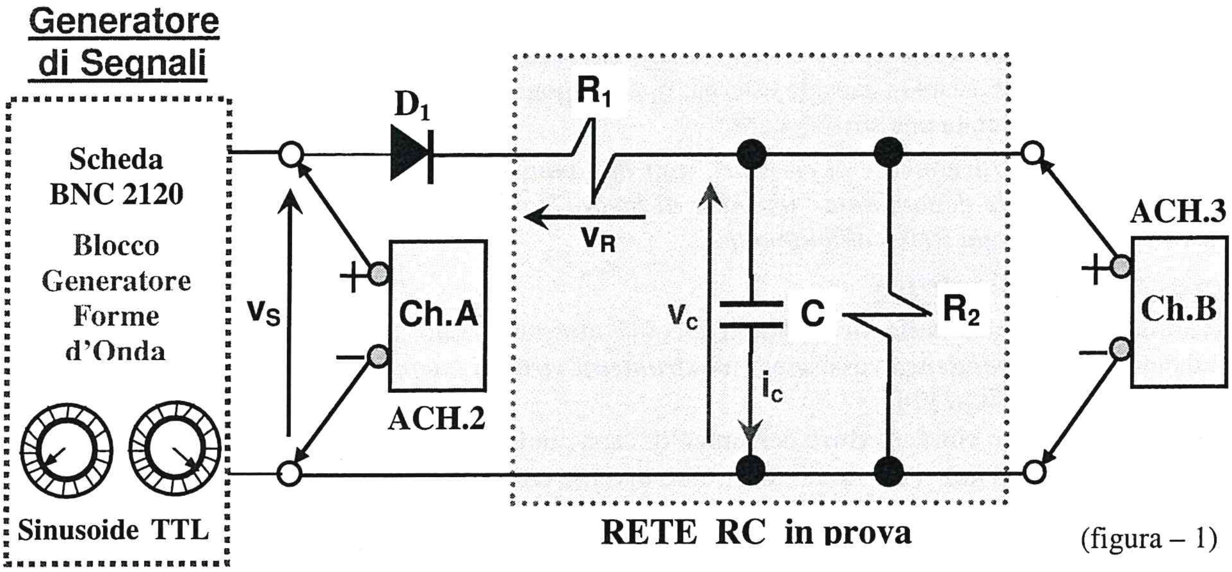
A cura di Edoardo Mario Azzimonti – Giovanni Vannozzi

# POLITECNICO di MILANO --- Corso di Laurea in Ingegneria Fisica
## Laboratorio di Elettrotecnica -- Esercitazione n° 2



(figura – 1)

**Oggetto:**

***Rilievo sperimentale del transitorio di carica e di scarica di un condensatore con la visualizzazione sull'oscilloscopio delle forme d'onda caratteristiche della tensione $v_C(t)$ ai morsetti dello stesso bipolo dinamico condensatore.***

**Scopo 1:**

***Verificare sperimentalmente il transitorio di carica e di scarica di un condensatore e la relativa legge temporale definita dalla seguente relazione:***

$$v_C(t) = v_C(\infty) - [v_C(\infty) - v_C(t_O)] \cdot e^{-(t-t_O)/\tau}$$

nella quale sono identificati i seguenti **parametri**:

$\mathbf{v_C(t_O)}$ = valore della tensione ai morsetti del condensatore all'istante $\mathbf{t = t_O}$, nota come **condizione iniziale della variabile di stato** tensione del condensatore;

$\mathbf{v_C(\infty)}$ = tensione ai morsetti del condensatore a fine transitorio, ovvero quando il condensatore può essere modellato con l'**equivalente bipolo circuito aperto**;

$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C \cdot R_{TH}}$ = costante di tempo, definita come il prodotto della **capacità C** del condensatore e della **resistenza equivalente** di **Thevenin $\mathbf{R_{TH}}$ sentita** dal condensatore medesimo.

**Scopo 2:**

***Verificare la differenza fra le costanti di tempo di carica ($\tau_{ca}$) e scarica ($\tau_{sc}$) del condensatore inserito nella rete lineare mostrata in figura 1.***

Il calcolo delle costanti di tempo richiede di determinare la **resistenza equivalente di Thévenin sentita** dal **condensatore**, rispettivamente, sia per il **circuito caratteristico** della **fase di carica** sia per il **circuito specifico** della **fase di scarica**.

Si perviene, pertanto, alle scritture di seguito esplicitate:

$$\tau_C = R_{eq}C = (R_1 \| R_2) \cdot C = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot C = \frac{2{,}2 \cdot 10}{(2{,}2+10)} \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-6} = \frac{2{,}2}{12{,}2} \cdot 10^{-3} = 0{,}18\,ms$$

$$\tau_{SC} = R_2 C = R_2 \cdot C = 10 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-6} = 10^{-3} = 1\,ms$$

## Nota:

I condensatori a disposizione per le esercitazioni del corso sono di due tipi: ceramici ed elettrolitici. I condensatori ***ceramici*** non hanno polarità e il valore della loro capacità è inferiore rispetto a quella degli ***elettrolitici***. Questi ultimi hanno una polarità e capacità elevate. Per distinguere il polo positivo di tale tipo di condensatori è sufficiente individuare il reoforo più lungo; qualora ciò non sia possibile basta osservare la capsula esterna: in corrispondenza del reoforo corrispondente al polo negativo è infatti tracciata una striscia nera.

***I condensatori, contrariamente ai resistori, non dissipano potenza ma possiedono una tensione massima sopportabile denominata "tensione di lavoro"; oltrepassando tale valore di tensione il dispositivo si danneggia irrimediabilmente.***

## Preparazione della prova

**Assemblare il circuito sulla bread–board** come mostrato nello **schema elettrico** di figura 4, ricordando la ***corrispondenza*** sussistente fra ***strumenti virtuali*** e ***canali*** d'***ingresso*** della **scheda** di **acquisizione dati BNC-2120**.

Verranno utilizzati un **condensatore ceramico** di capacità $\mathbf{C = 0{,}1\,\mu F}$, un **resistore** $\mathbf{R_1}$ da $\mathbf{2{,}2\,k\Omega}$ ed un resistore $\mathbf{R_2}$ da $\mathbf{10\,k\Omega}$ realizzando, così, due diverse **costanti di tempo** dei ***transitori di carica*** ($\boldsymbol{\tau_{ca} = R_{eq}C}$) e di ***scarica*** ($\boldsymbol{\tau_{sc} = R_2C}$) pari, rispettivamente, a $\boldsymbol{\tau_{ca}}$ **=0,18 ms** e ($\boldsymbol{\tau_{sc}}$ **=1,00 ms**, come di anzi analiticamente calcolato:

$\boldsymbol{\tau_{ca}}$**= 0,18 ms --- **$\boldsymbol{\tau_{sc}}$**= 1,00 ms**

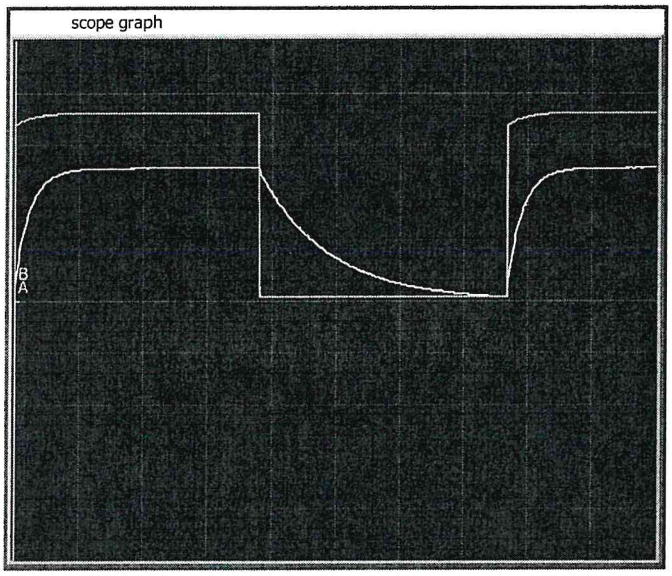



**Figura 1: andamento della tensione ai capi del condensatore**

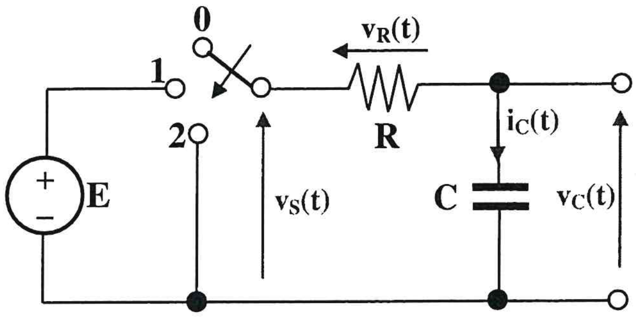
$$\mathbf{V_{in}(t) = 5\,V} \rightarrow v_C(t) = v_C(\infty)\cdot(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{---} \quad \mathbf{V_{in}(t) = 0\,V} \rightarrow v_C(t) = v_C(\infty)\cdot e^{-\frac{t}{\tau}})$$

**per t=5τ raggiungo circa il 99% del valore di regime**
**per t=4τ raggiungo circa il 98% del valore di regime**

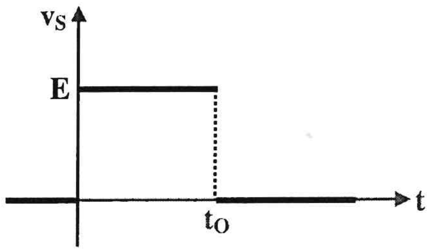
**Domanda:** quanto vale il valore di regime relativo a $\mathbf{V_{in}(t) = 5\,V}$ per il nostro circuito?
**Nota:** a transitorio di carica esaurito, cioè a regime, la tensione ai capi del condensatore assume il valore $\mathbf{v_C(\infty)}$ (**valore di regime**) determinato dalla **legge del partitore resistivo** e pari a:

$$v_c(\infty) = (v_{in} - V_{D_{ON}})\cdot\frac{R_2}{(R_1 + R_2)} = (v_{in} - 0{,}7)\cdot\frac{10000}{10000 + 2200} = 4{,}3\cdot 0{,}82 = 3{,}525V$$

**Brevi richiami teorici a fondamento dell'esercitazione sperimentale.**




(figura **6**)




Si consideri la rete lineare di figura nella quale il generatore indipendente stazionario di tensione **E** può venire collegato o sconnesso dalla struttura nota come **rete RC** mediante il tasto **S** inizialmente posto nella posizione 0. All'istante t=0 il tasto S si porta nella posizione 1, sicché deve ritenersi:

$$\forall t \,\big|\, 0 \le t < t_0 \;\Rightarrow\; v_s(t) = E$$

Atteso che la **tensione** ai **morsetti** di un **condensatore** è una "**variabile di stato**", ovvero che le evoluzioni temporali di $\mathbf{v_C(t)}$ non possono prescindere dalla conoscenza dello **stato iniziale** in cui il condensatore si trova, la sua **relazione costitutiva**, riferita alla **convenzione** degli **utilizzatori**, può esprimersi con le relazioni che di seguito si esplicitano:

$$\begin{cases} i_c(t) = C\dfrac{dv_c(t)}{dt} \\ v_c(t)\big|_{(t=0)} = v_c(0) = V_i \end{cases} \Rightarrow \quad v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_c(t)\cdot dt = V_i + \frac{1}{C}\int_0^t i_c(t)\cdot dt$$

Col **tasto S** posto in **posizione 1**, si applichi la **legge** di Kirchhoff delle **tensioni** all'unica **maglia** di cui è formata la rete, tenendo conto che la **tensione** $\mathbf{v_R(t)}$ ai morsetti della **resistenza R** è prodotta dalla **corrente** del **condensatore C**, dato che i **due bipoli R** e **C sono collegati fra loro in serie**. Si ottiene la relazione:

$$v_s(t) = v_R(t) + v_c(t) \;\Rightarrow\; v_s(t) = R\cdot i_c(t) + v_c(t) \text{ , ovvero: } v_s(t) = RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$$

Il **modello matematico** ottenuto afferisce ad una **equazione differenziale lineare** del ***primo ordine*** e, nell'ipotesi di **invarianza** nel **tempo** dei **parametri R** e **C** [**R(t) =R = cost** e **C(t) =C = cost**], anche a **coefficienti costanti**.

Attesa la particolarità della funzione $\mathbf{v_S(t) = E = cost}$, nell'**intervallo** di **tempo** $\mathbf{0 \le t < t_O}$, lo studio dell'equazione differenziale può ricondursi ad una semplice integrazione relativa alla tipologia delle equazioni differenziali a variabili separabili. Infatti si può relazionare come di seguito esplicitato:

$$-RC\frac{dv_c(t)}{dt} = v_c(t) - E \;\Rightarrow\; \frac{dv_c(t)}{v_c(t) - E} = -\frac{1}{RC}dt$$

Applicando l'operatore di integrazione definita dall'istante **t=0** all'istante generico $\mathbf{t < t_O}$, si ottiene:

$$\int_0^t \frac{dv_c(t)}{v_c(t) - E} = \int_0^t -\frac{1}{RC}dt \;\Rightarrow\; \int_0^t \frac{dv_c(t)}{v_c(t) - E} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

Osservando che: $d[v_c(t) - E] = dv_c(t)$, al numeratore della frazione relativa all'integrale a primo membro compare la derivata della funzione posta a denominatore; pertanto si può relazionare come segue:

$$\left[\log_e|v_c(t) - E|\right]_0^t = -\frac{1}{RC}\left[t\big|_0^t\right] \text{ , ovvero:}$$

$$\log_e|v_c(t) - E| - \log_e|v_c(0) - E| = -\frac{1}{RC}(t - 0)$$

Riprendendo quanto asserito in merito alle **condizioni iniziali** di $v_C(t)$, cioè $\mathbf{v_C(0) = V_i}$, nonché le **proprietà dei logaritmi**, si ottiene la scrittura:

$$\log_e \left| \frac{v_C(t) - E}{V_i - E} \right| = -\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \quad e^{(-t/RC)} = \frac{v_C(t) - E}{V_i - E}$$

ovvero, osservando che **l'argomento del logaritmo è sempre positivo** e quindi si scioglie il **valore assoluto**, si perviene alla forma equivalente:

$$v_C(t) - E = (V_i - E) \cdot e^{(-t/RC)} \quad \Rightarrow \quad v_C(t) = E - (E - V_i) \cdot e^{(-t/RC)} \qquad (1)$$

Si osservi che per $\mathbf{t = 0\,s}$ la relazione fornisce coerentemente $\mathbf{v_C(0) = v_i}$, mentre per $\mathbf{t \to \infty}$ si ottiene $\mathbf{v_C(\infty) = E}$. Parimenti, giova ricordare che nel caso di **condensatore inizialmente scarico**, ovvero **condizioni iniziali nulle** $\mathbf{v_C(0) = V_i = 0\,V}$, si perviene alla relazione:

$$v_C(t) = E - E \cdot e^{(-t/RC)} = E \cdot (1 - e^{-t/RC}) \quad (2)$$

Il risultato conseguito tramite la relazione (1) è di validità generale ed è noto nella forma seguente:

$$v_C(t) = v_C(\infty) - [v_C(\infty) - V_i] \cdot e^{(-t/RC)} \quad (1.bis)$$

Nota la tensione $\mathbf{v_C(t)}$, il calcolo della **corrente** $\mathbf{i_C(t)}$ è **univocamente determinato** facendo ricorso alla **relazione costitutiva** del **bipolo condensatore**; infatti, si relaziona nel modo seguente:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}\{v_C(\infty) - [v_C(\infty) - V_i] \cdot e^{-t/RC}\} = -C \cdot [v_C(\infty) - V_i] \cdot e^{-t/RC}(-\frac{1}{RC})$$

da cui, operando le dovute semplificazioni algebriche, si perviene alla seguente scrittura finale:

$$i_C(t) = \frac{[v_C(\infty) - V_i]}{R} \cdot e^{-t/RC} = I_C(0^+) \cdot e^{-t/RC} \text{ , in cui si è posto: } I_C(0^+) = \frac{[v_C(\infty) - V_i]}{R}$$

La ricerca dell'attribuzione dimensionale al prodotto RC fornisce l'analisi seguente:

$$[CR] = [C] \cdot [R] = \left[\frac{Q}{V}\right] \cdot \left[\frac{V}{I}\right] = \left[\frac{Q}{I}\right] = \frac{[I] \cdot [t]}{[I]} = [t] = \sec ondi$$

Per questo motivo, la grandezza $\boldsymbol{\tau = RC}$ viene definita "**costante di tempo**". Essa caratterizza tutte le **prestazioni dinamiche** del **transitorio** afferente una **rete RC** sottoposta a **segnali** caratterizzati da **variazioni lineari a tratti** (successione di gradini).

Riferendosi al caso espresso dalla relazione (2), si determini il valore assunto dalla tensione $\mathbf{v_C(t)}$ ai morsetti del condensatore all'istante di tempo $\mathbf{t = \tau}$, ovvero, dopo un intervallo di tempo dall'istante $\mathbf{t = 0\,s}$ e pari alla costante di tempo $\tau$; si ottiene:

$$v_C(t)\Big|_{(t=\tau)} = \left[ E \cdot (1 - e^{-t/RC})\Big|_{(t=\tau)} \right] = E \cdot (1 - e^{-\tau/RC}) = E \cdot (1 - e^{-1}) = E \cdot (1 - 0{,}3678)$$

ovvero: $v_C(t)\Big|_{(t=\tau)} = 0{,}632 \cdot E \quad \Rightarrow \quad v_C(\tau) = 63{,}2\% \cdot E \quad (3)$

La relazione (3) costituisce una seconda definizione per la **costante di tempo** $\boldsymbol{\tau}$. Infatti, la **costante di tempo** $\boldsymbol{\tau}$ definisce il **tempo necessario alla tensione** $\mathbf{v_C(t)}$ **ai morsetti del condensatore per conseguire il 63,2% del suo valore finale di regime**.

La ricerca del valore assunto dalla corrente $\mathbf{i_C(t)}$ del condensatore all'istante di tempo $\mathbf{t = \tau}$, ovvero, dopo un intervallo di tempo dall'istante $\mathbf{t = 0}$ pari alla costante di tempo fornisce la relazione:

$$i_C(t)\Big|_{(t=\tau)} = \left\{ \frac{[v_C(\infty) - V_i]}{R} \cdot e^{-t/RC}\Big|_{(t=\tau)} \right\} = \frac{[v_C(\infty) - V_i]}{R} \cdot e^{-1} = I_C(0^+) \cdot e^{-1} \cong 0{,}368 I_C(0^+)$$

Quanto ora ottenuto costituisce una **terza definizione** di **costante di tempo** $\boldsymbol{\tau}$. Infatti, la **costante di tempo** $\boldsymbol{\tau}$ definisce il ***tempo necessario alla corrente*** $\boldsymbol{i_C(t)}$ ***del condensatore per conseguire il 36,8%***

***del suo valore iniziale.***

Si definisce **tempo di assestamento $T_a$ il tempo impiegato dalla tensione $v_C(t)$ ai morsetti del condensatore per conseguire il 99% del valore finale di regime** $v_C(\infty)$, ovvero **il tempo dopo il quale la tensione $v_C(t)$ ai morsetti del condensatore entra stabilmente in una fascia dell'1% del valore finale di regime.**

Pertanto, con riferimento alla situazione circuitale espressa dalla relazione (2) si può relazionare come di seguito esplicitato:

$$v_C(t)\Big|_{(t=T_a)} = \left[ E\cdot(1-e^{-t/RC})\Big|_{(t=T_a)} \right] = E\cdot(1-e^{-T_a/RC}) = 99\%E$$ , ed ancora:

$$E\cdot(1-e^{-T_a/RC}) = \frac{99}{100}E \;\Rightarrow\; 1-e^{-T_a/RC} = 0{,}99 \;\Rightarrow\; \frac{1}{100} = \frac{1}{e^{T_a/RC}}$$

L'algebra ordinaria assicura che se **due frazioni sono uguali** ed hanno **uguali** altresì il **numeratore** allora devono avere uguale anche il denominatore; consegue, pertanto, che:

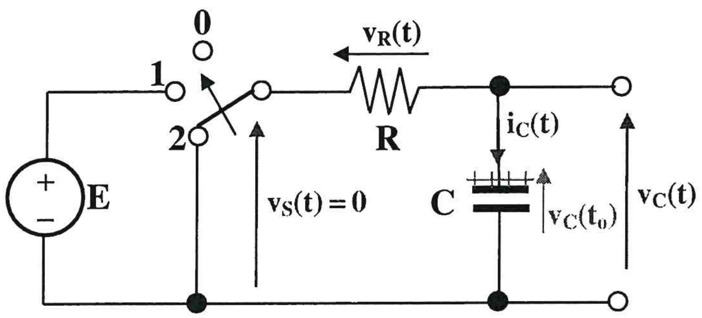
$$e^{T_a/RC} = 100 \;\Rightarrow\; \frac{T_a}{RC} = \log_e 100 \;\Rightarrow\; T_a = 4{,}6\cdot RC \cong 5\tau$$

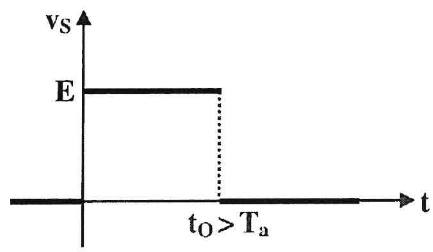
Si riprenda in considerazione il circuito mostrato in figura 6. All'istante $\mathbf{t_O > T_a}$ il tasto **S** si porti in posizione 2. Il **condensatore** si è ***completamente caricato*** (cioè, può ritenersi **modellato** dal **bipolo circuito aperto**) per cui è ovvia la posizione che esprime la **condizione iniziale** nei confronti del **nuovo transitorio** dovuto alla **commutazione** del **tasto S**:

$$v_C(t)\Big|_{(t=t_o)} = v_C(t_o) = E$$

L'analisi richiesta del ***transitorio per ogni istante di tempo $t \geq t_O$*** deve attivarsi con riferimento alla rete riportata nella figura 7.

(figura **7**)




L'applicazione della **legge** di **Kirchhoff** delle **tensioni** consente di relazionare come segue:

$$v_s(t) = v_R(t) + v_c(t) \;\Rightarrow\; v_s(t) = R\cdot i_c(t) + v_c(t) \;\Rightarrow\; v_s(t) = RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$$

Atteso che $\mathbf{v_S(t) = 0V}$, per tutti gli istanti di tempo afferenti l'analisi in corso (tasto S in posizione 2), si perviene alla seguente relazione:

$$0 = RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) \;\Rightarrow\; \frac{dv_c(t)}{dt} = -\frac{v_c(t)}{RC} \;\Rightarrow\; \frac{dv_c(t)}{v_c(t)} = -\frac{dt}{RC}$$

Il modello matematico ottenuto è ancora un'**equazione differenziale lineare** del **primo ordine** con **coefficienti costanti** inquadrabile nella tipologia delle ***equazioni a variabili separabili***; pertanto, la procedura risolutiva attiva l'**operazione** di ***integrazione membro a membro***. Si ottiene la scrittura di seguito riportata:

$$\int_{t_o}^{t}\frac{dv_c(t)}{v_c(t)} = \int_{t_o}^{t} -\frac{dt}{RC} \;\Rightarrow\; \int_{t_o}^{t}\frac{v_c'(t)}{v_c(t)}dt = -\frac{1}{RC}\int_{t_o}^{t}dt \;\Rightarrow\; \left[\log_e|v_c(t)|\right]_{t_o}^{t} = -\frac{1}{RC}\left(t\Big|_{t_o}^{t}\right)$$

Ricordando le proprietà dei logaritmi e quando in precedenza postulato in relazione alle condizioni iniziali $\mathbf{v_C(t_O) = E}$, si ottengono le scritture che di seguito si esplicitano:

$$\log_e|v_C(t)| - \log_e|v_C(t_O)| = -\frac{(t-t_O)}{RC} \Rightarrow \log_e\left|\frac{v_C(t)}{v_C(t_O)}\right| = -\frac{(t-t_O)}{RC}$$ , ovvero:

$$e^{-\frac{(t-t_O)}{RC}} = \frac{v_C(t)}{v_C(t_O)} \Rightarrow v_C(t) = v_C(t_O)\cdot e^{-\frac{(t-t_O)}{RC}}$$ , essendo: $\frac{v_C(t)}{v_C(t_O)} \geq 0 \ \forall\, t \geq t_O$

Si noti che per $\mathbf{t \to \infty}$ si ottiene $\mathbf{v_C(\infty) = 0\,V}$; cioè, a **regime**, il condensatore ritorna **completamente scarico**.

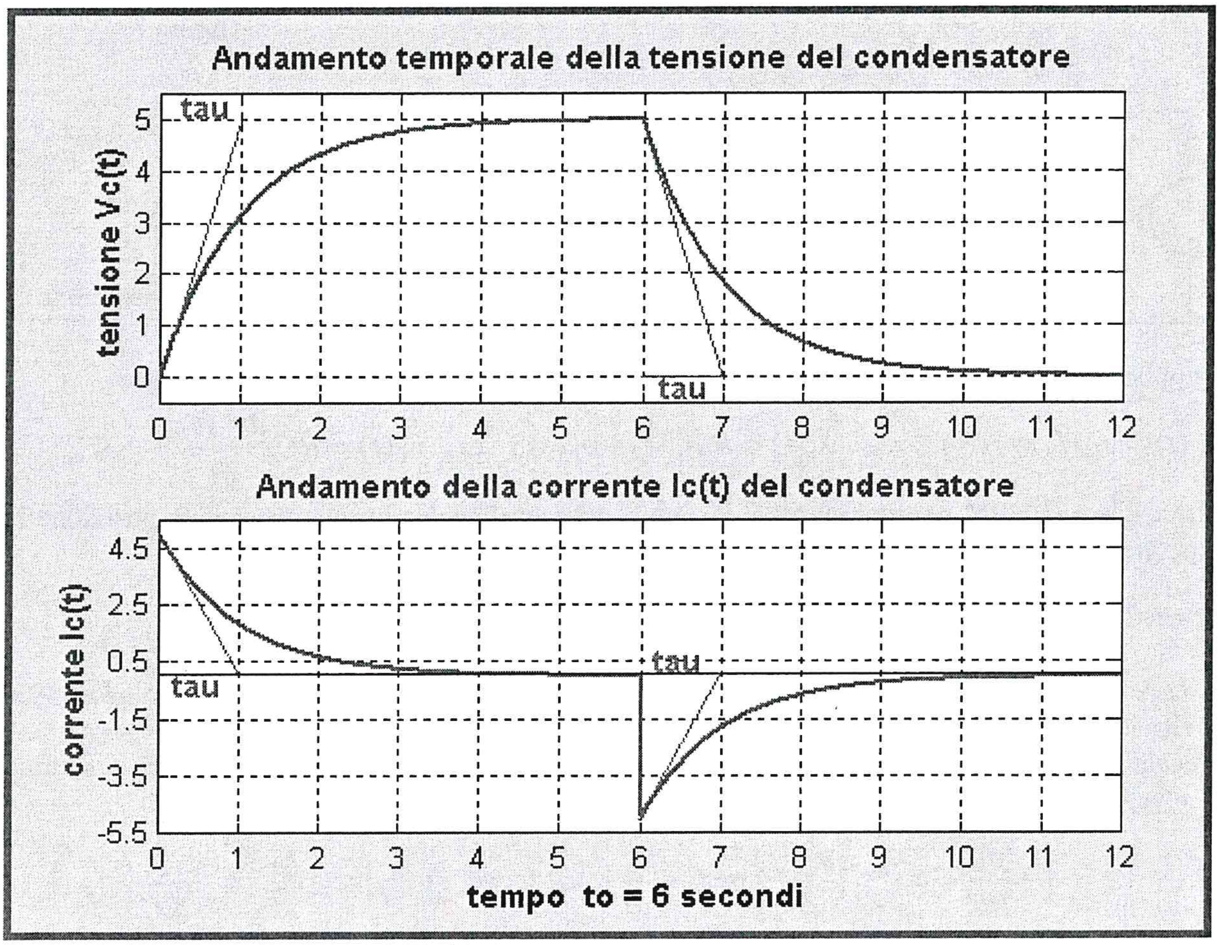
La considerazione relativa alla situazione $\mathbf{v_C(\infty) = 0\,V}$ consente poi di osservare che la relazione che fornisce l'andamento temporale della tensione $\mathbf{v_C(t)}$ per ogni $\mathbf{t > t_O}$ è quanto in realtà logicamente si deduce dalla (1bis) ponendo: $\mathbf{v_C(\infty) = 0,\ V_i = v_C(t_O)}$ con traslazione temporale pari a $\mathbf{(t - t_O)}$; infatti:

$$v_C(t) = v_C(\infty) - [v_C(\infty) - V_i]\cdot e^{-t/\tau}\Big|_{\substack{v_C(\infty)=0 \\ V_i = v_C(t_O) \\ (t-t_O)}} = 0 - [0 - v_C(t_O)]\cdot e^{-\frac{(t-t_O)}{RC}} = v_C(t_O)\cdot e^{-\frac{(t-t_O)}{RC}}$$

Relativamente alla determinazione della corrente $\mathbf{i_C(t)}$ per ogni $\mathbf{t > t_O}$, si ricorre alla nota **relazione costitutiva**, ovvero:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}\{v_C(t_O)\cdot e^{-t/RC}\}$$ , ovvero:

$$i_C(t) = C\cdot v_C(t_O)\cdot e^{-(t-t_O)/RC}\left(-\frac{1}{RC}\right) = -\frac{v_C(t_O)}{R}\cdot e^{-(t-t_O)/RC} = I_C(t_O^+)\cdot e^{-(t-t_O)/RC}$$



I grafici afferenti gli andamenti temporali delle grandezze di interesse sono riportati nella figura.

Si osservi che anche per la corrente **$i_C(t)$**, la relazione ora ottenuta consegue dalla scrittura generale:

$$i_c(t) = \frac{[v_c(\infty) - V_i]}{R} \cdot e^{-t/RC}$$

allorché si ponga **$v_C(\infty) = 0$; $V_i = v_C(t_o)$** contestualmente ad una traslazione temporale pari a **$(t - t_o)$**, come evidenziato nella relazione di seguito riportata:

$$i_c(t) = \frac{[v_c(\infty) - V_i]}{R} \cdot e^{-t/RC} \Bigg|_{\substack{v_c(\infty)=0 \\ V_i = v_c(t_o) \\ (t-t_o)}} = \frac{[0 - v_c(t_o)]}{R} \cdot e^{-(t-t_o)/\tau} = -\frac{v_c(t_o)}{R} \cdot e^{-(t-t_o)/\tau}$$

In conclusione si può asserire che il transitorio, relativo alla carica e alla scarica di un condensatore, è regolato dalle seguenti leggi temporali:

$$v_c(t) = v_c(\infty) - [v_c(\infty) - v_c(t_o)] \cdot e^{-(t-t_o)/(R_{TH}C)}$$

$$i_c(t) = \frac{[v_c(\infty) - v_c(t_o)]}{R_{TH}} \cdot e^{-(t-t_o)/R_{TH}C} = I_c(t_o^+) \cdot e^{-(t-t_o)/(R_{TH}C)}$$

Per completezza si riporta il programma per la simulazione software, mediante PSPICE, della rete relativa alla prova di laboratorio di cui all'oggetto.

```
TRANSITORIO RETE RC
VS  1  0  PULSE(0 5 0 0 0 1M 2M)
D1  1  2  D1N4002
R1  2  3  2.2K
R2  3  0  10K
C1  3  0  100NF  IC=0V
.LIB  NOM.LIB
.TRAN  2US  6MS  0  2US  UIC
.PRINT  TRAN  V(3)  I(C1)
.PROBE
.END
```