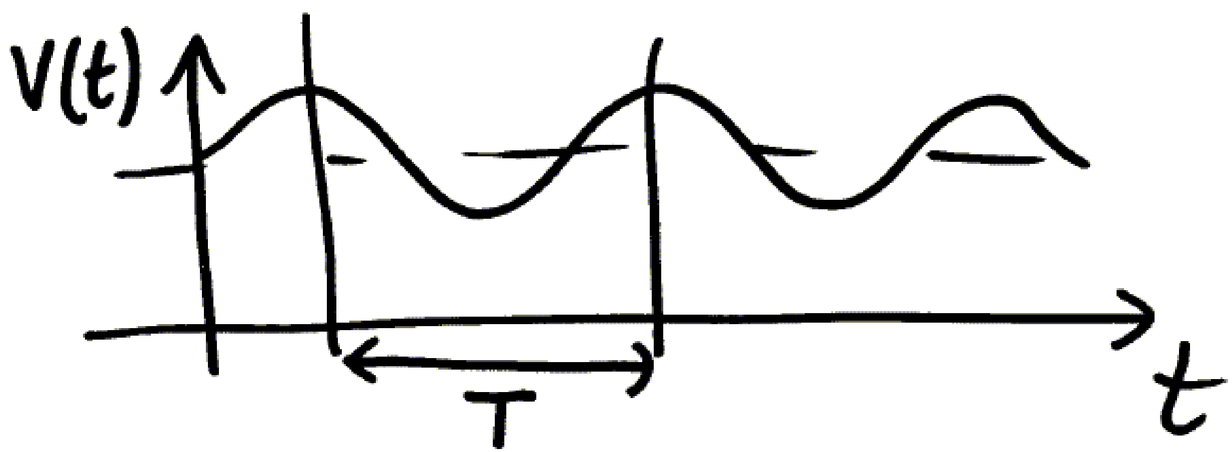
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI RISULTATI SPERIMENTALI

INTERPOLAZIONE E CURVE DI REGRESSIONE

Rappresentazione Grafica

- "Visione d'insieme" di una grandezza, in funzione del tempo o di un altro parametro
- Tipicamente si utilizzano assi coordinati che devono riportare la descrizione della grandezza rappresentata e all'occorrenza anche la sua unità di misura



Tipi di Grafici

- Quando sugli assi compaiono dei valori numerici, bisogna SEMPRE indicare l'unità di misura corrispondente. Il grafico si dice QUANTITATIVO

- Altrimenti il diagramma è QUALITATIVO e può servire per indicare degli andamenti o delle tendenze

Grafico in un Piano Cartesiano

Esempio: caratteristica I – V per un diodo Zener

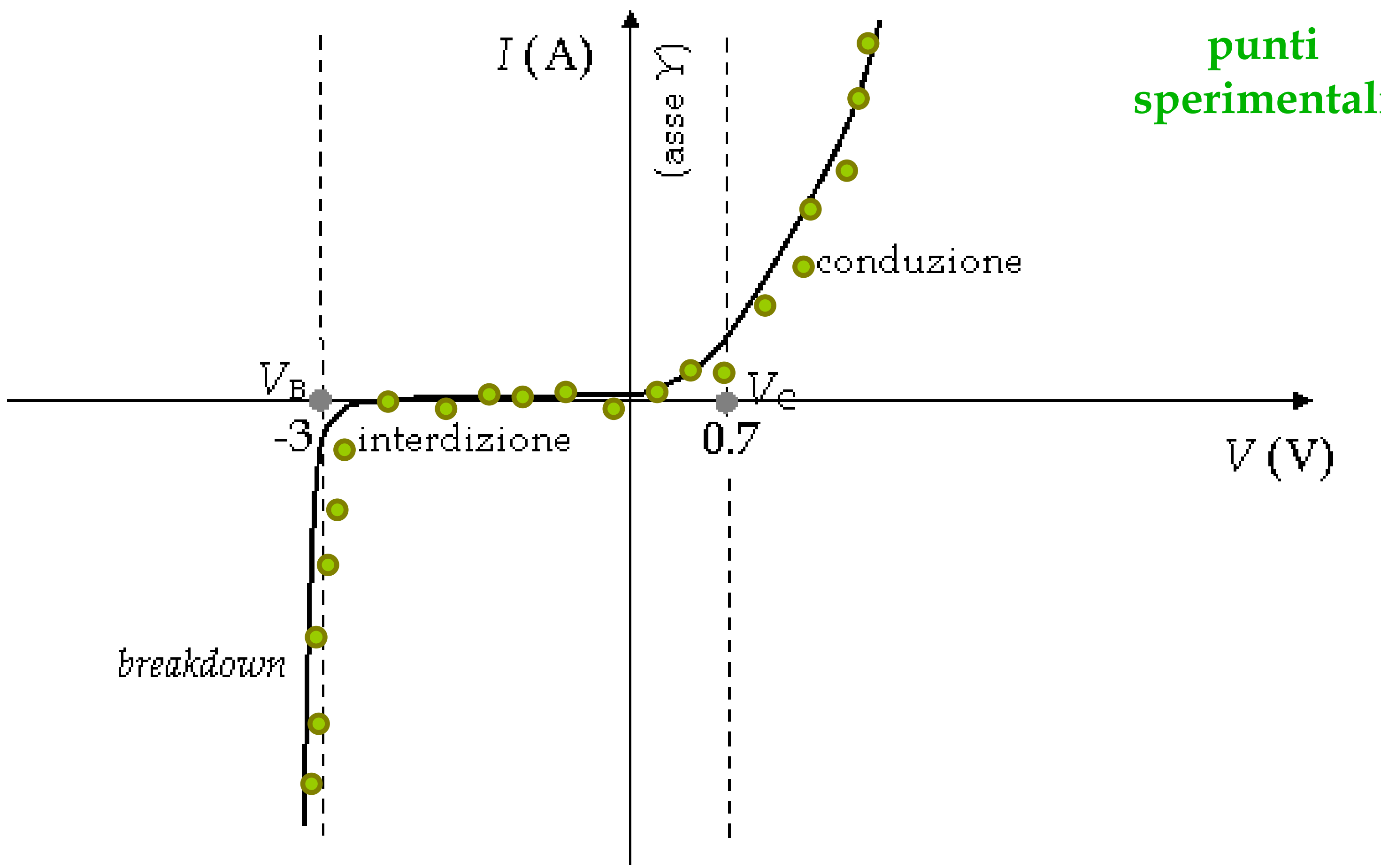


Grafico in un Piano Cartesiano

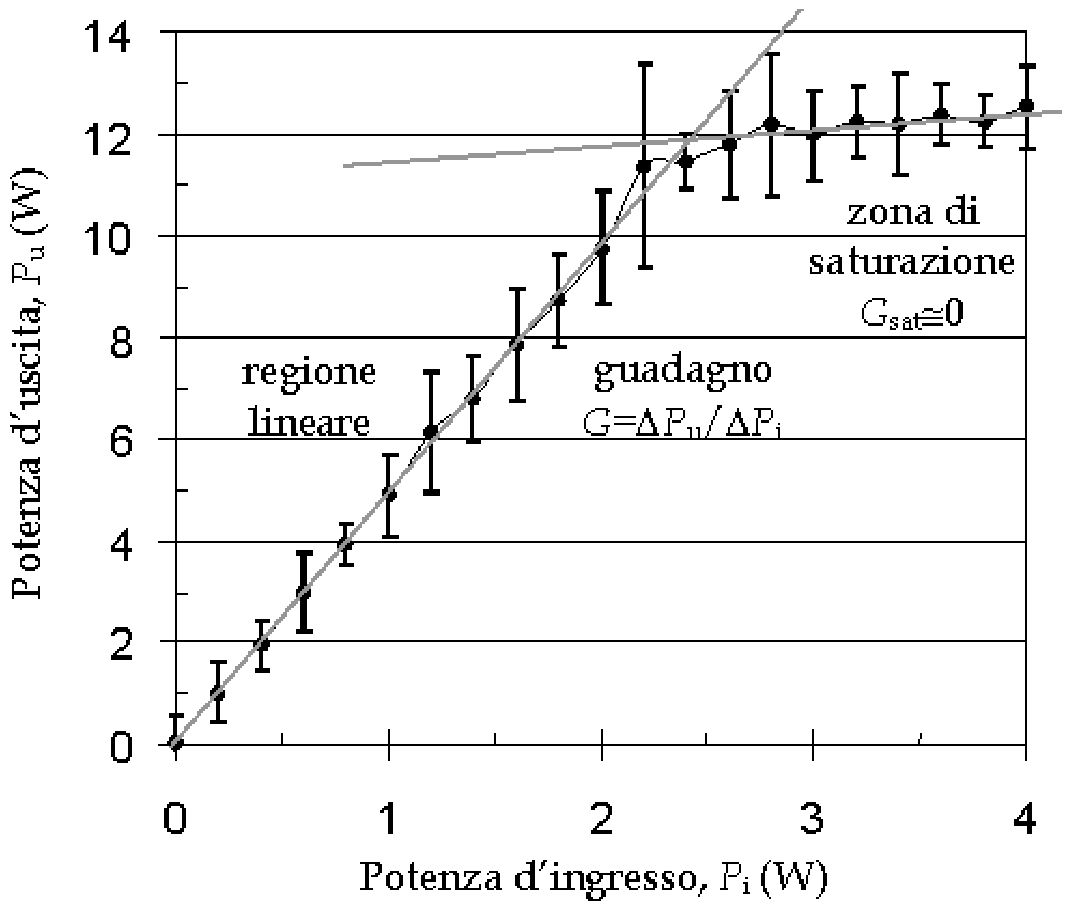
- ASCISSE (asse X): variabile indipendente
  o di comando o di ingresso
- ORDINATE (asse Y): variabile dipendente
  o grandezza di uscita

Generalmente si ha $u(x_i) << u(y_i)$

Molte volte le incertezze di ingressi e uscite non sono specificate ma insieme al rumore sui dati si traducono in una "dispersione dei punti sperimentali"

Dispersione/Incertezza

Caratteristica ingresso-uscita di un amplificatore elettronico.
Le **BARRE DI ERRORE** indicano un intervallo di confidenza, che va specificato: ad esempio $\pm 1\sigma$ (68%), oppure ad esempio il 90%.

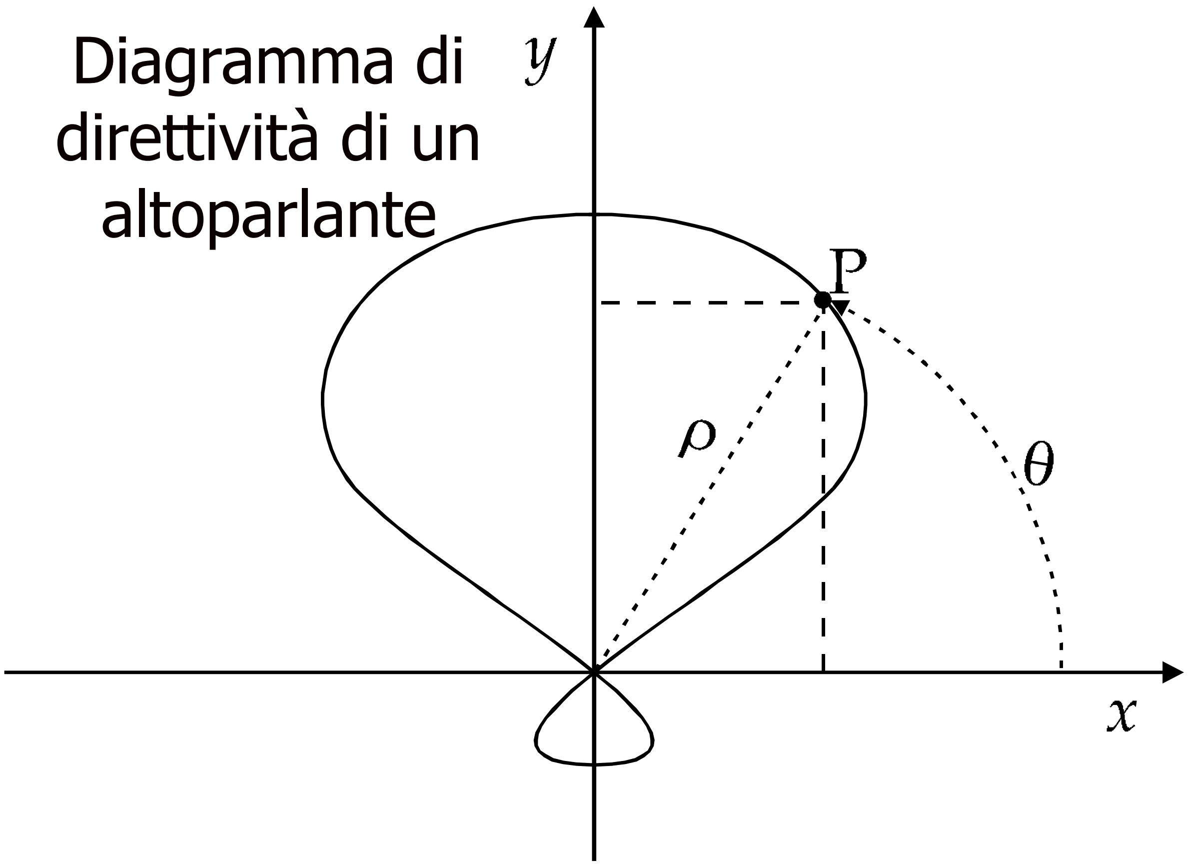


Diagrammi Polari

Coordinata radiale $\rho = (x^2+y^2)^{1/2}$

Coordinata angolare $\theta = \text{arctg}(y/x)$ per $x \geq 0$

Diagramma di direttività di un altoparlante



$x = \rho\cos(\theta)$

$y = \rho\sin(\theta)$

$\rho(\theta)$ può anche indicare la potenza irradiata da un'antenna o sorgente di OE

Scale Logaritmiche

Utili per visualizzare grandezze che variano di diversi ordini di grandezza, con dettaglio relativo costante:

punti equispaziati in scala logaritmica stanno in uno stesso rapporto in scala lineare.

$\boldsymbol{z|_{\log}=\log_B(z/z_0)}$ $\qquad$ B è la base e z_0 è il riferimento

Molto comuni dB e dBm (con B=10)

$P|_{\mathrm{dB}}=10\log_{10}(P/P_0)$

$A|_{\mathrm{dB}}=20\log_{10}(A/A_0)$

$P|_{\mathrm{dBm}}=10\log_{10}[P/(P_{\mathrm{m}})]$ con $P_{\mathrm{m}}=1\ \mathrm{mW}$

dB di Potenza

$$\log_{10} 2 = 0.301 \ldots \sim 0.3$$

Mondo Lineare	Mondo dei dB
2	$10 \log_{10} 2 = +3$
$\frac{1}{2} = 2^{-1}$	$10 \log_{10} 2^{-1} = -10 \log_{10} 2 = -3$
10	$10 \log_{10} 10 = +10$
$\frac{1}{10} = 10^{-1}$	-10
$5 = 10 \times \frac{1}{2}$	$+10 + (-3) = +7$
$\frac{1}{5} = 5^{-1}$	-7

dB di Potenza

Mondo dei dB	Mondo Lineare
$+5 = +10 \times \frac{1}{2}$	$10^{\frac{1}{2}} = 3.162$
$-5 = -10 \times \frac{1}{2}$	$10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} = 0.3162$

dB di Ampiezza

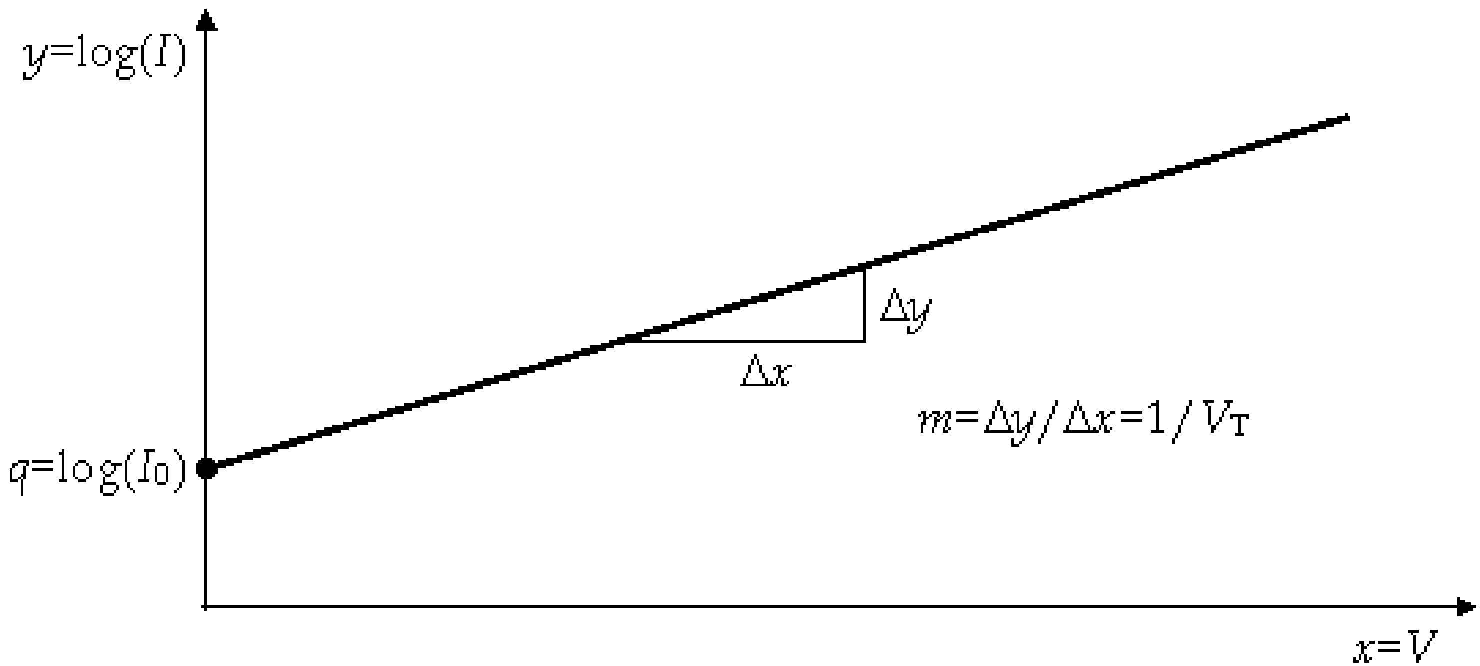
Mondo Lineare	Mondo dei dB
2	$20\log_{10} 2 = +6$
$\frac{1}{2} = 2^{-1}$	$20\log_{10} 2^{-1} = -20\log_{10} 2 = -6$
10	$20\log_{10} 10 = +20$
$\frac{1}{10} = 10^{-1}$	-20
$5 = 10 \times \frac{1}{2}$	$+20 + (-6) = +14$
$\frac{1}{5} = 5^{-1}$	-14

dB di Ampiezza

Mondo dei dB	Mondo Lineare
$+3 = +6 \times \frac{1}{2}$	$2^{\frac{1}{2}} = 1.414$
$-3 = -6 \times \frac{1}{2}$	$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$
$+5 = +20 \times \frac{1}{4}$	$10^{\frac{1}{4}} = 1.778$
$-5 = -20 \times \frac{1}{4}$	$10^{-\frac{1}{4}} = 1.778^{-1} = 0.562$

Diagrammi Semilogaritmici (log-lin)

Diagramma semilog-*y* per la curva *I*-*V* di un diodo a semiconduttore in polarizzazione diretta: $\boldsymbol{I=I_0\exp(V/V_T)}$

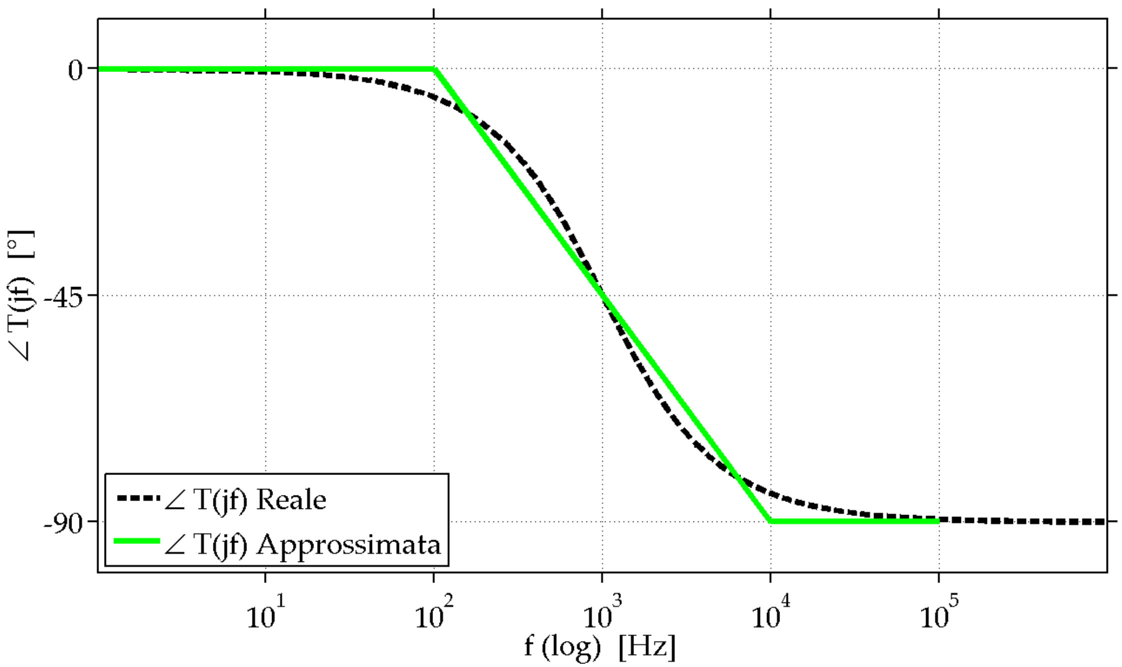


$$y = \log(I) = (1/V_T)\times V+\log(I_0) = mx+q$$

$$m = (1/V_T) \qquad q=\log(I_0)$$

Diagrammi Semilogaritmici (lin-log)

Esempio: diagramma di bode della fase di una funzione di <u>risposta in frequenza</u> di tipo Passa Basso



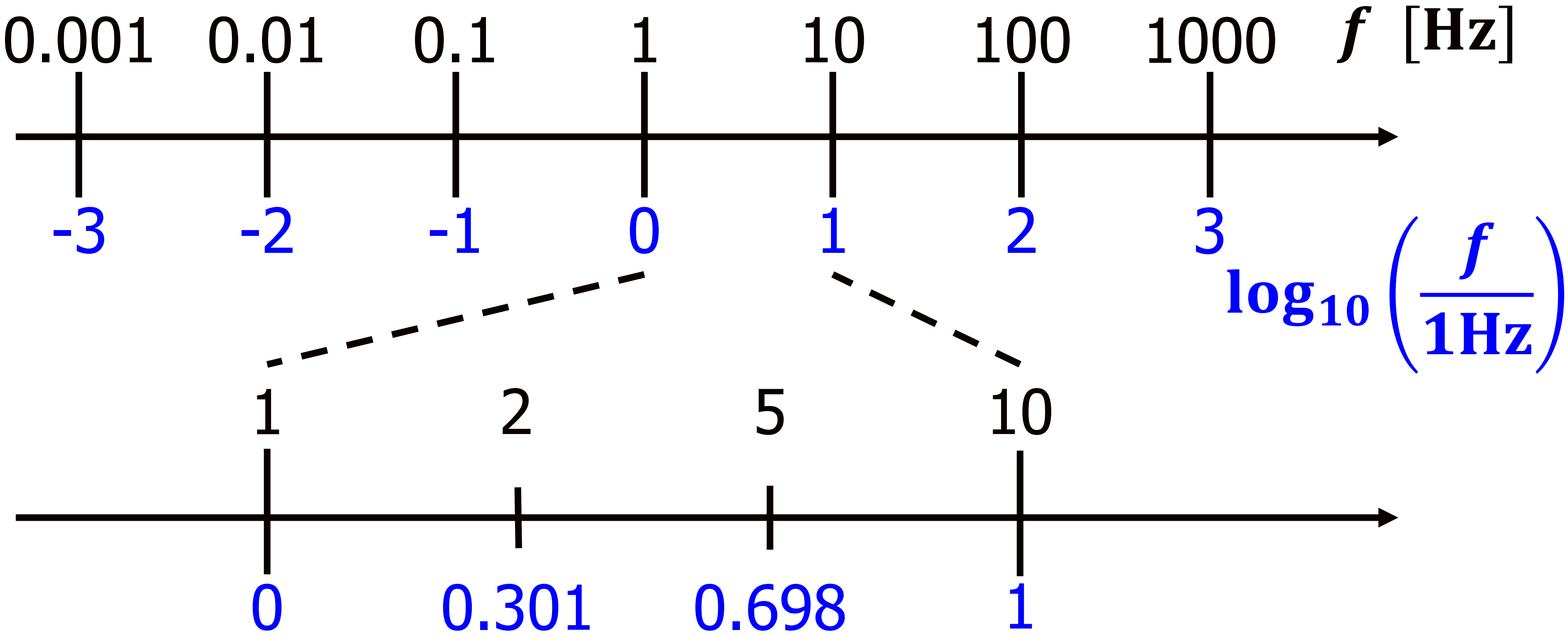
$$T(jf) = \frac{k}{1 + j\frac{f}{f_0}}$$

$$f_0 = 10^3 \text{Hz}$$

6 decadi

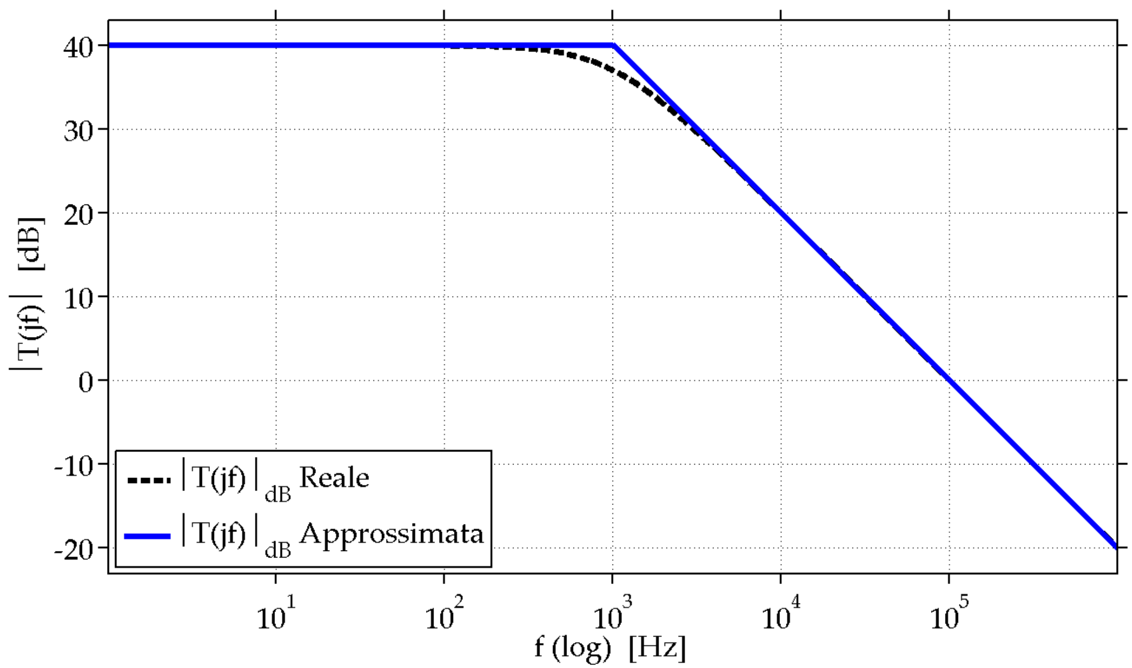
Sfasamento in gradi o radianti in funzione della frequenza riportata in scala logaritmica (ampia dinamica).

Asse logaritmico



Diagrammi Bilogaritmici (log-log)

Esempio: diagramma di bode del modulo di una funzione di risposta in frequenza di tipo Passa Basso



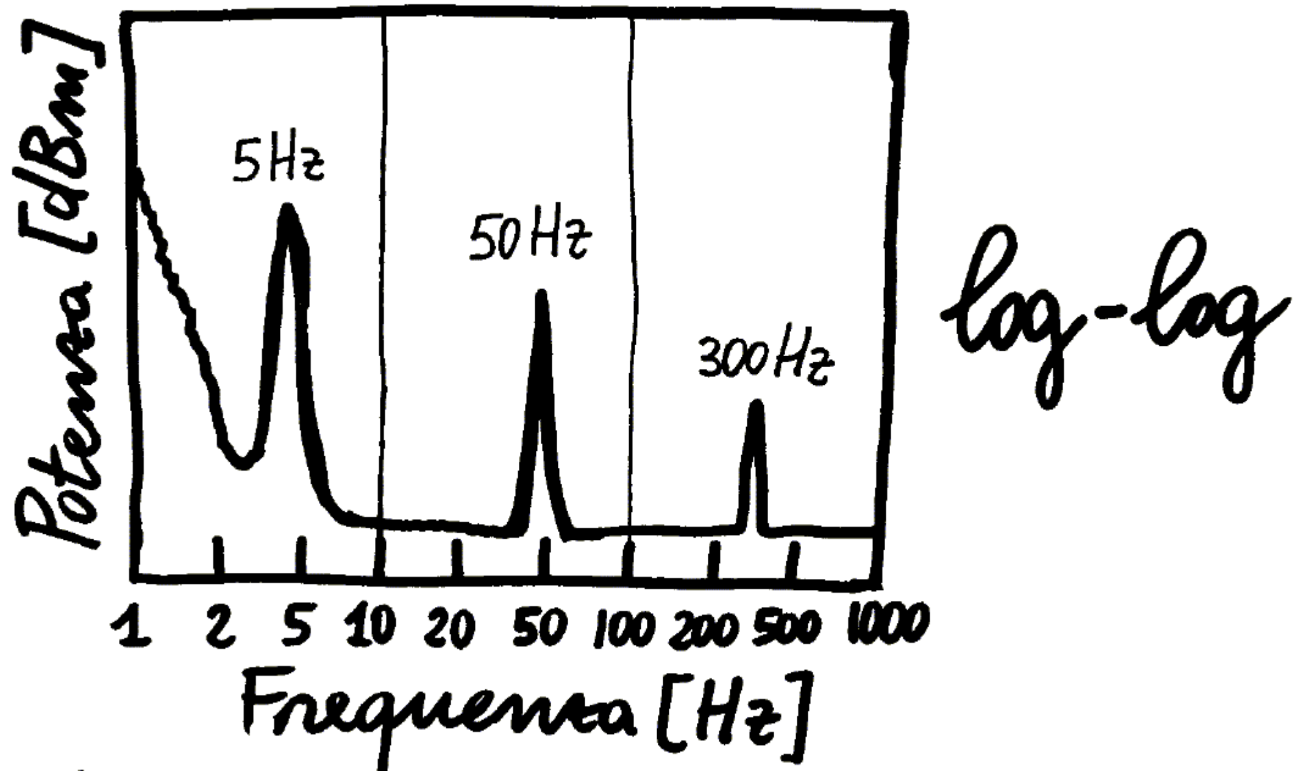
$$T(jf) = \frac{k}{1 + j\frac{f}{f_0}}$$

$$f_0 = 10^3\text{Hz}$$

Ampiezza o guadagno in dB in funzione della frequenza riportata in scala logaritmica: si possono individuare delle pendenze tipiche (*e.g.* -20 dB/decade)

Diagrammi Bilogaritmici (log-log)

Esempio: Spettro di Potenza di un segnale elettrico



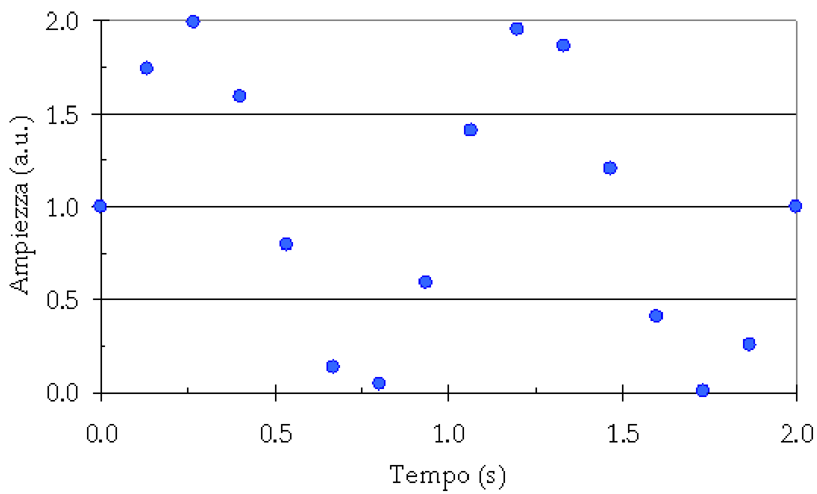
Ampia dinamica di frequenze e potenze visualizzabili sullo stesso diagramma.

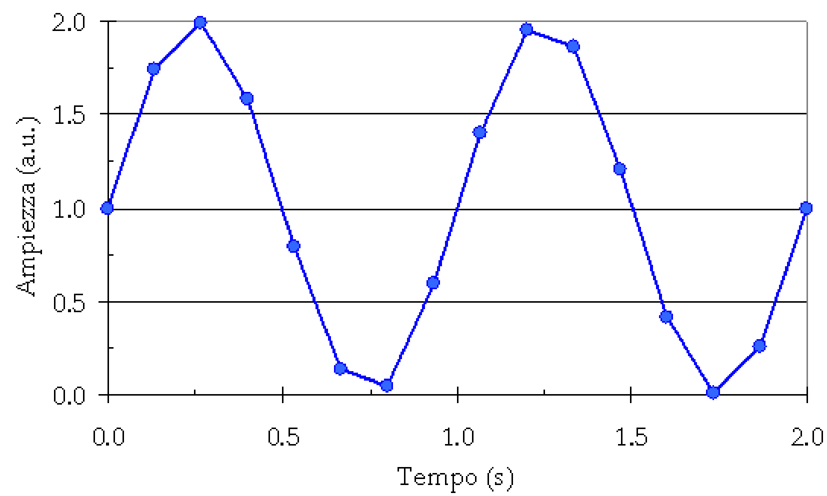
Interpolazione

- Misura: insieme finito e discreto di valori sperimentali.
- I punti sperimentali sono i valori assunti dal misurando al variare di uno o più parametri di comando (grandezza/e di ingresso), oppure sono i campioni discreti prelevati nel tempo.
- La rappresentazione è più facilmente leggibile se operiamo un "riempimento" o **interpolazione tra due punti sperimentali adiacenti**.
- Interpolante: è una funzione continua che passa per i due punti in questione e fornisce l'andamento presunto (interpolato) della relazione ingresso-uscita.

Interpolazione lineare

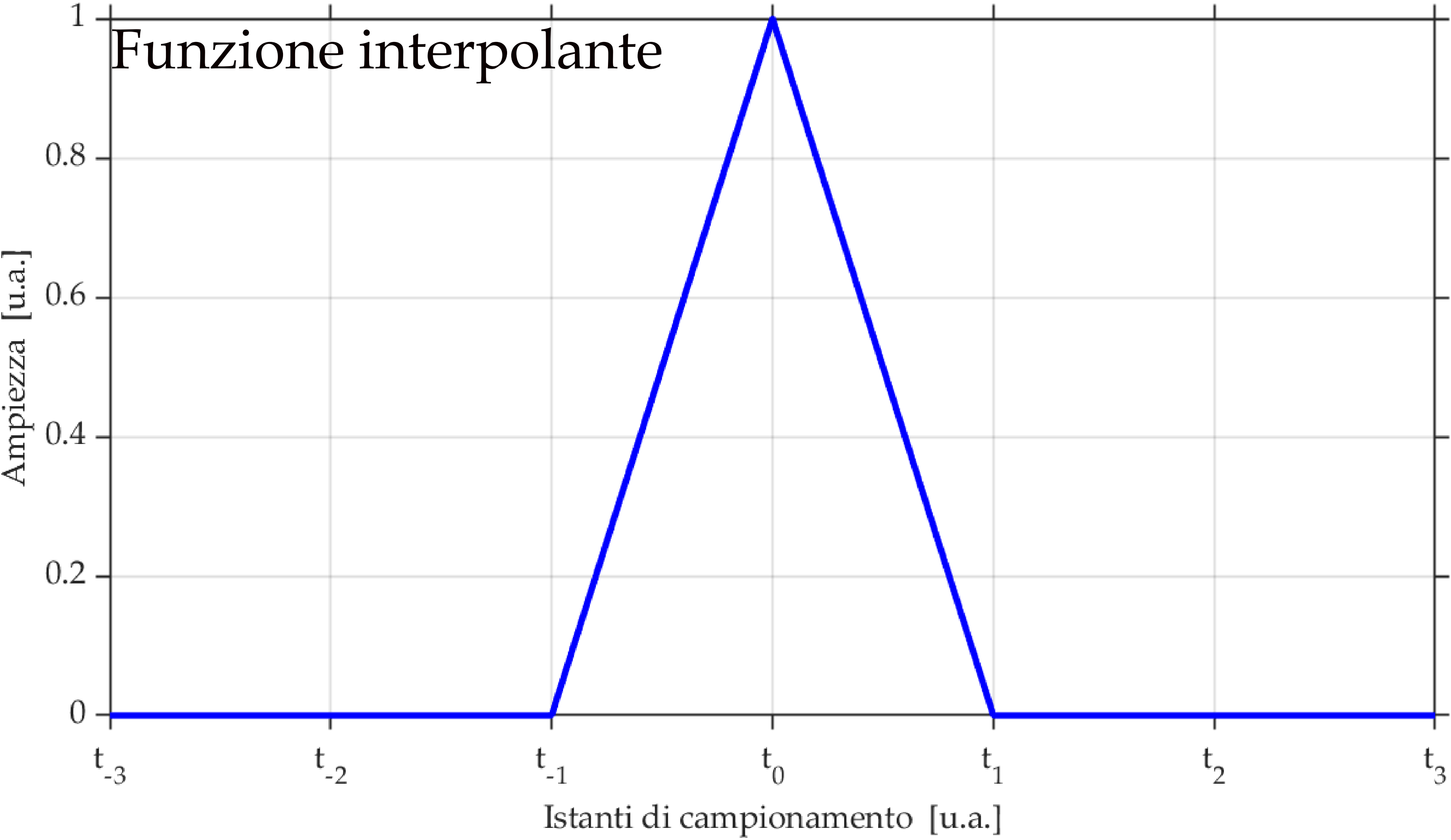
È la più semplice interpolazione possibile: consiste nel congiungere i punti con una spezzata (insieme dei segmenti di rette che passano per due punti adiacenti).



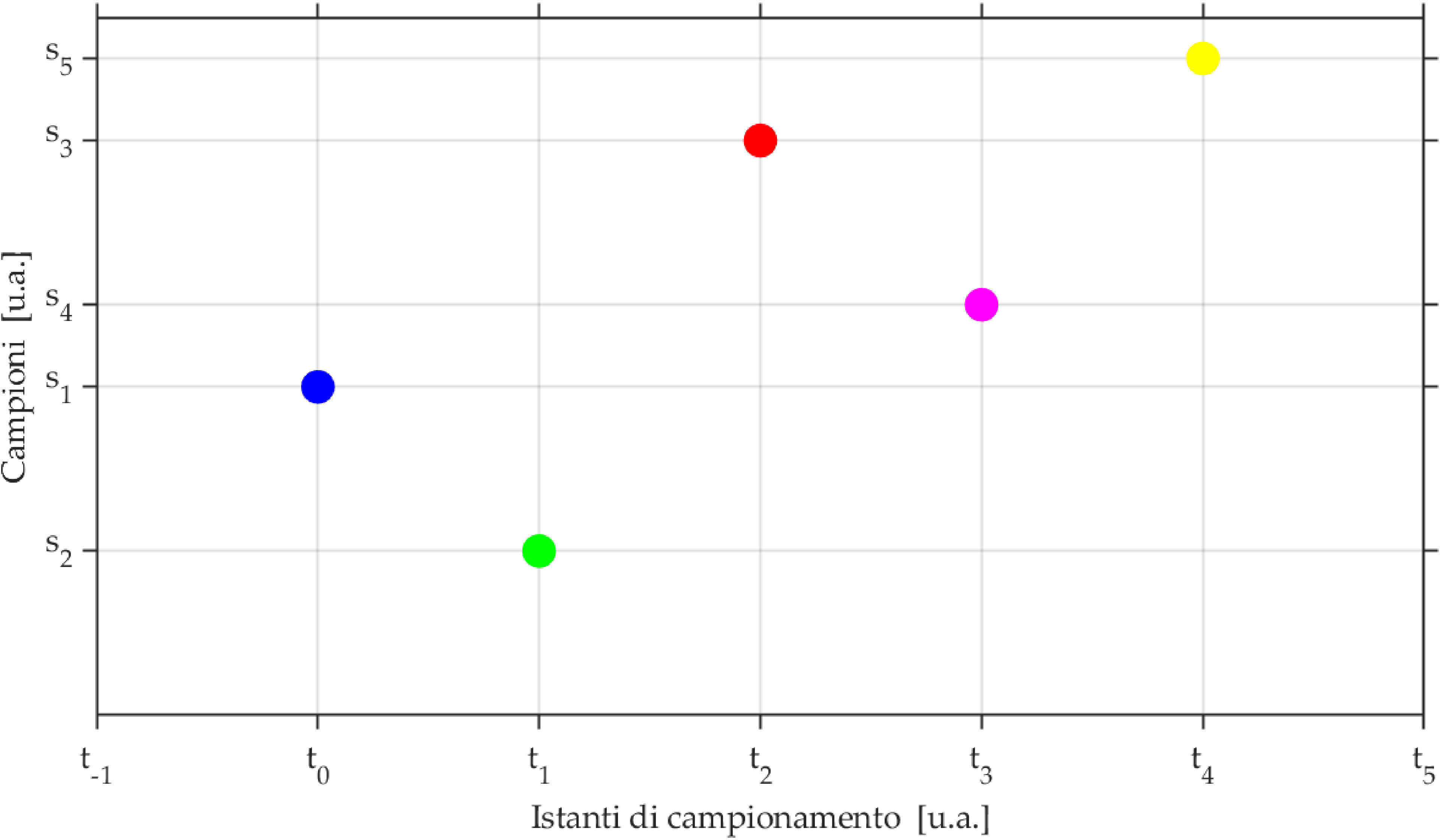


Non consente una buona ricostruzione del segnale perché non sfrutta l'informazione dei punti precedenti e successivi.

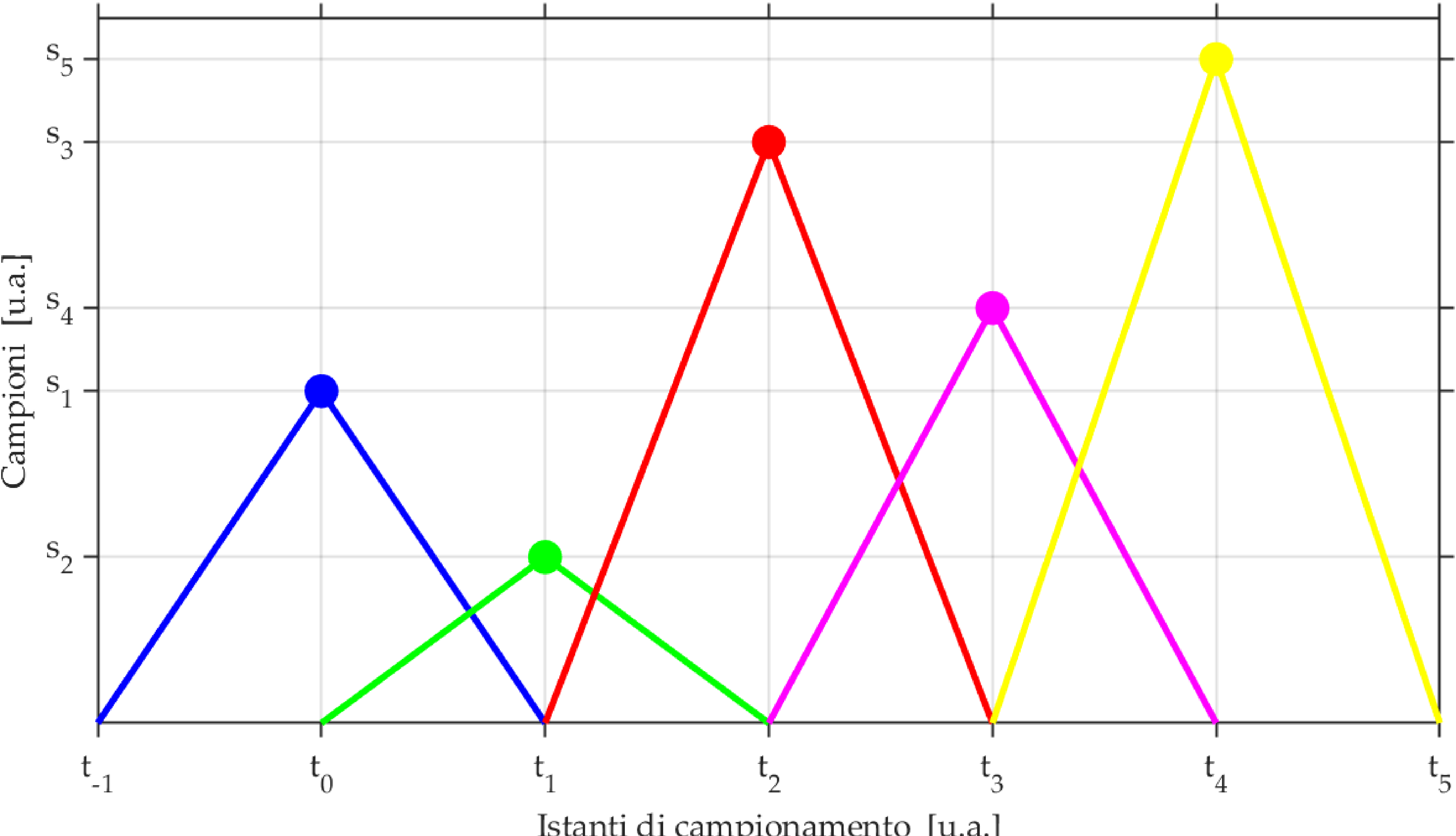
Interpolazione lineare



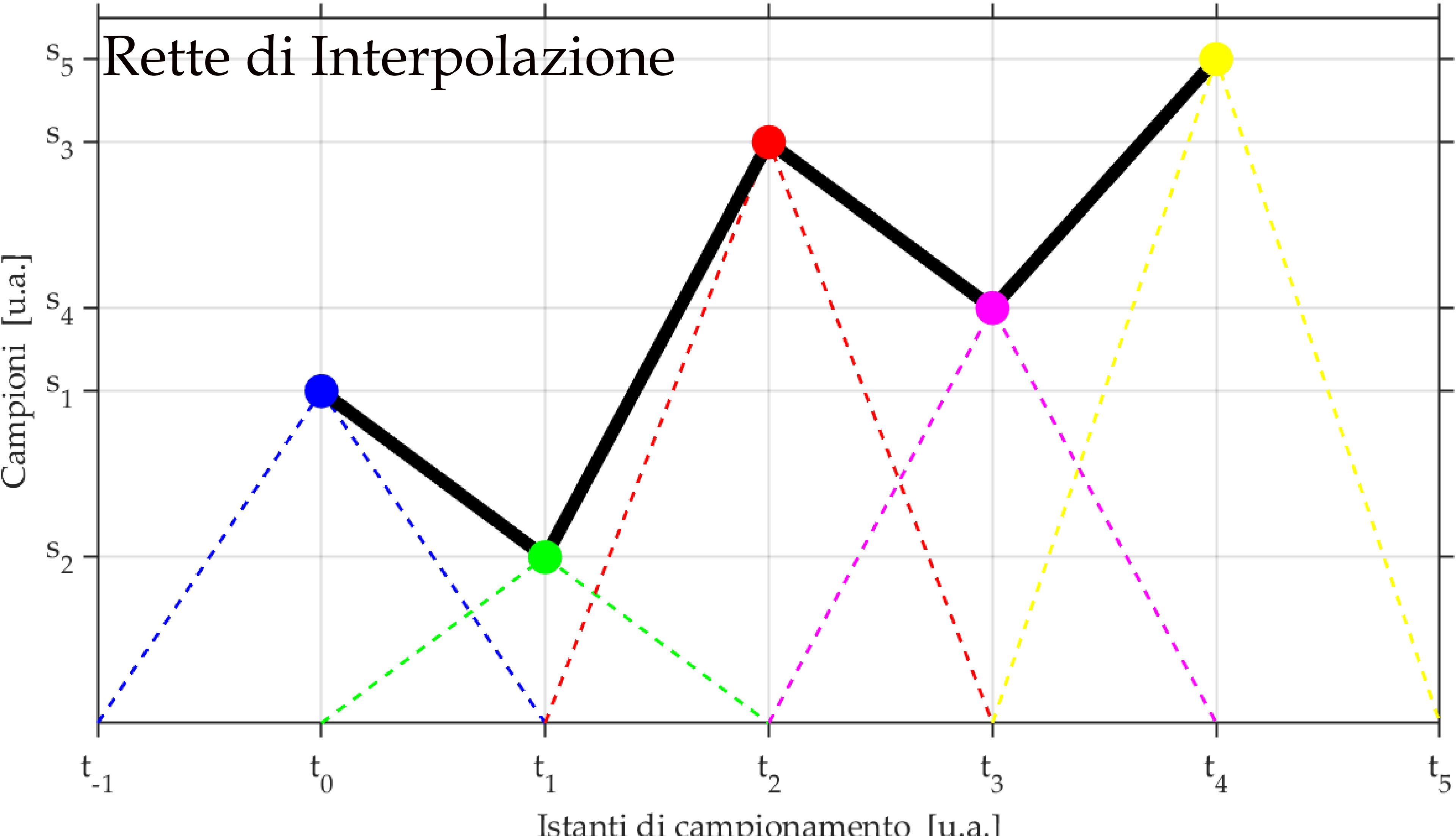
Interpolazione lineare



Interpolazione lineare

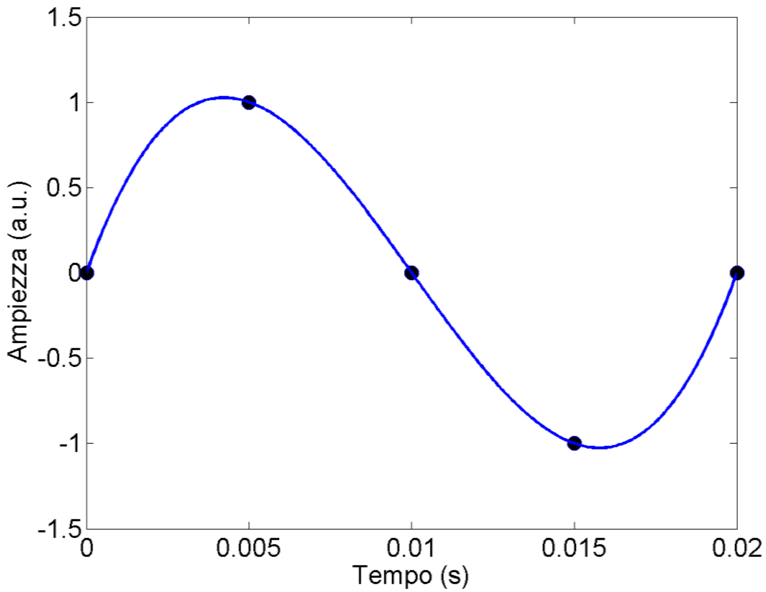


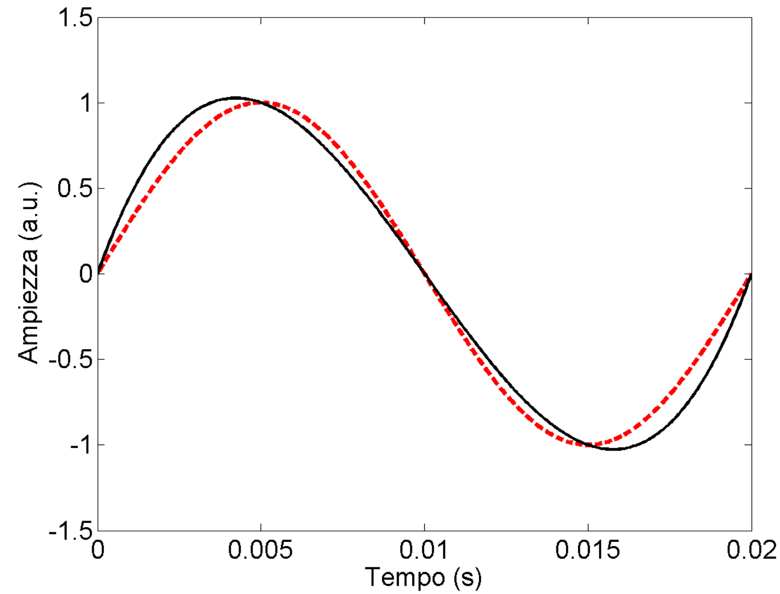
Interpolazione lineare



Interpolazione polinomiale cubica

È la curva che passa per i punti sperimentali, mantenendo continue la derivata prima e seconda.

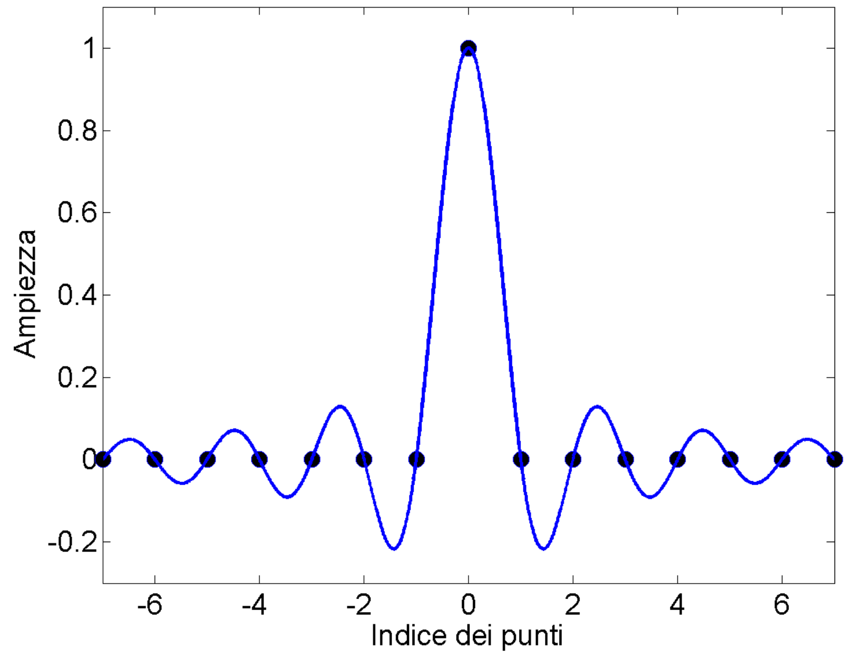




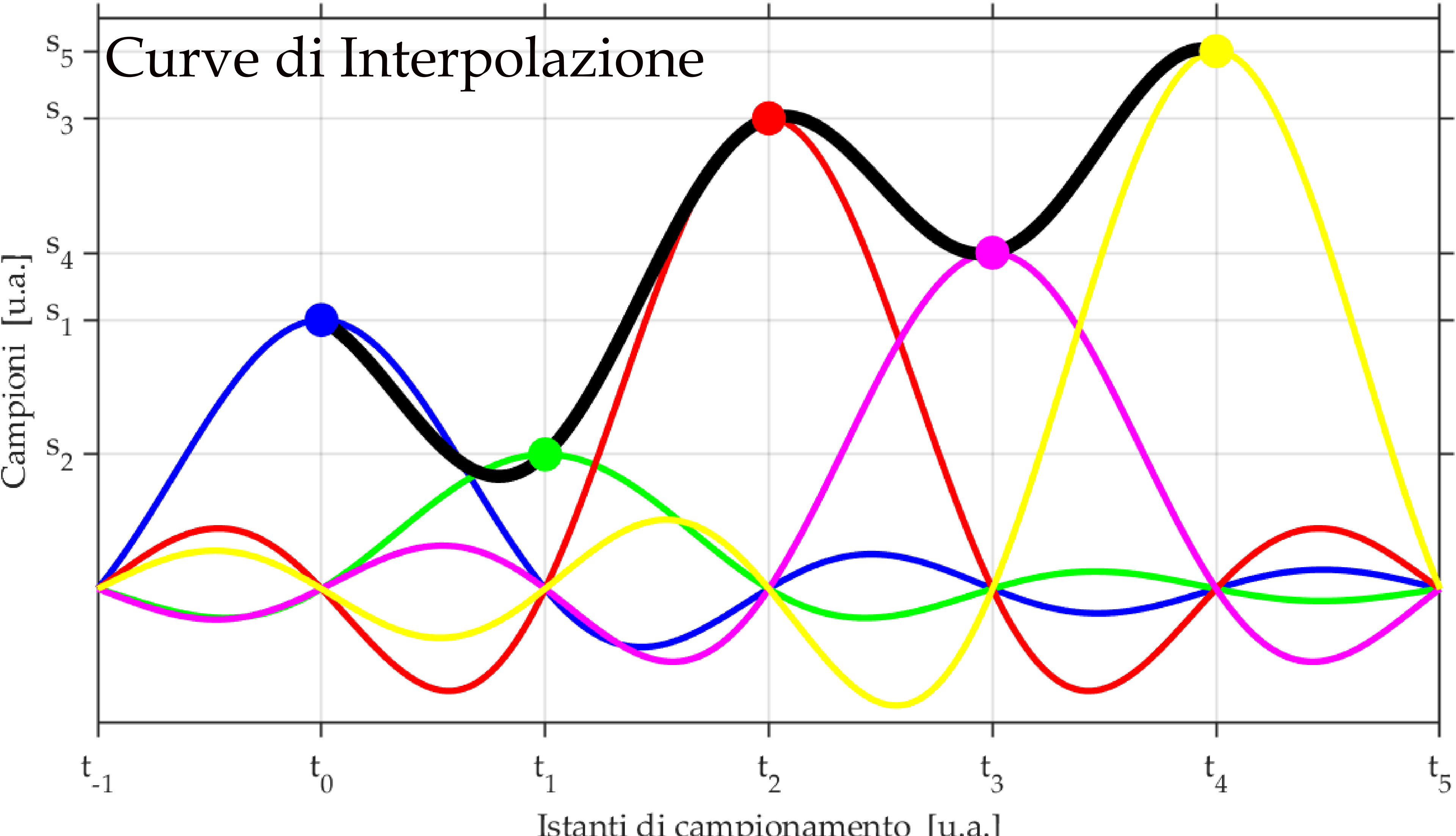
Ha l’effetto visivo di una “linea smussata”. Può essere ottenuta con differenti condizioni al contorno (nei due punti estremi dell’intervallo di dati disponibili).

Interpolazione a seno cardinale

- Utilizzata per la ricostruzione di segnali campionati nel tempo.
- Si ricava matematicamente dall'operazione di filtraggio passa-basso ideale del segnale campionato.
- Nel dominio del tempo consiste in una convoluzione del segnale campionato (treno di delte di Dirac) con la funzione $\mathrm{sinc}(\pi x)=\sin(\pi x)/\pi x$

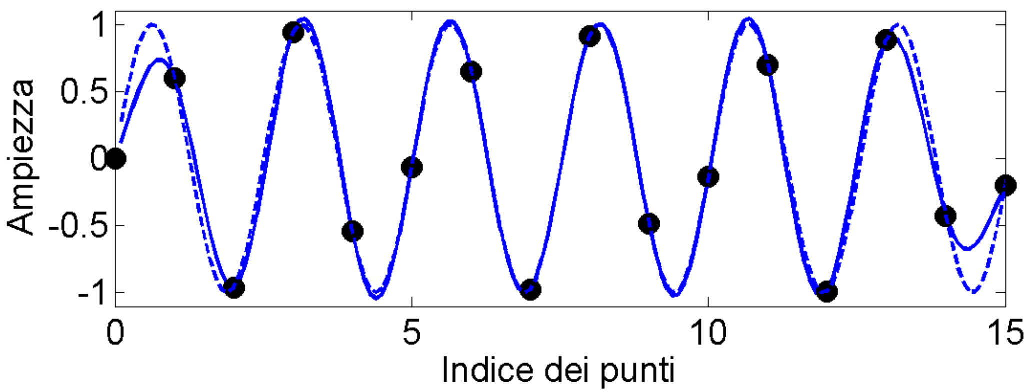


Interpolazione a seno cardinale

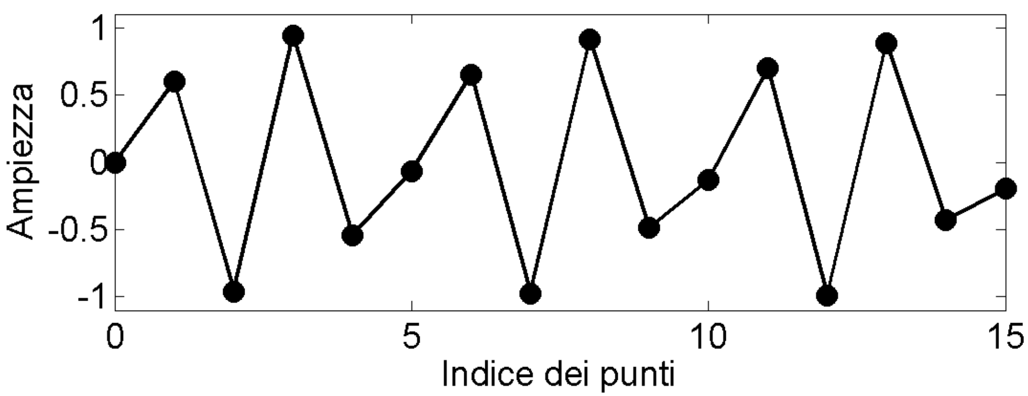


Esempio di ricostruzione di un segnale mediante interpolatore

Sinusoide campionata a 2.51 punti per periodo



Interpolatore **sinc(*x*)**



Interpolatore **lineare**

Regressione di più punti sperimentali

- Un **diagramma sperimentale**, ottenuto da risultati di misura, spesso mostra una dipendenza $y = f(x)$ che appare ragionevolmente approssimabile con una **funzione nota**
- Alternativamente, da un'**analisi teorica**, possiamo conoscere quale tipo di **relazione matematica (modello)** dovrebbe essere rappresentata dai punti, ma la dispersione dei dati è talmente grande (*e.g.* per la presenza di rumore) che non riusciamo a definire con sufficiente affidabilità i **valori dei parametri**
- Come è possibile **ricavare questi valori** (**parametri caratteristici del fenomeno misurato) da una** misura/**osservazione di più punti?**

Regressione ai minimi quadrati (LS)

- Consideriamo una generica dipendenza di una variabile fisica y da un'altra variabile x, attraverso una funzione f con più parametri $A,B,\ldots$: $y = f(A,B,\ldots x)$
- Effettuiamo quindi n misure y_i della variabile y in funzione della variabile x osservata nei punti x_i
- Per stimare i parametri che meglio rappresentano la realtà misurata, definiamo una funzione "distanza" tra la misura e la funzione f. Si vuole minimizzare tale distanza
- La funzione "distanza" più comunemente usata è la somma degli scarti quadratici tra f e il valore misurato
- Scarto: $\delta_i = y_i - f(x_i)$
- Funzione "distanza" da minimizzare: $\Phi = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2$

Regressione lineare LS (1/2)

Un importante caso di regressione, semplice da risolvere analiticamente, è quello della regressione lineare;

Consideriamo una dipendenza lineare $y = m\,x + b$ di cui si vogliono ricavare i due parametri m e b.

Per il punto i-esimo di misura, lo scarto δ_i tra il valore empirico, y_i, e quello della curva di regressione, $f(x_i)$, vale

$$\delta_i = y_i - [\, m\, x_i + b \,]$$

Dobbiamo trovare i **valori dei parametri (*m* e *b*) per i quali è minima la "distanza"**

$$\Phi(m,b) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (m x_i + b) \right]^2$$

Regressione lineare LS (2/2)

Per trovare il minimo di *Φ*, annulliamo le due derivate prime parziali rispetto a *m* e *b* :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m} = 0 \Rightarrow \left(m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \Rightarrow m \sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

dove tutte le sommatorie sono ovviamente estese per *i* che va da 1 fino a *n*.

Si è ottenuto un sistema lineare di due equazioni in due incognite, *m* e *b* appunto.

Regressione lineare: calcolo di *m* e *b*

La soluzione del sistema (che si ottiene facilmente per sostituzione) è:

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{y} - m\overline{x}$$

Questa soluzione corrisponde a un minimo (lo si può dimostrare matematicamente facendo le derivate seconde, entrambe >0)

Esercizio su retta di regressione (1/2)

n(=5) misure di y=f(x) con punti sperimentali

i	1	2	3	4	5
x_i = [0	1	2	3	4]	
y_i = [1	2	2	2	3]	

x_i	y_i
0	1
1	2
2	2
3	2
4	3

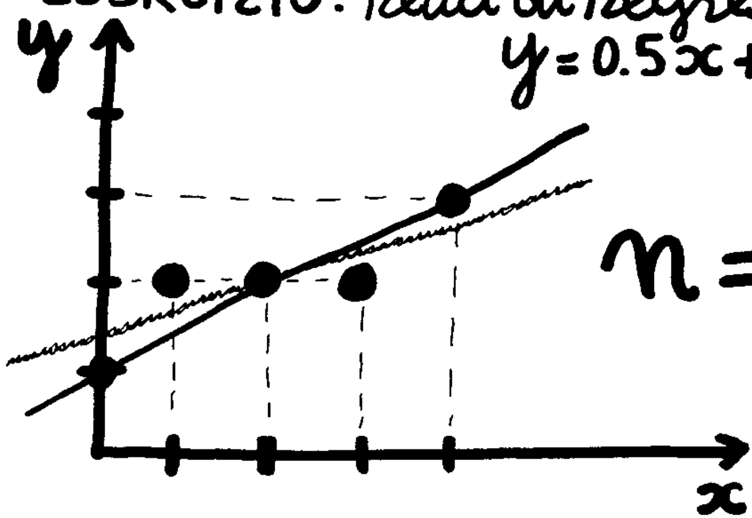
Modello lineare $\boldsymbol{\delta_i = y_i - [\, m\, x_i + b\,]}$

Regressione ai minimi quadrati → $\sum(\delta_i)^2$=“min.”

Esercizio su retta di regressione (2/2)

ESERCIZIO: retta di regressione

$y = 0.5x + 1$???



$n = 5$

x_i	y_i
0	1
1	2
2	2
3	2
4	3

Modello: $y = mx + b$ retta di regr.

$$m = \frac{5(0+2+4+6+12) - 10 \times 10}{5(0+1+4+9+16) - (10)^2} = \frac{20}{50} = 0.4$$

$$b = \frac{10 - 0.4 \times 10}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$$