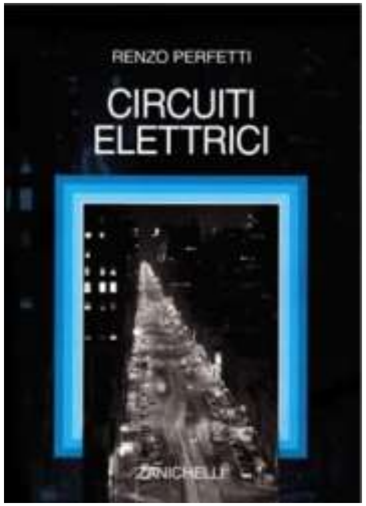


Circuiti Elettrici

Capitolo 6

Circuiti del primo ordine

Prof. Cesare Svelto

Circuiti del primo ordine – Cap. 6

6.0 Introduzione

6.1 Circuiti RC e RL in evoluzione libera
    Transitorio e andamento di regime

6.2 Circuiti RC e RL con un generatore costante

6.3 Circuiti del primo ordine autonomi
    Metodo sistematico per circ. 1° ord. autonomi

6.X Sommario

6.0 Introduzione

- Un **circuito dinamico** (con bipoli dinamici *e.g.* come condensatori e induttori) è descritto da **equazioni differenziali** che regolano l'andamento nel tempo delle grandezze elettriche $i(t)$ e $v(t)$

- Se il circuito contiene **un solo elemento dinamico** (un condensatore o un induttore) si dice **circuito del primo ordine** perchè è descritto da una equazione differenziale del primo ordine

- Impareremo a ricavare la **risposta del circuito** senza o con generatori indipendenti ("forzanti"). Mediante analisi dei circuiti resistivi otterremo la risposta del circuito senza scrivere e risolvere equazioni differenziali

6.0 Introduzione

- In ogni circuito dinamico **lineare** si può scomporre la **risposta** [andamento $v(t)$ o $i(t)$] in una parte transitoria (**transitorio**) e una parte permanente (**regime**) e si potrà applicare la **sovrapposizione** degli effetti

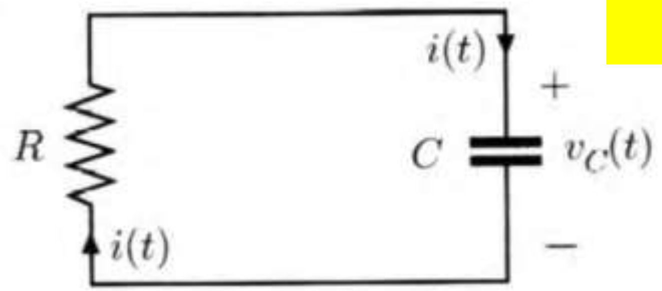
- Il comportamento di molti **sistemi dinamici lineari** (meccanici, termici, economici, …) può essere visto come quello di un circuito del primo ordine, che in gergo viene spesso chiamato "**sistema tipo RC**", caratterizzato da una tipica risposta in transitorio e una semplice risposta di regime (o a transitorio esaurito)

6.1 Circuiti RC e RL in evoluzione libera

- Consideriamo due circuiti elettrici con proprietà duali che saranno descritti dalla stessa equazione differenziale del primo ordine (coeff.cost. e omogenea):

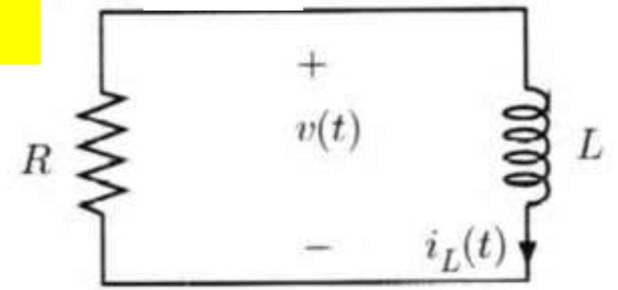
$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}x(t) = 0$$

circuito RC



$\tau = RC$

circuito RL



$\tau = L/R$

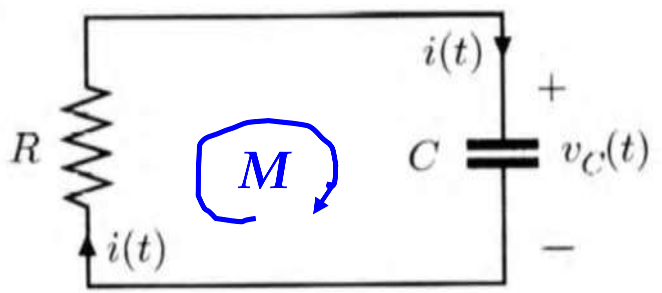
***x* variabile di stato**

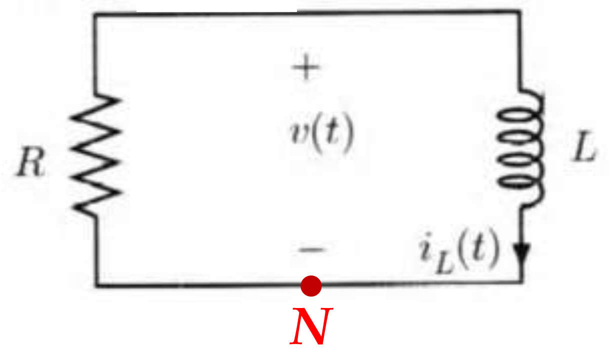
$x(t) = v_C(t)$ o $x(t) = i_L(t)$

- **Parametro τ [s]** è la **costante di tempo** del circuito e il suo valore rappresenta la rapidità di risposta del circuito ("τ piccolo" $\Rightarrow$ circuito rapido e "banda larga" oppure, al contrario, "τ grande" $\Rightarrow$ circuito lento e "banda stretta")

6.1 Circuiti RC e RL (analisi)

Risolviamo i circuiti (KVL, KCL, ed eq. caratteristiche R, C, L)





$$Ri(t)+v_C(t)=0$$

$$RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}+v_C(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}v_C(t) = 0$$

$$v(t)/R+i_L(t)=0$$

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+i_L(t) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i_L(t) = 0$$

$$\tau = RC$$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau}x(t) = 0$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

6.1 Circuiti RC e RL (soluzione)

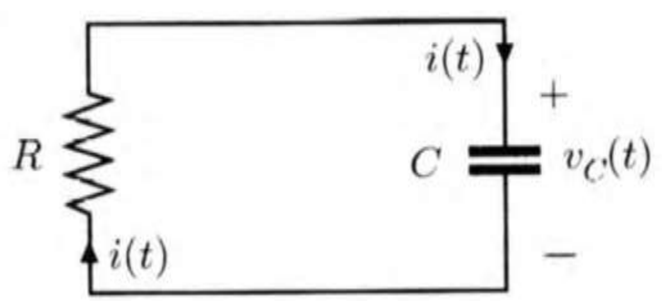
Equazione differenziale del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti e omogena nell'incognita $x(t)$

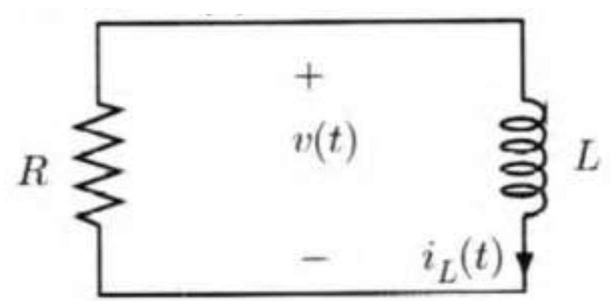
$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}x(t) = 0$$

soluzione $x(t) = Ke^{\alpha t} = \underbrace{x(0)}_{\text{valore iniziale}} e^{-t/\underbrace{\tau}_{\text{costante di tempo}}}$

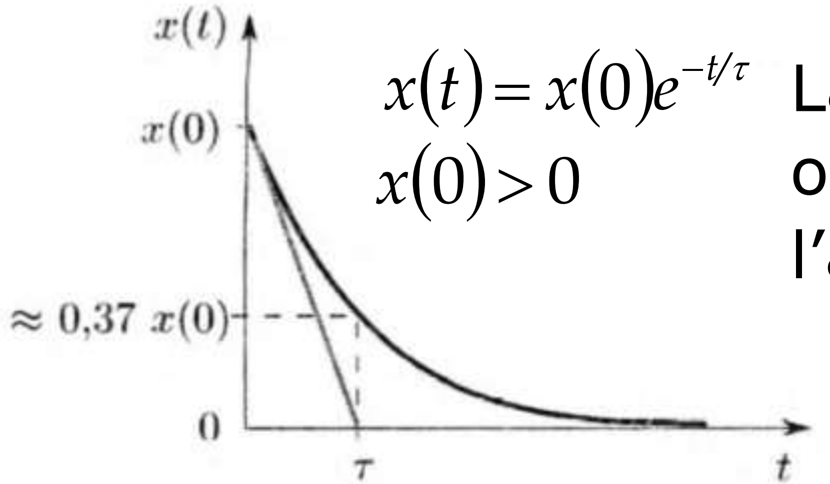
Risposta del circuito RC o RL in evoluzione libera:

$$v_C(t) = v_C(0)e^{-t/RC} \qquad i_L(t) = i_L(0)e^{-t/(L/R)}$$





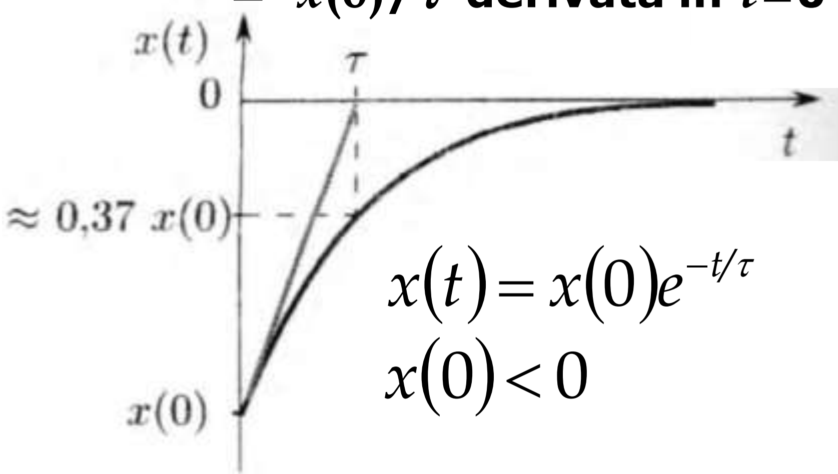
6.1 Andamenti transitorio RC e RL



$$x(t) = x(0)e^{-t/\tau}$$
$$x(0) > 0$$

La tangente alla curva in $x(0)$, ovvero al tempo $t=0$, incrocia l'asse dei tempi per $t=\boldsymbol{\tau}$

pendenza iniziale $\Delta x/\Delta t =$ $= -x(0)/\tau$ derivata in t=0



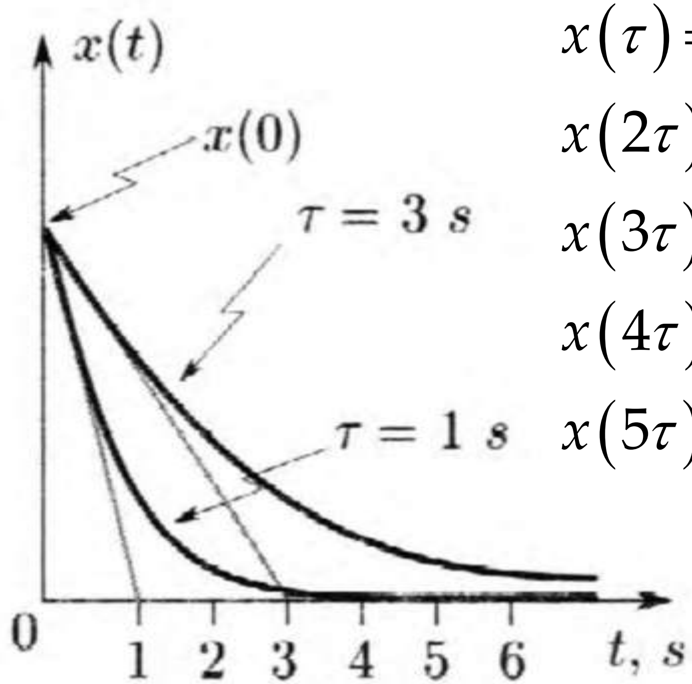
$$x(t) = x(0)e^{-t/\tau}$$
$$x(0) < 0$$

Si noti che $x(t)$ parte dal **valore iniziale $x(0)$** e poi tende asintoticamente a zero come valore finale

In generale, per $t \rightarrow \infty$ chiameremo **$x(\infty)$** **valore di regime** o **a transitorio esaurito**

Al tempo $t=\tau$ l'ampiezza si è ridotta al 37 % (e^{-1}) del valore iniziale

6.1 Rapidità di risposta transitorio



$$x(\tau) = x(0)e^{-1} \cong 0.37x(0) \qquad \approx 63\% \text{ "transitorio"}$$
$$x(2\tau) = x(0)e^{-2} \cong 0.13x(0) \qquad \approx 87\% \text{ "transitorio"}$$
$$x(3\tau) = x(0)e^{-3} \cong 0.05x(0) \qquad \approx 95\% \text{ "transitorio"}$$
$$x(4\tau) = x(0)e^{-4} \cong 0.02x(0) \qquad \approx 98\% \text{ "transitorio"}$$
$$x(5\tau) = x(0)e^{-5} \cong 0.007x(0) \qquad \approx 99.3\% \text{ "transitorio"}$$

Dopo **4 o 5 costanti di tempo**
il **transitorio** si ritiene **esaurito**

Il transitorio evolve, e si esaurisce arrivando a **regime**,
più o meno rapidamente a seconda del valore di τ
(per τ breve occorre meno tempo per “arrivare a regime”)
La rapidità di risposta va come $1/\tau$

6.1 Esempio sui transitori RC e RL

Esempio 7.2

Ricavare l'espressione della corrente $i(t)$ nel circuito RC e della tensione $v(t)$ nel circuito RL.

Soluzione

Nel circuito RC la tensione $v_C(t)$ ha l'espressione (7.7a). La corrente $i(t)$ è

$$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{v_C(0)}{R}e^{-t/RC}$$

Anche $i(t)$ ha un andamento *esponenziale con la stessa costante di tempo* RC.
Nel circuito RL la corrente $i_L(t)$ ha l'espressione (7.7b). La tensione $v(t)$ è

$$v(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = -Ri_L(0)e^{-tR/L}$$

Anche $v(t)$ ha un andamento *esponenziale con la stessa costante di tempo* L/R.

$i_{R,RC}$ e $v_{R,RL}$ hanno segno opposto a v_C e a i_R ma anche verso opposto rispetto a conv. utilizz. $\Rightarrow p_{ASS}>0$ su R (dissipata)

L'evoluzione libera dei circuiti del primo ordine prevede correnti e tensioni che decadono esponenzialmente a zero (sia nel circuito RC che RL) [anche *p* decade esponenzialmente]

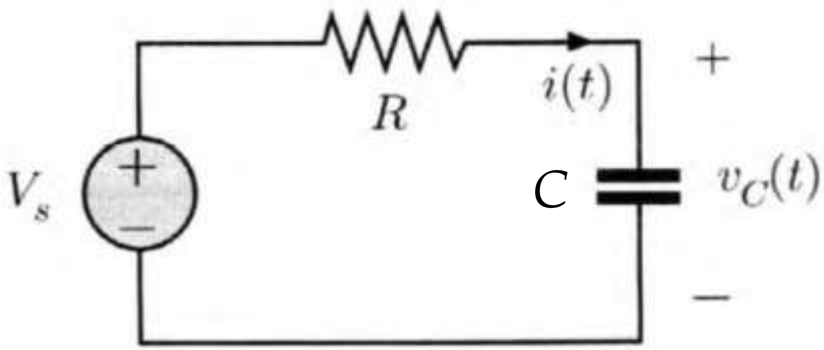
A regime (per $t\rightarrow\infty$) correnti e tensioni si annullano quando l'energia originariamente immagazzinata nel bipolo dinamico (C o L) è stata interamente dissipata nel bipolo adinamico (R)

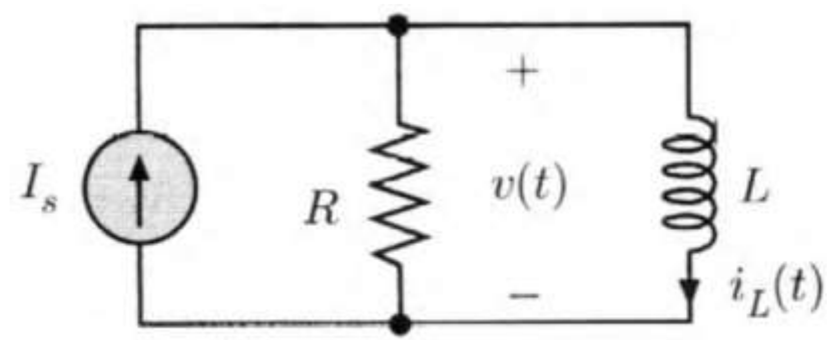
6.2 RC e RL con generatore cost.

- Inserendo un generatore costante (circuito autonomo) nel circuito RC o RL si ha equazione differenziale del primo ordine (coeff.cost. NON OMOGENEA):

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{x_{\mathrm{p}}}{\tau}$$

coeff.cost. dal termine forzante (generatore)





$$x(t) = v_{\mathrm{C}}(t)$$

$\tau = RC$

$x_{\mathrm{p}} = V_{\mathrm{s}}$

$$x(t) = i_{\mathrm{L}}(t)$$

$\tau = L/R$

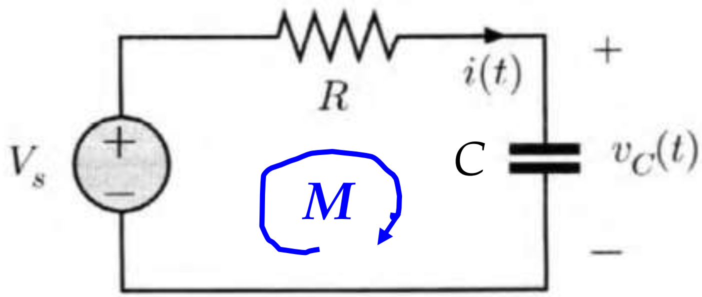
$x_{\mathrm{p}} = I_{\mathrm{s}}$

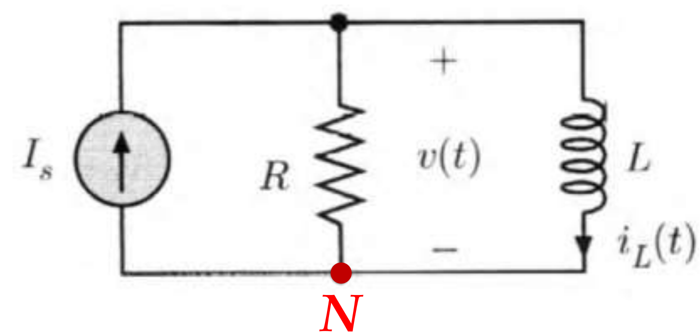
costante di tempo

soluzione particolare (valore di regime)

6.2 Circuiti RC e RL +gen. (analisi)

Risolviamo i circuiti (KVL, KCL, ed eq. caratteristiche R, C, L)





$$Ri(t)+v_C(t)=V_s$$

$$v(t)/R+i_L(t)=I_s$$

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=V_s$$

$$\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=I_s$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_C(t)=\frac{V_s}{RC}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt}+\frac{R}{L}i_L(t)=\frac{R}{L}I_s$$

$$\tau=RC$$

$$\frac{dx(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}x(t)=\frac{x_p}{\tau}$$

$$\tau=\frac{L}{R}$$

6.2 Circuiti RC e RL +gen. (soluzione)

Equazione differenziale del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti, non omogena, nell'incognita $x(t)$

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}x(t) = \frac{x_\mathrm{p}}{\tau}$$

amp. transitorio

soluzione $x(t) = \left[x(0) - x_\mathrm{p}\right] e^{-t/\tau} + x_\mathrm{p}$

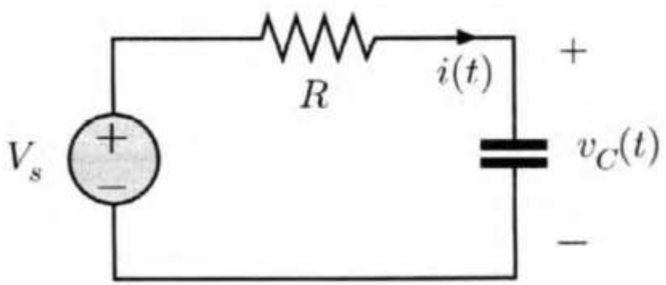
valore finale (o di regime)

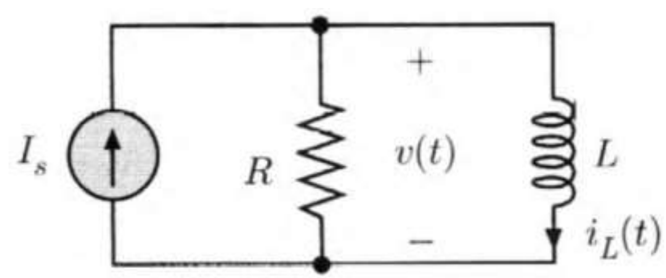
valore iniziale

costante di tempo

Risposta del circuito RC o RL con generatore forzante:

$v_\mathrm{C}(t) = \left[v_\mathrm{C}(0) - V_\mathrm{s}\right] e^{-t/RC} + V_\mathrm{s}$ $\quad$ $i_\mathrm{L}(t) = \left[i_\mathrm{L}(0) - I_\mathrm{s}\right] e^{-t/(L/R)} + I_\mathrm{s}$





6.2 RC e RL autonomi (grafici risposta)

valore iniziale

$\tau > 0$

parte di transitorio
da esaurire

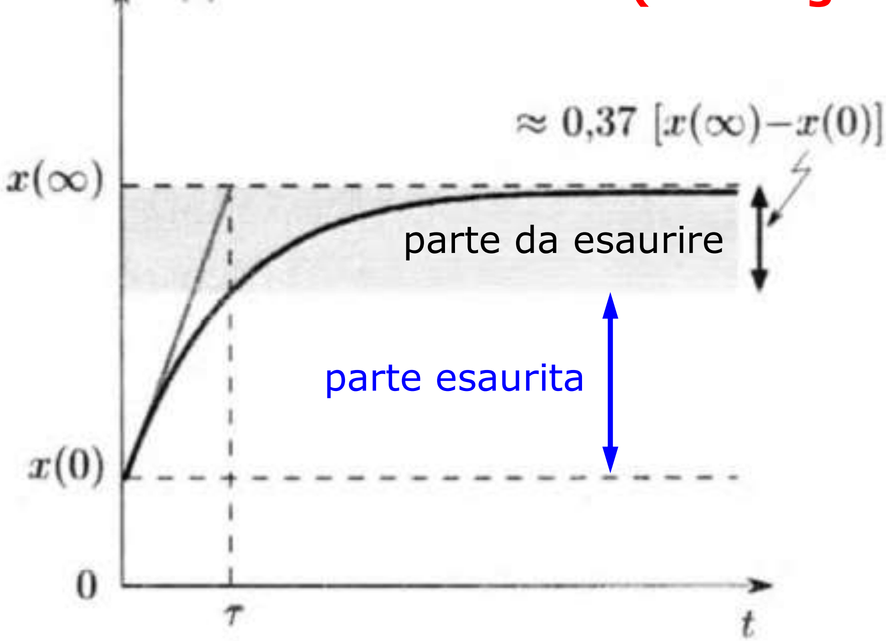
$$|\,x(t) - x(\infty)\,| = |\,x(0) - x(\infty)\,|\; e^{-t/\tau}$$

eq. vale anche
senza il | …|
e con […]

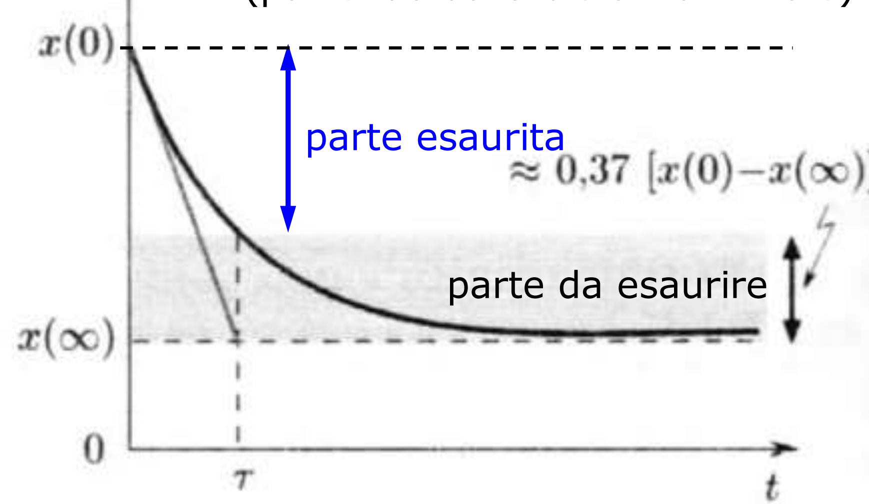
è un valore "imposto" dal generatore, che nel caso
di semplice RC-serie o semplice RL-parallelo coincide
con la grandezza imposta (V_S o I_S)

valore finale
(o di regime)

costante
di tempo



distanza tra valore iniziale
e valore finale **decresce**
esponenzialmente a zero
(partendo dalla distanza iniziale)

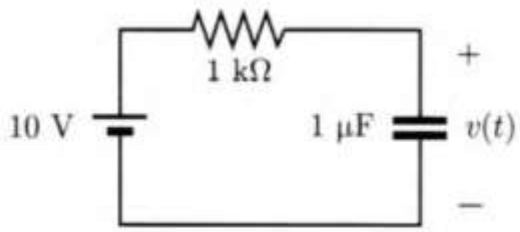


6.2 Esempio di circuito RC +gen.

Esempio 7.4

Nel circuito in Figura 7.8, in $t = 0$ il condensatore è carico ad una tensione $v(0) = 1$ V. Ricavare il valore della tensione v per $t = 1$ ms.

Figura 7.8



Soluzione

Per il circuito RC la soluzione è:

$$v(t) = [v(0) - V_s]e^{-t/\tau} + V_s$$

Il valore finale di $v(t)$ coincide con la tensione del generatore, cioè 10 V. Il valore iniziale è $v(0) = 1$ V. La costante di tempo del circuito è

$$\tau = RC = 10^3 \times 10^{-6} = 10^{-3} \text{ s} =$$

$$= 1 \text{ ms}$$

Dopo una costante di tempo la differenza dal valore finale è

$$0,368(V_s - v(0)) = 0,368(10 - 1) = 3,312 \text{ V}$$

Quindi la tensione cercata vale:

$$v(1 \text{ ms}) = 10 - 3,312 = 6,688 \text{ V}$$

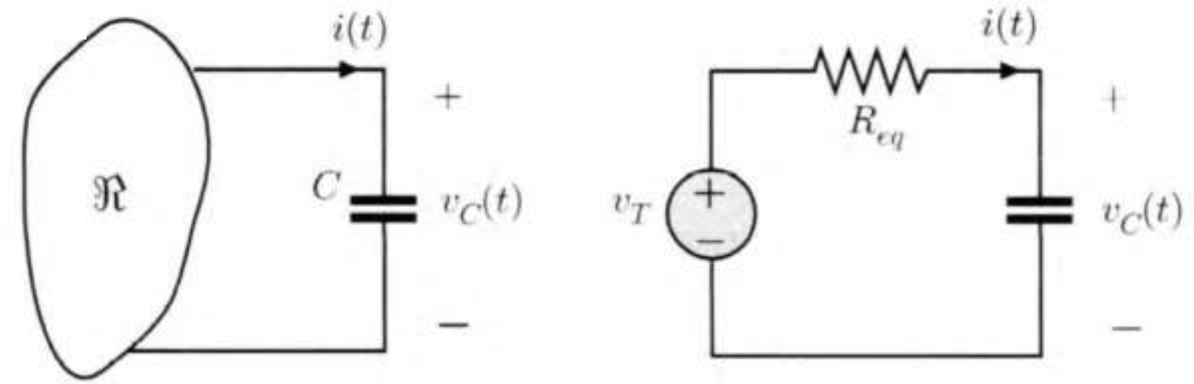
6.3 Circuiti del primo ordine autonomi

Le soluzioni ottenute per i circuiti RL e RC con un generatore costante possono essere estese a tutti i **circuiti del primo ordine autonomi**, ovvero con più generatori indipendenti di valore costante

Consideriamo nel seguito due ampie casistiche di circuiti RC ed RL autonomi e del primo ordine:
RC autonomo con un condensatore (un valore *C* dopo eventuali combinazioni serie e parallelo), un arbitrario numero di resistori, un numero arbitrario di generatori indipendenti di valore costante
RL autonomo con un induttore (un valore *L* dopo eventuali combinazioni serie e parallelo), un arbitrario numero di resistori, un numero arbitrario di generatori indipendenti di valore costante

6.3 Circuiti RC primo ordine autonomi

Si sostituisce la rete resistiva $\Re$ (resistori e generatori) ai capi del condensatore con il bipolo di Thevenin equivalente (v_T e R_{eq}):



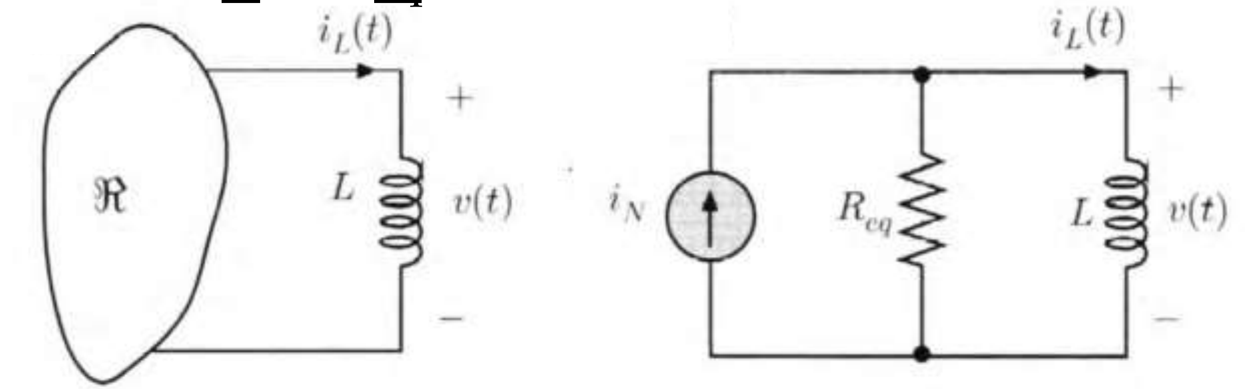
$$v_C(t) = [v_C(0) - v_C(\infty)]\, e^{-t/\tau} + v_C(\infty) = [v_C(0) - v_T]\, e^{-t/(R_{eq}C)} + v_T$$

Per determinare $v_C(t)$ basta conoscere il valore **iniziale**, il valore **finale** (v_T), la costante di **tempo** ($\tau = R_{eq}C$)

Data la continuità della variabile di stato tensione ai capi del condensatore, il valore iniziale è $v_C(0) = v_C(0^+) = v_C(0^-)$

6.3 Circuiti RL primo ordine autonomi

Si sostituisce la parte resistiva $\Re$ (resistori e generatori) ai capi del condensatore con il bipolo di Norton equivalente (i_N e R_{eq}):



$$i_L(t) = [i_L(0) - i_L(\infty)]\, e^{-t/\tau} + i_L(\infty) = [i_L(0) - i_N]\, e^{-t/(L/R_{eq})} + i_N$$

Per determinare $i_L(t)$ basta conoscere il valore **iniziale**, il valore **finale** (i_N), la costante di **tempo** ($\tau = L/R_{eq}$)

Data la continuità della variabile di stato corrente nell'induttore, il valore iniziale è $i_L(0) = i_L(0^+) = i_L(0^-)$

6.3 Metodo sistematico per RC e RL

Abbiamo ricavato $v_C(t)$ e $i_L(t)$ nel circuito del primo ordine autonomo di tipo RC o RL

Per risolvere il circuito procediamo come segue:

RC: sostituiamo il condensatore con un generatore indipendente di tensione di valore $v_C(t)$ oppure con un generatore di corrente $i_C(t)=C\mathrm{d}v_C/\mathrm{dt}$

RL: sostituiamo l'induttore con un generatore indipendente di corrente di valore $i_L(t)$ oppure con un generatore di tensione $v_L(t)=L\mathrm{d}i_L/\mathrm{dt}$

6.3 Metodo sistematico per RC e RL

Risolviamo il circuito resistivo ottenuto, senza dover scrivere e risolvere equazioni differenziali

In un circuito autonomo del primo ordine, con $R_{eq}>0$, **qualunque tensione o corrente $x(t)$ per $t>0$ è**:

$$x(t) = \left[x(0^+) - x(\infty) \right] e^{-t/\tau} + x(\infty)$$

Tutte le grandezze del circuito autonomo del primo ordine hanno la stessa costante di tempo $\boldsymbol{\tau > 0}$ che vale $R_{eq}C$, oppure L/R_{eq}

6.3 Metodo sistematico per RC e RL

circuito RC

1. Se $v_C(0)$ non è nota ricavare $v_C(0^-)$ dal circuito precedente in regime costante. Si ha $v_C(0^-) = v_C(0^+) = v_C(0)$.

2. Sostituire il condensatore con un circuito aperto, calcolando $v_C(\infty)$.

3. Ricavare la resistenza equivalente R_{eq} "vista" dal condensatore.

4. La tensione $v_C(t)$ si ottiene sostituendo nella (7.15) i valori di $v_C(0)$, $v_C(\infty)$ e $\tau = R_{eq}C$.

5. Sostituire il condensatore con un generatore indipendente di *tensione* di valore $v_C(t)$ oppure con un generatore indipendente di *corrente* di valore $i_C(t) = Cdv_C/dt$; quindi ricavare la grandezza desiderata $x(t)$.

circuito RL

1. Se $i_L(0)$ non è nota ricavare $i_L(0^-)$ dal circuito precedente in regime costante. Si ha $i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0)$.

2. Sostituire l'induttore con un corto circuito, calcolando $i_L(\infty)$.

3. Ricavare la resistenza equivalente R_{eq} "vista" dall'induttore.

4. La corrente $i_L(t)$ si ottiene sostituendo nella (7.17) i valori di $i_L(0)$, $i_L(\infty)$ e $\tau = L/R_{eq}$.

5. Sostituire l'induttore con un generatore indipendente di *corrente* di valore $i_L(t)$ oppure con un generatore indipendente di *tensione* di valore $v_L(t) = Ldi_L/dt$; quindi ricavare la grandezza desiderata $x(t)$.

Il transitorio di qualunque grandezza $x(t)$ è ricavato risolvendo il circuito [e ottenendo il valore iniziale, pre-sost., e il valore finale, post-sost.] ma senza equazioni differenziali

6.3 Metodo sistematico per RC e RL

Di fatto si risolvono due circuiti:

1. un primo circuito con l'elemento reattivo sostituito da c.a. o da c.c. (C sostituito da c.a. nell'RC e L da c.c. nel RL, in quanto a regime prima del transitorio) circ. in t=0$^-$
→ si ricava il **valore iniziale** della variabile di stato e di qualsiasi altra variabile del circuito

2. un secondo circuito con l'elemento reattivo sostituito dal generatore corrispondente (C sostituito da gen.tens. nell'RC e L da gen.corr. nel RL) circ. per t>0
→ si ricava il **valore finale** della variabile di stato e di qualsiasi altra variabile del circuito

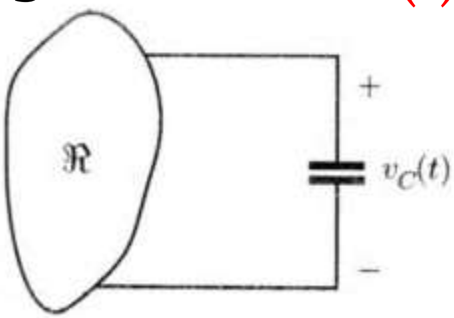
Grandezze $y(t)$ diverse da v_C e i_L possono essere discontinue in $t=0$: $y(0^-)\neq y(0^+)$ e il loro valori si ottengono dalla soluzione dei due diversi circuiti in $t=0^-$ e $t=0^+$

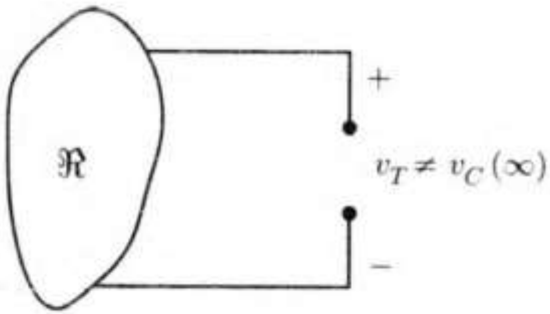
Il transitorio, di qualunque variabile del circuito, evolve esponenzialmente dal suo valore iniziale al suo valore finale con costante di tempo τ

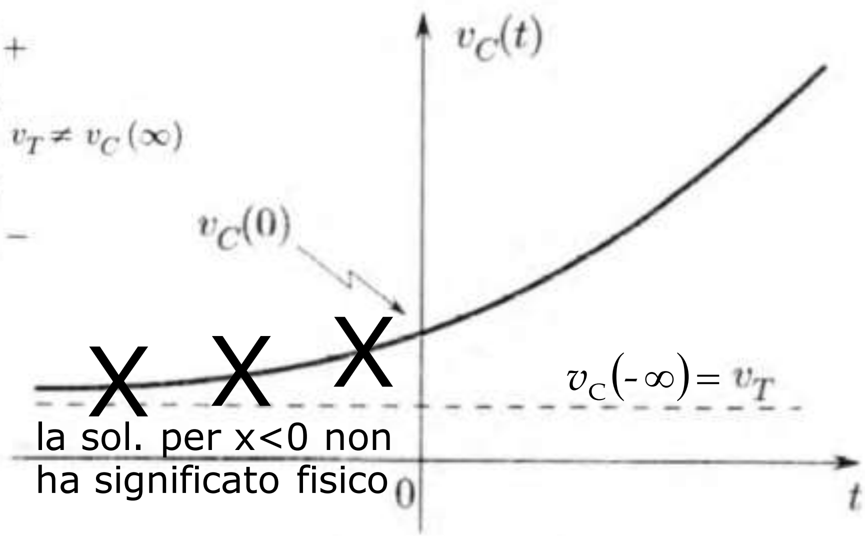
6.3 Circuiti instabili RC e RL (1° ord.)

In un circuito autonomo del primo ordine, la resistenza equivalente ottenuta dalla sostituzione di Tehevenin o di Norton può anche risultare $R_{eq}<0$ (se ci sono bipoli attivi quali gen.dip. o OP-AMP)

In questo caso si ha un **circuito instabile** nel quale la grandezza $x(t)$ considerata diverge per $t\rightarrow\infty$







$$R_{eq}<0 \;\; \Rightarrow \;\; \tau = R_{eq}C < 0$$

$$v_C(t) = [v_C(0) - v_T]\, e^{-t/(R_{eq}C)} + v_T$$

$\tau < 0$ l'esponenziale diverge

6.3 Linearità e sovrapposizione effetti nei circuiti RC e RL del 1° ordine

I circuiti con resistori, generatori, condensatori, e induttori, tutti elementi lineari (almeno per ipotesi e nel modello ideale) sono **circuiti dinamici lineari**

Per tali circuiti lineari vale il principio di sovrapposizione degli effetti $\Rightarrow$ <u>una qualunque grandezza si può ottenere sommando i contributi dei generatori indipendenti</u>

Nel circuito del 1° ordine, una grandezza $x(t)$ si ottiene sommando il contributo della condizione iniziale (a generatori spenti detta "risposta libera") con il contributo dei singoli generatori (a condizione iniziale nulla: $v_C(0)=0$ o $i_L(0)=0$ detta "risposta forzata"… si 'spegne' l'elemento dinamico)

Sommario

- Un **circuito dinamico** è costituito da elementi dinamici (condensatori e induttori) ed è descritto da equazioni differenziali che forniscono l'andamento di una grandezza $x(t)$ (tensione $v_{\mathrm{C}}(t)$ o corrente $i_{\mathrm{L}}(t)$) a seconda della condizione iniziale ($v_{\mathrm{C}}(0)$ o $i_{\mathrm{L}}(0)$) e dei termini forzanti (generatori indipendenti costanti).

- Un circuito dinamico del **primo ordine** è equivalente a un **circuito RC o RL** (con un solo condensatore o un solo induttore).

- La **rapidità di risposta** del circuito dinamico RC o RL è determinata dalla sua **costante di tempo** τ pari a $R_{\mathrm{eq}}C$ oppure L/R_{eq}, in secondi (s), che comporta un andamento esponenziale smorzato (se $R_{\mathrm{eq}}>0$) all'aumentare del tempo.

Sommario

- La **risposta del circuito** (transitorio) è individuate da un valore iniziale, un valore finale (o di regime) e dalla costante di tempo:

valore iniziale

$$\tau > 0$$

$$\left| x(t) - x(\infty) \right| = \left| x(0) - x(\infty) \right| \, e^{-t/\tau}$$

valore finale (o di regime)

costante di tempo

distanza $D(t) = D(0)\, e^{-t/\tau}$

- Se $R_{eq} < 0 \Rightarrow \tau < 0$ il circuito è instabile e la sua uscita diverge per $t \rightarrow \infty$.

- Per i circuiti dinamici lineari vale la sovrapposizione degli effetti e qualunque grandezza $x(t)$ è la somma della condizione iniziale e dei contributi dei singoli generatori (risposta libera + risposta forzata).