Regime alternato sinusoidale e periodico

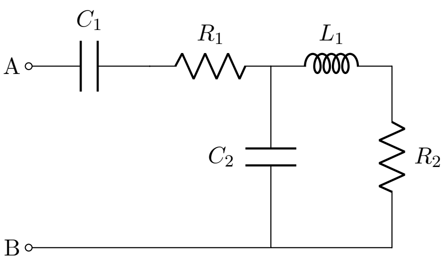
A cura di Alessandro Niccolai
A.A. 2019/2020

Ultimo aggiornamento: 20 gennaio 2020

H.1 • Impedenze equivalenti e circuiti con un solo generatore

Esercizio H.1.1

Dato il circuito in figura, alimentato in regime alternato sinusoidale, calcolare l'impedenza equivalente.



Dati:
$C_1 = 2$ mF
$R_1 = 20\ \Omega$
$C_2 = 4$ mF
$L_1 = 2$ H
$R_2 = 50\ \Omega$
$\omega = 10$ rad/s

Risultati:
$\mathbf{Z}_{eq} = (32{,}37 - j73{,}76)\ \Omega$

Soluzione:

Per prima cosa si effettua la trasformata fasoriale di tutti gli elementi di questa rete.

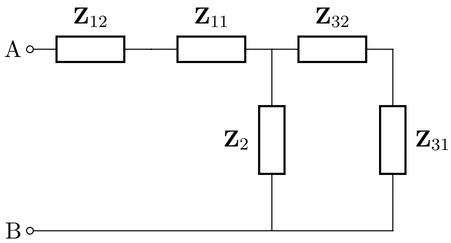
$$\mathbf{Z}_{11} = R_1 = 20\ \Omega \tag{1}$$

$$\mathbf{Z}_{12} = -j\frac{1}{\omega C_1} = -j50\ \Omega \tag{2}$$

$$\mathbf{Z}_{2} = -j\frac{1}{\omega C_2} = -j25\ \Omega \tag{3}$$

$$\mathbf{Z}_{31} = R_2 = 50\ \Omega \tag{4}$$

$$\mathbf{Z}_{32} = j\omega L_1 = j20\ \Omega \tag{5}$$

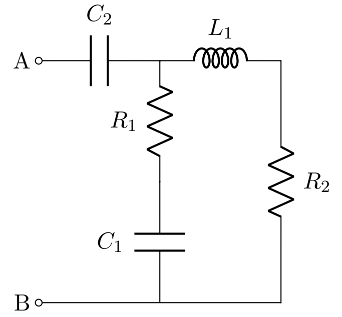


A questo punto le impedenze si possono comporre utilizzando le relazioni viste per serie e parallelo di resistori:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_{11} + \mathbf{Z}_{12} + (\mathbf{Z}_{2} /\!/ (\mathbf{Z}_{31} + \mathbf{Z}_{32})) = (32{,}37 - j73{,}76)\ \Omega \tag{6}$$

Esercizio H.1.2

Dato il circuito in figura, alimentato in regime alternato sinusoidale a $\omega = 50$ rad/s, calcolare l'impedenza equivalente.



Dati:
$C_1 = 10$ mF
$R_1 = 3\ \Omega$
$C_2 = 2$ mF
$L_1 = 0{,}2$ H
$R_2 = 8\ \Omega$

Risultati:
$\mathbf{Z}_{eq} = (3{,}22 - j11{,}07)\ \Omega$

Soluzione:

Effettuando la trasformata fasoriale degli elementi della rete:

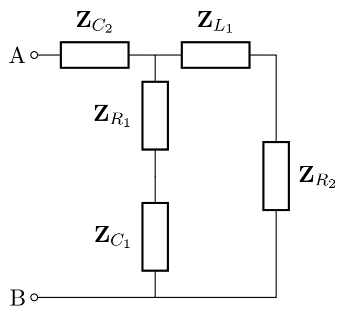
$$\mathbf{Z}_{C_2} = -j\frac{1}{\omega C_2} = -j10\ \Omega \tag{7}$$

$$\mathbf{Z}_{R_1} = R_1 = 3\ \Omega \tag{8}$$

$$\mathbf{Z}_{C_1} = -j\frac{1}{\omega C_1} = -j2\ \Omega \tag{9}$$

$$\mathbf{Z}_{R_2} = R_2 = 8\ \Omega \tag{10}$$

$$\mathbf{Z}_{L} = j\omega L = j10\ \Omega \tag{11}$$



Calcolando prima le impedenze serie:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_{C_1} = (3 - j2)\ \Omega \tag{12}$$

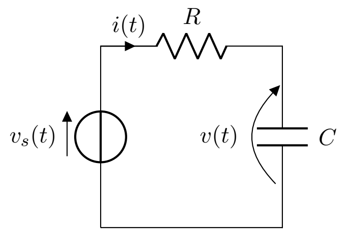
$$\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_{R_2} + \mathbf{Z}_{L} = (8 + j10)\ \Omega \tag{13}$$

Effettuando il parallelo fra $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_2$ e la serie con $\mathbf{Z}_{C_2}$:

$$\mathbf{Z}_{eq} = (\mathbf{Z}_1 /\!/ \mathbf{Z}_2) + \mathbf{Z}_{C_2} = (3{,}22 - j11{,}07)\ \Omega \tag{14}$$

Esercizio H.1.3

Dato il circuito in figura, calcolare le variabili $v(t)$ ed $i(t)$.



Dati:
$R = 5\ \Omega$
$C = 0{,}1$ F
$v_s(t) = 10\cos 4t$[V]

Risultati:
$i(t) = 1{,}79\cos(4t + 0{,}46)$[A]
$v(t) = 4{,}47\cos(4t - 1{,}11)$[V]

Soluzione:

Per prima cosa è necessario applicare la trasformata fasoriale del generatore e del condensatore:

$$\mathbf{E} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j0}\,\mathrm{V} \tag{15}$$

$$\mathbf{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j2{,}5\ \Omega \tag{16}$$

dove $\omega = 4$ rad/s
Quindi la corrente $\mathbf{I}$ si può calcolare facilmente:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{R + \mathbf{Z}_C} = (1{,}131 + j0{,}566) = 1{,}265e^{j0{,}46}\,\mathrm{A} \tag{17}$$

Il passaggio alla forma polare è stato calcolato per poter poi effettuare facilmente l'antitrasformazione nel dominio del tempo:

$$i(t) = 1{,}265\sqrt{2}\cos(4t + 0{,}46)\,\mathrm{A} \tag{18}$$

Il calcolo della tensione V si può fare mediante la legge di Ohm:

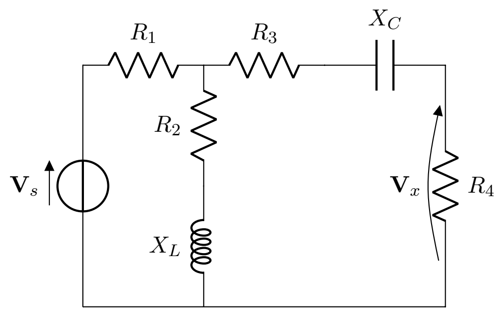
$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}_C \cdot \mathbf{I} = (1{,}415 - j2{,}827) = 3{,}162e^{-j1{,}107}\,\mathrm{V} \tag{19}$$

Quindi la tensione nel dominio del tempo vale:

$$v(t) = 3{,}162\sqrt{2}\cos(4t - 1{,}107)\,\mathrm{V} \tag{20}$$

Esercizio H.1.4

Dato il circuito in figura, calcolare il fasore $\mathbf{V}_x$.



Dati:
$R_1 = 5\ \Omega$
$R_2 = 3\ \Omega$
$R_3 = 4\ \Omega$
$R_4 = 10\ \Omega$
$X_L = 4\ \Omega$
$X_C = -13\ \Omega$
$\mathbf{V}_s(t) = -j20$[V]

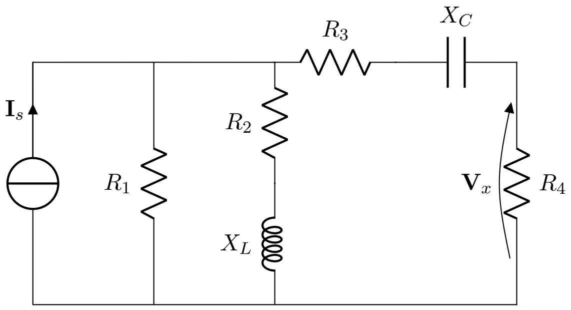
Risultati:
$\mathbf{V}_x = (4{,}87 - j2{,}59)V$

Soluzione:

Della rete sono già forniti i valori delle grandezze trasformate e viene richiesto un fasore.
La rete si potrebbe risolvere con un partitore di tensione multiplo, tuttavia, al fine di ridurre la quantità di calcoli, si effettuerà una doppia trasformazione Thevenin-¿Norton e Norton-¿Thevenin.
La prima di queste trasformazioni coinvolge la serie fra $\mathbf{V}_s$ e R_1. Trasformando il tutto in un Norton si ottiene:

$$\mathbf{I}_s = \frac{\mathbf{V}_s}{R_1} \tag{21}$$

mentre la resistenza resta invariata.



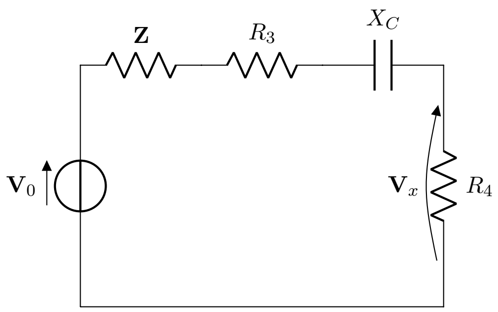
Effettuando il parallelo fra le due impedenze dei rami centrali:

$$\mathbf{Z} = R_1 /\!/ (R_2 + jX_L) = (2{,}5 + j1{,}25)\ \Omega \tag{22}$$

A questo punto, è possibile trasformare il parallelo fra $\mathbf{I}_s$ e $\mathbf{Z}$ in un equivalente Thevenin.

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{I}_s \mathbf{Z} \tag{23}$$

e l'impedenza è la stessa.

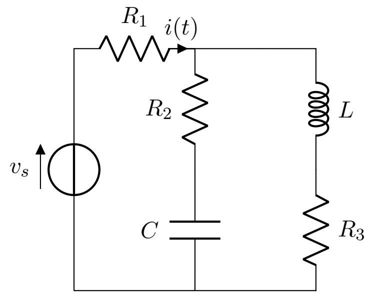


A questo punto è possibile effettuare un partitore di tensione:

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{V}_0 \cdot \frac{R_4}{\mathbf{Z} + R_3 + R_4 + jX_C} = (4{,}873 - j2{,}591)\ \mathrm{V} \tag{24}$$

Esercizio H.1.5

Dato il circuito in figura, calcolare la corrente $i(t)$.



Dati:
$R_1 = 3\ \Omega$
$R_2 = 2\ \Omega$
$R_3 = 5\ \Omega$
$L = 0{,}1$ H
$C = 1$ mF
$v_s(t) = \sqrt{2}\cos 100t[\mathrm{V}]$

Risultati:
$i(t) = 73{,}5\cos(100t + 0{,}225)$ mA

Soluzione:

Effettuando la transformata fasoriale degli elementi reattivi e del generatore:

$$\mathbf{E} = 1\,\mathrm{V} \tag{25}$$

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j10\ \Omega \tag{26}$$

$$\mathbf{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j10\ \Omega \tag{27}$$

A questo punto, è possibile calcolare l'impedenza equivalente vista dal generatore:

$$Z_{eq} = R_1 + (R_2 + \mathbf{Z}_C) /\!/ (R_3 + \mathbf{Z}_L) = \frac{131 - j30}{7}\ \Omega \tag{28}$$

La corrente $\mathbf{I}$ è quindi:

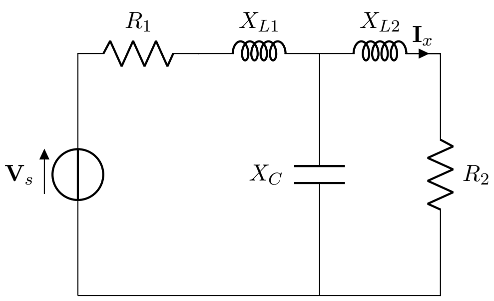
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{Z}_{eq}} = 5{,}21 \cdot 10^{-2} e^{j0{,}225}\ \mathrm{A} \tag{29}$$

Antitrasformando nel dominio del tempo:

$$i(t) = 5{,}21 \cdot 10^{-2}\sqrt{2}\cos(100t + 0.225)\ \mathrm{A} \tag{30}$$

Esercizio H.1.6

Dato il circuito in figura, calcolare il fasore $\mathbf{I}_x$.

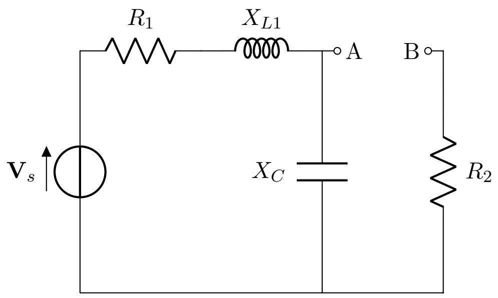


Dati:
$R_1 = 6\ \Omega$
$R_2 = 10\ \Omega$
$X_{L1} = 2\ \Omega$
$X_{L2} = 1\ \Omega$
$X_C = -4\ \Omega$
$\mathbf{V}_s = 30e^{j\pi/9}$ V

Risultati:
$\mathbf{I}_x = (0{,}87 - j1{,}25)$ A

Soluzione:

In questo esercizio, risolvibile utilizzando il partitore di tensione (o di corrente), si è scelto di calcolare l'equivalente Thevenin visto da X_{L2} al fine di ridurre il numero di passaggi necessari ad ottenere la soluzione.
Il bipolo di cui si deve calcolare il Thevenin è il seguente:

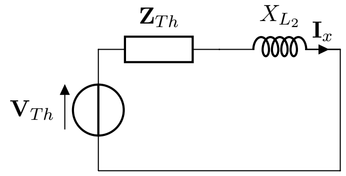


$$\mathbf{Z}_{Th} = (R_1 + jX_{L_1}) /\!\!/ jX_C + R_2 = (12{,}4 - j3{,}2)\ \Omega \tag{31}$$

Da un partitore di tensione è possibile calcolare la tensione a vuoto:

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_s \cdot \frac{jX_C}{R_1 + jX_C + jX_{L_1}} = (11{,}79 - j14{,}86)\,\mathrm{V} \tag{32}$$

Infine, il circuito risultate è:



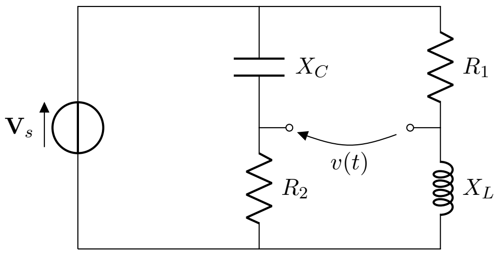
Quindi:

$$\mathbf{I}_x = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{Z}_{Th} + jX_{L_2}} = (1{,}13 - j1)\,\mathrm{A} \tag{33}$$

H.2 • Risoluzione di reti in regime alternato sinusoidale

Esercizio H.2.1

Dato il seguente circuito in regime alternato sinusoidale, calcolarne l'equivalente Thevenin.



Dati:
$X_C = -6\ \Omega$
$X_L = 12\ \Omega$
$R_1 = 4\ \Omega$
$R_2 = 8\ \Omega$
$\mathbf{V}_s = 100\,\mathrm{V}$

Risultati:
$\mathbf{Z}_{eq} = (6{,}48 - j2{,}64)\ \Omega$
$\mathbf{V}_{Th} = (-26 + j18)\,\mathrm{V}$

Soluzione:

Per prima cosa si calcola l'impedenza equivalente:

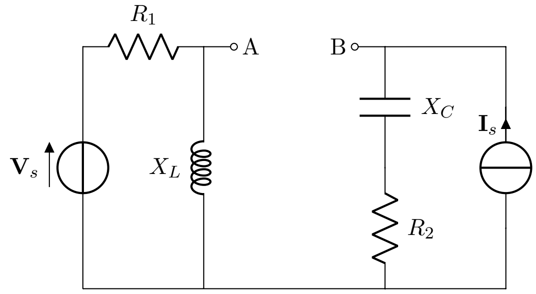
$$\mathbf{Z}_{eq} = R_1 /\!\!/ jX_L + R_2 /\!\!/ jX_C = (6{,}48 - j2{,}64)\ \Omega \tag{34}$$

Per il calcolo della tensione a vuoto:

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_s \frac{R_1}{R_1 + jX_L} - \mathbf{V}_s \frac{jX_C}{R_2 + jX_C} = (-26 + j18)\,\mathrm{V} \tag{35}$$

Esercizio H.2.2

Dato il circuito in figura, alimentato in regime alternato sinusoidale, calcolare l'equivalente di Thevenin visto ai morsetti A-B.



Dati:
$\mathbf{V}_s = 10\,\mathrm{V}$
$\mathbf{I}_s = 3e^{-j\pi/6}\,\mathrm{A}$
$X_L = 5\ \Omega$
$X_C = -1\ \Omega$
$R_1 = 5\ \Omega$
$R_2 = 10\ \Omega$

Risultati:
$\mathbf{Z}_{Th} = (12{,}5 + j1{,}5)\ \Omega$
$\mathbf{V}_{Th} = (-19{,}48 + j22.6)\,\mathrm{V}$

Soluzione:

$$\mathbf{Z}_{Th} = R_2 + jX_C + R_1 /\!/ jX_L = (12{,}5 + j1{,}5)\ \Omega \tag{36}$$

Le due parti di rete sono monopoli elettrici, quindi non interagiscono. Dal partitore di tensione:

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_s \frac{jX_L}{R_1 + jX_L} = (5 + j5)\,\mathrm{V} \tag{37}$$

Per la legge di Ohm generalizzata:

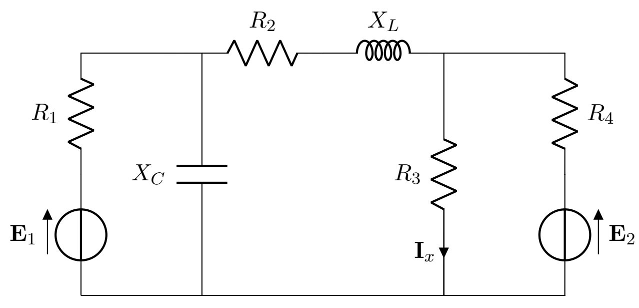
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_s(R_2 + jX_C) = (24{,}48 - j17{,}6)\,\mathrm{V} \tag{38}$$

Quindi:

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_L - \mathbf{V}_1 = (-19{,}48 + j22.6)\,\mathrm{V} \tag{39}$$

Esercizio H.2.3

Dato il circuito in figura, alimentato in regime alternato sinusoidale, calcolare il fasore $\mathbf{I}_x$.

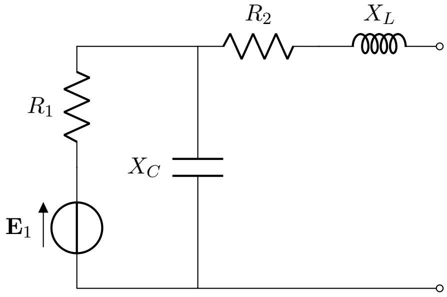


Dati:
$\mathbf{E}_1 = 10\,\mathrm{V}$
$\mathbf{E}_2 = j12\,\mathrm{V}$
$R_1 = 2\ \Omega$
$R_2 = 4\ \Omega$
$R_3 = 5\ \Omega$
$R_4 = 10\ \Omega$
$X_C = -2\ \Omega$
$X_L = 3\ \Omega$

Risultati:
$\mathbf{I}_x = (0{,}215 + j0{,}028)\,\mathrm{A}$

Soluzione:

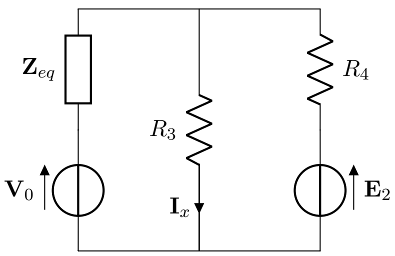
Per calcolare il fasore $\mathbf{I}_x$ ci si può ricondurre ad una rete binodale calcolando l'equivalente Thevenin della parte sinistra della rete:



$$\mathbf{Z}_{eq} = R_1 /\!/ jX_C + R_2 + jX_L = (5 + j2)\ \Omega \tag{40}$$

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{E}_1 \cdot \frac{jX_C}{R_1 + jX_C} = (5 - j5)\,\mathrm{V} \tag{41}$$

Quindi il circuito diventa:

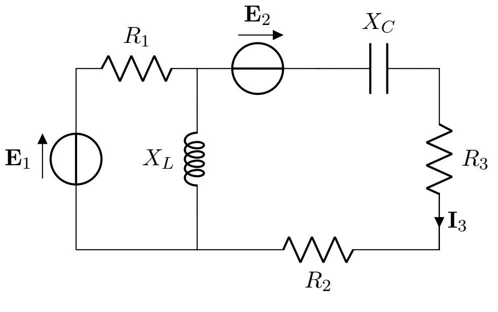


Infine:

$$\mathbf{I}_x = \frac{1}{R_3} \cdot \frac{\dfrac{\mathbf{V}_0}{\mathbf{Z}_{eq}} + \dfrac{\mathbf{E}_2}{R_4}}{\dfrac{1}{\mathbf{Z}_{eq}} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_3}} = (0{,}215 + j0{,}028)\,\mathrm{A} \tag{42}$$

Esercizio H.2.4

Dato il circuito in figura, alimentato in regime alternato sinusoidale, calcolare il faosre $\mathbf{I}_3$.

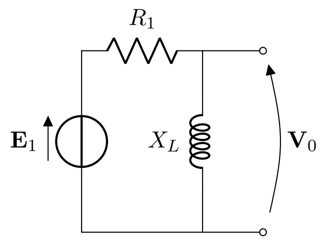


Dati:
$R_1 = 10\ \Omega$
$R_2 = 5\ \Omega$
$R_3 = 6\ \Omega$
$X_C = -5\ \Omega$
$X_L = 10\ \Omega$
$\mathbf{E}_1 = 10\sqrt{2}e^{-j\pi/4}\,\mathrm{V}$
$\mathbf{E}_2 = 10\,\mathrm{V}$

Risultati:
$\mathbf{I}_3 = 1{,}25\,\mathrm{A}$

Soluzione:

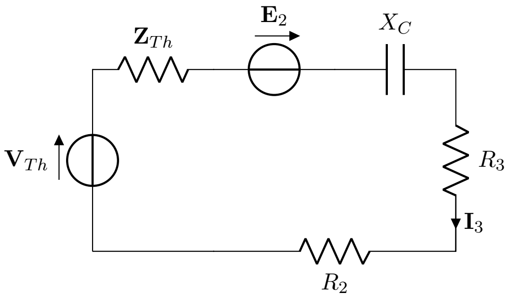
Per risolvere il circuito, è possibile calcolare l'equivalente Thevenin del bipolo di sinistra:



$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{E}_1 \frac{jX_L}{R_1 + jX_L} = 10\,\mathrm{V} \tag{43}$$

$$\mathbf{Z}_{Th} = R_1 /\!/ jX_L = (5 + j5)\ \Omega \tag{44}$$

Il circuito diventa:

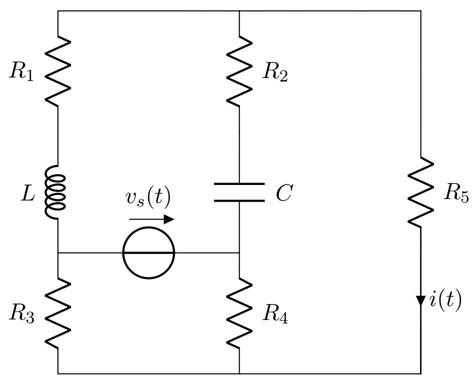


Quindi:

$$\frac{\mathbf{V}_{Th} + \mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_{Th} + R_2 + R_3 + jX_C} = 1{,}25\,\mathrm{A} \tag{45}$$

Esercizio H.2.5

Dato il circuito in figura, alimentato in regime alternato sinusoidale, calcolare la corrente $i(t)$.



Dati:
$R_1 = 5\ \Omega$
$R_2 = 5\ \Omega$
$R_3 = 10\ \Omega$
$R_4 = 15\ \Omega$
$R_5 = 11\ \Omega$
$C = 2$ mF
$L = 50$ mH
$v_s(t) = 120\sqrt{2}\cos\omega t$
$\omega = 100$ rad/s

Risultati:
$i(t) = 3{,}93\cos(\omega t + 1{,}37)\,\mathrm{A}$

Soluzione:

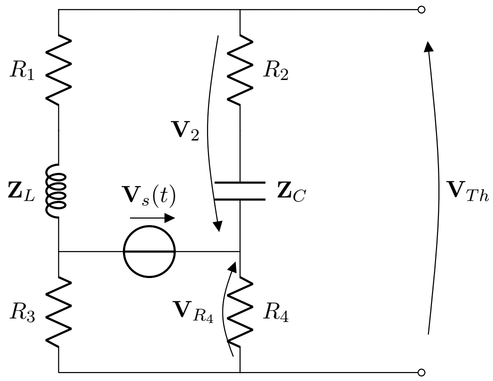
Per risolvere questa rete, conviene calcolato l'equivalente Thevenin visto dal resistore R_5 dopo aver effettuato la trasformata fasoriale di generatori e elementi reattivi:

$$\mathbf{V}_s = 120\,\mathrm{V} \tag{46}$$

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j5\ \Omega \tag{47}$$

$$\mathbf{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j5\ \Omega \tag{48}$$

Il circuito di cui si deve calcolare l'equivalente Thevenin è:



L'impedenza equivalente è:

$$\mathbf{Z}_{Th} = (R_1 + \mathbf{Z}_L) /\!/ (R_2 + \mathbf{Z}_C) + R_3 /\!/ R_4 = 11\ \Omega \tag{49}$$

La tensione a vuoto si può calcolare attraverso due partitori di tensione.

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_s \frac{R_2 + \mathbf{Z}_C}{R_1 + R_2 + \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_L} = (60 - j60)\,\mathrm{V} \tag{50}$$

$$\mathbf{V}_{R_4} = \mathbf{V}_s \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 72\,\mathrm{V} \tag{51}$$

Quindi:

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{R_4} - \mathbf{V}_2 = (12 + j60)\,\mathrm{V} \tag{52}$$

Infine, è possibile calcolare la corrente $\mathbf{I}$:

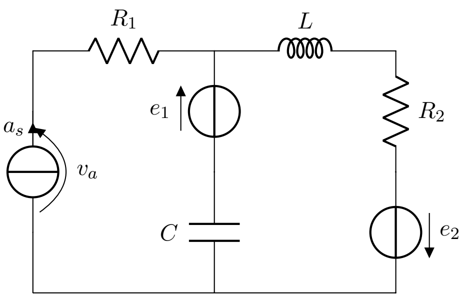
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{\mathbf{Z}_{Th} + R_5} = (0{,}55 + j2{,}73)\,\mathrm{A} \tag{53}$$

Antitrasformando:

$$i(t) = 3{,}93\cos(\omega t + 1{,}37)\,\mathrm{A} \tag{54}$$

Esercizio H.2.6

Dato il circuito in figura, alimentato in regime alternato sinusoidale, calcolare $v_a(t)$.



Dati:
$C = 100\ \mu\mathrm{F}$
$L = 20\ \mathrm{mH}$
$R_1 = 5\ \Omega$
$R_2 = 10\ \Omega$
$e_1(t) = 200\sqrt{2}\sin(500t)$
$e_2(t) = 300\sqrt{2}\cos(500t)$
$a_s(t) = 10\sqrt{2}\sin(500t - \pi/4)$

Risultati:
$v_a(t) = 428{,}46\cos(500t + 2{,}7)$

Soluzione:

Per prima cosa è necessario effettuare la trasformata fasoriale del circuito:

$$\mathbf{E}_1 = -j200\,\mathrm{V} \tag{55}$$

$$\mathbf{E}_2 = 300\,\mathrm{V} \tag{56}$$

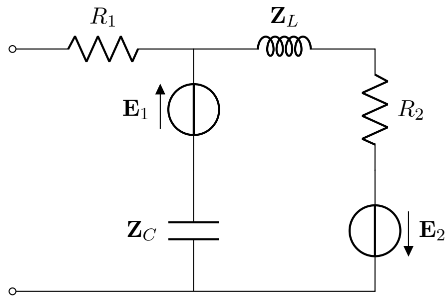
$$\mathbf{A}_s = 10e^{-j(\pi/4+\pi/2)}\,\mathrm{A} \tag{57}$$

Le impedenze degli elementi reattivi sono:

$$\mathbf{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j20\ \Omega \tag{58}$$

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j10\ \Omega \tag{59}$$

Per calcolare la tensione $\mathbf{V}_a$ è possibile fare un equivalente Thevenin visto dal generatore di corrente:



$$\mathbf{Z}_{eq} = R_1 + \mathbf{Z}_C \,/\!/\, (R_2 + \mathbf{Z}_L) = 25\ \Omega \tag{60}$$

La corrente che circola nell'anello vale:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2}{R_2 + \mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C} = (25 + j5)\,\mathrm{A} \tag{61}$$

Quindi:

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{E}_1 - \mathbf{Z}_C\mathbf{I} = (-100 + j300)\,\mathrm{V} \tag{62}$$

Infine:

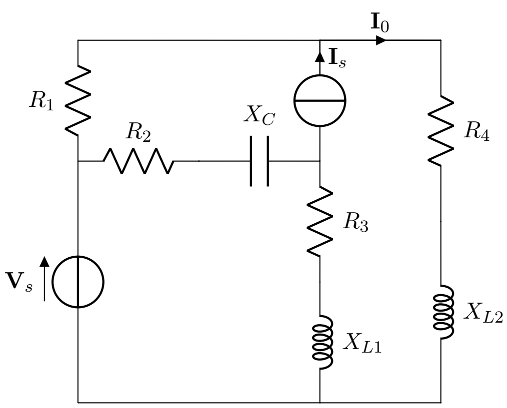
$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_0 - \mathbf{A}_s\mathbf{Z}_{eq} = (-267{,}78 + j123{,}22)\,\mathrm{V} \tag{63}$$

Quindi:

$$v_a(t) = 428{,}46\cos(500t + 2{,}7) \tag{64}$$

Esercizio H.2.7

Dato il circuito in figura, alimentato in regime alternato sinusoidale, calcolare il fasore $\mathbf{I}_0$.

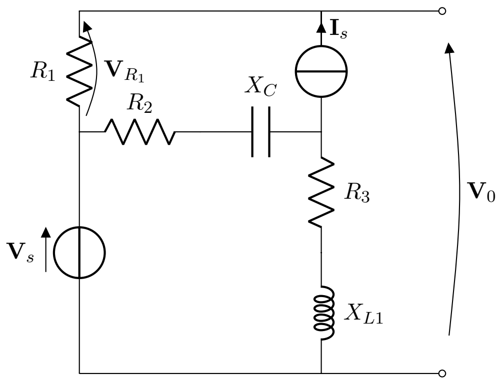


Dati:
- $R_1 = 5\ \Omega$
- $R_2 = 8\ \Omega$
- $R_3 = 10\ \Omega$
- $R_4 = 20\ \Omega$
- $X_C = -2\ \Omega$
- $X_{L1} = 4\ \Omega$
- $X_{L2} = 15\ \Omega$
- $\mathbf{V}_s = 40j\,\mathrm{V}$
- $\mathbf{I}_s = 3\,\mathrm{A}$

Risultati:
- $\mathbf{I}_0 = 1{,}465e^{j0{,}67}\,\mathrm{A}$

Soluzione:

Per risolvere la rete, è possibile calcolare l'equivalente Thevenin del terzo ramo:



Da una KVL:

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{R_1} + \mathbf{V}_s \tag{65}$$

dove:

$$\mathbf{V}_{R_1} = R_1 \mathbf{I}_s = 15\,\mathrm{V} \tag{66}$$

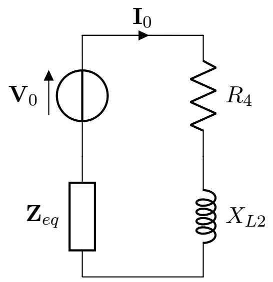
Quindi:

$$\mathbf{V}_0 = (15 + j40)\,\mathrm{V} \tag{67}$$

L'impedenza equivalente è:

$$\mathbf{Z}_{eq} = R_1 = 5\ \Omega \tag{68}$$

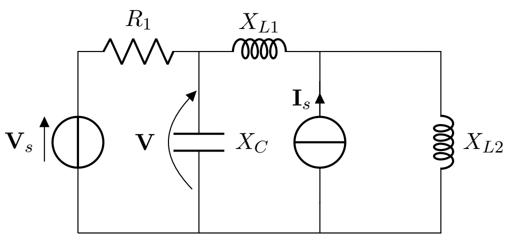
Quindi, ricomponendo il circuito:



$$\mathbf{I}_0 = \frac{\mathbf{V}_0}{R_4 + jX_{L_2} + \mathbf{Z}_{eq}} = 1{,}465e^{j0{,}67}\ \mathrm{A} \tag{69}$$

Esercizio H.2.8

Dato il circuito in figura, alimentato in regime alternato sinusoidale, calcolare mediante il Principio di Sovrapposizione degli Effetti la tensione $\mathbf{V}$. Riportare i contributi di ogni singolo generatore.

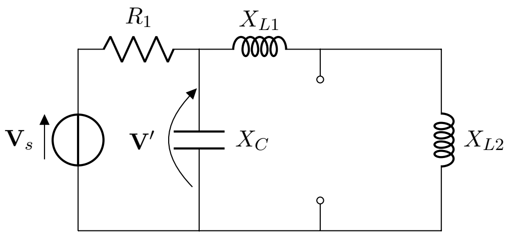


Dati:
$\mathbf{V}_s = 10\,\mathrm{V}$
$\mathbf{I}_s = 10\,\mathrm{A}$
$R_1 = 2\ \Omega$
$X_C = -2\ \Omega$
$X_{L1} = 1\ \Omega$
$X_{L2} = 3\ \Omega$

Risultati:
$\mathbf{V}(\mathbf{V}_s) = (8 - j4)\,\mathrm{V}$
$\mathbf{V}(\mathbf{I}_s) = (12 - j6)\,\mathrm{V}$
$\mathbf{V} = (20 - j10)\,\mathrm{V}$

Soluzione:

Contibuto di $\mathbf{V}_s$:

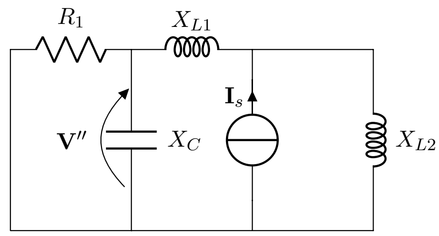


$$\mathbf{Z}_1 = jX_C /\!\!/ (jX_{L_1} + jX_{L_2}) = -j4\ \Omega \tag{70}$$

Quindi:

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}(\mathbf{V}_s) = \mathbf{V}_s \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_1 + R_1} = (8 - j4)\ \mathrm{V} \tag{71}$$

Contibuto di $\mathbf{I}_s$:



$$\mathbf{Z}_2 = jX_C /\!\!/ R_1 = (1 - j)\ \Omega \tag{72}$$

Dal partitore di corrente:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_s \frac{jX_{L_2}}{\mathbf{Z}_2 + jX_{L_1} + jX_{L_2}} = (9 + j3)\ \mathrm{A} \tag{73}$$

Infine:

$$\mathbf{V}'' = \mathbf{V}(\mathbf{I}_s) = \mathbf{I}\mathbf{Z}_2 = (12 + j6)\ \mathrm{V} \tag{74}$$

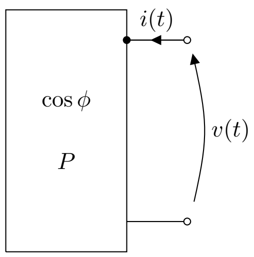
Sommando i due contributi:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}' + \mathbf{V}'' = (20 - j10)\ \mathrm{V} \tag{75}$$

H.3 • Potenze in regime sinusoidale

Esercizio H.3.1

Si calcoli la corrente $i(t)$ in ingresso al bipolo in figura.



Dati:
$P = 1{,}2\,\mathrm{kW}$
$\cos\phi = 0{,}6$
$v(t) = 100\sqrt{2}\cos(\omega t)$

Risultati:
$i(t) = 20\sqrt{2}\cos(\omega t \mp 0{,}927)$

Soluzione:

Il fasore tensione è:

$$\mathbf{V} = 100\,\mathrm{V} \tag{76}$$

Dalla definizione di potenza attiva:

$$P = V \cdot I \cos\phi \tag{77}$$

Quindi:

$$I = \frac{P}{V\cos\phi} = 20\,\mathrm{A} \tag{78}$$

Per quanto riguarda l'angolo di sfasamento:

$$\phi = \phi_V - \phi_I \tag{79}$$

dato che $\phi_V = 0$ rad allora:

$$\phi = -\phi_I \tag{80}$$

L'angolo ϕ si può facilmente calcolare:

$$|\phi| = \arccos(0{,}6) = 0{,}927 \text{ rad} \tag{81}$$

Quindi:

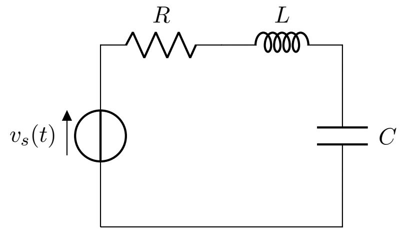
$$i(t) = 20\sqrt{2}\cos(\omega t \mp 0{,}927) \tag{82}$$

Le due soluzioni corrispondono a:

- $\phi_I = 0{,}927$: in questa soluzione la corrente è in anticipo sulla tensione: l'impedenza è quindi capacitiva;
- $\phi_I = -0{,}927$: in questa soluzione la corrente è in ritardo sulla tensione: l'impedenza è quindi induttiva.

Esercizio H.3.2

Dato il circuito in figura, verificare il principio di conservazione della potenza complessa.



Dati:
$R = 10\ \Omega$
$L = 20$ mH
$C = 100\ \mu$F
$v_s(t) = 100\sqrt{2}\cos(1000t)$

Risultati:
$\mathbf{S}_R = 500\,\mathrm{VA}$
$\mathbf{S}_L = j1000\,\mathrm{VA}$
$\mathbf{S}_C = -j500\,\mathrm{VA}$
$\mathbf{S}_V = (500 + j500)\,\mathrm{VA}$

Soluzione:

Effettuando la trasformata fasoriale:

$$\mathbf{V}_s = 100\,\mathrm{V} \tag{83}$$

$$X_L = \omega L = 20\ \Omega \tag{84}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = -10\ \Omega \tag{85}$$

La corrente circolante nell'anello è:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{R + jX_L + jX_C} = (5 - j5)\,\mathrm{A} \tag{86}$$

Quindi, le potenze complesse dei tre elementi sono:

$$\mathbf{S}_R = R|\mathbf{I}|^2 = 500\,\text{VA} \tag{87}$$

$$\mathbf{S}_L = jX_L|\mathbf{I}|^2 = j1000\,\text{VA} \tag{88}$$

$$\mathbf{S}_C = jX_C|\mathbf{I}|^2 = -j500\,\text{VA} \tag{89}$$

Le potenza erogata dal generatore:

$$\mathbf{S}_V = \mathbf{V}_s\mathbf{I}^* = (500 + j500)\,\text{VA} \tag{90}$$

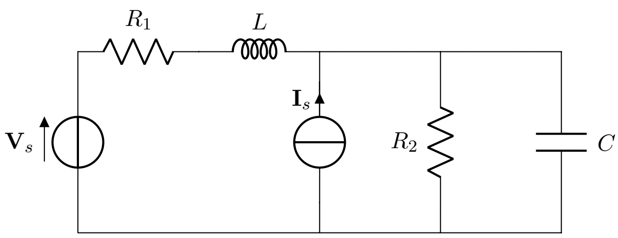
Il bilancio di potenze è:

$$\mathbf{S}_V = \mathbf{S}_R + \mathbf{S}_L + \mathbf{S}_C \tag{91}$$

che è verificato.

Esercizio H.3.3

Dato il circuito in Figura, calcolare la potenza attiva assorbita da R_2 e quella reattiva generata da C.



Dati:
$R_1 = 5\ \Omega$
$R_2 = 10\ \Omega$
$L = 3$ mH
$C = 1$ mF
$f = 50$ Hz
$\mathbf{V}_s = 10e^{j\pi/3}$ V
$\mathbf{I}_s = 2$ A

Risultati:
$P_{R_2} = 7{,}96$ W
$Q_C = 25$ var

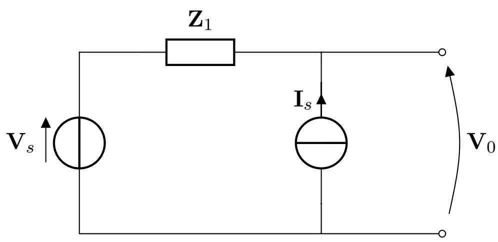
Soluzione:

Calcolando delle impedenze equivalenti:

$$\mathbf{Z}_1 = R_1 + j2\pi fL = (5 + j0{,}94)\ \Omega \tag{92}$$

$$\mathbf{Z}_2 = R_2 /\!\!/ \left(\frac{1}{j2\pi fC}\right) = (0{,}92 - j2{,}89)\ \Omega \tag{93}$$

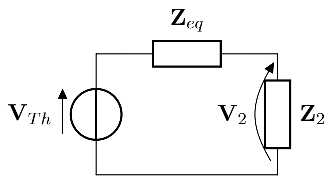
E' possibile calcolare l'equivalente Thevenin della parte sinistra della rete:



$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_1 \tag{94}$$

La tensione a vuoto è:

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_s + \mathbf{Z}_1\mathbf{I}_s = (15 + j10{,}54)\,\text{V} \tag{95}$$



Quindi:

$$\mathbf{V}_2 = V_{Th}\frac{\mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = (8{,}44 - j2{,}91)\,\mathrm{V} \tag{96}$$

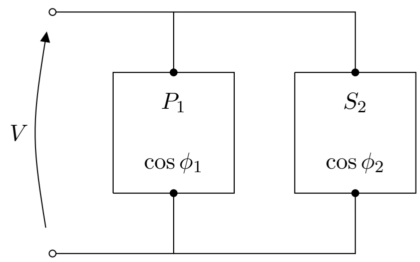
Le potenze dissipate dai due elementi sono:

$$P_{R_2} = \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{R_2} = 7{,}96\,\mathrm{W} \tag{97}$$

$$Q_C = -\frac{|\mathbf{V}_2|^2}{X_C} = 25\,\mathrm{var} \tag{98}$$

Esercizio H.3.4

L'utenza elettrica rappresentata in figura è composta da due carichi in parallelo alimentati in regime sinusoidale. Sapendo il valore efficace della tensione di alimentazione V, calcolare la corrente assorbita ed il fattore di potenza complessivo.



Dati:
$P_1 = 50\,\mathrm{kW}$
$\cos\phi_1 = 1$
$S_2 = 100\,\mathrm{kVA}$
$\cos\phi_2 = 0{,}86(\mathrm{rit})$
$V = 10\,\mathrm{kV}$

Risultati:
$I = 14{,}52\,\mathrm{A}$
$\cos\phi = 0{,}937(rit)$

Soluzione:

La potenza complessa dissipata dall'utenza 2 è:

$$\mathbf{S}_2 = S_2 e^{j\phi_2} = (86 + j51)\,\mathrm{kVA} \tag{99}$$

La potenza complessa assorbita da 1 è solo attiva ($\cos\phi_1 = 1$):

$$\mathbf{S}_1 = P_1 = 50\,\mathrm{kVA} \tag{100}$$

Quindi:

$$\mathbf{S}_{tot} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = (136 + j51)\,\mathrm{kVA} \tag{101}$$

L'angolo di sfasamento è:

$$\phi = \arctan\left(\frac{Im(\mathbf{S}_{tot})}{Re(\mathbf{S}_{tot})}\right) 00{,}358 \text{ rad} \tag{102}$$

Quindi:

$$\cos\phi = 0{,}937(\mathrm{rit}) \tag{103}$$

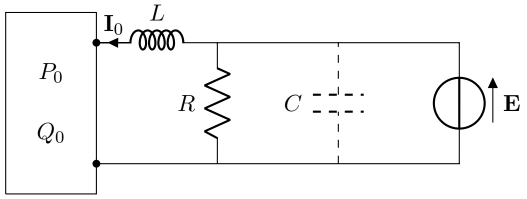
Infine:

$$I = \frac{S}{V} = 14{,}52\,\mathrm{A} \tag{104}$$

H.5 • Metodo di Boucherot e rifasamento

Esercizio H.5.1

Data la rete in figura, sapendo la potenza attiva P_0 e la potenza reattiva Q_0 assorbite dal carico, calcolare il valore efficace della tensione del generatore $\mathbf{E}$ ed il valore della capacità di rifasamento C necessaria per avere $\cos\phi_d \geq 0{,}90$.

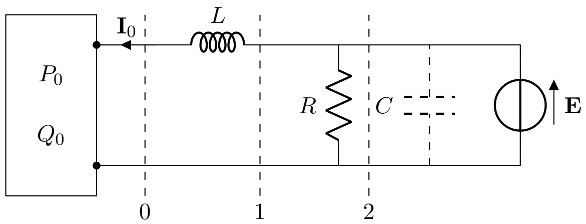


Dati:
$R = 22{,}2\ \Omega$
$L = 560$ mH
$|\mathbf{I}_0| = 10$ A
$P_0 = 1200$ W
$Q_0 = -1200$ var
$\omega = 50$ rad/s

Risultati:
$|\mathbf{E}| = 200$ V
$C = 73{,}5\ \mu$F

Soluzione:

Dividendo il circuito in sezioni si ottiene:



La reattanza dell'induttore vale:

$$X_L = \omega L = 28\Omega \tag{105}$$

Alla sezione 0 sappiamo già la corrente, che è il dato che ci serve per calcolare le potenze alla **sezione 1**:

$$P_1 = P_0 = 1200\,\text{W} \tag{106}$$

$$Q_1 = Q_0 + X_L|\mathbf{I}_0|^2 = 1600\,\text{var} \tag{107}$$

$$|\mathbf{A}_1| = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 2000\,\text{VA} \tag{108}$$

Con questo dato e' possibile passare alla sezione successiva, nella quale per prima cosa si deve calcolare la tensione:

$$|\mathbf{V}_2| = |\mathbf{E}| = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{I}_0|} = 200\,\text{V} \tag{109}$$

Le potenze della sezione 2 sono:

$$P_2 = P_1 + \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{R} = 3000\,\text{W} \tag{110}$$

$$Q_2 = Q_1 = 1600\,\text{var} \tag{111}$$

Per prima cosa e' necessario calcolare il valore di $\cos\phi$ per accertarsi che sia necessario **rifasare**:

$$\cos(\phi) = \cos\left(\arctan\left(\frac{Q_2}{P_2}\right)\right) = 0{,}88 \tag{112}$$

di conseguenza e' necessario provvedere al rifasamento.
La potenza reattiva desiderata vale:

$$Q_d = P_2 \tan(\phi_d) = 1453 \,\text{var} \tag{113}$$

da cui:

$$Q_C = Q_d - Q_2 = -147 \,\text{var} \tag{114}$$

La reattanza del condensatore vale:

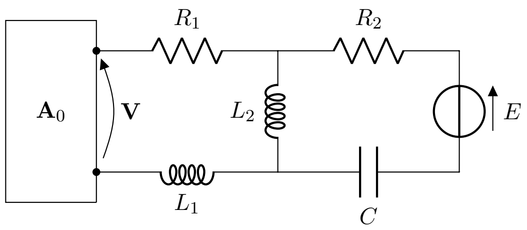
$$X_C = \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{Q_C} = -272{,}1 \ \Omega \tag{115}$$

da cui:

$$C = -\frac{1}{\omega X_C} = 73{,}5 \ \mu\text{F} \tag{116}$$

Esercizio H.5.2

Nel circuito in Figura il carico, alimentato con $\mathbf{V} = 24.73\,\text{V}$, dissipa $\mathbf{A}_0 = (120+j30)VA$. $\omega = 10 rad/s$. Calcolare la potenza reattiva dissipata da L_2, il modulo della corrente che circola in R_2 e la corrente erogata dal generatore E dopo aver inserito un condensatore di rifasamento per avere $\cos\phi_d = 0{,}95$.

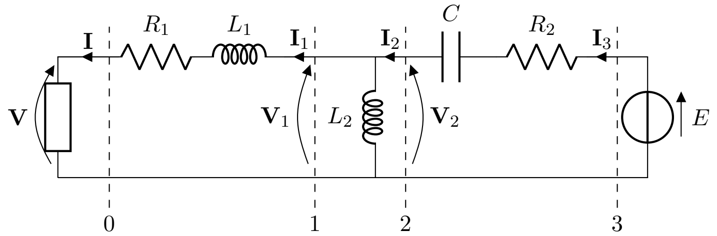


Dati:
$R_1 = 4{,}8\ \Omega$
$L_1 = 160$ mH
$L_2 = 8{,}33$ H
$C = 50$ mF
$R_2 = 2{,}219\ \Omega$

Risultati:
$Q_{L_2} = 30\,\text{var}$
$|\mathbf{I}_{R_2}| = 5{,}2\,\text{A}$
$|\mathbf{I}_{E,rif}| = 5{,}2\,\text{A}$

Soluzione:

E' possibile risolvere l'esercizio mediante il teorema di Boucherot. Si noti che il resistore R_1 e l'induttore L_1 sono in serie, analogamente ad R_2 e C.
Per prima cosa, si divide il circuito in sezioni in modo tale che ciascuna sezione sia caratterizzata da elementi o percorsi dalla stessa corrente (carico serie) o soggetti alla stessa tensione (carico parallelo):



Le reattanze di induttori e condensatori sono:

$$X_{L_1} = \omega L_1 = 1{,}6\ \Omega \tag{117}$$

$$X_{L_2} = \omega L_2 = 83{,}3\ \Omega \tag{118}$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -2\ \Omega \tag{119}$$

Per prima cosa è necessario calcolare la corrente $|\mathbf{I}|$ dai dati della potenza della **sezione 0**:

$$|\mathbf{I}| = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{V}|} = 5\,\mathrm{A} \tag{120}$$

Per calcolare le potenze alla **sezione 1**, è necessario sapere la corrente che circola:

$$|\mathbf{I}_1| = |\mathbf{I}| \tag{121}$$

A questo punto, è possibile procedere con il calcolo delle potenze

$$P_1 = Re(\mathbf{A}) + R_1|\mathbf{I}_1|^2 = 240W \tag{122}$$

$$Q_1 = Im(\mathbf{A}) + X_{L_1}|\mathbf{I}_1|^2 = 70\,\mathrm{var} \tag{123}$$

La potenza apparente, necessaria per il calcolo della tensione alla sezione successiva è:

$$|\mathbf{A}_1| = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 250\,\mathrm{VA} \tag{124}$$

Il carico fra la sezione 1 e la **sezione 2** è un carico parallelo, quindi serve calcolare la tensione a queste due sezioni:

$$|\mathbf{V}_1| = |\mathbf{V}_2|\frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{I}_1|} = 50\,\mathrm{V} \tag{125}$$

Le potenze della sezione 2 sono:

$$P_2 = P_1 = 240\,\mathrm{W} \tag{126}$$

La potenza reattiva dissipata dall'induttore è:

$$Q_{L_2} = \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{X_{L_2}} = 30\,\mathrm{var} \tag{127}$$

$$Q_2 = Q_1 + Q_{L_2} = 100\,\mathrm{var} \tag{128}$$

La potenza apparente a questa sezione è:

$$|\mathbf{A}_2| = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = 260\,\mathrm{VA} \tag{129}$$

Per il calcolo delle potenze alla **sezione 3**, è necessario sapere la corrente che circola in tale sezione (carico serie):

$$|\mathbf{I}_3| = |\mathbf{I}_2| = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{V}_2|} = 5{,}2\,\mathrm{A} \tag{130}$$

Le potenze della sezione 3 sono:

$$P_3 = P_2 + R_2|\mathbf{I}_3|^2 = 300\,\mathrm{W} \tag{131}$$

$$Q_3 = Q_2 + X_C|\mathbf{I}_3|^2 = 45{,}9\,\mathrm{var} \tag{132}$$

Il fattore di potenza è:

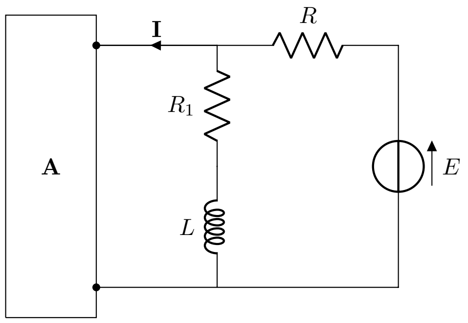
$$\cos\phi = \frac{P_3}{|\mathbf{A}_3|} = 0{,}98 \tag{133}$$

Quindi non è necessario aggiungere un condensatore di rifasamento.
Di conseguenza:

$$|\mathbf{I}_{E,rif}| = |\mathbf{I}_3| = 5{,}2\,\mathrm{A} \tag{134}$$

Esercizio H.5.3

Dato il circuito in figura, calcolare la potenza reattiva dissipata da L e la potenza complessa erogata dal generatore di tensione. Sono note la potenza complessa dissipata dal carico ($\mathbf{A} = (240 + j70)$ VA), la corrente $|\mathbf{I}| = 5$ A e la pulsazione $\omega = 10$ rad/s.

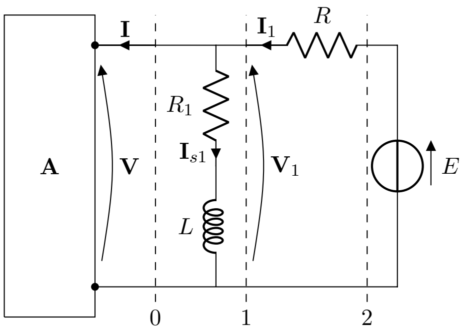


Dati:
$R_1 = 8\Omega$
$L = 0.6H$
$R = 5\Omega$

Risultati:
$Q_L = 150\,\text{var}$
$\mathbf{A}_E = (920{,}2 + j220)\,\text{VA}$

Soluzione:

Data l'assenza di informazioni sul generatore e date le informazioni relative al carico, e' possibile risolvere l'esercizio mediante il teorema di Boucherot.
Dividiamo il circuito in sezioni:



Dalla **sezione 0** è possibile calcolare la tensione:

$$|\mathbf{V}| = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{I}|} = 50\,\text{V} \tag{135}$$

Per calcolare le potenze alla **sezione 1**, si nota che il carico fra 0 ed 1 è un carico in parallelo in cui sono presenti due elementi in serie.
Per prima cosa è necessario calcolare l'impedenza equivalente della serie:

$$\mathbf{Z}_{eq} = R_1 + j\omega L = (8 + j6)\ \Omega \tag{136}$$

A questo punto, è possibile calcolare la corrente che scorre nel ramo verticale come:

$$|\mathbf{I}_{s1}| = \frac{|\mathbf{V}|}{|\mathbf{Z}_{eq}|} = 5\,\text{A} \tag{137}$$

Di conseguenza le potenze attiva e reattiva della sezione 1 sono:

$$P_1 = Re(\mathbf{A}) + R_1|\mathbf{I}_{s1}|^2 = 440\,\text{W} \tag{138}$$

La potenza reattiva dissipata dall'induttore è:

$$Q_L = X_L \cdot |\mathbf{I}_{s1}|^2 = 150\,\text{var} \tag{139}$$

$$Q_1 = Im(\mathbf{A}) + Q_L = 220\,\text{var} \tag{140}$$

$$|\mathbf{A}_1| = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 492\,\text{VA} \tag{141}$$

Calcolando le potenze alla **sezione 2** si trovano i dati del generatore.
La corrente vale:

$$|\mathbf{I}_2| = |\mathbf{I}_1| = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{V}|} = 9{,}8\,\text{A} \tag{142}$$

Quindi

$$Q_E = Q_1 = 220\,\text{var} \tag{143}$$

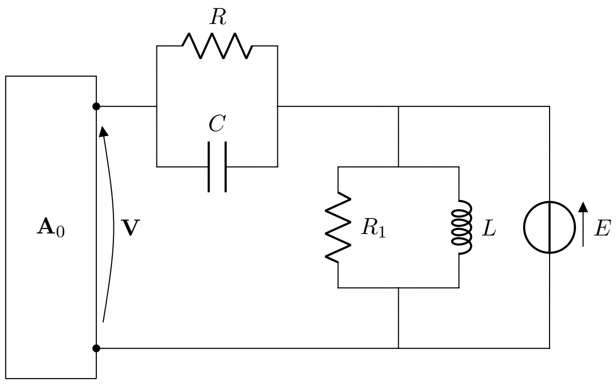
$$P_E = R \cdot |\mathbf{I}_2|^2 + P_1 = 920{,}2\,\text{W} \tag{144}$$

Infine:

$$\mathbf{A}_E = (920{,}2 + j220)\,\text{VA} \tag{145}$$

Esercizio H.5.4

Dato il circuito in Figura, calcolare la potenza complessa erogata dal generatore di tensione. Si sa che il carico dissipa $\mathbf{A}_0 = (240 + j180)$ VA. La tensione $|\mathbf{V}| = 100$ V ha pulsazione $\omega = 10$ rad/s.

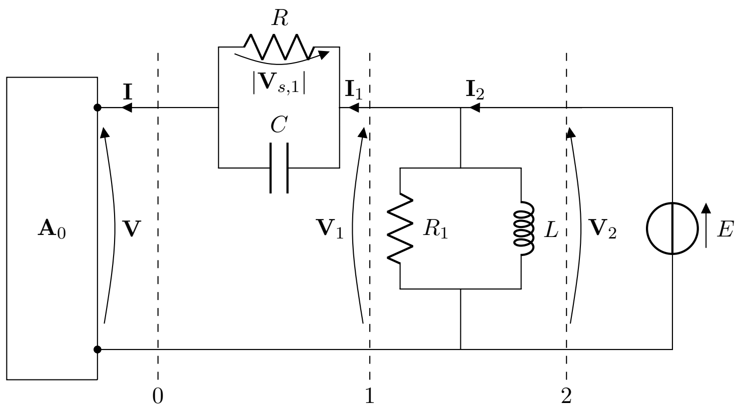


Dati:
$R = 15\ \Omega$
$C = 32{,}66$ mF
$L = 20$ H
$R_1 = 250\ \Omega$

Risultati:
$\mathbf{A}_E = (282{,}6 + j200{,}1)$ VA

Soluzione:

Per risolvere l'esercizio utilizzando il corollario di Boucherot è necessario dividere il circuito in sezioni:



Dai dati della **sezione 0** è possibile calcolare la corrente del carico:

$$|\mathbf{I}_1| = |\mathbf{I}| = \frac{|\mathbf{A}_0|}{|\mathbf{V}|} = 3\,\mathrm{A} \tag{146}$$

Per arrivare alla **sezione 1** è presente un carico serie composto da due impedenze in parallelo, quindi è necessario calcolare l'impedenza equivalente.
La reattanza del condensatore è:

$$\mathbf{X}_C = -\frac{1}{\omega C} = -3{,}06\ \Omega \tag{147}$$

L'impedenza equivalente vale, quindi:

$$\mathbf{Z}_{eq} = R /\!/ jX_C = (0.6 - j2.94)\ \Omega \tag{148}$$

La tensione ai capi del parallelo vale:

$$|\mathbf{V}_{s,1}| = |\mathbf{Z}_{eq}| \cdot |\mathbf{I}| = 9\,\mathrm{V} \tag{149}$$

Da questo dato è possibile calcolare le potenze dissipate e, quindi, le potenze alla sezione 1:

$$P_1 = Re(\mathbf{A}_0) + \frac{|\mathbf{V}_{s,1}|^2}{R} = 245{,}4\,\mathrm{W} \tag{150}$$

$$Q_1 = Im(\mathbf{A}_0) + \frac{|\mathbf{V}_{s,1}|^2}{X_C} = 153{,}53\,\mathrm{var} \tag{151}$$

Per calcolare le potenze alla **sezione 2**, è necessario calcolare la tensione $|\mathbf{V}_2|$.

$$|\mathbf{A}_1| = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 289{,}47\,\mathrm{VA} \tag{152}$$

$$|\mathbf{V}_2| = |\mathbf{V}_1| = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{I}_1|} = 96{,}49\,\mathrm{V} \tag{153}$$

La sezione 2 corrisponde con quella del generatore, quindi:

$$P_E = P_2 = P_1 + \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{R_1} = 282{,}64\,\mathrm{W} \tag{154}$$

$$Q_E = Q_2 = Q_1 + \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{X_L} = 200{,}08\,\mathrm{var} \tag{155}$$

dove

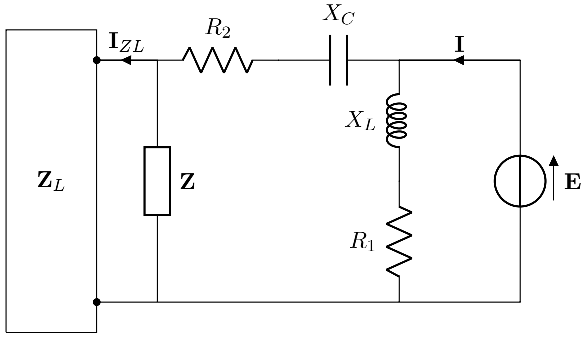
$$X_L = \omega L = 200\ \Omega \tag{156}$$

Quindi:

$$\mathbf{A}_E = (282{,}64 + j200{,}08)\,\mathrm{VA} \tag{157}$$

Esercizio H.5.5

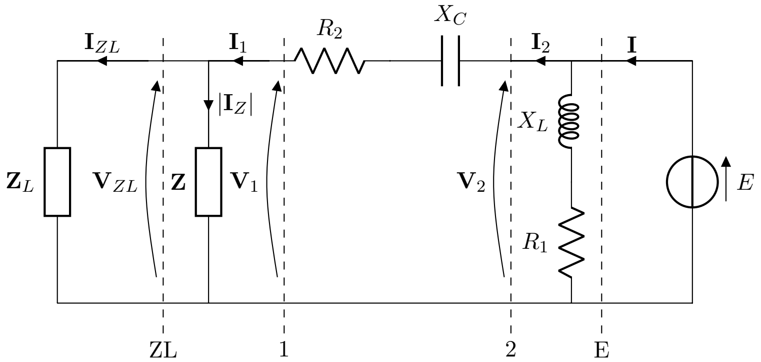
Dato il circuito in regime sinusoidale in figura alimentato a 50Hz, sapendo che il carico $\mathbf{Z}_L$ assorbe una corrente $\mathbf{I}_{ZL}$ pari a $8A$ e dissipa una potenza attiva pari a 1500W con un fattore di potenza $\cos\phi = 0.6$ (induttivo) calcolare il modulo della corrente $\mathbf{I}$ e della tensione $\mathbf{E}$, la potenza apparente A_Z dissipata da $\mathbf{Z}$, la potenza reattiva Q_C dissipata da X_C e la potenza attiva P_R dissipata da R_1. Calcolare, infine, il valore della capacità C_r del condensatore di rifasamento da mettere in parallelo al generatore $\mathbf{E}$ per avere rifasamento totale.



Dati:	**Risultati:**
	$A_Z = 1811{,}5\,\text{VA}$
$R_1 = 30\ \Omega$	$Q_C = -147\,\text{var}$
$R_2 = 2\ \Omega$	$P_R = 933{,}7\,\text{W}$
$X_L = 50\ \Omega$	$\lvert\mathbf{I}\rvert = 11{,}2\,\text{A}$
$X_C = -3\ \Omega$	$\lvert\mathbf{E}\rvert = 325{,}3\,\text{V}$
$\mathbf{Z} = (20 - j50)\ \Omega$	$C_r = 52\ \mu\text{F}$

Soluzione:

Il circuito si può risolvere con il metodo di Boucherot:



LE potenze alla **Sezione ZL** si possono calcolare dai dati del problema:

$$Q_{ZL} = P_{ZL} \cdot \tan\phi = 2000\,\text{var} \tag{158}$$

$$|\mathbf{A}_{ZL}| = \sqrt{P_{ZL}^2 + Q_{ZL}^2} = 2500\,\text{VA} \tag{159}$$

$$|\mathbf{V}_{ZL}| = \frac{|\mathbf{A}_{ZL}|}{|\mathbf{I}_{ZL|}} = 312{,}5\,\text{V} \tag{160}$$

Il carico $\mathbf{Z}$ si tratta come se fosse composto da una serie fra un resistore avente resistenza pari alla parte reale dell'impedenza ed una reattanza pari alla parte immaginaria dell'impedenza.
Di conseguenza, è necessario calcolare la corrente che scorre nel carico:

$$|\mathbf{I}_Z| = \frac{|\mathbf{V}_1|}{|\mathbf{Z}|} = 5{,}8\,\text{A} \tag{161}$$

Le potenze alla **sezione 1** sono quindi:

$$P_1 = P_{ZL} + Re(\mathbf{Z}) \cdot |\mathbf{I}_Z|^2 = 2172{,}8\,\mathrm{W} \tag{162}$$

$$Q_1 = Q_{ZL} + Im(\mathbf{Z}) \cdot |\mathbf{I}_Z|^2 = 318\,\mathrm{var} \tag{163}$$

La potenza apparente dissipata dal solo carico $\mathbf{Z}$ è:

$$|\mathbf{A}_Z| = A_Z = |\mathbf{Z}||\mathbf{I}_Z|^2 = 1811{,}5\,\mathrm{VA} \tag{164}$$

La potenza apparente alla sezione 1 vale:

$$|\mathbf{A}_1| = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 2196\,\mathrm{VA} \tag{165}$$

Per calcolare le potenze alla **sezione 2** è necessario calcolare la corrente $|\mathbf{I}_2|$:

$$|\mathbf{I}_2| = |\mathbf{I}_1| = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{V}_1|} = 7\,\mathrm{A} \tag{166}$$

La potenza reattiva dissipata dal condensatore è:

$$Q_C = X_C \cdot |\mathbf{I}_2|^2 = -147\,\mathrm{var} \tag{167}$$

Infine, le potenze alla sezione 2 sono:

$$P_2 = P_1 + R_2 \cdot |\mathbf{I}_2|^2 = 2270{,}8\,\mathrm{W} \tag{168}$$

$$Q_2 = Q_1 + Q_C = 171\,\mathrm{var} \tag{169}$$

La potenza apparente alla sezione 2 vale:

$$|\mathbf{A}_2| = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = 2277{,}2\,\mathrm{VA} \tag{170}$$

Da questo dato è possibile calcolare la tensione del generatore:

$$|\mathbf{V}_2| = |\mathbf{E}| = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{I}_2|} = 325{,}3\,\mathrm{V} \tag{171}$$

Le potenze dissipate dal carico si possono calcolare dalla corrente che circola nel carico:

$$|\mathbf{Z}_{32}| = \sqrt{X_L^2 + R_1^2} \tag{172}$$

Quindi:

$$|\mathbf{I}_{32}| = \frac{|\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{Z}_{32}|} \tag{173}$$

Infine:

$$P_R = R_1 \cdot |\mathbf{I}_{32}| = 933{,}7\,\mathrm{W} \tag{174}$$

$$Q_L = X_L \cdot |\mathbf{I}_{32}| = 1556{,}2\,\mathrm{var} \tag{175}$$

Quindi le potenze alla **sezione E** sono:

$$P_E = P_3 = P_2 + Re(\mathbf{A}_{32}) = 3204{,}5\,\mathrm{W} \tag{176}$$

$$Q_3 = Q_2 + Q_L = 1724.2\,\mathrm{var} \tag{177}$$

La corrente erogata dal generatore vale:

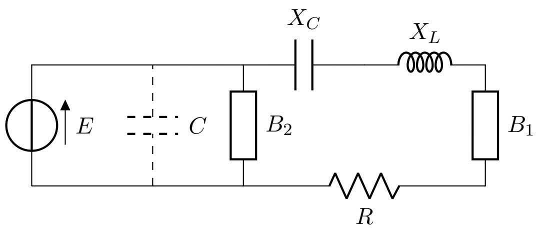
$$|\mathbf{I}| = \frac{A_3}{|\mathbf{E}|} = 11{,}2\,\mathrm{A} \tag{178}$$

Infine, il condensatore di rifasamento vale:

$$C_r = \frac{Q_3}{|\mathbf{E}|^2 2\pi f} = 52\ \mu\mathrm{F} \tag{179}$$

Esercizio H.5.6

Dato il circuito in figura, alimentato a $f = 50$ Hz, calcolare il valore efficace della tensione $\mathbf{E}$ per avere una tensione (valore efficace) di 230 V ai capi del carico B_1. Calcolare poi, il valore della capacità del condensatore di rifasamento per ottenere $\cos\phi = 0.9$ al generatore. Calcolare, inoltre, la potenza reattiva dissipata da X_L e la potenza attiva generata da $\mathbf{E}$.

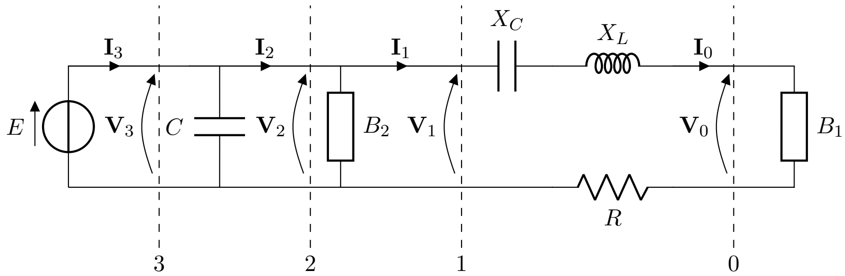


Dati:
$R = 1\ \Omega$
$X_L = 10\ \Omega$
$X_C = -10\ \Omega$
$P_{B_1} = 1500\,\mathrm{W}$
$\cos\phi_1 = 0.7$ (rit)
$A_{B_2} = 2000\,\mathrm{VA}$
$\cos\phi_2 = 0.95$ (rit)

Risultati:
$|\mathbf{E}| = 236{,}5\,\mathrm{V}$
$C = 26{,}5\ \mu\mathrm{F}$
$Q_{X_L} = 868{,}6\,\mathrm{var}$
$P_E = 3486{,}9\,\mathrm{W}$

Soluzione:

L'esercizio si può risolvere con il metodo di Boucherot:



Le potenze alla **Sezione 0** si possono ricavare facilmente dai dati del carico B_1:

$$P_0 = P_{L_1} = 1500\,\mathrm{W} \tag{180}$$

$$|\mathbf{A}_0| = \frac{P_0}{\cos\phi_1} = 2142{,}6\,\mathrm{VA} \tag{181}$$

$$Q_0 = \sqrt{A_0^2 - P_0^2} = 1530\,\mathrm{var} \tag{182}$$

La tensione ai capi del carico B_1 è data dal testo:

$$|\mathbf{V}_0| = 230V \tag{183}$$

Per calcolare la corrente $\mathbf{I}_0$ è necessario notare che il testo fornisce la tensione ai capi di B_1:

$$|\mathbf{I}_0| = |\mathbf{I}_1| = \frac{|\mathbf{A}_0|}{|\mathbf{V}_0|} = 9{,}32A \tag{184}$$

A questo punto è possibile calcolare le potenze alla **Sezione 1**:

$$P_1 = P_0 + RI_0^2 = 1586.9W \tag{185}$$

$$Q_{X_L} = X_L|\mathbf{I}_0|^2 = 868{,}6\,\mathrm{var} \tag{186}$$

$$Q_1 = Q_0 + X_L|\mathbf{I}_0|^2 + X_C|\mathbf{I}_0|^2 = 1530\,\mathrm{var} \tag{187}$$

$$|\mathbf{A}_1| = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 2204{,}3VA \tag{188}$$

Dato che tutti i carichi successivi alla sezione 1 sono in parallelo, la tensione $\mathbf{V}_1$ è uguale ad $\mathbf{E}$:

$$|\mathbf{V}_1| = |\mathbf{V}_2| = |\mathbf{V}_3| = |\mathbf{E}| = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{I}_1|} = 236{,}5\,\mathrm{V} \tag{189}$$

Le potenze alla **Sezione 3** si ricavano facilmente dai dati del carico B_2:

$$P_2 = P_1 + A_{B_2}\cos\phi_2 = 3486{,}9\,\mathrm{W} \tag{190}$$

$$Q_2 = Q_1 + A_{B_2}\sin\phi_2 = 2154{,}5\,\mathrm{var} \tag{191}$$

Dato che il rifasamento non altera la potenza attiva:

$$P_E = P_2 = 3486{,}9\,\mathrm{W} \tag{192}$$

Infine, si può procedere con il calcolo della capacità di rifasamento:

$$Q_d = P_2 \tan\arccos 0.9 = 1688{,}8\,\mathrm{VA} \tag{193}$$

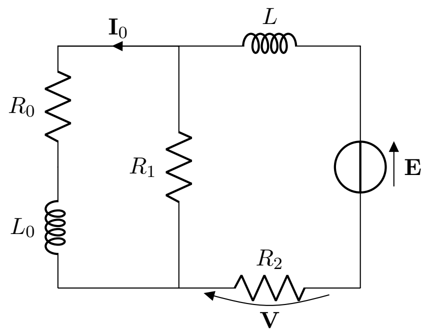
$$\Delta Q = Q_d - Q_2 = -465{,}7\,\mathrm{var} \tag{194}$$

$$X_C = \frac{V_2^2}{\Delta Q} = -120{,}1\ \Omega \tag{195}$$

$$C = -\frac{1}{2\pi f X_C} = 26{,}5\ \mu\mathrm{F} \tag{196}$$

Esercizio H.5.7

Dato il circuito in figura, calcolare il valore dell'induttanza L affinché il fattore di potenza del generatore sia $\cos\phi = 0{,}83485$. Calcolare quindi, in queste condizioni, la tensione $|\mathbf{V}|$ e la potenza complessa $\mathbf{A}$ erogata dal generatore. La corrente assorbita dal carico vale $\mathbf{I}_0 = 25\,\mathrm{A}$.

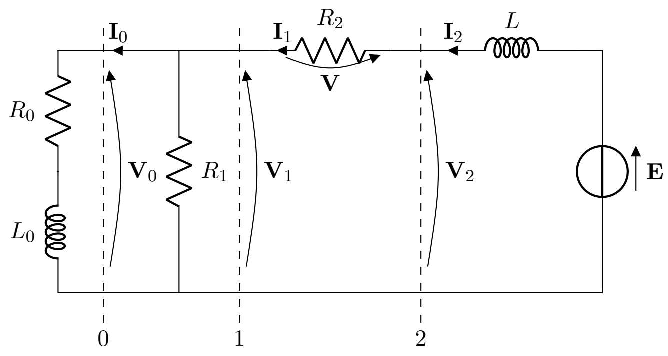


Dati:
$R_0 = 4.8\ \Omega$
$R_1 = 33{,}33\ \Omega$
$R_2 = 5{,}827\ \Omega$
$L_0 = 640$ mH
$\omega = 10$ rad/s

Risultati:
$L = 237{,}8$ mH
$|V| = 169\,\mathrm{V}$
$\mathbf{A} = (9100 + j6000)$ VA

Soluzione:

L'esercizio si può risolvere con il metodo di Boucherot. Suddividendo il circuito in sezioni, separando il resistore R_2 dall'induttore L poiché quest'ultimo è incognito:



E' possibile calcolare facilmente le potenze alla **sezione 0**:

$$P_0 = R_0 |\mathbf{I}_0|^2 = 3000\,\mathrm{W} \tag{197}$$

$$Q_0 = L_0 \omega |\mathbf{I}_0|^2 = 4000\,\mathrm{var} \tag{198}$$

Per calcolare la tensione è necessario sapere la potenza apparente:

$$|\mathbf{A}_0| = \sqrt{P_0^2 + Q_0^2} = 5000\,\mathrm{VA} \tag{199}$$

$$|\mathbf{V}_0| = |\mathbf{V}_1| = \frac{|\mathbf{A}_0|}{|\mathbf{I}_0|} = 200\,\mathrm{V} \tag{200}$$

Le potenze alla sezione **sezione 1** si calcolano facilmente:

$$P_1 = P_0 + \frac{|\mathbf{V}_1|^2}{R_1} = 4200\,\mathrm{W} \tag{201}$$

$$Q_1 = Q_0 \tag{202}$$

Quindi è possibile calcolare la corrente $|\mathbf{I}_1|$:

$$|\mathbf{A}_1| = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 5800\,\mathrm{VA} \tag{203}$$

$$|\mathbf{I}_1| = |\mathbf{I}_2| = \frac{|\mathbf{A}_1|}{\mathbf{V}_1} = 29\,\mathrm{A} \tag{204}$$

Nota la corrente, è possibile calcolare la tensione e le potenze alla **sezione 2**:

$$|\mathbf{V}| = R_2 |\mathbf{I}_1| = 169\,\mathrm{V} \tag{205}$$

$$P_2 = P_1 + R_2 |\mathbf{I}_1|^2 = 9100\,\mathrm{W} \tag{206}$$

$$Q_2 = Q_1 \tag{207}$$

Infine, Il calcolo del valore dell'induttanza si effettua con gli stessi passaggi del rifasamento:

$$Q_d = P_2 \tan\phi = 6000\,\mathrm{var} \tag{208}$$

$$Q_L = Q_d - Q_1 = 2000\,\mathrm{var} \tag{209}$$

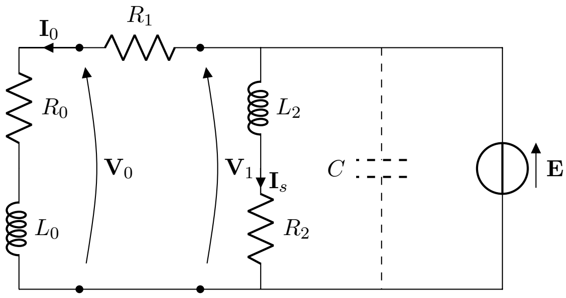
$$L = \frac{Q_L}{\omega |\mathbf{I}_2|^2} = 237{,}8\ \mathrm{mH} \tag{210}$$

Infine:

$$\mathbf{A} = P_2 + jQ_d = (9100 + j6000)\,\mathrm{VA} \tag{211}$$

Esercizio H.5.8

Dato il circuito in regime alternato sinusoidale in figura, alimentato a $\omega = 50$ rad/s, sapendo che il resistore R_0 dissipa un potenza attiva $P_0 = 1000\,\mathrm{W}$, calcolare il valore efficace della corrente generata dal generatore $\mathbf{E}$ ed il valore di tale generatore.
Calcolare, inoltre, il modulo della corrente $\mathbf{I}_s$, il modulo della tensione $\mathbf{V}_0$ e la potenza apparente generata da $\mathbf{E}$. Calcolare, poi, il valore della capacità del condensatore C di rifasamento per avere $\cos\phi = 0.9$.



Dati:
$R_0 = 2{,}5\ \Omega$
$L_0 = 0{,}12$ H
$R_1 = 5{,}5\ \Omega$
$R_2 = 12\ \Omega$
$L_2 = 0{,}32$ H
$P = 1000\,\mathrm{W}$
$Q = 2400\,\mathrm{var}$

Risultati:
$|\mathbf{V}_0| =$ 130 V
$|\mathbf{I}_s| =$ 10 A
$|\mathbf{E}| =$ 200 V
$|\mathbf{I}_E| =$ 29,73 A
$|\mathbf{A}_E| =$ 5,95 kVA
$C =$ 934,5 μF

Soluzione:

Si risolve la rete avvalendosi del corollario di Boucherot.
Calcolando le reattanze:

$$X_{L_0} = \omega L_0 = 6\ \Omega \tag{212}$$

$$X_{L_1} = \omega L_1 = 16\ \Omega \tag{213}$$

Per calcolare tutte le potenze alla **sezione 0** è necessario analizzare i dati forniti dal testo.
I modulo della corrente $\mathbf{I}_0$ si può calcolare a partire dal valore della potenza dissipata da R_0:

$$|\mathbf{I}_0| = \sqrt{\frac{P_0}{R_0}} = 20\,\mathrm{A} \tag{214}$$

La potenza reattiva dissipata da L_0 è quindi:

$$Q_0 = X_{L_0}|\mathbf{I}_0|^2 = 2400\,\mathrm{var} \tag{215}$$

Quindi è possibile calcolare la tensione V_0:

$$|\mathbf{A}_0| = \sqrt{P^2 + Q^2} = 2600\,\mathrm{VA} \tag{216}$$

$$|\mathbf{V}_0| = \frac{|\mathbf{A}_0|}{|\mathbf{I}_0|} = 130\,\mathrm{V} \tag{217}$$

La potenza attiva alla **sezione 1** si calcola facilmente:

$$P_1 = P_0 + R_1|\mathbf{I}_0|^2 = 3200\,\mathrm{W} \tag{218}$$

Dato che la potenza reattiva non varia fra la sezione 0 e la sezione 1, è possibile calcolare la potenza apparente:

$$|\mathbf{A}_1| = \sqrt{P_1^2 + Q_0^2} = 4000\,\mathrm{VA} \tag{219}$$

La tensione $|\mathbf{V}_1|$, che coincide con il valore del generatore, si può quindi calcolare come:

$$|\mathbf{V}_1| = E = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{I}_0|} = 200\,\mathrm{V} \tag{220}$$

La corrente che circola nella serie fra R_2 ed L_2 si può calcolare come:

$$|\mathbf{I}_s| = \frac{|\mathbf{V}_1|}{\sqrt{R_2^2 + X_{L_2}^2}} = 10\,\mathrm{A} \tag{221}$$

Le potenze alla **sezione 2** sono quindi:

$$P_2 = P_1 + R_2|\mathbf{I}_s|^2 = 4400\,\mathrm{W} \tag{222}$$

$$Q_2 = Q_1 + X_{L_2}|\mathbf{I}_s|^2 = 4000\,\mathrm{var} \tag{223}$$

Infine la potenza apparente e la corrente erogate dal generatore sono:

$$|\mathbf{A}_E| = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = 5{,}95k\,\mathrm{VA} \tag{224}$$

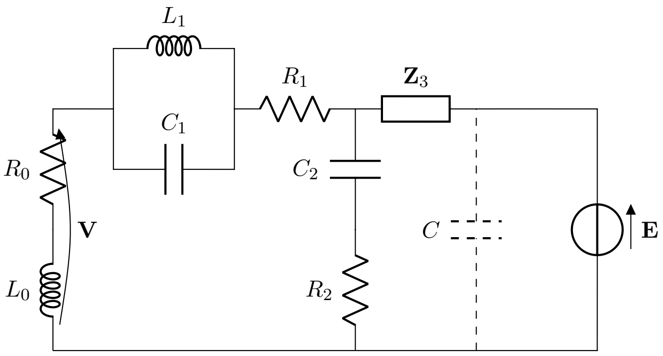
$$|\mathbf{I}_E| = \frac{A_E}{E} = 29{,}73\,\mathrm{A} \tag{225}$$

Infine è possibile risolvere il problema del **rifasamento**:

$$C = \frac{(Q_2 - P_2 \tan\phi)}{E^2\omega} = 934{,}5\ \mu\mathrm{F} \tag{226}$$

Esercizio H.5.9

Dato il circuito in figura alimentato a 50 Hz, noto il valore della tensione $\mathbf{V}$, calcolare la potenza complessa dissipata dall'induttore L_1, la potenza apparente dissipata da $\mathbf{Z}_3$, il valore della tensione $|\mathbf{E}|$ e il valore del condensatore C per avere un rifasamento completo.



Dati:
$\mathbf{V} = (10 + j10)\,\mathrm{V}$
$R_0 = 10\ \Omega$
$X_{L0} = 10\ \Omega$
$X_{L1} = 12\ \Omega$
$X_{C1} = -6\ \Omega$
$R_1 = 14\ \Omega$
$R_2 = 5\ \Omega$
$X_{C2} = -12\ \Omega$
$\mathbf{Z}_3 = (3{,}19 + j13{,}95)\ \Omega$

Risultati:
$\mathbf{A}_{L_1} = j12\,\mathrm{VA}$
$A_{Z_3} = (19{,}57 + j85{,}60)\,\mathrm{VA}$
$|\mathbf{E}| = 29{,}91\,\mathrm{V}$
$C = 151\ \mu\mathrm{F}$

Soluzione:

Il circuito si risolve mediante il teorema di Boucherot.
Sezione 0:

$$|\mathbf{V}| = 10\sqrt{2}\,\mathrm{V} \tag{227}$$

$$|\mathbf{I}_0| = \frac{|\mathbf{V}|}{\sqrt{R_0^2 + X_{L0}^2}} = 1\,\mathrm{A} \tag{228}$$

$$P_0 = R_0|\mathbf{I}_0|^2 = 10\,\mathrm{W} \tag{229}$$

$$Q_0 = X_{L0}|\mathbf{I}_0|^2 = 10\,\mathrm{var} \tag{230}$$

Sezione 1:

$$|\mathbf{I}_1| = |\mathbf{I}_0| \tag{231}$$

L'impedenza equivalente del parallelo fra induttore e condensatore è:

$$X_{eq} = X_{L_1} /\!/ X_{C_1} = -12\ \Omega \tag{232}$$

Quindi le potenze alla sezione 1 si possono facilmente calcolare:

$$Q_1 = Q_0 + X_{eq} I_1^2 = -2\,\mathrm{var} \tag{233}$$

$$P_1 = P_0 + R_1|\mathbf{I}_1|^2 = 24\,\mathrm{W} \tag{234}$$

$$|\mathbf{V}|_{Z1} = |X_{eq}||\mathbf{I}_1| = 12\,\mathrm{V} \tag{235}$$

$$\mathbf{A}_{L1} = j\frac{|\mathbf{V}|_{Z1}^2}{X_{L1}} = j12\,\mathrm{VA} \tag{236}$$

$$|\mathbf{A}_1| = \sqrt{Q_1^2 + P_1^2} = 24{,}08\,\mathrm{VA} \tag{237}$$

$$|\mathbf{V}_1| = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{I}_1|} = 24{,}08\,\mathrm{V} \tag{238}$$

Sezione 2:

$$|\mathbf{V}_2| = |\mathbf{V}_1| \tag{239}$$

$$|\mathbf{Z}_2| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\ \Omega \tag{240}$$

$$|\mathbf{I}_{Z2}| = \frac{|\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{Z}_2|} = 1{,}85\,\mathrm{A} \tag{241}$$

$$Q_2 = Q_1 + X_{C2}|\mathbf{I}_{Z2}|^2 = -43{,}18\,\mathrm{var} \tag{242}$$

$$P_2 = P_1 + R_2|\mathbf{I}_{Z2}|^2 = 41{,}16\,\mathrm{W} \tag{243}$$

$$|\mathbf{A}_2| = \sqrt{Q_2^2 + P_2^2} = 59{,}66\,\mathrm{VA} \tag{244}$$

$$|\mathbf{I}_2| = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{V}_2|} = 2{,}48\,\mathrm{A} \tag{245}$$

Sezione 3:

$$|\mathbf{I}_3| = |\mathbf{I}_2| \tag{246}$$

$$Q_3 = Q_2 + Im(\mathbf{Z}_3)|\mathbf{I}_3|^2 = 42{,}41\,\mathrm{var} \tag{247}$$

$$P_3 = P_2 + Re(\mathbf{Z}_3)|\mathbf{I}_3|^2 = 60{,}73\,\mathrm{W} \tag{248}$$

$$|\mathbf{A}_3| = \sqrt{Q_3^2 + P_3^2} = 74{,}08\,\mathrm{VA} \tag{249}$$

$$|\mathbf{V}_3| = |\mathbf{E}| = \frac{|\mathbf{A}_3|}{|\mathbf{I}_3|} = 29{,}91\,\mathrm{V} \tag{250}$$

Il condensatore di rifasamento vale:

$$C = \frac{Q_3}{|\mathbf{E}|^2 2\pi f} = 151\ \mu\mathrm{F} \tag{251}$$
