

# RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI RISULTATI SPERIMENTALI

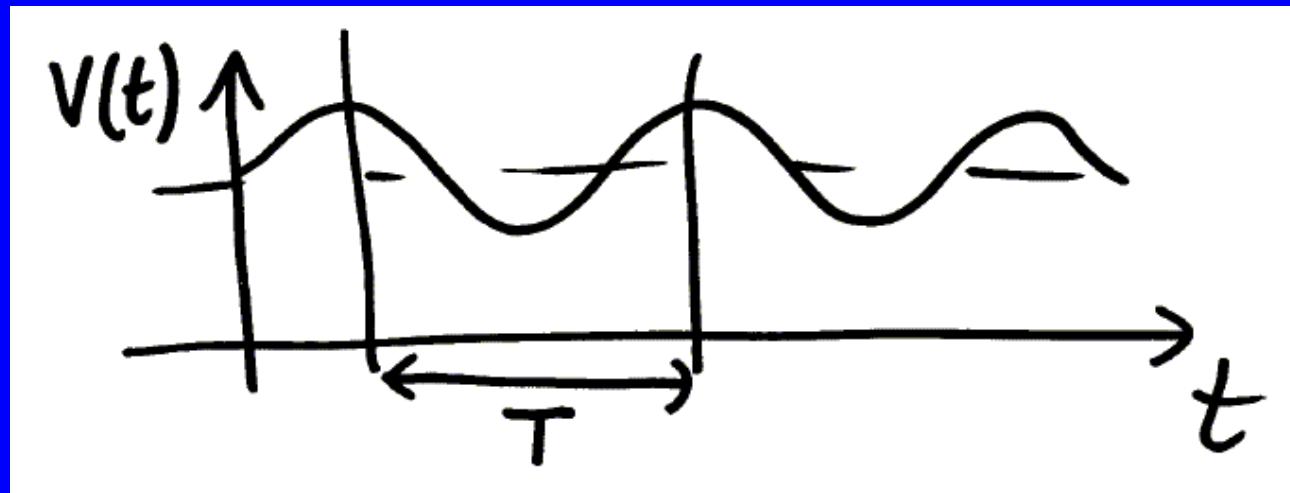
## INTERPOLAZIONE E CURVE DI REGRESSIONE



prof. Cesare Svelto

# Rappresentazione grafica

- “Visione d’insieme” di una grandezza, in funzione del tempo o di un altro parametro
- Tipicamente si utilizzano assi coordinati che devono riportare la descrizione della grandezza rappresentata e all’occorrenza anche la sua unità di misura



# Tipi di Grafici

- Quando sugli assi compaiono dei **valori numerici**, bisogna sempre indicare l'unità di misura corrispondente. Il grafico si dice **QUANTITATIVO**
- Altrimenti il diagramma è **QUALITATIVO** e può servire per indicare degli **andamenti o delle tendenze**

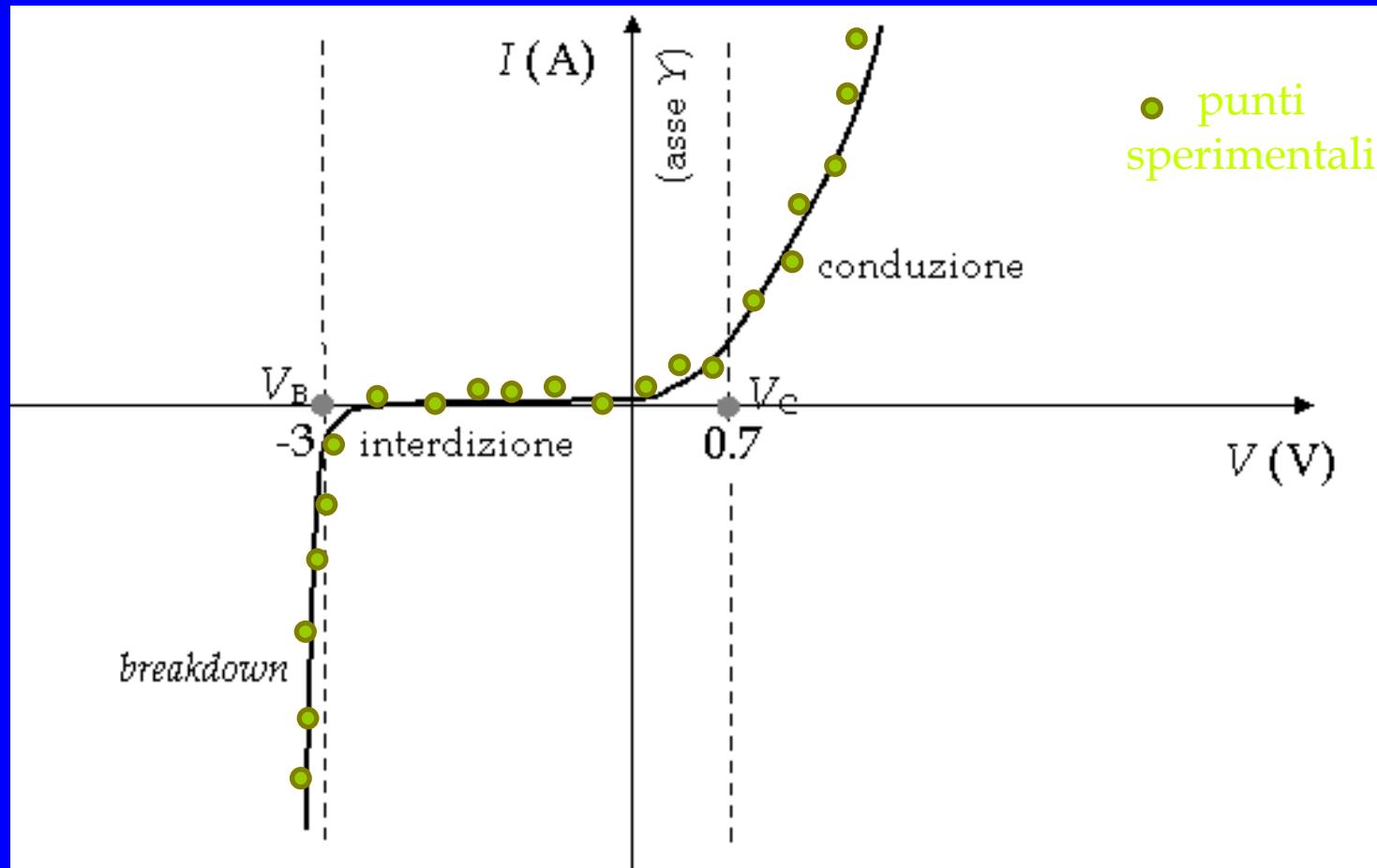
# Grafico in un PIANO CARTESIANO

- ASCISSE (asse X): variabile indipendente o di comando o di ingresso
- ORDINATE (asse Y): variabile dipendente o grandezza di uscita

Tipicamente  $u(x_i) \ll u(y_i)$ , ossia la variabile di comando è nota con buona precisione (incertezza trascurabile) mentre la variabile di uscita presenta una maggiore incertezza

Molte volte le incertezze di ingressi e uscite non sono specificate ma insieme al rumore sui dati si traducono in una “dispersione dei punti sperimentali”

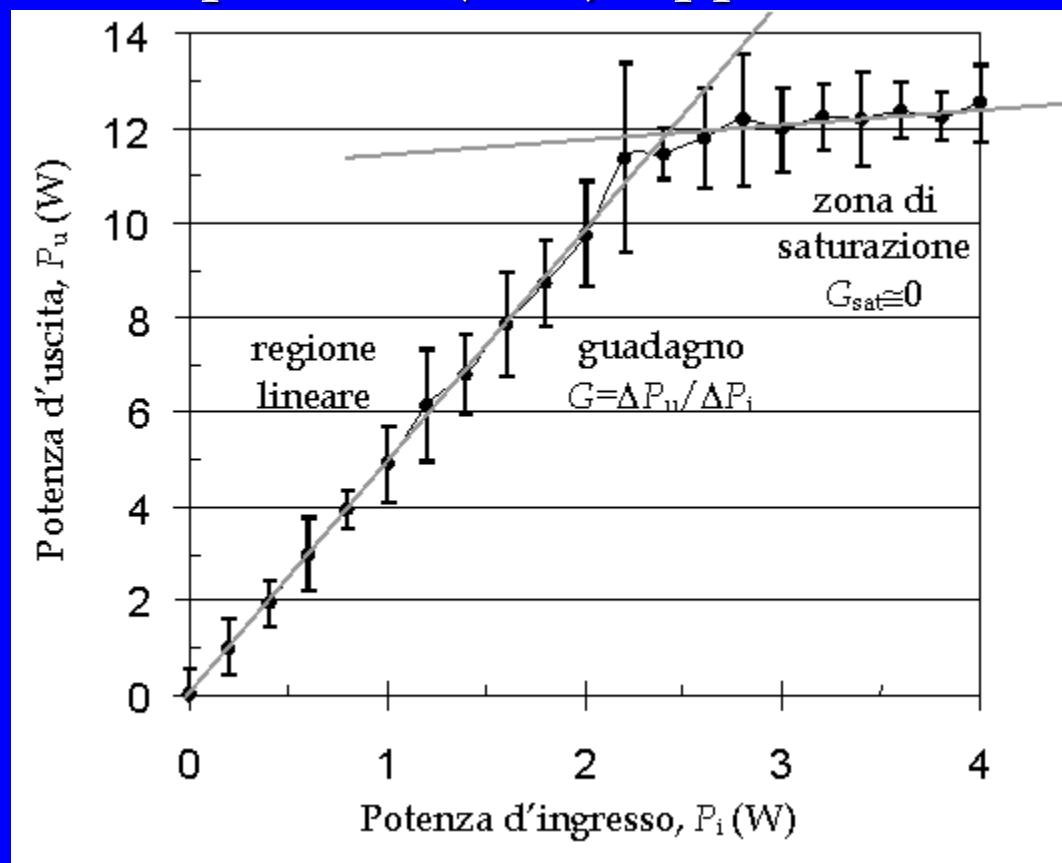
# Caratteristica tensione corrente per un diodo Zener



# Rappresentazione grafica della dispersione (incertezza): Barre di Errore

Caratteristica ingresso-uscita di un amplificatore elettronico.

Le barre di errore indicano un intervallo di confidenza, che va specificato: ad esempio  $\pm 1\sigma$  (68%), oppure ad esempio il 90%.

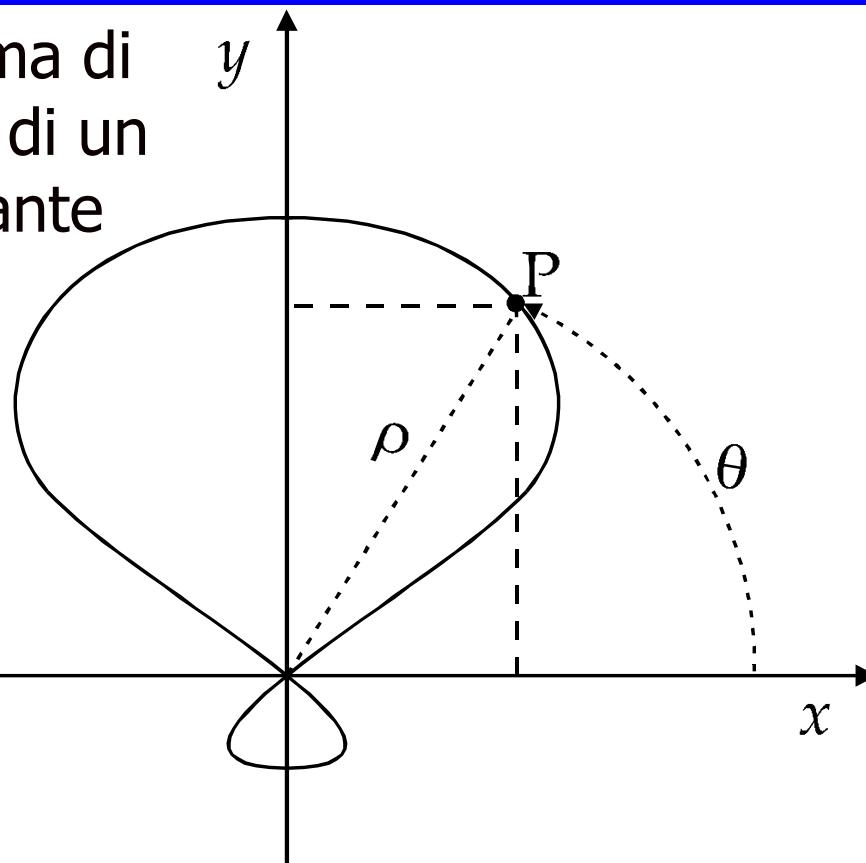


# Diagrammi polari

Coordinata radiale  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$

Coordinata angolare  $\theta = \arctg(y/x)$  per  $x \geq 0$

Diagramma di  
direttività di un  
altoparlante



$$x = \rho \cos(\theta)$$
$$y = \rho \sin(\theta)$$

$\rho(\theta)$  può anche  
indicare la  
potenza  
irradiata da  
un'antenna

# Scale logaritmiche

Utili per visualizzare grandezze che variano di **diversi ordini di grandezza**, con dettaglio relativo costante: punti equispaziati in scala logaritmica stanno in uno stesso rapporto in scala lineare.

$$z \mid_{\log} = \log_B(z/z_0) \quad B \text{ è la base e } z_0 \text{ è il riferimento}$$

Molto comuni **dB** e **dBm** (con  $B=10$ )

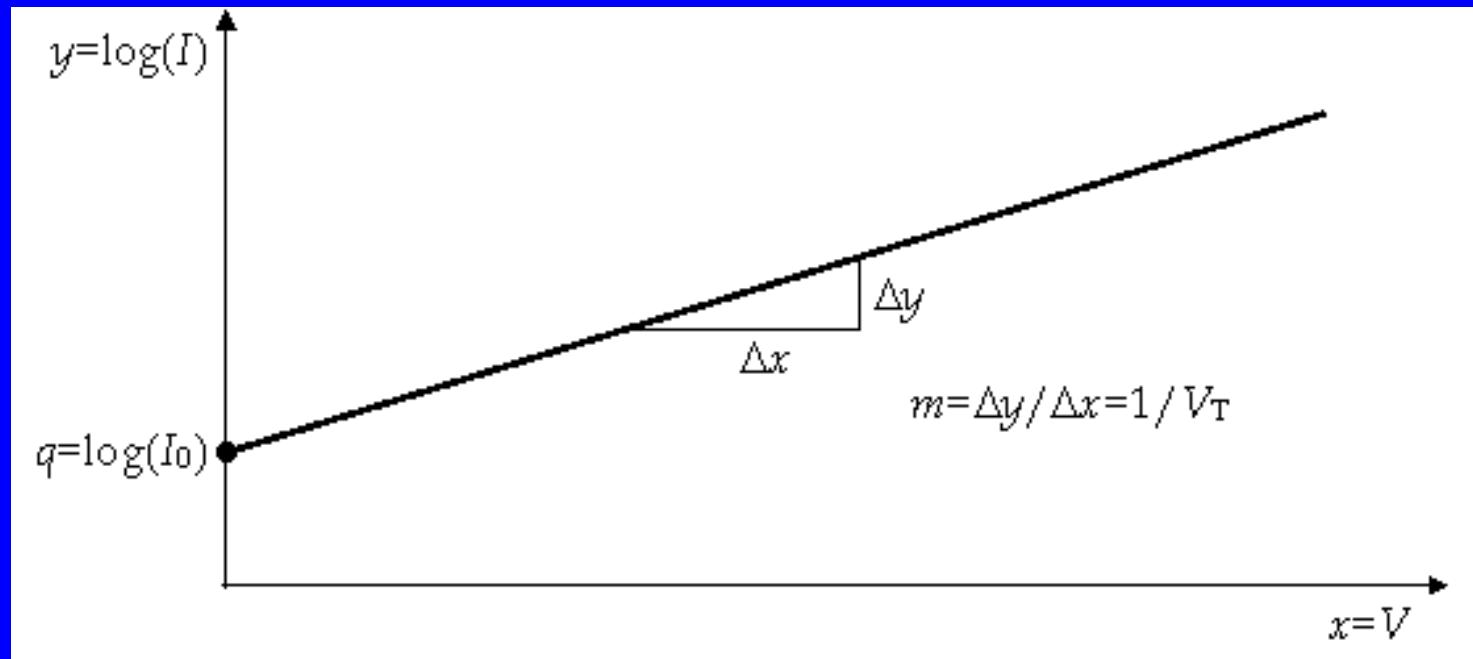
$$P \mid_{\text{dB}} = 10 \log_{10}(P/P_0)$$

$$A \mid_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(A/A_0)$$

$$P \mid_{\text{dBm}} = 10 \log_{10} [P/(P_m)] \text{ con } P_m = 1 \text{ mW}$$

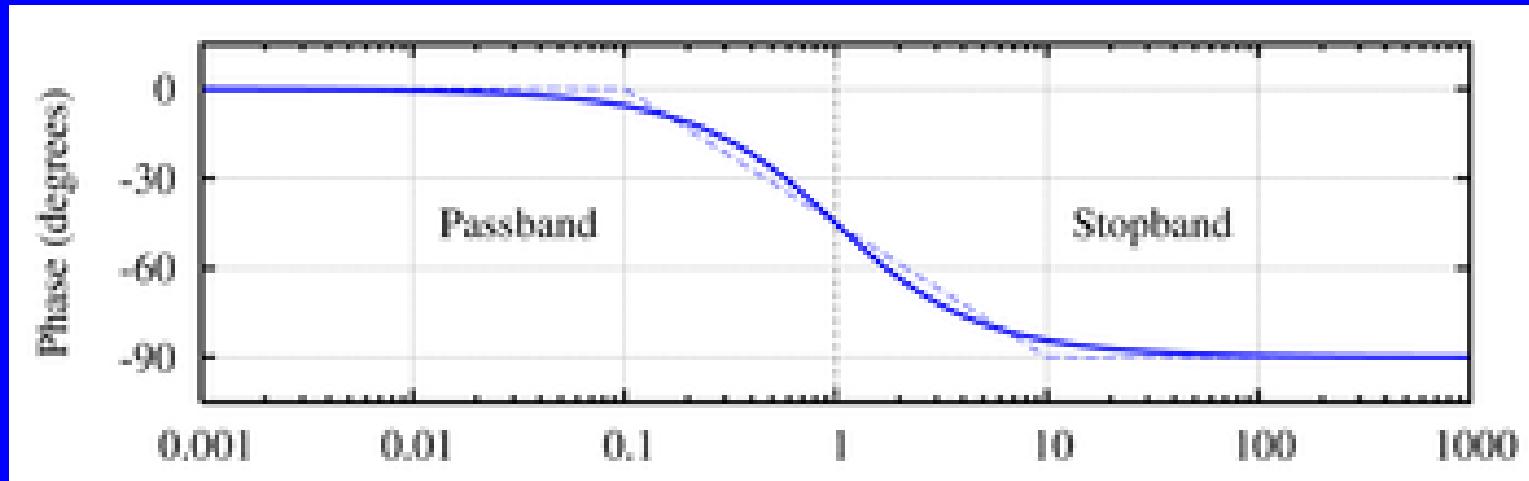
# Diagrammi Semilogaritmici (log-lin)

Diagramma semilog- $y$  per la curva  $I-V$  di un diodo a semiconduttore in polarizzazione diretta:  $I=I_0\exp(V/V_T)$



$$y = \log(I) = (1/V_T) \times V + \log(I_0) = mx + q$$
$$m = (1/V_T) \quad q = \log(I_0)$$

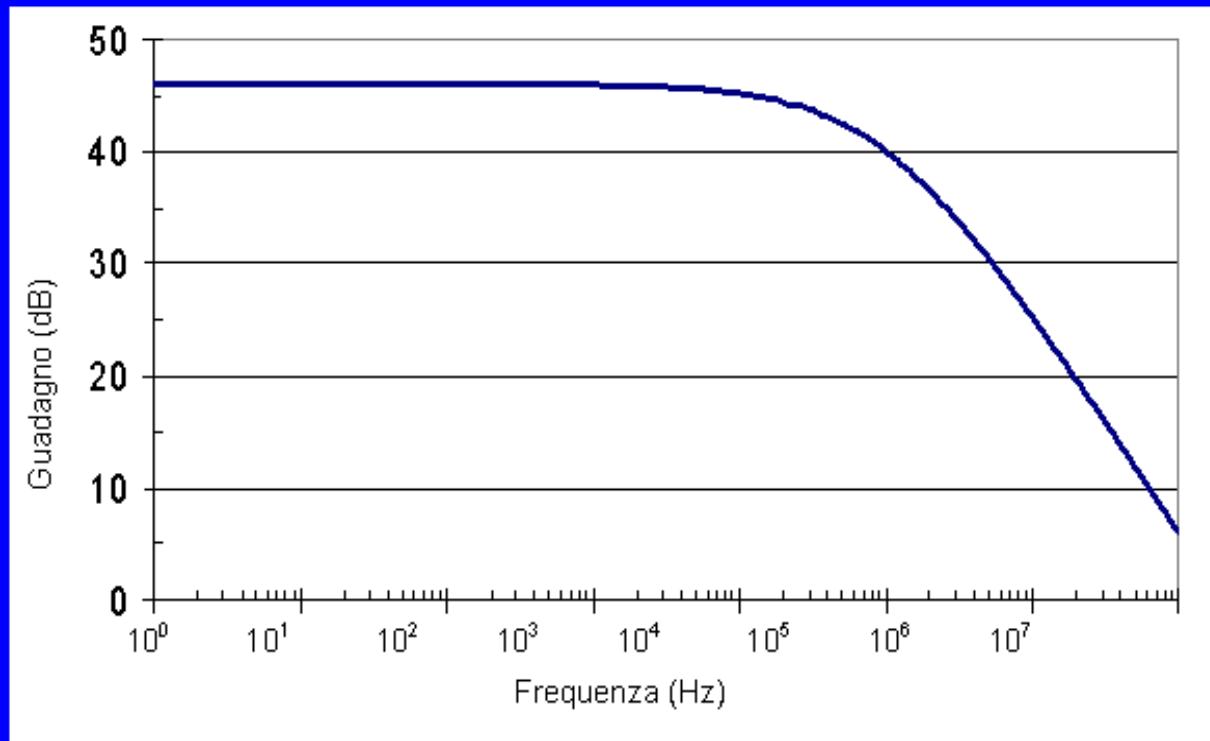
# Diagrammi Semilogaritmici (lin-log): diagramma di Bode (della fase)



↔ 6 decadi (da 1 mHz a 1 kHz)

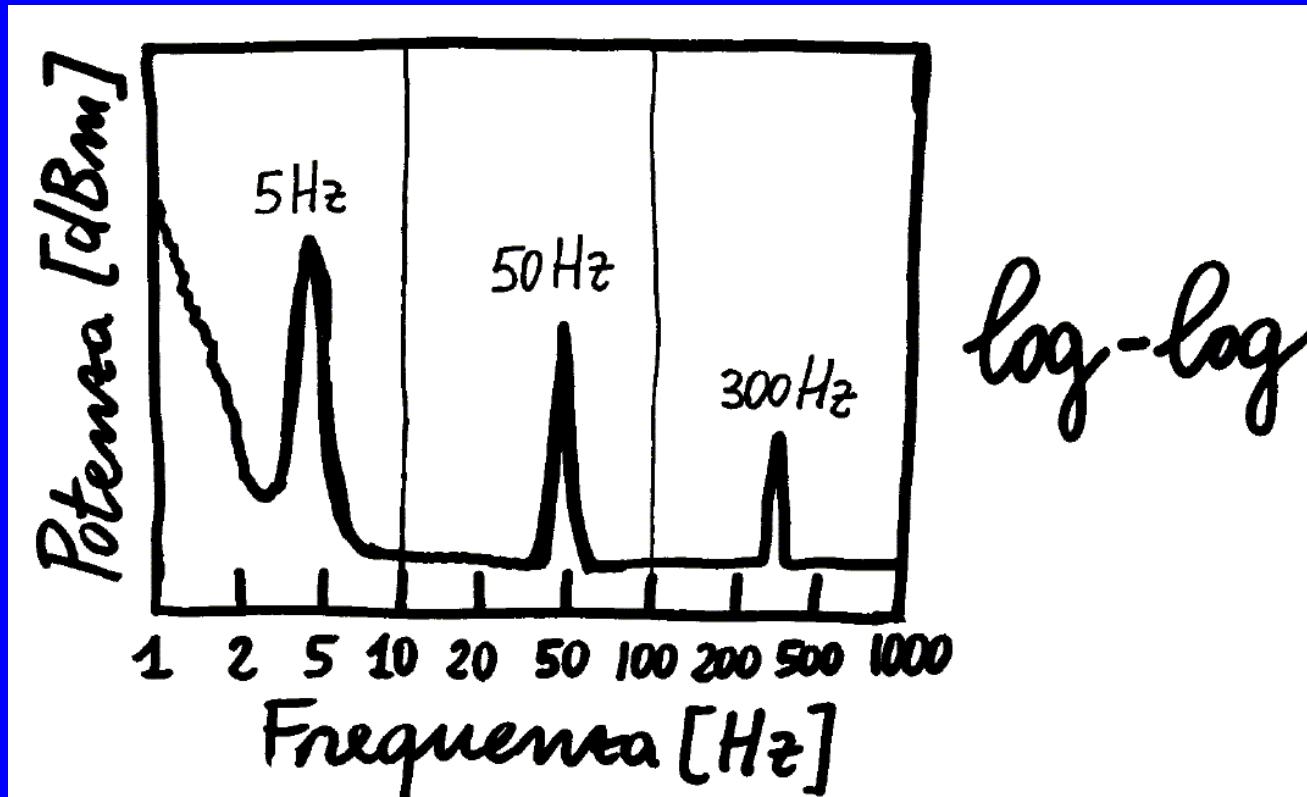
Sfasamento in gradi o radianti in funzione della frequenza riportata in scala logaritmica (ampia dinamica).

# Diagrammi Bilogaritmici (log-log): diagramma di Bode (dell'ampiezza)



Ampiezza o guadagno in dB in funzione della frequenza riportata in scala logaritmica: si possono individuare delle pendenze tipiche (e.g. -20 dB/dec).

# Diagrammi Bilogaritmici (log-log): spettro di potenza di un segnale



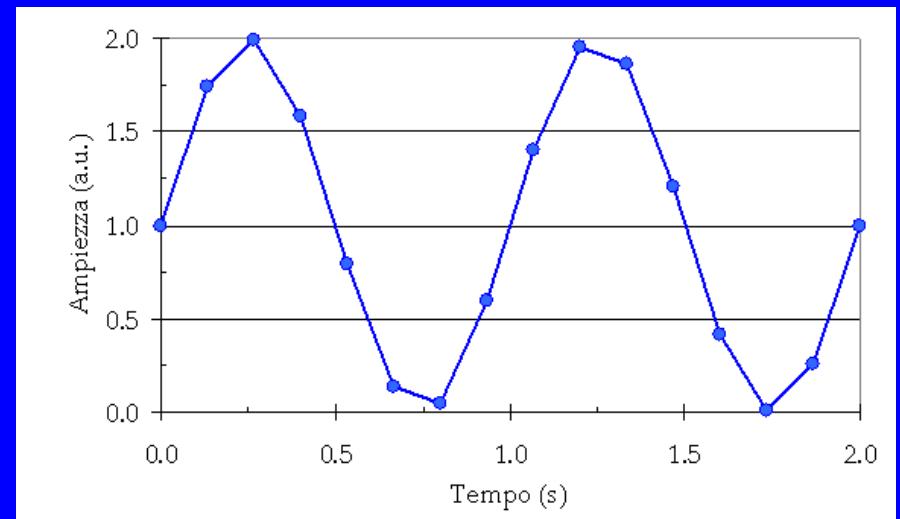
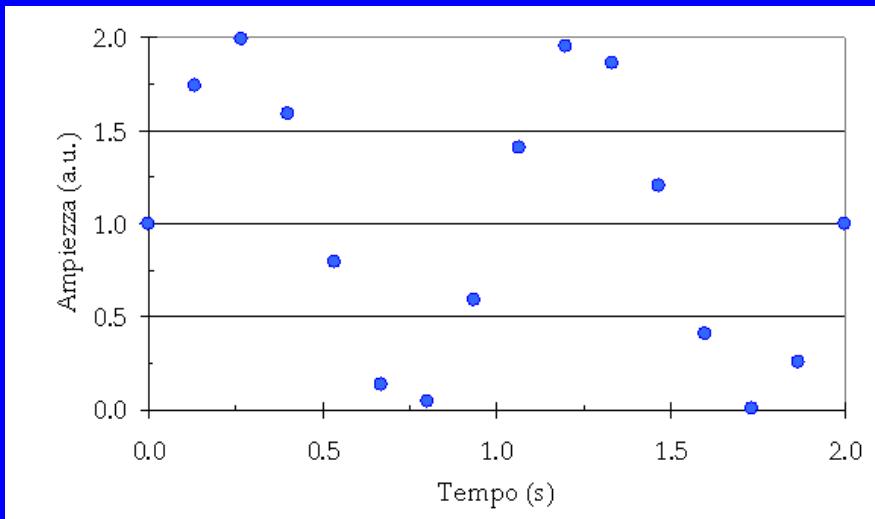
Ampia dinamica di frequenze e potenze visualizzabili sullo stesso diagramma.

# Interpolazione

- Misura: insieme finito e discreto di valori sperimentali.
- Questi punti sperimentali discreti sono tipicamente i valori assunti dal misurando al variare di uno o più parametri di comando (grandezza/e di ingresso). Oppure sono i campioni discreti prelevati nel tempo.
- La rappresentazione è più facilmente leggibile se operiamo un “riempimento” o interpolazione tra due punti sperimentali adiacenti.
- Interpolante: è una funzione continua, che passando per i due punti in questione ci fornisce l’andamento presunto (interpolato) della relazione ingresso-uscita.

# Interpolazione lineare

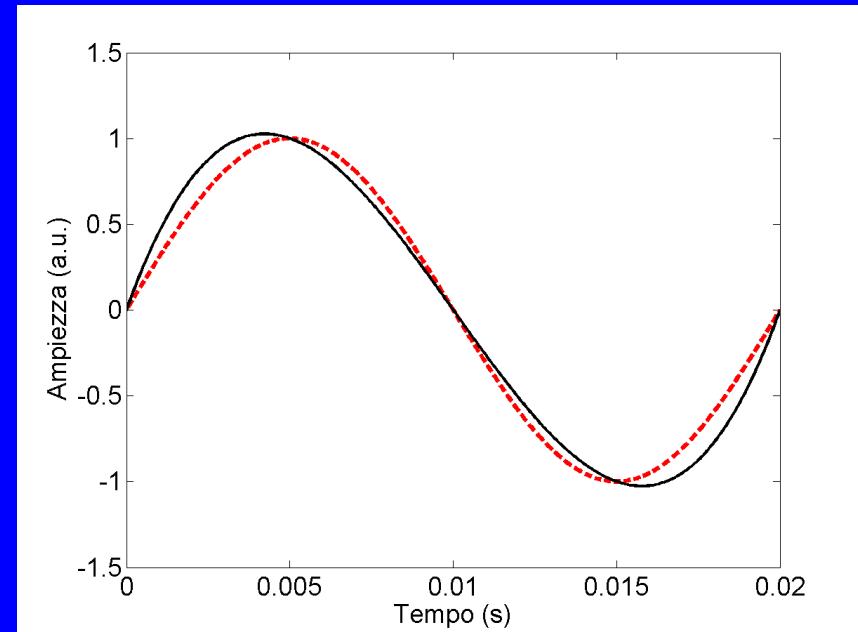
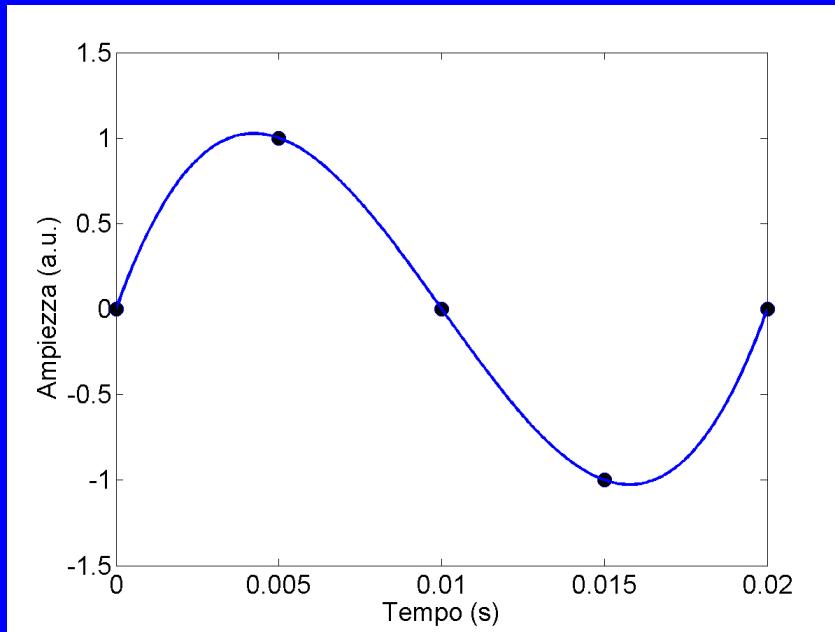
È la più semplice interpolazione possibile: consiste nel **congiungere i punti con una spezzata** (insieme dei segmenti di rette che passano per due punti adiacenti).



Non consente una buona ricostruzione del segnale perché non sfrutta l'informazione dei punti precedenti e successivi.

# Interpolazione polinomiale cubica

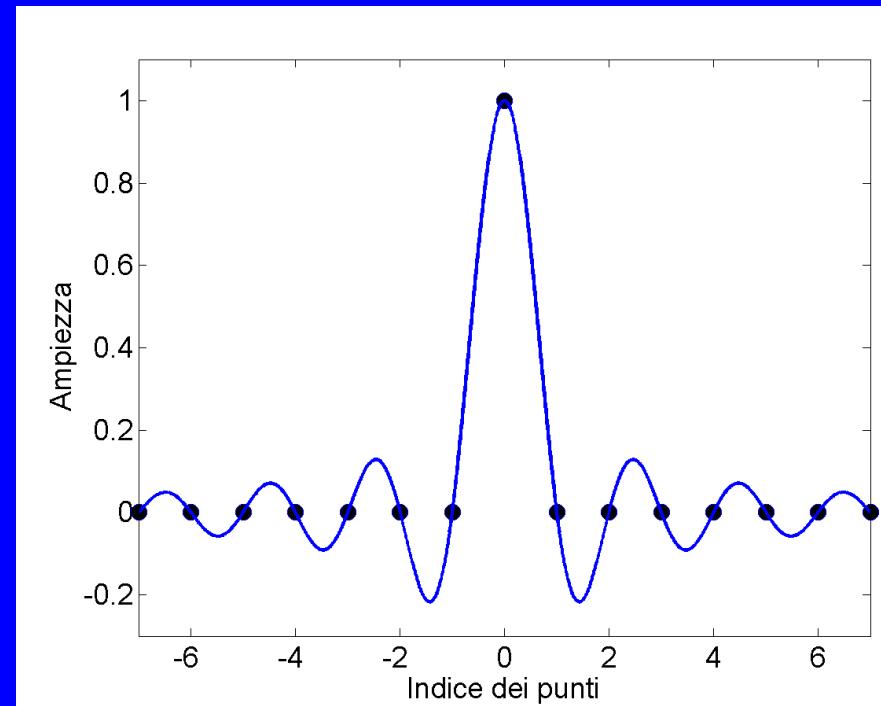
È la curva che passa per i punti sperimentali, mantenendo **continue** la derivata prima e seconda.



Ha l'effetto visivo di una “**linea smussata**”. Può essere ottenuta con differenti condizioni al contorno (nei due punti estremi dell'intervallo di dati disponibili ).

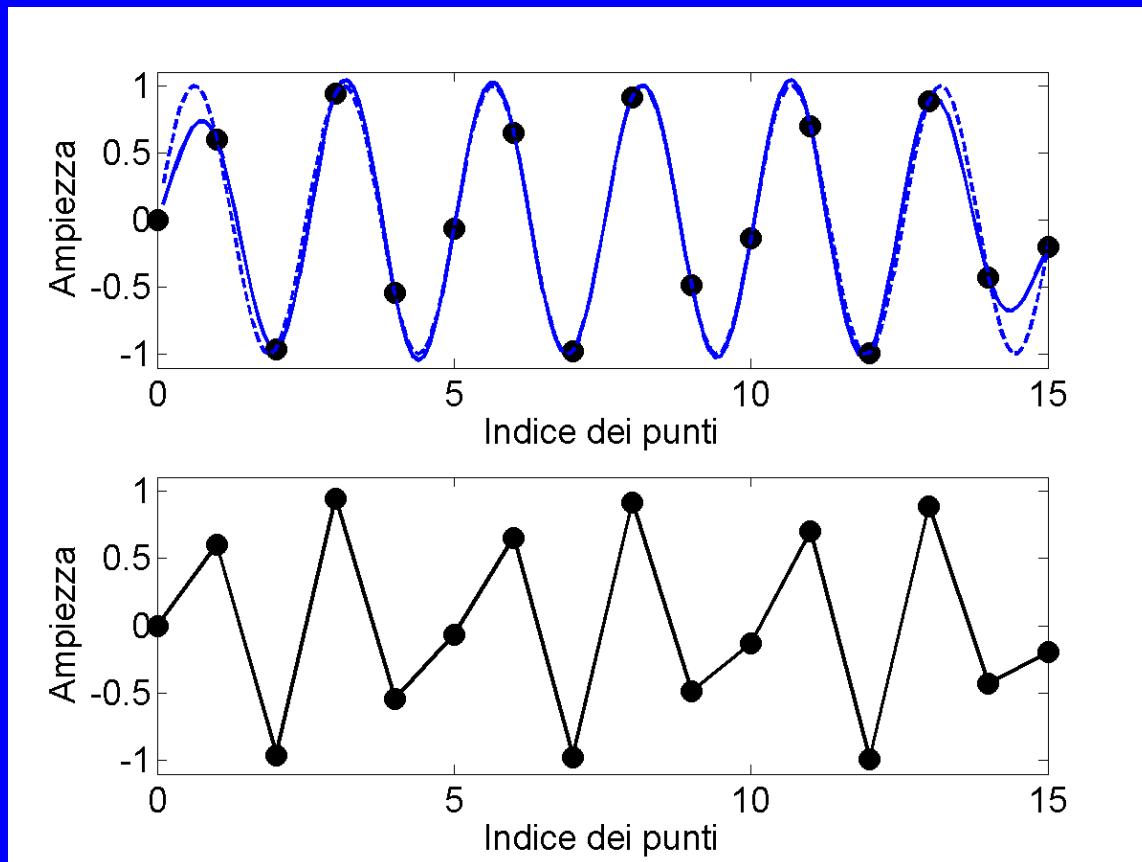
# Interpolazione a seno cardinale

- Utilizzata per la ricostruzione di segnali campionati nel tempo.
- Si ricava matematicamente dall'operazione di **filtraggio passa-basso ideale** del segnale campionato.
- Nel dominio del tempo consiste in una convoluzione del segnale campionato con la funzione  $\text{sinc}(\pi x) = \sin(\pi x)/\pi x$



# Esempio di ricostruzione di un segnale mediante interpolatore

## Sinusoida campionata a 2.51 punti per periodo



Interpolatore  
 $\text{sinc}(x)$

Interpolatore  
lineare

# Regressione di più punti sperimentali

- Un **diagramma sperimentale**, ottenuto da risultati di misura, spesso mostra una dipendenza  $y = f(x)$  che appare ragionevolmente approssimabile con una **funzione nota**
- Alternativamente, da un'**analisi teorica**, possiamo conoscere quale tipo di **relazione matematica (modello)** dovrebbe essere rappresentata dai punti, ma la dispersione dei dati è talmente grande (e.g. per la presenza di rumore) che non riusciamo a definire con sufficiente affidabilità i **valori dei parametri**
- Come è possibile **ricavare questi valori (parametri caratteristici del fenomeno misurato)** da una misura/osservazione di **più punti?**

# Regressione ai minimi quadrati (LS)

- Consideriamo una generica dipendenza di una variabile fisica  $y$  da un'altra variabile  $x$ , attraverso una funzione  $f$  con più parametri  $A, B, \dots : y = f(A, B, \dots, x)$
- Effettuiamo quindi  $n$  misure  $y_i$  della variabile  $y$  in funzione della variabile  $x$  osservata nei punti  $x_i$
- Per stimare i parametri che meglio rappresentano la realtà misurata, definiamo una funzione “distanza” tra la misura e la funzione  $f$ . Si vuole **minimizzare** tale distanza
- La funzione “distanza” più comunemente usata è la somma degli scarti quadratici tra  $f$  e il valore misurato
- Scarto:  $\delta_i = y_i - f(x_i)$
- Funzione “distanza” da minimizzare:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \delta_i^2$$

# Regressione lineare LS (1/2)

Un importante caso di regressione, semplice da risolvere analiticamente, è quello della regressione lineare:

Consideriamo una dipendenza lineare  $y = m x + b$  di cui si vogliono ricavare i due parametri  $m$  e  $b$ .

Per il punto  $i$ -esimo di misura, lo scarto  $\delta_i$  tra il valore empirico,  $y_i$ , e quello della curva di regressione,  $f(x_i)$ , vale

$$\delta_i = y_i - [m x_i + b]$$

Dobbiamo trovare i valori dei parametri ( $m$  e  $b$ ) per i quali è minima la "distanza"

$$\Phi(m, b) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (mx_i + b)]^2$$

# Regressione lineare LS (2/2)

Per trovare il minimo di  $\Phi$ , **annulliamo le due derivate prime parziali rispetto a  $m$  e  $b$** :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial m} = 0 \Rightarrow \left( m \sum x_i^2 \right) + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \Rightarrow \left( m \sum x_i \right) + nb = \sum y_i$$

dove tutte le sommatorie sono ovviamente estese per  $i$  che va da 1 fino a  $n$ .

Si è ottenuto un **sistema lineare** di due equazioni in due incognite,  $m$  e  $b$  appunto.

# Regressione lineare: calcolo di $m$ e $b$

La soluzione del sistema (che si ottiene facilmente per sostituzione) è:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum y_i - m \sum x_i}{n} = \bar{y} - m \bar{x}$$

Questa soluzione corrisponde a un **minimo** (lo si può dimostrare matematicamente facendo le derivate seconde, entrambe  $>0$ , oppure ripensando al significato della funzione “distanza”, intrinsecamente positiva e che cresce allontanandosi dai punti acquisiti...)

# Esercizio su retta di regressione (1/2)

$n(=5)$  misure di  $y=f(x)$  con punti sperimentali

$$i \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

$$x_i = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$$

$$y_i = [1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3]$$

$x_i$	$y_i$
0	1
1	2
2	2
3	2
4	3

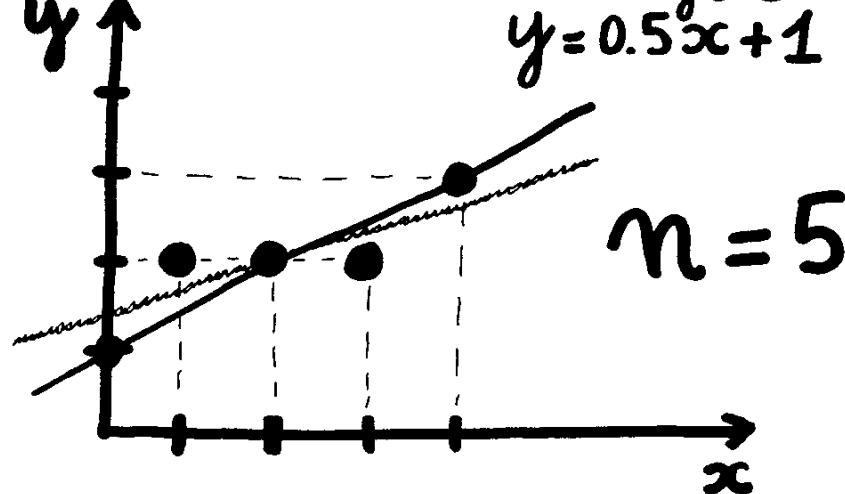
Modello lineare  $\delta_i = y_i - [m x_i + b]$

Regressione ai minimi quadrati  $\rightarrow \sum(\delta_i)^2 = \text{"min."}$

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum y_i - m \sum x_i}{n} = \bar{y} - m \bar{x}$$

# Esercizio su retta di regressione (2/2)

ESERCIZIO: retta di regressione  
 $y = 0.5x + 1$  ???



$x_i$	$y_i$
0	1
1	2
2	2
3	2
4	3

Modello:  $y = mx + b$  retta di regr.

$$m = \frac{5(0+2+4+6+12) - 10 \times 10}{5(0+1+4+9+16) - (10)^2} = \frac{20}{50} = 0.4$$

$$b = \frac{10 - 0.4 \times 10}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$$