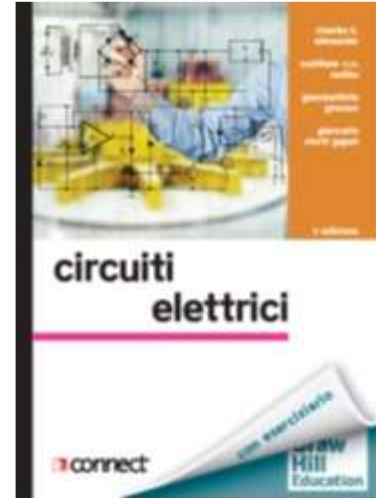


Circuiti Elettrici



Capitolo 10

Circuiti con accoppiamento magnetico



Prof. Cesare Svelto

Circuiti con accoppiamento magnetico – Cap. 10

10.0 Introduzione

10.1 Trasformatore ideale

10.2 Analisi di circuiti con trasformatori ideali

10.3 Autotrasformatore ideale

10.4 Induttori accoppiati (mutuo induttore)

10.5 Analisi di circuiti con induttori accoppiati

10.6 Circuito equivalente del trasformatore reale

10.7 Applicazioni line elettriche di trasmissione, trasformatore di misura,
trasformatore di isolamento, adattamento di impedenza

10.X Sommario

10.0 Introduzione

- Componente **trasformatore** di vasto impiego nella distribuzione e uso energia elettrica per “regolare” tensione e corrente, disaccoppiare circuiti, *etc.*
- **Accoppiamento magnetico** tra due circuiti non in contatto elettrico diretto (e^- non va da un circuito all'altro)
Un **flusso magnetico condiviso**, grazie alla legge di Faraday, provoca **variazioni di tensione indotta in un circuito** in seguito a **variazioni della corrente nell'altro circuito**
- Due nuovi elementi ideali: **trasformatore ideale** (resistivo) e **induttori accoppiati** (dinamico).
Analisi dei circuiti e applicazioni. Trasformatore reale

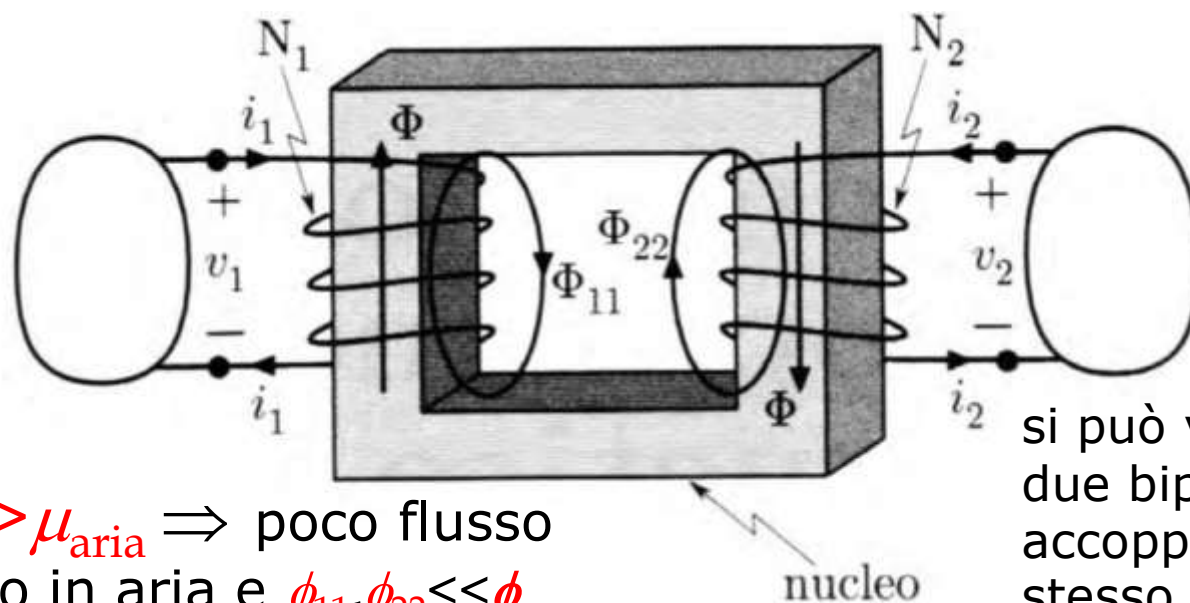
10.1 Trasformatore ideale

Trasformatore è un elemento circuitale a **4 terminali** con **2 avvolgimenti** di filo conduttore attorno a un **nucleo** comune (alta $\mu=B/H$ induzione/campo magn.)

Avvolgimento **primario** con N_1 spire e v_1 e i_1

Avvolgimento **secondario** con N_2 spire e v_2 e i_2

Le **tensioni** dipendono dalle **variazioni** delle correnti



se $\mu_{\text{nucleo}} \gg \mu_{\text{aria}} \Rightarrow$ poco flusso
è accoppiato in aria e $\phi_{11}, \phi_{22} \ll \phi$

si può vedere come
due bipoli (induttivi)
accoppiati da uno
stesso flusso magn. ϕ

10.1 Valori di permeabilità μ_0 e μ_r

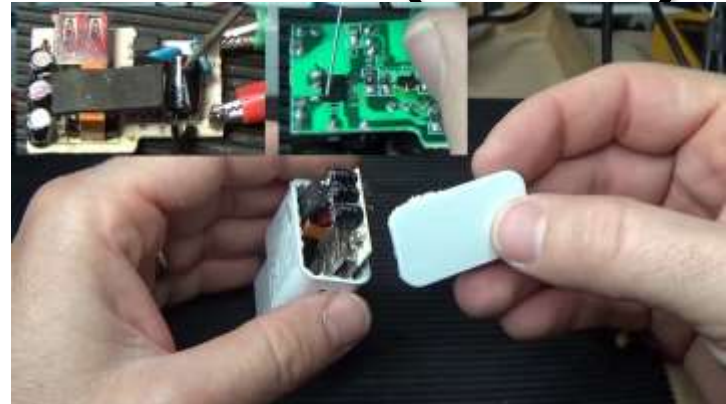
Permeabilità magnetica del **vuoto** $\mu_0 \cong 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

Permeabilità magnetica di un **materiale** $\mu = \mu_r \mu_0$

Valori tipici di permeabilità relativa $\mu_r = \mu / \mu_0$:

materiali magnetici	(1) μ_r	materiali amagnetici	(1) μ_r
ferro	$10^4 \div 10^5$	vuoto	1
ferrite (MnZn)	$10^3 \div 10^5$	aria	1
acciaio	$200 \div 5000$	acqua	0.999992
nicel	$400 \div 1100$	vetro	0.999987
permalloy	10 000	teflon	1
mu-metal	50 000	calcestruzzo	1
metglas	1 000 000	legno	7

10.1 Trasformatore (foto)



Trasformatori di potenza in olio



**Alim. USB
con Trasf.
STUDENTE**
Notargiacomo
(CME 2019-20)

10.1 Trasformatore ideale (flussi)

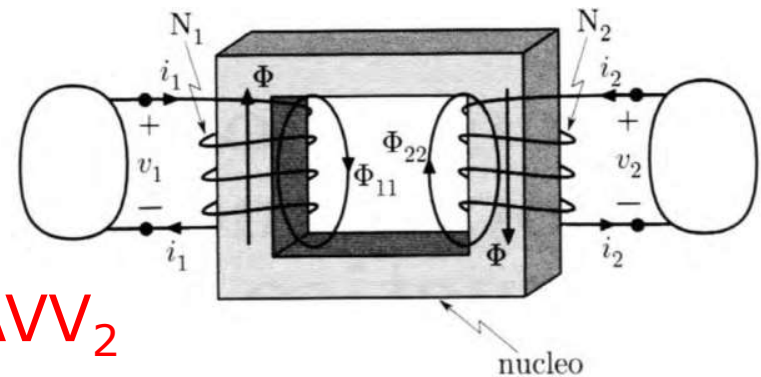
Correnti i_1 e i_2 creano campi di **induzione magnetica** che "variando" inducono **tensioni variabili** v_1 e v_2

Distinguiamo 3 flussi:

ϕ_{11} da i_1 sulle spire di AVV_1

ϕ_{22} da i_2 sulle spire di AVV_2

$\phi = \phi_{TOT}$ da i_1, i_2 su spire AVV_1, AVV_2



ϕ_{11} e ϕ_{22} "**flussi dispersi**" non contribuiscono all'accoppiamento e per **ipotesi** $\phi_{11}, \phi_{22} \ll \phi$

"**flusso principale**" (caso $\mu_{\text{nucleo magnetico}} \gg \mu_{\text{aria}}$)

Legge di **Faraday**:

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \qquad v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

10.1 Trasformatore ideale (tensioni)

Legge di Faraday: $v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$ $v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} = n \text{ **rapporto spire** } \Rightarrow v_2 = n v_1$$

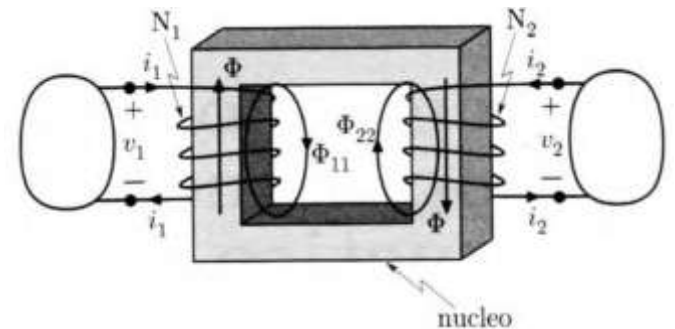
Il rapporto tra la tensione del secondario e la tensione del primario è il rapporto spire

Se $n > 1$ trasformatore **elevatore**

$v_2 > v_1$ (tensione più alta al secondario)

Se $n < 1$ trasformatore **riduttore**

$v_1 > v_2$ (tensione più alta al primario)



10.1 Trasformatore ideale (correnti)

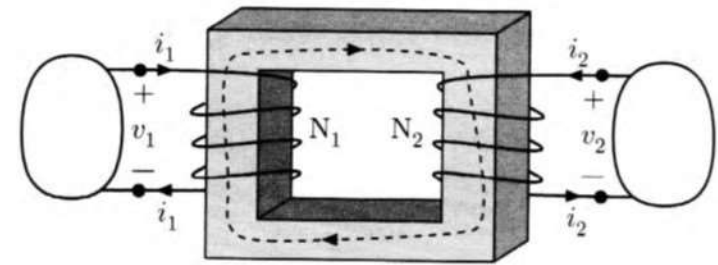
Ulteriore **ipotesi** $\mu_{\text{nucleo}} \rightarrow \infty$

\Rightarrow essendo $B = \mu H$ finito, deve essere $H = 0$ nel nucleo

Applicando la **legge di Ampere**:

$$\oint H \cdot dl = i_{\text{conc.}} = N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$$

$$\frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad i_2 = -\frac{1}{n} i_1$$



Il rapporto tra la corrente del secondario e la corrente del primario è il reciproco del rapporto spire (con segno "-")

Il **trasformatore che eleva la tensione riduce la corrente**
Sembra logico dato che **non aumenta la potenza $p=vi$!**

10.1 Trasformatore ideale (fasori)

Le relazioni correnti-tensioni sono istantanee (indip. t) e lineari (**TRASF è elemento resistivo e lineare**)

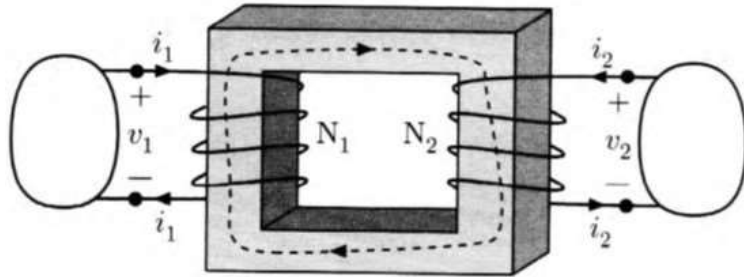
In **regime sinusoidale**, è semplice riportare le relazioni caratteristiche nel dominio dei **fasori**:

$$V_2 = n V_1 \qquad I_2 = -\frac{1}{n} I_1$$

Il trasformatore ideale modifica il rapporto tra ampiezze di tensioni e correnti sinusoidali dal primario al secondario

10.1 Trasformatore ideale (versi)

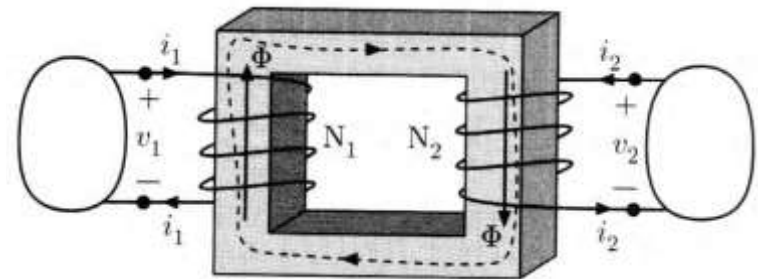
Inversione del verso di avvolgimento del secondario:



$$v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} = n \Rightarrow v_2 = n v_1$$

$$\frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{n} \Rightarrow i_2 = -\frac{1}{n} i_1$$



$$v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad v_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

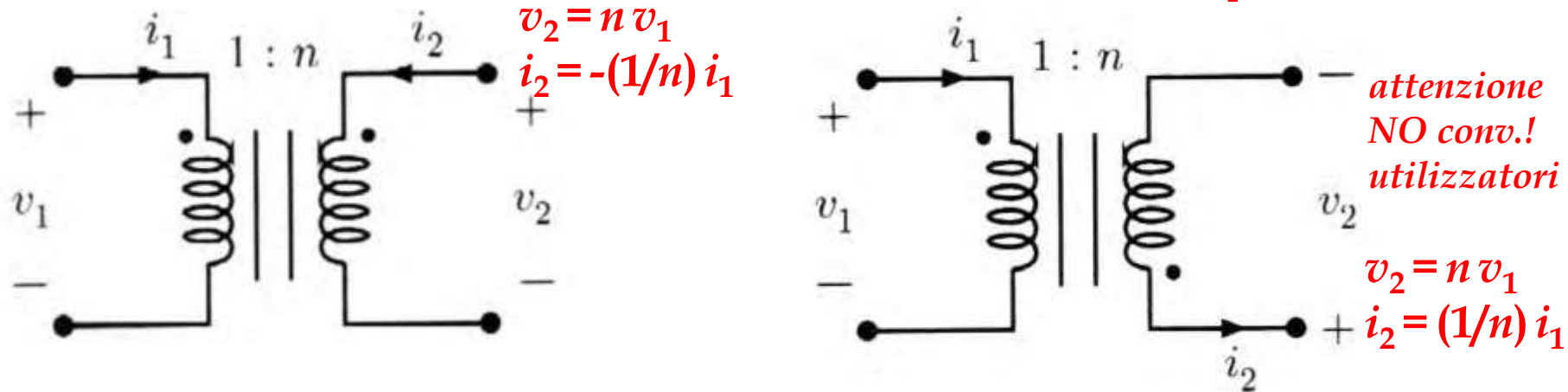
$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{N_2}{N_1} = -n \Rightarrow v_2 = -n v_1$$

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n} \Rightarrow i_2 = \frac{1}{n} i_1$$

Cambia il segno delle relazioni caratteristiche (dipende da come sono avvolti primario e secondario) \Rightarrow **convenzione dei puntini**
I puntini individuano i terminali in base a come sono gli avvolgimenti

10.1 Trasformatore ideale (puntini)

Simbolo trasformatore e **convenzione dei puntini**:



Tensioni entrambe positive (o entrambe negative) nei terminali con il puntino è $v_2 = n v_1$

Se tensioni di **polarità opposta** (una pos. e una neg.) nei terminali con il puntino è $v_2 = -n v_1$

Correnti entrambe entranti (o entrambe uscenti) dai terminali con il puntino è $i_2 = -(1/n) i_1$

Se correnti di **verso opposto** (una entra e una esce) dai terminali con il puntino è $i_2 = (1/n) i_1$

10.1 Trasformatore ideale (potenza)

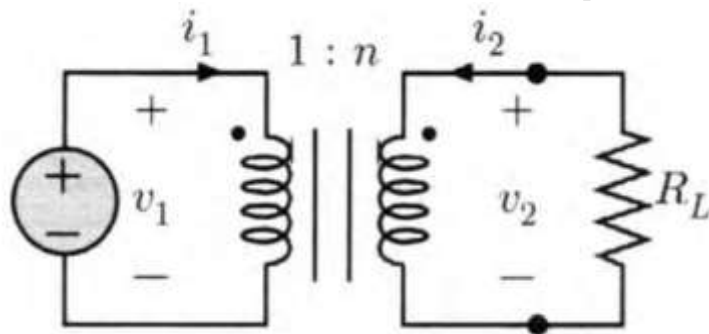
Potenza p somma di p_1 al primario e p_2 al secondario

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t)$$

Sostituendo $v_2 = nv_1$ e $i_2 = -(1/n)i_1$ si ottiene:

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) = v_1(t)i_1(t) + nv_1(t)\left(-\frac{1}{n}\right)i_1(t) = 0$$

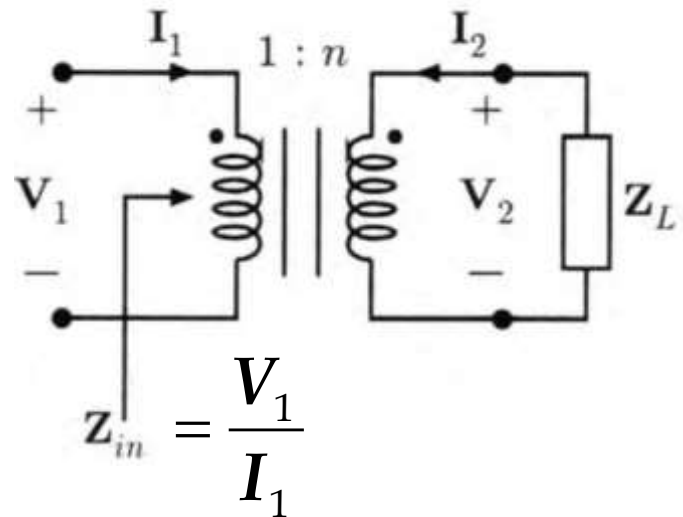
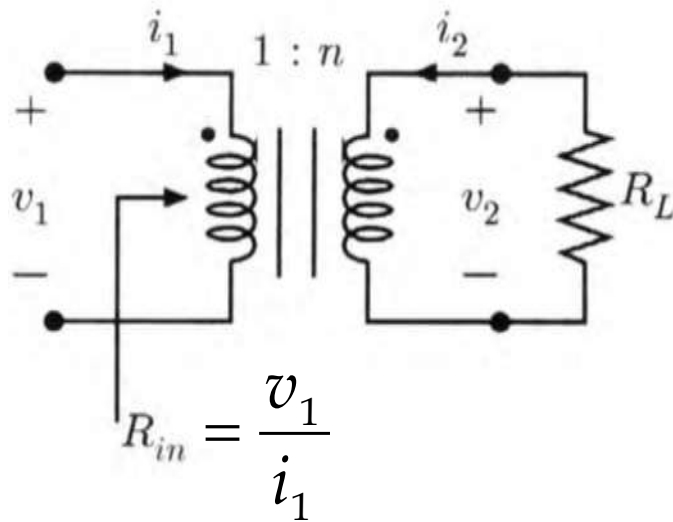
La potenza istantanea assorbita dal trasformatore è identicamente nulla (**elemento neutro**)



Ad es. la potenza erogata dal generatore (al primario) coincide in ogni t con la potenza assorbita dal carico (al secondario)

10.1 Trasformatore ideale (trasf. Z)

Secondario chiuso su un carico R_L (o Z_L in regime sin.) e **valutiamo $R_{eq}=R_{in}$ (o $Z_{eq}=Z_{in}$) vista al primario**



Al secondario $v_2 = -R_L i_2$ e per il trasformatore $v_1 = v_2/n$ e $i_1 = -n i_2$ (analogamente con i fasori), dunque:

$$R_{in} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{v_2/n}{-n i_2} = -\frac{1}{n^2} \frac{v_2}{i_2} = -\frac{1}{n^2} (-R_L) = \frac{R_L}{n^2} \quad Z_{in} = \frac{Z_L}{n^2}$$

10.1 Trasformatore ideale (trasf. Z)

Con il secondario chiuso su impedenza Z_L
in ingresso al primario si vede $Z_{in} = Z_L / n^2$

Z_{in} è la Z_L al secondario **riportata al primario**
o **riflessa sul primario** (dividendola per n^2)

Z_L induttore (**induttanza L**) $\Rightarrow Z_{in} = j\omega L / n^2$
che equivale a un induttore di **induttanza L/n^2**

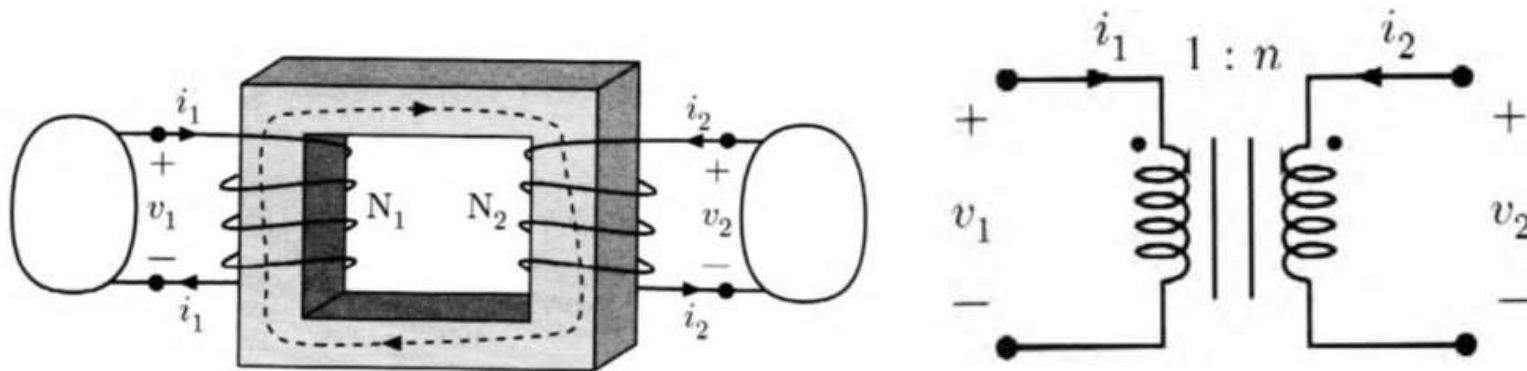
Z_L condensatore (**capacità C**) $\Rightarrow Z_{in} = 1 / (j\omega C n^2)$
che equivale a un condensatore di **capacità $C n^2$**

come per Effetto Miller ma senza OP-AMP e con $g > 1$ o < 1

$$|Z_{in}| = |Z_L| / n^2 \quad (>=<|Z_L|) \quad \text{e} \quad \angle Z_{in} \equiv \angle Z_L$$

10.2 Analisi circuiti con trasf. ideale

Per l'analisi di un circuito con trasformatori si usano le tecniche usuali: KVL e KCL e 2 relazioni caratteristiche



Non è possibile esprimere i_1 e i_2 in funzione di v_1 e v_2 (come per i bipoli già visti) cmq. rimangono due incognite

Il trasformatore introduce due bipoli e 4 incognite ma legate da 2 relazioni (rel. car. trasformatore)

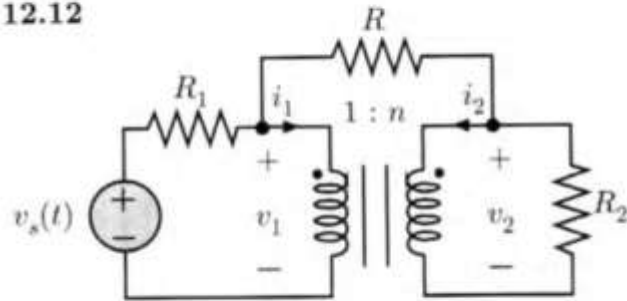
Infatti sussistono le **due relazioni**:

$$v_2 = n v_1 \quad \text{e} \quad i_2 = (-1/n) i_1$$

10.2 Esempio di calcolo (12.1)

Ricavare i valori di v_1 , v_2 , i_1 e i_2 nel circuito in Figura 12.12.

Figura 12.12

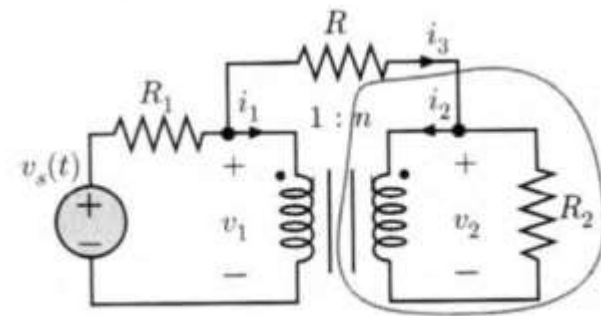


Soluzione

È facile verificare che il resistore R non è percorso da corrente. Basta applicare la LKC alla linea

chiusa mostrata in Figura 12.13. La corrente i_3 è l'unica che attraversa la linea chiusa, dunque deve essere nulla.

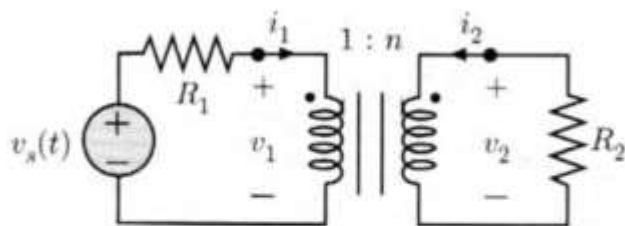
Figura 12.13 La corrente i_3 è nulla, pertanto il resistore R può essere rimosso.



10.2 Esempio di calcolo (12.1)

Il resistore di resistenza R può essere eliminato, ottenendo il circuito in Figura 12.14.

Figura 12.14



Applicando la LKT alle due maglie si ottiene:

$$v_s = R_1 i_1 + v_1 \quad (12.15a)$$

$$v_2 = -R_2 i_2 \quad (12.15b)$$

Abbiamo due equazioni con quattro incognite. A queste equazioni dobbiamo aggiungere le due

relazioni del trasformatore:

$$v_2 = n v_1 \quad i_2 = -\frac{1}{n} i_1$$

Sostituendo le relazioni precedenti nelle (12.15) e risolvendo il sistema si ottiene:

$$i_1 = \frac{n^2 v_s}{R_2 + n^2 R_1} \quad v_1 = \frac{R_2 v_s}{R_2 + n^2 R_1}$$

Infine, utilizzando le relazioni del trasformatore, ricaviamo i_2 e v_2 :

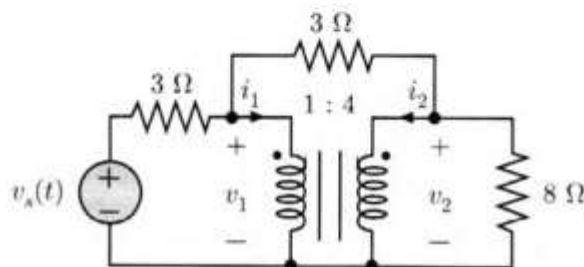
$$i_2 = -\frac{1}{n} i_1 = -\frac{n v_s}{R_2 + n^2 R_1}$$
$$v_2 = n v_1 = \frac{R_2 n v_s}{R_2 + n^2 R_1}$$

Tutte le grandezze sono proporzionali a v_s poiché il circuito è lineare.

10.2 Esempio di calcolo (12.2)

Ricavare i valori di v_1 , v_2 , i_1 e i_2 nel circuito in Figura 12.15.

Figura 12.15 Gli avvolgimenti del trasformatore sono connessi attraverso il terminale inferiore.



Soluzione

Il circuito è simile a quello dell'Esempio 12.1, solo che ora gli avvolgimenti del trasformatore hanno i terminali in basso collegati da un corto circuito. La corrente nel resistore da $3\ \Omega$ non è nulla, quindi il resistore non può essere eliminato, come abbiamo fatto nell'esempio precedente.

In questo caso utilizziamo l'**analisi nodale**, scrivendo la LKC per i nodi ① e ② indicati in Figura 12.16; il riferimento è il terminale comune del trasformatore.

Al nodo ① abbiamo

$$\frac{v_1 - v_s}{3} + \frac{v_1 - v_2}{3} + i_1 = 0 \quad (12.16)$$

al nodo ②

$$\frac{v_2}{8} + \frac{v_2 - v_1}{3} + i_2 = 0 \quad (12.17)$$

Le relazioni del trasformatore sono:

$$v_2 = 4v_1 \quad i_2 = -0,25i_1 \quad (12.18)$$

Sostituendo le (12.18) nelle (12.16) e (12.17), si ottiene il seguente sistema di due equazioni nelle due incognite v_1 e i_1 :

$$-2v_1 + 3i_1 = v_s$$

$$1,5v_1 - 0,25i_1 = 0$$

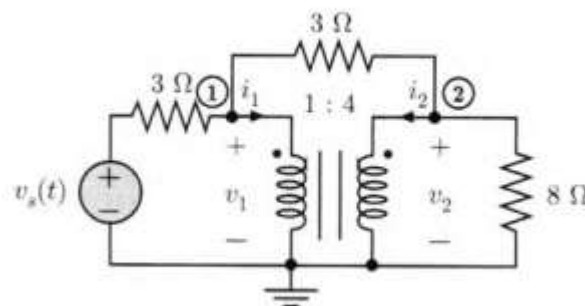
La soluzione è

$$v_1 = 0,0625 v_s \quad i_1 = 0,375 v_s$$

Le altre grandezze, v_2 e i_2 , si ottengono con le (12.18):

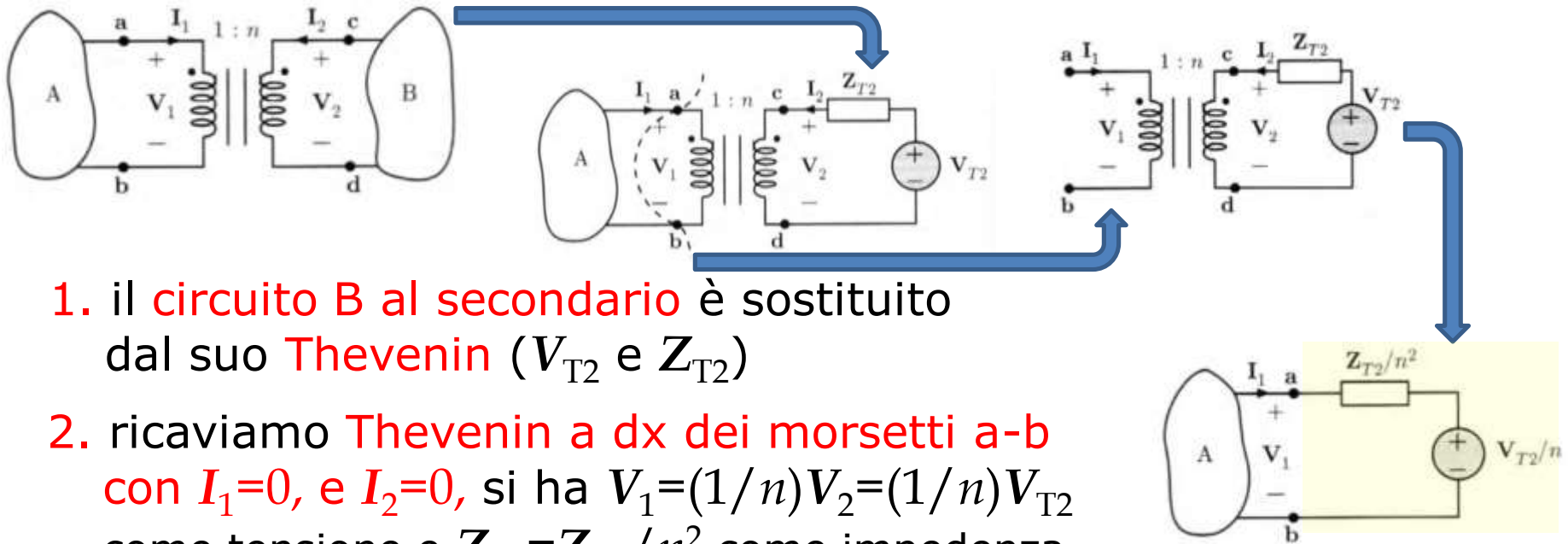
$$v_2 = 0,25 v_s \quad i_2 = -0,09375 v_s$$

Figura 12.16



10.2 Riduzione al primario/secondario

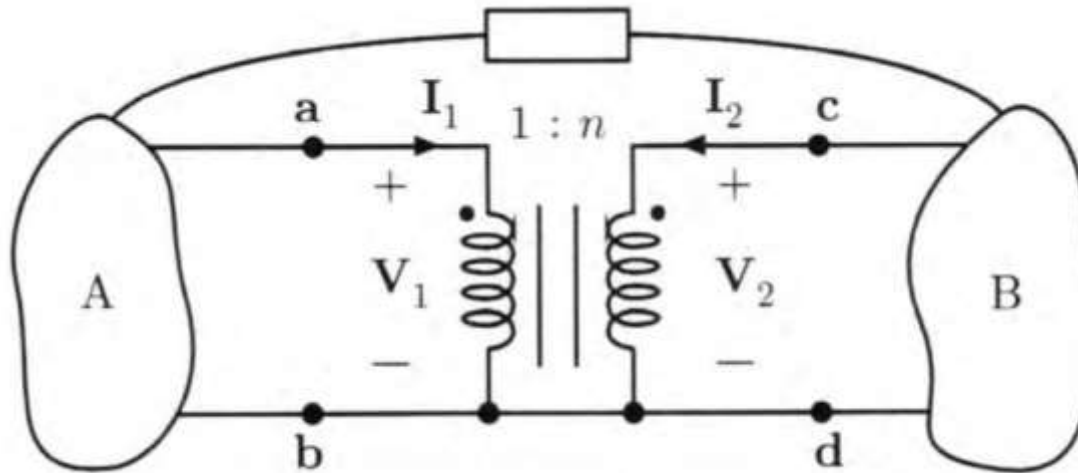
Si semplifica il circuito **eliminando il trasformatore** grazie al teorema di Thevenin (si riduce il circuito al secondario/primario al suo bipolo Thevenin equivalente e poi lo si riporta, impedenza e tensione, al primario/secondario)



1. il **circuito B al secondario** è sostituito dal suo **Thevenin** (V_{T2} e Z_{T2})
2. ricaviamo **Thevenin a dx dei morsetti a-b** con $I_1=0$, e $I_2=0$, si ha $V_1=(1/n)V_2=(1/n)V_{T2}$ come tensione e $Z_{T1}=Z_{T2}/n^2$ come impedenza
3. sostituiamo il **circuito equivalente riportato al primario** (gen. di Thevenin con tensione V_{T2}/n e impedenza Z_{T2}/n^2)

12.2 Riduzione non effettuabile

La **riduzione** del circuito riportando gli equivalenti Thevenin da un lato all'altro del trasformatore è utile ma **non è sempre attuabile se vi sono altre connessioni tra i due lati del trasformatore**

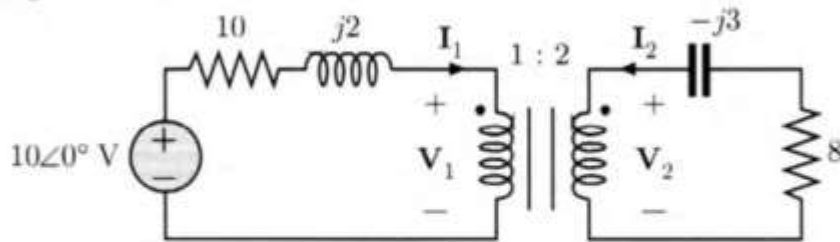


In tali casi **occorre risolvere con l'analisi nodale** (come già visto nell'Es. 12.2)

10.2 Esempio di calcolo (12.3)

Per il circuito in Figura 12.22 disegnare i circuiti equivalenti riportati al primario e al secondario. Tutte le impedenze sono espresse in ohm.

Figura 12.22

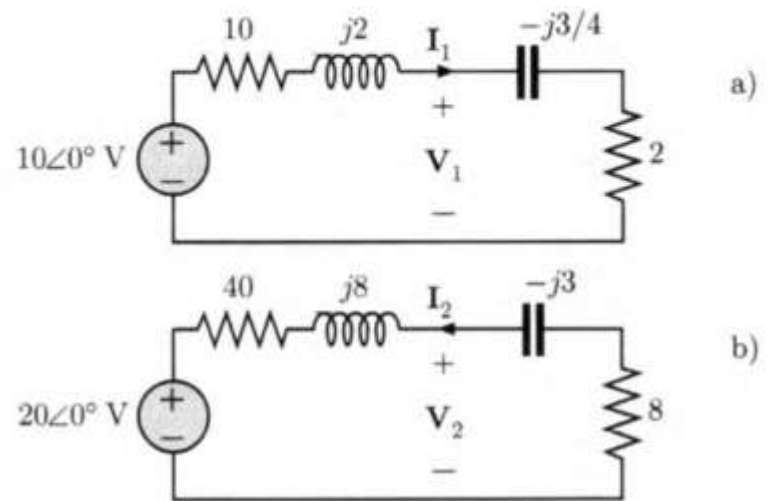


Soluzione

Con riferimento alla Figura 12.18, abbiamo: $V_{T2} = 0$ V, $Z_{T2} = 8 - j3 \Omega$. Il circuito equivalente riportato al primario è mostrato in Figura 12.23a.

Per il bipolo di chiusura al primario abbiamo: $V_{T1} = 10\angle 0^\circ$ V, $Z_{T1} = 10 + j2 \Omega$. Il circuito equivalente riportato al secondario è mostrato in Figura 12.23b.

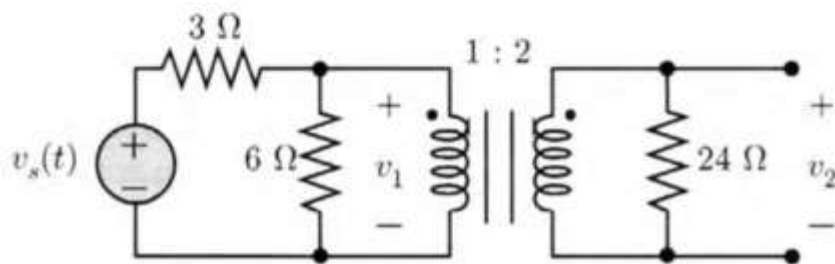
Figura 12.23



10.2 Esempio di calcolo (12.4)

Ricavare il rapporto di trasferimento in tensione v_2/v_s in Figura 12.24.

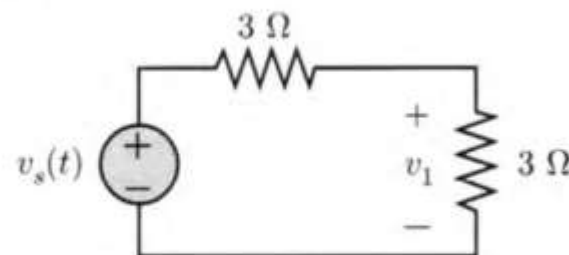
Figura 12.24



Soluzione

Conviene riportare la resistenza da $24\ \Omega$ al primario, sostituendo il trasformatore con una resistenza equivalente pari a $24/4 = 6\ \Omega$. Questa è in parallelo al resistore da $6\ \Omega$, quindi si ha lo schema in Figura 12.25.

Figura 12.25



La tensione v_1 vale perciò

$$v_1 = \frac{v_s}{2}$$

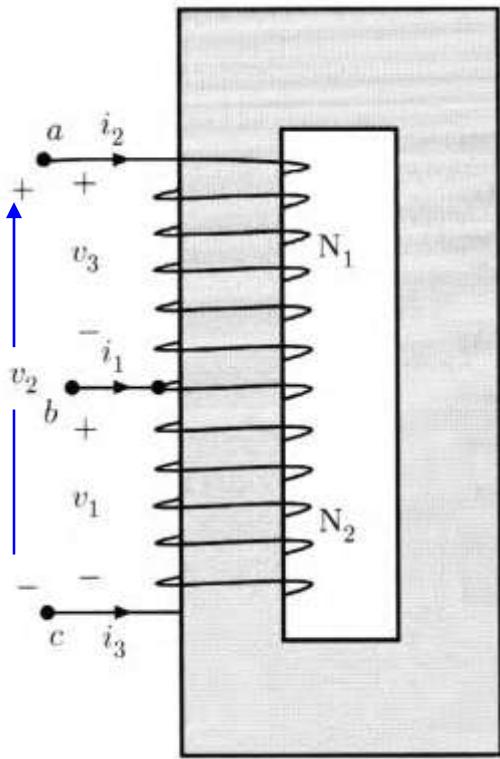
Tornando al circuito originale, si ottiene:

$$v_2 = 2v_1 = v_s$$

Il rapporto di trasferimento è unitario.

10.3 Autotrasformatore ideale

Se non occorre un isolamento elettrico tra primario e secondario, si può usare **un unico avvolgimento con una presa intermedia**: si ha un **autotrasformatore**



$$v_3 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad v_1 = N_2 \frac{d\phi}{dt} \quad v_1 + v_3 = v_2$$

$$v_2 = \frac{N_1 + N_2}{N_2} v_1 = n v_1$$

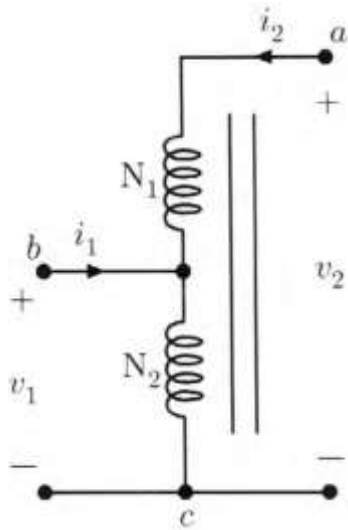
$$N_1 i_2 - N_2 i_3 = 0 \quad i_2 + i_3 + i_1 = 0$$

$$i_2 = -\frac{N_2}{N_1 + N_2} i_1 = -\frac{1}{n} i_1$$

$$n = \frac{N_1 + N_2}{N_2} > \frac{N_1}{N_2}$$

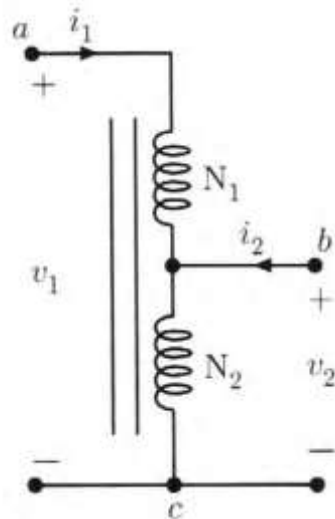
rapporto di trasformazione

10.3 Autotrasformatore ideale



tra v_1 e v_2 si ha un
innalzamento di tensione
più "forte" di N_1/N_2

$$v_2 = \frac{N_1 + N_2}{N_2} v_1 \quad i_2 = -\frac{N_2}{N_1 + N_2} i_1$$



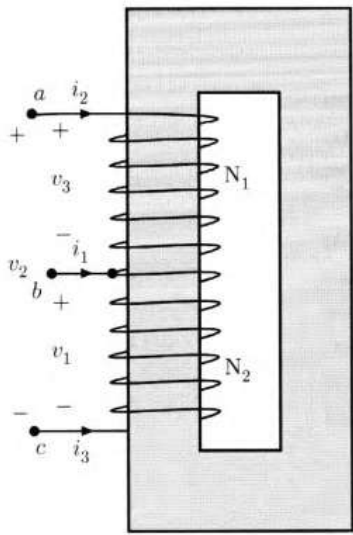
tra v_1 e v_2 si ha un
abbassamento di tensione
più "forte" di N_2/N_1

$$v_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2} v_1 \quad i_2 = -\frac{N_1 + N_2}{N_2} i_1$$

10.3 Autotrasformatore ideale

Per un rapporto di trasformazione $n=(N_1+N_2)/N_2$
un trasformatore richiede (N_1+N_2) spire al secondario
e N_2 spire al primario ($N_{TOT}=N_1+2N_2$)

L'autotrasformatore richiede **meno spire**: solo (N_1+N_2)



VANTAGGI: meno ingombro e meno costo

SVANTAGGI:

manca isolamento;
dimensionamento unico per il filo
dell'avvolgimento

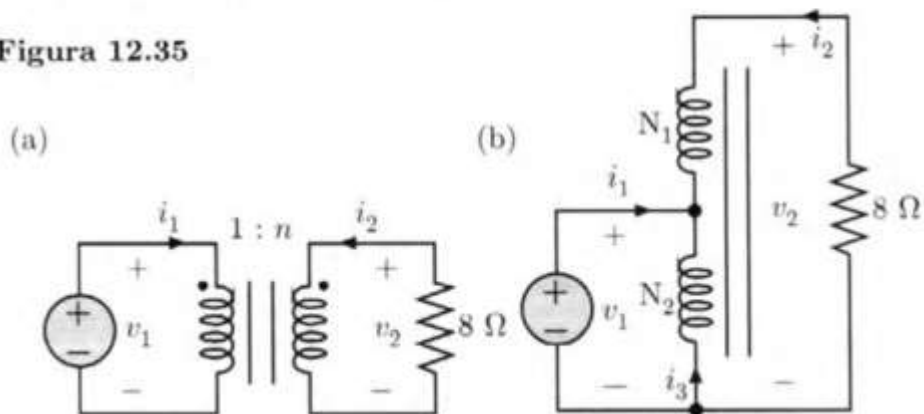
per $v_{\max} = \text{MAX}(v_1, v_2)$

e per $i_{\max} = \text{MAX}(i_1, i_2)$

10.3 Esempio di calcolo (12.7)

Confrontiamo lo schema con trasformatore in Figura 12.35a con quello in Figura 12.35b che utilizza un autotrasformatore, supponendo $v_1(t) = 5 \cos(\omega t)$ e $v_2(t) = 20 \cos(\omega t)$.

Figura 12.35



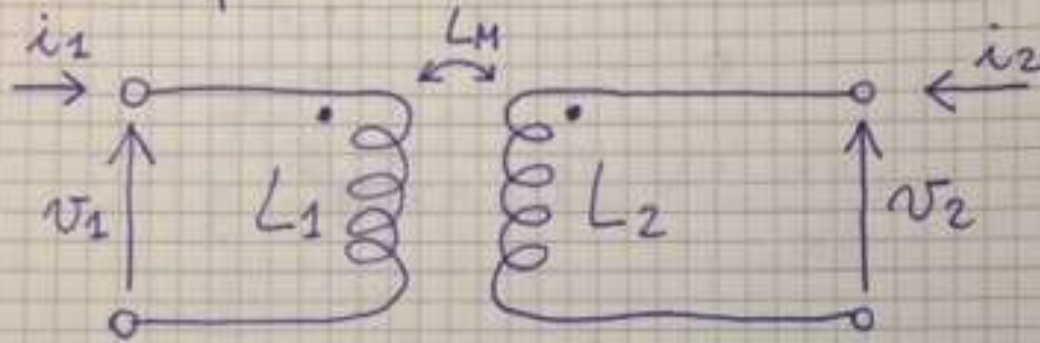
Soluzione

Il rapporto di trasformazione n deve essere pari a 4; nello schema col trasformatore possiamo utilizzare N spire per il primario e $4 N$ spire per il secondario, per un totale di $5 N$ spire. Nel caso dell'autotrasformatore possiamo porre $N_2 = N$ e $N_1 = 3 N$, per un totale di $4 N$ spire, con una riduzione del 20%. Per quanto riguarda le correnti, in entrambi i casi abbiamo $i_1 = 10 \cos(\omega t)$, $i_2 = -2,5 \cos(\omega t)$. Nel caso dell'autotrasformatore, inoltre, si ha

$$i_3 = -i_1 - i_2 = -7,5 \cos(\omega t)$$

10.4 Induttori accoppiati (L_M)

MUTUO INDUTTORE : è un doppio bipolo
I suoi parametri sono la auto e la mutua induttanza



$L_M > 0$
(H) = (henry)

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_M \frac{di_2}{dt}$$

elemento dinamico

$$v_2 = L_M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

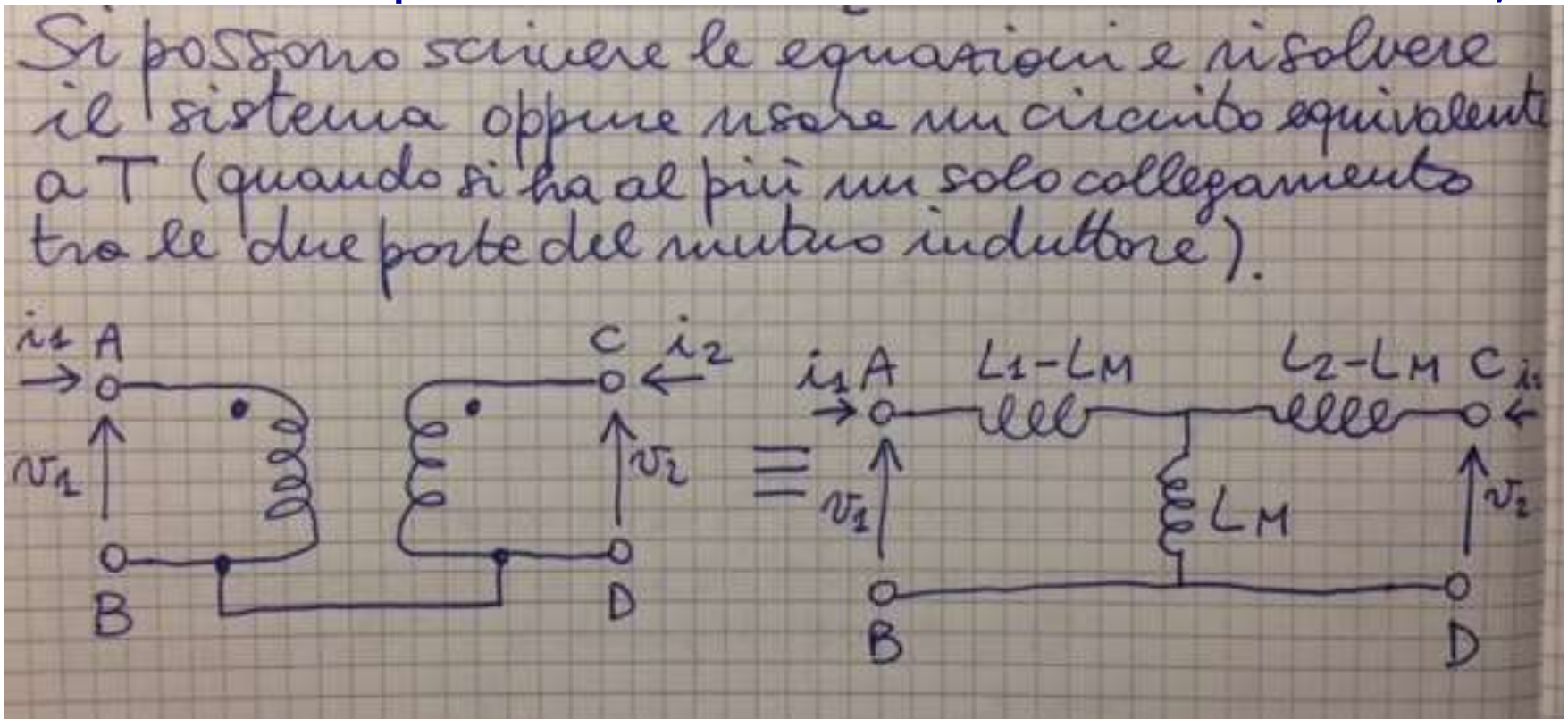
$$\bar{V}_1 = j\omega \overset{x_1}{\underbrace{L_1}} \bar{I}_1 + j\omega \overset{x_M}{\underbrace{L_M}} \bar{I}_2$$

$$\bar{V}_2 = j\omega L_M \bar{I}_1 + j\omega \overset{x_2}{\underbrace{L_2}} \bar{I}_2$$

10.4 Induttori accoppiati (L_M)

La **mutua induttanza** L_M è dovuta a quella parte di **flusso magnetico** che risulta **accoppiato con entrambi gli induttori**. Risulta sempre $L_M < (L_1 L_2)^{1/2}$

Usando le eq. caratteristiche del mutuo induttore,



10.5 Analisi di circuiti con induttori accoppiati (potenza)

Dalle relazioni tensioni-correnti degli induttori accoppiati

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega L_M I_2$$

$$V_2 = j\omega L_M I_1 + j\omega L_2 I_2$$

ricaviamo la **potenza complessa S assorbita** dagli induttori:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} (V_1 I_1^* + V_2 I_2^*) = \dots = \\ &= \frac{1}{2} j\omega L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} j\omega L_2 I_2^2 + j\omega L_M I_1 I_2 \cos(\theta_{i1} - \theta_{i2}) \end{aligned}$$

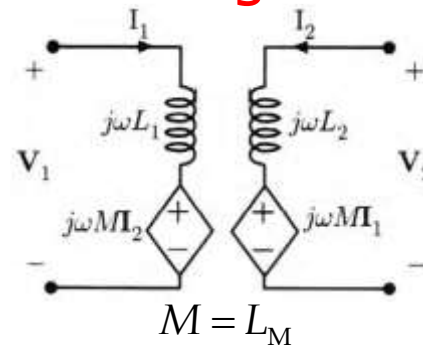
La potenza è **immaginaria** ($P=0$) e pertanto l'**elemento induttori accoppiati è passivo e reattivo** (e come visto **dinamico**)

10.5 Circuiti con induttori accoppiati (quadropolo equivalente)

Le relazioni tensioni-correnti degli induttori accoppiati corrispondono al **circuito equivalente con due induttori non accoppiati, ciascuno in serie con un generatore di tensione comandato in corrente**

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega L_M I_2$$

$$V_2 = j\omega L_M I_1 + j\omega L_2 I_2$$



In **forma matriciale** si può scrivere:

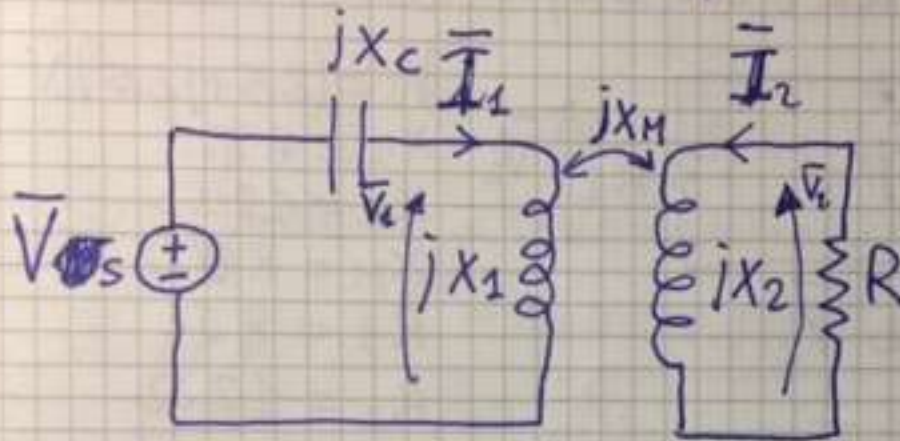
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \mathbf{L} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_1 & L_M \\ L_M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega \Delta} \begin{bmatrix} L_2 & -L_M \\ -L_M & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

dove Δ è il discriminante della matrice \mathbf{L} (matrice delle induttanze), con $\Delta = L_1 L_2 - L_M^2$

$I_i = f(V_i)$ è utile per l'analisi nodale dei circuiti con induttori accoppiati

10.5 Esempio di calcolo (app)

Esercizio (sul mutuo induttore e soluzioni con il sistema)
o anche con l'equivalente $\bar{V}_S = 12 \text{ V aT}$



$$X_C = -4 \Omega$$

$$X_1 = 5 \Omega$$

$$X_2 = 6 \Omega$$

$$X_M = 3 \Omega$$

$$R = 12 \Omega$$

Si vuole calcolare la potenza erogata dal generatore complessa

$$\bar{V}_1 = jX_1 \bar{I}_1 + jX_M \bar{I}_2$$

$$\bar{V}_2 = jX_M \bar{I}_1 + jX_2 \bar{I}_2$$

$$\bar{V}_1 = -jX_C \bar{I}_1 + \bar{V}_S$$

$$\bar{V}_2 = -R \bar{I}_2$$

10.5 Esempio di calcolo (app)

Facendo alcune sostituzioni si ottiene

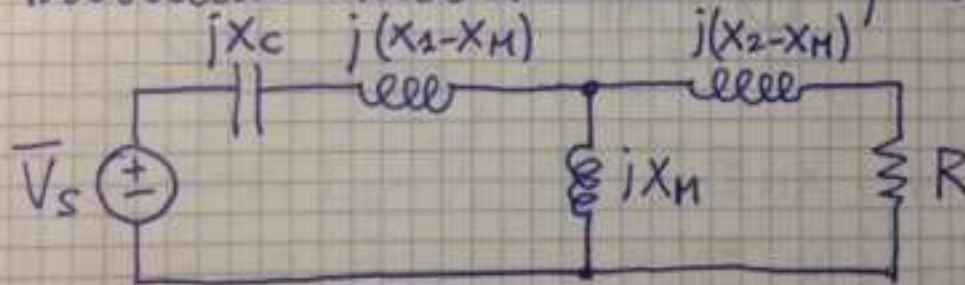
$$\begin{cases} j(X_1 + X_c) \bar{I}_1 + jX_M \bar{I}_2 = \bar{V}_s \\ jX_1 \bar{I}_1 + (jX_2 + R) \bar{I}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{I}_1 = (8.471 - j9.882) \text{ A}$$

$$\bar{I}_1 = (8.471 - j9.882) \text{ A}$$

$$\bar{S}_{V_s} = \bar{V}_s \bar{I}_1^* = (101.6 + j118.6) \text{ VA}$$

Proviamo a risolvere con un equivalente a T:



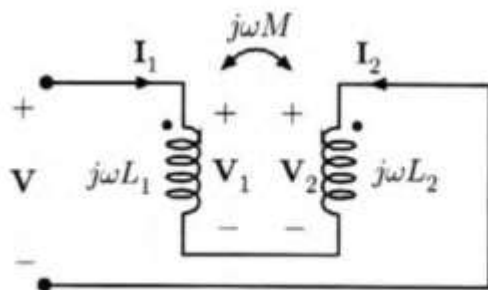
$$\bar{Z}_\emptyset = [j(X_2 - X_M) + R] \parallel jX_M = \frac{jX_M [j(X_2 - X_M) + R]}{jX_M + [j(X_2 - X_M) + R]}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_s}{jX_c + j(X_1 - X_M) + \bar{Z}_\emptyset}$$

10.4 Esempio di calcolo (12.10)

La Figura 12.43 mostra due induttori accoppiati collegati **in serie**. Far vedere che essi equivalgono ad un solo induttore e ricavare l'induttanza equivalente.

Figura 12.43 Induttori accoppiati in serie.



Soluzione

Tenendo conto che $\mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}_1$, le relazioni degli induttori accoppiati sono:

$$\mathbf{V}_1 = j\omega L_1 \mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{V}_2 = j\omega M \mathbf{I}_1 - j\omega L_2 \mathbf{I}_1$$

Inoltre $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ quindi,

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= j\omega L_1 \mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_1 - j\omega M \mathbf{I}_1 + j\omega L_2 \mathbf{I}_1 = \\ &= j\omega L_{eq} \mathbf{I}_1 \end{aligned}$$

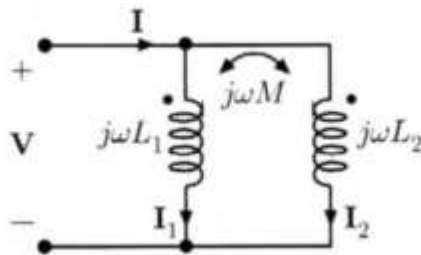
dove

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M \quad (12.36)$$

10.4 Esempio di calcolo (12.11)

La Figura 12.44 mostra due induttori accoppiati collegati **in parallelo**. Far vedere che essi equivalgono ad un singolo induttore e ricavare l'induttanza equivalente.

Figura 12.44 Induttori accoppiati in parallelo.



Soluzione

In questo caso si ha $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}$. Quindi possiamo utilizzare la (12.35) scrivendo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega\Delta} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}$$

Inoltre $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$, quindi

$$\mathbf{I} = \frac{1}{j\omega\Delta} (L_2 - M - M + L_1) \mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L_{eq}}$$

dove

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad (12.37)$$

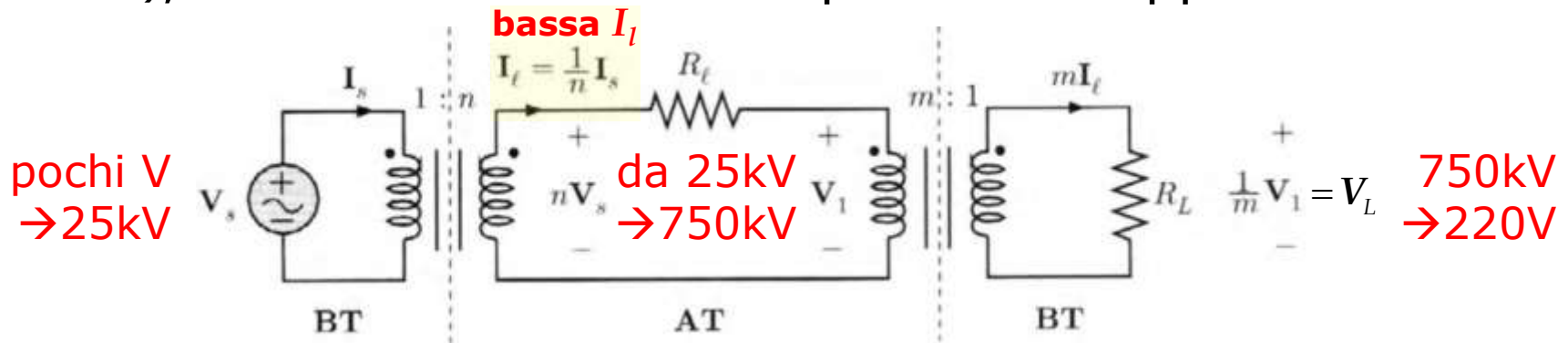
10.7 A: linee elettriche di trasmissione

L'energia elettrica deve essere trasportata **dal** luogo e **circuito di generazione al** luogo e **circuito di utilizzo**

La **linea elettrica di trasmissione** ha delle **perdite** dovute alle inevitabili **resistenze serie R_l** :

$$P_l = R_l I_l^2 \quad \text{conviene ridurre } I_l$$

Anche se la trasmissione avviene su **linee trifase** (meno peso in rame), vedendo una sola fase possiamo rappresentare:

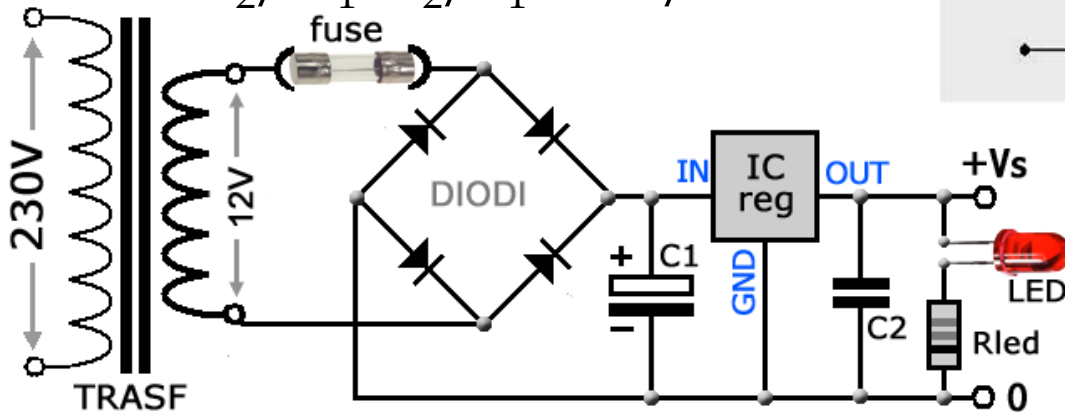


A pari potenza P erogata, con $n \gg 1$ **si eleva notevolmente la tensione riducendo la corrente** (basse perdite TRASF)

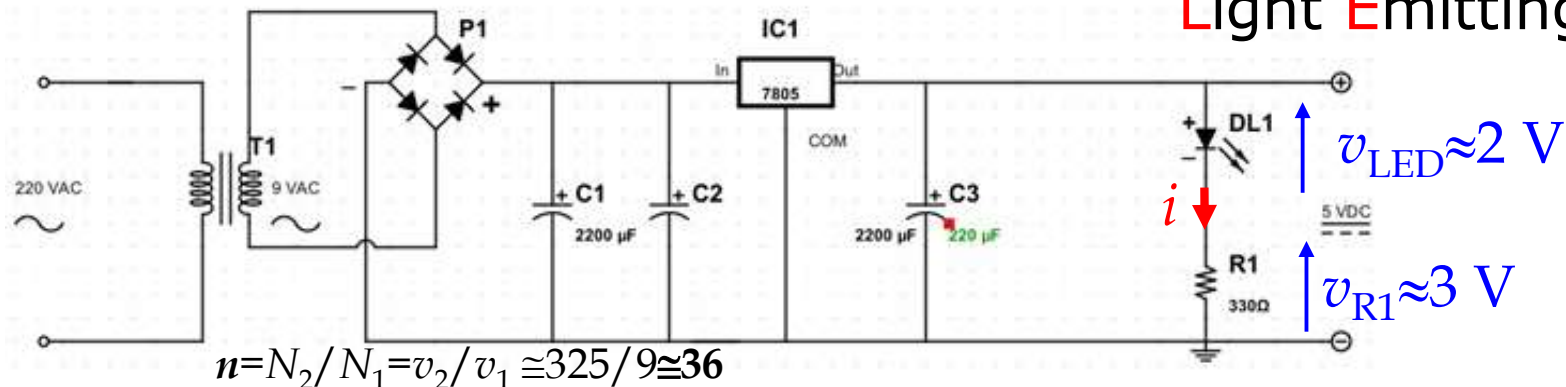
10.7 A: trasformatore 220 V \rightarrow 12/5 V_{DC}

Raddrizzatore tensione
a **ponte di diodi (Graetz)**
(a doppia semionda)

$$n = N_2 / N_1 = v_2 / v_1 \approx 325 / 12 \approx 27$$



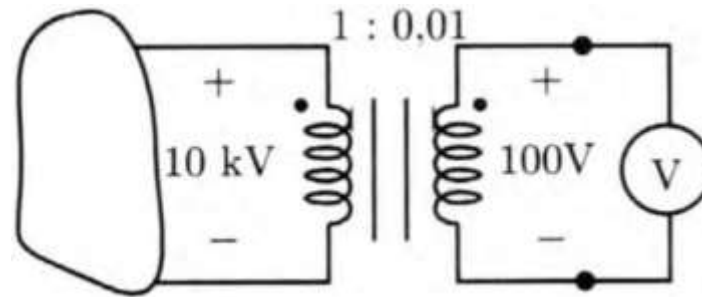
Circuito per
l'**alimentazione**
in continua (**5 V**) di un
Light **E**mitting **D**iode



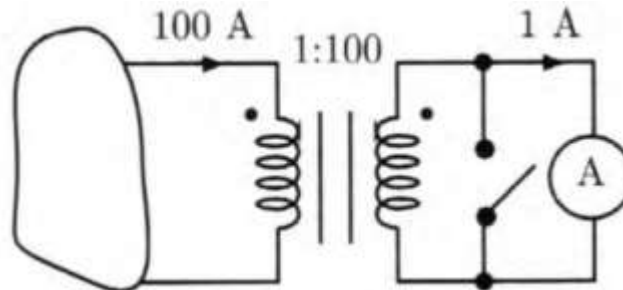
$$i = v_{R1} / R1 \approx 9 \text{ mA}$$

10.7 A: trasformatore di misura

Per **misurare** una **tensione** alternata **elevata** conviene prima abbassarla con un trasformatore il cui **secondario opera "a vuoto"** (Z_{in} alta per un voltmetro "V") e di fatto I_1 è bassa e non si perturba il circuito (infatti $I_2 \approx 0$ per un voltmetro "V")

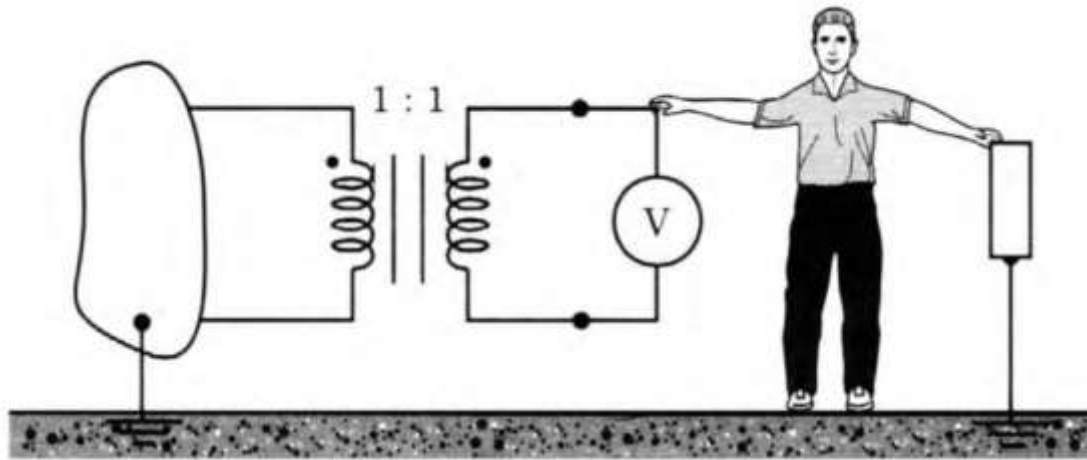


Per **misurare** una **corrente** alternata **elevata** conviene prima abbassarla con un trasformatore il cui **secondario opera "in corto circuito"** (amperometro "A"): $I_2 = I_1 / n$ (no o.c. second.!))



10.7 A: trasformatore di isolamento

Quando non occorre modificare i valori di correnti e tensioni MA si vuole ottenere un **isolamento elettrico** tra due circuiti, si impiega un TRASF con **rapporto spire unitario**

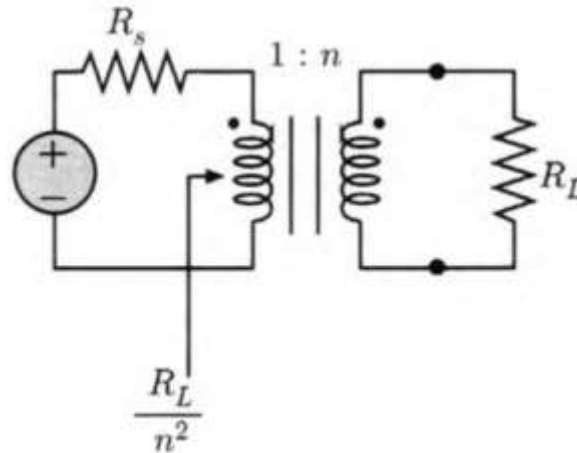
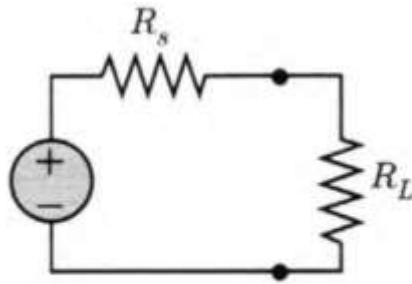


Il secondo **circuito/dispositivo** è "isolato" dal **generatore** e dalle tensioni del primo circuito che sono riferite a terra. Un contatto dell'operatore con il secondo circuito non comporta passaggio di corrente attraverso il corpo dato che **non esiste un percorso chiuso attraverso operatore e terra**.

10.7 A: adattamento di impedenza

Per **massimizzare il trasferimento di potenza sul carico** occorre ottenere $R_L = R_s$ (o $Z_L = Z_s^*$)

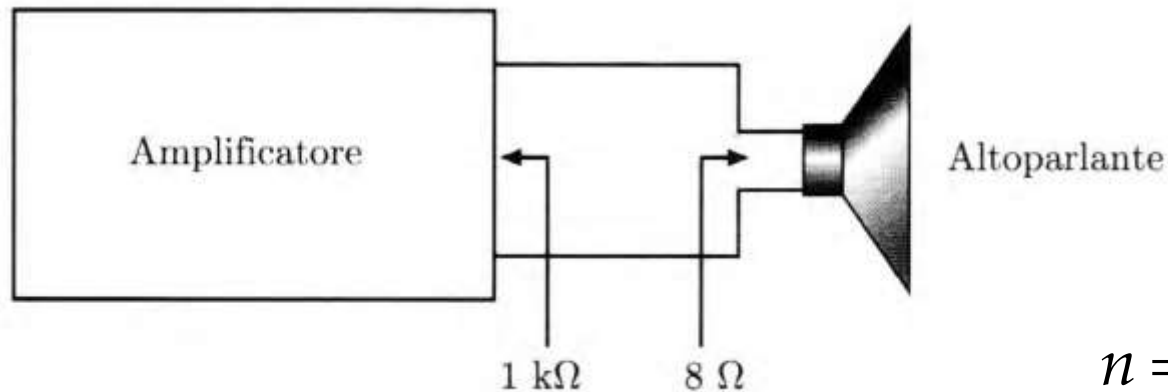
Se il carico ha $R_L \neq R_s$ si può usare un **TRASF adattatore (di impedenza)** tra il generatore e il carico



$$n = \sqrt{\frac{R_L}{R_s}}$$

10.7 A: adattamento di impedenza

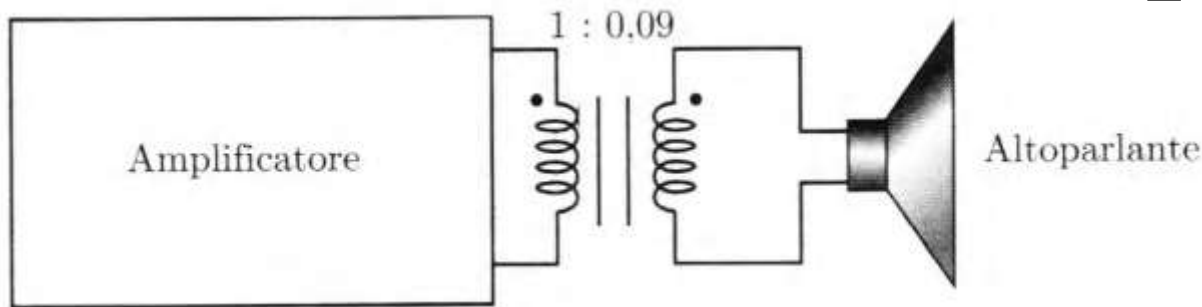
Un esempio è l'adattamento d'impedenza tra le casse di un altoparlante $R_L=8\ \Omega$ e l'uscita dell'amplificatore audio $R_s=1\ \text{k}\Omega$



$$n = \sqrt{\frac{R_L}{R_s}} = \sqrt{8 \times 10^{-3}} \cong \sqrt{81 \times 10^{-4}} = 0.09$$

$V_{\text{out,amp}} = 1\ \text{V}$ (valore efficace) \Rightarrow

$$P_{L,\text{n.a.}} \cong 8\ \mu\text{W}$$
$$P_{L,\text{adatt.}} \cong 0.25\ \text{mW}$$



Sommario

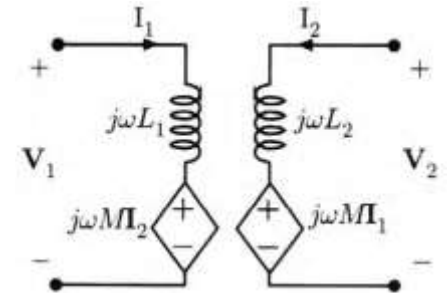
- Il **trasformatore** ha due terminali di ingresso (**primario**: v_1 e i_1 con N_1 spire) e due terminali di uscita (**secondario**: v_2 e i_2 con N_2 spire) legati dal **rapporto spire** $n=N_2/N_1$.
Primario e secondario sono **magneticamente accoppiati**.
[isolamento elettrico tra ingresso e uscita: trasformatore di isolamento]
- Le **relazioni caratteristiche** sono due e legano tensione a tensione e corrente a corrente, tra uscita e ingresso: $v_2=nv_1$ e $i_2=(-1/n)i_1$.
- Il **trasformatore ideale** innalza/abbassa tensioni e correnti senza modificare la potenza elettrica tra primario e secondario.
[utile per trasmissione energia in HV o per misure HV o HI]
La **potenza complessa** assorbita è istantaneamente **zero** (**elemento neutro**).
- L'**impedenza** al secondario può essere riportata, o **riflessa**, al primario (e viceversa) **moltiplicandola per $1/n^2$** ($\times n^2$).
[utile per trasformazione e adattamento di impedenza]

Sommario

- L'**analisi dei circuiti con trasformatore** impiega KVL e KCL e le sue due equazioni caratteristiche.
Riduzione al primario/secondario del circuito Thevenin equivalente.
- L'**autotrasformatore ideale** ha rapporto spire **$n=(N_1+N_2)/N_1$** .
Minore ingombro/peso/costo ma perdita isolamento elettrico.
- Due **induttori accoppiati** oltre alle induttanze proprie (L_1 e L_2) hanno una **mutua induttanza (L_M)** che, grazie al flusso magnetico mutuamente accoppiato, **induce nell'uno una tensione comandata dalla corrente nell'altro**.

$$V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega L_M I_2$$

$$V_2 = j\omega L_M I_1 + j\omega L_2 I_2$$



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} L_1 & L_M \\ L_M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega \Delta} \begin{bmatrix} L_2 & -L_M \\ -L_M & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$