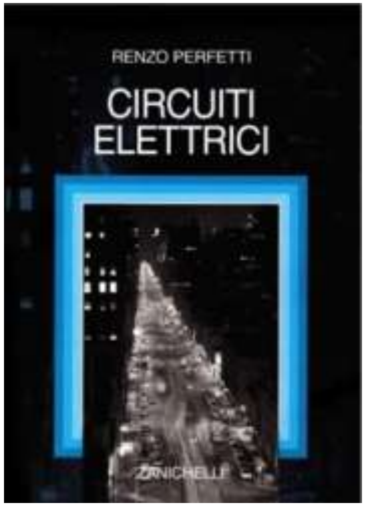


Circuiti Elettrici

Capitolo 8

Regime sinusoidale

Prof. Cesare Svelto

Regime sinusoidale – Cap. 8

8.0 Introduzione

8.1 Numeri complessi (ripasso)

8.2 Sinusoidi e fasori

8.3 Risposta del circuito all’ingresso sinusoidale
e trasformata di Steinmetz

8.4-6 Legge di Ohm simbolica (o nel dominio trasformato)
e Analisi dei circuiti con i fasori

8.7 Classificazione dei bipoli e bipoli equivalenti

8.8 Sovrapposizione di regimi sinusoidali

8.X Sommario

8.0 Introduzione

- Come in un circuito con generatori costanti a transitorio esaurito la risposta è costante, così in un circuito con generatori sinusoidali la risposta dopo il transitorio sarà in **regime sinusoidale** (permanente)

- **Energia elettrica** prodotta da machine rotanti $\Rightarrow$ $i(t)$ e $v(t)$ con andamenti sinusoidali
  Circuiti elettrici di comune impiego operano in regime sinusoidale, alimentati ad esempio dalla **tensione di rete** elettrica che è sinusoidale (in Europa a 50 Hz e 220 V di valore efficace… vedremo)

8.0 Introduzione

- In Ingegneria dell'Informazione e Ingegneria Fisica si usano **segnali elettrici** ben più complessi di una signola sinusoide… MA **l'analisi del circuito valida per una sinusoide è poi estendibile** a un insieme (somma) di molte o anche infinite componenti sinusoidali presenti al contempo

- Tramite la serie e l'integrale di Fourier anche i segnali più complessi sono scomponibili in una sommatoria di sinusoidi ($t \rightarrow f$ **con** $\mathcal{F}$ **e** $f \rightarrow t$ **con** $\mathcal{F}^{-1}$)

- Per il principio di sovrapposizione la risposta di un circuito lineare a più ingressi sinusoidali è la somma delle risposte alle single sinusoidi

8.1 Numeri complessi

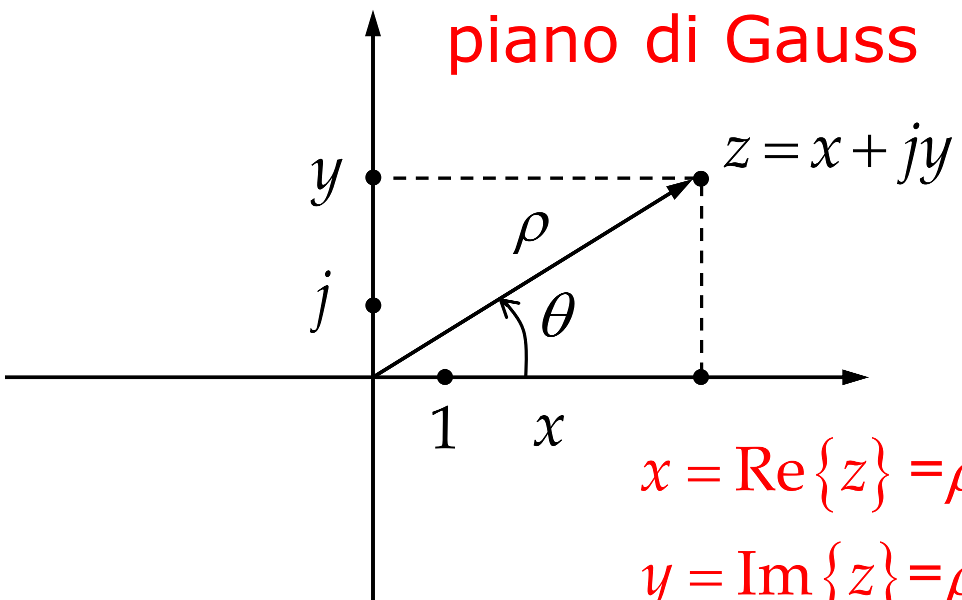
I numeri complessi, insieme $\mathbb{C}$, sono una estensione dei numeri reali e ci aiutano e risolvere equazioni che non trovano soluzione in $\mathbb{R}$

Sono anche molto utili per svolgere calcoli e rappresentazioni di grandezze fisiche e, vedremo, per eseguire operazioni con i **FASORI** che rappresentano grandezze sinusoidali attraverso numeri complessi

Unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$ anche indicata con j

Numero complesso $z = a + jb = x + jy \qquad a, b, x, y \in \Re$

8.1 Rappresentazione nel piano complesso (Ampiezza e Fase)



$x = \mathrm{Re}\{z\} = \rho\cos(\theta)$ parte reale

$y = \mathrm{Im}\{z\} = \rho\sin(\theta)$ parte immaginaria

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \geq 0$ modulo o Ampiezza

$\theta = \mathrm{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$ argomento o Fase ($\pm 90°$)

$\theta = \mathrm{atan}2(y, x)$ argomento o Fase ($\pm 180°$)

8.1 Funzione atan2

arcotangente è la funzione inversa della tangente

$$\theta = \text{atan}\left(r = \frac{y}{x}\right) \qquad \text{con} \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2 \quad (\text{e dunque } x > 0)$$

il codominio è "solo" nel 1° e 4° quadrante del piano cartesiano

"arcotangente2" e la funzione arcotangente con "codominio esteso" all'angolo giro e distingue anche angoli diametralmente opposti

$$\theta = \text{atan2}(y,x) = \begin{cases} \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \quad ; \ \text{non def. se } x = 0 \text{ e } y = 0 \\ \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y \geq 0 \quad ; \ +\frac{\pi}{2} \ \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \quad 2°Q \\ \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y < 0 \quad ; \ -\frac{\pi}{2} \ \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0 \quad 3°Q \end{cases}$$

il codominio è $\pm\pi \Rightarrow$ restituisce un angolo di Fase tra +180° e -180°

8.1 Formula di Eulero e forme z

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

FORMULA DI EULERO

numero complesso di modulo 1

(Ampiezza unitaria e Fase θ)

$$z = \underbrace{x + jy}_{\text{forma cartesiana}} = \underbrace{\rho\cos(\theta) + j\rho\sin(\theta)}_{\text{forma trigonometrica}} = \underbrace{\rho e^{j\theta}}_{\text{forma esponenziale}}$$

8.1 Somma e Differenza

$$z_1 = x_1 + jy_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$$

$$z_2 = x_2 + jy_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$$

$$z_1 \pm z_2 = \rho_1 e^{j\theta_1} \pm \rho_2 e^{j\theta_2}$$

$$z_S = z_1 + z_2 = \left[\rho_1 \cos(\theta_1) + \rho_2 \cos(\theta_2)\right] + j\left[\rho_1 \sin(\theta_1) + \rho_2 \sin(\theta_2)\right]$$

$$z_D = z_1 - z_2 = \left[\rho_1 \cos(\theta_1) - \rho_2 \cos(\theta_2)\right] + j\left[\rho_1 \sin(\theta_1) - \rho_2 \sin(\theta_2)\right]$$

$$z_S = z_1 + z_2 = \left(x_1 + jy_1\right) + \left(x_1 + jy_1\right) = \left(x_1 + x_2\right) + j\left(y_1 + y_2\right)$$

$$z_D = z_1 - z_2 = \left(x_1 + jy_1\right) - \left(x_1 + jy_1\right) = \left(x_1 - x_2\right) + j\left(y_1 - y_2\right)$$

8.1 Prodotto e Rapporto

$$z_1 = x_1 + jy_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$$

$$z_2 = x_2 + jy_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$$

$$z_\mathrm{P} = z_1 z_2 = \left(x_1 + jy_1\right)\left(x_2 + jy_2\right) = \left(x_1 x_2 - y_1 y_2\right) + j\left(x_1 y_2 + y_1 x_2\right)$$

$$z_\mathrm{R} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\left(x_1 + jy_1\right)}{\left(x_2 + jy_2\right)} = \frac{\left(x_1 + jy_1\right)}{\left(x_2 + jy_2\right)} \frac{\left(x_1 - jy_1\right)}{\left(x_2 - jy_2\right)} = \frac{\left(x_1 x_2 + y_1 y_2\right) + j\left(y_1 x_2 - x_1 y_2\right)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$z_\mathrm{P} = z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j\left(\theta_1 + \theta_2\right)}$$

$$z_\mathrm{R} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j\left(\theta_1 - \theta_2\right)}$$

8.1 Coniugato

$$z = x + jy = \rho\, e^{j\theta}$$

$$z^* = x - jy = \rho\, e^{-j\theta}$$ **COMPLESSO CONIUGATO**

$$z + z^* = 2x = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$$

$$z - z^* = j2y = 2\,\mathrm{Im}\{z\}$$

$$z\, z^* = \rho^2$$

$$\frac{z}{z^*} = e^{2j\theta}$$

8.1 Reciproco: modulo e fase

$$z = x + jy = \rho\, e^{j\theta}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{x + jy} = \rho^{-1} e^{-j\theta} = \frac{1}{\rho} e^{-j\theta}$$ **RECIPROCO**

$$\left|z^{-1}\right| = \rho^{-1} = \frac{1}{\rho} = \left|z\right|^{-1}$$ **MODULO DEL RECIPROCO**

$$-\theta$$ **FASE DEL RECIPROCO**

$$z^{-1} = \frac{1}{x + jy} = \frac{1}{x + jy}\frac{x - jy}{x - jy} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho^2}(x - jy) = \frac{z^*}{\rho^2}$$

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{\rho}$$

$$\operatorname{atan}\left(-\frac{y}{x}\right) = -\operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

8.2 Sinusoidi

Una **grandezza sinusoidale**, nel tempo t, corrisponde alla funzione

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

$A>0$ **ampiezza** della sinusoide con unità di misura della grandezza fisica rappresentata (*e.g*. V o A)
Talora A è anche detta ampiezza di picco

$\omega>0$ pulsazione o **frequenza angolare** (rad/s)

θ **fase** (rad) $[\theta_{deg} = \theta_{rad} \times (180/\pi)]$

8.2 Periodo e fequenza

Grandezza sinusoidale

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

è periodica di periodo T dato che

$x(t+T) = x(t)$ per ogni t e dunque $\omega \cdot (t+T) = \omega t + 2\pi$

$T = 2\pi/\omega > 0$ **periodo** in secondi (s)

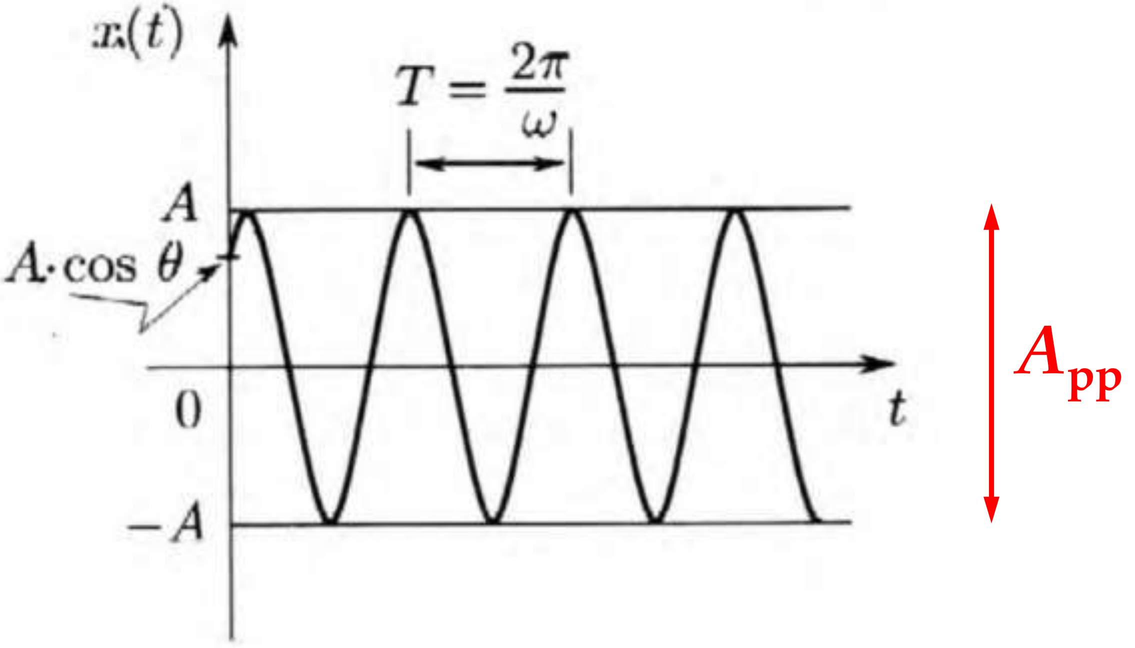
$f = 1/T > 0$ **frequenza** in hertz (Hz=s^{-1})

con una relazione tra frequenza angolare e frequenza:

$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ o anche $f = \omega/2\pi$

8.2 Andamento sinusoidale

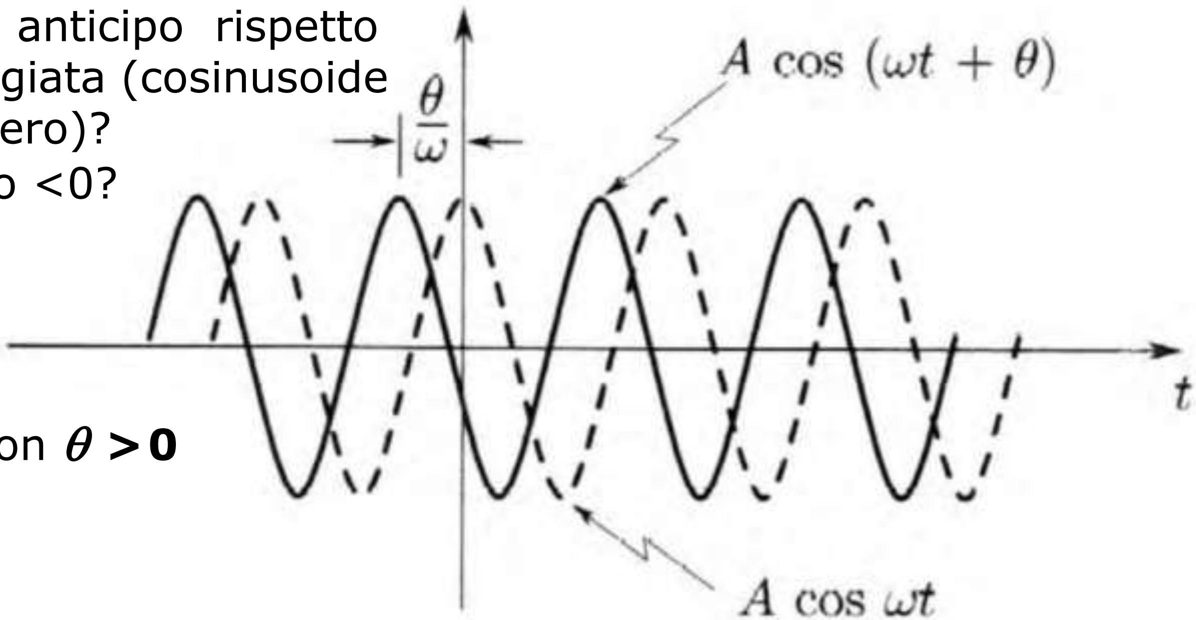
Andamento della sinusoide nel tempo con evidenziati ampiezza (A, "u.m.") e periodo (T, s) e fase (θ, rad) anche detta fase iniziale al tempo t=0



Il valore $A_{pp}=+A-(-A)=2A$ ottenuto dalla differenza tra il picco positivo (picco o cresta) e il picco negativo (valle) della sinusoide si dice **ampiezza picco-picco**

8.2 Sfasamento e ritardo/anticipo

l'onda (sinusoide) a tratto continuo è in ritardo o in anticipo rispetto a quella tratteggiata (cosinusoide a fase iniziale zero)?
la fase θ è >0 o <0?



è in **anticipo** con θ **>0**

La differenza di fase, o **"sfasamento"** θ, tra due sinusoidi con la stessa frequenza (sull'asse in radianti della fase della sinusoide), corrisponde ad una differenza di tempo, o **"ritardo"** / "anticipo" $\Delta t = \theta/\omega$, sull'asse del tempo in secondi

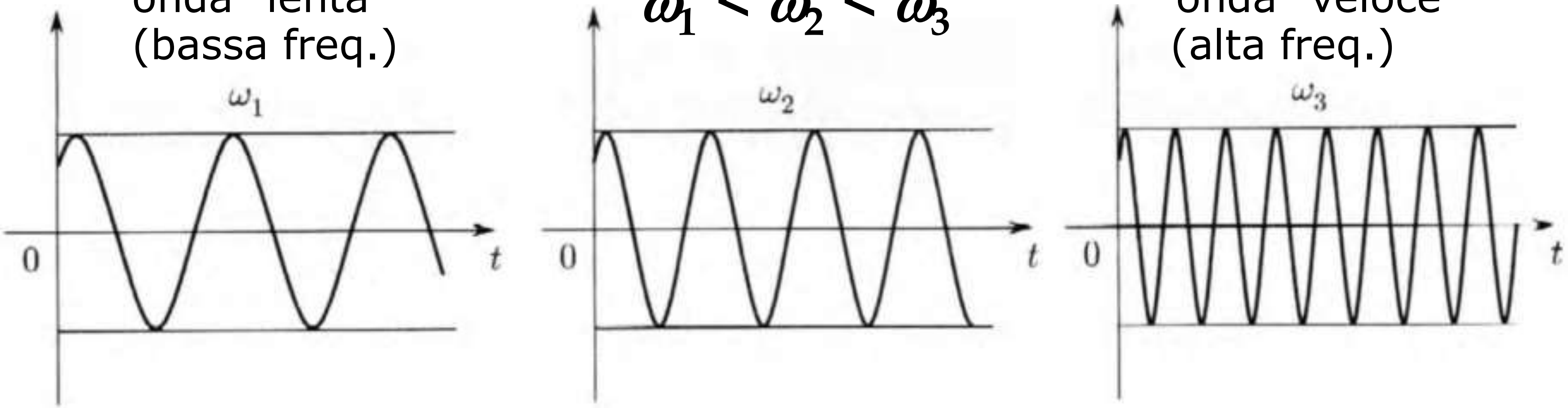
N.B. $\theta > 0 \Rightarrow$ anticipo (Δt_{SX}) e $\theta < 0 \Rightarrow$ ritardo (Δt_{DX})

8.2 Valori di frequenza

onda "lenta"
(bassa freq.)

$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$

onda "veloce"
(alta freq.)



All'aumentare/diminuire della frequenza la sinusoide oscilla più/meno rapidamente nel tempo tra valore massimo (picco) e valore minimo (valle)

frequenza di rete (elettrica) in Europa **50 Hz**

frequenze audio	20 Hz $\div$ 20 kHz
radio diffusione FM	88 $\div$ 108 MHz
segnale radio GSM	900 MHz
telecomunicazioni satellitari	10 $\div$ 40 GHz

8.2 Fasori

Una volta specificata la frequenza, una **sinusoide** è rappresentabile mediante due soli numeri (reali): **ampiezza** e **fase** (modulo e argomento) A e θ

$$A\cos(\omega t+\theta) \quad \Leftrightarrow \quad A,\theta$$

Per una grandezza sinusoidale $x(t)$, ampiezza A e fase θ possono essere visti come il modulo (ampiezza) e l'argomento (fase) di un **numero complesso** X che è il **fasore** associato alla sinusoide

$$x(t)=A\cos(\omega t+\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X}=Ae^{j\theta}$$

Il fasore è indicato da un simbolo $\mathbf{X}$ in grassetto oppure $\bar{X}$ soprasegnato (*e.g.* quando manoscritto e il grassetto non è visualizzabile)

8.2 Fasori

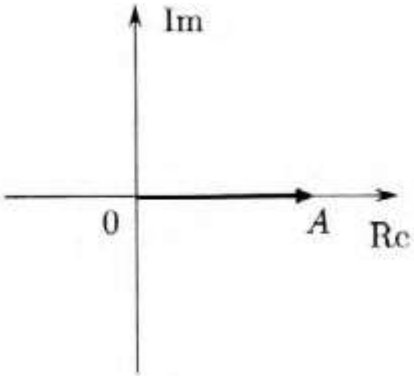
Fissata la frequenza, ad ogni sinusoide corrisponde un solo fasore e viceversa (vi è corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle grandezze sinusoidali a una data frequenza e l'insieme dei numeri complessi e fasori)

DEF. **Data una sinusoide di ampiezza A e fase θ si dice fasore associato alla sinusoide il numero complesso di modulo A e argomento θ**

Vediamo degli esempi:

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

$$\mathbf{X} = Ae^{j0°} = A$$



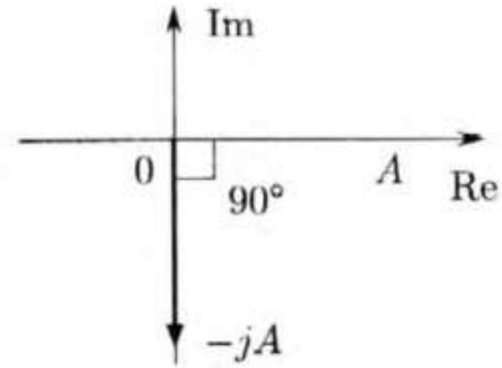
il fasore è rappresentabile come il vettore che parte dall'origine del piano complesso e ha coordinata radiale ρ (modulo) e coordinate angolare θ (fase)

8.2 Fasori

$$x(t) = A\sin(\omega t) = A\cos(\omega t - 90°)$$

$$\mathbf{X} = Ae^{-j90°} = -jA$$

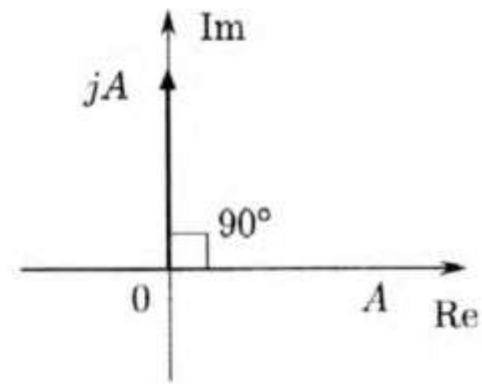
seno è in ritardo su coseno (di 90°)



$$x(t) = -A\sin(\omega t) = A\cos(\omega t + 90°)$$

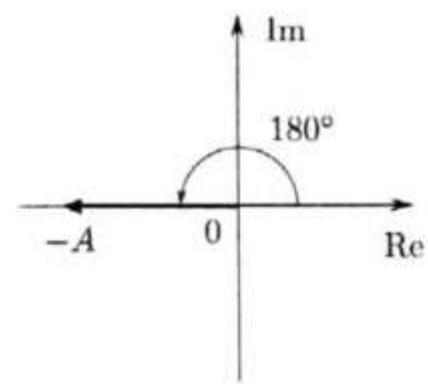
$$\mathbf{X} = Ae^{j90°} = jA$$

"-sin" è in anticipo su cos (di 90°)



$$x(t) = -A\cos(\omega t + \theta) = A\cos(\omega t + 180°)$$

$$\mathbf{X} = Ae^{j180°} = -A$$



8.2 Legame tra fasori e sinusoidi

Sinusoide	*Fasore*
$A\cos\omega t$	A
$A\,\mathrm{sen}\,\omega t$	$-jA$
$-A\,\mathrm{sen}\,\omega t$	jA
$-A\cos\omega t$	$-A$

Il **legame analitico** tra la sinusoide e il suo fasore è:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta) = \mathrm{Re}\left\{Ae^{j(\omega t+\theta)}\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{Ae^{j\theta}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{X}e^{j\omega t}\right\}$$

$x(t)$ è funzione del tempo e questa dipendenza è nel fattore $e^{j\omega t}$: la rappresentazione fasoriale elimina (sottointende) la dipendenza temporale e opera in un "dominio trasformato"

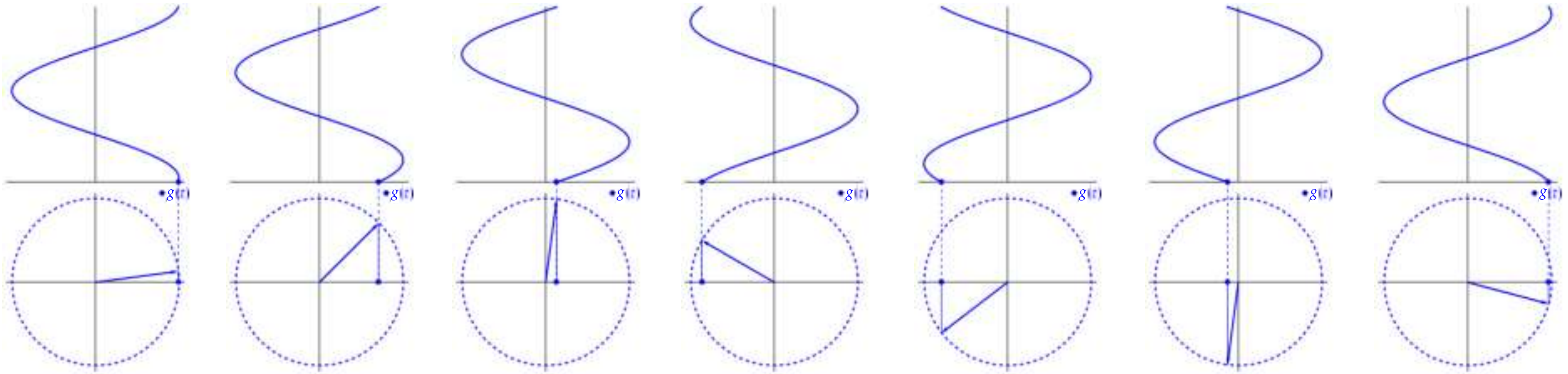
8.2 Fasore "rotante" nel piano complesso e sua parte reale

$$g(t) = x(t) = \mathrm{Re}\left\{ \mathbf{X} e^{j\omega t} \right\}$$

grandezza fisica

rotazione antioraria con periodo $T = 2\pi / \omega$

ampiezza e fase del **vettore** (ampiezza e fase della **cosinusoide**)



andamento nel tempo: parte reale (proiezione sull'asse x) del fasore rotante

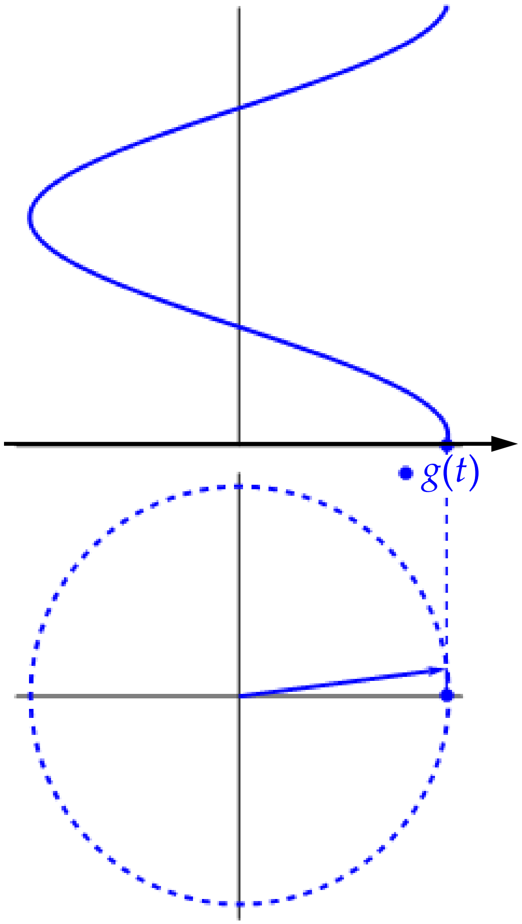
8.2 Fasore "rotante" nel piano complesso e sua parte reale

$$g(t) = x(t) = \mathrm{Re}\left\{ \mathbf{X} e^{j\omega t} \right\}$$

grandezza fisica

ampiezza e fase del **vettore**
(ampiezza e fase della **cosinusoide**)

rotazione antioraria
con periodo $T = 2\pi / \omega$



andamento nel tempo: parte reale
(proiezione sull'asse x) del fasore rotante

8.2 Operazioni con i fasori

Moltiplicazione per una costante:

$$y(t) = kx(t) = kA\cos(\omega t + \theta) \Leftrightarrow \boldsymbol{Y} = k\boldsymbol{X}$$

Somma/differenza:

$$y(t) = A_1\cos(\omega t + \theta_1) \pm A_2\cos(\omega t + \theta_2) \Leftrightarrow \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X_1} \pm \boldsymbol{X_2}$$

Derivata:

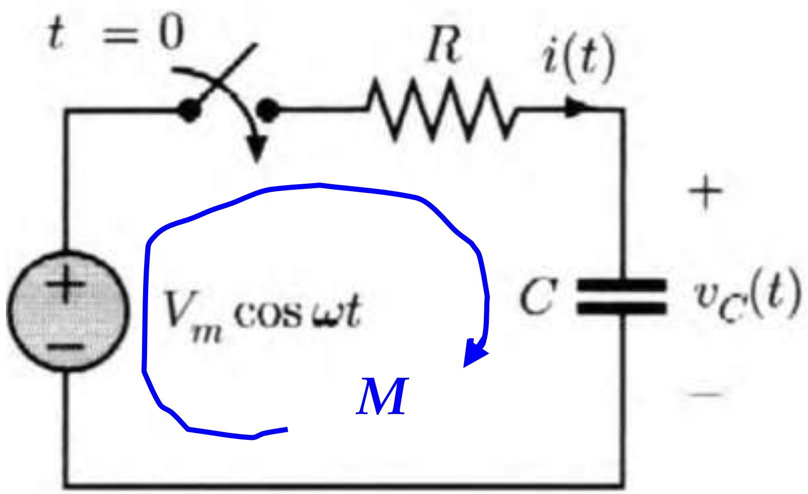
anche ricordando che $\sin(\omega t) \Leftrightarrow -j$

$$y(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\cos(\omega t + \theta) = -A\omega\sin(\omega t + \theta) =$$

$$= \omega A\cos(\omega t + \theta + 90°) \Leftrightarrow \boldsymbol{Y} = j\omega\boldsymbol{X}$$

8.3 Risposta a ingresso sinusoidale

Riconsideriamo circuito RC ora con ingresso sinusoidale:



KVL alla maglia *M*

$$\tau = RC$$

$$Ri(t) + v_C(t) = V_m \cos(\omega t)$$

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = V_m \cos(\omega t)$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v_C(t) = \frac{1}{\tau} V_m \cos(\omega t)$$

eq. diff. 1° ord. non omogenea

transitorio imposto dalla condizione iniziale

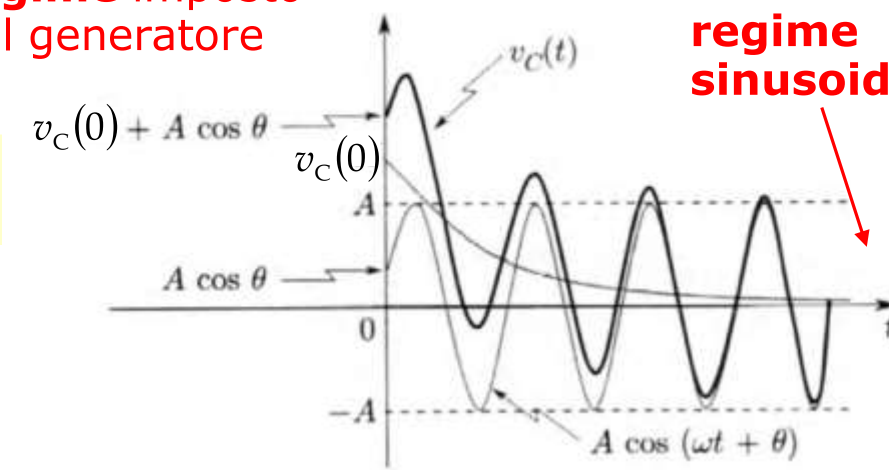
regime imposto dal generatore

soluzione

$$v_C(t) = v_C(0) e^{-t/\tau} + A\cos(\omega t + \theta)$$

risposta iniziale

risposta permanente



regime sinusoidale

8.3 Risposta a ingresso sinusoidale

Quando $t \to \infty$ la tensione su C diviene $v_C(t) = A\cos(\omega t + \theta)$

Per ricavare la risposta permanente sostituiamo questo andamento di regime nella eq.diff. e troviamo A e θ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[A\cos(\omega t + \theta)\right] + \frac{1}{\tau} A\cos(\omega t + \theta) = \frac{1}{\tau} V_\mathrm{m}\cos(\omega t)$$

Il calcolo è più agevole utilizzando i fasori: $v_C(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{V}_C$

$$j\omega \boldsymbol{V}_C + \frac{1}{\tau}\boldsymbol{V}_C = \frac{1}{\tau} V_\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V}_C = \frac{V_\mathrm{m}}{1 + j\omega\tau}$$

$$A = \left|\boldsymbol{V}_C\right| = \frac{V_\mathrm{m}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \quad \text{e} \quad \theta = \angle\left(\boldsymbol{V}_C\right) = 0 - \arctan(\omega\tau)$$

$$v_C(t) = \frac{V_\mathrm{m}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\cos\left(\omega t - \arctan(\omega\tau)\right)$$

soluzione ricavata risolvendo una equazione algebrica

8.3 Risposta a ingresso sinusoidale

Ricaviamo le altre grandezze del circuito a regime

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_\mathrm{C}(t) = j\omega C\frac{V_\mathrm{m}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\cos(\omega t - \arctan(\omega\tau))$$

$$v_\mathrm{R}(t) = Ri(t) = j\omega RC\frac{V_\mathrm{m}}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}\cos(\omega t - \arctan(\omega\tau))$$

tutte le grandezze sono sinusoidali con pulsazione ω

Il circuito è in regime sinusoidale quando tutte le tensioni e correnti sono sinusoidali a pulsazione ω

<u>In ogni circuito lineare stabile con generatori sinusoidali si ottiene una soluzione di regime sinusoidale (puls. ω)</u>

Circuito risolvibile come **circuito resistivo** nel dominio trasformato dei **fasori** (Charles **Steinmetz**, 1893)

8.4 Legge di Ohm simbolica

In regime sinusoidale tutte le $v(t)$ e $i(t)$ sono sinusoidali e così avviene per i e v degli elementi passivi R, L, e C

Possiamo scrivere le **relazioni caratteristiche** nel **dominio del tempo** o nel **dominio dei fasori**:

resistore	induttore	condensatore	
$v_\mathrm{R}(t) = R i_\mathrm{R}(t)$	$v_\mathrm{L}(t) = L \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$	$i_\mathrm{C}(t) = C \dfrac{\mathrm{d}v_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{d}t}$	
$\boldsymbol{V}_\mathbf{R} = R\,\boldsymbol{I}_\mathbf{R}$	$\boldsymbol{V}_\mathbf{L} = j\omega L\,\boldsymbol{I}_\mathbf{L}$	$\boldsymbol{I}_\mathbf{C} = j\omega C\,\boldsymbol{V}_\mathbf{C}$	***R e G* sono reali *Z e Y* complessi**

dominio dei fasori ottenuto con la trasformata di Steinmetz

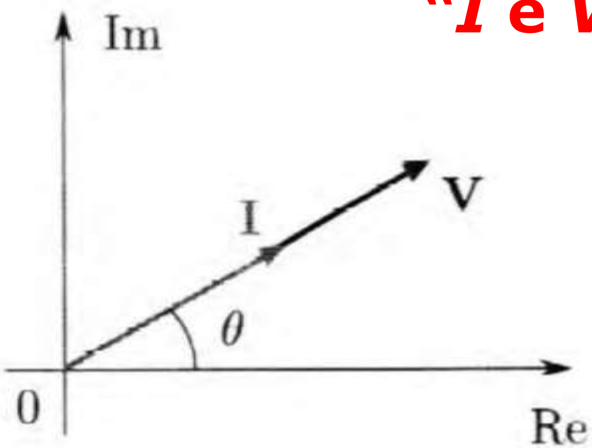
$\boldsymbol{V}_\mathbf{R} = \boldsymbol{Z}_\mathbf{R}\,\boldsymbol{I}_\mathbf{R}$	$\boldsymbol{V}_\mathbf{L} = \boldsymbol{Z}_\mathbf{L}\,\boldsymbol{I}_\mathbf{L}$	$\boldsymbol{V}_\mathbf{C} = \boldsymbol{Z}_\mathbf{C}\,\boldsymbol{I}_\mathbf{C}$	*Z=V/I* è la **IMPEDENZA**
$\boldsymbol{I}_\mathbf{R} = \boldsymbol{Y}_\mathbf{R}\,\boldsymbol{V}_\mathbf{R}$	$\boldsymbol{I}_\mathbf{L} = \boldsymbol{Y}_\mathbf{L}\,\boldsymbol{V}_\mathbf{L}$	$\boldsymbol{I}_\mathbf{C} = \boldsymbol{Y}_\mathbf{C}\,\boldsymbol{V}_\mathbf{C}$	*Y=I/V*=1/ *Z* è la **AMMETTENZA**

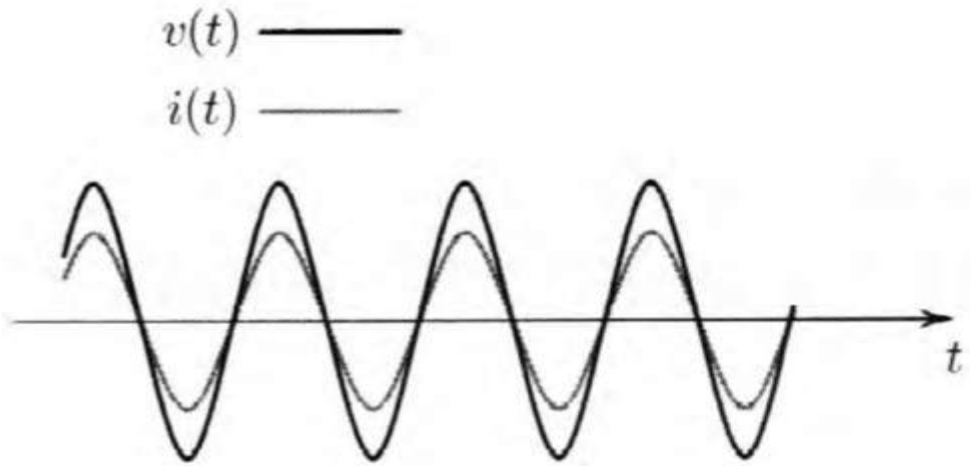
8.4 Relazioni i-v nel resistore

Nel piano complesso, i fasori $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{I}$ sono allineati: $\angle \boldsymbol{Z}=\theta_v-\theta_i=0$
Nel tempo, **corrente e tensione** sono allineate o **"in fase"**

$$\boxed{\boldsymbol{V}=R\boldsymbol{I}} \Rightarrow |\boldsymbol{V}|=R|\boldsymbol{I}| \quad \text{e} \quad \angle\boldsymbol{V}=\angle\boldsymbol{I}$$

"*I* e *V* ruotano insieme"





Il valore della fase, o fase iniziale, dipende dalla scelta del riferimento temporale cioè da dove si pone $t=0$
E' il valore di θ nella funzione cosinusoidale $\cos(\omega t+\theta)$

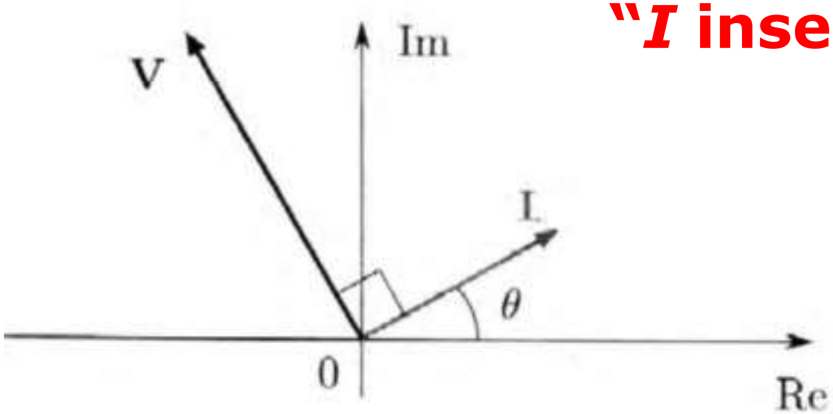
8.4 Relazioni i-v nell'induttore

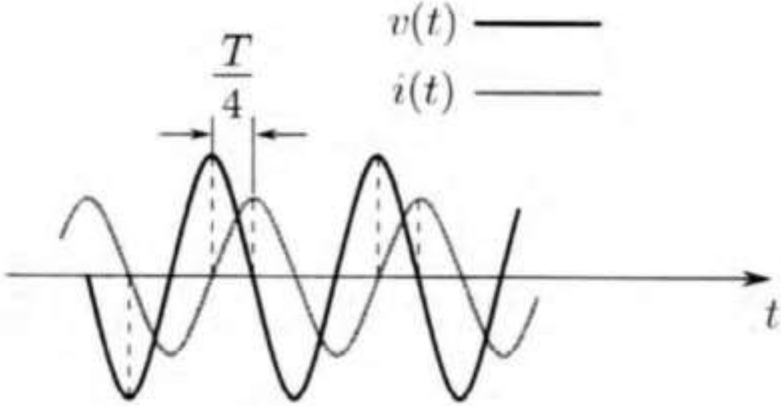
Nel piano complesso, $\boldsymbol{I}$ è ruotato di -90° su $\boldsymbol{V}$: $\angle \mathbf{Z}=\theta_v-\theta_i=+90°$

Nel tempo, **corrente** è **sfasata rispetto a tensione** di **$-90°$**

$$\boxed{\boldsymbol{V} = j\omega L \boldsymbol{I}} \Rightarrow |\boldsymbol{V}| = \omega L |\boldsymbol{I}| \quad \text{e} \quad \angle \boldsymbol{I} = \angle \boldsymbol{V} - 90°$$

"I* insegue *V"





Corrente e tensione sono **in quadratura**: una si annulla quando l'altra raggiunge il massimo in valore assoluto

La **corrente è in ritardo** rispetto alla tensione (-90°)

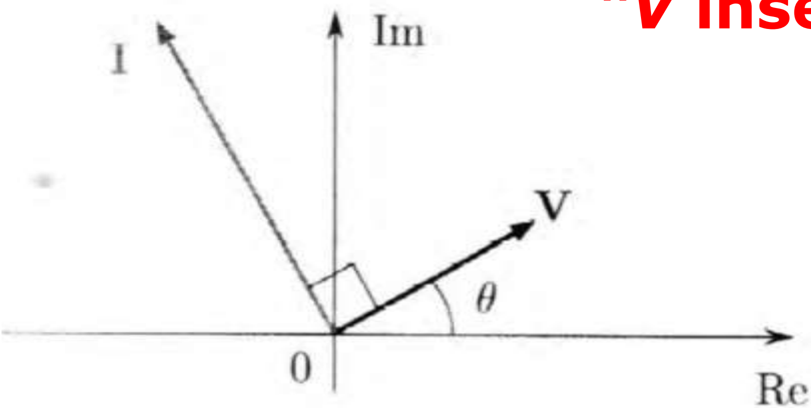
8.4 Relazioni i-v nel condensatore

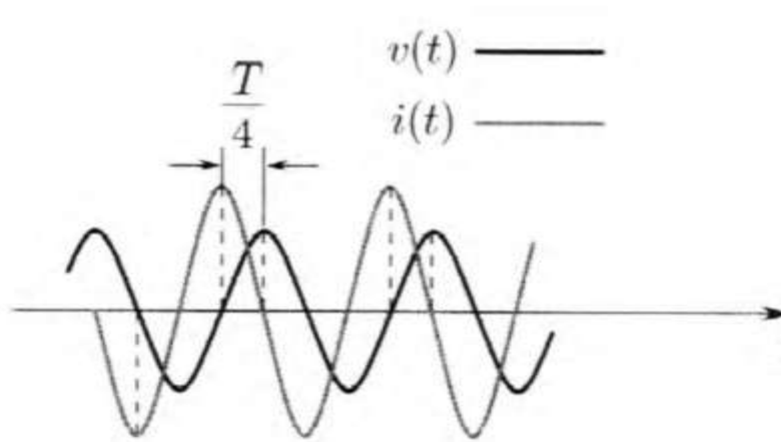
Nel piano complesso, I è ruotato di +90° su V: $\angle Z=\theta_v-\theta_i=-90°$

Nel tempo, **corrente** è **sfasata rispetto a tensione** di **+90°**

$$\boxed{I = j\omega C V} \quad \Rightarrow \quad |I| = \omega C|V| \quad \text{e} \quad \angle I = \angle V + 90°$$

"V insegue I"





Corrente e tensione sono **in quadratura**: una si annulla quando l'altra raggiunge il massimo in valore assoluto

La **corrente è in anticipo** rispetto alla tensione (+90°)

8.4 Impedenza e Ammettenza

IMPEDENZA

$$Z = \frac{V}{I}$$

in ohm (Ω)

AMMETTENZA

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V}$$

in siemens (S)

L'**impedenza** è il rapporto tra due fasori (V **su** I), dunque è un **numero complesso** <u>ma non è un fasore!</u>

$Z = R$	resistore	$Y = 1/R = G$
$Z = j\omega L$	induttore	$Y = \frac{1}{j\omega L}$
$Z = \frac{1}{j\omega C}$	condensatore	$Y = j\omega C$

8.4 Impedenza e Ammettenza

Per l’induttore e il condensatore, consideriamo i valori limite di impedenza e ammettenza per $\omega \to 0$ e $\omega \to \infty$

in “continua”

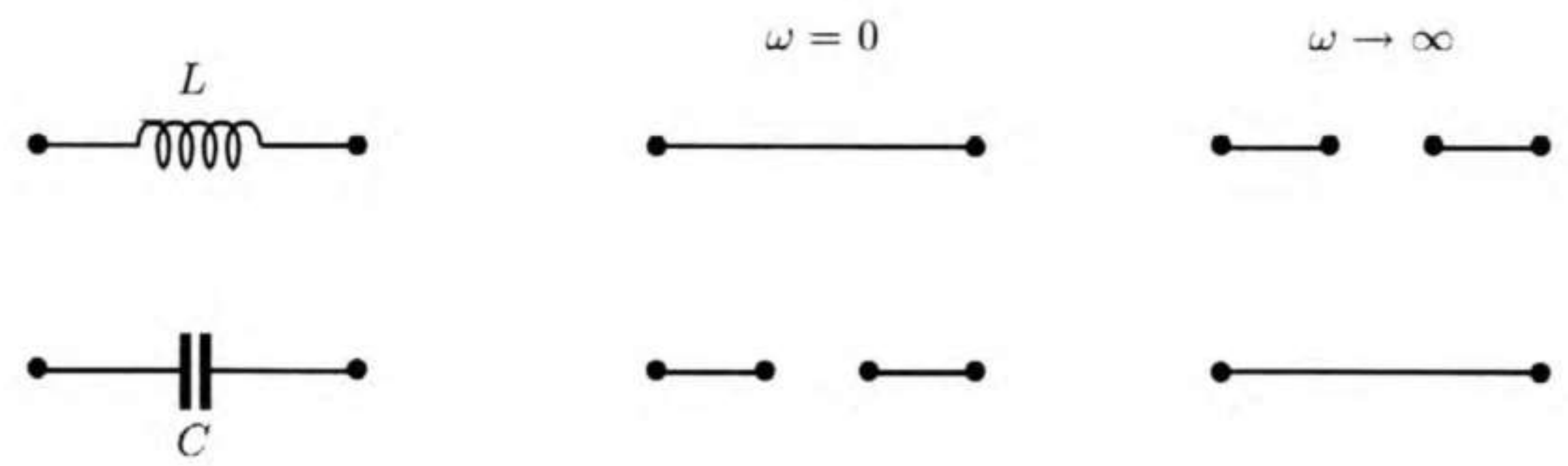
per $\omega \to 0$ $\quad V_L = j\omega L I = 0 \quad \forall\, I \Rightarrow$ **L è corto circuito**

$I_C = j\omega C V = 0 \quad \forall\, V \Rightarrow$ **C è circuito aperto**

per $\omega \to \infty$ $\quad I_L = (1/j\omega L) V = 0 \quad \forall\, V \Rightarrow$ **L è circuito aperto**

$V_C = (1/j\omega C)\, I = 0 \quad \forall\, I \Rightarrow$ **C è corto circuito**

in “alta frequenza”



8.5 Risoluzione circuiti con i fasori

Come R, L, e C hanno una relazione caratteristica in termini di fasori, lo stesso vale anche per gli altri elementi resistivi studiati:

generatore controllato

$x(t)=k\cdot y(t)$ dove k è una costante mentre $x(t)$ e $y(t)$ sono correnti o tensioni sinusoidali di pulsazione ω allora $\boldsymbol{X}=k\cdot\boldsymbol{Y}$ e se ad esempio consideriamo $v(t)=k\cdot i(t)$ con i fasori diviene: $\boldsymbol{V}=k\cdot\boldsymbol{I}$

amplificatore operazionale (OP-AMP)

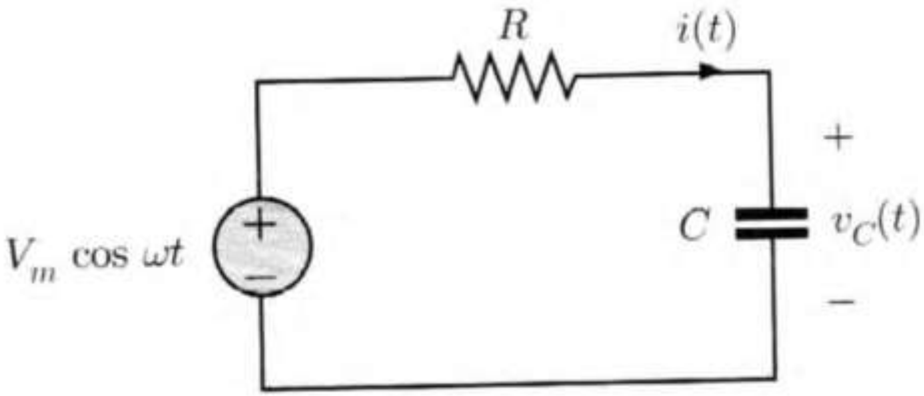
$v_{\mathrm{d}}(t) = v_{+}(t) - v_{-}(t) = 0$ e $i_{+}(t) = i_{-}(t) = 0$

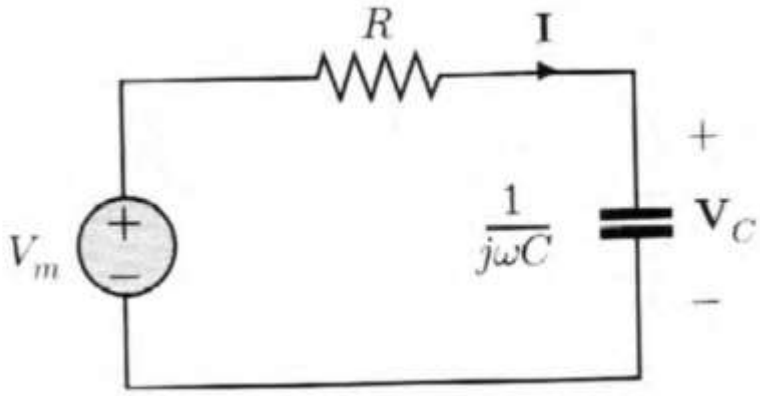
con i fasori diviene: $\boldsymbol{V}_{\mathrm{d}}=0$ e $\boldsymbol{I}_{+}=\boldsymbol{I}_{-}= 0$

Quindi **si utilizzano le Leggi di Kirchhoff, ancora valide per i fasori**: **KCL** $\sum_n I_n = 0$ e **KVL** $\sum_m V_m = 0$

8.5 Risposta RC con i fasori

Con la trasformata di Steinmetz passiamo al **circuito trasformato nel dominio dei fasori** (circuito simbolico)





Da KVL $V_\mathrm{m} = R\boldsymbol{I} + \dfrac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I}$ e dunque $\boldsymbol{I} = \dfrac{V_\mathrm{m}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}}$

Quindi $\boldsymbol{V}_\mathrm{C} = \dfrac{1}{j\omega C}\boldsymbol{I} = \dfrac{\dfrac{1}{j\omega C}V_\mathrm{m}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \dfrac{V_\mathrm{m}}{1 + j\omega RC}$

soluzione algebrica, senza avere neanche scritto le eq.diff.

8.5 Risoluzione circuiti con i fasori

Algoritmo risolutivo di un circuito "in ac-sin" con i fasori:

1. Sostituire ogni generatore indipendente di pulsazione ω con un generatore di valore costante, pari al fasore corrispondente.

2. Sostituire ogni variabile (tensione o corrente) con il fasore corrispondente.

3. Sostituire ogni condensatore di capacità C con un bipolo di impedenza $1/(j\omega C)$, ed ogni induttore di induttanza L con un bipolo di impedenza $j\omega L$.

4. Analizzare il circuito così ottenuto alla stregua di un circuito resistivo, ricavando i fasori delle grandezze desiderate.

5. Ricavare le grandezze sinusoidali con la legge di antitrasformazione dei fasori:

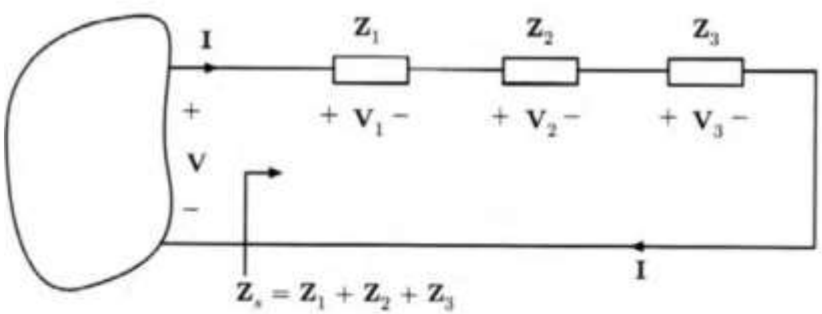
$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{Ae^{j\theta}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{Xe^{j\omega t}\right\}$$

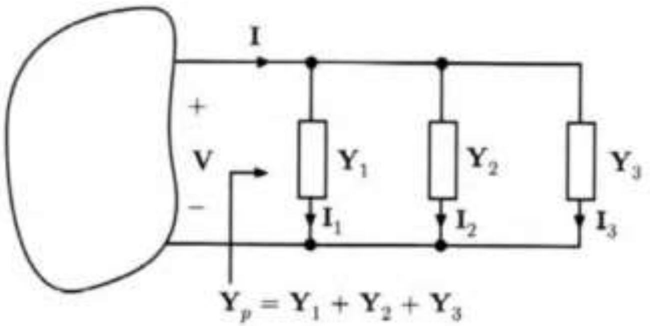
$$\mathbf{X} = A\exp(j\theta) \quad \Rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega t + \theta) \qquad (9.58)$$

8.6 Analisi nel dominio dei fasori

Un circuito dinamico, mediante la trasformata di Steinmetz, è analizzabile come un circuito resistivo con gli **elementi dinamici formalmente descritti dalla legge di Ohm simbolica**: $V = Z\, I$

Combinazione *N* bipoli/impedenze in serie e in parallelo:





$$Z_s = \sum_{m=1}^{N} Z_m$$

somma di impedenze

$$Y_p = \sum_{n=1}^{N} Y_n$$

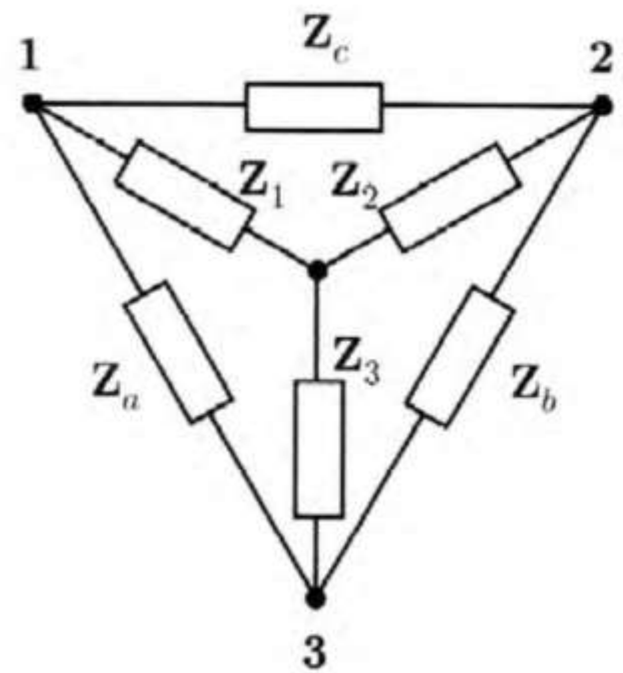
somma di ammettenze

$$Z_p = \frac{1}{Y_p} = 1 \Big/ \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{Z_n} \right)$$

$$Z_{p, Z_1 // Z_2} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

8.6 Trasformazioni stella-triangolo

All’occorrenza, con le stesse formule viste per le resistenze, è possibile trasformare **impedenze** da configurazione a **stella** a configurazione a **triangolo** e viceversa



triangolo→stella

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{Z}_a\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{Z}_b\mathbf{Z}_c}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c}$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_a\mathbf{Z}_b}{\mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b + \mathbf{Z}_c}$$

stella→triangolo

$$\mathbf{Y}_a = \frac{\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_3}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}$$

$$\mathbf{Y}_b = \frac{\mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_3}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}$$

$$\mathbf{Y}_c = \frac{\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_3}$$

8.6 Analisi nodale e sovrapposizione

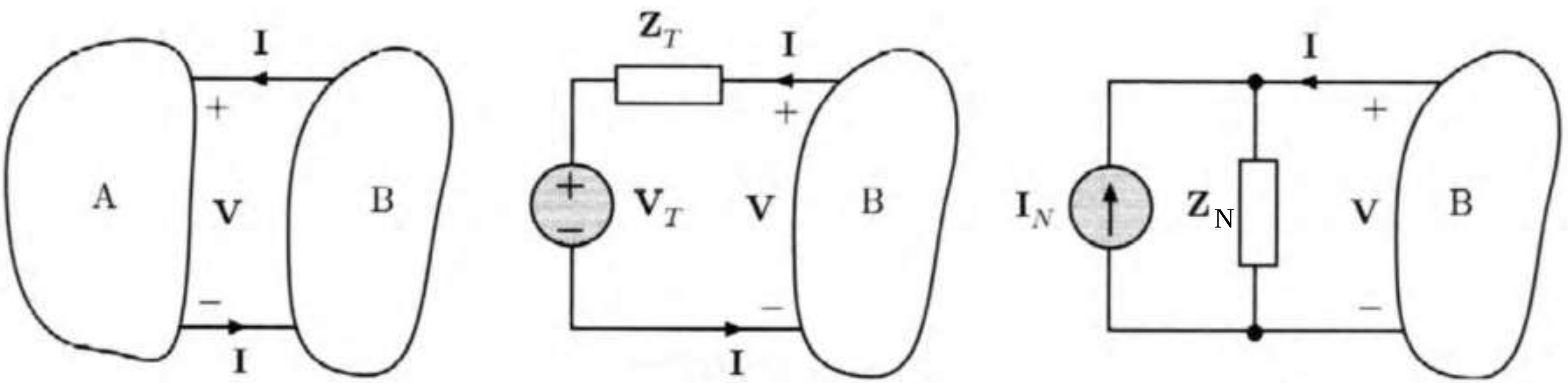
La stessa **analisi nodale** (ai nodi e alle maglie) vista per i circuiti resistivi, vale anche per i circuiti in regime sinusoidale: **corrente e tensione ora sono fasori** e **i bipoli hanno una impedenza complessa**

Il circuito si può risolvere con il sistema di equazioni che origina dalle leggi di Kirchhoff e dalle relazioni costitutive (simboliche / fasoriali) dei suoi bipoli o come vedremo anche con **semplificazioni e sostituzioni di bipoli** equivalenti: Thevenin e Norton

Grazie alla legge di Ohm simbolica, i circuiti dinamici trasformati sono trattabili come circuiti "resitivi" lineari
Vale dunque la **sovrapposizione degli effetti**
(per generatori con la stessa frequenza: una sola f e ω)

8.6 Teoremi di Thevenin e Norton

In **regime sinusoidale** un circuito lineare “A” a due terminali può essere sostituito dall’equivalente di **Thevenin** (**generatore di tensione sinusoidale** V_T con una impedenza Z_T=Z_{eq} in **serie**) oppure eq. di **Norton** (**generatore di corrente sinusoidale** I_N con una impedenza Z_N= Z_{eq} in **parallelo**)



Tensione a vuoto V_T **e corrente** di corto circuito I_N sono dei **fasori** mentre Z_T= Z_N= Z_{eq} è un’**impedenza**

8.7 Rappresentazione bipoli in *V*

Tensione ai capi di un **bipolo equivalente**:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Z}_{\mathrm{T}}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}$$

spenti i gen.indip., $\boldsymbol{V}_{\mathrm{T}}=0$ e relazione $\boldsymbol{I}$-$\boldsymbol{V}$ lineare

Parleremo di **impedenza ai capi di un bipolo** anche equivalente (purché spenti i generatori indipendenti) come numero complesso ottenuto dal **rapporto tra il fasore della tensione** $\boldsymbol{V}=V_{\mathrm{m}}\angle\theta_v$ e **il fasore della corrente** $\boldsymbol{I}=I_{\mathrm{m}}\angle\theta_i$:

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{I}} = \frac{V_{\mathrm{m}}}{I_{\mathrm{m}}}\angle\left(\theta_v - \theta_i\right)$$

Il modulo di Z è $V_{\mathrm{m}}/I_{\mathrm{m}}$ mentre la fase di Z è $(\theta_v\text{-}\theta_i)$

8.7 Impedenza dei bipoli (resistenza e reattanza)

L'impedenza è l'**equazione caratteristica del bipolo (in *V*)** in regime sinusoidale, e fornisce da sola la relazione tensione-corrente ai capi del bipolo stesso

Esprimendo Z complessa in forma rettangolare:

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

parte reale R **resistenza (Ω)**

parte immaginaria X **reattanza (Ω)**
- **>0 ⇒ bipolo induttivo**
- **<0 ⇒ bipolo capacitivo**

resistore	$\mathbf{Z} = R$	$R = R$	$X = 0$
induttore	$\mathbf{Z} = j\omega L$	$R = 0$	$X = \omega L > 0$
condensatore	$\mathbf{Z} = \frac{1}{j\omega C}$	$R = 0$	$X = -\frac{1}{\omega C} < 0$

8.7 Classificazione dei bipoli

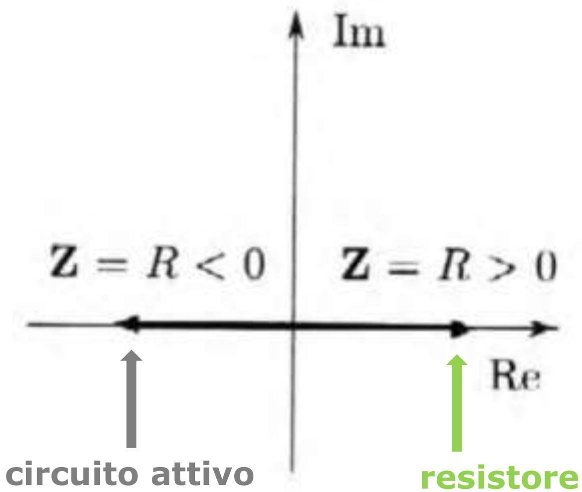


Figura 9.53 Impedenza di bipoli resistivi.

giace sull'asse reale

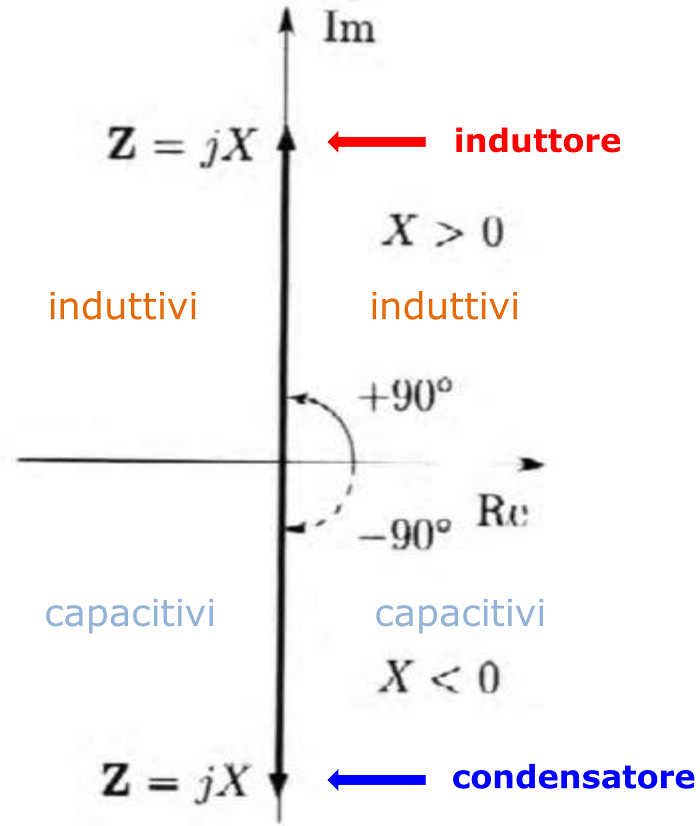
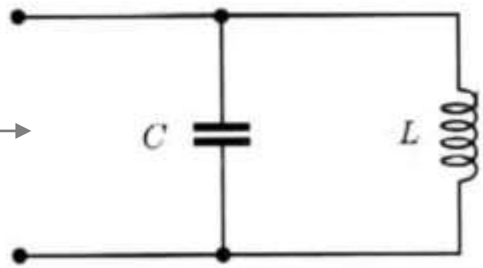


Figura 9.54 Impedenza di bipoli reattivi.

giace sull'asse immaginario

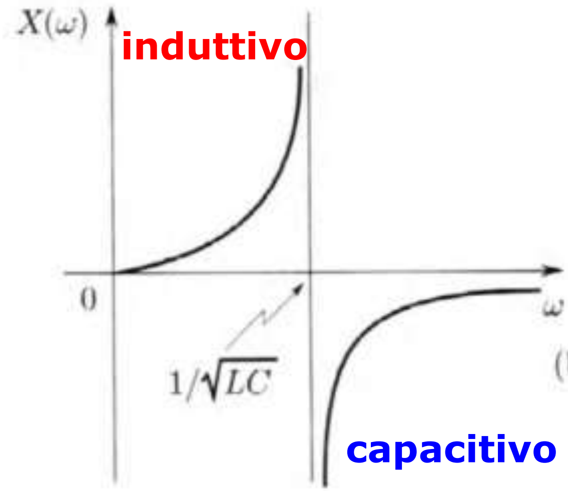
bipoli resistivi	$\mathbf{Z} = R$
bipoli reattivi	$\mathbf{Z} = jX$
bipoli induttivi	$X > 0$
bipoli capacitivi	$X < 0$

8.7 Esempio di bipolo reattivo



(a)

$$Z = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C}$$



(b)

Un esempio di bipolo reattivo è mostrato in Figura 9.55a; l'impedenza è:

$$\mathbf{Z} = \frac{j\omega L \dfrac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} = j\frac{-L/C}{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}$$

ricordiamo che

$\mathbf{1/j = j^{-1} = j/(-1) = -j}$

In Figura 9.55b è mostrato l'andamento della reattanza in funzione di ω. Il bipolo in Figura 9.55a è induttivo se $\omega L < 1/\omega C$, ovvero se $\omega < 1/\sqrt{LC}$, altrimenti è di tipo capacitivo. La variazione delle impedenze con la frequenza ha notevoli conseguenze pratiche, come per esempio la realizzazione dei *filtri* (*capitolo 13*).

In generale, l'impedenza di un bipolo è una funzione complicata dei valori di tutti gli elementi e della frequenza.

8.7 Rappresentazione bipoli in $\boldsymbol{I}$

Corrente ai capi di un bipolo equivalente:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Y}_\mathrm{N}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{I}_\mathrm{N}$$

spenti i gen.indip., $\boldsymbol{I}_\mathrm{N}=0$ e relazione $\boldsymbol{I}$-$\boldsymbol{V}$ lineare

Parleremo di **ammettenza ai capi di un bipolo** anche equivalente (purché spenti i generatori indipendenti) come numero complesso ottenuto dal **rapporto tra il fasore della corrente** $\boldsymbol{I}=I_\mathrm{m}\angle\theta_i$ e **il fasore della tensione** $\boldsymbol{V}=V_\mathrm{m}\angle\theta_v$:

$$\boldsymbol{Y} = \frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{V}} = \frac{I_\mathrm{m}}{V_\mathrm{m}}\angle(\theta_i - \theta_v)$$

Il modulo di Y è $I_\mathrm{m}/V_\mathrm{m}$ mentre la fase di Y è $(\theta_i-\theta_v)$

8.7 Ammettenza dei bipoli (conduttanza e suscettanza)

L'**ammettenza** è l'**equazione caratteristica (in $\boldsymbol{I}$) del bipolo** in regime sinusoidale, fornendo da sola la relazione corrente-tensione ai capi del bipolo

Esprimendo $\boldsymbol{Y}$ complessa in forma rettangolare:

$$\boldsymbol{Y} = G + jB$$

parte reale G **conduttanza (S)**

parte immaginaria B **suscettanza (S)** **<0 ⇒ bipolo induttivo**; **>0 ⇒ bipolo capacitivo**

resistore	$\boldsymbol{Y} = 1/R$	$G = 1/R$	$B = 0$
induttore	$\boldsymbol{Y} = \dfrac{1}{j\omega L}$	$G = 0$	$B = -\dfrac{1}{\omega L}$
condensatore	$\boldsymbol{Y} = j\omega C$	$G = 0$	$B = \omega C$

8.7 Relazioni tra impedenza e ammettenza *et al.*

(resistenza e reattanza ←→ conduttanza e suscettanza)

L’ammettenza è il reciproco dell’impedenza (e viceversa) dunque se uguagliamo i due numeri complessi:

$$\boldsymbol{Y} = G + jB = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

In generale, per conduttanza e suscettanza deve essere

R e G concordi (positive)

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

X e B sono discordi

Dunque nel caso generale

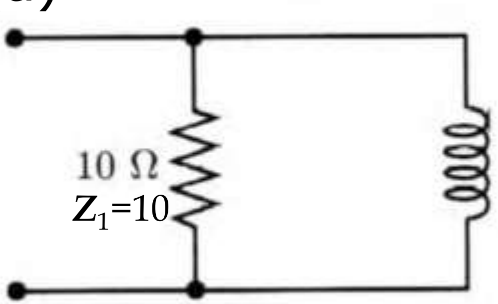
$G \neq 1/R$ (solo per un bipolo resistivo G=$1/R$, essendo X=0)

$B \neq -1/X$ (solo per un bipolo reattivo B=$-1/X$, essendo R=0)

8.7 Bipoli equivalenti

Fissata la frequenza di lavoro (ω) in regime sinusoidale è possibile ottenere uno specifico valore di impedenza ($\mathbf{Z}=R+jX$) combinando tra loro bipoli dinamici (L o C) e bipoli adinamici (R), anche differenti

(a)



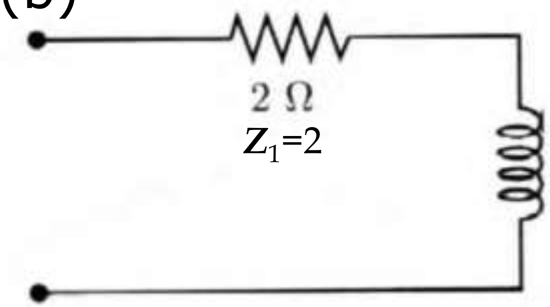
esempio

$\omega = 10^3 \mathrm{rad/s}$

$\Longleftrightarrow$

$\mathbf{Z}=(2+j4)\ \Omega$

(b)

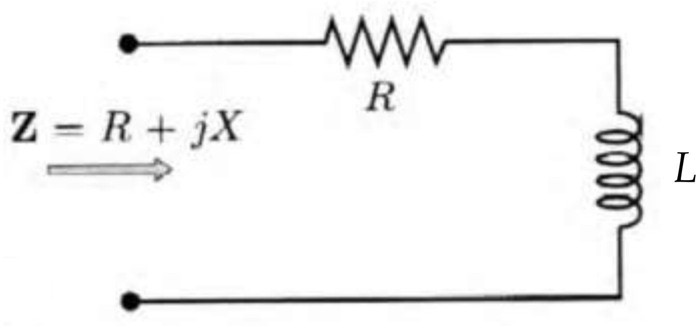


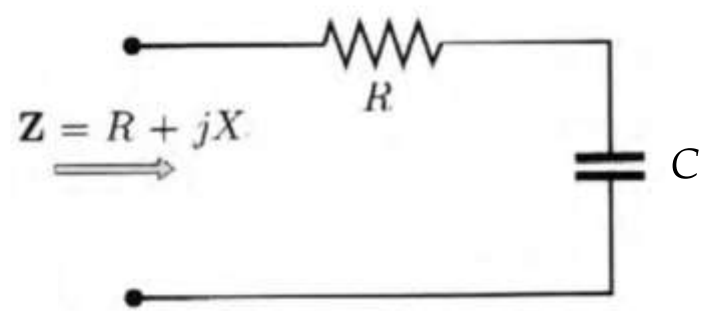
$$\mathbf{Z}_\mathrm{a} = \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1+\mathbf{Z}_2} = \frac{j50}{10+j5} = \frac{j50}{10+j5}\,\frac{10-j5}{10-j5} = \frac{250+j500}{100+25} = 2+j4$$

$\mathbf{Z}_\mathrm{b} = 2 + j4$ $\Rightarrow$ **i due bipoli sono equivalenti**

8.7 Bipoli equivalenti

In genere, per realizzare semplicemente $\mathbf{Z}=R+jX$ si può collegare in serie un resistore (di resistenza R) con un induttore (se $X>0$, con $L=X/\omega$) oppure con un condensatore (se $X<0$, con $C=-1/\omega X$).





$$\mathbf{Z}=R+jX=R+j\omega L$$

$$X=\omega L$$

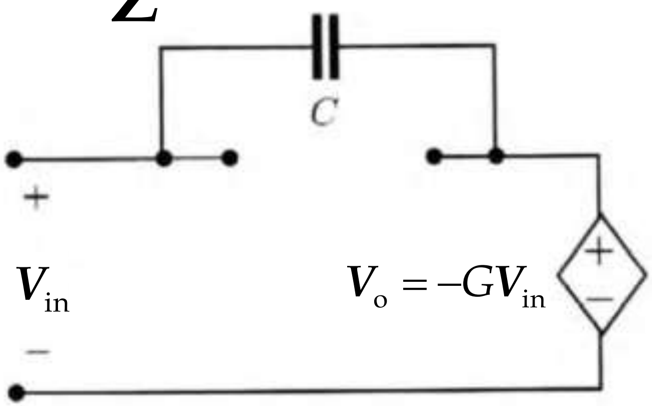
$$\mathbf{Z}=R+jX=R+1/j\omega C$$

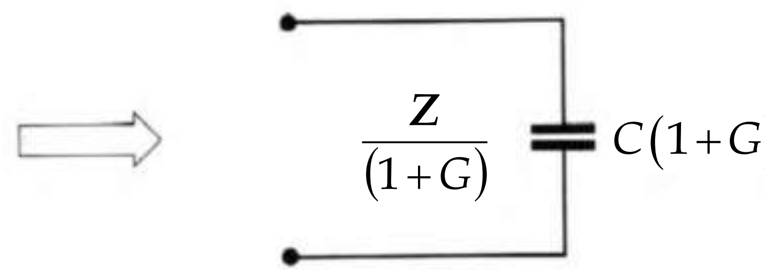
$$X=-1/\omega C$$

8.7 Effetto Miller

L'impedenza equivalente Z_{in} vista in ingresso a un Amp con guadagno tra ingresso e uscita G=-V_o/ V_{in} e in reazione una impedenza Z, è la medesima impedenza divisa per il guadagno di Miller (G_M=G+1)

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{V}_{in} - \boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{Z}} \qquad \boldsymbol{V}_o = -G\boldsymbol{V}_{in} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{V}_{in}(1+G)}{\boldsymbol{Z}} = \frac{\boldsymbol{V}_{in} G_M}{\boldsymbol{Z}}$$





$$\boldsymbol{Z}_{in} = \frac{\boldsymbol{V}_{in}}{\boldsymbol{I}} = \frac{\boldsymbol{Z}}{G_M} = \frac{\boldsymbol{Z}}{(1+G)}$$

Un valore R o L viene abbattuto del guadagno di Miller mentre un valore C viene innalzato del guadagno di Miller: $C \rightarrow G_M C$

8.8 Sovrapposizione di regimi sinusoidali

Un circuito con diversi generatori sinusoidali alla stessa frequenza (una sola ω) può essere trasformato e risolto nel dominio dei fasori

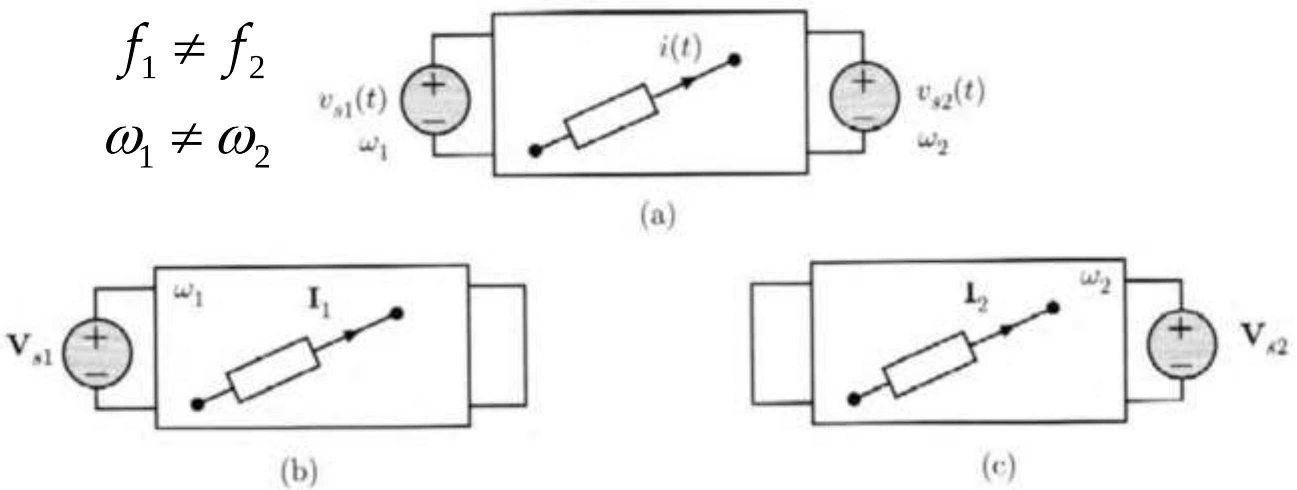
Anche se i generatori sinusoidali hanno **frequenze differenti**, dopo il transitorio si ha un andamento di **regime dato dalla somma dei regimi sinusoidali**, forzato dai diversi generatori alle differenti frequenze (occorre che il circuito sia stabile e si dovranno studiare, con i fasori, tanti circuiti in regime sinusoidale quanti sono i generatori)

Le soluzioni dei circuiti studiati sono **fasori** diversi ma anche **a frequenze differenti** $\Rightarrow$ no somma diretta ($\Rightarrow$ antitrasformare e sommare le sinusoidi nel dominio del tempo)

8.8 Sovrapposizione *f* differenti

$$f_1 \neq f_2$$

$$\omega_1 \neq \omega_2$$



Si risolvono i due circuiti ricavando due fasori I_1 e I_2

NO somma fasori a freq. diverse

$$\cancel{\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2}$$

$$\mathbf{I}_1 = I_{m1}\angle\theta_1 \quad \rightarrow \quad i_1(t) = I_{m1}\cos(\omega_1 t + \theta_1)$$

$$\mathbf{I}_2 = I_{m2}\angle\theta_2 \quad \rightarrow \quad i_2(t) = I_{m2}\cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

Somma contributi non isofreq. nel dominio del tempo

$$\boxed{i(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_{m1}\cos(\omega_1 t + \theta_1) + I_{m2}\cos(\omega_2 t + \theta_2)}$$

9.8 Regime periodico e aperiodico

Regime ottenuto come sovrapposizione di sinusoidi (f e T diversi), con o senza un minimo comune multiplo:

$$T = T_{\mathrm{mcm}} \quad \Rightarrow \quad \text{regime } \textbf{periodico}$$

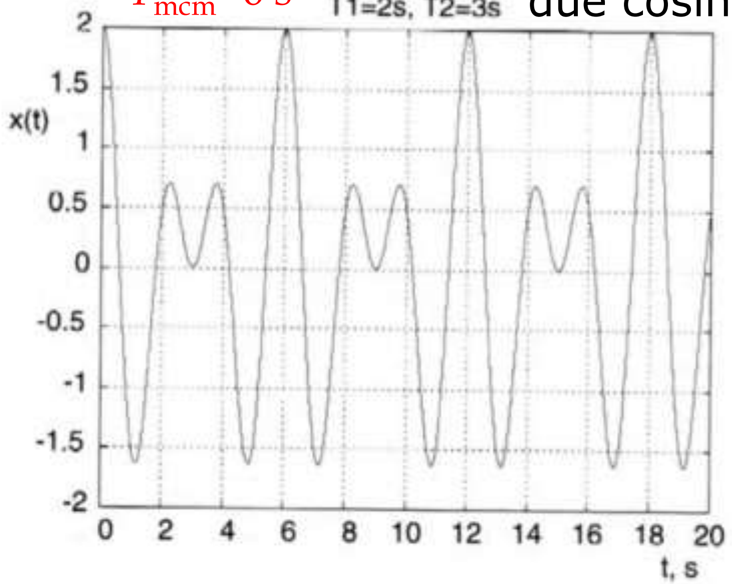
$$\text{“}T = \infty\text{”} \quad \Rightarrow \quad \text{regime } \textbf{aperiodico}$$

Sovrapposizione vale anche per generatori costanti
(caso particolare di regime sinusoidale con f=0)

due cosinusoidi A_1=A_2=1, $T_1 \neq T_2$

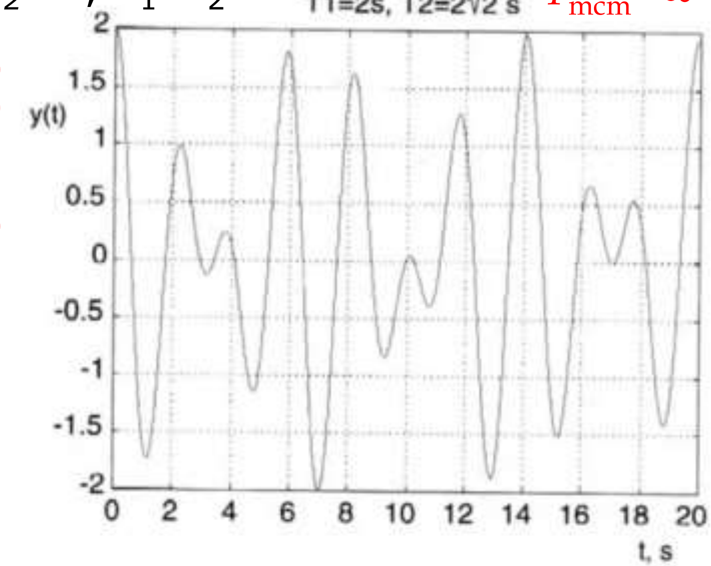
T_{mcm}=6 s

PERIODICO



$T_{\mathrm{mcm}}=\infty$

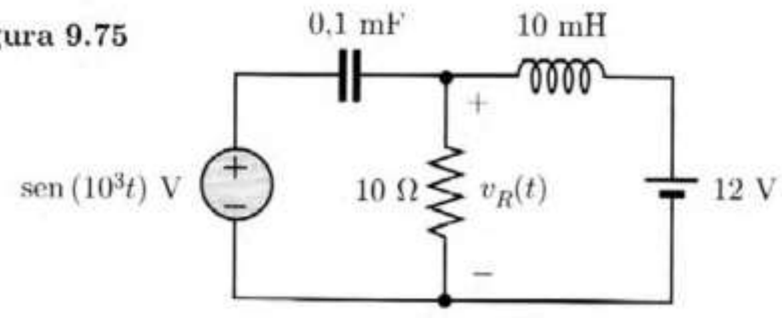
APERIODICO



8.8 Esempio di calcolo (9.15P)

Nel circuito in Figura 9.75 ricavare la tensione $v_R(t)$ a regime.

Figura 9.75



Soluzione
Si applica la sovrapposizione degli effetti. Spegnendo il generatore sinusoidale e considerando il circuito equivalente in regime costante, si ha lo schema in Figura 9.76a.

Figura 9.76

La tensione v'_R vale 12 V.
Spegnendo il generatore costante e trasformando il circuito alla pulsazione di 1000 rad/s si ha la Figura 9.76b. Il parallelo di resistore e induttore ha impedenza

$$\mathbf{Z}_p = \frac{10 \times 10j}{10 + j10} = 10\frac{j(1-j)}{2} = 5(1+j)$$

Il fasore $\mathbf{V}''_R$ si ricava con la formula del partitore:

$$\mathbf{V}''_R = -j\frac{5(1+j)}{-j10 + 5(1+j)} =$$
$$= -j\frac{5(1+j)}{5(1-j)} = -j \times j = 1$$

Quindi

$$v''_R(t) = \cos(10^3 t) \text{ V}$$

La tensione risultante, a regime, vale

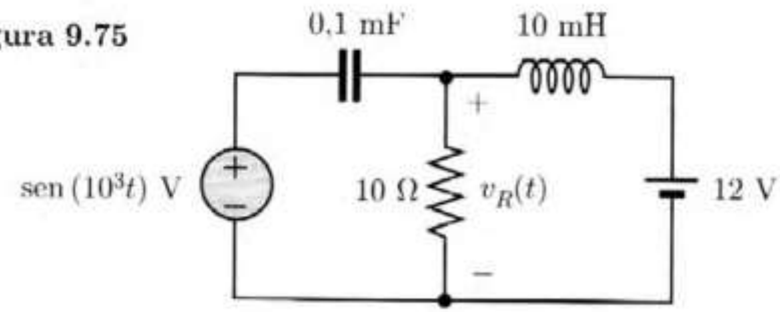
$$v_R(t) = v'_R + v''_R(t) = 12 + \cos(10^3 t) \text{ V}$$

Essa è la somma di un termine costante e di uno sinusoidale di pulsazione 1000 rad/s.

8.8 Esempio di calcolo (9.15P)

Nel circuito in Figura 9.75 ricavare la tensione $v_R(t)$ a regime.

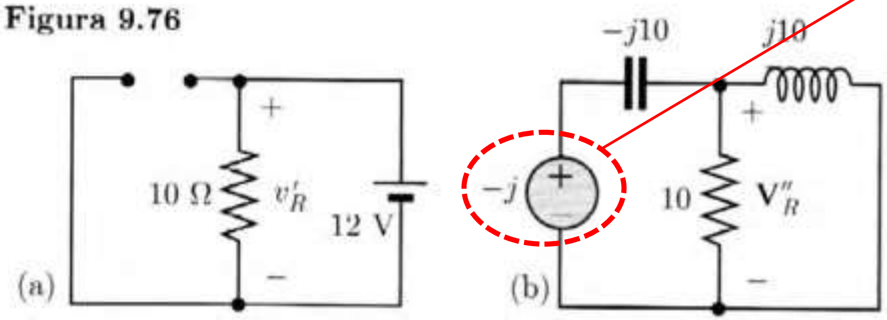
Figura 9.75



Soluzione

Si applica la sovrapposizione degli effetti. Spegnendo il generatore sinusoidale e considerando il circuito equivalente in regime costante, si ha lo schema in Figura 9.76a.

Figura 9.76



La tensione v'_R vale 12 V.

Spegnendo il generatore costante e trasformando il circuito alla pulsazione di 1000 rad/s si ha la Figura 9.76b. Il parallelo di resistore e induttore ha impedenza

$$\mathbf{Z}_p = \frac{10 \times 10j}{10 + j10} = 10\frac{j(1-j)}{2} = 5(1+j)$$

Il fasore $\mathbf{V}''_R$ si ricava con la formula del partitore:

$$\mathbf{V}''_R = -j\frac{5(1+j)}{-j10 + 5(1+j)} =$$

$$= -j\frac{5(1+j)}{5(1-j)} = -j \times j = 1$$

Quindi

$$v''_R(t) = \cos(10^3 t) \text{ V}$$

La tensione risultante, a regime, vale

$$v_R(t) = v'_R + v''_R(t) = 12 + \cos(10^3 t) \text{ V}$$

Essa è la somma di un termine costante e di uno sinusoidale di pulsazione 1000 rad/s.

Sommario

- Una **sinusoide** è descritta da 3 parametri: **pulsazione**, **ampiezza** e **fase**.

- La (co)sinusoide $x(t)=A\cos(\omega t+\theta)$, sottointendendo la pulsazione, è rappresentabile con il suo **fasore** $\mathbf{X}$, numero complesso, che ha anch'esso ampiezza A e fase θ: $\mathbf{X}=Ae^{j\theta}$.
La sinusoide è ricavabile dal fasore come $x(t)=|\mathbf{X}|\cdot\cos(\omega t+\angle\mathbf{X})$
oppure, equivalentemente, come $x(t)=\mathrm{Re}[\mathbf{X}\cdot e^{j\omega t}]$.

- I circuiti lineari sono risolvibili, mediante **combinazioni lineari di fasori**, con equazioni algebriche anziché differenziali (nel dominio trasformato la dipendenza dal tempo è omessa). Si ricorda che alla derivazione nel tempo corrisponde una moltiplicazione per $j\omega$ nel dominio dei fasori (mentre alla integrazione nel tempo corrisponde una divisione per $j\omega$).

- Per i circuiti nel dominio trasformato valgono le **trasformazioni di bipolo**, incluso Thevenin e Norton, e la **sovrapposizione** degli effetti, tutto come già visto per i circuiti resistivi.

Sommario

- Un circuito può essere **risolto nel dominio dei fasori** e poi le grandezze fasoriali ricavate vengono **ritrasformate in sinusoidi**.

- Con riferimento alle grandezze fasoriali, abbiamo le quantità complesse:
  impedenza (resistenza e reattanza) [Ω]; $\boldsymbol{Z=R+jX}$
  ammettenza (conduttanza e suscettanza) [S]; $\boldsymbol{Y=G+jB}$.

- L'impedenza complessa descrive l'**equazione caratteristica** dei bipoli R, L, C **nel dominio dei fasori** e anche i gen.dip. e l'OP-AMP sono rappresentabili mediante trasformazione nel nel dominio di Steinmetz. Bipoli con la stessa impedenza complessa saranno equivalenti, anche se realizzati in modo diverso.

- Più **generararatori**, costanti e/o sinusoidali, sono **sovrapponibili** per ricavare la risposta del circuito in regime sinusoidale permanente, sempre ottenibile come **somma di più sinusoidi** (ma nel caso di frequenze differenti la somma si deve fare nel dominio del tempo).