Circuiti Elettrici

Capitolo 7

Circuiti del secondo ordine

Prof. Cesare Svelto

Circuiti del secondo ordine – Cap. 7

7.0 Introduzione

7.1 Circuiti RLC in evoluzione libera

Analisi ed eq.diff. del 2° ordine omogenea
Soluzioni nei 4 casi possibili (sovrasmorzato, a smorzamento critico, sottosmorzato, non smorzato)

7.2 Circuiti RLC con un generatore costante

7.3 Circuiti del 2° ordine: soluz.gen. e stabilità

7.4 Circuiti del secondo ordine autonomi
Metodo sistematico per circ. 2° ord. autonomi

7.X Sommario

7.0 Introduzione

- Un **circuito dinamico** caratterizzato dalla presenza di due elementi dinamici (di solito 1 induttore e 1 condensatore oppure 2 induttori oppure 2 condensatori) e descritto da una **eq. differenziale del secondo ordine** è un **circuito del secondo ordine**
- La **soluzione** dei circuiti del secondo ordine è la combinazione lineare di due **esponenziali** con esponenti **complessi coniugati. La parte immaginaria da luogo a una sinuoside**
- Impareremo a ricavare la **risposta del circuito** senza generatori (risposta libera) o con generatori indipendenti (risposta forzata)

7.0 Introduzione

- In ogni circuito dinamico **lineare** (stabile) si può scomporre la risposta in una parte transitoria (**transitorio**) [in cui si ridistribuisce e consuma l'energia inizialmente accumulate negli elementi dinamici] e una parte permanente (**regime**) [imposta dai generatori]: sovrapposizione degli effetti

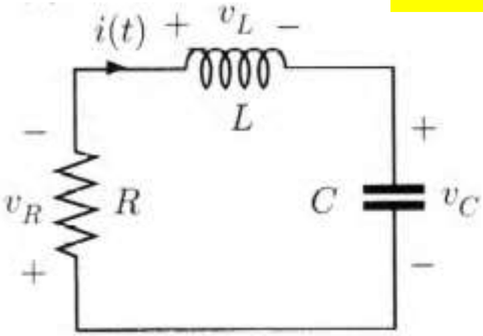
- Il comportamento di alcuni **sistemi dinamici lineari** (meccanici, termici, economici, …) che coinvolgono due tipologie di energia può essere rappresentato come un circuito del secondo ordine, **"sistema di tipo "RLC"**, caratterizzato da una risposta in transitorio e una risposta di regime (o a transitorio esaurito) e da una potenziale condizione di risonanza

7.1 Circuiti RLC in evoluzione libera

- Consideriamo due circuiti elettrici con proprietà duali che saranno descritti dalla stessa equazione diff. del secondo ordine (coeff.cost. e omogenea):

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

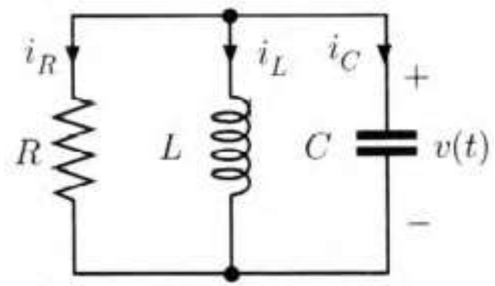
RLC serie



$$x(t) = i_{\text{ser}}(t) = i(t) = i_{\text{L}}(t) \quad \text{o}$$

$$x(t) = v_{\text{par}}(t) = v(t) = v_{\text{C}}(t)$$

RLC parallelo



$\alpha = R/2L$

$\alpha = 1/2\tau_{RL}$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\alpha = 1/2RC$

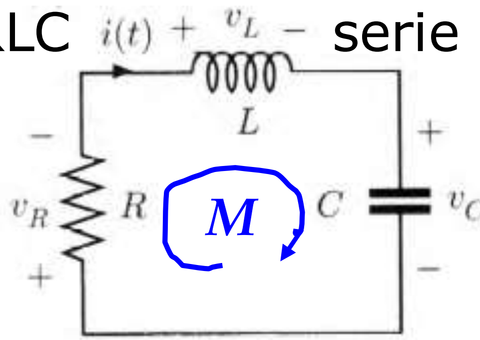
$\alpha = 1/2\tau_{RC}$

- **Due parametri ω_0 [rad/s] pulsazione di risonanza e α [1/s] costante di smorzamento** del circuito RLC

7.1 Circuiti RLC liberi (analisi)

Risolviamo i circuiti (KVL, KCL, ed eq. caratteristiche R, C, L)

RLC serie



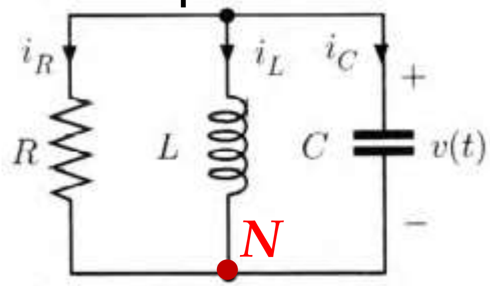
$$v_R + v_L + v_C = 0$$

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \left[v_\mathrm{C}(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\mathrm{d}t' \right] = 0$$

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i}{C} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0$$

RLC parallelo



$$i_R + i_L + i_C = 0$$

$$\frac{v(t)}{R} + \left[i_\mathrm{L}(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v(t')\mathrm{d}t' \right] + C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{L} + C\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}v = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{1}{2\tau_\mathrm{RL}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2\tau_\mathrm{RC}}$$

7.1 Circuiti RLC liberi (soluzioni)

Equazione differenziale del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti e omogena nell'incognita $x(t)$ [var. stato]

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

eq.diff. in forma standard

compaiono le derivate dell'incognita x → eq.diff.
combinazione lineare dei termini → lineare
compare la derivata seconda → 2° ordine
coefficenti che non variano → a coeff.cost.
tutti i termini contengono l'incognita x → omogenea
(non vi è un termine noto)

Equazione caratteristica $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$

con due radici $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ e 4 casi possibili:

1. $\alpha > \omega_0$ 2. $\alpha = \omega_0$ 3. $\alpha < \omega_0$ 4. $\alpha = 0$

consideriamo per adesso $\alpha > 0$ (circ.stab. come con $R_{eq} > 0$ per circ. 1° ord.)

7.1 RLC sovrasmorzato

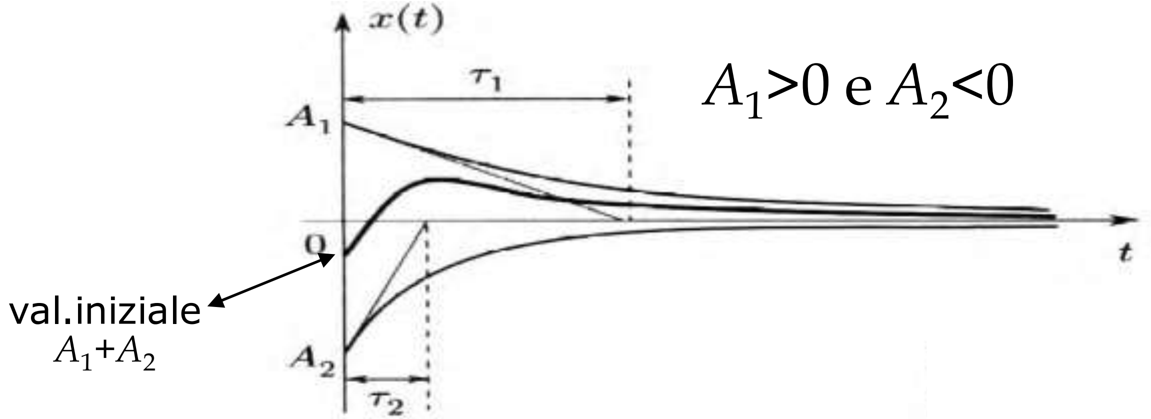
1. $\alpha > \omega_0$ → s_1 e s_2 radici reali e distinte (entrambe negative)

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$x(t) = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t}$$ risposta **sovrasmorzata**

Le due costanti A_1 e A_2 si ottengono dalle due condizioni iniziali $x(0)$ e $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t(0)$

$x(t)$ è somma di due esponenziali decrescenti (τ_1=-1/s_1 τ_2=-1/s_2) e il valore di regime (per $t \to \infty$) è nullo



possibili anche
A_1<0 e A_2>0
A_1<0 e A_2<0
A_1>0 e A_2>0

al crescere di $\alpha \Rightarrow s_1 \to 0$ ($\tau_1 \to \infty$) e $s_2 \to \infty$ ($\tau_2 \to 0$) e dunque il primo esponenziale domina sul secondo, con un transitorio che si esaurisce in tempi molto lunghi

7.1 Circuito RLC con smorzamento critico

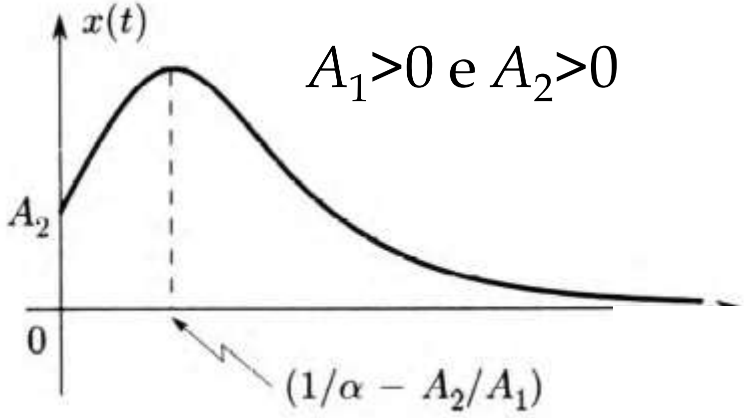
2. $\alpha = \omega_0$ → s_1 e s_2 radici reali e concidenti ($s_{1,2}=-\alpha<0$)

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$x(t) = (A_1 t + A_2) \cdot e^{-\alpha t}$$ risp. con **smorzamento critico**

Le due costanti A_1 e A_2 si ottengono dalle due condizioni iniziali $x(0)$ e $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t(0)$

Il valore iniziale è A_2 e il valore di regime è nullo



$A_1>0$ e $A_2>0$

possibili anche
$A_1<0$ e $A_2<0$
$A_1<0$ e $A_2<0$
$A_1<0$ e $A_2<0$

la risposta presenta un massimo (o un minimo) per $t_{MAX/MIN}=1/\alpha-A_2/A_1$
[se $t_{MAX/MIN} \leq 0$ non vi è MAX/MIN] e poi tende asintoticamente a zero

7.1 RLC sottosmorzato

3. $\boldsymbol{\alpha < \omega_0}$ → s_1 e s_2 radici complesse e coniugate ($\mathrm{Re}(s_{1,2})<0$)

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$s_1 = -\alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha + j\beta \qquad s_2 = -\alpha - j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha - j\beta$$

$$x(t) = \left[A_1 \cos(\beta t) + A_2 \sin(\beta t)\right] \cdot e^{-\alpha t}$$ risposta **sottosmorzata**

Le due costanti A_1 e A_2 si ottengono dalle due condizioni iniziali $x(0)$ e $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t(0)$

$x(t)$ è somma di due funzioni sinusoidali moltiplicate per un esponenziale decrescente o equivalentemente

$$x(t) = A\cos(\beta t + \phi) \cdot e^{-\alpha t}$$ risposta **sottosmorzata**

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad \phi = -\tan^{-1}(A_2 / A_1)$$

$$A_1 = A\cos(\phi) \qquad A_2 = A\sin(\phi)$$

7.1 RLC sottosmorzato

3. $\alpha<\omega_0$ → s_1 e s_2 radici complesse e coniugate ($\mathrm{Re}(s_{1,2})<0$)

$x(t)$ è una oscillazione sinusoidale di pulsazione $\omega=\beta$ smorzata da un esponenziale decrescente $\tau=1/\alpha$

$$x(t) = A\cos(\beta t+\phi)\cdot e^{-\alpha t} = A\cos(\omega t+\phi)\cdot e^{-t/\tau}$$

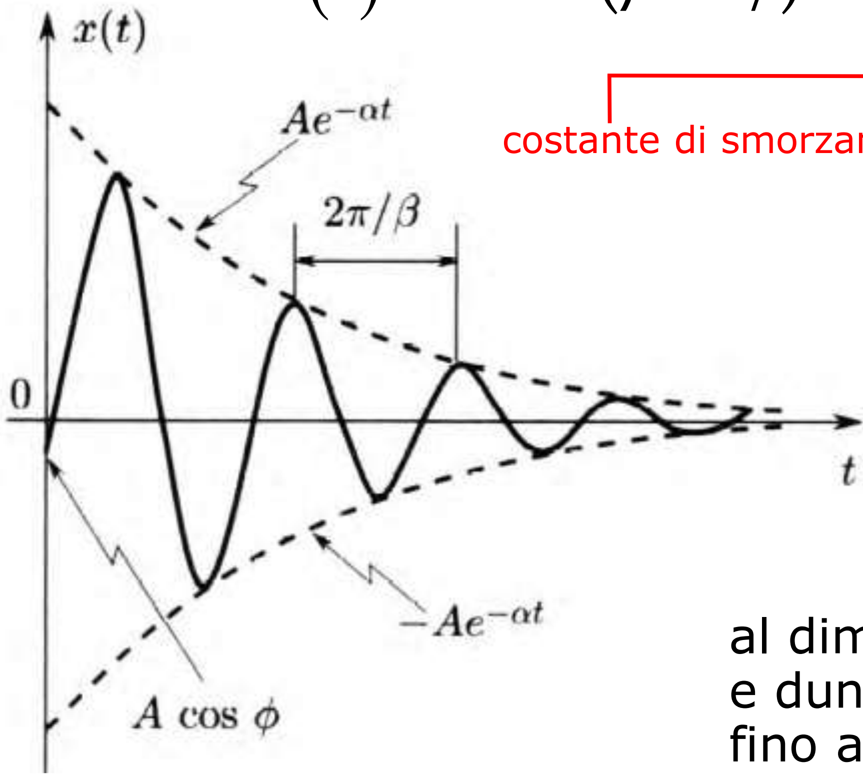
costante di smorzamento

ampiezza

pulsazione

fase iniziale

tempo di smorzamento



risposta **sottosmorzata**

l'oscillazione sinusoidale è limitata dai due inviluppi esponenziali $Ae^{-\alpha t}$ e $-Ae^{-\alpha t}$

al diminuire di $\alpha \Rightarrow \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ aumenta e dunque cresce la frequenza delle oscillazioni fino al valore massimo $\beta_{MAX}=\omega_0$ per $\alpha=0$

7.1 "R"LC senza smorzamento

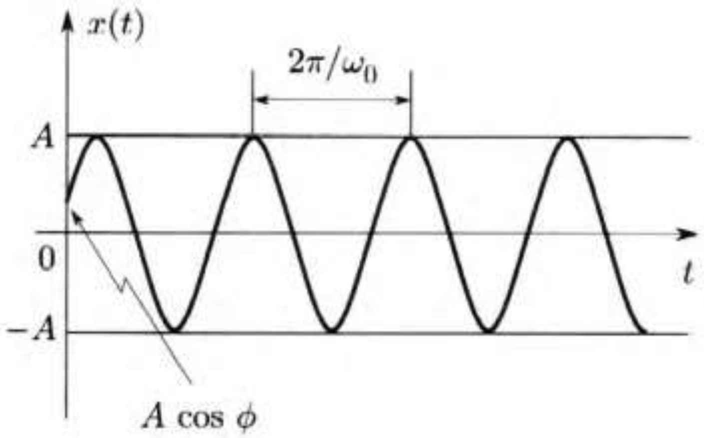
4. α=0 → s_1 e s_2 radici immaginarie pure ($s_{1,2}=\pm j\omega_0$)

$$s_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$$

$$x(t)=A_1\cos(\omega_0 t)+A_1\sin(\omega_0 t)=$$
$$=A\cos(\omega_0 t+\phi)$$ risp. **senza smorzamento**

Le due costanti A_1 e A_2 si ottengono dalle due condizioni iniziali $x(0)$ e $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t(0)$

Rispetto al circuito sottosmorzato, adesso lo smorzamento è andato a zero ($R_{\text{serie}}=0$ o $R_{\text{parallelo}}=\infty \Rightarrow \alpha=0$ e $\tau=1/\alpha=\infty$), quindi **permane l'oscillazione sinusoidale** con pulsazione ω_0



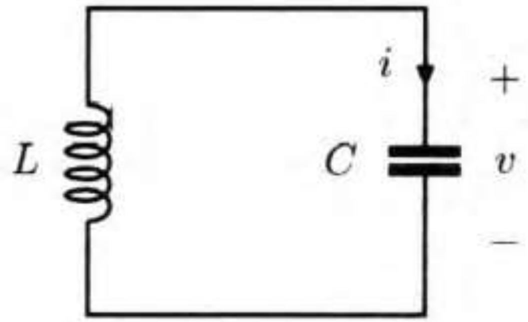
L'oscillazione si sostiene idealmente per un tempo infinito ma questo è impossibile in un circuito reale che avrà sempre delle perdite (R non scompare)

7.1 Circuito LC ideale (*lossless*)

4. α=0 → s_1 e s_2 radici immaginarie pure ($s_{1,2}=\pm j\omega_0$)

$x(t)$ è una oscillazione sinusoidale non smorzata e con pulsazione ω_0 per cui $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$

analisi di *v*, *I*, ed *E*



$$v(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$$

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-CA\omega_0\sin(\omega_0 t+\phi)$$

$$E(t)=\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}Cv^2=\ldots=\frac{1}{2}CA^2=\text{costante}$$

$$\frac{1}{2}Cv^2_{\mathrm{MAX}}$$

$$\frac{1}{2}Li^2_{\mathrm{MAX}}$$

L'energia del circuito non dipende dal tempo: quando l'energia del condensatore aumenta quella dell'induttore diminuisce e viceversa, di modo da conservare l'energia complessiva del circuito che infatti è privo di dissipazione (ricordiamo che L reale ha una R_L in serie e C reale ha una R_C in parallelo, entrambe $\neq 0$)

7.1 Soluzioni del circuito RLC e Condizioni Iniziali

Soluzioni dell'equazione differenziale del 2° ordine omogenea:

$\alpha > \omega_0$ sovra $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ $x(t) = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t}$

$\alpha = \omega_0$ critico $s_1 = s_2 = -\alpha = -\omega_0$ $x(t) = (A_1 t + A_2) \cdot e^{-\alpha t}$

$\alpha < \omega_0$ sotto $s_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\beta$ $x(t) = A\cos(\beta t + \phi) \cdot e^{-\alpha t}$

$\alpha = 0$ *lossles* $s_{1,2} = \pm j\omega_0$ $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$

Per calcolare le costanti A_1 e A_2 (e dunque A e ϕ) della soluzione, dobbiamo impiegare le **condizioni iniziali $x(0)$ e $dx/dt(0)$** che nel caso del circuito RLC sono le tensioni dei condensatori e le correnti degli induttori (variabili di stato e quindi grandezze continue)

Per ricavare le condizioni iniziali risolviamo un primo circuito per $t=0^-$ (ricavando immediatamente $x(0^-)=x(0)$ che è la 1ª condizione iniziale) e quindi un secondo circuito per $t=0^+$ (ricavando da esso $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t(0^+)$ che è la 2ª condizione iniziale)

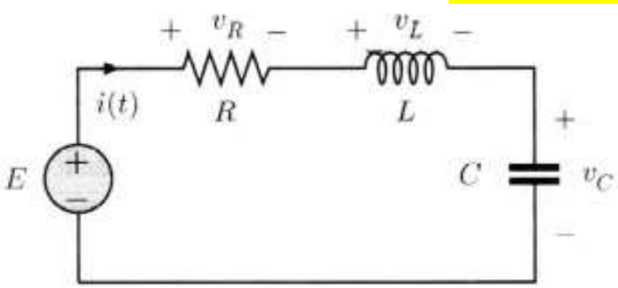
7.2 RLC con generatore cost.

- Consideriamo il circuito elettrico RLC + generatore di tensione <u>costante</u> (con duale RLC parallelo + gen.corr.cost.) che sarà descritto dalla eq.diff. del secondo ordine (coeff.cost. e <u>omogenea</u>):

RLC serie
+ gen.cost

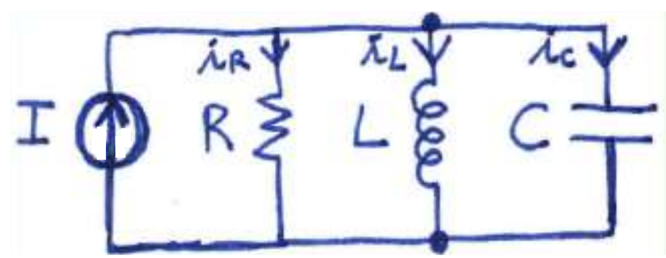
$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

RLC parallelo
+ gen.cost



$$x(t) = i_{\mathrm{ser}}(t) = i_{\mathrm{L}}(t) \text{ o}$$

$$x(t) = v_{\mathrm{par}}(t) = v_{\mathrm{C}}(t)$$



$$\alpha = R/2L$$
$$\alpha = 1/2\tau_{RL}$$

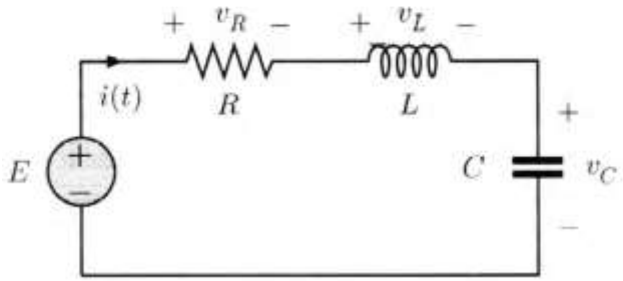
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

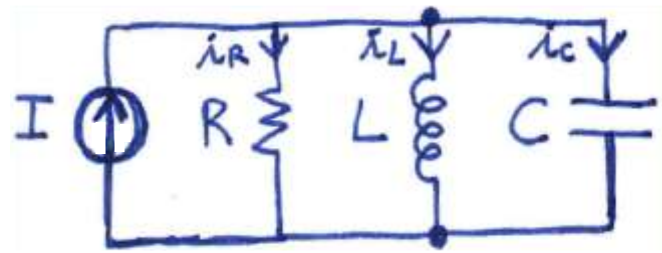
$$\alpha = 1/2RC$$
$$\alpha = 1/2\tau_{RC}$$

- "Soliti" due parametri ω_0 [rad/s] pulsazione di risonanza e α [1/s] costante di smorzamento del circuito RLC

7.2 RLC + generatore (analisi)

Risolviamo i circuiti (KVL, KCL, ed eq. caratteristiche R, C, L)





$$-E+v_R+v_L+v_C=0$$

$$-I+i_R+i_L+i_C=0$$

$$Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\left[v_C(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t')\mathrm{d}t'\right]=E$$

$$\frac{v(t)}{R}+\left[i_L(0)+\frac{1}{L}\int_0^t v(t')\mathrm{d}t'\right]+C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=I$$

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+\frac{i}{C}=0$$

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{v}{L}+C\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}i=0$$

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}v=0$$

$$\alpha=\frac{R}{2L}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\alpha\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 x(t)=0$$

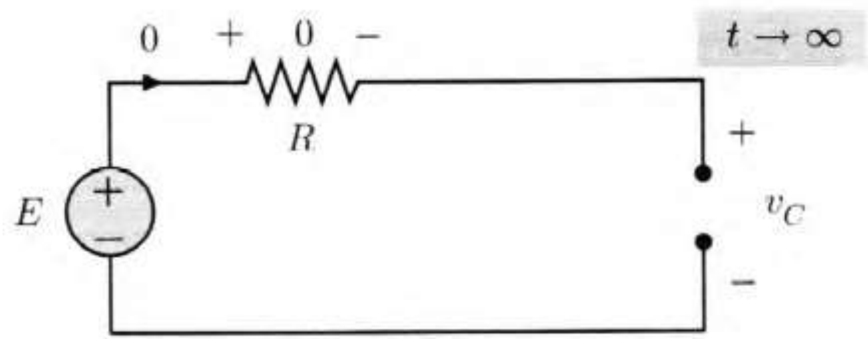
$$\alpha=\frac{1}{2RC}$$

7.2 RLC + gen. (risposta e valore finale)

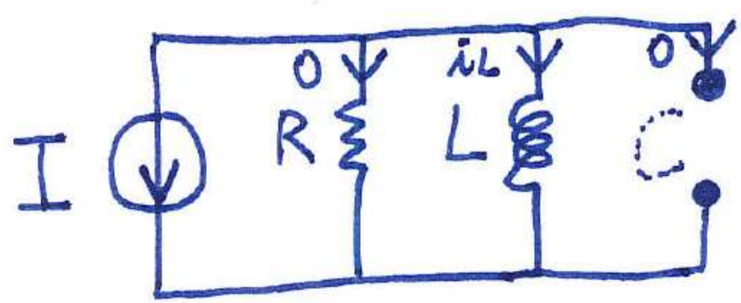
α e ω_0 uguali al caso di RLC libero (in generale i coefficienti α e ω_0 non dipendono dai valori dei generatori)

Il valore di regime $x(t\to\infty)$ per la variabile di stato, che nel caso della risposta libera era nullo (salvo caso "R=0"), è ora il valore imposto dal generatore:

$v_C(t\to\infty)$=-E

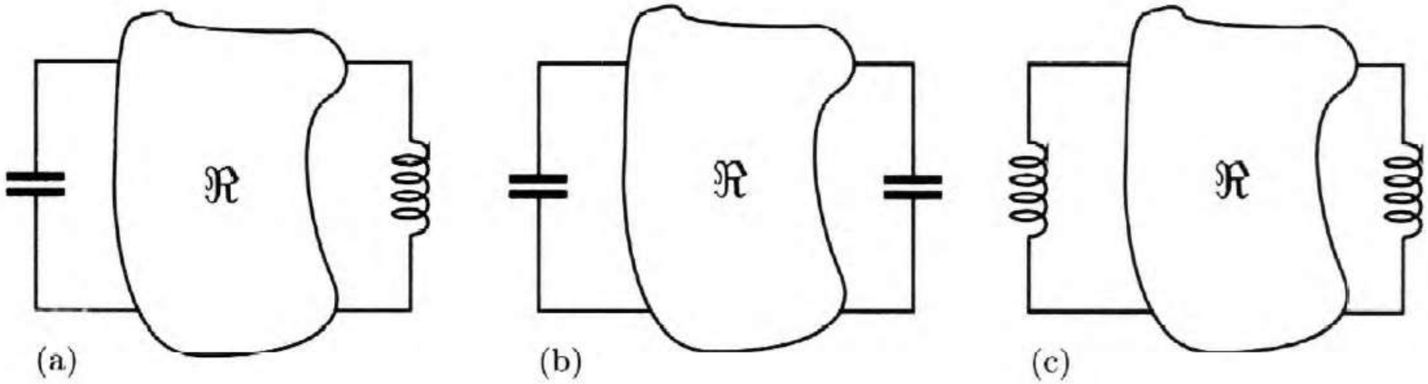


$i_L(t\to\infty)$=-I



7.3 Circuiti del 2° ordine (in generale)

Nel caso più generale un circuito del 2° ordine ha forma:



sempre descritto da eq.diff. del tipo:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = y(t)$$

con $x(t)$ **variabile di stato** di un elemento dinamico, $v_C(t)$ o $i_L(t)$,
e $y(t)$ **è la funzione forzante** imposta dai generator**I** indipendent**I**
con $y(t)=0$ in assenza di generatori

7.3 Circuiti del 2° ordine (soluz.gen.)

La soluzione di $\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = y(t)$ è

$x(t) = x_0(t) + x_\mathrm{p}(t)$ con $x_\mathrm{p}(t)$ **soluzione particolare**

mentre $x_0(t)$ ha l'andamento funzionale della sol. gen. dell'eq. omogenea e corrispondente al circuito con i generatori spenti

I coefficienti α e ω_0 non dipendono dai valori dei gen.indip. e quindi sono ricavabili dal circuito con i gen.indip. spenti
(stessa condizione trovata per τ nei circuiti del 1° ordine)

7.3 Circuiti del 2° ordine (stabilità)

L'andamento di $x_0(t)$ dipende dalle frequenze naturali

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

se freq.natsono reali negative o complesse coniugate con parte reale negative il **circuito è stabile** $\Leftrightarrow \alpha > 0$ **e** $\omega_0^2 > 0$

Se $\mathrm{Re}\{s_{1,2}\} > 0$ il circuito è instabile (solo con gen.dip. o OP-AMP)

Con circuito stabile $x_0(t) \to 0$ per $t \to \infty$ ed è la risposta transitoria mentre $x_\mathrm{p}(t)$ è la risposta permanente (dovuta ai generatori)
Con circuito instabile $x_0(t) \to \pm\infty$ per $t \to \infty$ e si ha risposta divergente

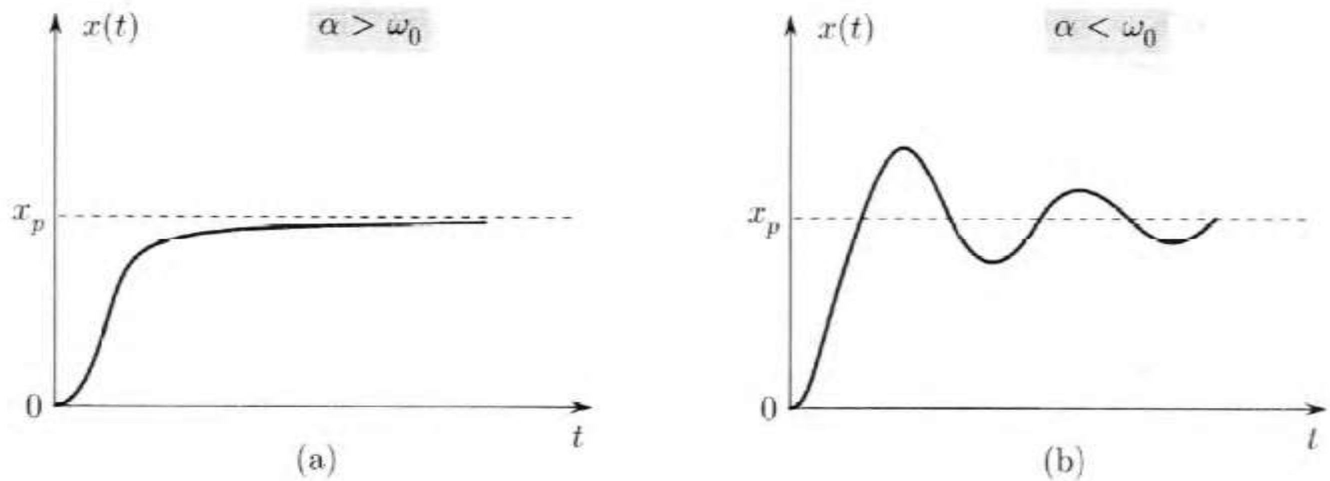
I circuiti passivi sono sempre stabili ma i circuiti attivi, con gen.dip. e/o OP-AMP, possono essere instabili (nel caso limite passivo ″senza *R*″ si ha stabilità [non diverge] ma non asintotica [non coverge a un valore])

7.4 Circuiti del 2° ordine autonomi

Con generatori indipendenti costanti (**circuito autonomo**):

$y(t)$=cost. e dunque $x_{\mathrm{p}}(t)=x_{\mathrm{p}}$=cost. e allora per $t\to\infty$

$$x(t)\to x(\infty)=x_0(\infty)+x_{\mathrm{p}}(\infty)=0+x_{\mathrm{p}}=x_{\mathrm{p}}$$ regime costante



esempi di risposta per circuito del 2° ordine

La soluzione di regime costante vale per:

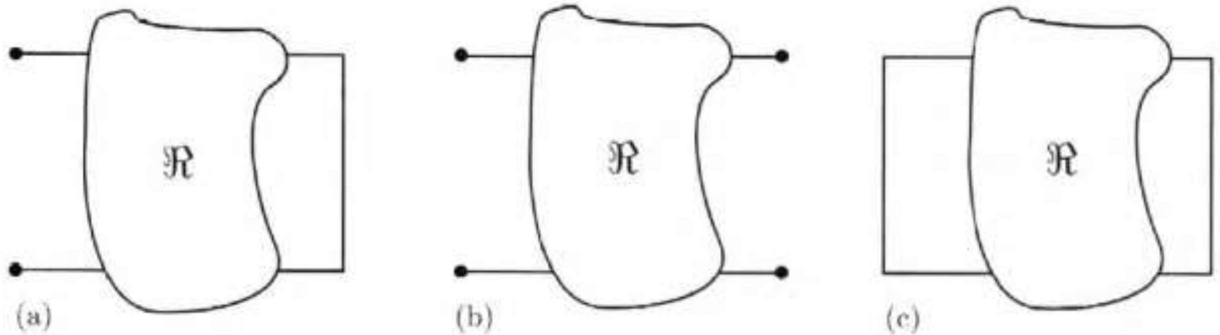
tensione dei **condensatori** (se v=cost. $\Rightarrow$ i=0 equiv. a circuito aperto)

e corrente negli **induttori** (se i=cost. $\Rightarrow$ v=0 equiv. a corto circuito)

7.4 Circuiti del 2° ordine autonomi

In un circuito autonomo e stabile tutte le tensioni e tutte le correnti diventano costanti per $t \to \infty$

I valori delle grandezze a regime si ottengono risolvendo il **circuito equivalente a regime**, che è:



Possiamo quindi ricavare un **algoritmo** (metodo sistematico) per la soluzione di un circuito del 2° ordine (2 bipoli dinamici ed eq.diff. 2° ord.) autonomo (gen.indip.cost.) e stabile ($\mathrm{Re}\{s_{1,2}\} < 0$)

ovvero α>0

7.4 Metodo sistematico per circuiti 2° ord. autonomi

1. Se le condizioni iniziali $v_C(0)$ o $i_L(0)$ non sono note, ricavarle dal circuito a regime in $t = 0^-$.

2. Sostituire ogni condensatore con un circuito aperto ed ogni induttore con un corto circuito; studiare il circuito resistivo ottenuto, ricavando il valore $x(\infty)$ della variabile desiderata.

3. Spegnere i generatori indipendenti; scrivere un'equazione differenziale *omogenea*, determinando α e ω_0.

4. La soluzione cercata è

$$\begin{aligned}
x(t) &= A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + x(\infty) && \text{per} \quad \alpha > \omega_0 \\
x(t) &= (A_1 t + A_2)\, e^{-\alpha t} + x(\infty) && \text{per} \quad \alpha = \omega_0 \\
x(t) &= e^{-\alpha t}[A_1 \cos \beta t + A_2 \operatorname{sen} \beta t] + x(\infty) && \text{per} \quad \alpha < \omega_0
\end{aligned}$$

dove s_1, s_2 e β hanno le espressioni $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ $\quad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

5. Determinare le costanti A_1 e A_2 utilizzando le condizioni iniziali ricavate al punto 1.

Sommario

- Un **circuito del secondo ordine**, talora indicato con **RLC**, è un circuito caratterizzato da due elementi dinamici e descritto da una eq.diff. del secondo ordine nella variabile $x(t)$ (tens. $v_C(t)$ o corr. $i_L(t)$).

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = y(t)$$

solo con forzanti (generatori) con valori variabili nel tempo

- In presenza di elementi dissipativi (resistori) e in assenza di elementi attivi (NO generatori dipendenti e OP-AMP), l'evoluzione libera del circuito vede l'energia inizialmente immagazzinata nei bipoli dinamici ridistribuirsi tra gli elementi dinamici e dissiparsi nel tempo. La variabile $x(t)$ passa dal suo valore iniziale a un valore finale nullo, con un andamento nel tempo che è detto **risposta libera del circuito**: $x_0(t)$.

- L'eq.diff. del 2° ord. ha **equazione caratteristica** $s^2+2\alpha s+\omega_0^2=0$
  $\alpha=1/2\tau_{1°\text{ord.}}$ è il **fattore di smorzamento** (RC o L/R in RLC serie o parallelo)
  $\omega_0^2=1/LC$ è la **pulsazione critica** o frequenza naturale non smorzata
  A seconda del segno del determinante $\Delta=\alpha^2-\omega_0^2$ (>=< 0) dell'eq.car. si hanno diverse soluzioni e il circuito ha una differente differente risposta libera $x(t)$.

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$ **radici** dell'eq.car.

Sommario

- Differenti **risposte libere $x(t)$**:

1. $\alpha > \omega_0$ → circuito **sovra-smorzato** (radici reali e negative) $s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

   risposta smorzata exp. come somma di due esponenziali decrescenti

$$x(t) = A_1 \cdot e^{s_1 t} + A_2 \cdot e^{s_2 t}$$

2. $\alpha = \omega_0$ → circuito con **smorzamento critico** (radici reali e negative coincidenti)

   risposta con picco iniziale (un MAX/MIN ma NO-oscill.) smorzata exp. $s_{1,2} = -\alpha$

$$x(t) = (A_1 t + A_2) \cdot e^{-\alpha t}$$

3. $\alpha < \omega_0$ → circuito **sovra-smorzato** (radici complesse coniugate $\mathrm{Re}[s_{1,2}]<0$)

   risposta oscillatoria smorzata exp. $s_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\beta$

$$x(t) = [A_1 \cos(\beta t) + A_2 \sin(\beta t)] \cdot e^{-\alpha t} = A\cos(\beta t + \phi) \cdot e^{-\alpha t}$$

4. $\alpha = 0$ → circuito **senza smorzamento (*lossless*)** (radici immag. pure $\mathrm{Re}[s_{1,2}]=0$)

   risposta oscillatoria ''permanente'' $s_{1,2} = \pm j\omega_0$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Sommario

- Le costanti A_1 e A_2 della risposta libera si ricavano dalle **condizioni iniziali $x(0)$ e $dx/dt(0)$**

- Se il circuito ha generatori costanti è un **circuito autonomo** per il quale l'eq.diff. del 2° ordine è ancora omogenea e la risposta transitoria è quella già studiata a cui si aggiunge una risposta permanente x_p (costante) imposta dai **generatori** che **stabiliscono** dunque il **valore di regime $x(\infty)$**:
$$x(t) = x_0(t) + x_p$$

- Se l'eq.car. della eq.diff. ha $\mathrm{Re}[s_{1,2}]>0$ $(\alpha<0)$ si ha un **circuito instabile** la cui risposta diverge esponenzialmente nel tempo (può avvenire solo per circuiti attivi, con gen.dip. o OP-AMP).

- Anche nel caso generale di generatori variabili (nel tempo) la risposta è:
$$x(t) = x_0(t) + x_p(t)$$
con una risposta di regime variabile nel tempo come imposto dai gen.