

# INCERTEZZA

## DI

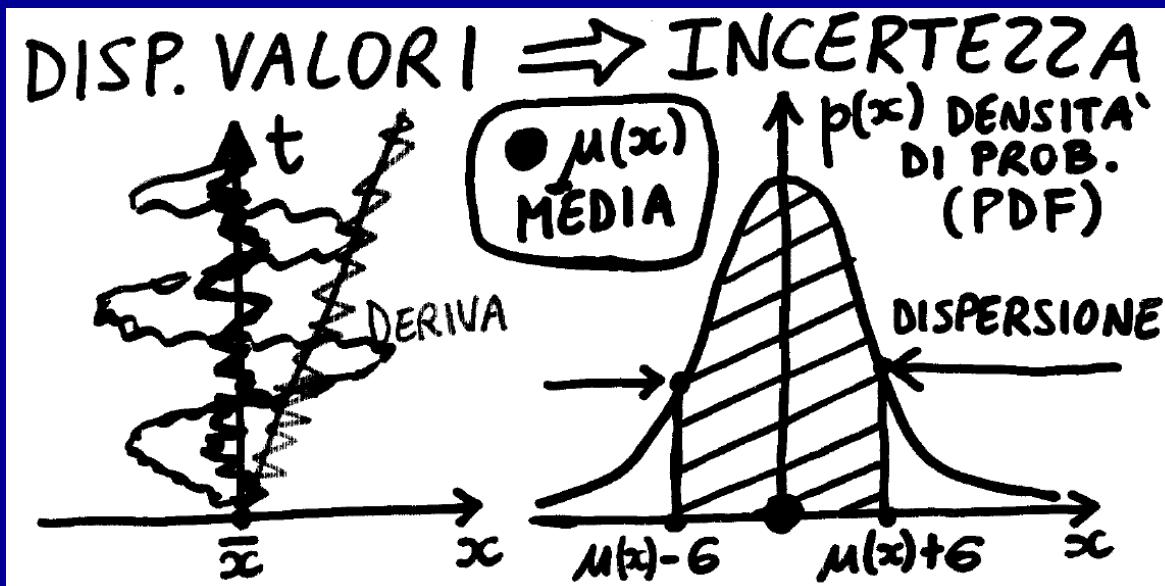
# MISURA



prof. Cesare Svelto

# Variabilità delle misure

Misure ripetute dello stesso parametro fisico non forniscono lo stesso valore



tendenza centrale ( $\bar{x}$  o  $\mu$ ) e dispersione ( $\sigma$ )

L'incertezza di misura è la stima della dispersione dei valori "attribuibili" al misurando

# Approccio statistico

La misurazione non è una scienza esatta

Le misure sono sempre affette da “fluttuazioni” o errori (almeno potenziali), mai perfettamente conoscibili, che si traducono in una naturale “indeterminazione” o **INCERTEZZA sul risultato di misura**

Occorre lasciare un approccio deterministico (si vorrebbero conoscere le fluttuazioni) in favore di un **approccio statistico** grazie al quale è possibile stimare le fluttuazioni

# Incertezza di misura

La **variabilità** del risultato di una misura è analizzata grazie ai metodi consolidati della statistica (**varianza e deviazione standard**)

Il risultato di misura dunque non è mai un unico numero “deterministico” ma un **intervallo di valori possibili** entro il quale il misurando può trovarsi con una data probabilità (e potrà anche trovarsi fuori dall’intervallo)

La **semampiezza di un particolare intervallo** di valori (l’intervallo a  $\pm 1$  deviazione standard dal valore centrale) è l’**incertezza di misura**

# Teoria degli errori

La **teoria degli errori di misura** prevedeva che un misurando non potesse mai essere perfettamente conosciuto a causa degli inevitabili errori di misura (**intrinseci in ogni metodo o strumento utilizzato per la misurazione**)

$$\text{Errore} \stackrel{\Delta}{=} \text{Valore Misurato} - \text{Valore Vero}$$

(concetto astratto)

**NON CONOSCIBILE**

**INDETERMINATO!!!**

**VALORE  
NOTO**

# Tipi di errori

**Errori sistematici:** si presentano nella stessa entità ogni volta che si ripete la misura (*offset* o polarizzazione)

esempio: ogni volta che un peso di massa  $m$  viene posto su una bilancia digitale questa legge "sistematicamente" 100 g in più (*offset*) rispetto al valore  $m$

**Errori accidentali:** si presentano in maniera diversa e "impredicibile" ogni volta che si ripete la misura (fluttuazione casuale a media nulla)

esempio: ogni volta che il peso di prima è posto sulla bilancia, il visualizzatore digitale mostra un valore diverso ( $m + 100 \text{ g} + \varepsilon_i$ ), ad esempio a causa del **rumore** elettronico sulla tensione di lettura inviata al *display* ( N.B.  $\sum \varepsilon_i = 0$  )

# Problematiche

**Errori sistematici ed errori accidentali, pur omogenei, non sono della stessa natura:**

- i primi sono componenti deterministiche (e pertanto conoscibili e anche eliminabili)
- i secondi sono componenti aleatorie (stimabili in senso statistico e talora riducibili ma mai eliminabili del tutto)

Questi due tipi di errori non possono essere combinati/sommati in maniera corretta  
(si sommano solo le grandezze omogenee  
ma anche "logicamente" dello stesso tipo)  
es.: lunghezza automobile ; calibro fucile ; profondità piscina

# Errori → Incertezza

Date le incongruenze logiche della teoria degli errori, a fine anni '70 il CIPM incaricò un Gruppo di Lavoro di definire procedure unificate per l'espressione dell'incertezza di misura

Una corretta analisi statistica della variabilità di una misura consente di risolvere in maniera soddisfacente il problema di esprimere l'**incertezza standard di misura**

(grandezza, valutata secondo procedure convenzionali, che esprime il nostro grado di non conoscenza del misurando)

2 categorie di stima dell'incertezza

- A - **stima con metodi statistici** su un insieme, o **campione**, di misure ripetute
- B - **stima effettuata in altro modo** (e.g. mediante conoscenze a priori o proprietà della misura)

# Richiami di probabilità

$P \in [0 \dots 1]$  (evento impossibile / evento certo)

X variabile casuale (VC) con valori  $x \in \mathbb{R}$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x) dx \quad \text{PROBABILITÀ'}$$

$p(x)$  funzione densità di probabilità (PDF)

[se occorre fare esempio con istogramma e  $\Delta x \rightarrow 0$ ]

La PDF descrive il processo casuale considerato assegnando la probabilità per i possibili valori d'uscita. Per una VC continua la "probabilità puntuale" è nulla mentre può non essere nulla la **probabilità di cadere in un intervallo di valori**. Inoltre,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad \text{normalizzazione della PDF}$$

# Richiami di statistica

Per  $X$  VC reale (possibili valori della misura) esistono degli **stimatori** che ci consentono di **conoscere**, in senso statistico, alcuni **parametri** caratteristici del processo casuale. In particolare **MEDIA** e **VARIANZA** permettono di stimare la **tendenza centrale** e la **dispersione** dei valori  $x$  associabili a  $X$

## MEDIA

$$\mu(x) = \mu_x = E\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

*Expectation value  
o valore atteso  
(valore di aspettazione)  
[è come una media pesata  
degli infiniti valori possibili]*

## VARIANZA

$$\sigma^2(x) = \sigma_x^2 = E\{[x - \mu_x]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \mu_x]^2 p(x) dx$$

[è come una media pesata degli infiniti scarti quadratici possibili]

$$\sigma(x) = \sqrt{\sigma^2(x)} \quad \text{DEVIAZIONE STANDARD}$$

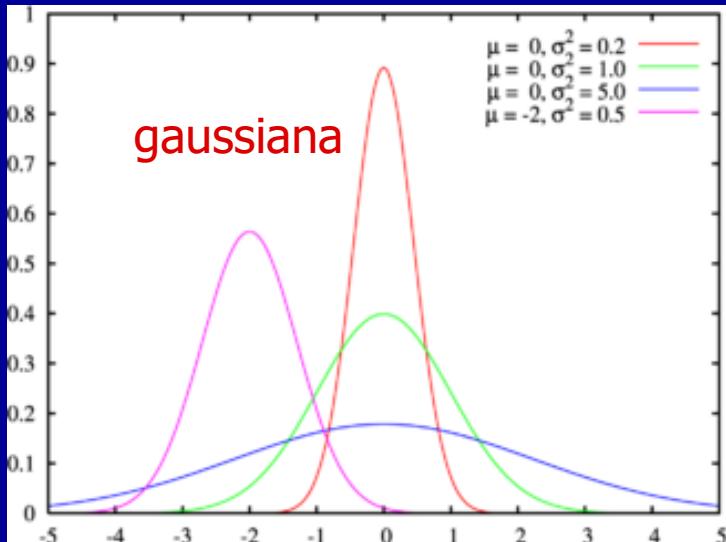
( $\mu$  e  $\sigma$  sono omogenei con  $x$ )

# PDF normale o gaussiana

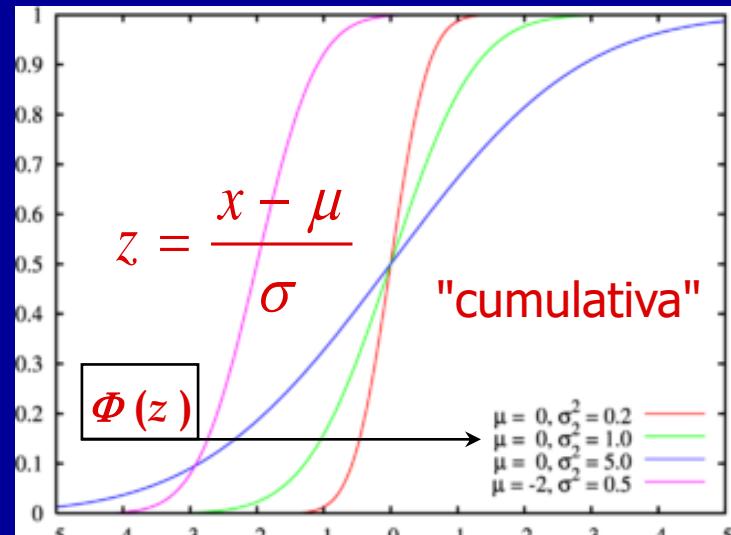
E' la PDF "più comune" per la descrizione della media di fenomeni casuali quali le misure (per il teorema del limite centrale la media di una VC tende ad avere una PDF gaussiana in una "approssimazione dei grandi numeri"):

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{[x - \mu]^2}{2\sigma^2}\right\}$$

gaussiana  
di param.  
 $\mu$  e  $\sigma$

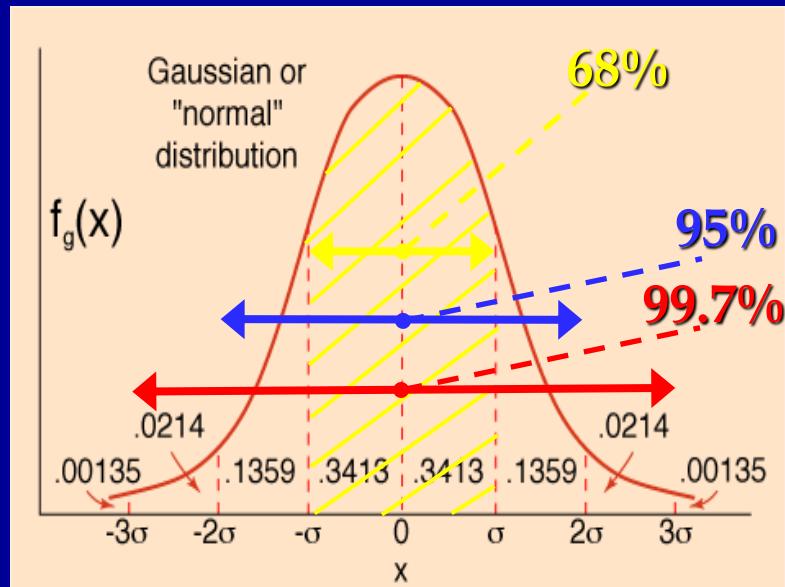


$\mu$  è il  
centro  
 $\sigma$  è la  
larghezza



# Probabilità di "cadere" in un intervallo

Integrando la PDF gaussiana tra due valori sull'asse reale si trova la **probabilità** che il **risultato** (misura) "cada" (sia) nell'intervallo compreso tra i due valori considerati



Le AREE sottese alla curva PDF sono le probabilità di avere valori (misure) in un dato intervallo di valori sull'asse reale

Lontano dalla media  $\mu$ , rispetto alla larghezza  $\sigma$ , la PDF diviene molto **bassa** e dunque le aree sottese molto piccole (**misure improbabili**)

Livelli di confidenza

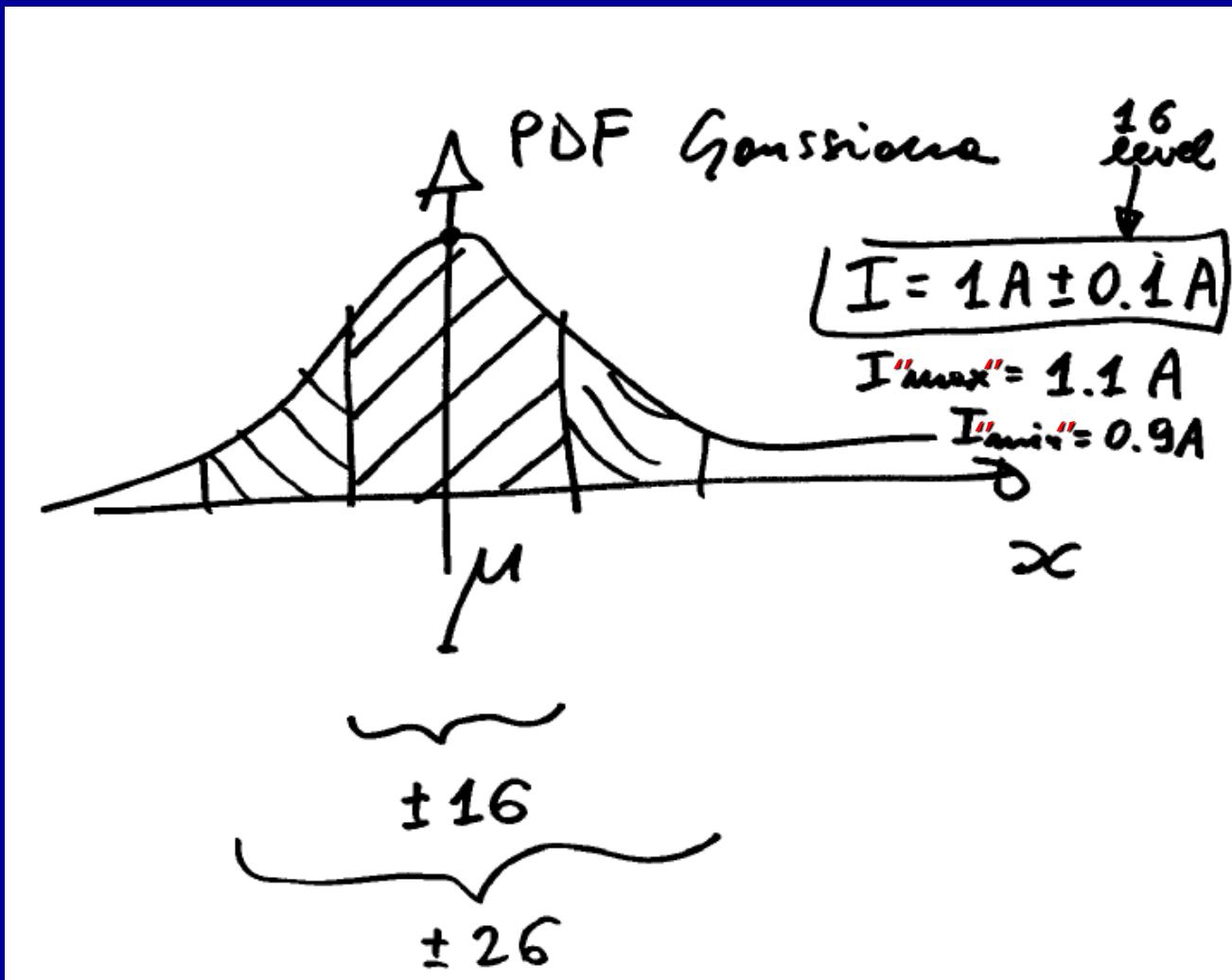
$$\left\{ \begin{array}{l} 1\sigma \quad 68.27\% \approx 68.3\% \approx 68\% \\ 2\sigma \quad 95.45\% \approx 95.5\% \approx 95\% \\ 3\sigma \quad 99.73\% \approx 99.7\% \end{array} \right.$$

intervallo di incertezza standard

$$P [ (\mu_x - \sigma_x) \leq x \leq (\mu_x + \sigma_x) ] \approx 68.3\%$$

Incertezza di Misura

# Esempio su PDF gaussiana



misura di corrente (di valore nominale 1 A e incertezza 0.1 A)

# Incertezza standard

Per qualsiasi misura si definisce:

**incertezza standard** o scarto tipo, con simbolo “ $u$ ” dall’inglese *uncertainty*, una stima della deviazione standard  $\sigma$ , radice quadrata della varianza  $\sigma^2$ , **prevista per il valore di misura**

A seconda del metodo impiegato per la stima di  $u(x)$  classificheremo questa incertezza come di categoria A o B

# Media campionaria

Variabile  $X$  [misurando] nota attraverso  $n$  determinazioni [misure] con valori  $x_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) ottenute in condizioni di ripetibilità:

esempio misura  
 $V_{\text{batt}}$  (9 V e 1.5 V)  
con voltmetro

## MEDIA CAMPIONARIA

$$\bar{x} = \bar{x}_k \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

STIMA del valor medio della (intera) popolazione,  $\mu(x)$ , attraverso lo stimatore  $\bar{x}$

$$\bar{x} = \bar{x}_k = \mu(x) \stackrel{\Delta}{=} \mu_x = E[x]$$

s = ugualmente nel senso  
della Stima

# Dimostrazione

Dim.

$$E\{ \bar{x} \} = E\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right\} =$$

$$= \frac{1}{n} E\left\{ \sum_{k=1}^n x_k \right\} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\{x_k\} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\{x\} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu(x) =$$

$$= \frac{1}{n} n \mu(x) = \boxed{\mu(x)}$$

# Dispersione della media

Per misure ripetute di una grandezza  $X$  la miglior stima del valore di misura  $x$  coincide con il valor medio delle misure ripetute:

$$x = \bar{x} = \bar{x}_k \quad \text{VALORE DI MISURA}$$

Per determinare la dispersione sul valore di misura (incertezza) dovremo valutare la dispersione, almeno potenziale, della variabile casuale  $\bar{x}$  (“valore di misura”). Dunque cercheremo  $\sigma(\bar{x})$  che, come vedremo, è funzione di  $\sigma(x)$  ma anche del numero  $n$  di misure ripetute

# Varianza campionaria

STIMA della varianza della (intera) popolazione,  $\sigma^2(x)$ , attraverso lo stimatore

## VARIANZA CAMPIONARIA

$$s^2(x) = s^2(x_k) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

$$s^2(x) = s^2(x_k) = \sigma_x^2(x) = \sigma_x^2 = E[(x - \mu)^2]$$

inoltre:  $s^2(x) = \frac{1}{n-1} \left[ \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) - n \bar{x}^2 \right]$   
metodo alternativo di calcolo varianza camp.

# Dimostrazione

DIM:  $E\{s^2(x)\} = \frac{1}{n-1} E\left\{\left(\sum_k x_k^2\right) - 2\bar{x}\sum_k x_k + n\bar{x}^2\right\} =$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{\left(\sum_k x_k^2\right) - \frac{2}{n} \sum_k x_k \sum_k x_k + n\left(\frac{1}{n} \sum_k x_k\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{\left(\sum_k x_k^2\right) - \frac{1}{n} \sum_k x_k \sum_k x_k\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1} E\left\{\left(\sum_k x_k^2\right) - \frac{1}{n} \sum_k x_k^2 - \frac{1}{n} \sum_{k \neq j} x_k x_j\right\} =$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_k E\{x_k^2\} - \frac{1}{n} \sum_{k \neq j} E\{x_k\} E\{x_j\} \right] =$$

$$= \frac{1}{n-1} \left[ \left(\frac{n-1}{n}\right) n [\mu^2(x) + \sigma^2(x)] - \frac{n(n-1)}{n} \mu^2(x) \right] =$$

$$= \mu^2(x) + \sigma^2(x) - \mu^2(x) = \boxed{\sigma^2(x)}$$

$E\{x_k x_j\} = E\{x_k\} E\{x_j\}$   
se  $x_k$  e  $x_j$  sono  
statisticamente  
indipendenti

$$x_k = \mu_x + (x_k - \mu_x)$$

$$E(x_k^2) = \mu_x^2 + \sigma_x^2$$

# Alternativa di calcolo per la varianza

La varianza campionaria di  $n$  valori  $x_k$  si può anche calcolare come somma dei singoli valori, elevati al quadrato, meno  $n$  volte il valor medio, al quadrato, il tutto diviso per  $n-1$ :

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left[ \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) - n \bar{x}^2 \right]$$

DIM:

$$\begin{aligned} \sum (x_k - \bar{x})^2 &= \sum (x_k^2 - 2 x_k \bar{x} + \bar{x}^2) = \\ &= \left( \sum x_k^2 \right) - 2 \bar{x} \left( \sum x_k \right) + n \bar{x}^2 = \\ &= \left( \sum x_k^2 \right) - n \bar{x}^2 \end{aligned}$$

$\overbrace{\phantom{\sum x_k^2 - n \bar{x}^2}}^{\text{summa dei quadrati}}$

$\overbrace{\phantom{\sum x_k^2 - n \bar{x}^2}}^{\text{meno } n \text{ volte il quadrato del valore medio}}$

# Gradi di libertà della stima

Nella varianza campionaria, il denominatore  **$n-1=\nu$  è il numero di gradi di libertà**

Vediamo 3 validi motivi per cui è opportuno dividere la somma degli  $n$  scarti quadratici, che compare nell'espressione della varianza campionaria, per  $n-1$  e non per  $n$

- 1) Non ha alcun senso calcolare la varianza per un campione **che contenga un solo dato ( $n=1$ )**. In tale caso, dividendo per  $n-1$ , otteniamo come  $s^2(x)$  una forma indefinita del tipo 0/0
- 2) Nella formula di  $s^2(x)$  calcoliamo di fatto gli scarti quadratici dalla media campionaria,  $\bar{x}$  (nota), e non dalla media della popolazione,  $\mu_x$ , che è ignota: dunque **degli  $n$  scarti quadratici sommati solo  $n-1$  sono tra loro indipendenti**
- 3) Si dimostra che **il valore atteso della varianza campionaria, con l' $n-1$  al denominatore, è la varianza della popolazione:**

$$E\{ s^2(x) \} = \sigma^2(x)$$

lo stimatore è corretto  
o non polarizzato

# Incertezza di cat. A (1/2)

Per determinare l'incertezza sul valore di misura valutiamo la deviazione standard della variabile casuale  $\bar{x}$ (valore di misura):

$\bar{x}$  è, almeno potenzialmente, una variabile casuale in quanto un suo valore specifico dipende dal particolare campione di dati considerato. Se disponessimo di  $m$  diversi insiemi di  $n$  misure ripetute e per ciascuno calcolassimo la  $\bar{x}$ corrispondente, otterremmo  $m$  valori di  $\bar{x}$  differenti tra loro, la cui varianza è:

$$\sigma^2(\bar{x}) = \sigma^2\left(\frac{1}{n} \sum_k x_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_k \sigma^2(x_k) = \frac{1}{n^2} n \sigma^2(x) = \frac{\sigma^2(x)}{n}$$

la varianza del valor medio è la varianza dei dati diviso  $n$

La miglior stima di  $\sigma^2(\bar{x})$  si ottiene quindi come:

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2(x)}{n} = \frac{s^2(x)}{n} \quad \text{e} \quad \sigma(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

# Incertezza di cat. A (2/2)

Si definisce **incertezza di categoria A** la dispersione (prevista per il) del valor medio delle misure ripetute, calcolabile come

$$u_A(x) = \sigma(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$$

Nel caso di incertezza solo di categoria A, il risultato di misura è allora  $x = \bar{x} \pm s(x) / \sqrt{n}$  con una qualità della misura che migliora al crescere di  $n$  (l'incertezza diminuisce)

# Incertezza relativa

Parliamo di **incertezza relativa** quando normalizziamo il valore della incertezza tipo al valore di misura

$$u_r(x) = \frac{u(x)}{\bar{x}} \quad [1] \text{ numero puro!}$$

Incertezze relative anche di grandezze diverse (non omogenee) possono essere confrontate direttamente fra loro (v. campioni primari Cap. 1).  
L'**inc. rel.** indica, indipendentemente dal valore e tipo del misurando, il **grado di (non) conoscenza** che abbiamo raggiunto sul valore di misura

# Incertezza estesa

Quando si vuole definire un intervallo di valori, attorno al valore di misura  $x = \bar{x}$ , “all’interno del quale si ritiene che il misurando debba cadere con un certo livello di confidenza (probabilità  $P$ , anche  $>68\%$ )”, si utilizza l’**incertezza estesa**

$$U(x) = k u(x)$$

$k$  fattore di copertura

valori tipici  $k = “1”; 2; 3$     ( $68\%; 95\%; 99.7\%$ )

# Cifre significative per l'incertezza

L'incertezza si esprime con **una o al più due cifre significative** (è una Norma internazionale)

Esiste anche un'incertezza dell'incertezza e di solito non ha alcun senso impiegare più di due cifre significative per  $u(x)$

Nell'arrotondamento di un'incertezza a 1 cifra si deve sempre arrotondare per eccesso a meno che l'arrotondamento per difetto non comporti un errore inferiore al 5% del valore  
Arrotondando l'INC a 2 cifre vanno bene gli arrotondamenti usuali dei numeri (tutti quelli per difetto sono sempre <5%)

Nei calcoli e passaggi intermedi, conviene conservare anche più di due cifre significative

# Arrotondamenti INC a una cifra

Arrotondando l'INC a una sola cifra, sono possibili questi 20 arrotondamenti per difetto:

2.1	2
3.1	3
4.1	4
4.2	4
5.1	5
5.2	5

6.1	6
6.2	6
6.3	6
7.1	7
7.2	7
7.3	7

8.1	8
8.2	8
8.3	8
8.4	8
9.1	9
9.2	9
9.3	9
9.4	9

Tutti gli altri 70 arrotondamenti, da 2 a 1 cifra, devono essere effettuati per eccesso

*“Solo” 20 casi su 90 si arrotondano per difetto (70 su 90 per eccesso)...*

*Se, senza riflettere, arrotondo per eccesso, che probabilità ho di “azzeccare”? Inoltre, su una INC è più grave... errare in eccesso o in difetto?*

**Usando 2 cifre l'arrotondamento è molto semplice** (“ $\geq 5$  in su e  $< 5$  in giù”)

# Esercizio: calcolo inc. cat. A (1/5)

Si dispone di  $n = 10$  misure ripetute  $V_k$  di una tensione incognita  $V$

Calcolare  $V$  e  $u_A(V)$

$k$ [1]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V_k$ [V]	7	9	8	6	7	5	7	8	6	7

# Esercizio: calcolo inc. cat. A (2/5)

$$V = \bar{V} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k = \frac{1}{10} 70 \text{ V} = 7 \text{ V}$$

$$u_A(V) = \frac{s(V)}{\sqrt{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (V_k - \bar{V})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \left[ \left( \sum_{k=1}^n V_k^2 \right) - n \bar{V}^2 \right]}$$

3<sup>a</sup>

1<sup>a</sup>

2<sup>a</sup>

# Esercizio: calcolo inc. cat. A (3/5)

$$2^{\text{a}} \text{ espressione per } u_A(V) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^N (V_k - \bar{V})^2}$$

Calcoliamo prima gli scarti  $(V_k - \bar{V})$

$(V_k - \bar{V}) [\text{V}]$	0	2	1	-1	0	-2	0	1	-1	0

per poi ricavare

$$\begin{aligned} u_A(V) &= \sqrt{\frac{1}{10 \times 9} (0 + 4 + 1 + 1 + 0 + 4 + 0 + 1 + 1 + 0)} V^2 = \\ &= \sqrt{\frac{12}{90}} V^2 \cong 0.37 V \end{aligned}$$

# Esercizio: calcolo inc. cat. A (4/5)

$$3^{\text{a}} \text{ espressione per } u_A(V) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \left[ \left( \sum_{k=1}^N V_k^2 \right) - n \bar{V}^2 \right]}$$

$$\text{si calcola } \sum_{k=1}^N V_k^2 = 502 \text{ V}^2 \text{ e } \bar{V} = 7 \text{ V}$$

$$u_A(V) = \sqrt{\frac{1}{10 \times 9} \left[ 502 \text{ V}^2 - 10 \times 49 \text{ V}^2 \right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{12}{90} \text{ V}^2} \cong 0.37 \text{ V}$$

# Esercizio: calcolo inc. cat. A (5/5)

$$1^{\text{a}} \text{ espressione per } u_A(V) = \frac{s(V)}{\sqrt{n}}$$

dobbiamo prima conoscere o calcolare la radice della varianza campionaria (dev.st. camp.)

$s(V) = 1.1547 \text{ V}$  e poi dividere per  $\sqrt{n}$

$$u_A(V) = \frac{1.1547 \text{ V}}{\sqrt{10}} \simeq 0.37 \text{ V}$$

Volendo una cifra, di certo  $0.37 \text{ V} \sim 0.4 \text{ V}$  ma se fosse stato  $0.33 \text{ V}$  sarebbe  $\sim 0.3 \text{ V}$  o  $\sim 0.4 \text{ V} ???$

# Cifre significative per il risultato di una misura

Con i numeri dell'esercizio precedente:

$$V = 7.00 \text{ V} \pm 0.37 \text{ V} \text{ o meglio } V = 7.00(37) \text{ V}$$

o anche, in modo più approssimato (INC 1 cifra):

$$V = 7.0 \text{ V} \pm 0.4 \text{ V} \text{ o meglio } V = 7.0(4) \text{ V}$$

Altro esempio:  $\bar{V}=5289 \text{ V}$  e  $u(V)=300 \text{ V}=3.0 \times 10^2 \text{ V}$

$$V = 5290 \text{ V} \pm 300 \text{ V} = 529(30) \times 10^1 \text{ V} = 5.29(30) \text{ kV}$$

o anche, in modo più approssimato ma rapido:

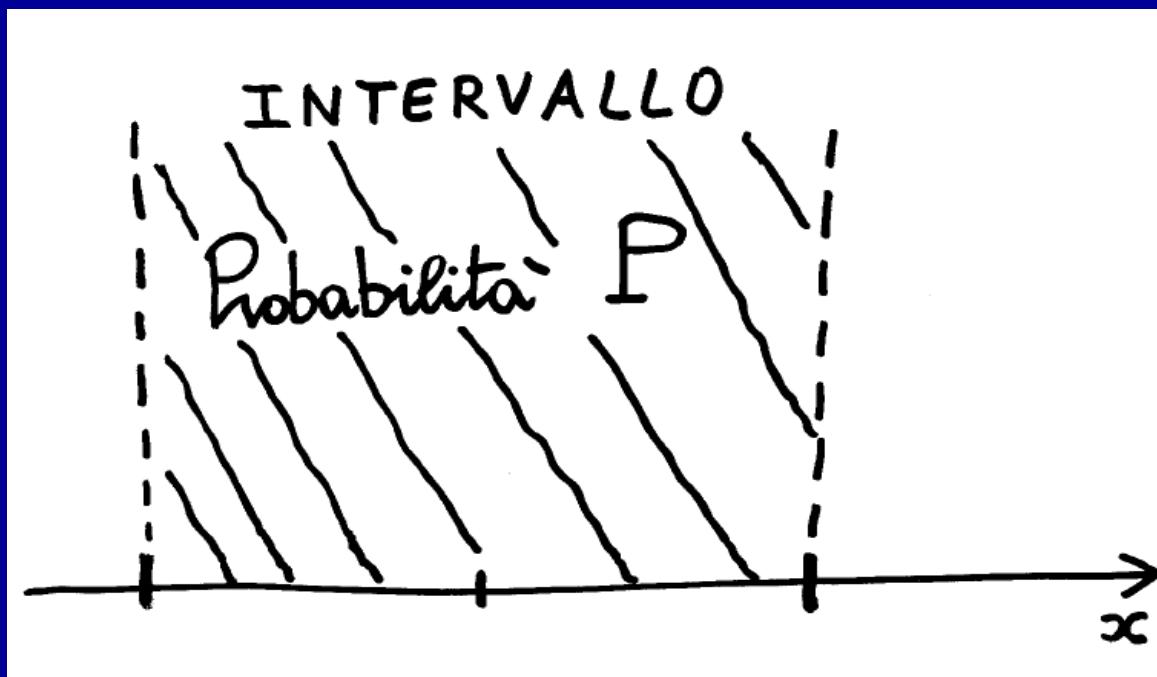
$$V = (5.3 \pm 0.3) \text{ kV} = 5.3(3) \text{ kV}$$

E se fosse  $u(V)=0.37 \text{ V}$  come nel caso precedente?

$$V = 5289.00 \text{ V} \pm 0.37 \text{ V} \text{ o meglio } V = 5289.00(37) \text{ V}$$

# Incertezza di categoria B

Si basa sulla **definizione “a priori”** di un opportuno intervallo di valori entro il quale si suppone debbano cadere i valori del misurando (con una data probabilità  $P$ )



Es.  $V_{\text{rete}}$

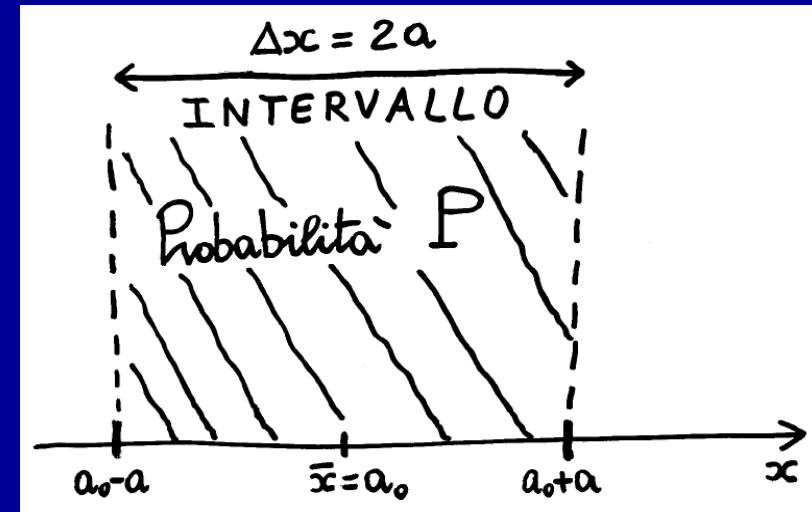
# Parametri dell'intervallo

L'intervallo fissato è tipicamente centrato attorno al **valor medio**

$$\bar{x} = a_0 = \frac{(a_0 + a) + (a_0 - a)}{2}$$

e ha una **piena larghezza**

$$\Delta x = (a_0 + a) - (a_0 - a) = 2a$$

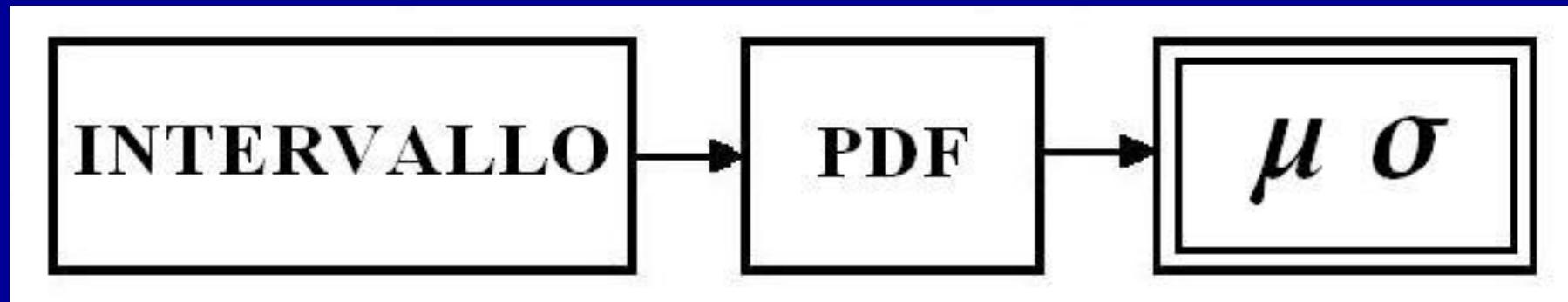


Alla **larghezza  $\Delta x$**  dell'intervallo sarà legata l'**incertezza della misura**

Si associa all'intervallo una **probabilità  $P$**  (ad esempio con distribuzione normale) oppure una **PDF specifica e si fanno i conti**

# Stima dell'incertezza di categoria B

3 PASSI:  
(1)  $\longrightarrow$  (2)  $\longrightarrow$  (3)

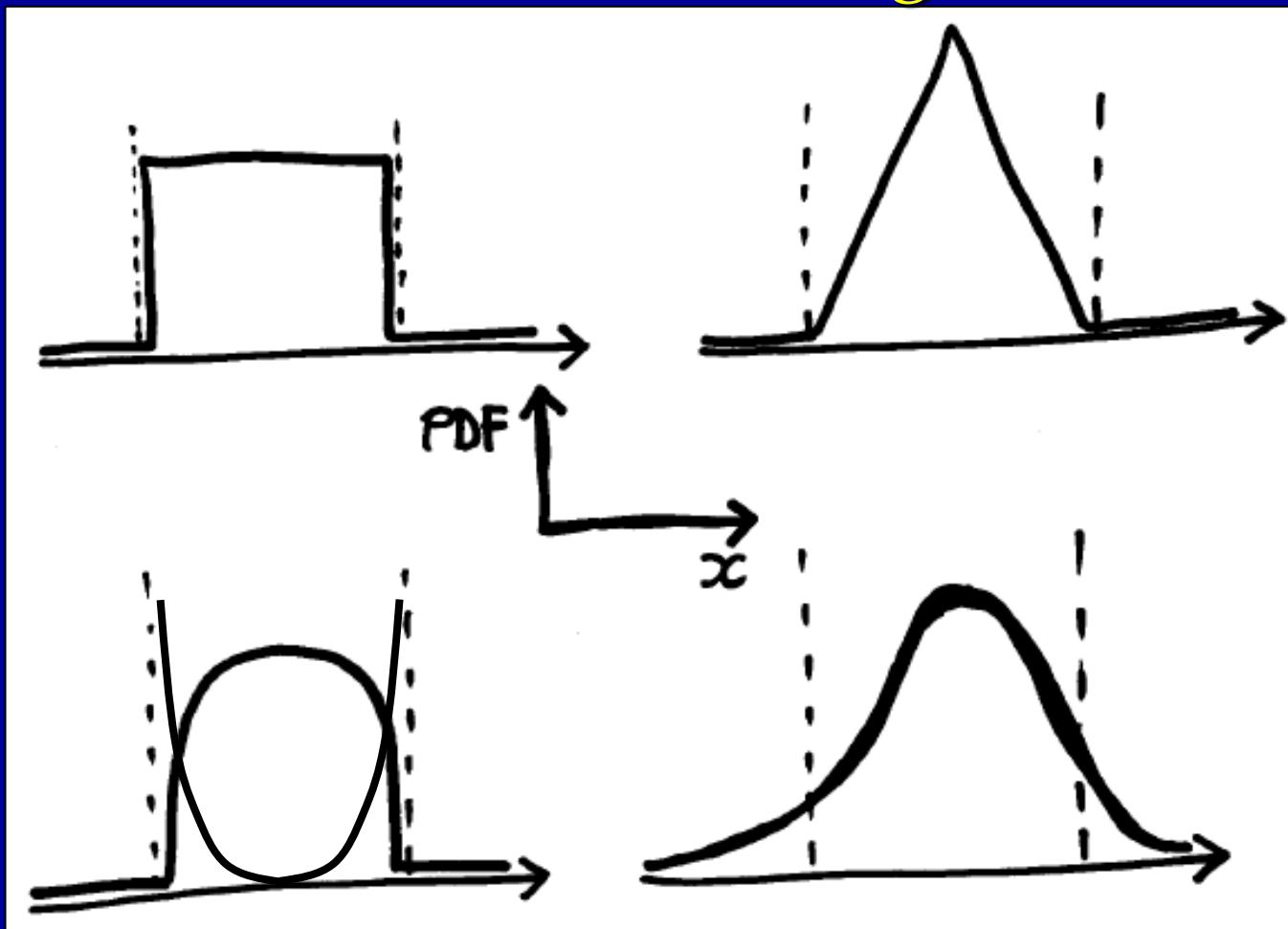


- 1) definito un intervallo di categoria B
- 2) si associa una densità di probabilità (PDF)
- 3) di questa si calcolano **media**, varianza e deviazione standard

# Esempi di PDF comuni

uniforme

triangolare



a "U"

gaussiana

# Scelta di intervallo e PDF

Tanto la larghezza dell'intervallo quanto la PDF ad esso associata si scelgono sulla base di:

- precedenti conoscenze o dati di misura
- esperienza sul **comportamento del misurando**
- specifiche da parte dei costruttori di materiali e strumenti coinvolti nella misura
- dati di **calibrazioni**
- informazioni da **articoli** scientifici/tecnici
- incertezza sui parametri di riferimento  
(presa dai manuali o da altre fonti)

# Stima di $u_B(x)$

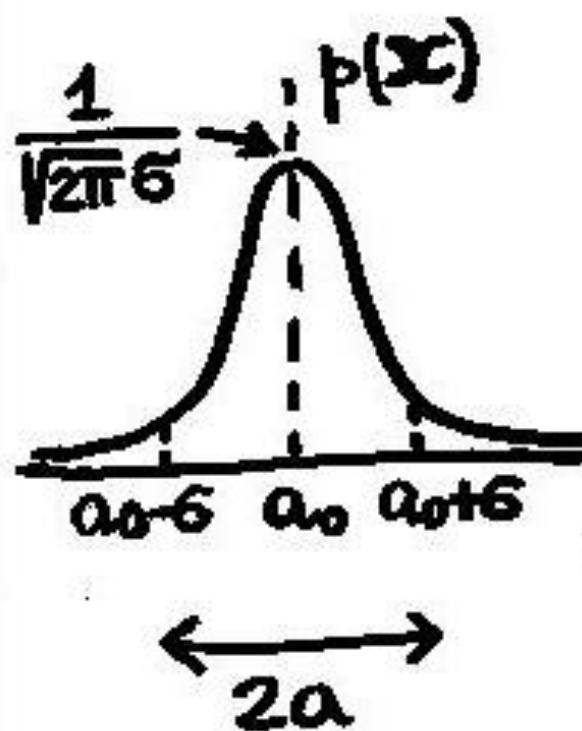
Quando si dispone di una PDF per la grandezza  $x$ , è possibile calcolare  $\mu(x)$  e  $\sigma(x)$  che danno, rispettivamente, il valore di misura e la sua incertezza:

$$x = x_{\text{MIS}} = \mu(x)$$

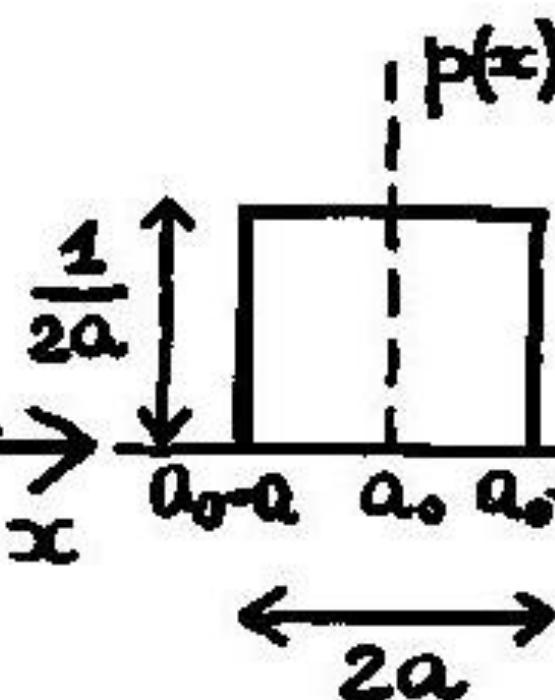
$$u_B(x) = \text{INC}_B(x) = \sigma(x)$$

# PDF più comuni

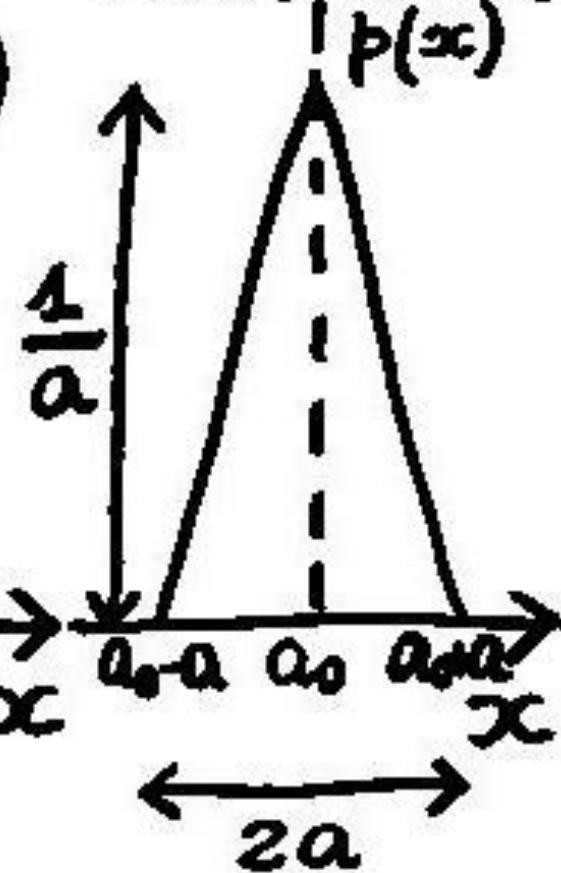
GAUSSIANA  
(NORMALE)



UNIFORME  
(RETANGOLARE)



TRIANGOLARE



# PDF normale

Già si dispone di  $\mu(x)$  e  $\sigma(x)$  dalla espressione della PDF. Spesso occorre ricordare che:

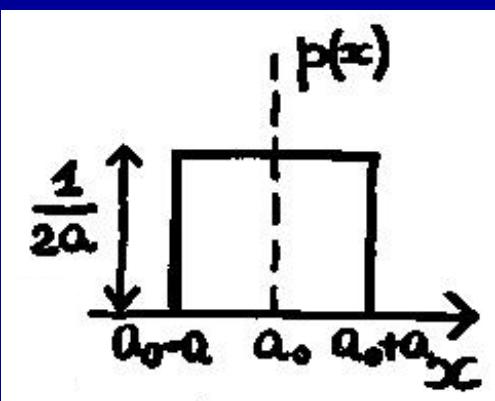
*1 $\sigma$  level:*  $P[\mu-\sigma \leq x \leq \mu+\sigma] \approx 68.3\%$

*2 $\sigma$  level:*  $P[\mu-2\sigma \leq x \leq \mu+2\sigma] \approx 95.5\%$

*3 $\sigma$  level:*  $P[\mu-3\sigma \leq x \leq \mu+3\sigma] \approx 99.7\%$

o anche usare valori tabulati di  $P(\mu-x, \mu+x)$  per  $\Phi(x)$  o  $\Phi(z=[x-\mu]/\sigma)$  così da ricavare  $\sigma$

# PDF uniforme (1/2)



$$\Delta x = 2a$$

piena larghezza

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x < a_0 - a \\ 1/2a & a_0 - a \leq x \leq a_0 + a \\ 0 & x > a_0 + a \end{cases}$$

E' immediato verificare che:

$$\mu(x) = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \ p(x) \ dx = a_0$$

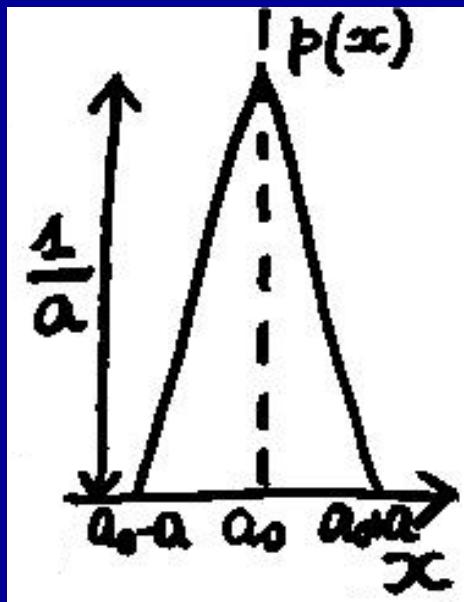
$$\sigma(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}}$$

# PDF uniforme (2/2)

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \int_{a_0-a}^{a_0+a} x \frac{1}{2a} dx \\ &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{a_0-a}^{a_0+a} = \frac{1}{2a} \frac{2a_0a + 2a_0a}{2} = a_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2(x) &= E[(x - \mu(x))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu(x))^2 p(x) dx \\ &= \int_{a_0-a}^{a_0+a} (x - a_0)^2 \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a} \left[ \frac{(x - a_0)^3}{3} \right]_{a_0-a}^{a_0+a} = \\ &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{a^3}{3} - \left( -\frac{a^3}{3} \right) \right] = \frac{a^2}{3} = \frac{(\Delta x)^2}{12} \quad \sigma_{\text{UNI}}(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}}\end{aligned}$$

# PDF triangolare



$$\Delta x = 2a$$

piena larghezza

$$\mu(x) = a_0$$

$$\sigma^2(x) = \frac{a^2}{6} = \frac{(\Delta x)^2}{24}$$

$$\sigma(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{24}}$$

A pari larghezza  $\Delta x$ , si ha naturalmente che

$$u_{B,\text{triangolare}}(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{24}} < u_{B,\text{uniforme}}(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{12}}$$

infatti la PDF<sub>TRI</sub> è "meno dispersa" della PDF<sub>UNI</sub>

# Altri metodi di stima di $u_B(x)$

- Si calcola  $u_B(x)$  partendo dalla conoscenza di un **intervallo di confidenza con probabilità  $P$** :  
si usa PDF normale con confidenza  $P$ , centrata sul valore centrale dell'intervallo, e si stima  
 $u_B(x) = \sigma(x) = \sigma_x$  Es.  $V_{\text{rete}}$  o  $h_{\text{studente}}$
- Si calcola  $u_B(x)$  partendo da conoscenza di una **INCERTEZZA ESTESA ( $U_B = k u_B$ )**:  
già si conosce il fattore di copertura  $k$   
e quindi si ricava  $u_B(x) = U_B(x)/k$  Es.  $T_{\text{stanza}}$   
( $k = 2$  o  $3$ )

# Misure dirette e indirette

## MISURE DIRETTE:

$y = x$       e.g.: misura di  $V$  con un voltmetro

$$u_C^2 = u_A^2 + u_B^2 \quad \text{Incertezza Composta}$$

## MISURE INDIRETTE:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$P = RI^2$     misura ottenuta da  $R$  e  $I$  (no wattmetro)

$$P = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]I^2 = f(I, R_0, \alpha, T, T_0)$$

INC = ???

# Misure indirette (definizioni)

Misurando  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$  ricavato  
"indirettamente" dalla conoscenza di  $N$   
altre grandezze (parametri di ingresso)

La funzione  $f(X_i)$  prende il nome di  
relazione funzionale (equazione della misura)

$Y$  e  $X_i$  sono le variabili mentre  $y$  e  $x_i$  i valori

Naturalmente dalla conoscenza dei valori degli ingressi è possibile ricavare il valore dell'uscita:  $y=f(x_i)$

Saranno invece le incertezze degli ingressi, opportunamente "combinate", a fornire l'incertezza dell'uscita:  $u_C(y) = \Phi[u(x_i); f(\cdot)]$

# INC composta $u_C$ in misure ind. (1/5)

Valori della relazione funz. (equazione della misura)

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

In un intorno del valore di misura (punto di lavoro)

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)$$

è possibile sviluppare in serie di Taylor (1° ordine) la relazione funzionale  $f$ :

$$(y - \bar{y}) \approx \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{\bar{y}} (x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)_{\bar{y}} (x_N - \bar{x}_N)$$

Scarto dell'uscita dal suo valor medio  $\approx \dots$

# INC composta $u_C$ in misure ind. (2/5)

Definiamo **coefficienti di sensibilità**

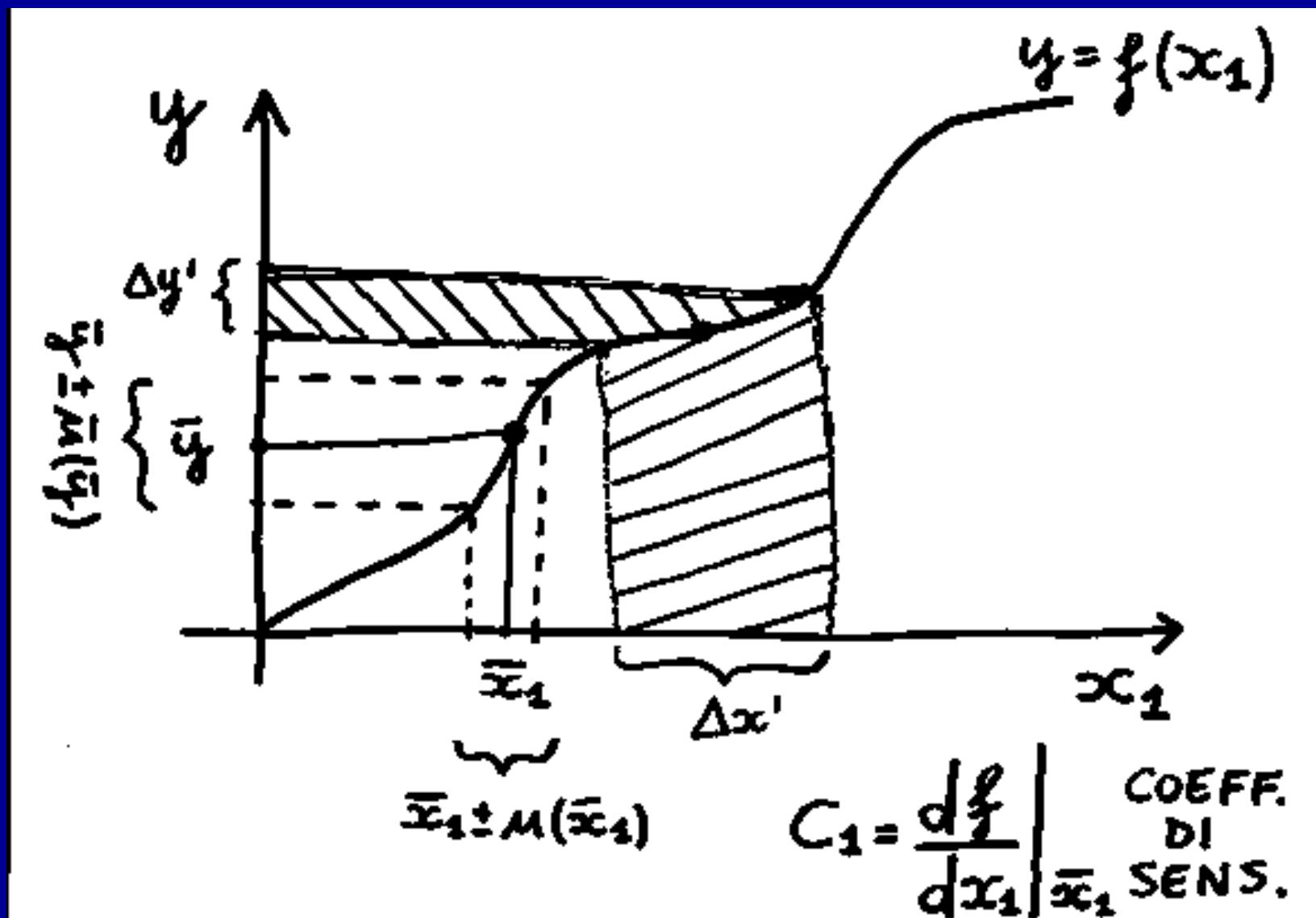
$$c_i \stackrel{\Delta}{=} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_y$$

coeff. "costante"  
una volta stabilito  
il punto di lavoro

le derivate parziali prime della relazione funzionale rispetto alla variabile  $x_i$

$c_i$  è una “pendenza” che sta a indicare come varia il misurando  $Y$  (uscita) per una variazione del parametro  $X_i$  di ingresso

# INC composta $u_C$ in misure ind. (3/5)



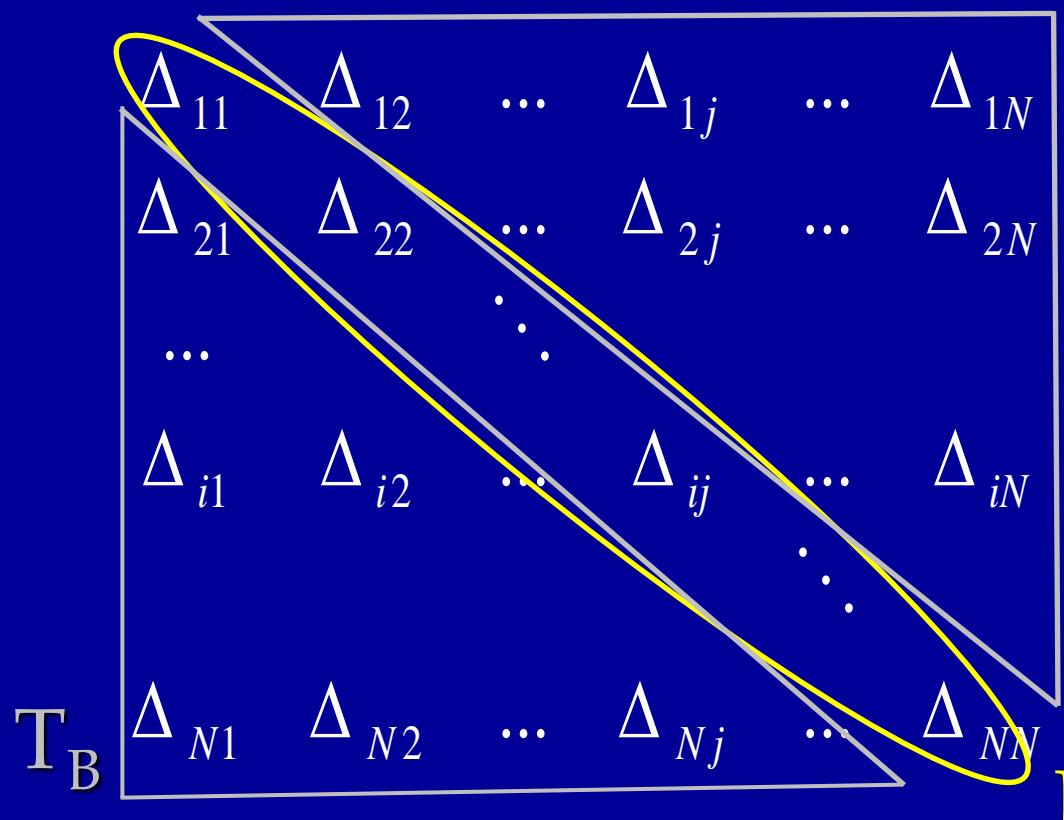
# INC composta $u_C$ in misure ind. (4/5)

$$\begin{aligned}
 E\left(\underline{y} - \bar{y}\right)^2 &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} (\bar{x}_1) + \bar{x}_i \right) \right] + \left[ \left( \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (\bar{x}_N \bar{x}_j) \bar{x}_N \right] \right) \\
 &= E \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \right\} = \\
 &= E \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\bar{y}}^2 \right] (x_i - \bar{x}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \right\}
 \end{aligned}$$

$$E\left\{ (x_i - \bar{x}_i)^2 \right\} \stackrel{\Delta}{=} \sigma^2(x_i) = u^2(x_i) \quad \text{VARIANZA o INCERTEZZA}^2$$

$$E\left\{ (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \right\} \stackrel{\Delta}{=} \sigma^2(x_i, x_j) = u(x_i, x_j) \quad \text{COVARIANZA tra } x_i \text{ e } x_j$$

# Sommatorie dei prodotti degli scarti



$$\Delta_i = (x_i - \bar{x}_i) \quad \Delta_j = (x_j - \bar{x}_j)$$

$$\Delta_{ij} = \Delta_i \Delta_j = (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)$$

Triangoli:  
COVARIANZE  $\Delta_{ij}$

Diagonale:  
VARIANZE  $\Delta_{ii}$

$$\text{Naturalmente } \Delta_{ij} = \Delta_{ji} \text{ e } \sum T_B = \sum T_A = 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \Delta_i \Delta_j \rightarrow \sigma_{ij}^2$$

$$\text{Mentre sulla diagonale } \Delta_{ii} = (\Delta_i)^2 \text{ e } \sum D = \sum_{i=1}^N (\Delta_i)^2 \rightarrow \sigma_i^2$$

Incertezza di Misura

# INC composta $u_C$ in misure ind. (5/5)

( espressione con le covarianze )

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) u(x_i, x_j)$$

Somma pesata, con pesi  $c_i^2$ , delle incertezze<sup>2</sup> (varianze) degli ingressi  $x_i$  più la somma dei termini di covarianza, sempre pesati con le derivate prime  $c_i$  e  $c_j$  della relazione funzionale

# Risultato della misura

Il **valore di misura** della grandezza  $Y$  è:

$$y = \bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)$$

con una **incertezza composta**:

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i, x_j)}$$

In generale ciascuna **incertezza**  $u(x_i)$  è:

$$\begin{aligned} u(x_i) &= u_C(x_i) = \sqrt{u_A^2(x_i) + u_B^2(x_i)} = \sqrt{\sigma^2(\bar{x}_i) + u_B^2(x_i)} = \\ &= \sqrt{\frac{s^2(x_i)}{n} + u_B^2(x_i)} \end{aligned}$$

# Coefficienti di correlazione

$$\boxed{r_{ij}(x_i, x_j) \stackrel{\Delta}{=} \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \in [-1, +1]}$$

$r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^2}{\sigma_i \sigma_j}$

STAT.

$r_{ij} = 0 \Leftarrow x_i$  e  $x_j$  statisticamente indipendenti

Utilizzando la definizione di  $r_{ij}$ , si può scrivere:

( espressione con i coefficienti di correlazione )

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j r_{ij} u(x_i) u(x_j)}$$

INC dell'uscita si ricava da INC ingressi e da  $f$  o  $c_i$  (... e  $r_{ij}$ )

# Misure statisticamente indipendenti

Nel caso di variabili d'ingresso **statisticamente indipendenti**, tutti i termini di covarianza e i coefficienti di correlazione sono nulli ( $r_{ij} \equiv 0$  tra le variabili  $x_i$  e  $x_j$  con  $x_i \neq x_j$ ) e pertanto:

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)}$$

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i)$$

combinazione di varianze

somma pesata

# Casi particolari di rel. funzionali (1/3)

Casi particolari di relazioni funzionali per variabili d'ingresso  $X_i$  statist. indipendenti

- Misurando somma o differenza delle  $x_i$ :

$$y = n_1 x_1 \pm \dots \pm n_i x_i \pm \dots \pm n_N x_N$$

$$\bar{y} = n_1 \bar{x}_1 \pm \dots \pm n_i \bar{x}_i \pm \dots \pm n_N \bar{x}_N$$

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^N n_i^2 u^2(x_i)$$

Se inoltre  $n_i = 1$  per ogni  $i$ , cioè la relazione funzionale è

una somma e differenza semplice:  $u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N u^2(x_i)}$

# Casi particolari di rel. funzionali (2/3)

- Misurando **prodotto** o **rappporto** delle  $x_i$ :

$$y = a \cdot x_1^{n_1} \times \dots \times x_i^{n_i} \times \dots \times x_N^{n_N}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (x_i^{n_i}) = n_i x_i^{(n_i-1)} = x_i^{n_i} \left[ n_i \frac{1}{x_i} \right]$$

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} = a \cdot \left( x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_N^{n_N} \right) \left[ n_i \frac{1}{x_i} \right] = y \left[ n_i \frac{1}{x_i} \right]$$

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^N a^2 \cdot \left( \bar{x}_1^{n_1} \bar{x}_2^{n_2} \dots \bar{x}_N^{n_N} \right)^2 \left[ n_i^2 \frac{1}{x_i^2} \right] u^2(x_i) = y^2 \sum_{i=1}^N n_i^2 \frac{u^2(x_i)}{x_i^2}$$

$$u_{r,C}^2(y) = \sum_{i=1}^N n_i^2 u_r^2(x_i)$$

# Casi particolari di rel. funzionali (3/3)

- Misurando **prodotto** o **rapporto** delle  $x_i$ :

in generale si ha  $u_{r,C}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N n_i^2 u_r^2(x_i)}$

Se inoltre  $n_i = \pm 1$  per ogni  $i$ , cioè se la relazione funzionale è espressa da **prodotti e rapporti semplici**, si ottiene:

$$u_{r,C}^2(y) = \sum_{i=1}^N u_r^2(x_i)$$

“contano solo gli ingressi con incertezza rel. più grossa”

# Esercizio: legge dei gas perfetti (1/4)

$$p = n \frac{RT}{V} = f(n, R, T, V) \quad \text{Relazione funzionale}$$

$$R = 8.31 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 / (\text{mol} \cdot \text{K}) \quad u(R) \text{ “=} 0 \quad (\cong 0!!!)$$

$$n = 2 \text{ mol} \quad u_r(n) = 10^{-6}$$

$$T = 300 \text{ K} \quad u(T) = 0.1 \text{ K}$$

$$V = 1 \text{ m}^3 \quad \text{da } V = L^3 \text{ e } L = 1 \text{ m} \pm 1 \text{ mm}$$

Ricavare la misura di  $p$  (valore e inc. tipo e u.m.)

# Esercizio: legge dei gas perfetti (2/4)

$$p = \frac{2 \text{ [mol]} \times 8.31 \left[ \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} \right] \times 300 \text{ [K]}}{1 \text{ [m}^3\text{]}} = 4986 \text{ Pa} \approx 5 \text{ kPa}$$

**V = L<sup>3</sup>**

$$u(V) = \sqrt{\left[ \frac{\partial V}{\partial L} \right]^2 u^2(L)} = \sqrt{[3 \text{ m}^2]^2 \times [10^{-3} \text{ m}]^2} = \\ = \sqrt{9 \times 10^{-6} \text{ m}^6} = 3 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Conoscendo tutte le variabili/grandezze d'ingresso (valore e incertezza) possiamo calcolare l'INC della uscita misurata indirettamente

# Esercizio: legge dei gas perfetti (3/4)

$$u(p) = \sqrt{\left[ \frac{\partial p}{\partial n} \right]^2 u^2(n) + \left[ \frac{\partial p}{\partial T} \right]^2 u^2(T) + \left[ \frac{\partial p}{\partial V} \right]^2 u^2(V)} =$$
$$\boxed{p = n \frac{RT}{V}} = \sqrt{\left[ \frac{RT}{V} \right]^2 u^2(n) + \left[ \frac{nR}{V} \right]^2 u^2(T) + \left[ \frac{nRT}{V^2} \right]^2 u^2(V)} =$$
$$= \sqrt{\left[ \frac{nRT}{V} \right]^2 \frac{u^2(n)}{n^2} + \left[ \frac{nRT}{V} \right]^2 \frac{u^2(T)}{T^2} + \left[ \frac{nRT}{V} \right]^2 \frac{u^2(V)}{V^2}}$$
$$u_r(p) = \sqrt{u_r^2(n) + u_r^2(T) + u_r^2(V)}$$

# Esercizio: legge dei gas perfetti (4/4)

$$u_r^2(n) = (10^{-6})^2 = 10^{-12}$$

$$u_r^2(T) = \frac{(0.1 \text{ K})^2}{(300 \text{ K})^2} \cong 1.1 \times 10^{-7}$$

$$u_r^2(V) = \frac{(3 \times 10^{-3} \text{ m}^3)^2}{(1 \text{ m}^3)^2} \cong 9 \times 10^{-6}$$

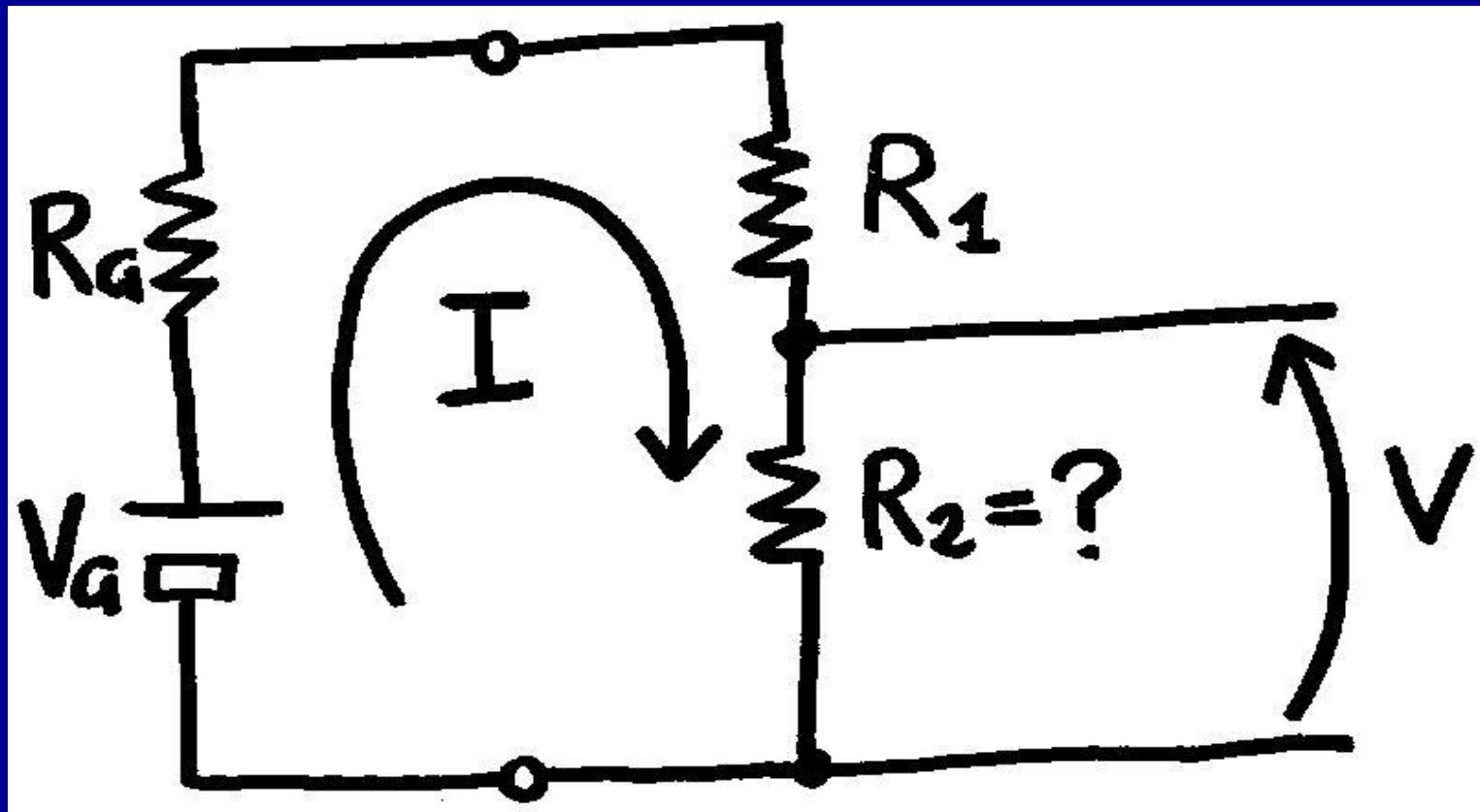
$$u_r(p) = \sqrt{10^{-6}(10^{-6} + 0.11 + 9)} \cong 3 \times 10^{-3} \quad [= u_r(V)!!!]$$

$$u(p) = u_r(p) \times p = 14.96 \text{ Pa} \cong 15 \text{ Pa}$$

$$p = 4986 \text{ Pa} \pm 15 \text{ Pa} = 4986(15) \text{ Pa} = 4.99(2) \text{ kPa}$$

# Esercizio: circuito elettrico (1/11)

Calcolo dell'incertezza composta in una misura indiretta su un circuito elettrico



Ricavare la misura di  $R_2$  (valore e inc. tipo e u.m.)

# Esercizio: circuito elettrico (2/11)

- $V_G$  è data pari a +12 V e  $U(V_G) = 10 \text{ mV}$   $k = 2$
- $R_G$  è nota attraverso 10 letture ripetute  $R_{G,k}$ ,  
 $\bar{R}_G = 50 \Omega$        $s(R_{G,k}) = 12.65 \Omega$
- $R_1 = 1 \text{ k}\Omega \pm 5 \Omega$
- $V = 7.77 \text{ V}$  letta con un voltmetro a 3 ½ cifre,  
con  $\pm 19.99 \text{ V}$  di dinamica, e “ideale” (solo  
errore di quantizzazione)

# Esercizio: circuito elettrico (3/11)

- 1) Calcolare l'incertezza assoluta e relativa di tutti i parametri coinvolti nella misura
- 2) Calcolare  $R_2$ , la sua incertezza e la sua incertezza relativa (  $u(R_2)$  e  $u_r(R_2)$  )
- 3) Quali parametri sono determinanti e quali sono trascurabili per il calcolo di  $u(R_2)$ ?

# Esercizio: circuito elettrico (4/11)

$$I = \frac{V_G}{R_G + R_1 + R_2} = \frac{V}{R_2}$$

descrizione analitica  
del fenomeno fisico  
in esame

$$R_2 \cdot V_G = (R_G + R_1 + R_2) \cdot V$$

$$R_2(V_G - V) = (R_G + R_1)V$$

$$R_2 = \frac{V}{(V_G - V)} (R_G + R_1) = f(V_G, V, R_G, R_1)$$

relazione funzionale

# Esercizio: circuito elettrico (5/11)

$$u^2(R_2) = \left[ \frac{\partial f}{\partial V_G} \right]^2 u^2(V_G) + \left[ \frac{\partial f}{\partial V} \right]^2 u^2(V) +$$

$$+ \left[ \frac{\partial f}{\partial R_G} \right]^2 u^2(R_G) + \left[ \frac{\partial f}{\partial R_1} \right]^2 u^2(R_1)$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$  coeff. di sensibilità: dice come varia  $f$ ,  
ossia  $R_2$ , al variare di uno specifico  
parametro di dipendenza ( $x_i$ )

# Esercizio: circuito elettrico (6/11)

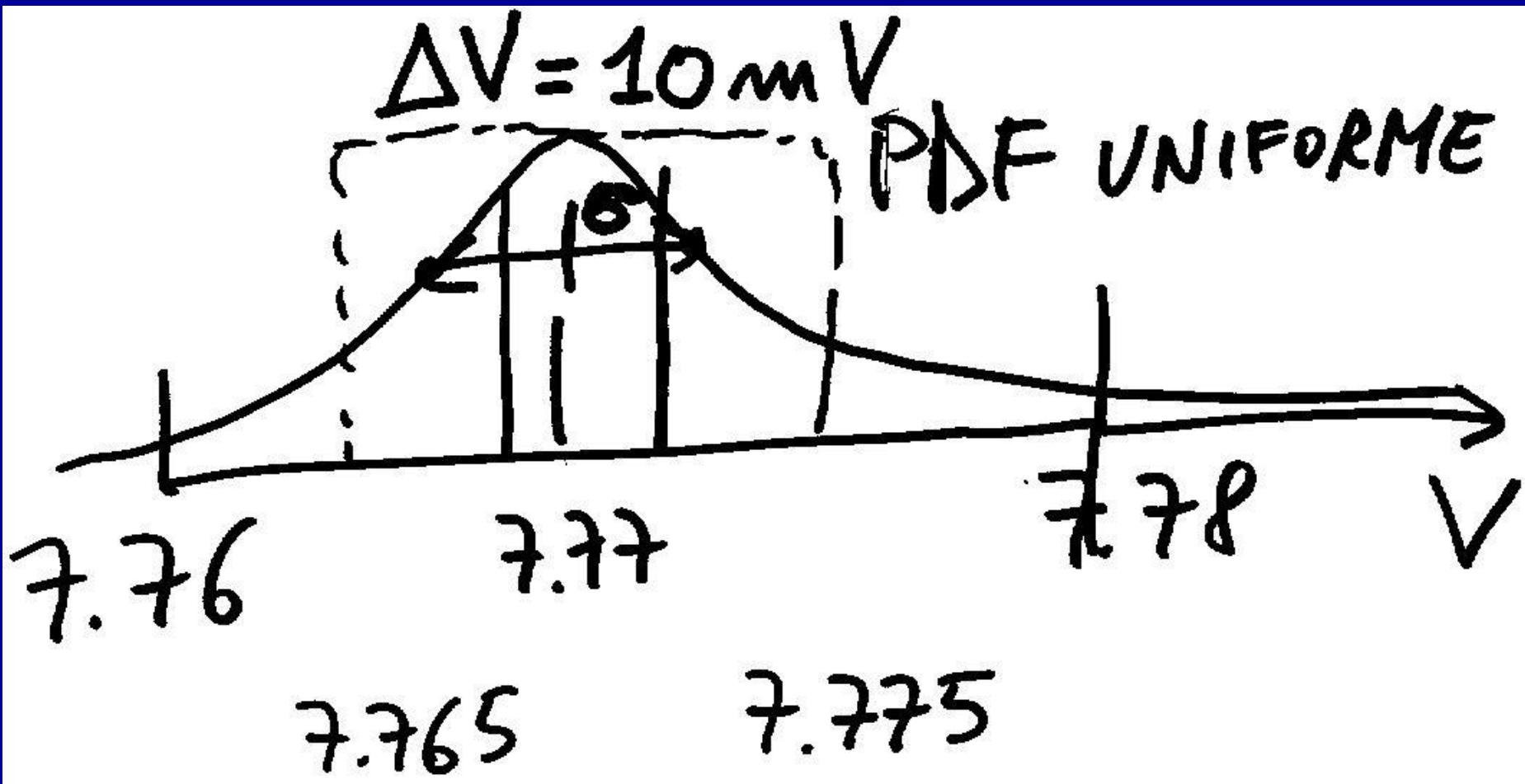
$$1) \ u(V_G) = U(V_G)/k = 5 \times 10^{-3} \text{ V}$$

$$u_r(V_G) = \frac{u(V_G)}{V_G} = \frac{5 \times 10^{-3} \text{ V}}{12 \text{ V}} = 4.2 \times 10^{-4}$$

$$u(V) = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}} = \frac{0.01 \text{ V}}{\sqrt{12}} = 2.9 \times 10^{-3} \text{ V}$$

$$u_r(V) = \frac{u(V)}{V} = \frac{2.9 \times 10^{-3} \text{ V}}{7.77 \text{ V}} = 3.7 \times 10^{-4}$$

# Esercizio: circuito elettrico (7/13)



# Esercizio: circuito elettrico (8/11)

$$u(R_1) = 5 \Omega$$

$$u_r(R_1) = \frac{u(R_1)}{R_1} = \frac{5 \Omega}{1000 \Omega} = 5 \times 10^{-3}$$

$$u(R_G) = u(\bar{R}_G) = \frac{s(R_{G,k})}{\sqrt{n}} = \frac{12.65 \Omega}{\sqrt{10}} = 4 \Omega$$

$$u_r(R_G) = \frac{u(R_G)}{R_G} = \frac{4 \Omega}{50 \Omega} = 8 \times 10^{-2}$$

# Esercizio: circuito elettrico (9/11)

2)

$$R_2 = \bar{R}_2 = \frac{\bar{V}}{(\bar{V}_G - \bar{V})} (\bar{R}_G + \bar{R}_1) = \frac{7.77 \text{ V}}{4.23 \text{ V}} 1050 \Omega = 1928.7 \Omega$$

$$\begin{aligned} u^2(R_2) &= \left[ -\frac{V(R_G + R_1)}{(V_G - V)^2} \right]^2 u^2(V_G) + \\ &+ \left[ \frac{R_G + R_1}{V_G - V} + \frac{V(R_G + R_1)}{(V_G - V)^2} \right]^2 u^2(V) + \\ &+ \left[ \frac{V}{V_G - V} \right]^2 \{u^2(R_G) + u^2(R_1)\} = \end{aligned}$$

# Esercizio: circuito elettrico (10/11)

$$= 2.08 \times 10^5 \frac{\Omega^2}{V^2} \times 2.50 \times 10^{-5} V^2 +$$

$$+ 4.96 \times 10^5 \frac{\Omega^2}{V^2} \times 8.41 \times 10^{-6} V^2 +$$

$$+ 3.37 \times 41 \Omega^2 =$$

$$= (5.2 + 4.17 + 138.17) \Omega^2 = 147.54 \Omega^2$$

$$u(R_2) = \sqrt{u^2(R_2)} = 12.15 \Omega \approx 12 \Omega$$

$$u_r(R_2) = \frac{u(R_2)}{R_2} = 6.3 \times 10^{-3} \quad \left( \approx \frac{12 \Omega}{2 k\Omega} = 6 \times 10^{-3} \right)$$

$$\boxed{R_2 = 1928 \Omega \pm 12 \Omega = 1928(12) \Omega}$$

# Esercizio: circuito elettrico (11/11)

- 3) Le incertezze associate a  $R_G$  e  $R_1$  danno il maggior contributo all'incertezza di  $R_2$  (circa in parti uguali)

Invece l'incertezza  $u(V)$  sulla tensione letta dal voltmetro e così pure l'incertezza  $u(V_G)$  sulla tensione del generatore contribuiscono in modo quasi trascurabile (circa 1/35 e circa 1/30, rispettivamente, dell'incertezza totale)

# Esercizio: circuito elettrico ??? (1/2)

relazione funzionale

$$R_2 = \frac{V}{(V_G - V)} (R_G + R_1) = f(V_G, V, R_G, R_1)$$

per sostituzione, definiamo:

$$R_\Sigma = (R_G + R_1) = 1050 \Omega$$

$$V_\Delta = (V_G - V) = 4.23 \text{ V}$$

ottenendo la “nuova equazione della misura”:

$$R_2 = \frac{V}{V_\Delta} R_\Sigma = f(V, V_\Delta, R_\Sigma)$$

espressa come produttoria semplice  
(esponenti unitari) di 3 soli ingressi

...ma  $V$  e  $V_\Delta$   
dipendono  
entrambi da  $V$

# Esercizio: circuito elettrico ??? (2/2)

Calcoliamo "trascurando le correlazioni" :

$$u_r(V) = \frac{u(V)}{V} = \frac{2.9 \times 10^{-3} \text{ V}}{7.77 \text{ V}} = 3.7 \times 10^{-4}$$

$$R_2 = \frac{V}{V_\Delta} R_\Sigma$$

$$u(V_\Delta) = \sqrt{u^2(V_G) + u^2(V)} = \sqrt{25 + 9} \text{ mV} = 5.8 \text{ mV}$$

$$u_r(V_\Delta) = u_r(V_\Delta) / V_\Delta = 5.8 \times 10^{-3} / 4.23 = 1.4 \times 10^{-3}$$

$$u(R_\Sigma) = \sqrt{u^2(R_G) + u^2(R_1)} = \sqrt{16 + 25} = 6.4 \Omega$$

$$u_r(R_\Sigma) = u_r(R_\Sigma) / R_\Sigma = 6.4 / 1050 = 6.1 \times 10^{-3}$$

$$u_r(R_2) = \sqrt{u_r^2(V) + u_r^2(V_\Delta) + u_r^2(R_\Sigma)} = 6.3 \times 10^{-3} \cong u_r(R_\Sigma)$$

$$u(R_2) = u_r(R_2) \cdot R_2 = 6.3 \times 10^{-3} \cdot 1928.7 \Omega = 12 \Omega$$

$$\boxed{R_2 = 1928 \Omega \pm 12 \Omega = 1928(12) \Omega}$$

La soluzione coincide con la precedente ma in realtà è scorretta...

# Pb. ESE circuito elettrico (1/6)

Pb.: nella nuova equazione per sostituzione:

$$R_2 = \frac{V}{V_\Delta} R_\Sigma = f(V, V_\Delta, R_\Sigma)$$

di fatto le variabili/ingressi  $V$  e  $V_\Delta = V_G - V$  dipendendo entrambe da  $V$  e sono correlate!

Nel caso specifico calcolato in precedenza, con i valori delle incertezze sulle tensioni sostanzialmente trascurabili rispetto alle incertezze sulle resistenze, l'incertezza finale era praticamente solo funzione delle incertezze sulle resistenze e non di quelle sulle tensioni. Allora, avere trascurato la correlazione tra  $V$  e  $V_\Delta$ , che è un errore, non aveva portato a conseguenze sul risultato. Tuttavia ...

# Pb. ESE circuito elettrico (2/6)

... nel medesimo esercizio proviamo a incrementare i valori delle incertezze sulle tensioni (ad es. prendiamo  $u'(V_G)=20\times u(V_G)=100$  mV e  $u'(V)=80\times u(V)=0.23$  V) e ripetiamo i calcoli. Naturalmente  $R'_2 = R_2 = 1928.7 \Omega$  Con il metodo generale, che rimane corretto, otteniamo una incertezza  $u'_{\text{GEN}}(R_2)$  diversa da quella che otteniamo con il metodo per sostituzione  $u'_{\text{SOST}}(R_2)$  e che evidentemente è errata dato che non si è tenuto conto della correlazione tra i due ingressi  $V$  e  $V_\Delta$ :

$$u'_{\text{SOST}}(R_2) = 120 \Omega \neq u'_{\text{GEN}}(R_2) = 170 \Omega$$

L'incertezza di  $R_2$ , ottenuta dalla formula per sostituzione ma trascurando erroneamente le correlazioni, viene ad essere sottostimata. E' scorretta in linea di principio e questa volta anche errata come valore.

# Pb. ESE circuito elettrico (3/6)

Nei due casi/metodi, GENerale e per SOSTituzione, calcoliamo:

$$u_{\text{GEN}}^2(R_2) = \left[ \frac{\partial R_2}{\partial V_G} \right]^2 u^2(V_G) + \left[ \frac{\partial R_2}{\partial V} \right]^2 u^2(V) + \\ + \left[ \frac{\partial R_2}{\partial R_G} \right]^2 u^2(R_G) + \left[ \frac{\partial R_2}{\partial R_1} \right]^2 u^2(R_1)$$

$$u_{\text{sost}}^2(R_2) = \left[ \frac{\partial R_2}{\partial V} \right]^2 u^2(V) + \left[ \frac{\partial R_2}{\partial V_\Delta} \right]^2 u^2(V_\Delta) + \left[ \frac{\partial R_2}{\partial R_\Sigma} \right]^2 u^2(R_\Sigma) + \\ + 2r(V, V_\Delta) \left[ \frac{\partial R_2}{\partial V} \right] \left[ \frac{\partial R_2}{\partial V_\Delta} \right] u(V) u(V_\Delta)$$

Incertezza di Misura

qui si è tenuto conto  
di un coeff. di corr.  
tra  $V$  e  $V_\Delta$

# Pb. ESE circuito elettrico (4/6)

Risistemando i termini nella seconda espressione, otteniamo:

$$\begin{aligned} u_{\text{sost}}^2(R_2) = & R_2^2 \left[ u_r^2(V) + u_r^2(V_\Delta) + u_r^2(R_\Sigma) \right] + \\ & + 2r(V, V_\Delta) \left[ \frac{\partial R_2}{\partial V} \right] \left[ \frac{\partial R_2}{\partial V_\Delta} \right] u(V) u(V_\Delta) \end{aligned}$$

e in termini di incertezze relative ed errore da correlazione:

$$\begin{aligned} u_{\text{r,sost}}^2(R_2) = & \left[ u_r^2(V) + u_r^2(V_\Delta) + u_r^2(R_\Sigma) \right] + \\ & + r(V, V_\Delta) \frac{2}{R_2^2} \left[ \frac{\partial R_2}{\partial V} \right] \left[ \frac{\partial R_2}{\partial V_\Delta} \right] u(V) u(V_\Delta) \\ & + \Delta u_{\text{r,corr}}^2 \end{aligned}$$

*addendum*  
dovuto alla  
correlazione

Incertezza di Misura

# Pb. ESE circuito elettrico (5/6)

per cui è possibile ricavare:

$$r(V, V_{\Delta}) = \frac{u_{r,\text{SOST}}^2(R_2) - [u_r^2(V) + u_r^2(V_{\Delta}) + u_r^2(R_{\Sigma})]}{\frac{2}{R_2^2} \left[ \frac{\partial R_2}{\partial V} \right] \left[ \frac{\partial R_2}{\partial V_{\Delta}} \right] u(V) u(V_{\Delta})}$$

che sostituendo i valori numerici porta a:

$$r(V, V_{\Delta}) = \frac{\left(\frac{120}{1930}\right)^2 - \left[\left(\frac{0.23}{7.77}\right)^2 + \left(\frac{0.25}{4.23}\right)^2 + \left(\frac{6.4}{1050.0}\right)^2\right]}{\frac{2}{(1930)^2} \left[ \frac{1}{4.23} 1050 \right] \left[ -\frac{7.77}{(4.23)^2} 1050 \right] 0.23 \cdot 0.25} = -0.23$$

ed infine la covarianza non nulla è:

$$u(V, V_{\Delta}) = r(V, V_{\Delta}) \cdot u(V) u(V_{\Delta}) \cong -0.23 \cdot (3 \text{mV}) (\sqrt{25+9} \text{mV}) \cong -0.04 \times 10^{-6} \text{V}^2$$

# Pb. ESE circuito elettrico (6/6)

Si osserva che essendo  $r(V, V_\Delta) < 0$  e  $(\partial R_2 / \partial V_\Delta) < 0$ , l'*addendum* alla somma delle incertezze relative, dovuto alla correlazione tra le variabili di ingresso ( $V$  e  $V_\Delta$ ), è di fatto un addendo positivo che, se trascurato, porta a sottostimare l'incertezza  $u(R_2)$

L'esercizio svolto mostra chiaramente quanto sia insidioso, e complesso, dover operare tenendo in conto le correlazioni tra le variabili di ingresso in una equazione della misura. Ove sussistano dubbi circa eventuali correlazioni tra ingressi, è necessario ricordare ed utilizzare la **relazione generale**:

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i, x_j)}$$

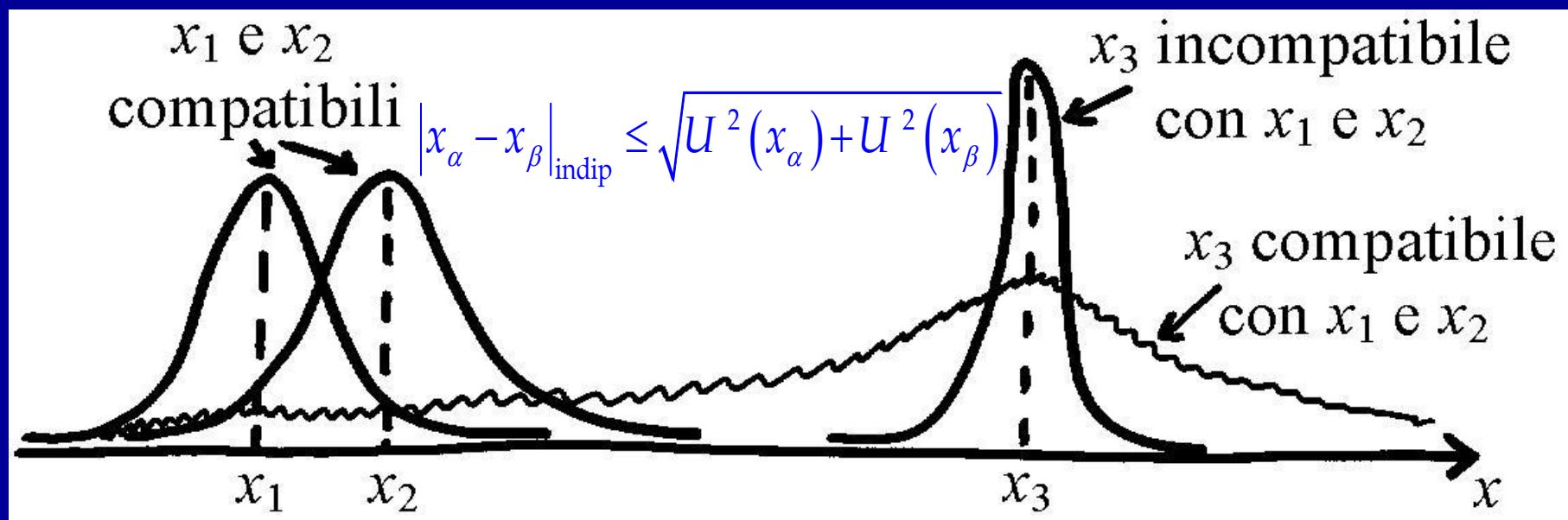
oppure quando si utilizza la formula semplificata per ingressi indipendenti tale “ipotesi” deve essere chiaramente enunciata

# Compatibilità tra due misure $x_1$ e $x_2$

distanza tra i  
due risultati

$\leq$  “somma<sup>2</sup> incertezze”  
associate alle due  
misure (anche INC estese)

$$d = |x_1 - x_2| \leq k \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) - 2 r_{12} u(x_1) u(x_2)}$$



# Media pesata

**Media pesata tra misure compatibili:**

nel caso di  $N$  risultati di misura compatibili, indipendenti e normalmente distribuiti, la miglior stima della misura è

$$x = \bar{x}_{\text{MP}} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i}{\sum_{i=1}^N w_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{u^2(x_i)}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{u^2(x_i)}} \quad w_i = \frac{1}{u^2(x_i)}$$

i **pesi**  $w_i$  sono i reciproci delle varianze stimate, dunque indicano il grado di confidenza che abbiamo sugli  $x_i$ : se  $u(x_i)$  è basso la mis. è "credibile" e allora il suo peso è alto

# Incertezza della media pesata

$$u^2(\bar{x}_{\text{MP}}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^N w_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{u^2(x_i)}}$$

$$u(\bar{x}_{\text{MP}}) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{u^2(x_i)}}}$$

Sia  $w_{\text{MP}} = \sum_{i=1}^N w_i$  la somma dei pesi, allora:

$$w_{\text{MP}} \bar{x}_{\text{MP}} = \sum_{i=1}^N w_i x_i \quad \text{si ricava la media pesata}$$

$$u^2(\bar{x}_{\text{MP}}) = 1/w_{\text{MP}} \quad \text{si ricava l'incertezza della media pesata}$$

# Considerazioni sull'incertezza dell'incertezza e gradi di libertà

Ricordiamo che ogni stima di incertezza è a sua volta incerta e la bontà di questa stima è esprimibile attraverso il **numero di gradi di libertà** (  $v_A = n - 1$  per l'INC di Cat. A )

Anche nel caso di INC di Cat. B si può “stimare”, non calcolare secondo una formula predeterminata, il numero  $v_B$  di gradi di libertà della stima dell'INC (ricordando che è meglio sottostimare  $v_B$  piuttosto che sovrastimarla)

# Stima dei gradi di libertà per l'incertezza di categoria B

Per l'INC di Cat. B si può avere nel caso migliore (e.g. INC di quantizzazione)  $v_B = \infty$  o nel caso più conservativo (*worst case*)  $v_B = 1$

Il numero di gradi di libertà  $v_B$  deve essere stimato sulla base di quanto "si crede" alla stima di  $u_B$  e alla luce dell'analogo significato di  $v_A = n - 1$  nel caso di  $u_A$  per misure ripetute  
*(fare qualche esempio numerico)*

# Significato del numero di gradi di libertà

Consideriamo un campione di  $n$  dati (misure ripetute). Di questo campione si può stimare la varianza e dev.st. del valor medio (incertezza della misura). Avendo operato su un campione casuale, anche la stima della dev.st. è un numero casuale che presenta una potenziale dispersione

Il numero di gradi di libertà è un indicatore della possibile variabilità della nostra stima dell'incertezza:

$$\text{si può dimostrare che } \sigma^2[s(\bar{x})] \cong \frac{\sigma^2(\bar{x})}{2\nu}$$

“qualità”  
della stima  
di INC

allora, e non solo per  $INC_A$ , si ha

$$INC(INC) = \sigma[u(x)] \cong \frac{u(x)}{\sqrt{2\nu}}$$

$$u_r(u(x)) = \frac{\sigma[u(x)]}{u(x)} \cong \frac{1}{\sqrt{2\nu}}$$

# Incertezza dell'incertezza e cifre significative per l'INC

$$INC[INC(x)] = \sigma[u(x)] \cong \frac{u(x)}{\sqrt{2\nu}} \quad u_r(u(x)) = \frac{\sigma[u(x)]}{u(x)} \cong \frac{1}{\sqrt{2\nu}}$$

$$\nu^{-1} \cong 2\sigma^2[u(x)] / u^2(x) = 2u_r^2[u(x)]$$

$\nu^{-1}$  è una indicatore dell'**incertezza dell'incertezza**  
 $\nu \cong 1/(2 \cdot u_r^2) \approx 1/u_r^2$  indica l'accuracy della ns stima di INC  
 $\nu$  alto  $\Rightarrow INC(INC)$  bassa                                   $\nu$  basso  $\Rightarrow INC(INC)$  alta

$u_r[u(x)] \cong 0.7 \nu^{-1/2} \approx \nu^{-1/2}$	$\Rightarrow$	cifre per l'incertezza
$u_r[u(x)] \approx 10^{-1}$ ( $\nu \approx 100$ [ $\cong 50$ ])	$\Rightarrow$	1 cifra
$u_r[u(x)] \approx 10^{-2}$ ( $\nu \approx 10000$ [ $\cong 5000$ ])	$\Rightarrow$	2 cifre
$u_r[u(x)] \approx 10^{-3}$ ( $\nu \approx 1000000$ [ $\cong 500000$ ])	$\Rightarrow$	3 cifre (???)

# \*Gradi di libertà per $u_C(y)$

Come ricaviamo  $v_C$  per l'incertezza composta  $u_C(y)$  di una misura indiretta  $y=f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ?

E' possibile dimostrare che il numero di gradi di libertà  $v_C$  della stima  $u_C(y)$  e l'incertezza alla quarta potenza  $[u_C(y)]^4$  sono legati dalla relazione

$$\frac{u_C^4(y)}{v_C} = \sum_{i=1}^N c_i^4 \frac{u_i^4(x_i)}{v_i} \quad \frac{\sigma^4}{v} = \hat{z} = \sum_{i=1}^N c_i^4 \hat{z}_i$$

che esprime  $[u_C(y)]^4/ v_C$  come somma pesata, con i "soliti" coefficienti di sensibilità  $c_i$ , degli analoghi rapporti  $(u_i^4/ v_i)$  per gli ingressi

# \*Formula di Welch-Satterthwaite per i gradi effettivi di libertà $\nu_C = \nu_{\text{eff}}$ di $u_c(y)$

Per un'incertezza composta  $u_C(y)$  si avrà un **numero di gradi effettivi di libertà**

$$\nu_C = \nu_{\text{eff}} = \frac{\left[ u_C^2(y) \right]^2}{\sum_{i=1}^N \left[ c_i^2 u^2(x_i) \right]^2} = \frac{u_C^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \leq \sum_{i=1}^N \nu_i$$

inoltre  $\nu_C > \nu_{i,\min}$ : è garantita una stima di INC composta comunque più affidabile della meno affidabile tra le stime di INC degli ingressi

# Risultato (completo) di una Misura

*RISULTATO = VALORE*

*±INCERTEZZA<sub>SUL VALORE</sub>*

*±INCERTEZZA<sub>SULL'INCERTEZZA  
e UNITÀ di MISURA</sub>*

$$x_{\text{MIS}} = x_{\text{VAL}} \pm x_{\text{INC}} ; v$$

Esempi:

$$m = 175.8 \text{ kg} \pm 6.2 \text{ kg} ; v=200 \quad m = 175.8(62) \text{ kg} ; v_{200}$$
$$v=200 \rightarrow u_r[u(m)] \approx 1/(2 \cdot 200)^{1/2} = 0.05 \rightarrow u[u(m)] \approx 0.31 \text{ kg} \approx 0.3 \text{ kg}$$

$$m = 176 \text{ kg} \pm 6 \text{ kg} ; v=8 \quad \text{ o } m = 76(6) \text{ kg} ; v_{10}$$
$$v=8 \rightarrow u_r[u(m)] \approx 1/(2 \cdot 8)^{1/2} = 0.25 \rightarrow u[u(m)] \approx 6 \text{ kg}$$

# Esercizio su compatibilità e media pesata (1/6)

Due differenti misure della stessa potenza a radiofrequenza, emessa da un telefono cellulare, vengono effettuate con strumenti diversi e in maniera del tutto indipendente

- La prima misura è analogica (“senza limiti di risoluzione”) ed è ricavata da letture ripetute ( $n=5$ ) del misurando, che hanno fornito i valori:

$$P_{1,1}=3.4 \text{ W} \quad P_{1,2}=3.2 \text{ W} \quad P_{1,3}=3 \text{ W} \quad P_{1,4}=2.8 \text{ W} \quad P_{1,5}=2.6 \text{ W}$$

- La seconda misura è digitale, con un wattmetro ideale a 100 livelli e portata 20 W, e ha fornito una lettura  $P_2 = 3.2 \text{ W}$

- a) Calcolare i due valori di misura,  $P_1$  e  $P_2$ , e le corrispondenti incertezze tipo (standard)
- b) Valutare la compatibilità tra i due risultati di misura, in particolar modo per fattori di copertura  $k$  pari a 1, 2, e 3
- c) Ricavare la miglior stima per il valore della potenza misurata e la sua incertezza tipo  $u(P)$

# Esercizio su compatibilità e media pesata (2/6)

a)  $P_1 = \overline{P}_1 = \overline{P_{1,i}} = 3 \text{ W}$  ricavata come media campionaria:  $\overline{P}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{1,i}$

$$u(P_1) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (P_{1,i} - \overline{P}_1)^2} = \sqrt{\frac{1}{5 \times 4} [(0.4)^2 + (0.2)^2 + (0)^2 + (-0.2)^2 + (-0.4)^2]} \text{ W}^2 =$$
$$= \sqrt{\frac{2 \times (0.16 + 0.04)}{20}} \text{ W}^2 = \sqrt{\frac{2 \times 0.20}{20}} \text{ W} = \sqrt{2 \times 10^{-2}} \text{ W} = 0.1\sqrt{2} \text{ W} \cong 0.14 \text{ W}$$

$P_2 = 3.2 \text{ W}$  da una misura digitale con risoluzione  $\Delta P_2 = \frac{20 \text{ W}}{100 \text{ (livelli)}} = 0.2 \text{ W}$   
(passo di quantizzazione)

$$u(P_2) = \frac{\Delta P_2}{\sqrt{12}} \cong 0.058 \text{ W} \sim 0.06 \text{ W} \text{ (incertezza di quantizzazione)}$$

# Esercizio su compatibilità e media pesata (3/6)

b) Per verificare la compatibilità tra le due misure indipendenti si deve valutare la diseguaglianza

$$|P_1 - P_2| \leq k \sqrt{u^2(P_1) + u^2(P_2)}$$

con  $k$  fattore di copertura (il termine di covarianza non compare essendo per ipotesi le due misure statisticamente indipendenti)

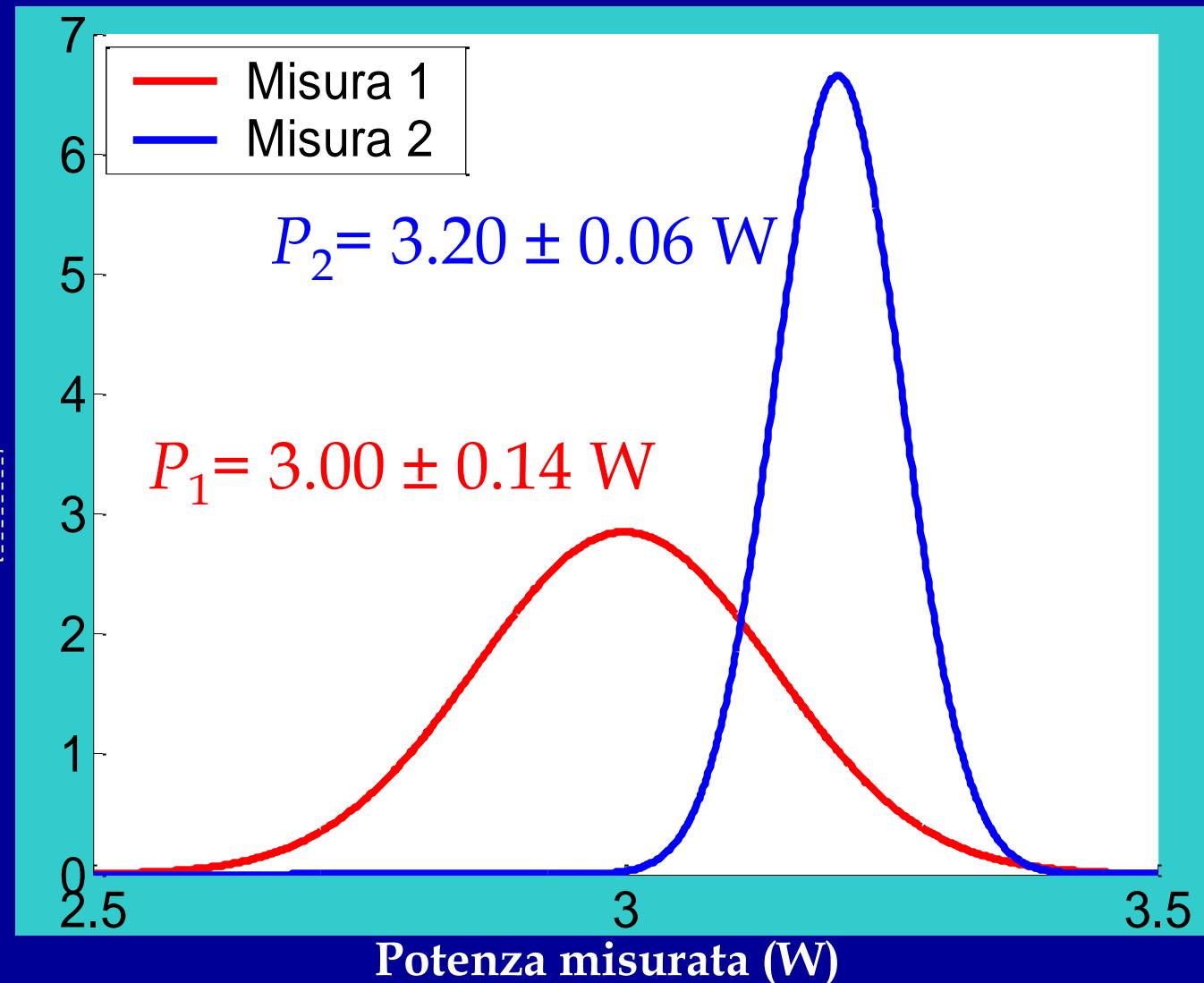
Sostituendo i valori numerici si ha

$$0.2 \text{ W} \leq k \sqrt{0.0232 \text{ W}^2} \cong k \times 0.1523 \text{ W} \quad \Rightarrow \quad k \geq (0.2 / 0.1523) = 1.31$$

Pertanto, le due misure sono compatibili per  $k=2$ , e ovviamente anche per  $k=3$ , ma non sono compatibili per  $k=1$

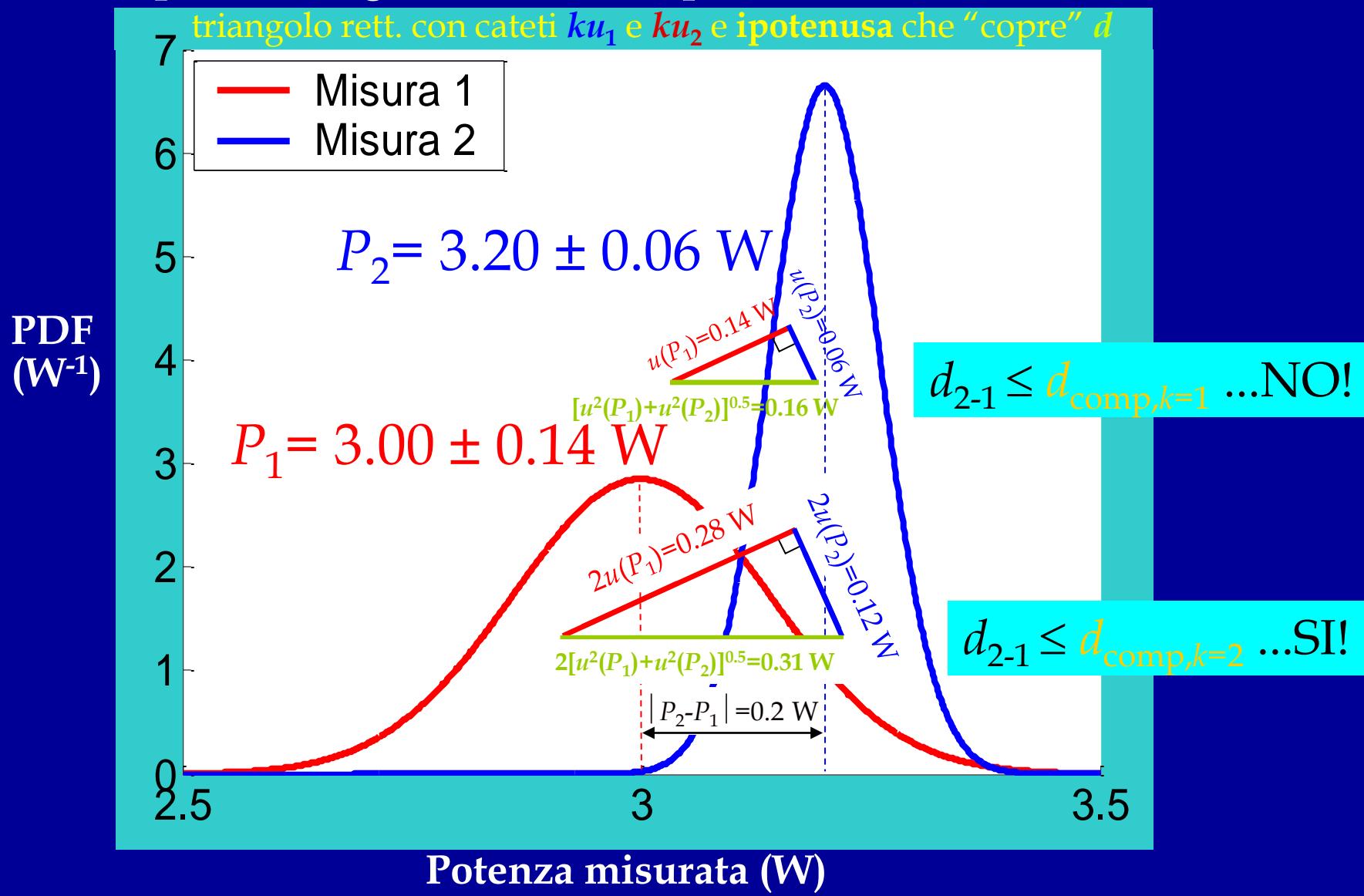
# Esercizio su compatibilità e media pesata (4/6)

Interpretazione grafica della compatibilità tra le due misure



# Esercizio su compatibilità e media pesata (5/6)

Interpretazione grafica della compatibilità tra le due misure



# Commento su distanza e compatibilità

Disponendo di due misure  $m_1 \pm u(m_1)$  e  $m_2 \pm u(m_2)$ ,

dunque poste a distanza  $d = |m_1 - m_2|$ ,

NON si può avere compatibilità se la distanza  $d$  tra i due valori di misura è maggiore della somma delle due INC estese (per un fattore di copertura  $k$ ):

per  $k=1$  se  $d > 1 \cdot [u(m_1) + u(m_2)]$  ————— perché  $d^2 > [u_1 + u_2]^2 > u_1^2 + u_2^2$

per  $k=2$  se  $d > 2 \cdot [u(m_1) + u(m_2)]$  essendo  $u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2 > u_1^2 + u_2^2$

per  $k=3$  se  $d > 3 \cdot [u(m_1) + u(m_2)]$  e dunque  $d > [u_1^2 + u_2^2]^{1/2}$  ( $\Rightarrow$  incomp.)

**Se la distanza tra le due misure è superiore alla somma delle due incertezze (moltiplicata per  $k$ ), allora non si può avere compatibilità (con fattore di copertura  $k$ )**

In generale: “Se  $d > U_1 + U_2 \Rightarrow$  NO Comp.” ( $U = ku$ )

(se invece  $d < U_1 + U_2$  occorre valutare con la formula generale)

Ogniqualvolta la distanza tra le misure è “molto maggiore” della somma delle incertezze allora non si ha compatibilità

# Esercizio su compatibilità e media pesata (6/6)

c) Ritenendo accettabile la condizione di compatibilità trovata con  $k=2$ , possiamo calcolare la miglior stima della potenza  $P$  misurata, ricorrendo al criterio della media pesata tra le misure compatibili:

$$P_{\text{MP}} = \frac{\frac{P_1}{u^2(P_1)} + \frac{P_2}{u^2(P_2)}}{\frac{1}{u^2(P_1)} + \frac{1}{u^2(P_2)}} = \frac{\frac{153 \text{ W}^{-1}}{1} + \frac{888 \text{ W}^{-1}}{1}}{\frac{1}{153 \text{ W}^{-2}} + \frac{1}{888 \text{ W}^{-2}}} = \frac{1041 \text{ W}^{-1}}{329 \text{ W}^{-2}} \cong 3.171 \text{ W}$$

**Naturalmente  $P_{\text{MP}}$  è più vicino a  $P_2$  piuttosto che a  $P_1$  essendo  $u(P_2) < u(P_1)$**

L'incertezza della media pesata è:

$$u(P_{\text{MP}}) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{u^2(P_1)} + \frac{1}{u^2(P_2)}}} = \sqrt{\frac{1}{329 \text{ W}^{-2}}} \cong 0.053 \text{ W}$$

**Naturalmente  $u(P_{\text{MP}})$  è inferiore sia a  $u(P_1) = 140 \text{ mW}$  che a  $u(P_2) = 60 \text{ mW}$**

Per cui  **$P = 3.171(53) \text{ W}$**  o anche  **$P = 3.17(6) \text{ W}$**  è il **risultato** della misura

# CAP. 2 - “COSE DA SAPERE”

## Approccio statistico e INC di misura

parametri media e dev.st., metodi di stima A e B

## INC di categoria A

significato e formule per varianza campionaria  
del valor medio di misure ripetute

## INC di categoria B

stima di varianze da intervalli di confidenza,  
INC di quantizzazione (misure digitali)

# CAP. 2 - “COSE DA SAPERE”

## INC relativa e INC estesa

definizioni, significato, utilità

## Espressione dell'INC

arrotondamenti a 2 e 1 cifra, notazione compatta

## INC composta in misure indirette

modello matematico, coeff. di sensibilità, somma di varianze e di covarianze, coeff. di correlazione, ingressi indipendenti, MIS produttoria e INC relative

# CAP. 2 - “COSE DA SAPERE”

## Compatibilità tra misure

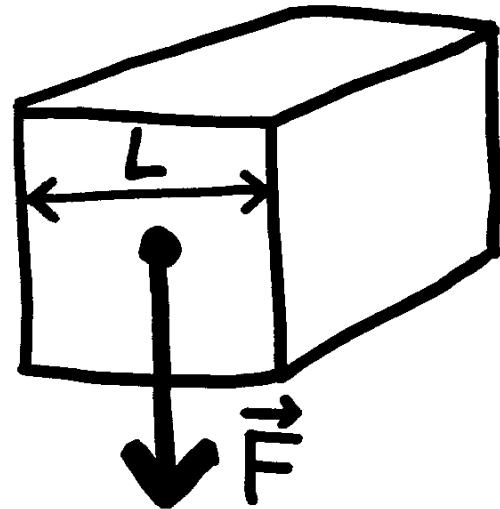
criterio di compatibilità, media pesata e INC MP tra misure compatibili

## INC dell'INC e gradi di libertà

significato, espressioni, legame tra  $\nu$  e  $u_r$ ,  
g.d.l. in misura indiretta (Welch-Satterthwaite)

# Esercizio su INC e media pesata (1/14)

ESERCIZIO media pesata e incertezza



Cubodi Al di lato  $\approx 1\text{m}$   
Calcolare il suo PESO

$$g = 9.806\ 65(33) \text{ m/s}^2$$

L misurato mediante conteggio di frange a  $\lambda = 500\text{ nm}$  ottenendo un numero di conteggi N sempre compreso tra  $N_1 = 2 \times 10^6$  e  $N_2 = 2 \times 10^6 + 40$

# Esercizio su INC e media pesata (2/14)

Per la densità  $\rho$  del materiale disponiamo di 3 possibili valori:

"C" secondo il costruttore:

$$\rho_C = 2.71 \text{ Kg/dm}^3 \text{ con incertezza di } 2 \times 10^{-5}$$

"T" da diversi testi di meccanica e materiali si ricavano  $n=9$  valori  $\rho_K$  con  $\bar{\rho}_T = \bar{\rho}_K = 2.73 \text{ Kg/dm}^3$  e dev.  $S(\rho_K) = 9 \text{ g/dm}^3$

"L" da una misura di laboratorio si ha

$$\rho_L = 2.69 \text{ Kg/dm}^3 \text{ con } u(\rho_L) = 0.02 \text{ Kg/dm}^3$$

# Esercizio su INC e media pesata (3/14)

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$F = m g = (\rho V) g = \rho L^3 g$$

relazione funzionale

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

# Esercizio su INC e media pesata (4/14)

$$\bar{F} = \bar{\rho} \bar{L}^3 \bar{g}$$

$$M(F) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 M^2(x_i)}$$

o anche

$$M_R(F) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 m_i^2 M_R^2(x_i)}$$

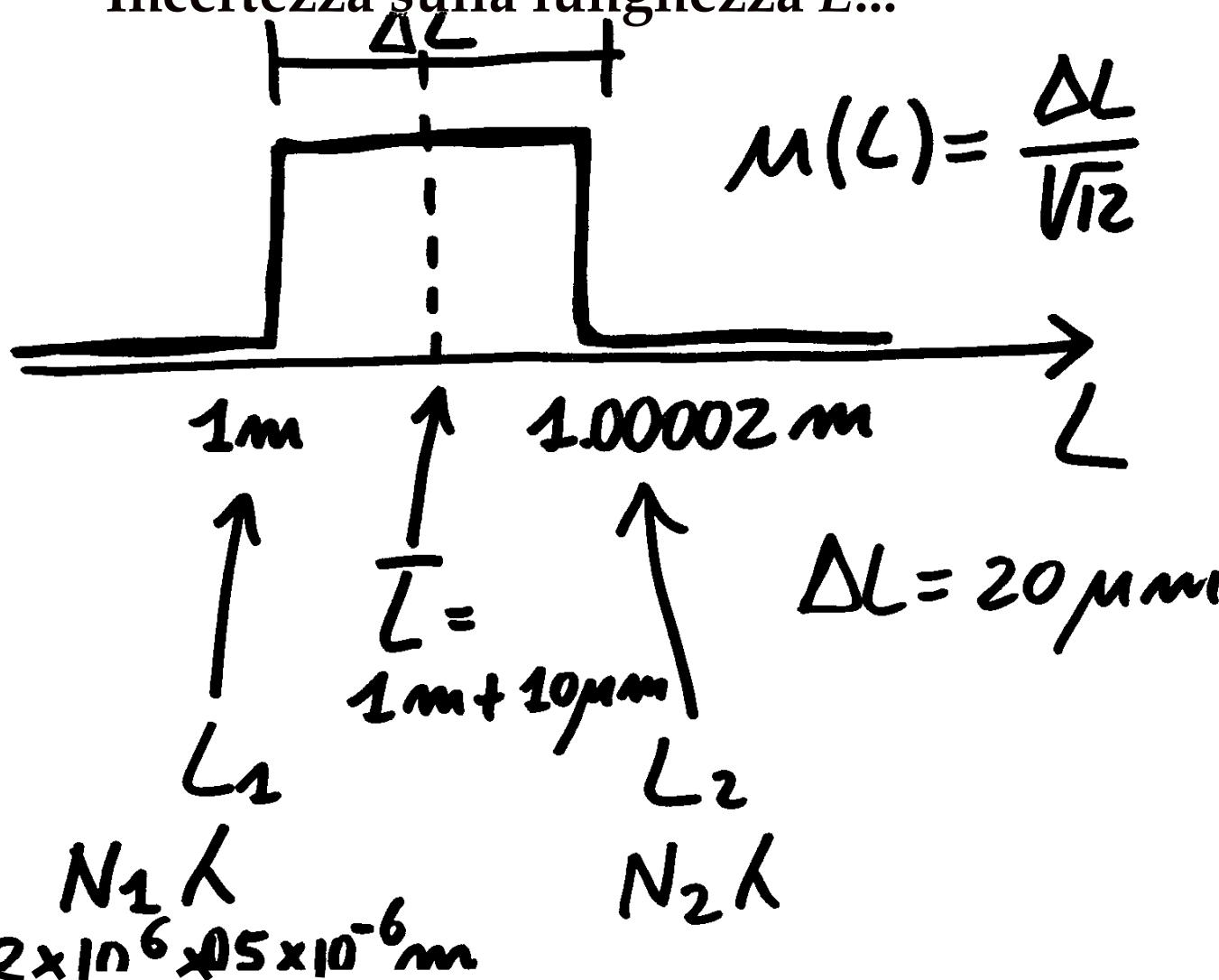
# Esercizio su INC e media pesata (5/14)

$$F = 2.71 \times 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \times (1.00001)^3 \cancel{\text{m}^3} \times \\ \times 9.80665 \text{ m/s}^2$$

$$F = 26\ 576.3 \underbrace{\text{Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}_N \approx 26.6 \text{ KN}$$

# Esercizio su INC e media pesata (6/14)

Incertezza sulla lunghezza  $L$ ...



# Esercizio su INC e media pesata (7/14)

$$M(\bar{L}) = M(L) = \frac{20\mu m}{\sqrt{12}} \cong 5.8\mu m$$

$$M_a(L) = \frac{M(L)}{L} \cong 6 \times 10^{-6}$$

$$M(g) = 33 \times 10^5 \text{ m/s}^2$$

$$M_a(g) = \frac{M(g)}{a} = \frac{33}{980\ 665} \cong 3.4 \times 10^{-5}$$

# Esercizio su INC e media pesata (8/14)

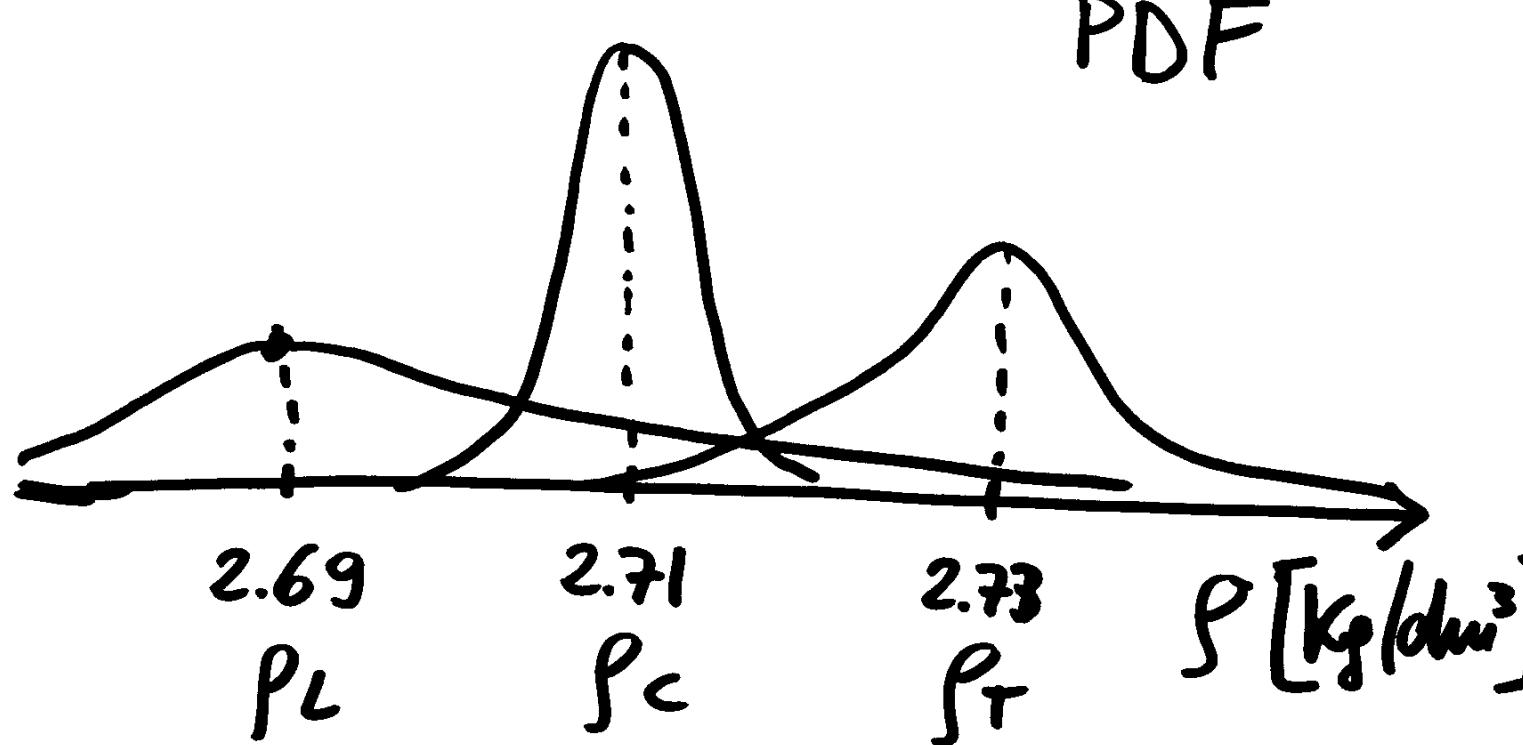
densità  $\rho$

$$\rho_C = 2.71 \text{ Kg/dm}^3 \quad u(\rho_C) \approx 5.4 \times 10^{-5} \text{ Kg/dm}$$

$$\rho_T = 2.73 \text{ Kg/dm}^3 \quad u(\rho_T) = \frac{s(\rho_K)}{\sqrt{n}} = \\ = \frac{9 \times 10^{-3} \text{ Kg/dm}^3}{3} = 3 \times 10^{-3} \text{ Kg/dm}^3$$

$$\rho_L = 2.69 \text{ Kg/dm}^3 \quad u(\rho_L) = 2 \times 10^{-2} \text{ Kg/dm}^3$$

# Esercizio su INC e media pesata (9/14)



COMPATIBILITÀ fra  $\rho_\alpha$  e  $\rho_\beta$

$$|\rho_\alpha - \rho_\beta| \leq K \sqrt{\mu^2(\rho_\alpha) + \mu^2(\rho_\beta)}$$

# Esercizio su INC e media pesata (10/14)

con  $K = 1$  risultano comp.  
le misure  $\rho_L$  e  $\rho_C$  mentre  
è incompatibile  $\rho_T$

Per la compatibilità di  $\rho_T$  con  $\rho_L$  occorre un  $k_{T-L}=2$  mentre per la compatibilità di  $\rho_T$  con  $\rho_C$  occorre addirittura un  $k_{T-C}=6.67$  (troppo alto!)

Per le stime di  $\rho$  e  $\mu(\rho)$   
ricorso al criterio della  
**MEDIA PESATA** tra mis  
comp.

# Esercizio su INC e media pesata (11/14)

$$\rho = \frac{\frac{\rho_L}{m^2(\rho_L)} + \frac{\rho_C}{m^2(\rho_C)}}{\frac{1}{m^2(\rho_L)} + \frac{1}{m^2(\rho_C)}} \cong \rho_C = 2.71 \text{ Kg/dm}^3$$

$$m^2(\rho) = \frac{1}{\frac{1}{m^2(\rho_L)} + \frac{1}{m^2(\rho_C)}} = m^2(\rho_C)$$

$$m(\rho) \cong m(\rho_C) \cong 5.4 \times 10^{-5} \text{ Kg/dm}^3$$
$$m(\rho) = 1/\rho^2 \cong 2 \times 10^{-5}$$

# Esercizio su INC e media pesata (12/14)

$$\begin{aligned} \mu^2(F) &= \left[ \frac{\partial F}{\partial \rho} \right]^2 \mu^2(\rho) + \left[ \frac{\partial F}{\partial L} \right]^2 \mu^2(L) + \\ &\quad + \left[ \frac{\partial F}{\partial g} \right]^2 \mu^2(g) = \\ &= \left[ L^3 g \right]^2 \mu^2(\rho) + \left[ 3\rho L^2 g \right]^2 \mu^2(L) + \\ &\quad \left[ \rho L^3 \right]^2 \mu^2(g) \end{aligned}$$

$$\bar{F} = \bar{\rho} \bar{L}^3 \bar{g}$$

# Esercizio su INC e media pesata (13/14)

$$\frac{\mu^2(F)}{F^2} = \frac{\mu^2(p)}{p^2} + \frac{9\mu^2(L)}{L^2} + \frac{\mu^2(g)}{g^2}$$

$$\begin{aligned}\mu_n(F) &= \sqrt{\mu_n^2(p) + 9\mu_n^2(L) + \mu_n^2(g)} \equiv \\ &\equiv \sqrt{(2 \times 10^{-5})^2 + 9(6 \times 10^{-6})^2 + (3.4 \times 10^{-5})^2}\end{aligned}$$

# Esercizio su INC e media pesata (14/14)

$$= \sqrt{4 + 3.24 + 11.56} \times 10^{-5} =$$

$$= \sqrt{18.8} \times 10^{-5} \approx 4.4 \times 10^{-5}$$

$$\mu(F) = \mu_n(F) \times F \approx 1.2 N$$

$$F = (26576.3 \pm 1.2) N = 26576(2)N$$