Risoluzione di reti

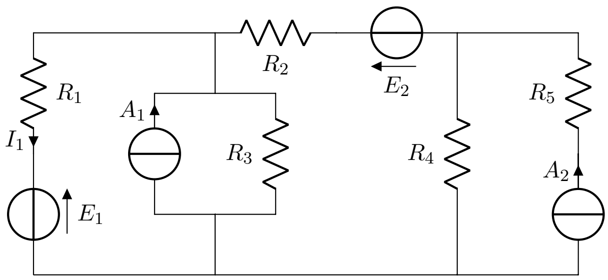
A cura di Alessandro Niccolai
A.A. 2019/2020

Ultimo aggiornamento: 20 gennaio 2020

D.1 • Risoluzione di reti mediante tecniche ad-hoc

Esercizio D.1.1

Dato il circuito in figura, la corrente che circola in R_1.

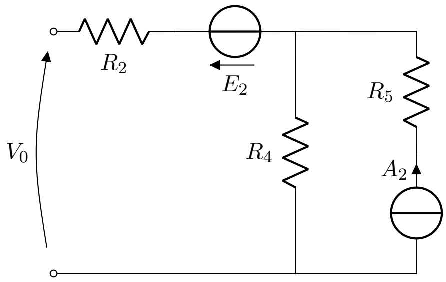


Dati:
$R_1 = 14\Omega$
$R_2 = 4\Omega$
$R_3 = 7\Omega$
$R_4 = 10\Omega$
$R_5 = 10\Omega$
$E_1 = 70\,\mathrm{V}$
$E_2 = 20\,\mathrm{V}$
$A_1 = 9\,\mathrm{A}$
$A_2 = 12\,\mathrm{A}$

Risultati:
$I_1 = 1\,\mathrm{A}$

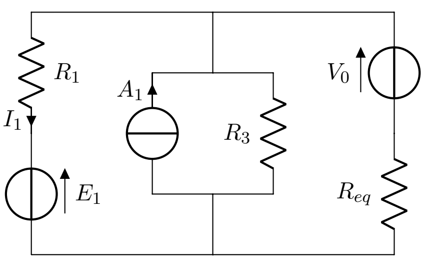
Soluzione:

Calcolando l'equivalente Thevenin della parte destra del circuito:



$$R_{eq} = R_2 + R_4 = 14\Omega \tag{1}$$

$$V_0 = E_2 + R_4 \cdot A_2 = 140V \tag{2}$$



Apllicando Millman:

$$V_{MN} = \frac{\dfrac{V_0}{R_{eq}} + A_1 + \dfrac{E_1}{R_1}}{\dfrac{1}{R_{eq}} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_1}} = 84V \tag{3}$$

Chiudendo una maglia:

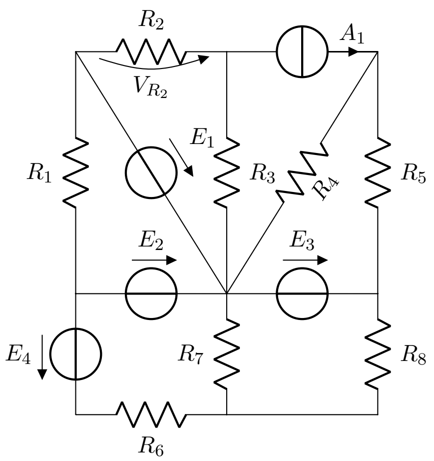
$$V_1 = V_{MN} - E_1 = 14V \tag{4}$$

Infine:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = 1A \tag{5}$$

Esercizio D.1.2

Dato il circuito in figura, calcolare la potenza dissipata dal resistore R_1 e la tensione V_{R_2}.



Dati:
$R_1 = R_2 = R_3 = 27\ \Omega$
$R_4 = R_5 = 54\ \Omega$
$R_6 = R_7 = R_8 = 30\ \Omega$
$E_1 = 18\,\mathrm{V}$
$E_2 = 27\,\mathrm{V}$
$E_3 = 40\,\mathrm{V}$
$E_4 = 7\,\mathrm{V}$
$A_1 = 2\,\mathrm{A}$

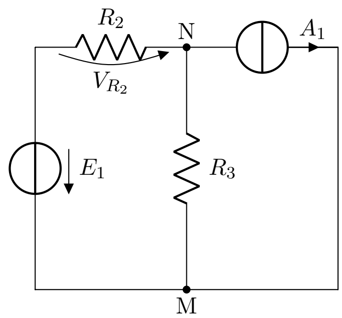
Risultati:
$P_{R_1} = 3\,\mathrm{W}$
$V_{R_2} = 36\,\mathrm{V}$

Soluzione:

Subito:

$$P_{R_1} = \frac{(E_1 - E_2)^2}{R_1} = 3\,\mathrm{W} \tag{6}$$

Sdoppiando i generatori di tensione ed eliminando la parte in serie ad A_1:



Da Millman:

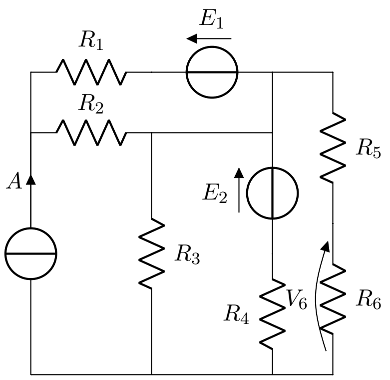
$$V_{MN} = \frac{A_1 + \dfrac{E_1}{R_2}}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = \frac{A_1 R_2 + E_1}{2} = 36\,\mathrm{V} \tag{7}$$

Infine:

$$V_{R_2} = E_1 - V_{MN} = -18\,\text{V} \tag{8}$$

Esercizio D.1.3

Data la rete in figura, calcolare V_6 e la potenza generata da E_1.

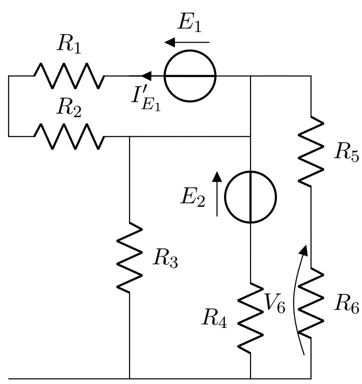


Dati:
$R_1 = 10\Omega$
$R_2 = 15\Omega$
$R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 5\Omega$
$E_1 = 30\,\text{V}$
$E_2 = 30\,\text{V}$
$A = 2\,\text{A}$

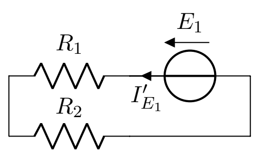
Risultati:
$V_6 = 8V$
$P_{g,E_1} = 0W$

Soluzione:

La rete in figura è caratterizzata da 3 nodi, quindi non è possibile applicare la formula di Millman. E' inoltre difficile individuare un valido bipolo di cui calcolare l'equivalente che porti ad una sostanziale riduzione della complessità dell'esercizio.
Tuttavia, si vede che, spegnendo il generatore A la rete si semplifica, dato che si creano due monopolo elettrici. Quindi conviene applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.
Si noti che la potenza non è una variabile lineare della rete, quindi mediante questo procedimento si potrà calcolare solo la corrente I_{E_1}.
Spengo A:

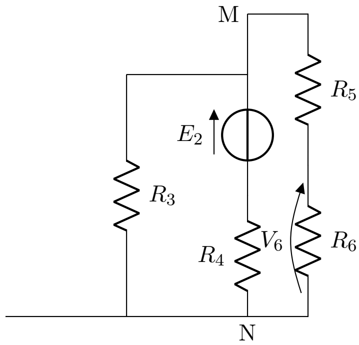


La rete ha tre nodi, ma si può vedere che le due parti di rete sono collegate da un nodo solo, di conseguenza si possono considerare come separate.



In questa maglia, si vede facilmente che:

$$I'_{E_1} = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{12}{10}A \tag{9}$$



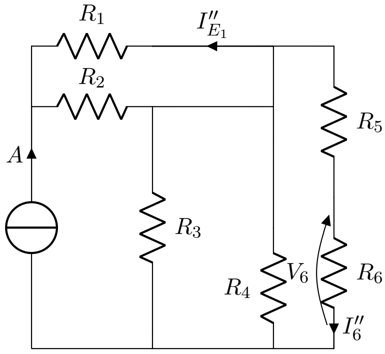
Questa parte di circuito si risolve con Millman:

$$V_{MN} = \frac{\frac{E_2}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + R_6}} = 12V \tag{10}$$

Con un partitore di tensione:

$$V'_6 = V_{MN} \cdot \frac{R_6}{R_5 + R_6} = 6V \tag{11}$$

Spengo E_i:



Il circuito ha solo un generatore, quindi si può risolvere con l'applicazione del partitore di corrente:

$$I''_{E_1} = -A \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = -\frac{6}{5}A \tag{12}$$

$$I''_6 = A \frac{\frac{R_3R_4}{R_3 + R_4}}{\frac{R_3R_4}{R_3 + R_4} + R_5 + R_6} = 0.4A \tag{13}$$

Quindi:

$$V''_6 = I''_6 R_6 = 2V \tag{14}$$

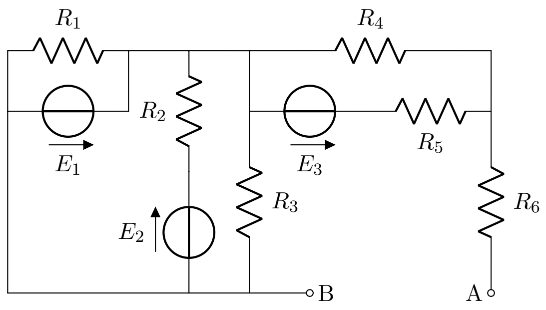
Sommando:

$$P_{E_1} = E_1(I'_{E_1} + I''_{E_1}) = 0W \tag{15}$$

$$V_6 = V'_6 + V''_6 = 8V \tag{16}$$

Esercizio D.1.4

Calcolare l'equivalente Norton del seguente bipolo.

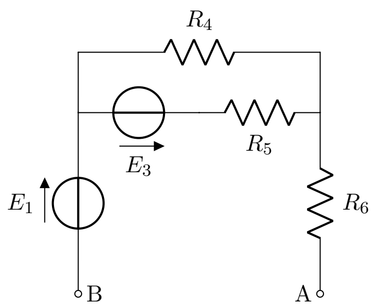


Dati:
$R_1 = 8\Omega$ $R_2 = 12\Omega$
$R_3 = 16\Omega$ $R_4 = 1\Omega$
$R_5 = 6\Omega$ $R_6 = 4\Omega$
$E_1 = 18\,\text{V}$ $E_2 = 20\,\text{V}$
$E_3 = 10\,\text{V}$

Risultati:
$R_{eq} = \frac{34}{7}\Omega$
$I_{CC} = 4\,\text{A}$

Soluzione:

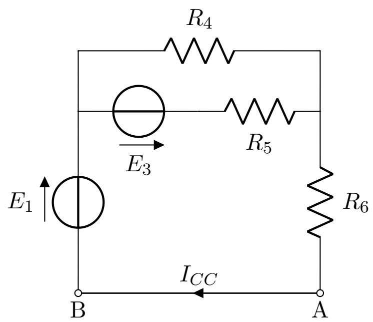
Per prima cosa si puo' notare che molte parti della rete sono in parallelo al generatore di tensione E_1 e, conseguentemente, non forniscono alcun contributo agli effetti esterni. Eliminando tali parti, il bipolo si semplifica:



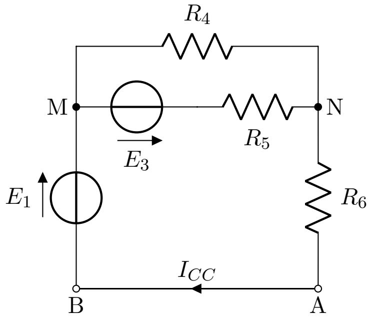
La resistenza equivalente e':

$$R_{eq} = R_6 + R_4//R_5 = \frac{34}{7}\Omega \tag{17}$$

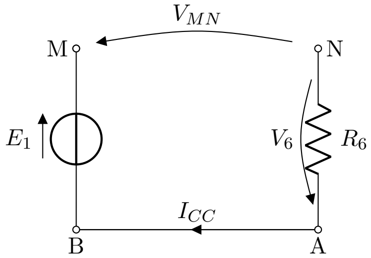
Imponendo un corto circuito fra A e B:



La rete e' quindi binodale:



$$V_{MN} = \frac{\dfrac{E_1}{R_6} - \dfrac{E_3}{R_5}}{\dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5} + \dfrac{1}{R_6}} = 2V \tag{18}$$



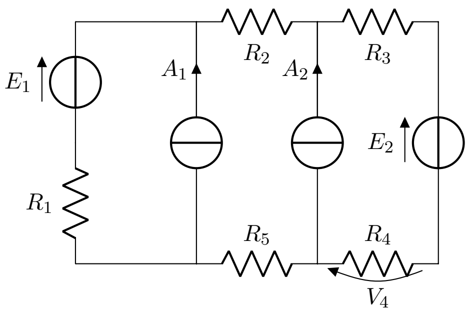
$$V_6 = V_{MN} - E_1 = -16V \tag{19}$$

quindi:

$$I_{CC} = -I_6 = -\frac{V_6}{R_6} = 4A \tag{20}$$

Esercizio D.1.5

Calcolare la potenza generata da A_2 e V_4.



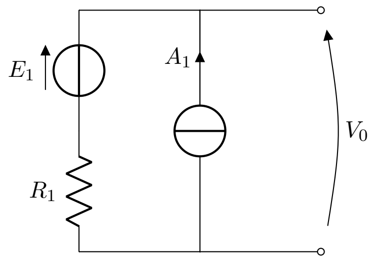
Dati:
$R_1 = 10\Omega$
$R_2 = 15\Omega$
$R_3 = 10\Omega$
$R_4 = 20\Omega$
$R_5 = 5\Omega$
$E_1 = 10\,\mathrm{V}$
$E_2 = 30\,\mathrm{V}$
$A_1 = 2\,\mathrm{A}$
$A_2 = 2\,\mathrm{A}$

Risultati:
$P_{A_{2,gen}} = 120\,\mathrm{W}$
$V_4 = -20\,\mathrm{V}$

Soluzione:

Nella risoluzione di questa rete esistono moltepici possibilita'. Escludendo per motivi di lunghezza l'applicazione delle equazioni di Kirchhoff, si nota subito che la rete in esame ha 4 nodi, quindi non e' possibile applicare direttamente la formula di Millman.

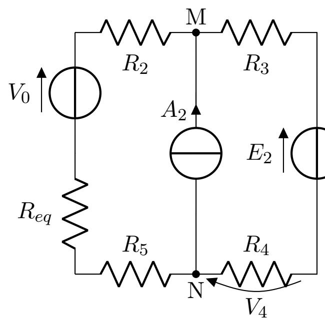
Dato che ci sono incognite relative a bipoli diversi, e' sconsigliato applicare l'equivalente Thevenin visto dal bipolo.
Tuttavia, ai puo' utilizzare il teorema di Thevenin per semplificare una parte del circuito e togliere due nodi. In particolare, la parte di rete che verra' semplificata e' quella che non contiene incognite.
Calcolando l'equivalente della parte sinistra:



$$R_{eq} = R_1 = 10\Omega \tag{21}$$

$$V_0 = E_1 + A_1 R_1 = 30V \tag{22}$$

A questo punto la rete semplificata risulta essere:



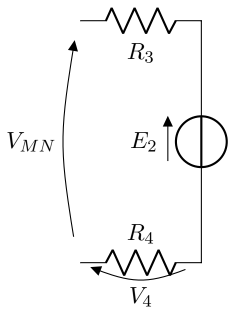
Questa rete e' binodale, quindi si puo' applicare Millman:

$$V_{MN} = \frac{\dfrac{V_0}{R_{eq}+R_2+R_5} + A_2 + \dfrac{E_2}{R_3+R_4}}{\dfrac{1}{R_{eq}+R_2+R_5} + \dfrac{1}{R_3+R_4}} = 60V \tag{23}$$

Sapendo che la tensione ai capi di A_2 e' V_{MN}:

$$P_{A_2,gen} = V_{MN} A_2 = 120W \tag{24}$$

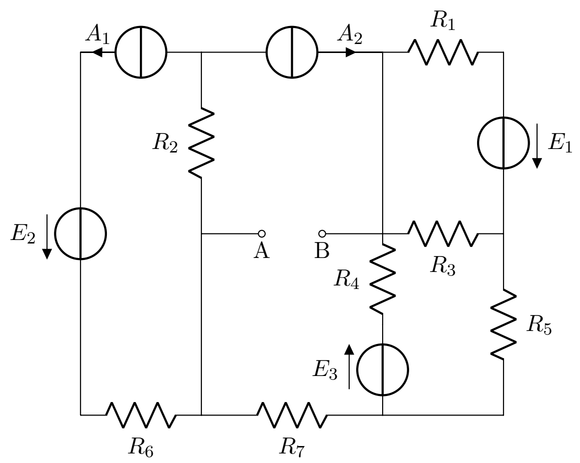
Infine, isolando l'ultimo ramo:



$$V_4 = (E_2 - V_{MN})\frac{R_4}{R_3+R_4} = -20V \tag{25}$$

Esercizio D.1.6

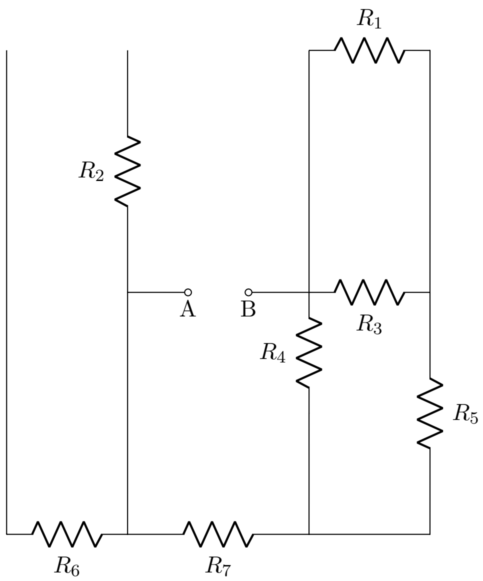
Dato il bipolo in figura, calcolare l'equivalente Thevenin.



Dati:
$R_1 = 30\Omega$ $R_2 = 5\Omega$
$R_3 = 30\Omega$ $R_4 = 5\Omega$
$R_5 = 5\Omega$ $R_6 = 15\Omega$
$R_7 = 5\Omega$
$E_1 = 20\,\mathrm{V}$ $E_2 = 10\,\mathrm{V}$
$E_3 = 15\,\mathrm{V}$
$A_1 = 6\,\mathrm{A}$ $A_2 = 10\,\mathrm{A}$

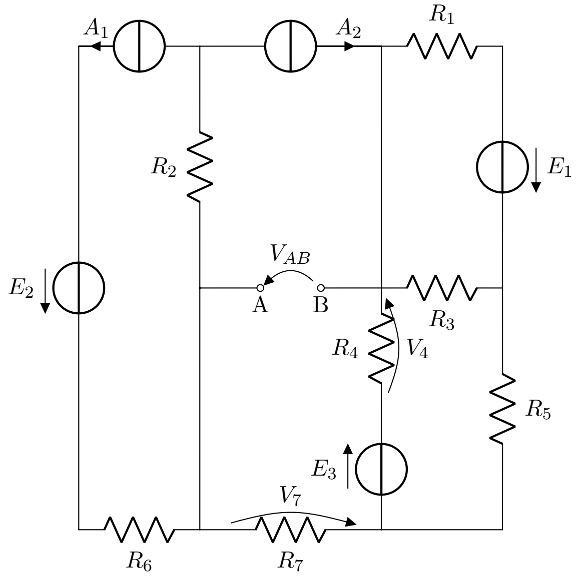
Risultati:
$R_{eq} = 9\Omega$
$V_0 = -100\,\mathrm{V}$

Soluzione:
La resistenza equivalente e' abbastanza semplice, dopo aver spento i genratori:



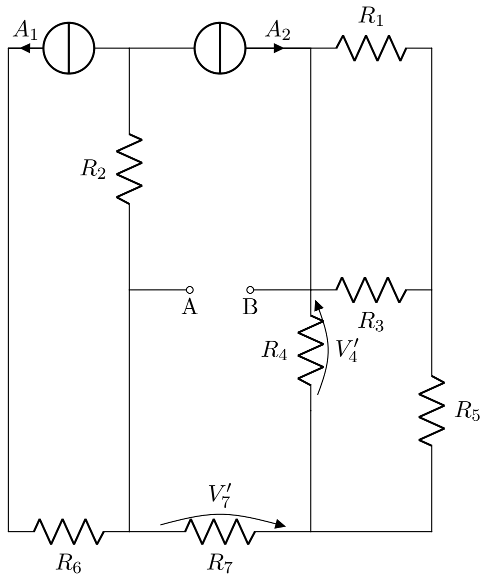
$$R_{AB} = R_7 + R_4//(R_1//R_3 + R_5) = 9\Omega \tag{26}$$

Prima di applicare qualunque cosa, conviene chiudere una maglia, dato che la tensione V_{AB} non e' definita su un bipolo, quindi delle modifiche topologiche della rete potrebbe far scomparire i morsetti fra cui e' definita:



$$V_{AB} = -V_7 - E_3 - V_4 \tag{27}$$

A questo punto, si puo' applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.
Spengo E_i

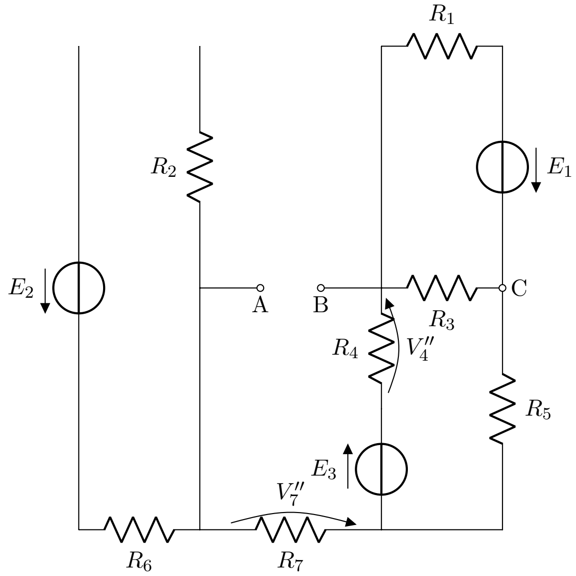


$$V_7' = A_2 \cdot R_7 = 50V \tag{28}$$

$$V_4' = A_2 \cdot \frac{R_5 + R_1//R_3}{R_4 + R_5 + R_1//R_3} \cdot R_4 = 40V \tag{29}$$

Spengo A_i

Il sistema:



$$V_7'' = 0V \tag{30}$$

$$V_{BC} = \frac{\dfrac{E_3}{R_4+R_5} - \dfrac{E_1}{R_1}}{\dfrac{1}{R_4+R_5} + \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3}} = 5V \tag{31}$$

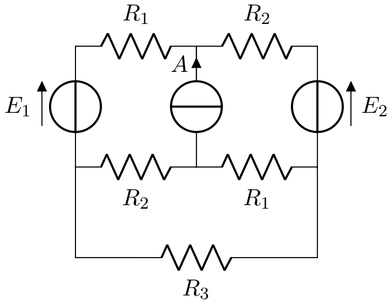
$$V_4'' = (V_{BC} - E_3) \cdot \frac{R_4}{R_4+R_5} = -5V \tag{32}$$

Sommando

$$V_{AB} = -V_7' - V_7'' - E_3 - V_4' - V_4'' = -100V \tag{33}$$

Esercizio D.1.7

Data la rete in figura, calcolare la potenza dissipata dalla resistenza R_3.

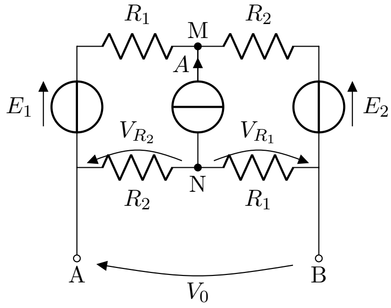


Dati:
$E_1 = 80\,\text{V}$
$E_2 = 60\,\text{V}$
$A = 3\,\text{A}$
$R_1 = 5\ \Omega$
$R_2 = 15\ \Omega$
$R_3 = 20\ \Omega$

Risultati:
$P_{d,R_3} = 0{,}56\,\text{W}$

Soluzione:

Il sistema migliore per risolvere questa rete e' calcolare l'equivalente Thevenin visto dalla resistenza R_3:



La resistenza equivalente vale:

$$R_{eq} = \frac{R_1 + R_2}{2} = 10\ \Omega \tag{34}$$

La tensione a vuoto si puo' calcolare come:

$$V_0 = V_{R_2} - V_{R_1} \tag{35}$$

queste ultime si possono calcolare dopo aver applicato la formula di Millman:

$$V_{MN} = \frac{\dfrac{E_1}{R_1 + R_2} + A + \dfrac{E_2}{R_1 + R_2}}{\dfrac{1}{R_1 + R_2} + \dfrac{1}{R_1 + R_2}} = \frac{E_1 + A(R_1 + R_2) + E_2}{2} = 100\,\mathrm{V} \tag{36}$$

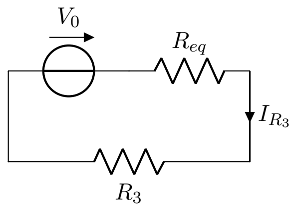
Quindi:

$$V_{R_2} = (V_{MN} - E_1)\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 15\,\mathrm{V} \tag{37}$$

$$V_{R_1} = (V_{MN} - E_2)\frac{R_1}{R_1 + R_2} = 10\,\mathrm{V} \tag{38}$$

Infine:

$$V_0 = 5V \tag{39}$$



A questo punto:

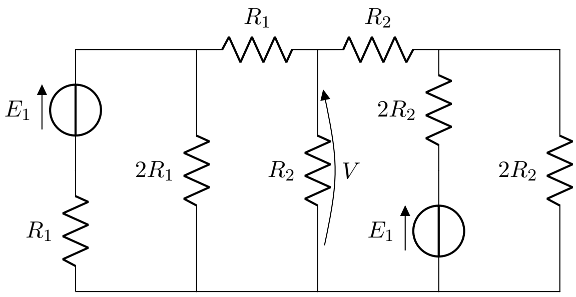
$$I_{R_3} = \frac{V_0}{R_3 + R_{eq}} = \frac{1}{6}\,\mathrm{A} \tag{40}$$

Infine:

$$P_{R_3} = R_3 I_{R_3}^2 = 0{,}56\,\mathrm{W} \tag{41}$$

Esercizio D.1.8

Dato il circuito in figura, la differenza di potenziale V.



Dati:
$R_1 = 3\ \Omega$
$R_2 = 10\ \Omega$
$E_1 = 84\,\mathrm{V}$

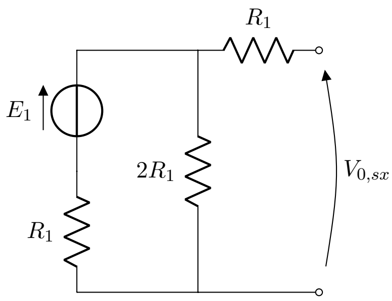
Risultati:
$V = 38\,\mathrm{V}$

Soluzione:

Le possibili tecniche viste fino ad adesso sono:

- Sistema completo di risoluzione, che richiederebbe, con un'applicazione accorta, la risoluzione di un sistema di 7 equazioni in 7 incognite;
- Formula di Millman, non applicabile direttamente dato che la rete non e' binodale;
- Equivalenti agli effetti esterni, che possono essere utilizzati al fine di semplificare la rete.

Al fine di utilizzare al meglio gli equivalenti agli effetti esterni (Thevenin, nella fattispecie), e' possibile analizzare due modalita' di applicazione.
La prima consiste nell'effettuare l'equivalente di tutta la rete vista dal bipolo R_2. In tal caso, la soluzione dell'equivalente risulta essere un po' complessa, mentre il calcolo finale si riduce ad un partitore di tensione.
La seconda consiste nel riportare la rete ad una binodale per poi effettuare un Millman. In tal caso e' richiesto di calcolare due equivalenti Thevenin dei bipoli a destra ed a sinistra di R_2. Questi equivalenti risultano essere abbastanza semplici, quindi nella risoluzione riportata si opta per questa strategia.
Il lato sinistro e':

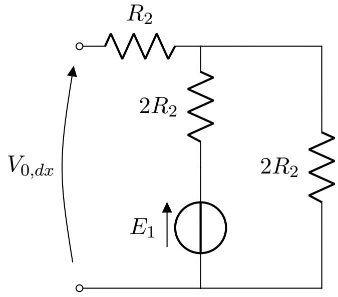


L'equivalente Thevenin di questo bipolo vale:

$$V_{0,sx} = E_1 \frac{2R_1}{R_1 + 2R_1} = \frac{2E_1}{3} = 56\,\mathrm{V} \tag{42}$$

$$R_{eq,sx} = R_1 + R_1 // 2R_1 = 5\ \Omega \tag{43}$$

La parte destra della rete e':

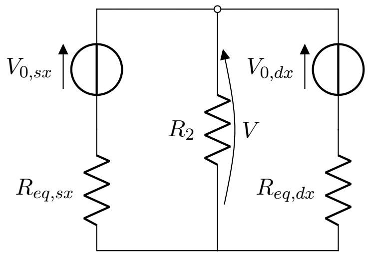


L'equivalente Thevenin vale:

$$V_{0,dx} = E_1 \frac{2R_2}{2R_2 + 2R_2} = \frac{E_1}{2} = 42V \tag{44}$$

$$R_{eq,dx} = R_2 + 2R_2 // 2R_2 = 20\Omega \tag{45}$$

La rete diventa:

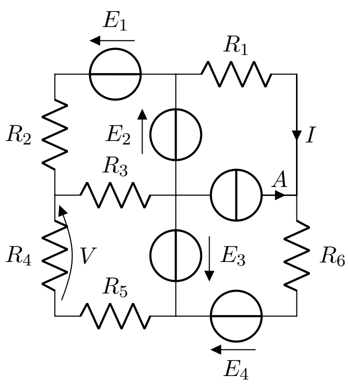


La differenza di potenziale V si puo' calcolare con Millman:

$$V = \frac{\dfrac{V_{0,dx}}{R_{eq,dx}} + \dfrac{V_{0,sx}}{R_{eq,sx}}}{\dfrac{1}{R_{eq,dx}} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_{eq,sx}}} = 38V \tag{46}$$

Esercizio D.1.9

Dato il circuito in figura, calcolare la potenza generata da E_2, la potenza dissipata da A, la corrente I e la tensione V.

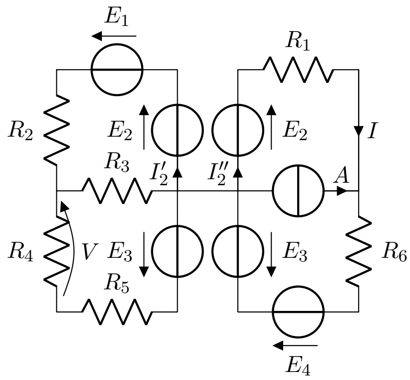


Dati:
$R_1 = 75\ \Omega$ $R_2 = 5\ \Omega$
$R_3 = 10\ \Omega$ $R_4 = 10\ \Omega$
$R_5 = 40\ \Omega$ $R_6 = 50\ \Omega$
$E_1 = 100\,\mathrm{V}$ $E_2 = 50\,\mathrm{V}$
$E_3 = 150\,\mathrm{V}$ $E_4 = 50\,\mathrm{V}$
$A = 5\,\mathrm{A}$

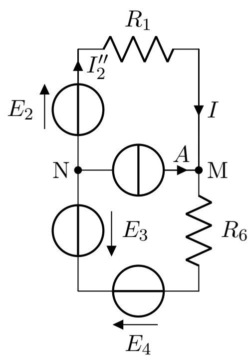
Risultati:
$P_{d,A} = -1150\,\mathrm{W}$
$I = -2{,}4\,\mathrm{A}$
$V = -9{,}375\,\mathrm{V}$
$P_{g,E_2} = -61{,}41\,\mathrm{W}$

Soluzione:

Sdoppiando E_2 ed E_3:



Analizzando prima la parte destra del circuito:



La rete è binodale, quindi è possibile calcolare la tensione ai capi di A con Millman:

$$V_A = V_{MN} = \frac{A + \dfrac{E_2}{R_1} + \dfrac{E_3 - E_4}{R_6}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_6}} = 230\,\mathrm{V} \tag{47}$$

E' subito possibile calcolare la potenza dissipata da A:

$$P_{d,A} = -V_A A = -1150\,\mathrm{W} \tag{48}$$

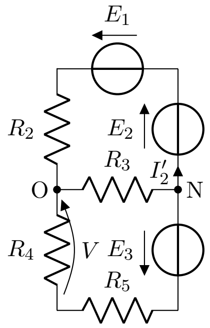
Da una KCL:

$$I = I_2'' \tag{49}$$

La corrente si può calcolare facilmente:

$$I = I_2'' = \frac{E_2 - V_{MN}}{R_1} = -2{,}4\,\mathrm{A} \tag{50}$$

La metà sinistra del circuito è:



Anche in questo caso è possibile applicare la formula di Millman:

$$V_{ON} = \frac{\dfrac{E_1 + E_2}{R_2} + \dfrac{E_3}{R_4 + R_5}}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_4 + R_5} + \dfrac{1}{R_3}} = 103{,}125\,\mathrm{V} \tag{51}$$

Da un partitore di tensione:

$$V = (V_{ON} - E_3)\frac{R_4}{R_4 + R_5} = -9{,}375\,\mathrm{V} \tag{52}$$

Infine:

$$I_2' = \frac{E_1 + E_2 - V_{OM}}{R_5} = 1{,}172\,\mathrm{A} \tag{53}$$

Sommando i due contributi:

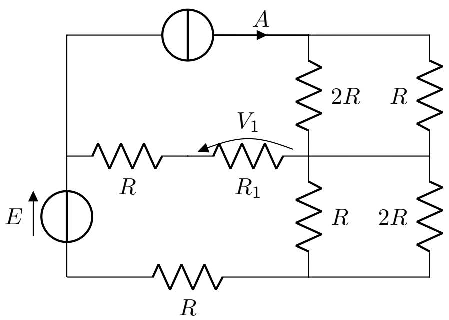
$$I_2 = I_2' + I_2'' = -1{,}228\,\mathrm{A} \tag{54}$$

Quindi:

$$P_{g,E_2} = E_2 I_2 = -61{,}41\,\mathrm{W} \tag{55}$$

Esercizio D.1.10

Data la rete in figura, calcolare la tensione V_1.

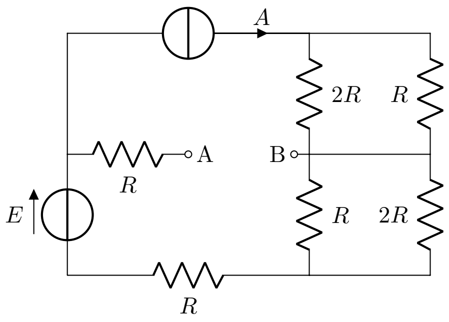


Dati:
$R = 6\ \Omega$
$R_1 = 28\ \Omega$
$E = 84\,\mathrm{V}$
$A = 4\,\mathrm{A}$

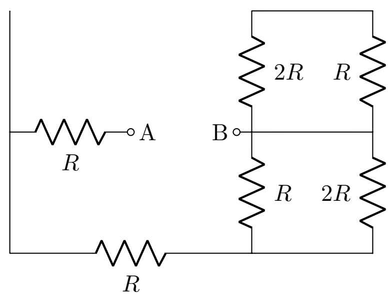
Risultati:
$V_1 = 28\,\mathrm{V}$

Soluzione:

Dato che il circuito e’ composto da piu’ generatori non e’ possibile applicare i partitori.
E’ possibile semplificare il circuito calcolando l’equivalente Thevenin visto dal resistore R_1.

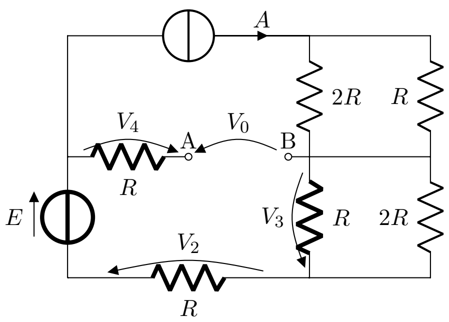


La resistenza equivalente si calcola spegnendo i generatori indipendenti:



$$R_{eq} = R + R + R//2R = 16\Omega \tag{56}$$

La tensione a vuoto si calcola supponendo che non passi corrente fra i morsetti A e B.



La tensione V_0 si puo' calcolare chiudendo una KVL:

$$V_0 = V_4 + E + V_2 + V_3 \tag{57}$$

Dalla definizione di tensione a vuoto si trova che:

$$V_4 = 0V \tag{58}$$

Per il calcolo di V_2 si puo' vedere che la corrente A passa interamente in R con segno contrario a quello della tenisione, quindi:

$$V_2 = -R \cdot A \tag{59}$$

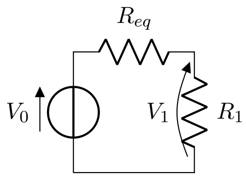
Infine, per il calcolo di V_3 si puo' applicare il partitore di corrente e la legge di Ohm:

$$V_3 = -A \cdot \frac{2R}{R + 2R} \cdot R = -\frac{2A}{3}R = 16V \tag{60}$$

Quindi:

$$V_0 = E - AR - \frac{2A}{3}R = 44V \tag{61}$$

Sostituendo al bipolo A-B il suo equivalente Thevenin:

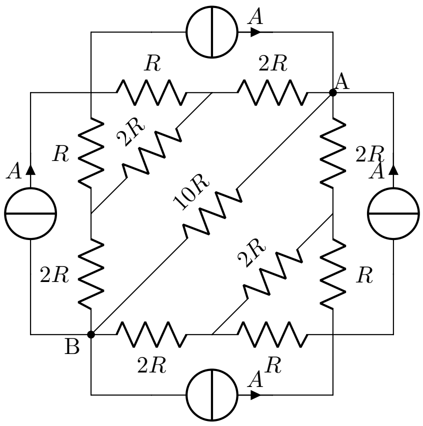


A questo punto si trova facilmente che:

$$V_1 = V_0 \frac{R_1}{R_1 + R_{eq}} = 28V \tag{62}$$

Esercizio D.1.11

Data la rete in figura, calcolare la differenza di potenziale fra il nodo A ed il nodo B.

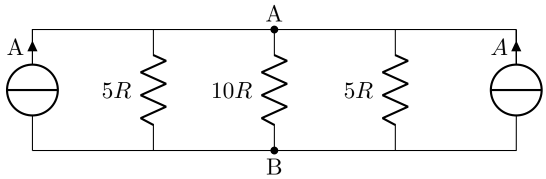


Dati:
$R = 10\ \Omega$
$A = 2\,\mathrm{A}$

Risultati:
$V_{AB} = -80\,\mathrm{V}$

Soluzione:

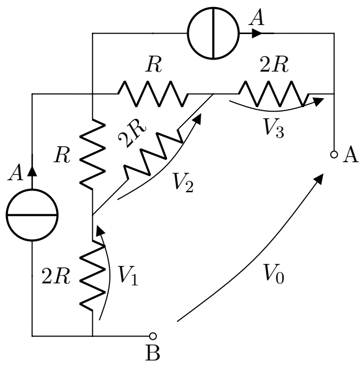
Soluzione 1
Applicando al contrario il principio di sdoppiamento dei generatori di corrente e calcolando le resistenze equivalenti, il circuito si puo' ridisegnare come:



Con Millman:

$$V_{AB} = \frac{2A}{\dfrac{2}{5R} + \dfrac{1}{10R}} = 8R = 80\,\mathrm{V} \tag{63}$$

Soluzione 2
Prendendo la meta' nord-ovest del circuito e calcolandone l'equivalente thevenin:



La tensione a vuoto e' data da tre contributi:

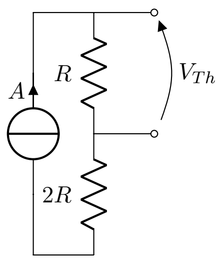
$$V_0 = V_1 + V_2 + V_3 \tag{64}$$

Due tensioni si calcolano facilmente:

$$V_3 = 2RA \tag{65}$$

$$V_1 = 2RA \tag{66}$$

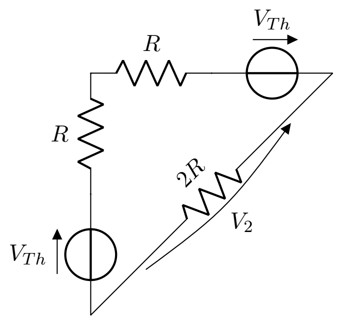
La terza tensione si può calcolare andando a calcolare 2 equivalenti thevenin (uguali fra di loro):



$$R_{Th} = R \tag{67}$$

$$V_{Th} = RA \tag{68}$$

Il sotto-circuito originario diventa, inserendo gli equivalenti:



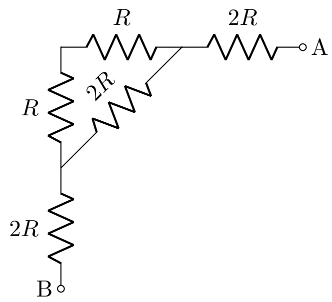
A questo punto si puo' calcolare V_2:

$$V_2 = \frac{2V_{Th}}{2} = V_{Th} = RA \tag{69}$$

Da cui:

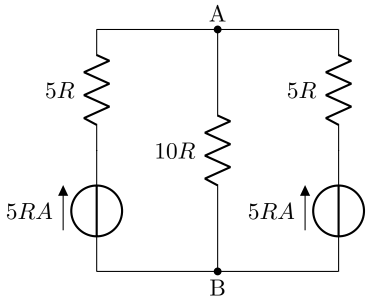
$$V_0 = V_1 + V_2 + V_3 = 5RA \tag{70}$$

La resistenza equivalente e':



$$R_{eq} = 5R \tag{71}$$

Ricomponendo il circuito originario:

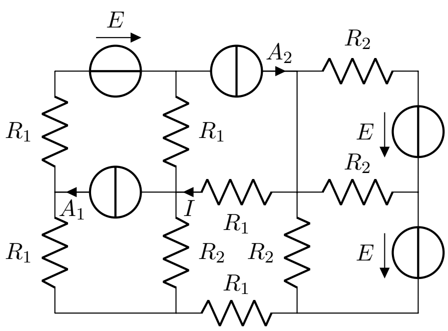


Con Millman:

$$V_{AB} = \frac{2\frac{5RA}{5R}}{\frac{2}{5R} + \frac{1}{10R}} = \frac{20RA}{5} = 80\,\mathrm{V} \tag{72}$$

Esercizio D.1.12

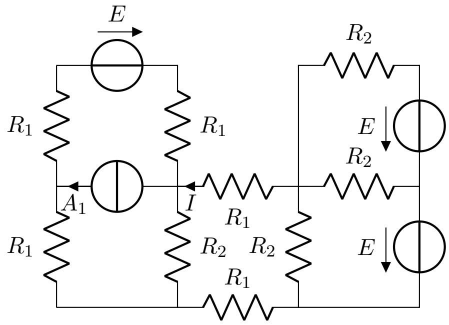
Dato il seguente circuito, calcolare il valore della corrente I quando il generatore A_2 eroga una corrente di $0A$ (incongita indicata come I_0) e quando il genratore A_2 eroga una corrente di $8A$ (incongita indicata come I_8).



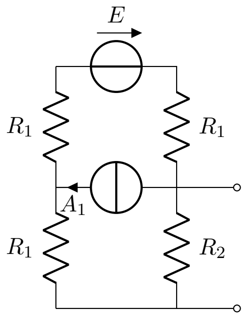
Dati:
$R_1 = 10\Omega$;
$R_2 = 30\Omega$;
$A_1 = 3\,\mathrm{A}$;
$E = 90\,\mathrm{V}$;

Risultati:
$I_0 = \quad -2{,}33\,\mathrm{A}$
$I_8 = \quad -7{,}67\,\mathrm{A}$

Soluzione:
Partendo dal caso con $A_2 = 0A$, il circuito si ridisegna come:



Per risolvere questo circuito, conviene effettuare l'equivalente Thevenin dei due lati a destra ed a sinistra.
Lato di sinistra:

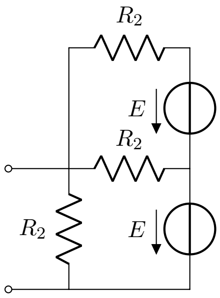


Facilmente si trova che:

$$R_{eq,1} = R_2 // 3R_1 = 15\ \Omega \tag{73}$$

$$V_{0,1} = E \cdot \frac{R_2}{R_2 + 3R_1} - R_2 \cdot A_1 \cdot \frac{2R_1}{R_2 + 3R_1} = 15\,\mathrm{V} \tag{74}$$

Lato di destra:

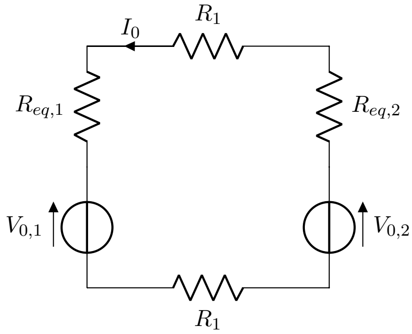


Facilmente si trova che:

$$R_{eq,2} = \frac{R_2}{3} = 10\ \Omega \tag{75}$$

$$V_{0,2} = -E\frac{R_2}{R_2 + \frac{R_2}{2}} - E\frac{\frac{R_2}{2}}{R_2 + \frac{R_2}{2}} = -90\,\mathrm{V} \tag{76}$$

Ricomponendo il circuito si trova:



Si trova subito che:

$$I_0 = \frac{V_{0,2} - V_{0,1}}{2R_1 + R_{eq,1} + R_{eq,2}} = -2{,}33\,\mathrm{A} \tag{77}$$

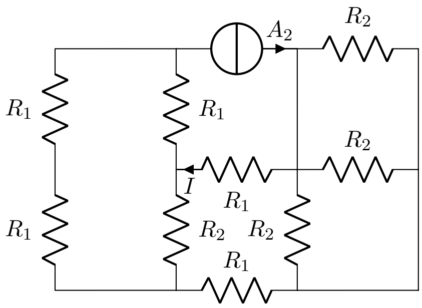
Per il calcolo di I_8 e' utile applicare in maniera critica il PSE:

$$I_8 = I_{A_2=0} + I_{A_2\neq 0} \tag{78}$$

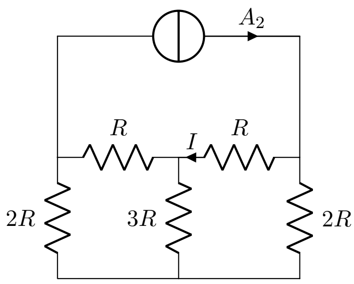
Il primo dei due contributi corrisponde ad I_0, quindi:

$$I_8 = I_0 + I'' \tag{79}$$

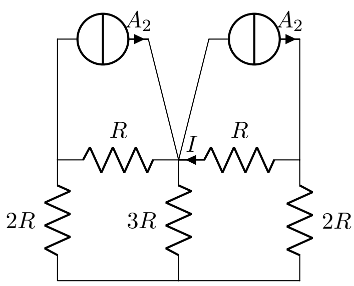
Per il calcolo di I'' si spengono tutti gli altri generatori:



Chiamando $R_1 = R$ e, conseguentemente $R_2 = 3R$ e' possibile ridisegnare il circuito come:



Per evitare le trasformazioni stella-triangolo, conviene sdoppiare A_2:



Applicando Thevenin al lato di sinistra:

$$R_{eq} = \frac{3}{2}R = 15\ \Omega \tag{80}$$

$$V_0 = \frac{A_2 R}{2} = 40\,\mathrm{V} \tag{81}$$

Quindi, dalla formula di Millman:

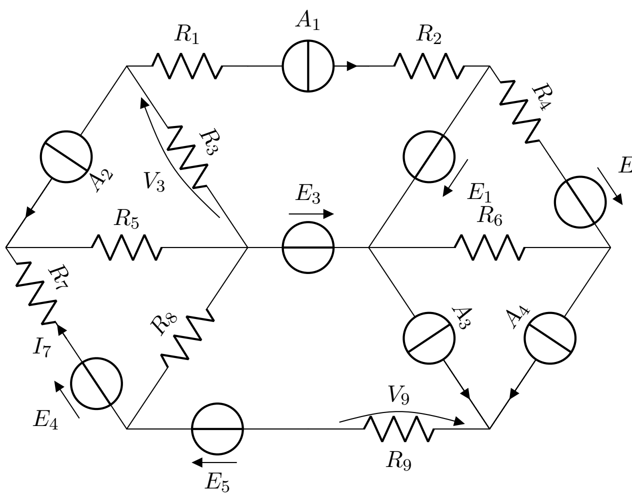
$$I'' = \frac{1}{R} \cdot \frac{\dfrac{V_0}{R_{eq}+2R} - A_2}{\dfrac{1}{R_{eq}+2R} + \dfrac{1}{R}} = -5{,}33\,\mathrm{A} \tag{82}$$

Quindi:

$$I_8 = -7{,}67\,\mathrm{A} \tag{83}$$

Esercizio D.1.13

Dato il circuito in regime stazionario riportato in figura, calcolare le tensioni V_9 e V_3, le potenze generate da A_1 ed E_3 e la corrente I_7.



Dati:

$R_1 = R_2 = R_3 = 10\ \Omega$
$R_4 = R_5 = R_6 = 20\ \Omega$
$R_7 = R_8 = R_9 = 10\ \Omega$
$E_1 = E_2 = 50\,\mathrm{V}$
$E_3 = E_4 = E_5 = 80\,\mathrm{V}$
$A_1 = A_2 = 6\,\mathrm{A}$
$A_3 = A_4 = 8\,\mathrm{A}$

Risultati:

$V_9 =$
$V_3 =$
$P_{g,A_1} =$
$P_{g,E_3} =$
$I_7 =$

Soluzione:

Da una KCL si trova che:

$$I_9 = A_3 + A_4 = 16A \tag{84}$$

Quindi:

$$V_9 = R_9 I_9 = 160V \tag{85}$$

Da un'altra KCL:

$$I_3 = -A_2 - A_1 = -12A \tag{86}$$

quindi:

$$V_3 = R_3 I_3 = -120V \tag{87}$$

Da una KVL:

$$V_{A_1} = R_2 A_1 - E_1 + E_3 - V_3 + R_1 A_1 = 270V \tag{88}$$

quindi:

$$P_{g,A_1} = A_1 \cdot V_{A_1} = 1620W \tag{89}$$

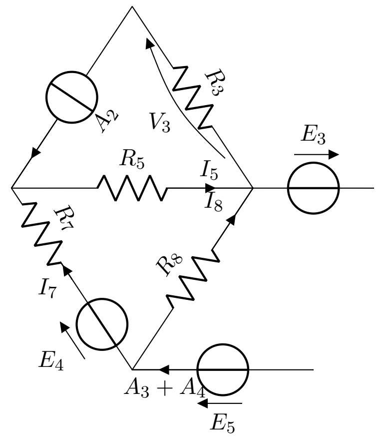
Da una KCL:

$$I_{E_3} = A_3 + A_4 - A_1 = 10A \tag{90}$$

quindi:

$$P_{g,E_3} = E_3 I_{E_3} = 800W \tag{91}$$

Soluzione 1: leggi di Kirchhoff
La corrente I_7 si può calcolare agevolmente utilizzando le leggi di Kirchhoff (in figura si rappresenta solo una porzione della rete):

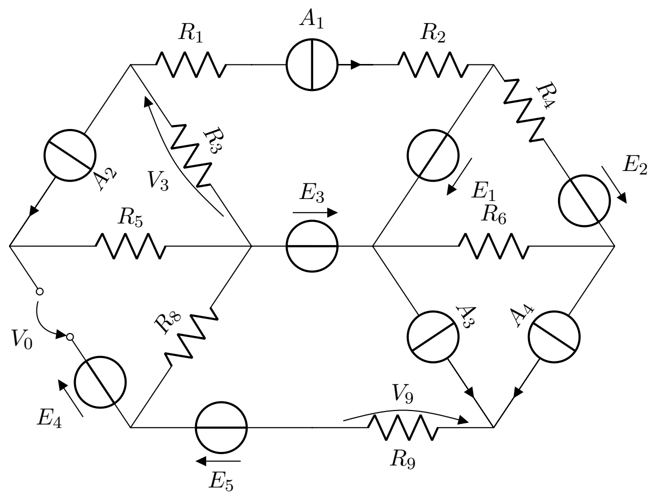


$$I_7 = I_5 - A_2 \tag{92}$$

$$I_7 + I_8 = A_3 + A_4 \tag{93}$$

$$R_7 I_7 = E_4 + R_8 I_8 - R_5 I_5 \tag{94}$$

Soluzione 2: Thevenin
Un metodo molto veloce ed agevole per calcolare la corrente I_7 è fare l'equivalente Thevenin visto dal resistore R_7:



Spegnendo tutti i generatori indipendenti si calcola la resistenza equivalente:

$$R_{eq} = R_5 + R_8 = 30\Omega \tag{95}$$

La tensione a vuoto si calcola come:

$$V_0 = -R_5 A_2 + R_8(A_3 + A_4) + E_4 = 120V \tag{96}$$

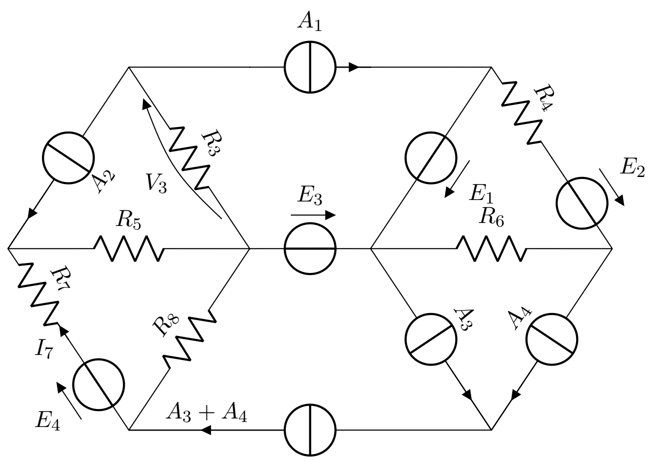
Quindi:

$$I_7 = \frac{V_0}{R_7 + R_{eq}} = 3A \tag{97}$$

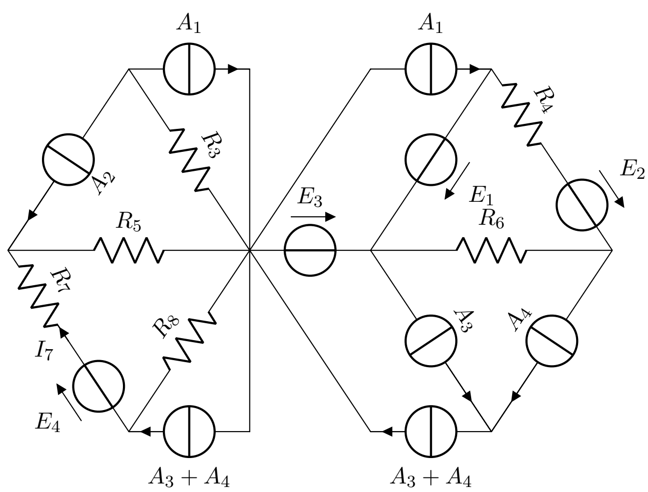
Soluzione 3: sdoppiamento dei generatori di corrente
Per calcolare I_7 si nota che:

- R_1 ed R_2 sono in serie ad A_1;
- E_5 ed R_9 sono in serie alla somma di $A_3 + A_4$.

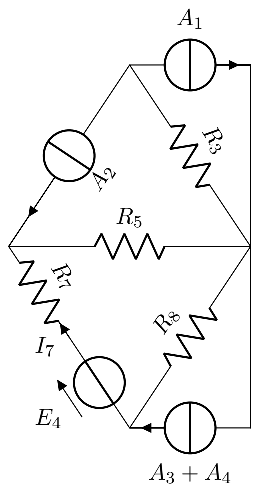
Quindi è possibile ridisegnare il circuito come:



A questo punto è possibile procedere sdoppiando i generatori A_1 ed $A_3 + A_4$:



A questo punto la rete risulta disaccoppiata, quindi è possibile risolvere solo la parte di sinistra:



Trasformando in Thevenin il norton nel ramo in basso a destra, è possibile ricondursi ad una rete Millman:

$$V_{MN} = \frac{A_2 + \dfrac{E_4 + (A_3 + A_4) \cdot R_8}{R_8 + R_7}}{\dfrac{1}{R_5} + \dfrac{1}{R_8 + R_7}} = \frac{2RA_2 + E_4 + (A_3 + A_4)R}{2} = 180V \tag{98}$$

quindi:

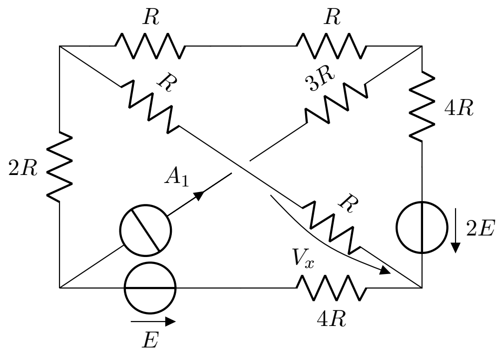
$$I_5 = \frac{V_{MN}}{R_5} = 9A \tag{99}$$

Infine:

$$I_7 = I_5 - A_2 = 3A \tag{100}$$

Esercizio D.1.14

Dato il circuito in figura, calcolare la tensione V_x.

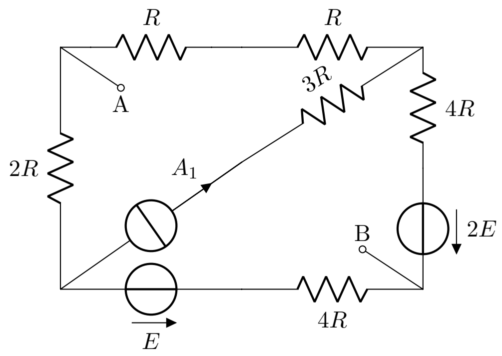


Dati:
$R = 5\Omega$
$E = 60\,\mathrm{V}$
$A_1 = 3\,\mathrm{A}$

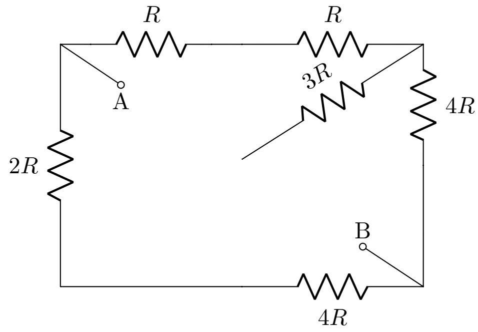
Risultati:
$I_0 = -1{,}67\,\mathrm{A}$
$I_8 = 7\,\mathrm{A}$

Soluzione:

Il modo più efficiente di risolvere questo esercizio, prevede l'applicazione del teorema di Thevenin. Staccando il ramo in cui è presente la resistenza su cui c'è l'incognita, si ottiene una rete binodale:



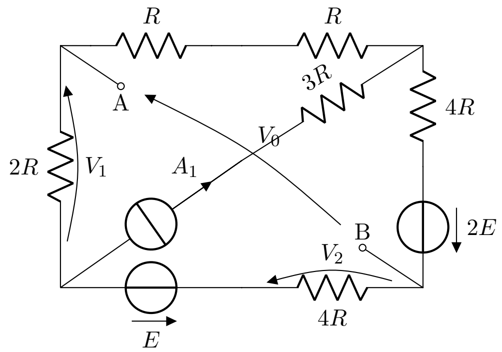
Per calcolare la resistenza equivalente, si spengono tutti i generatori:



La resistenza equivalente risulta quindi essere:

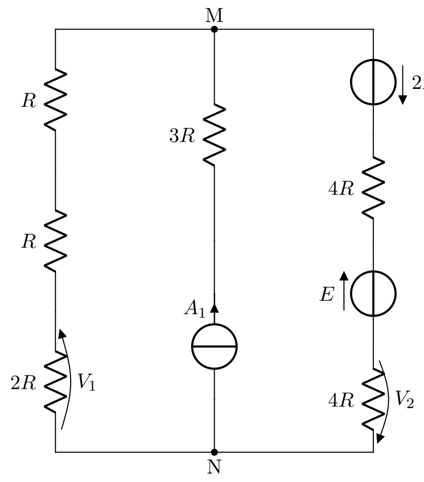
$$R_{eq} = (2R + 4R)//(2R + 4R) = 4R = 15\Omega \tag{101}$$

Per il calcolo della tensione a vuoto e' necessario scrivere una KVL:



$$V_0 = V_1 - E + V_2 \tag{102}$$

La rete è binodale. Ridisegnandola:



$$V_{MN} = \frac{\dfrac{E - 2E}{8R} + A_1}{\dfrac{1}{4R} + \dfrac{1}{8R}} = \frac{-E + 8RA_1}{3} = 20V \tag{103}$$

La tensione V_1 si calcola con un partitore di tensione:

$$V_1 = \frac{1}{2}(V_{MN}) = 10V \tag{104}$$

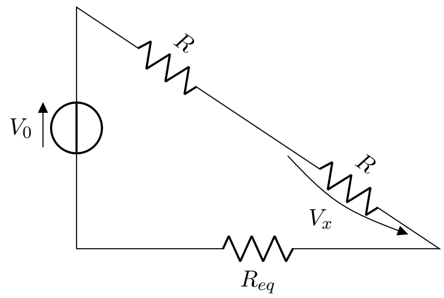
Anche V_2 si calcola agilmente:

$$V_2 = \frac{1}{2}(E - 2E - V_{MN}) = -40V \tag{105}$$

Infine:

$$V_0 = V_1 - E + V_2 = -90V \tag{106}$$

Ricostruendo il circuito:

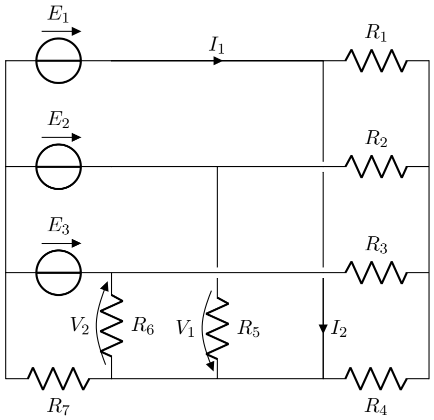


Quindi:

$$V_x = -V_0 \cdot \frac{R}{2R + R_{eq}} = 18V \tag{107}$$

Esercizio D.1.15

Dato il circuito in figura, calcolare le tensioni V_1 e V_2, e le correnti I_1 ed I_2.



Dati:
$R_1 = R_4 = 20\Omega$
$R_2 = R_3 = 10\Omega$
$R_5 = R_6 = R_7 = 5\Omega$
$E_1 = 70\,\mathrm{V}$
$E_2 = 40\,\mathrm{V}$
$E_3 = 70\,\mathrm{V}$

Risultati:
$I_1 = 21\,\mathrm{A}$
$I_2 = 20{,}5\,\mathrm{A}$
$V_1 = 30\,\mathrm{V}$
$V_2 = 0\,\mathrm{V}$

Soluzione:

La tensione V_2 si calcola immediatamente da una KVL:

$$V_2 = E_3 - E_1 = 0\,\mathrm{V} \tag{108}$$

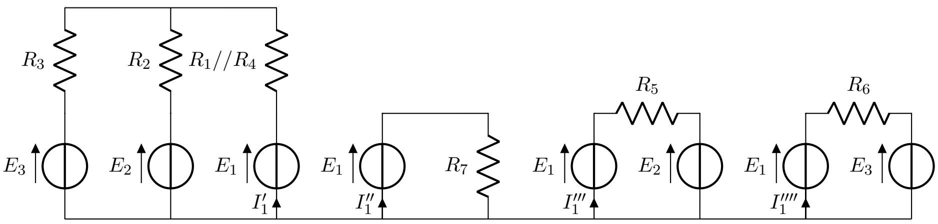
Analogamente per la tensione V_1:

$$V_1 = E_1 - E_2 = 30\,\mathrm{V} \tag{109}$$

La corrente I_2 si può scrivere in funzione di I_1:

$$I_2 = I_1 - I_{R_1} \tag{110}$$

Sdoppiando i generatori di tensione si ottiene:



$$V_{MN} = \frac{\dfrac{E_1}{R_1//R_4} + \dfrac{E_2}{R_2} + \dfrac{E_3}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1//R_4} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{3} = 60\,\mathrm{V} \tag{111}$$

Quindi:

$$I_1' = \frac{E_1 - V_{MN}}{R_1//R_4} = 1\,\mathrm{A} \tag{112}$$

e

$$I_{R_1} = \frac{I_1'}{2} = 0{,}5\,\mathrm{A} \tag{113}$$

$$I_1'' = \frac{E_1}{R_7} = 14\,\mathrm{A} \tag{114}$$

$$I_1''' = \frac{E_1 - E_2}{R_5} = 6\,\mathrm{A} \tag{115}$$

$$I_1'''' = \frac{E_1 - E_3}{R_6} = 0\,\mathrm{A} \tag{116}$$

Infine:

$$I_1 = 21\,\mathrm{A} \tag{117}$$

$$I_2 = 20{,}5\,\mathrm{A} \tag{118}$$
