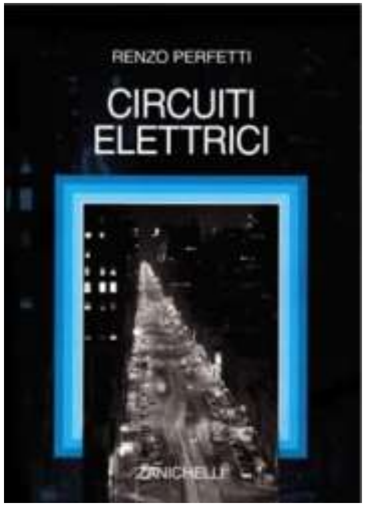


Circuiti Elettrici

Capitolo 1

Concetti e leggi fondamentali

POLITECNICO
MILANO

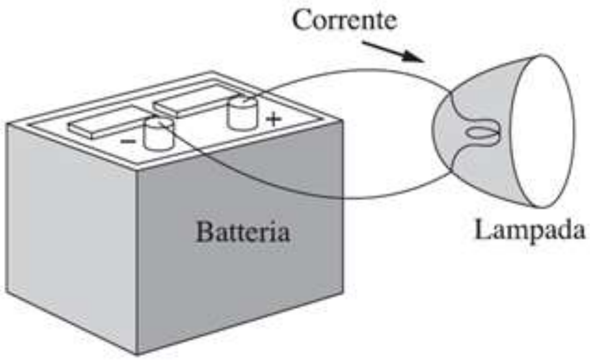
Prof. Cesare Svelto

Concetti e leggi fondamentali – Cap. 1

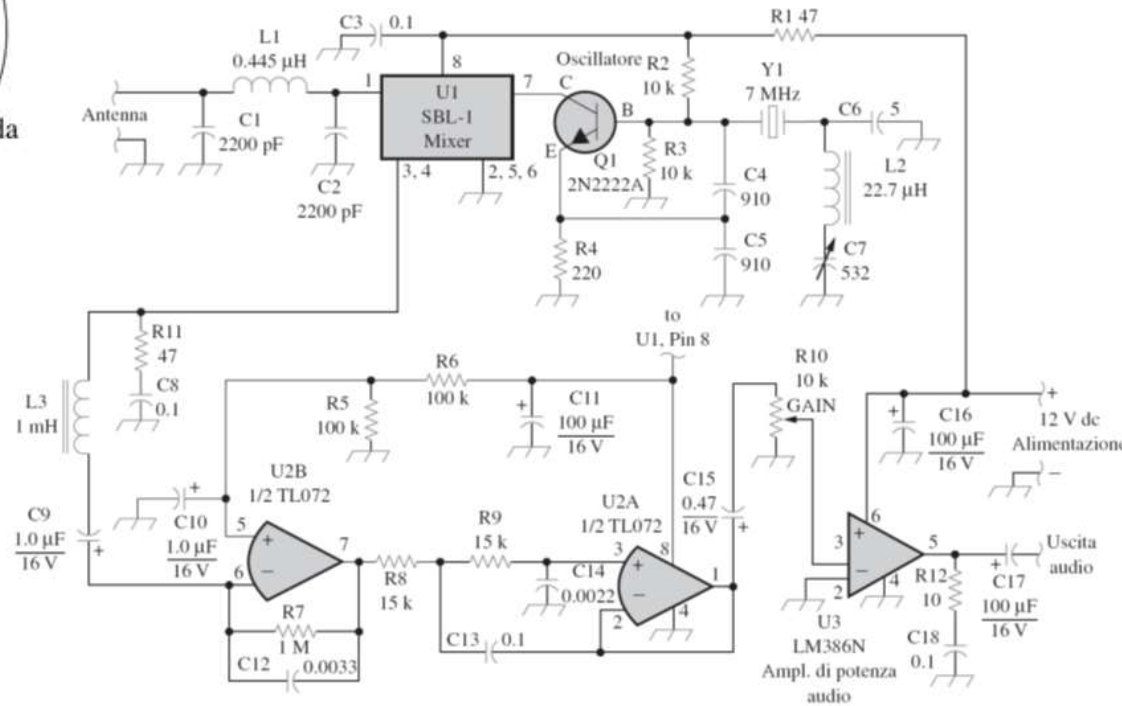
1.1 Introduzione

- La teoria dell'**elettromagnetismo** e quella dei **circuiti elettrici** sono aspetti fondamentali di tutte le branche dell'**Ingegneria**

- Un **circuito elettrico** è l'interconnessione di più **elementi elettrici**



ricevitore radio e pilotaggio altoparlanti



1.1 Sistema di Unità

Sette unità "di base" (o principali)

Grandezza	**Unità di base**	**Simbolo**
Lunghezza	metro	m
Massa	kilogrammo	kg
Tempo	secondo	s
Corrente elettrica	ampere	A
Temperatura termodinamica	kelvin	K
Quantità di sostanza	mole	mol
Intensità luminosa	candela	cd

1.1 Sistema di Unità

Unità "derivate" di uso comune nell'analisi dei circuiti e misure elettroniche

Quantity	Unit	Symbol
electric charge	coulomb	C
electric potential	volt	V
resistance	ohm	Ω
conductance	siemens	$S = \Omega^{-1}$
inductance	henry	H
capacitance	farad	F
frequency	hertz	$Hz = s^{-1}$
force	newton	N
energy, work	joule	J
power	watt	W
magnetic flux	weber	Wb
magnetic flux density	tesla	T

Factor	Prefix	Symbol
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

Multipli e sottomultipli (principali) delle unità SI

1.2 Carica elettrica

- Grandezza elettrica essenziale è la **carica elettrica**, proprietà delle particelle atomiche di cui è costituita la materia, è indicata con ***q*** e si misura in **coulomb (C)**

- La carica ***e*** di un elettrone è negativa e uguale in modulo a **$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$ C**, detta anche carica elettronica. Tutte le cariche presenti in natura sono multipli interi della carica elettronica (la carica è la prima grandezza quantizzata)

- Il coulomb è una unità di misura ''molto grande'' che corrisponde a circa 6.24×10^{18} elettroni ($\sim$10 μmol di e^-)

- Materia: **cariche +** (positive) e **cariche –** (negative)

- Per la legge di **conservazione della carica**, la carica elettrica totale di un sistema isolato non può variare

1.2 Carica elettrica

Esempio

Quale è la carica di 2500 elettroni?

Quale è la carica di 2 milioni di protoni?

1.2 Carica elettrica

Risposta

Ogni elettrone ha carica $q_e = e \cong -1.6\times10^{-19}$ C
e dunque n_e=2500 elettroni avranno carica complessiva
$\boldsymbol{q}_{\mathbf{TOT,e}} = n_e \cdot q_e \cong -4\times10^{-16}$ C =**-400 aC**=-0.4 fC

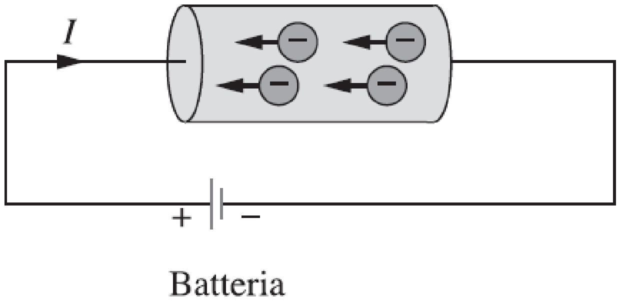
Ogni protone ha carica $q_p = -e \cong +1.6\times10^{-19}$ C
e dunque $n_p = 2\times10^6$ protoni avranno carica complessiva
$\boldsymbol{q}_{\mathbf{TOT,p}} = n_p \cdot q_p \cong 3.2\times10^{-13}$ C =**32 pC**

1.2 Corrente elettrica

- La carica è mobile e siamo interessati a studiare, ed utilizzare, il **flusso di cariche** elettriche spostate dalla presenza di un **campo elettrico**. Il campo agisce da motore per le cariche facendone variare l'energia nello spazio e nel tempo

- Nei metalli le cariche mobili sono gli elettroni (e '=' -1.6×10^{-19} C).
  [nelle soluzioni o nei gas si muovono anche ioni positivi]
  Per convenzione la **carica in moto** è considerata come positiva

- Cariche in moto, ad es. nella sezione di un conduttore, creano una **corrente elettrica *i*=d*q*/dt** misurata in **ampere [A=C/s]**



$$i = \frac{\text{quantità di carica spostata}}{\text{intervallo di tempo}}$$

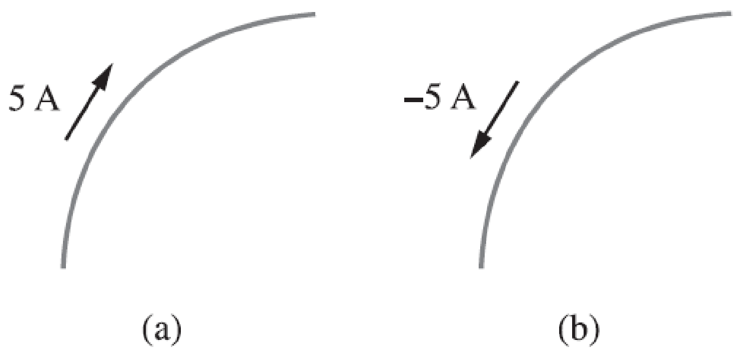
$$i_{\text{media}} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \qquad i_{\text{ist.}} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

1.2 Corrente

- La carica Δq spostata dalla corrente $i(t)$ in un intervallo di tempo Δt è calcolabile come

$$\Delta q = \int_0^{\Delta t} i(t)\mathrm{d}t$$

- La corrente ha sempre una direzione e verso.
Se i scorre in un filo, la direzione della corrente è quella del filo ma <u>il verso dipende dal **verso di spostamento della carica positiva**</u>

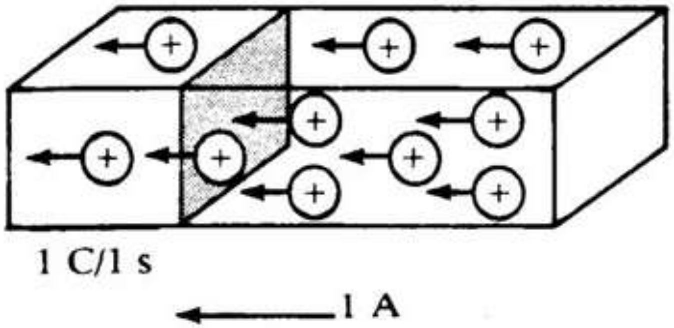


5 coulomb di carica ogni secondo attraversano il filo dal basso verso l’alto, in entrambi i casi!

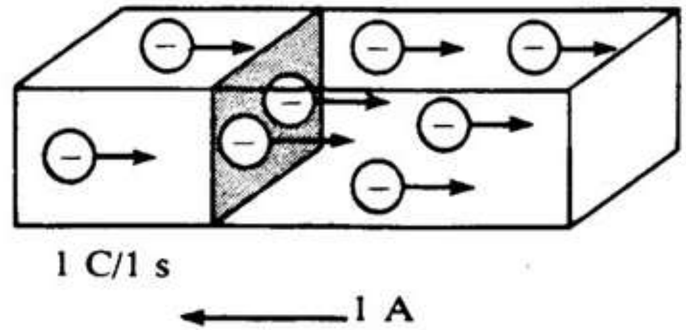
1.3 Corrente

- Direzione e verso della corrente dipendono sia dalla direzione del moto che dal tipo di cariche in movimento

Cariche positive



Cariche negative



Cariche positive(/negative) in moto **nel verso scelto** convenzionalmente per la corrente danno **corrente positiva**(/negativa); cariche positive(/negative) in moto nel verso opposto a quello scelto convenzionalmente per la corrente, danno corrente negativa(/positiva)

- La scelta del verso di riferimento per la corrente è arbitraria e può essere fatta a priori e secondo comodità (<u>un valore numerico negativo significa che la corrente scorre in verso opposto a quello di riferimento</u>)

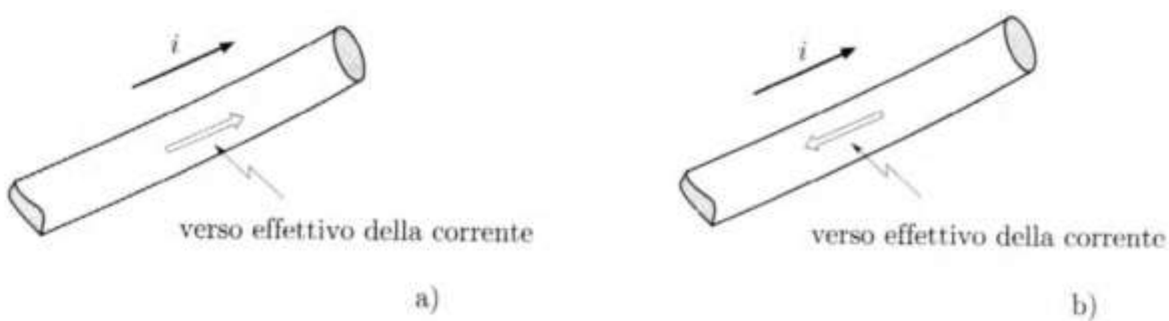
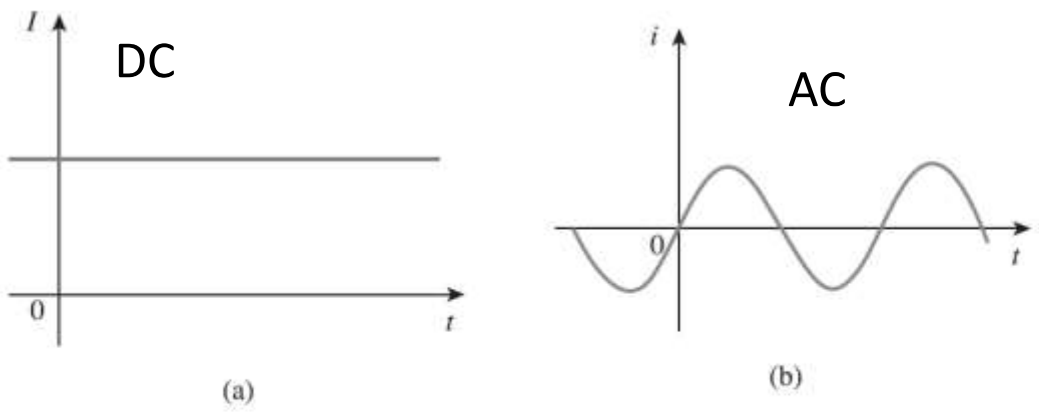


Figura 1.3 a) $i > 0$: il verso effettivo della corrente coincide col verso di riferimento. b) $i < 0$: il verso effettivo è opposto a quello di riferimento.

1.2 Corrente

- Una **corrente diretta (DC**, direct current) o **continua** è una corrente che rimane costante nel tempo
- Una **corrente alternata (AC**, alternating current) è una corrente che varia sinusoidalmente nel tempo
  Inverte, o alterna, periodicamente il suo verso



Correnti alternate sono usate nelle nostre abitazioni per fare funzionare gli elettrodomestici, le luci, una stufetta elettrica…

1.3 Corrente

Esempio

Un conduttore porta una corrente costante di 5 A

Quanti elettroni attraversano una sezione definita del conduttore in un minuto?

1.3 Corrente

Risposta

Quantità di carica che passa in 1 minuto:

I = 5 A = (5 C/s)·(60 s/min) = 300 C/min

$\Delta q = I \cdot \Delta t$ = (5 A)·(60 s) = 300 C

Numero di elettroni che passano in 1 minuto è:

$$\frac{300 \ \ \mathrm{C/min}}{1.6 \times 10^{-19} \ \ \mathrm{C/elettrone}} \cong \mathbf{1.9 \times 10^{21} \ elettroni / min}$$

1.3 Corrente

Esempio

In Figura 1.4 è indicato un conduttore metallico in cui scorre una corrente costante. Supponendo $i = 4$ A, quanta carica attraversa il conduttore in 1 h? Quanti elettroni?

Soluzione

Poiché la corrente è costante si ha $\Delta q = i\Delta t$, ovvero

$$\Delta q = 4 \cdot 3600 = 14400 = 14{,}4 \cdot 10^3 \text{ C}.$$

La corrente ha un valore positivo; essa indica un flusso di carica positiva diretto nel verso di riferimento. In realtà nel metallo le cariche mobili sono gli elettroni che si muovono nel verso opposto.

Il numero di elettroni che attraversano il conduttore è $\underbrace{\boxed{6{,}24 \times 10^{18}}}_{\text{elettroni/coulomb}} \times 14.4 \times 10^3 = 89{,}856 \times 10^{21}$.

elettroni/coulomb

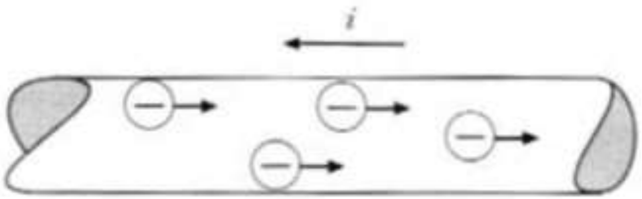


Figura 1.4 La corrente i è positiva. Gli elettroni si muovono nel verso opposto a quello di riferimento.

1.3 Corrente

Tabella 1.2 – Valori tipici di corrente

corrente nei circuiti integrati	1 nA ÷ 1 μA
corrente avvertita da un essere umano	1 mA
corrente letale per un essere umano	100 mA
correnti nell'impianto elettrico domestico	1 ÷ 20 A

1.4 Tensione

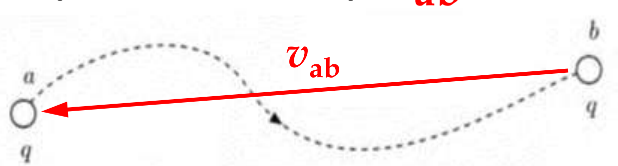
- Ad una carica *q* che si trova in un campo elettrico è associata un'energia, come ad una massa in un campo gravitazionale (**energia potenziale elettrica** ↔ energia potenziale gravitazionale)

- In un campo stazionario il **potenziale elettrico** v, misurabile in **volt (V)**, è l'energia per unità di carica:

$$v = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}$$

- Se una carica si muove da a a b la sua energia cambia e si ha una **differenza di potenziale** (o **tensione**) v_{ab} misurata in **volt (V)**

Figura 1.5 Se una carica q si sposta da a a b subisce una variazione di energia pari a $v_{ab}q$.



Chiamiamo **tensione** (o **differenza di potenziale**) tra a e b la quantità:

$$\boxed{v_{ab} = \frac{\Delta E}{q} = \frac{E(a) - E(b)}{q} = V(a) - V(b)}$$

differenza di potenziale tra i due punti

NON ESISTE la tensione in punto. Esiste la differenza di potenziale (tensione) tra quel punto un altro <u>punto preso come riferimento per il potenziale elettrico</u>

1.4 Tensione

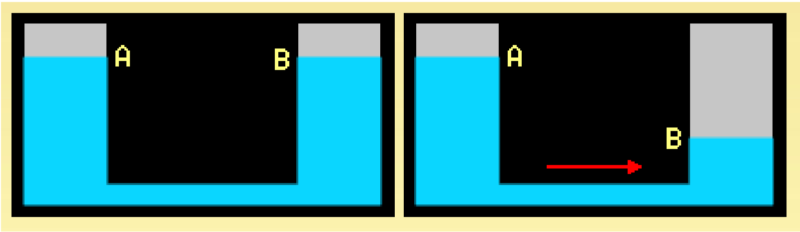
La tensione elettrica ai capi di un percorso è definita come la quantità di lavoro per unità di carica sviluppato dal campo elettrico per muovere una carica elettrica, ed equivale quindi all'integrale di linea del campo elettrico lungo la curva considerata come percorso. Essendo il campo conservativo in condizioni stazionarie, esso ammette potenziale, e quindi l'integrale di linea del campo elettrico dipende solo dagli estremi di integrazione. In questo caso la tensione equivale alla differenza di potenziale, e l'integrale è nullo su qualsiasi linea chiusa.

Esplicitamente, la differenza di potenziale V tra due punti *a* e *b* è l'integrale del campo elettrico **E** lungo una qualunque linea l che congiunga i due punti:

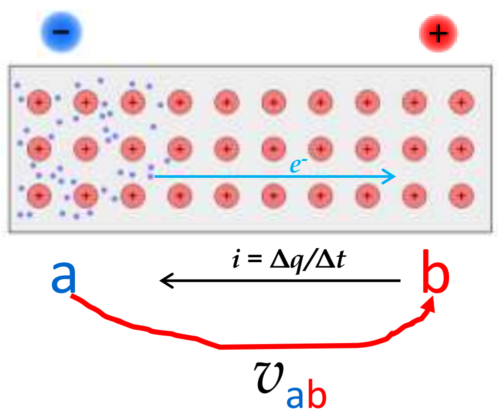
$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = \int_a^b E \cos\varphi \,\mathrm{d}\,l$$

dove $\cdot$ rappresenta il prodotto scalare e φ l'angolo compreso tra il vettore campo elettrico e il vettore spostamento $d\vec{l}$.

Per spiegare il significato di tensione usiamo un semplice **esempio**: due serbatoi di acqua sono collegati con un tubo. Se il livello A nel primo serbatoio è identico al livello B del secondo (prima figura), non si ottiene alcun movimento di acqua. Invece, una differente altezza (seconda figura) provoca il passaggio di acqua dal serbatoio col livello più alto a quello col livello più basso. Si deduce che **per ottenere il movimento si ha bisogno di una differenza di altezza** (ovvero di potenziale gravitazionale).



La **tensione elettrica** si genera dallo **sbilanciamento di carica**, e dunque di potenziale, tra due punti (a e b) ed è la **causa della corrente**.



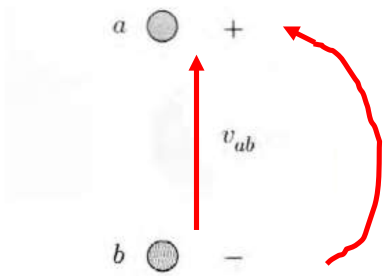
<u>Nei circuiti elettrici al posto del tubo abbiamo un conduttore elettrico</u> (ad esempio un cavo elettrico in rame) e al posto dello spostamento d'acqua abbiamo la corrente elettrica. **La differenza non è più di altezza (o pressione) ma di potenziale elettrico**.

<u>Questa differenza di potenziale (d.d.p.) prende il nome di tensione</u>.

Se aumentiamo la differenza di altezza, l'acqua scorre con più velocità.
Allo stesso modo se aumentiamo la tensione aumenta l'intensità di corrente.

1.4 Tensione

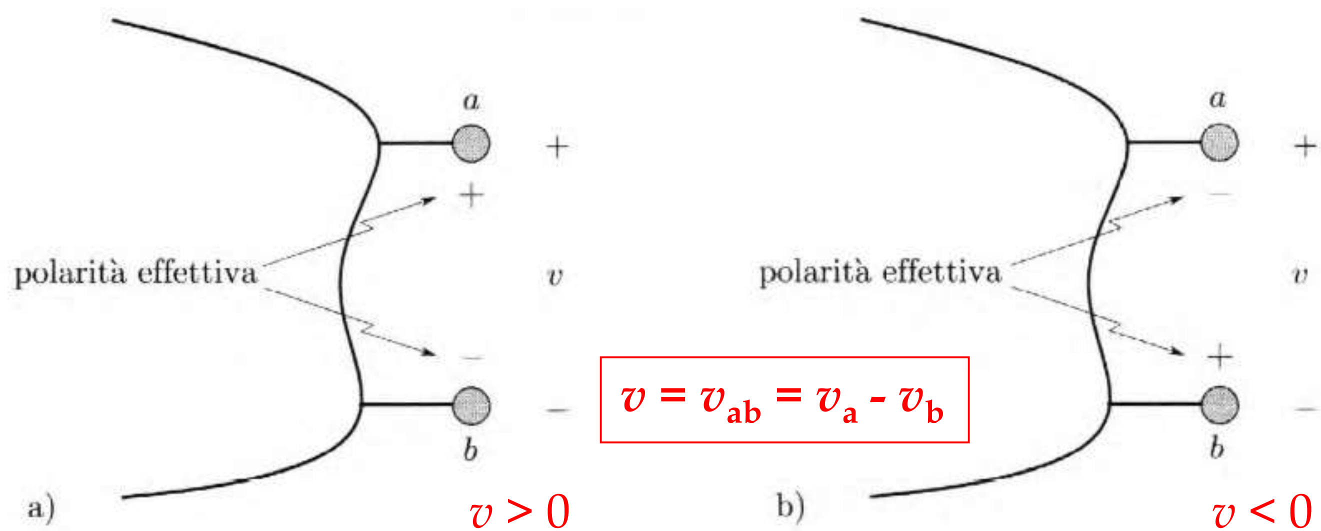
- Anche per la tensione occorre un verso di riferimento, detto **polarità** e si indica con i **segni + e –**



la polarità della tensione è anche indicata con una freccia che punta verso il potenziale più alto

Figura 1.6 La polarità della tensione si indica con la coppia di segni + e −.

Figura 1.7 a) $v > 0$: la polarità effettiva della tensione coincide con la polarità di riferimento. b) $v < 0$: la polarità effettiva è opposta a quella di riferimento.



$$\boxed{v = v_{ab} = v_a - v_b}$$

Mentre esiste il <u>potenziale in un punto</u>, NON esiste la tensione in un punto ma solo la <u>tensione tra due punti</u>, vista come differenza di potenziale tra i due punti

1.4 Tensione

- La tensione (o differenza di potenziale) corrisponde all'energia richiesta per spostare una carica unitaria, da una posizione ad un'altra o attraverso un elemento circuitale in regime stazionario [e allora è la tensione ai capi dell'elemento circuitale]
- Abbiamo visto che matematicamente $v_{ab} = \mathrm{d}E / \mathrm{d}q$ [volt, V]

  E è l'energia in joule [J] e *q* è la carica in coulomb [C]

  da cui la tensione *V* in volt [V=J/C]

- La **tensione elettrica** v_{ab} è sempre osservata **ai capi di un elemento circuitale** o **tra due punti di un circuito**
  - $v_{ab} > 0$ significa che il potenziale di a è più alto del potenziale di b
  - $v_{ab} < 0$ significa che il potenziale di a è più basso del potenziale di b

1.4 Tensione

Tabella 1.3 – Valori tipici di tensione

morsetti di un'antenna radio ricevente	100 nV ÷ 10 μV
tensione tra gli elettrodi di un elettrocardiografo	1 mV
batteria di automobile	12 V
impianto domestico ("tensione di rete")	220 V
impianto trifase	400 V
rete di distribuzione in media tensione	10-30 kV
rete trasmissione in alta tensione	380 kV

La tensione di rete in Europa è distribuita nelle abitazioni sotto forma di un segnale AC, sinusoide di rete, con periodo T=20 ms e dunque con una frequenza $f=1/T=$50 Hz

L'ampiezza di picco della sinusoide alternata è $V_0=V_p\cong$311 V con una ampiezza efficace $V_{eff}=V_p/\sqrt{2}=$220 V

Segnali elettrici nel tempo

- I **segnali elettrici** (corrente e tensione) sono in genere funzioni del tempo e li indicheremo con $i(t)$ e $v(t)$. Quando sono costanti li indicheremo come **DC** (spesso col simbolo in maiuscolo: I, V) e se variabili (sinusoidali) come **AC** (col simbolo in minuscolo: i, v)

- Altri segnali variabili sono l'**esponenziale** $A_0\exp(-\alpha t)$ e le **forme d'onda periodiche** (quadra, triangolare, dente di sega)

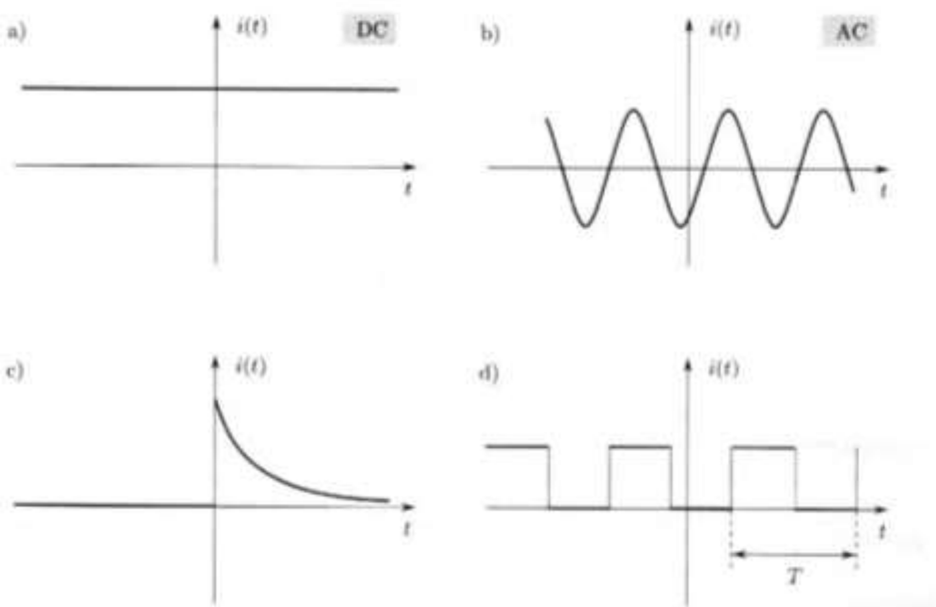
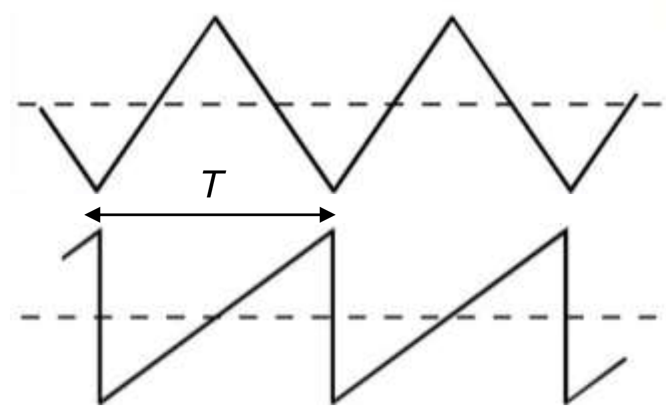


Figura 1.8 Quattro andamenti tipici delle grandezze elettriche: a) costante (DC); b) sinusoidale (AC); c) esponenziale decrescente; d) onda quadra di periodo T.

onda triangolare
e a dente di sega



1.6 Leggi fondamentali dei circuiti

- Per **circuito** o **rete** intendiamo l'interconnessione di un numero di **elementi** (circuitali) collegati fra loro per mezzo di **fili**
- Un **elemento** è una superficie chiusa accessibile attraverso un certo numero di **terminali** o morsetti
- In base al numero dei propri terminali, un elemento è detto **bipolo**, tripolo, quadripolo

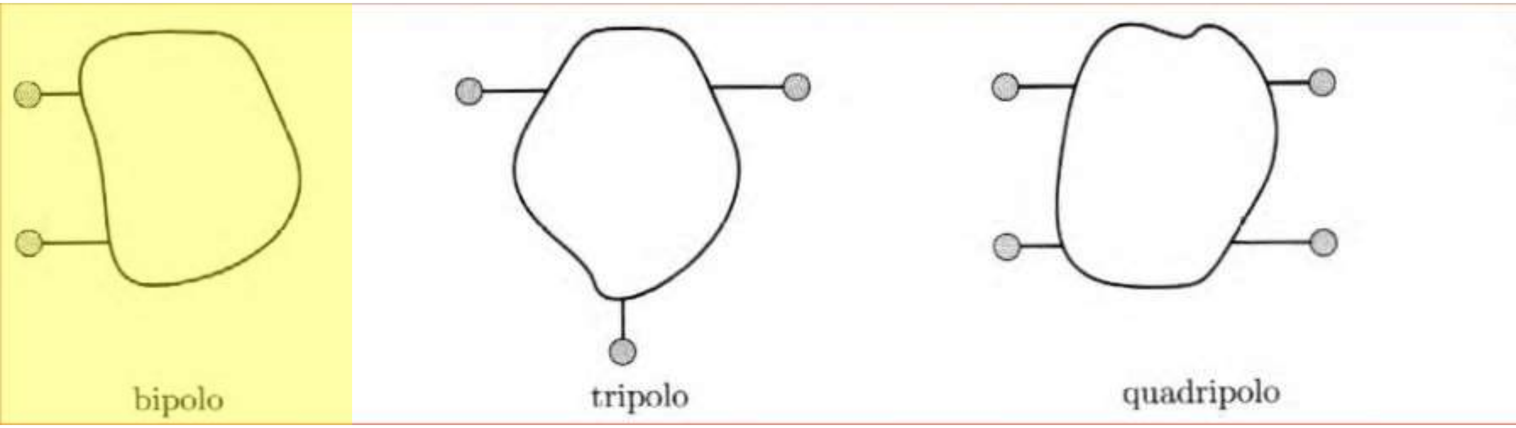


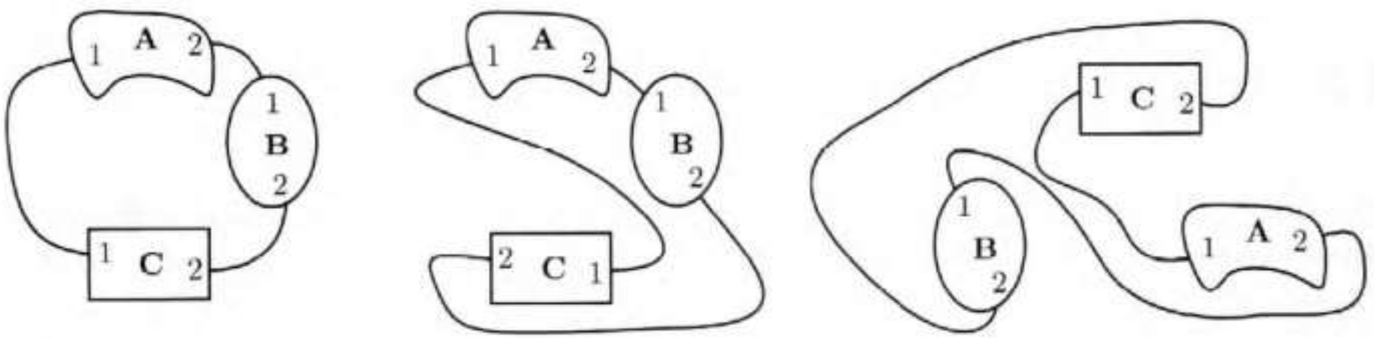
Figura 1.9 Gli elementi circuitali possono avere due, tre o più terminali.

Ipotesi base nella definizione di circuito

- I **fili** che collegano gli elementi sono conduttori ideali, cioè sono equipotenziali (lungo i fili non c'è caduta/differenza di tensione)

- Essendo i fili di collegamento equipotenziali, le uniche variazioni di energia (degli elettroni) avvengono all'interno degli elementi

- Per il funzionamento del circuito, dimensioni e posizionamento degli elementi non importano, conta solo il modo in cui gli elementi sono interconnessi cioè la **topologia** del circuito

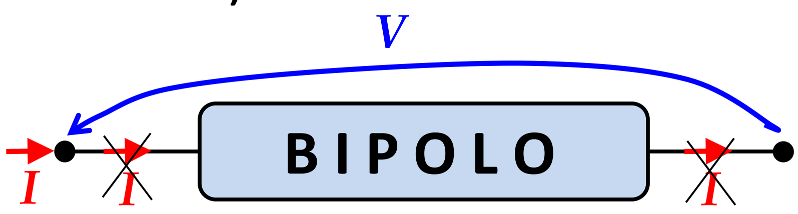


Circuiti topologicamente uguali

Relazioni caratteristiche e analisi circuitale

- Ogni elemento è rappresentato da una relazione matematica, o relazione **caratteristica**, che ne descrive il comportamento elettrico

- Il comportamento di un elemento a due terminali è descritto usando solo due **variabili esterne** (elettriche) che sono:
  - **corrente** che attraversa il bipolo
  - **tensione** ai terminali del bipolo



- L'**analisi** di un circuito è volta a determinare una o più grandezze (correnti o tensioni) conoscendo la topologia del circuito e le relazioni caratteristiche dei suoi elementi

- La **sintesi** di un circuito consiste nell'individuare topologia ed elementi atti a realizzare le correnti o tensioni desiderate

1.7 Rami, Nodi, e Maglie

- Un **ramo** rappresenta un singolo elemento del circuito, come può essere un generatore di corrente o tensione oppure un resistore
- Un **nodo** è il punto di connessione tra due o più rami (elementi)
- Una **maglia** è un qualunque percorso chiuso in un circuito, che inizia e termina nello stesso nodo senza attraversare due volte altri nodi

- Una rete con R rami, N nodi, e M maglie indipendenti* soddisfa il **teorema di topologia delle reti**:

$$\boxed{R = M + (N-1)}$$

o anche, di uso "pratico"

$$M = R - (N-1)$$

*Un insieme di maglie è indipendente se ogni maglia contiene almeno un ramo (elemento) che non è contenuto nelle altre maglie

1.7 Rami, Nodi, e Maglie

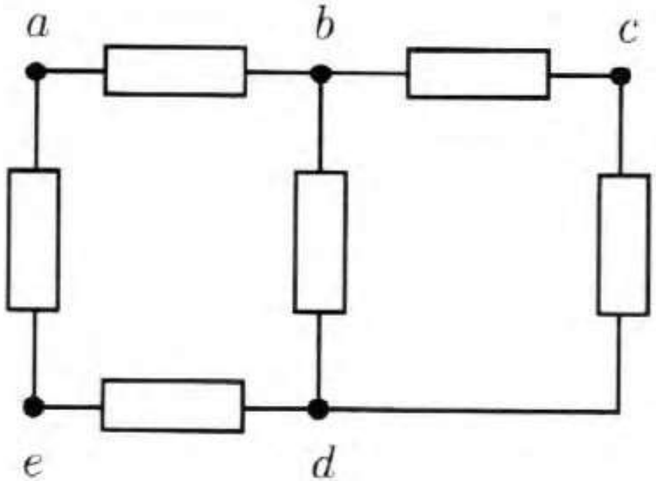


Figura 1.12 Circuito con cinque nodi.

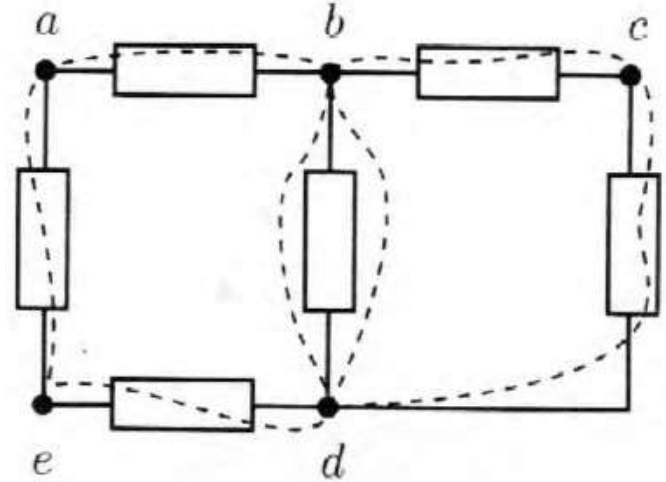


Figura 1.13 Due maglie sono indicate in tratteggio. Ma esistono altre coppie o insiemi di maglie indipendenti (qui è sempre M=2).

- Il circuito ha 6 elementi e quindi 6 rami.
  Si ha R=6 e N=5 ed infatti M=R-(N-1)=6-4=2.

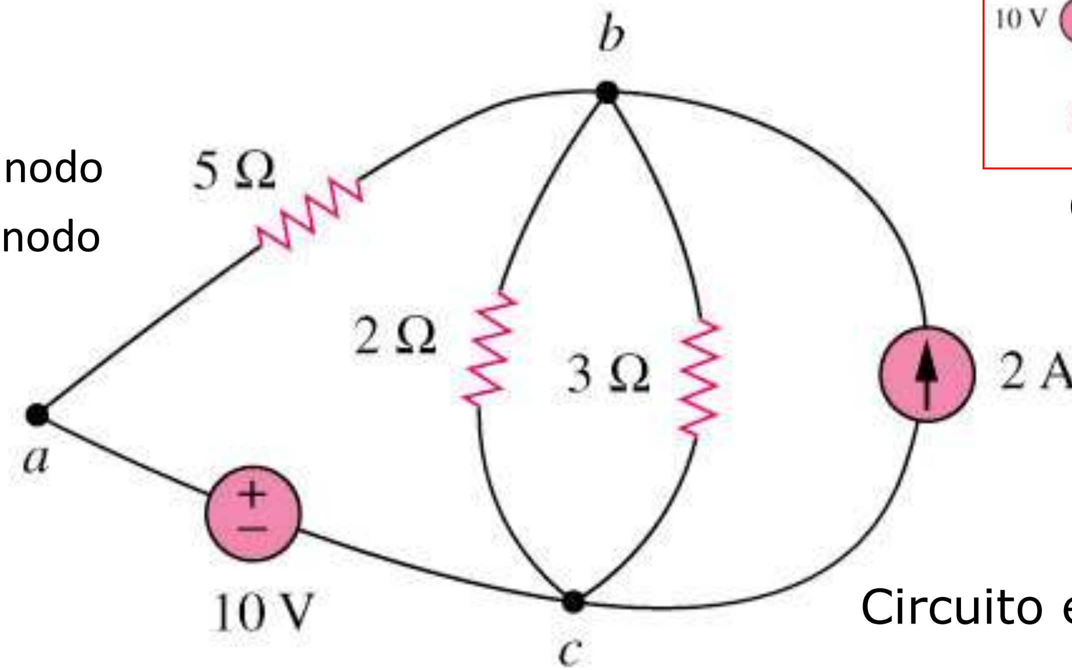
Non è vero che, pur avendo ogni elemento (bipolo) due terminali, ad ogni ogni terminale di un elemento corrisponde un "nuovo" nodo (altrimenti sarebbe N=2R): **è sempre $N \leq R$** come verificabile da N=R+1-M e considerando che $M \geq 1$, dato che un circuito ha almeno una maglia

1.7 Nodi, Rami, e Maglie

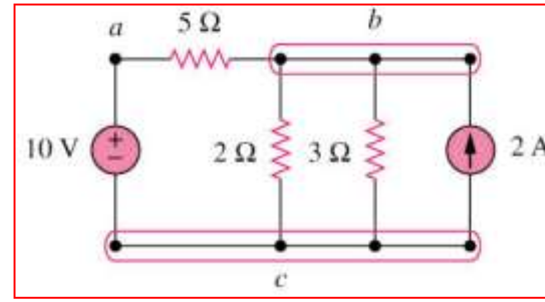
Esempio

b è un unico nodo

c è un unico nodo



Circuito equivalente



Circuito originale

Quanti rami, nodi, e maglie ci sono?

Vi sono 5 elementi e quindi il circuito ha 5 rami. Si evidenziano 3 nodi (*a*, *b*, *c*):
R=5 e N=3 → M=R-(N-1)=5-2=3

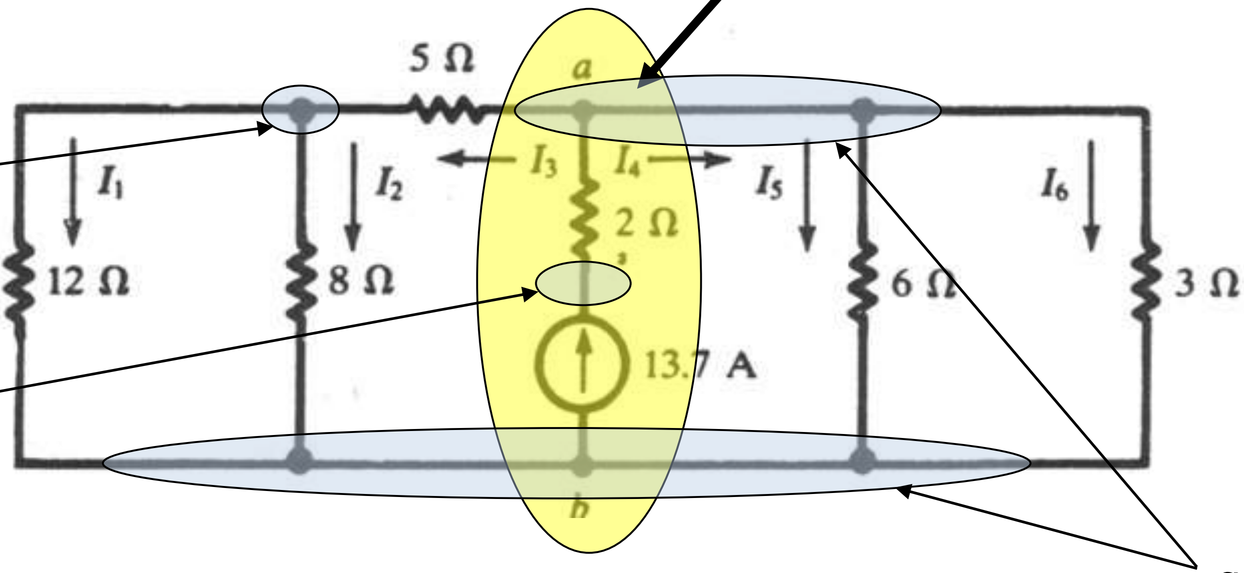
1.7 Nodi, Rami, e Maglie

Esempio

Dobbiamo considerare questo come un ramo o come due rami?

questo è un nodo

MA anche questo è un nodo



questi sono singoli nodi

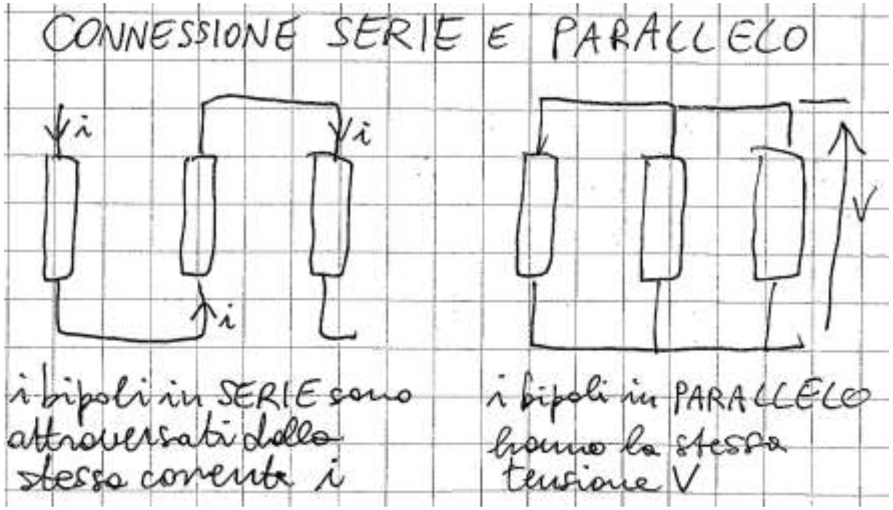
Quanti rami, nodi, e maglie ci sono?

N=4 e M=4, da cui $R=M+(N-1)=4+3=7$ → **?** sono due rami!!
(d'altronde il circuito ha in tutto 7 elementi e dunque R=7 ed è più immediato ragionare in termini di R e N per poi ricavare M)

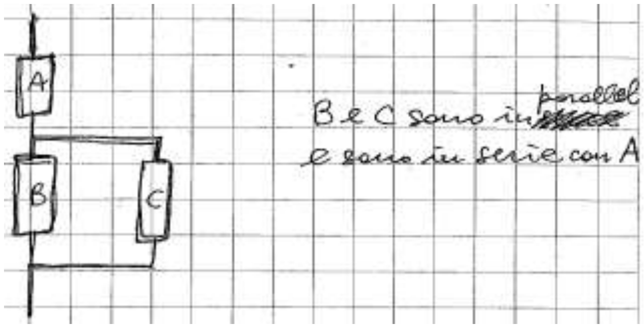
1.7 Serie e parallelo

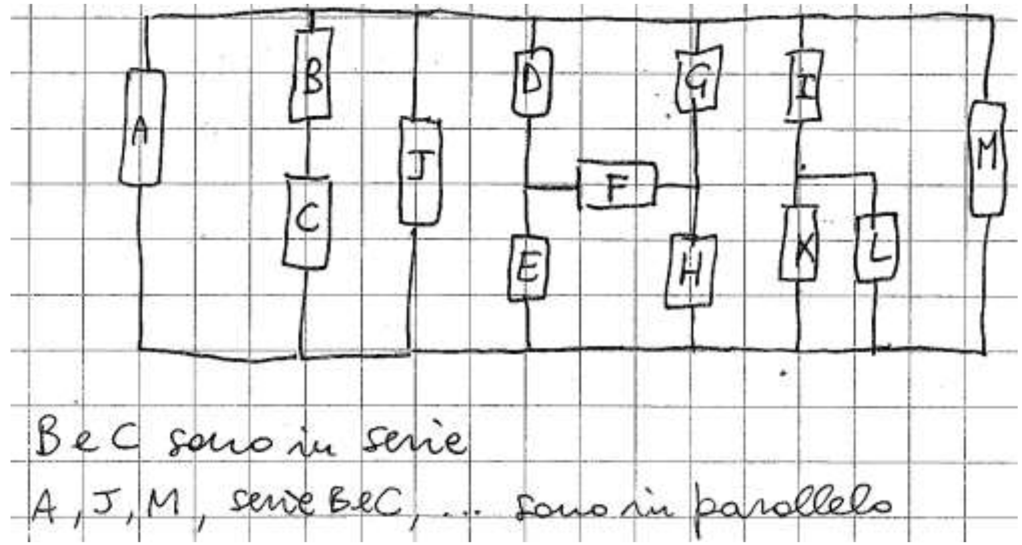
- Due (o più) bipoli sono in **serie** o a pari corrente se sono "concatenati", cioè condividono (a due a due) un nodo in maniera esclusiva, e quindi condividono la stessa corrente

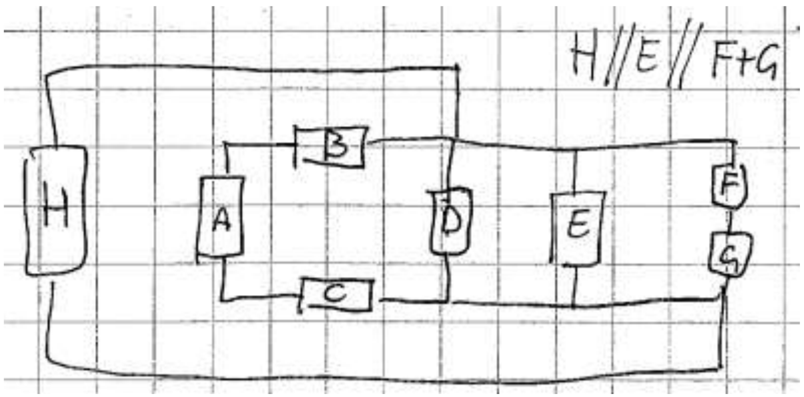
- Due o più bipoli sono in **parallelo** o a pari tensione se sono collegati alla stessa coppia di nodi e quindi condividono la stessa tensione

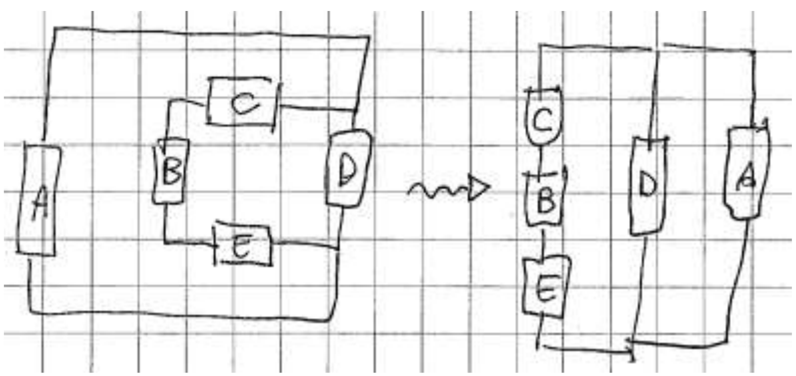


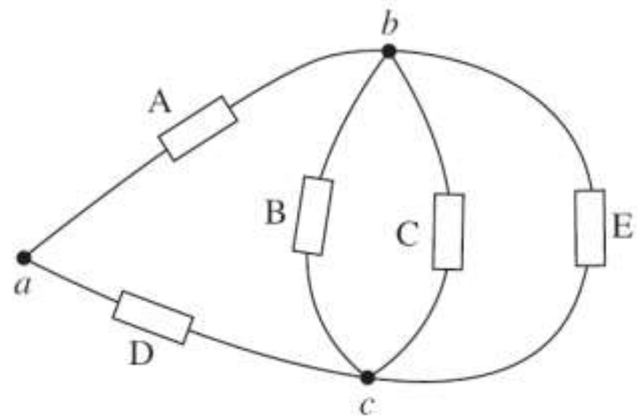
1.7 Serie e parallelo







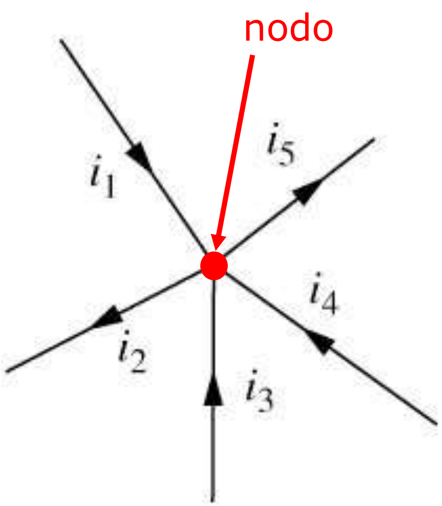


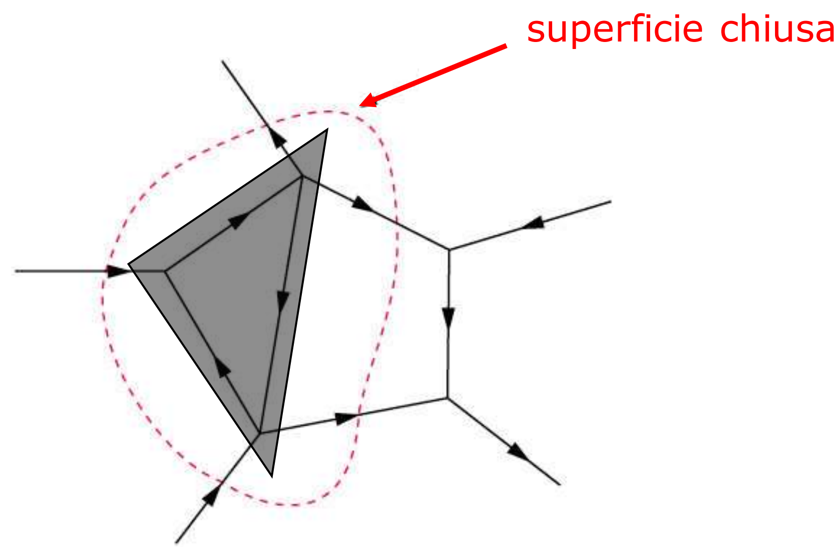


D e A sono in serie. B e C e E sono in parallelo.
A e B non sono né in serie né in parallelo

1.8 Leggi di Kirchhoff

- La **legge di Kirchhoff** delle **correnti** (LKC o **KCL**) dice che la somma algebrica delle correnti entranti in un nodo (o più in generale in una superficie chiusa) è zero
- La KCL consegue dal principio di conservazione della carica





numero di fili entranti nel nodo

In formule, $$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0$$

KCL dice che la corrente totale entrante è bilanciata dalla corrente totale uscente

La somma delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti

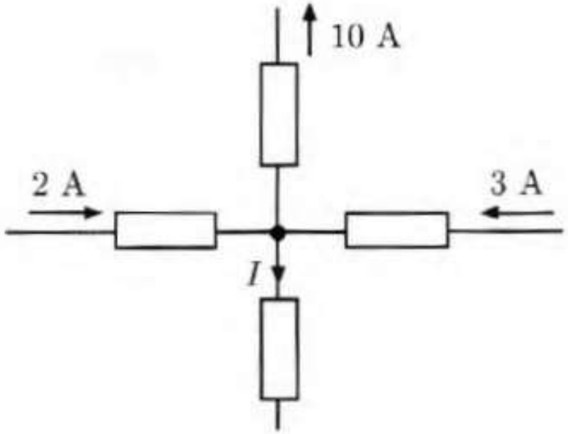
1.8 Legge di Kirchhoff ai nodi (KCL)

Esempio

Esempio 1.2

In Figura 1.16 ricavare il valore della corrente I.

Figura 1.16



Soluzione

Applicando la LKC al nodo si ha:

$$2 + 3 - 10 - I = 0$$

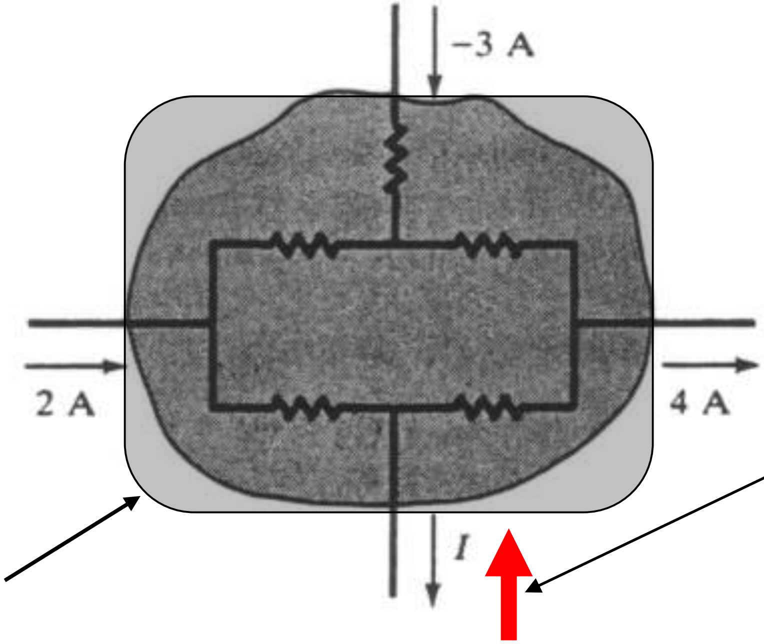
ovvero $I = -5$ A.

La corrente I ha in realtà verso opposto alla freccia.

1.8 Legge di Kirchhoff ai nodi (KCL)

Esempio

- Determina la corrente *I* nel circuito sotto indicato.



$I + 4 - (-3) - 2 = 0$

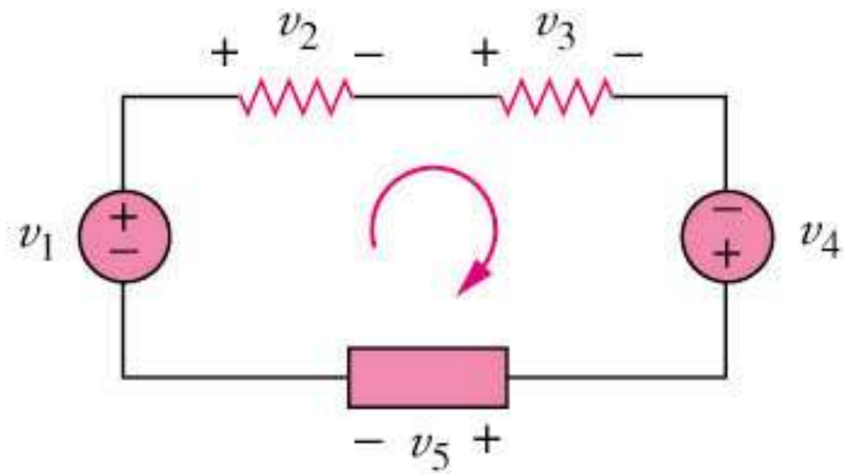
$\Rightarrow I = -5\ A$

Possiamo considerare l'intera superficie indicata come un "nodo".

Il valore negativo di *I* mostra che la corrente scorre in effetti nel verso opposto.

1.8 Leggi di Kirchhoff

- La legge di **Kirchhoff** delle **tensioni** (LKV o **KVL**) dice che la somma algebrica delle tensioni lungo una maglia (percorso chiuso) è zero



numero di elementi della maglia

In formule, $$\sum_{m=1}^{M} v_m = 0$$

KVL dice che partendo da un punto in un circuito ed eseguendo un percorso chiuso sino a tornare in quel punto la d.d.p è nulla

1.8 Legge di Kirchhoff alle maglie (5)

- La KVL è una conseguenza del principio di conservazione dell'energia ($E=q\cdot v$). Immaginiamo una carica unitaria che percorre la maglia chiusa: poichè la carica torna al punto di partenza la sua energia finale dovrà essere pari a quella iniziale

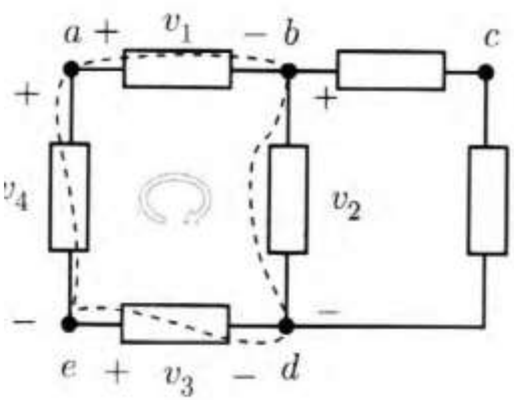


Figura 1.18 L'equazione (1.9) rappresenta la LKT applicata alla maglia tratteggiata; la freccia indica il verso di percorrenza che in questo caso è quello orario.

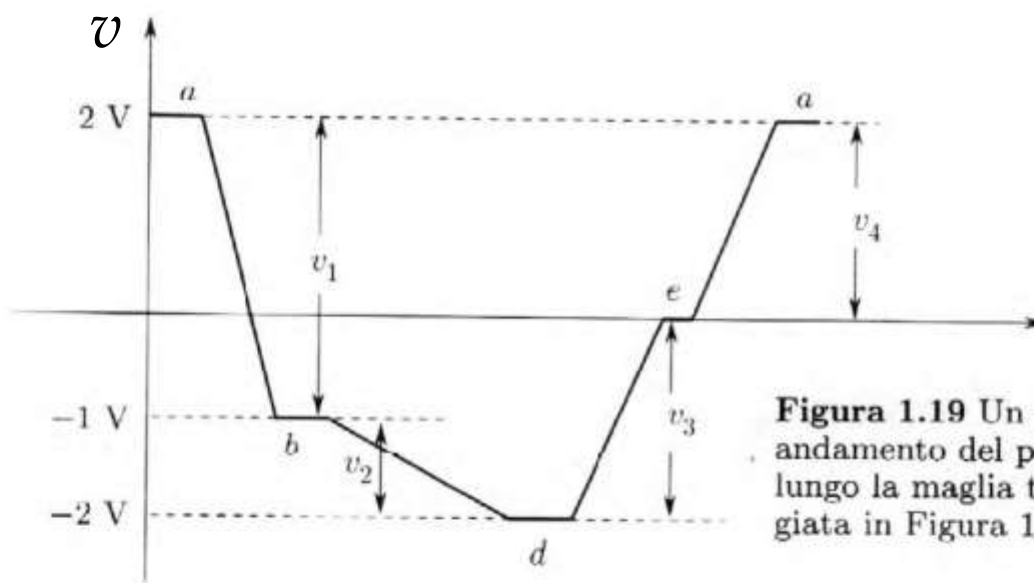


Figura 1.19 Un possibile andamento del potenziale lungo la maglia tratteggiata in Figura 1.18.

1.8 Legge di Kirchhoff alle maglie (KVL)

Esempi Si sceglie un verso di percorrenza lungo la maglia (*e.g.* **verso orario**) e si da un segno + o – alle tensioni a seconda che siano concordi (+_–) o discordi (– _+) con il verso di percorrenza lungo la maglia

Nel circuito in Figura 1.21 ricavare la tensione v.

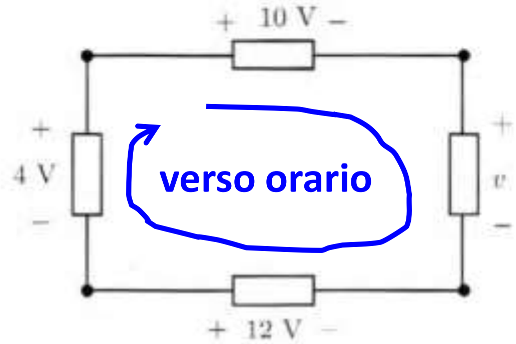
Soluzione
Applicando la LKT alla maglia che attraversa l'intero circuito, si ha:

$$10 + v - 12 - 4 = 0$$

da cui

$$v = 6 \text{ V}$$

Figura 1.21



Applicare la LKC e la LKT al circuito in Figura 1.22. per ricavare i e v.

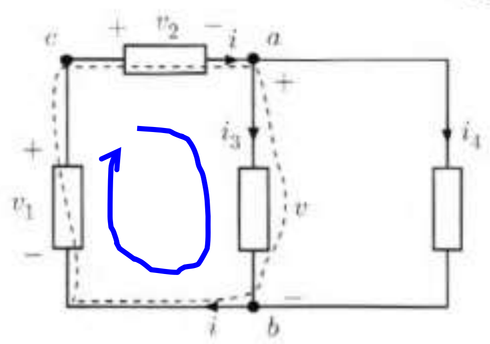
Soluzione
La LKC applicata al nodo a fornisce

$$i = i_3 + i_4$$

Lo stesso risultato si ottiene applicando la LKC al nodo b. In generale, scrivendo la LKC per tutti i nodi di un circuito si ottengono equazioni ridondanti. La LKT applicata alla maglia a-b-c-a fornisce,

$$v - v_1 + v_2 = 0 \quad \text{quindi } v = v_1 - v_2$$

Figura 1.22



1.8 Leggi di Kirchhoff KCL e KVL (8)

Esempio

Ricavare la corrente i_c e la tensione v_{ba} in Figura 1.23.

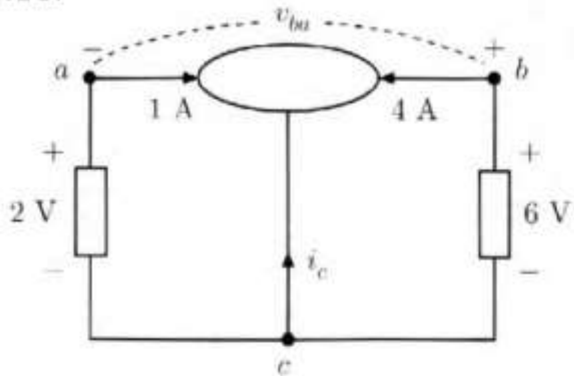


Figura 1.23

Soluzione

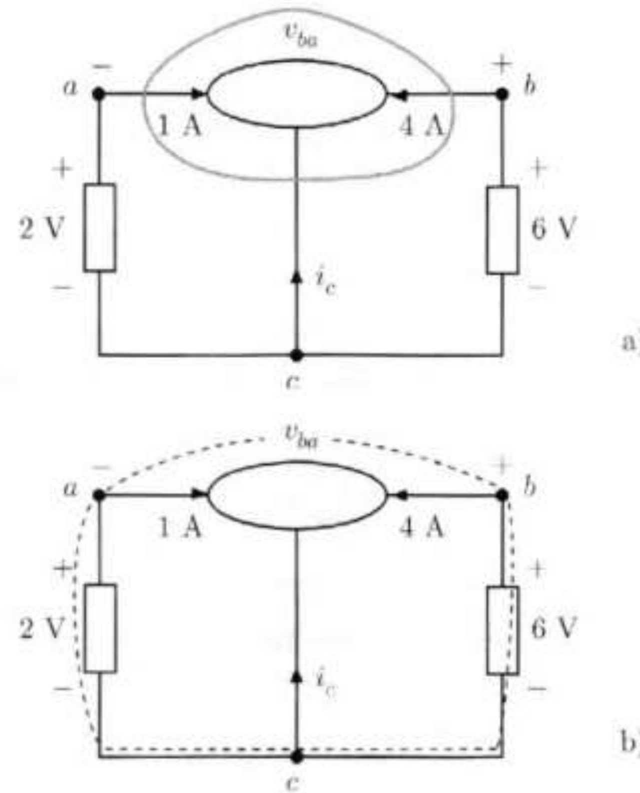
La corrente i_c si può ricavare dalla LKC applicata alla linea chiusa in Figura 1.24a:

$$i_c + 1 + 4 = 0 \implies i_c = -5 \text{ A}$$

La tensione v_{ba} si può ricavare applicando la LKT alla maglia *b-a-c-b* in Figura 1.24b. Si ha:

$$v_{ba} + 2 - 6 = 0 \implies v_{ba} = 4 \text{ V}$$

Figura 1.24

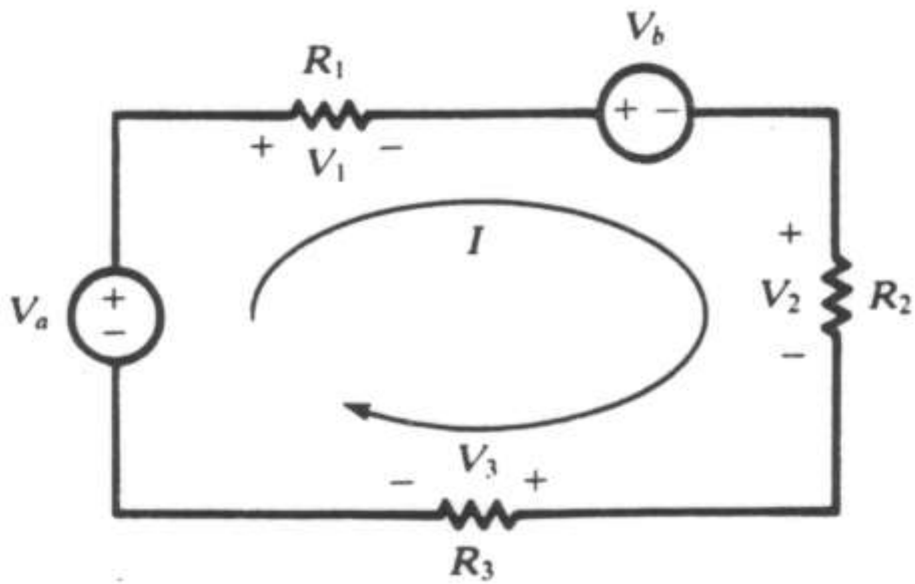


(attenzione: maglia percorsa in verso antiorario)

1.8 KVL e caratteristica di resistori

Esempio

- Trova la corrente I applicando la KVL al circuito sotto indicato.



$$v_1 + v_b + v_2 + v_3 - v_a = 0$$

$$v_a - v_b = v_1 + v_2 + v_3$$

Si utilizza una relazione "caratteristica" dei resistori R_i t.c. $\boldsymbol{V_i = R_i I_i}$

$$v_1 = R_1 I \quad v_2 = R_2 I \quad v_3 = R_3 I$$

$$v_a - v_b = (R_1 + R_2 + R_3)\, I$$

Occore stabilire un verso per la corrente che scorre nella maglia e dare un segno alle tensioni di conseguenza.

$$I = \frac{v_a - v_b}{R_1 + R_2 + R_3}$$

1.5 Potenza e Energia

- La **potenza** p è il tasso di variazione nel tempo dell'energia e si misura in **watt [W]**. Gli elementi circuitali possono dare **assorbimento** (consumo) o **generazione** (produzione) di **energia** E in **joule [J]**
- In formule $$p = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = v \cdot i$$

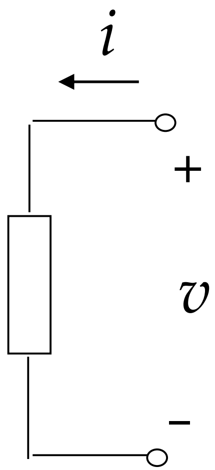
Tabella 1.4 – Valori tipici di potenza

ingresso ricevitore di un telefono cellulare	qualche pW
potenza assorbita da un personal computer	100 W
lampade ad incandescenza	$10 \div 200$ W
centrale idroelettrica	alcuni MW

1.5 Potenza e Energia

corrente entrante nel segno +

Convenzione degli utilizzatori



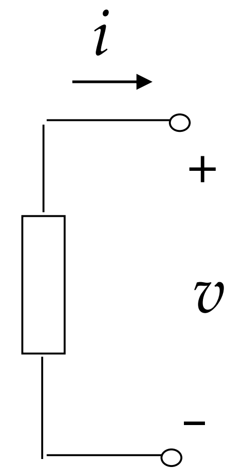
$p = +vi$

potenza assorbita

p<0 indica che l'**energia**, anzichè essere assorbita, viene **erogata** dall'elemento e quindi ceduta al circuito. L'elemento si comporta da **generatore**

corrente uscente dal segno +

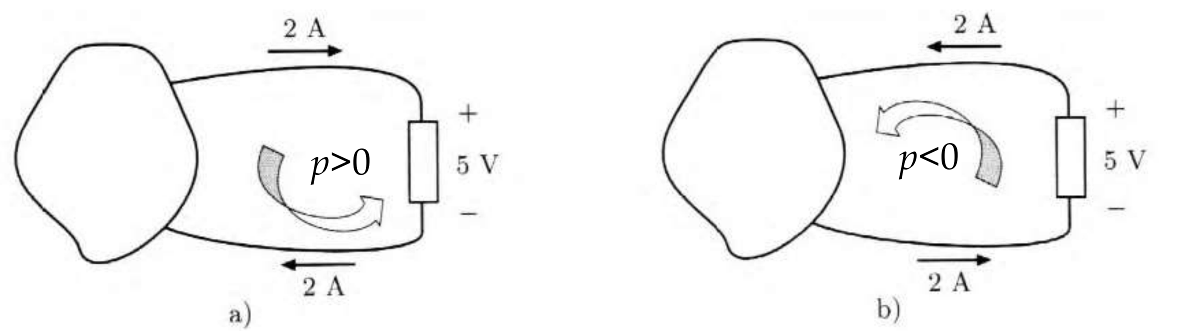
Convenzione dei generatori



potenza erogata $p = vi$

potenza assorbita $p = -vi$

Figura 1.27 a) Il bipolo assorbe energia dal resto del circuito ($p = 10$ W > 0). b) Il bipolo eroga energia al resto del circuito ($p = -10$ W < 0).

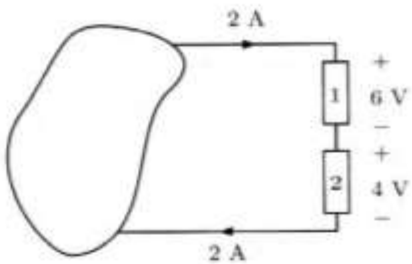


Nel caso di Figura 1.27b, possiamo dire che il bipolo eroga una potenza pari a $vi = 10$ W. e -10 W è la potenza assorbita dal bipolo.

1.5 Potenza e Energia

Esempi

Nei due circuiti in Figura 1.28 calcolare la potenza assorbita dagli elementi numerati.



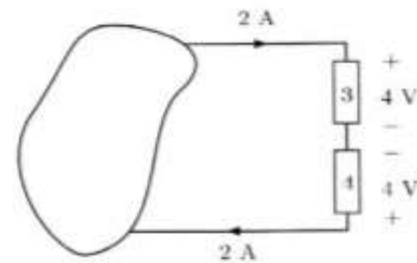


Figura 1.28

Soluzione

Nel circuito di sinistra si ha,

$$p_1 = 2 \times 6 = 12 \text{ W} \qquad p_2 = 2 \times 4 = 8 \text{ W}$$

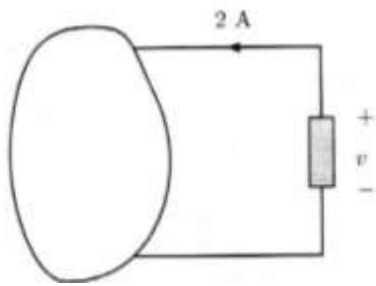
Nel circuito di destra si ha

$$p_3 = 2 \times 4 = 8 \text{ W} \qquad p_4 = 2 \times (-4) = -8 \text{ W}.$$

Il bipolo numero 4 eroga una potenza di 8 W.

Nel circuito in Figura 1.29 ricavare la tensione v, sapendo che l'elemento in grigio assorbe 50 W.

Figura 1.29



Soluzione

La potenza assorbita dall'elemento è

$$p = -2v$$

poiché il verso della corrente non è coordinato con quello della tensione.

Possiamo scrivere perciò

$$-2v = 50$$

quindi

$$v = -25 \text{ V}.$$

1.5 Potenza e Energia

- L'**energia** E è la capacità di compiere lavoro e si misura in **joule [J]**
- In formule $$E = \int_{t_0}^{t} p\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} v \cdot i\,\mathrm{d}t$$

L'energia elettrica venduta per il consumo domestico è misurata in kW·h: 1 kWh = (1000 W) · (3600 s) = 3.6 MJ

Quanto costa (con tariffa di 0.25 €/kWh) mantenere acceso uno scaldabagno/forno/stufetta da 1.6 kW per 1 ora oppure una lampada a LED da 12 W per 5 ore?

$C_1 = 1.6\ \mathrm{kW} \times 1\ \mathrm{h} \times 0.25\ €/\mathrm{kWh} = 0.4\ € = 40\ ¢$

$C_2 = 0.012\ \mathrm{kW} \times 5\ \mathrm{h} \times 0.25 €/\mathrm{kWh} = 0.015\ € \cong 1.5\ ¢$ (leggere o studiare per 5 h costa poco!)

1.5 Potenza e Energia

Esempi

In un bipolo si ha $v = 12$ V, $i(t) = \cos(5000\pi t)$ A. I versi di riferimento sono coordinati. Calcolare la potenza assorbita dal bipolo all'istante $t = 1$ ms.

Soluzione
La corrente in $t = 10^{-3}$ s vale,

$$i = \cos(5 \times 10^3\, \pi 10^{-3}) = \cos(5\pi) = -1 \text{ A}$$

dunque, $p = 12(-1) = -12$ W. All'istante $t = 10^{-3}$ s, il bipolo eroga una potenza di 12 W.

In un bipolo si ha $v = 12$ V, $i(t) = \text{sen}(2\pi t)$ A. I versi di riferimento sono coordinati. Calcolare l'energia assorbita dal bipolo nell'intervallo $(0 \div 0,5 \text{ s})$ e nell'intervallo $(0 \div 1 \text{ s})$.

Soluzione
Con la formula (1.15) si ha:

$$w(0 \div 0{,}5) = \int_0^{0,5} p(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{0,5} 12\,\text{sen}(2\pi t)\mathrm{d}t =$$

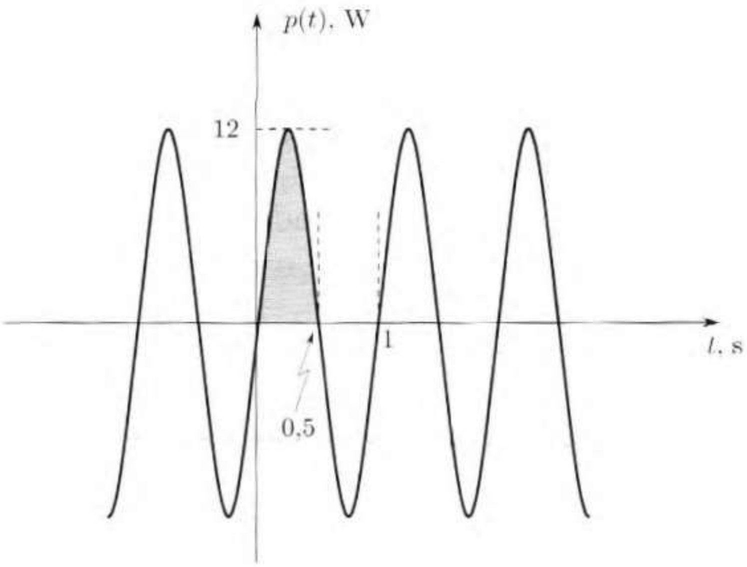
$$= \frac{12}{2\pi}[1 - \cos(\pi)] = \frac{12}{\pi}\text{ J} \qquad E \cong 4 \text{ J}$$

$$w(0 \div 1) = \int_0^{1} p(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{1} 12\,\text{sen}(2\pi t)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{12}{2\pi}[1 - \cos(2\pi)] = 0 \text{ J} \qquad E = 0$$

La Figura 1.31 mostra l'interpretazione grafica del risultato ottenuto.

Figura 1.31



1.5 Potenza e Energia

- L'energia assorbita da un bipolo può essere trasformata in vari modi: se è un motore elettrico può divenire energia meccanica e termica, se è una lampada diviene energia luminosa e termica, se è un resistore va tutta "dissipata in calore"

- Per la **legge di conservazione dell'energia**, E_{TOT}=cost., si ha $p_{TOT}=dE_{TOT}/dt=0$ sull'intero circuito che è un sistema isolato. Si ha "conservazione della Potenza" o Terorema di Tellegen:

$$\sum_{r=1}^{R} p_r = 0$$

ovvero la somma algebrica delle potenze assorbite* da tutti gli elementi (*R* rami) di un circuito è nulla in ogni istante

*Potenze asorbite = calcolate con la stessa convenzione (conv. utilizzatori)

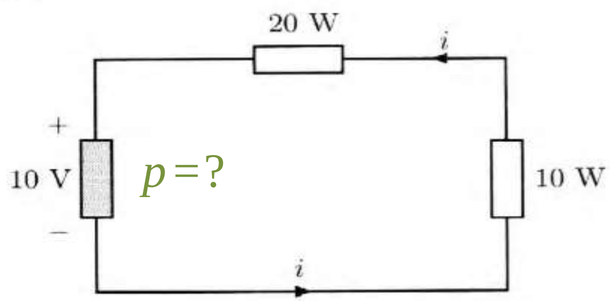
- In un circuito vi sono elementi che assorbono potenza (**carichi**) ed altri elementi che erogano potenza (**generatori**). Potenze assorbite ed erogate nel complesso si bilanciano

1.5 Potenza e Energia

Esempi

Nel circuito in Figura 1.35 ricavare la corrente i sapendo che gli elementi assorbono le potenze indicate.

Figura 1.35



Soluzione
Applicando la proprietà di conservazione della potenza si ha

$$p + 20 + 10 = 0$$

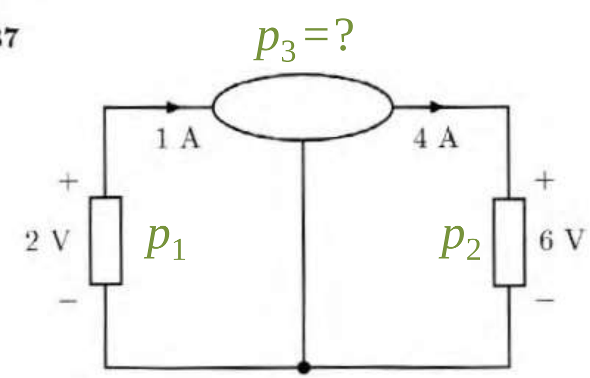
essendo p la potenza assorbita dall'elemento in grigio.
Quindi $p = -30$ W. In alternativa possiamo dire che l'elemento in grigio eroga una potenza di 30 W. La potenza assorbita dall'elemento si può esprimere come $p = 10i$, quindi deve essere

$$10i = -30$$

ovvero $i = -3$ A.

Nel circuito in Figura 1.37 verificare la conservazione della potenza.

Figura 1.37



Soluzione
Il bipolo di sinistra assorbe la potenza $p_1 = -2 \times 1 = -2$ W. Il bipolo di destra assorbe la potenza $p_2 = 6 \times 4 = 24$ W. Il tripolo assorbe la potenza

$$p_3 = 2 \times 1 - 6 \times 4 = -22 \text{ W}$$

Dunque:

$$p_1 + p_2 + p_3 = -2 + 24 - 22 = 0$$

Sommario

- Il **SI** è il linguaggio internazionale di misura che permette a ingegneri e scienziati di comunicare i risultati. Da **7 unità di misura di base** (o meglio principali) i ricavano tutte le altre **unità derivate** (o altre unità).

- Un **circuito** elettrico è formato da elementi elettrici collegato fra loro.

- La **corrente** è il tasso di variazione (flusso) della carica nel tempo:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

- Il **potenziale** (elettrico) è l'energia per unità di carica. La **tensione** (elettrica) è la differenza di potenziale necessaria a muovere la carica elettrica attraverso un elemento (o tra due punti dello spazio):

$$v = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q} \qquad v_{\mathrm{ab}} = V(\mathrm{a}) - V(\mathrm{b})$$

Sommario

- **Ramo** è un elemento del circuito con due terminali. **Nodo** è il punto di connessione di due o più rami. **Maglia** è un cammino chiuso. $M=R-(N-1)$.

- **KCL** dice che la somma delle correnti in un nodo è zero:

$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0$$

- **KVL** dice che la somma delle tensioni lungo una maglia è zero:

$$\sum_{m=1}^{M} v_m = 0$$

Sommario

- La **potenza** è l’energia assorbita, o erogata, per unità di tempo.
  La Potenza è il prodotto tensione per corrente:

$$p = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = v \cdot i$$

- Con la **convenzione degli utilizzatori** la corrente entrante dal terminale positivo di un elemento comporta potenza assorbita positiva.

- La **conservazione dell’energia e potenza** in un circuito prevede che la somma delle potenze su tutti gli elementi sia zero (teorema di Tellegen):

$$\sum_{r=1}^{R} p_r = 0$$

Equazioni ricolorate come figure

$$\Delta q = \int_0^{\Delta t} i(t)\mathrm{d}t$$

$$\sqrt{2}$$

$$\frac{300\ \text{C/min}}{1.6\times10^{-19}\ \text{C/elettrone}} \cong 1.9\times10^{21}\ \text{elettroni/ min}$$

$$v_{\mathrm{ab}} = \mathrm{d}E/\mathrm{d}q$$

$$p = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\cdot\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = v\cdot i$$

$$\sum_{r=1}^{R} p_r = 0$$

$$I = \frac{v_{\mathrm{a}} - v_{\mathrm{b}}}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Equazioni ricolorate come figure

$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0 \quad \sum_{k=1}^{K} i_k = 0 \qquad \sum_{m=1}^{M} v_m = 0 \quad \sum_{j=1}^{J} v_j = 0$$

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q} \qquad v_{\mathrm{ab}} = V(\mathrm{a}) - V(\mathrm{b})$$

$$p = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = v \cdot i$$