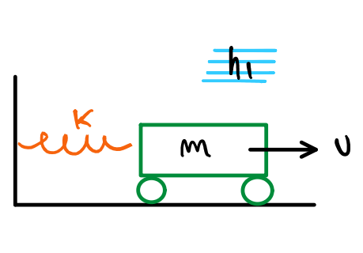
3 - Equilibrio

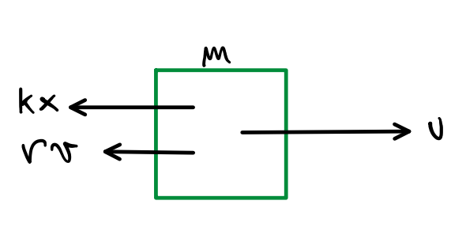
Wednesday, 22 June 2022 19:38

#1 SISTEMA MECCANICO



MODELLO FISICO

NEWTON $\sum F = m a$



$u - kx - rv = ma$

$u - kx - r\dot{x} = m\ddot{x}$

$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = u$

SISTEMA LINEARE TEMPO INVARIANTE LTI

SISTEMA DIFFERENZIALE

x_1 POSIZIONE x_2 VELOCITÀ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(u - kx_1 - rx_2) \\ y = x_1 \end{cases}$$

SPAZIO DEGLI STATI (QUATERNA)

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{r}{m} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{vmatrix} = b \qquad \Sigma = (A, b, c^T, d)$$

$$c^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} = d$$

MODELLO ARMA

RICAVO $y(u(t))$

$$\begin{cases} sx_1 = x_2 \\ sx_2 = \frac{1}{m}(u - kx_1 - rx_2) \end{cases}$$

$s(sx_1) = \frac{1}{m}(u - kx_1 - r(sx_1))$

$ms^2x_1 = u - kx_1 - rsx_1$

$x_1(ms^2 + rs + k) = u$

$\rightarrow y = x_1 = \frac{u}{ms^2 + rs + k}$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$D(s)\,y(t) = N(s)\,u(t)$

$N(s) = 1$

$D(s) = ms^2 + rs + k$

$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{ms^2 + rs + k}$

EQUILIBRIO

$\dot{x}_1 = 0 \quad \dot{x}_2 = 0$

$\dot{x}_1 = x_2 \rightarrow x_2 = 0$

$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(u - kx_1 - rx_2)$

$\rightarrow 0 = \bar{u} - k\bar{x}_1 \qquad \bar{x}_1 = \frac{1}{k}\bar{u}$

$\bar{y} = \bar{x}_1 = G(0)\bar{u} = \frac{1}{k}\bar{u}$

GUADAGNO $\mu = G(0) = \bar{y}/\bar{u} = 1/k$

ZERI E POLI

$N(s) = 1 \rightarrow$ ∄ ZERI

$D(s) = ms^2 + rs + k = 0$ ∃ POLI

$p_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4mk}}{2m}$

CHE SUCCEDE CON $y = x_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(u - kx_1 - rx_2) \\ y = x_2 \end{cases}$$

QUATERNA

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{r}{m} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{vmatrix} = b \qquad \Sigma = (A, b, c^T, d)$$

$$c^T = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} = d$$

CAMBIA SOLO IL VETTORE c^T

ARMA

$$\begin{cases} sx_1 = x_2 \\ sx_2 = \frac{1}{m}(u - kx_1 - rx_2) \end{cases}$$

$sx_2 = \frac{1}{m}\left(u - k\left(\frac{x_2}{s}\right) - rx_2\right)$

$ms^2x_2 = su - kx_2 - rsx_2$

$x_2(ms^2 - rs + k) = su$

$(ms^2 - rs + k)\,y(t) = s\,u(t)$

$D(s) = ms^2 - rs + k \qquad N(s) = s$

TRASFERIMENTO

$G(s) = \frac{s}{ms^2 - rs + k}$

EQUILIBRIO

$\dot{x}_1 = 0 \quad \dot{x}_2 = 0$

$\dot{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{y} = 0$

$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(u - \cancel{r\bar{x}_2} - k\bar{x}_1) = 0$

$u = k\bar{x}_1 \qquad \bar{x}_1 = \frac{1}{k}\bar{u}$

ZERI E POLI

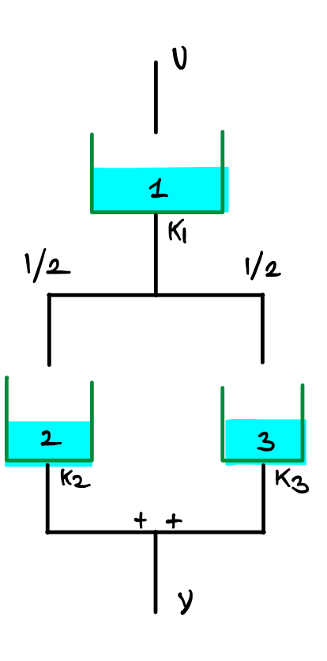
$N(s) = s$ ∃ ZERO $z_1 = 0$

$D(s) = ms^2 + rs + k$ ∃ POLI

$p_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4mk}}{2m}$

#2 - SISTEMA IDRICO

x_i = VOLUME DEL SERBATOIO i



MODELLO DIFFERENZIALE

$\dot{x}_1 = u - x_1k_1$

$\dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1k_1 - x_2k_2$

$\dot{x}_3 = \frac{1}{2}x_1k_1 - x_3k_3$

$y = x_2k_2 + x_3k_3$

SPAZIO DEGLI STATI

$$A = \begin{vmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{2} & -k_2 & 0 \\ \frac{k_1}{2} & 0 & -k_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = b \qquad \Sigma = (A, b, c^T, d)$$

$$c^T = \begin{vmatrix} 0 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix} = d$$

A MATRICE TRIANGOLARE $\lambda_A = \{-k_1, -k_2, -k_3\}$

ARMA

$$\begin{cases} sx_1 = u - x_1k_1 \\ sx_2 = \frac{1}{2}x_1k_1 - x_2k_2 \\ sx_3 = \frac{1}{2}x_1k_1 - x_3k_3 \\ y = x_2k_2 + x_3k_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(s + k_1) = u \\ x_2(s + k_2) = \frac{k_1}{2}x_1 \\ x_3(s + k_3) = \frac{k_1}{2}x_2 \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{u}{s + k_1} \\ x_2 = \frac{k_1}{2}\,\frac{u}{s + k_1}\,\frac{1}{s + k_2} \\ x_3 = \frac{k_1}{2}\,\frac{u}{s + k_1}\,\frac{1}{s + k_3} \end{cases}$$

$y = \frac{k_1}{2}\,\frac{u}{s + k_1}\left(\frac{k_2}{s + k_2} + \frac{k_3}{s + k_3}\right)$

$y = \frac{k_1}{2(s + k_1)}\left(\frac{k_2(s + k_3) + k_3(s + k_2)}{(s + k_2)(s + k_3)}\right)$

$y(t) = \frac{k_1}{2}\,\frac{s(k_2 + k_3) + 2k_2k_3}{(s + k_1)(s + k_2)(s + k_3)}\,u(t)$

POLINOMI

$N(s) = \frac{k_1}{2}(s(k_2 + k_3) + 2k_2k_3)$ GRADO 1

$D(s) = (s + k_1)(s + k_2)(s + k_3)$ GRADO 3

R = GRADO (D) − GRADO (N) = 2 > 0 SISTEMA PROPRIO

TRASFERIMENTO

$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{k_1}{2}\,\frac{s(k_2 + k_3) + 2k_2k_3}{(s + k_1)(s + k_2)(s + k_3)}$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE

$D(s) = s^3 + s^2(k_1 + k_2 + k_3) + s^1(k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1) + s^0 k_1k_2k_3$

$N(s) = s^1\left(\frac{k_1k_2}{2} + \frac{k_1k_3}{2}\right) + s^0 k_1k_2k_3$

$y(t)\,D(s) = u(t)\,N(s)$

$\dddot{y} + \ddot{y}(k_1 + k_2 + k_3) + \dot{y}(k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1) + y\,k_1k_2k_3 = \dot{u}\left(\frac{k_1k_2}{2} + \frac{k_1k_3}{2}\right) + u\,k_1k_2k_3$

POLI E ZERI

POLI $D(s) = 0 \rightarrow p_1 = -k_1 \quad p_2 = -k_2 \quad p_3 = -k_3$ (AUTOVETTORI)

ZERI $N(s) = 0 \rightarrow s(k_2 + k_3) = -2k_2k_3 \qquad z_1 = -\frac{2k_2k_3}{k_2 + k_3}$

TRASFERIMENTO SE $k_2 = k_3$

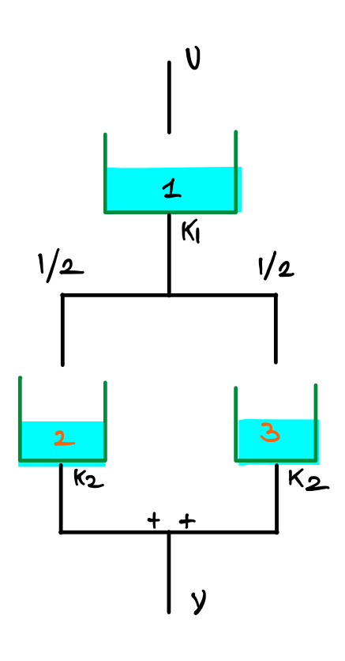
$$G(s) = \frac{k_1}{2}\,\frac{s(k_2 + k_3) + 2k_2k_3}{(s + k_1)(s + k_2)(s + k_3)}$$

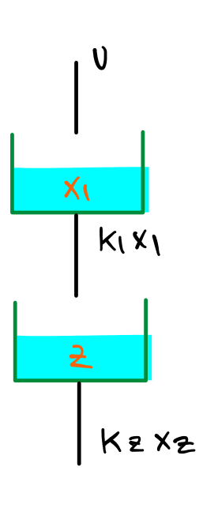
$$= \frac{k_1}{\cancel{2}}\,\frac{s(\cancel{2}k_2) + \cancel{2}k_2^2}{(s + k_1)(s + k_2)^2}$$

$$= \frac{s(k_1k_2) + k_2^2k_1}{(s + k_1)(s + k_2)^2}$$

$$= \frac{k_1k_2\cancel{(s + k_2)}}{(s + k_1)(s + k_2)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{k_1k_2}{(s + k_1)(s + k_2)}$$





COMMENTO

SIA N CHE D PERDONO UN GRADO PER SIMMETRIA

ZERI ∄ NON CI SONO PIÙ

POLI $p_1 = -k_1 \quad p_2 = -k_2$ NE PERDIAMO UNO

OTTERREMMO LA STESSA G SE AVESSIMO UN SERBATOIO UNICO

$z = x_2 + x_3 \qquad k_2 = k_2 = k_z$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u - x_1k_1 \\ \dot{z} = x_1k_1 - zk_z \\ y = zk_z \end{cases} \qquad G(s) = \frac{k_1k_z}{(s + k_1)(s + k_z)}$$

#3 FINANZIAMENTI IN BANCA

CATEGORIE DI FINANZIAMENTI

1) ELEVATA AFFIDABILITÀ
2) MEDIA AFFIDABILITÀ
3) SCARSA AFFIDABILITÀ

$\alpha_i \quad i \rightarrow s$ CATEGORIA

β_i "SOFFERENZE" (NON RISCUOTIBILI)

$u(t)$ NUOVI PRESTITI CATEGORIA 1

MODELLO DINAMICO (LINEARE DISCRETO)

$x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ | FINANZIAMENTI IN ESSERE ALL'ANNO t DIVISI IN CLASSI 1,2,3

$x_1(t+1) = \alpha_{11}x_1(t) + u(t)$ ELEVATA

$x_2(t+1) = \alpha_{22}x_2(t) + \alpha_{12}x_1(t)$ MEDIA

$x_3(t+1) = \alpha_{33}x_3(t) + \alpha_{23}x_2(t)$ SCARSA

$y(t) = \beta_2x_2(t) + \beta_3x_3(t)$ SOFFERENZE

RAPPRESENTAZIONE DI STATO (QUATERNA)

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \Sigma = (A, b, c^T, d)$$

$c^T = \begin{vmatrix} 0 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \quad d = 0 \rightarrow$ PROPRIO

RAPPRESENTAZIONE I/O (ARMA)

$$\begin{cases} zx_1 = \alpha_{11}x_1 + u \\ zx_2 = \alpha_{22}x_2 + \alpha_{12}x_1 \\ zx_3 = \alpha_{33}x_3 + \alpha_{23}x_2 \\ y = \beta_2x_2 + \beta_3x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(z - \alpha_{11}) = u \\ x_2(z - \alpha_{22}) = \alpha_{12}x_1 \\ x_3(z - \alpha_{33}) = \alpha_{23}x_2 \\ y = \beta_2x_2 + \beta_3x_2 \end{cases}$$

$x_1 = \frac{u}{z - \alpha_{11}}$

$x_2 = \frac{\alpha_{12}x_1}{z - \alpha_{22}} = \frac{\alpha_{12}u}{(z - \alpha_{11})(z - \alpha_{22})}$

$x_3 = \frac{\alpha_{23}x_2}{z - \alpha_{33}} = \frac{\alpha_{12}\alpha_{23}u}{(z - \alpha_{11})(z - \alpha_{22})(z - \alpha_{33})}$

$y = \frac{\beta_2\alpha_{12}u}{(z - \alpha_{11})(z - \alpha_{22})} + \frac{\beta_3\alpha_{12}\alpha_{23}u}{(z - \alpha_{11})(z - \alpha_{22})(z - \alpha_{33})}$

$y = \left[\frac{(z - \alpha_{33})\beta_2\alpha_{12} + \beta_3\alpha_{12}\alpha_{23}}{(z - \alpha_{11})(z - \alpha_{22})(z - \alpha_{33})}\right]u$

$$\underbrace{(z - \alpha_{11})(z - \alpha_{22})(z - \alpha_{33})}_{D(z)} \cdot y = \underbrace{((z - \alpha_{33})\beta_2\alpha_{12} + \beta_3\alpha_{12}\alpha_{23})}_{N(z)} \cdot u$$

DENOMINATORE GRAD (D(z)) = 3

NUMERATORE GRAD (N(z)) = 1

RELATIVO R = GRAD(D(z)) − GRAD(N(z)) = 2

$R > 0$ SISTEMA PROPRIO (∃)

$D = 3,\ x \in \mathbb{R}^3$ TUTTI INFLUENZANO USCITA (∄ NON OSSERVABILI)

N(z), D(z) PRIMI, NESSUNA RADICE IN COMUNE
CON u POSSO INFLUENZARE TUTTO IL SISTEMA
→ COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{k_1z + k_2}{(z - \alpha_{11})(z - \alpha_{22})(z - \alpha_{33})}$

$$\begin{cases} k_1 = \beta_2\alpha_{12} \\ k_2 = \beta_3\alpha_{12}\alpha_{23} - \beta_2\alpha_{12}\alpha_{33} \end{cases}$$

DETERMINA NUOVE SOFFERENZE ALL'EQUILIBRIO SE L'INGRESSO COSTANTE $u(t) = \bar{u}$

→ GUADAGNO

$\mu = G(z=1) = \frac{k_1 + k_2}{(1 - \alpha_{11})(1 - \alpha_{22})(1 - \alpha_{33})}$

#4 - SOCIETÀ FINANZIARIA

NUOVI PRESTITI QUADRIMESTRALI

1% INTERESSE SUL PRESTITO

2% PRESTITI PERSI

MODELLO INTERNO

$u(t)$ # NUOVI PRESTITI AD INIZIO MESE

$x_i(t)$ # PRESTITI A i-ESIMO MESE

$y(t)$ INTERESSI RISCOSSI (PROFITTI)

$$\begin{cases} x_1(t+1) = 0.98\,u(t) \\ x_2(t+1) = 0.98\,x_1(t) \\ x_3(t+1) = 0.98\,x_2(t) \\ x_4(t+1) = 0.98\,x_3(t) \\ y(t) = 0.01\,(x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)) \end{cases}$$

MODELLO ESTERNO

$zx_1 = 0.98\,u \qquad x_1 = \frac{0.98}{z}u$

$zx_2 = 0.98\,x_1 \qquad x_2 = \left(\frac{0.98}{z}\right)^2u$

$zx_3 = 0.98\,x_2 \qquad x_3 = \left(\frac{0.98}{z}\right)^3u$

$zx_4 = 0.98\,x_3 \qquad x_4 = \left(\frac{0.98}{z}\right)^4u$

$y = 0.01\left(\frac{0.98}{z}u + \left(\frac{0.98}{z}\right)^2u + \left(\frac{0.98}{z}\right)^3u + \left(\frac{0.98}{z}\right)^4u\right)$

$z^4y = 0.0098\,(z^3 + 0.98z^2 + 0.98^2z + 0.98^3)\,u$

$N(z) = 0.0098\,(z^3 + 0.98z^2 + 0.98^2z + 0.98^3)$

$D(z) = z^4$

$G(z) = \frac{0.0098\,(z^3 + 0.98z^2 + 0.98^2z + 0.98^3)}{z^4}$

SE $\bar{u} = 100\,k€$ CALCOLA $\bar{y}$

GUADAGNO $\mu = G(z=1)$

USCITA $\bar{y} = G(1)\cdot\bar{u} = 3804$ €

#5 - MATRICIALE LTI

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$c^T = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad d = 0$

SISTEMA

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 3x_3 + u \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

MODELLO ARMA

$$\begin{cases} sx_1 = -x_1 + x_2 + u \\ sx_2 = -2x_2 + u \\ sx_3 = -x_2 - 3x_3 + u \\ y = x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(s+1) = x_2 + u \\ x_2(s+2) = u \\ x_3(s+3) = -x_2 + u \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)}u \\ x_2 = \frac{1}{s+2}u \\ x_3 = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}u \\ y = x_1 - x_2 \end{cases} \longrightarrow y = \frac{2}{(s+1)(s+2)}\,u$$

POLINOMI

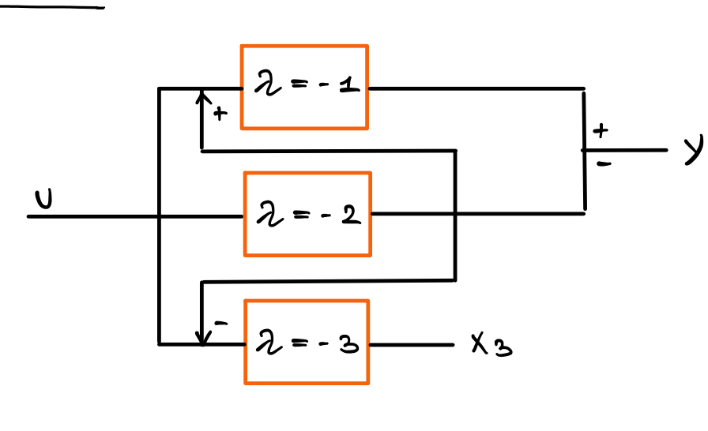
$D(s) = (s+1)(s+2)$ GRADO 2

$N(s) = 2$ GRADO 0

$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$

D HA GRADO 2 E NON 3, COME MAI?

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 3x_3 + u \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$



x_3 NON INFLUENZA NÈ DIRETTAMENTE NÈ INDIRETTAMENTE y

TRA TUTTI GLI AUTOVALORI SI "PERDE" QUELLO CHE GENERA x_3

EQUILIBRIO

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{u} \\ 0 = -2\bar{x}_2 + \bar{u} \\ 0 = -\bar{x}_2 - 3\bar{x}_3 + \bar{u} \\ \bar{y} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x}_1 = -(\bar{x}_2 + \bar{u}) = -\frac{3}{2}\bar{u} \\ \bar{x}_2 = \bar{u}/2 \\ \bar{x}_3 = \bar{u}/6 \\ \bar{y} = -2\bar{u} \end{cases}$$

ZERI

$N(s) = 0$ ∄

$D(s) = 0 \quad p_1 = -1 \quad p_2 = -2$

GUADAGNO $\mu = G(s=0) = 1$