**(35 min)** **Esercizio 2**

*(svolgere su questo foglio e sul retro)*

2) Con un voltmetro integratore a doppia rampa si misura la tensione in uscita da un alimentatore a 15 V con sovrapposte due tensioni sinusoidali a 50 Hz e a 120 Hz di ampiezza variabile nel tempo. Inoltre dall'esterno si accoppiano due ulteriori disturbi con ampiezze e frequenze: $V_1$=200 μV e $f_1$=803 Hz, $V_2$=400 μV e $f_2$=1000 Hz. Il voltmetro è bipolare con portata 20 V e 20 bit. La tensione in continua all'uscita dall'alimentatore vale 15.1314 V e per questa tensione in ingresso al voltmetro la pendenza della rampa in salita eguaglia esattamente la pendenza della rampa in discesa.

2a) Quanto vale la risoluzione dimensionale $\Delta V$ e l'incertezza di quantizzazione $u_q(V)$?

2b) Si vuole ottenere una reiezione massima ai primi due disturbi (50 Hz, 120 Hz) e due valori di reiezione $r_1 \geq 40$ dB e $r_2 \geq 80$ dB ai due disturbi aggiuntivi: scegliere il minimo tempo di integrazione $T_{up}$ occorrente.

2c) Quanto vale il tempo complessivo di misura, $T_m$, della tensione in continua all'uscita dell'alimentatore utilizzando i dati ricavati nel punto precedente?

2d) Quanto vale il periodo e la frequenza dell'orologio interno (*clock*)?

2c) Se il voltmetro opera con un rumore elettronico interno con ampiezza efficace $V_{N,eff}$=$V_1$=200 μV, si calcoli il suo numero di bit equivalenti. Quanti bit si "perdono" a causa di questo rumore e quanti se ne perderebbero se l'ampiezza efficace del rumore raddoppiasse?

**2a)** La risoluzione dimensionale del voltmetro è pari alla dinamica dello strumento divisa per il suo numero di livelli e quindi:

$\Delta V = D / N = 40\ \text{V} / 2^{20} \cong \mathbf{38\ \mu V}$

L'incertezza di quantizzazione è legata ai livelli di quantizzazione (uniformi) ed è pari a:

$\boldsymbol{u_q(V)} = \Delta V / \sqrt{12} = 38\ \mu\text{V} / \sqrt{12} \cong \mathbf{11\ \mu V}$

**2b)** È possibile rendere la misura immune da disturbi a frequenza fissa utilizzando un tempo di integrazione $T_{up}$ che sia multiplo intero del periodo del disturbo (si vedano le dispense del corso).

In questo caso si vuole annullare il contributo di due frequenze: $f_a = 50$ Hz e $f_b = 120$ Hz, per cui $T_{up} = n\ T_a$ e anche $T_{up} = m\ T_b$ con $m$ e $n$ numeri interi da determinare.

Ricaviamo quindi i due numeri: $\dfrac{n}{f_a} = \dfrac{m}{f_b} \Rightarrow \dfrac{n}{m} = \dfrac{f_a}{f_b} = \dfrac{50}{120} = \dfrac{5}{12}$

Il tempo di integrazione vale dunque $\boldsymbol{T_{up}} = n\ T_a = 5 \times 20\ \text{ms} = \mathbf{100\ ms}$ (= $m\ T_b = 12 \times (1/120)\ \text{s} = \mathbf{0.1\ s}$).

La reiezione (in ampiezza) del voltmetro a integrazione ad un disturbo a frequenza $f$ vale $r = \dfrac{\pi f T_{up}}{\left|\sin\left(\pi f T_{up}\right)\right|}$

Per cui a $f_1 = 803$ Hz la reiezione vale

$$r = \frac{\pi f T_{up}}{\left|\sin\left(\pi f T_{up}\right)\right|} = \frac{\pi \times 803 \times 0.1}{\left|\sin(\pi \times 803 \times 0.1)\right|} \cong 312$$

corrispondente a circa 50 dB [$20\log_{10}(312) \cong 49.9$], che quindi già soddisfa la condizione richiesta.

Mentre per $f_2 = 1000$ Hz, essendo $f_2$ un multiplo della frequenza di 50 Hz=$f_1$ ove la reiezione è infinita (e dunque $T_2$ è un sottomultiplo di $T_1$), il voltmetro presenterà idealmente ancora una reiezione infinita.

**2c)** Il tempo complessivo di misura $T_m$ sarà pari alla somma di $T_{up}$, costante nel voltmetro a doppia rampa, e di $T_{down}$ (dipendente dal valore di tensione in ingresso al voltmetro). Essendo la pendenza in salita pari alla pendenza in discesa (per cui $V_r$=-15.1314 V=-$V_x$) il tempo di discesa sarà uguale al tempo di salita (o di integrazione) e quindi $\boldsymbol{T_m} = 2T_{up} = \mathbf{0.2\ s}$.

**2d)** Il periodo $T_{clock}$ dell'orologio interno del voltmetro può essere ricavato dalla relazione funzionale che lega la tensione in ingresso al voltmetro a doppia rampa con il tempo di discesa. Se infatti prendiamo il caso in cui la tensione in ingresso è pari alla minima tensione rilevabile (la risoluzione dello strumento), ad essa corrisponderà un singolo conteggio del *clock* dello strumento.

$\boldsymbol{T_{clock}} = -\dfrac{\Delta V_x}{V_r} T_{up} = -\dfrac{38\ \mu\text{V}}{15.1314\ \text{V}} \times (100\ \text{ms}) \cong \mathbf{250\ ns}$ corrispondenti a una frequenza $\boldsymbol{f_c} \cong \mathbf{4\ MHz}$.

In alternativa, quando il voltmetro misura $V_x$=$V_{x,MAX}$=20 V il tempo di discesa è massimo e corrisponde al massimo numero di conteggi della rampa di discesa ($N_{d,MAX}$=$N$/2=$2^{n-1}$ dato che essendo il voltmetro bipolare un bit è usato per il segno). Pertanto, con $T_d$=$T_{d,MAX}$=$N_{d,MAX}\cdot T_c$, la misura diviene $V_{x,MAX}$=-[$T_{d,MAX}/T_{up}$]= -[$(N_{d,MAX}\cdot T_c)/T_{up}$] da cui è possibile ricavare

$T_{clock}$=$T_c$= $-\dfrac{V_{x,MAX}}{V_r}\dfrac{T_{up}}{N_{d,MAX}}T = -\dfrac{20\ \text{V}}{-15.1314\ \text{V}}\dfrac{0.1\ \text{s}}{21^9}$ ≅0.25 μs e, come anche prima ottenuto, $f_c$=1/$T_c$≅4 MHz.

[2]**2e)** La risoluzione dimensionale come visto è $\Delta V = D/2^n = (40\ \text{V})/(2^{20}) \cong 38\ \mu\text{V}$.
Per ricavare il numero di bit equivalenti, utilizziamo la formula

$$n_\text{e} = n - \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{\sigma_\text{q}^2 + \sigma_\text{N}^2}{\sigma_\text{q}^2}\right) = n - \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\sigma_\text{N}^2}{\sigma_\text{q}^2}\right)$$

dove $n$ è il numero di bit, $\sigma_\text{q}^2$ è la varianza di quantizzazione e $\sigma_\text{N}^2$ è la varianza del rumore interno.
Essendo $\sigma_\text{q}^2 = u_\text{q}^2 = \frac{(\Delta V)^2}{12}$ $1.2\times10^{-10}\ \text{V}^2$ e $\sigma_\text{N}^2 = (V_\text{N,eff})^2 = 4\times10^{-8}\ \text{V}^2$ si ottiene

$$n_\text{e} = n - \frac{1}{2}\log_2(1+330) \cong 20 - 4.2 = 15.8\ \text{bit}$$

dunque a causa del rumore **si perdono 4.2 bit dei 20 bit inizialmente disponibili**.

Essendo in una condizione di lavoro con $\sigma_\text{N}^2 >> \sigma_\text{q}^2$, il numero di bit equivalenti, di fatto, non dipende più dal numero di bit di partenza ma solo dal rapporto Segnale/Rumore $\sigma_\text{S}^2/\sigma_\text{N}^2$ e varia secondo la formula $n_\text{e} = (1/2)\log_2(\sigma_\text{S}^2/\sigma_\text{N}^2)$. Nella formula precedente si è indicato con $\sigma_\text{S}^2 = D^2/12$ (e $D$ è la dinamica del convertitore A/D) la varianza o "potenza" del segnale e con $\sigma_\text{N}^2$ la varianza o "potenza" del rumore "aggiunto" (oltre alla quantizzazione). In queste condizioni di lavoro, se $\sigma_\text{N}^2$ aumenta di un fattore 4 (perché $V_\text{N,eff}$ raddoppia) si perde ulteriormente 1 bit, per un totale di **5.2 bit persi**.