGORITMO $\tilde{C}(z)$

Per far sì che l'algoritmo approssimi bene il regolatore continuo è bene scegliere $\tilde{C}(z)$ discretizzando il sistema con f. d. t. $C(s)$. Per esempio, si può usare il metodo di Tustin (che non introduce instabilità numeriche) per cui

$$\tilde{C}(z) = C\left(\frac{2}{T}\ \frac{z-1}{z+1}\right)$$

SCELTA DEL PERIODO DI CAMPIONAMENTO T

Quando i campionamenti costano o quando sono fastidiosi o pericolosi c'è interesse a fare T grande.

Ci sono però vari motivi per fare T piccolo

- T piccolo per avere integrazioni numeriche accurate (e evitare l'instabilità numerica di certi metodi)
- $T \ll \frac{2\pi}{\omega_c}$ per poter trascurare il rumore ad alta frequenza introdotto dal convertitore D/A (ω_c è la banda del sistema ad anello chiuso mentre $2\pi/T$ è la pulsazione della I armonica del rumore)
- $T \leq \frac{1}{\omega_c}\ \frac{\varphi_m}{10}\ \frac{2\pi}{180}$ (ottenuta imponendo che la perdita di margine di fase ($\omega_c \frac{T}{2}$) sia minore del 10%)