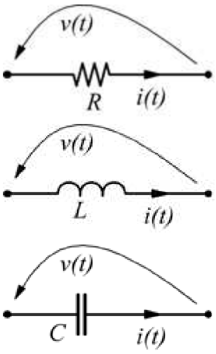
PREMESSA

Tenendo conto delle relazioni che legano fra loro i componenti elettrici passivi e le principali grandezze elettriche: tensione e corrente.



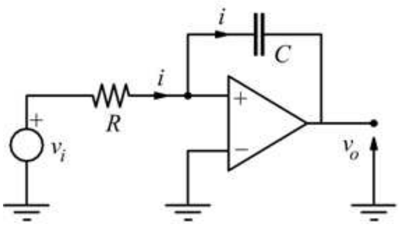
$$v(t) = R \cdot i(t)$$

$$v = L \cdot \frac{di}{dt} \longleftrightarrow i = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t v\, dt$$

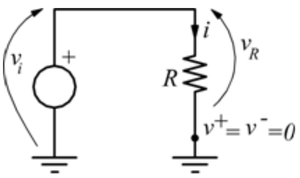
$$i = C \frac{dv}{dt} \longleftrightarrow v = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i\, dt$$

Sia la tensione v=v(t) che la corrente i=i(t) sono considerate funzioni del tempo.

INTEGRATORE IDEALE



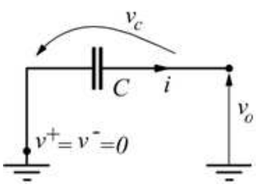
Ipotizziamo un A.O. pilotato all'ingresso invertente da un generatore di segnale con valore istantaneo v_i, attraverso la resistenza R, poi chiudiamo l'anello di reazione con un condensatore C.



Sulla resistenza R circola la corrente i

$$i = \frac{v_i}{R}$$

questo perché al morsetto invertente (-) vi sono a 0V (per il principio della massa virtuale).



questa corrente viene convogliata sull'anello di reazione e transita sul condensatore; dove risulta

$$i = C \frac{dv_c}{dt}$$

osservando la maglia di uscita risulta essere v_C= - v_O. Quindi l'equazione precedente può essere riscritta:

$$i = C \frac{d(-v_o)}{dt} \longrightarrow \frac{v_i}{R} = -C \frac{dv_o}{dt} \longrightarrow \frac{dv_o}{dt} = -\frac{v_i}{RC}$$

da cui risulta:

$$\boxed{v_o = -\frac{1}{RC} \int v_i\, dt}$$

la tensione di uscita è proporzionale all'integrale della tensione di ingresso, il segno meno implica un'inversione di fase rispetto al segnale di ingresso.

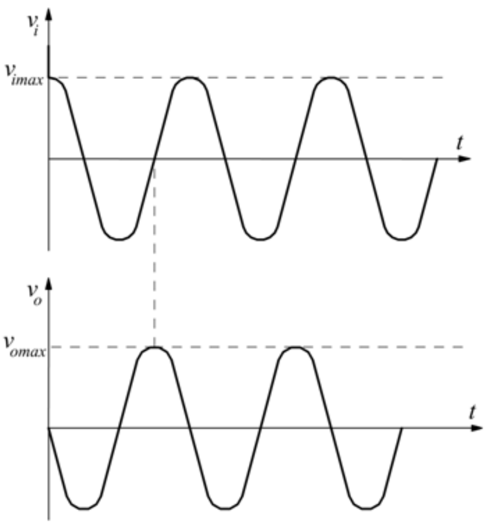
Esempio: integrazione di un segnale sinusoidale

supponiamo che all'ingesso dell'integratore ci sia la tensione $v_i = v_{i\,max} \cos \omega\, t$ notando come il circuito funzioni dome sfasatore in anticipo di 90°.

$$v_o = -\frac{1}{RC}\int v_{i\,max}\cos\omega\, t\; dt = -\frac{v_{i\,max}}{\omega\, RC}\sin\omega\, t + K$$

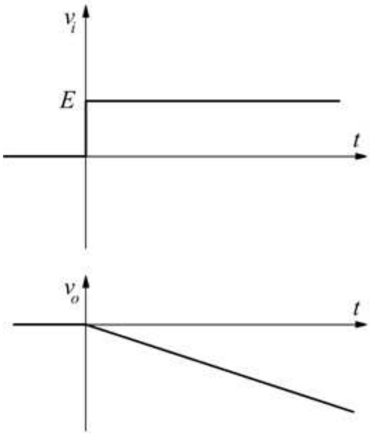
con K costante arbitraria.
Considerando inizialmente il condensatore scarico $v_o(0)=0$ K=0,perché sin(0)=0 . Quindi..

$$v_o = -\frac{v_{i\,max}}{\omega RC} sen\,\omega t = -v_{o\,max}\sin\omega\, t \quad con \quad v_{o\,max} = \frac{v_{i\,max}}{\omega RC}$$



La costante di integrazione può essere diversa se cambiano le condizioni iniziali.

Esempio: integrazione del segnale a gradino



Applicando in ingresso un segnale a gradino (positivo) v_i=E, si ottiene una rampa negativa.

$$v_o = -\frac{1}{RC}\int E\, dt = -\frac{E}{RC}t + K$$

Con K costante arbitraria
La v_o per t>0 è assimilabile ad una retta passante per l'origine con coeff.angolare negativo

$$v_o = -mt \quad \rightarrow \quad m = \frac{E}{RC}$$

considerando inizialmente il condensatore scarico $v_o(t=0)=0$ per cui $K=0$, quindi:

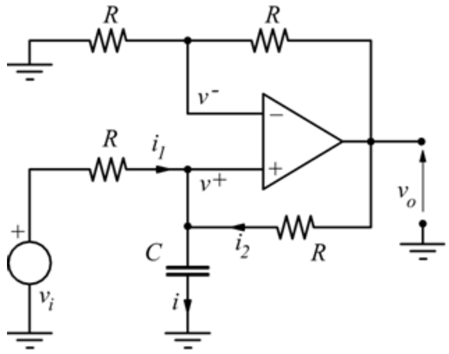
$$v_o = -\frac{E}{R_1 C}t$$

INTEGRATORE NON INVERTENTE

Per costruire un integratore non invertente si può usare uno schema come quello illustrato.

Il circuito è costituito da quattro resistenze uguali ed un condensatore; presenta sia reazione negativa che positiva.

Applicando il 1°p.cipio di Kirchoff e il metodo di equipotenzialità degli ingressi al morsetto non invertente si ha:



$$i = i_1 + i_2 = \frac{v_i - v^+}{R} + \frac{v_o - v^+}{R} = \frac{v_i + v_o - 2v^+}{R}$$ ma

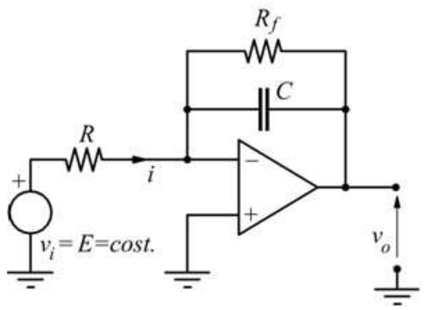
$$v^+ = v^- = \frac{Rv_o}{R+R} = \frac{v_o}{2}$$ quindi $$i = \frac{v_i}{R}$$

la tensione ai capi del condensatore è $v^+ = \frac{Q}{C}$ con Q=quantità di carica accumulata; per cui:

$$v_o = 2v^+ = \frac{2Q}{C} = \frac{2}{C} \cdot \int_0^t i\, dt = \frac{2}{RC} \cdot \int_0^t v_i\, dt$$

INTEGRATORE REALE

E' evidente che in un circuito come l'integratore ideale il rischio che l'A.O. vada in saturazione, a causa di una carica eccessiva del condensatore, in un senso o nell'altro c'è.
Una soluzione a questo inconveniente consiste nell'introdurre ai capi del condensatore stesso, una resistenza ausiliaria R_f.



$$i = i_1 + i_2 \longrightarrow \frac{v_i}{R} = -\frac{v_o}{R_f} - C\frac{dv_o}{dt}$$

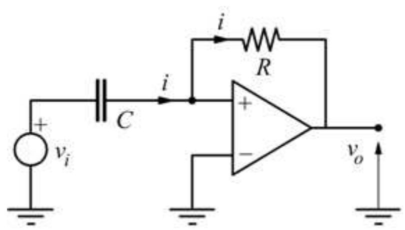
se consideriamo v_i=E=costante la precedente è una eq.differenziale a coefficienti costanti, omogenea che fornisce come soluzione:

$$v_o = -\frac{R_f}{R} E \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{con} \quad \tau = R_f C$$

Allo stesso risultato si arriverebbe applicando il metodo della trasformata di Laplace.
Per τ<<t l'andamento della v_o può essere approssimato a quello di una rampa negativa; pertanto il comportamento dell'integratore reale può essere approssimato a quello ideale.

DERIVATORE IDEALE

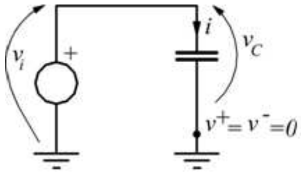
Ipotizziamo un A.O. pilotato all'ingresso invertente da un generatore di segnale con valore istantaneo v_i, in serie ad un condensatore C, poi chiudiamo l'anello di reazione con attraverso la resistenza R

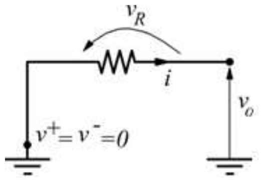


La corrente erogata dal generatore deve valere

$$i = C\frac{dv_c}{dt} = C\frac{dv_i}{dt}$$

questo perché nella maglia di ingresso è presente solo il generatore v_i e il condensatore C (v_i=v_c).





Per lo stesso motivo si osserva che sulla maglia di uscita è presente solo il segnale v_o e la c.d.t. v_R sulla resistenza; si nota che è

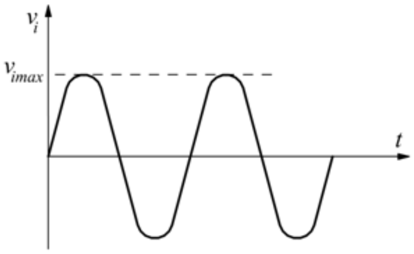
$$v_o + v_R = 0 \longrightarrow v_o = -v_R \longrightarrow v_o = -Ri$$

sostituendo la i:

$$\boxed{v_o = -RC\frac{dv_i}{dt}}$$

La relazione ottenuta dimostra che la tensione di uscita è proporzionale alla derivata della tensione in ingesso, tramite il fattore moltiplicativo RC; il segno negativo tiene conto dell'inversione di fase.

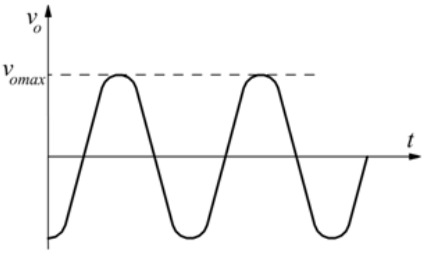
Esempio: derivazione di un segnale sinusoidale



Può essere eseguita la derivazione di un segnale sinusoidale

$$v_i = v_{i\,max} \sin \omega t$$

e si nota come il circuito funzioni dome sfasatore in ritardo di 90°.

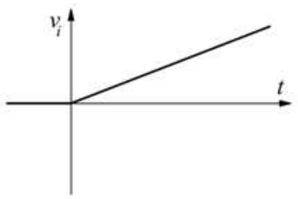


$$v_o = -RC\frac{d}{dt}(v_{i\,max} sen \omega t) = -\omega RC v_{i\,max} \cos \omega t$$

$$v_o = -v_{o\,max} \cos \omega t \qquad \text{con}$$

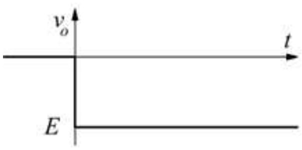
$$-\omega RC v_{i\,max} = v_{o\,max}$$

Esempio: derivazione del segnale a rampa



Applicando in ingresso un segnale a rampa

$$v_i = mt$$

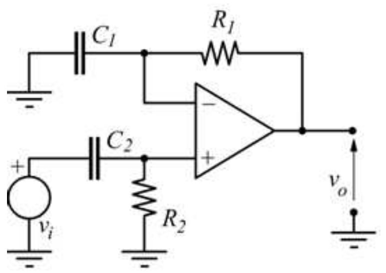


il derivatore fornisce in uscita una tensione negativa a gradino:

$$v_o = -RC\frac{d}{dt}(mt) = -mRC$$

DERIVATORE NON INVERTENTE

In questo caso può essere usato il circuito illustrato, che analizzato col metodo della trasformata, ammettendo l'uguaglianza fra le due costanti di tempo $R_1C_1=R_2C_2$.



$$V_o(s)=\left(1+\frac{R_1}{\frac{1}{sC_1}}\right)\cdot V^+(s)=(1+sR_1C_1)\cdot V^+(s)$$

poi si nota

$$V^+(s)=\left(\frac{R_2}{R_2+\frac{1}{sC_2}}\right)\cdot V_i(s)=\left(\frac{sR_2C_2}{1+sR_2C_2}\right)\cdot V_i(s)$$

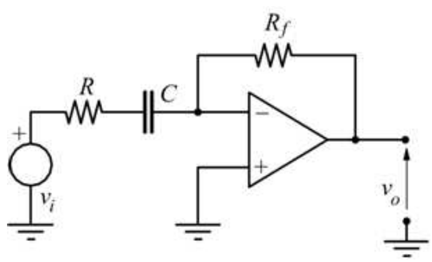
che sostituita nella precedente

$$V_o(s)==(1+sR_1C_1)\cdot\left(\frac{sR_2C_2}{1+sR_2C_2}\right)\cdot V_i(s)=s\ R_2C_2\cdot V_i(s)$$

antitrasformando si ottiene la $v_o(t)$

$$v_o(t)=R_2C_2\frac{dv_i}{dt}$$

DERIVATORE REALE

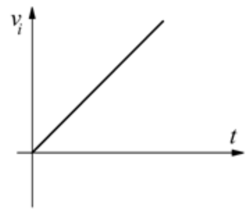


Il maggior inconveniente di un derivatore ideale è la sensibilità ai disturbi alle alte frequenze, per evitare questo problema si utilizza normalmente il circuito illustrato. Trattandosi di un A.O. in config. invertente:

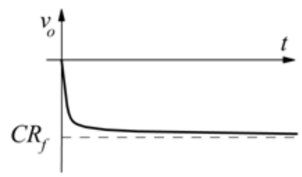
$$V_o(s)=-\frac{R_f}{R+\frac{1}{sC}}\cdot V_i(s)=-\frac{sCR_f}{1+sCR}\cdot V_i(s)$$

se ipotizziamo che la v_i sia una rampa $\quad v_i(t)=t \longrightarrow V_i(s)=L[t]=\frac{1}{s^2}$

si avrebbe $\quad V_o(s)=-\frac{sCR_f}{1+sCR}\cdot\frac{1}{s^2}=-\frac{R_f}{R}\cdot\frac{1}{s\cdot(s+1/RC)}\quad$ antitrasformando



$$v_o(t)=-\frac{R_f}{R}\cdot RC(1-e^{-t/RC})=R_fC(1-e^{-t/RC})$$



se CR_f =1 e il prodotto RC è sufficientemente piccolo l'uscita può essere assimilata ad un gradino di tensione.