CIRCUITI E MISURE ELETTRONICHE — Lunedì 16 luglio 2018

Prof. Cesare Svelto — **AA 2017/2018**

Tempo a disposizione 2h — **Aula N.0.2 ore 08.30**

COGNOME *(stampatello)*: ________________________________ **Nome** *(stampatello)*: ________________

Laurea-anno: **FIS-2°** **Matr. e firma** __ __ __ __ __ __ _________________________

Punteggi: pre-compito=6 Es.1=6 Es.2=7 Es.3=6 Es.4=7 TOT=32

N.B. Occorre saper svolgere tutti gli esercizi per poter consegnare il compito (con un esercizio mancante o sostanzialmente non svolto non si deve consegnare). **I compiti consegnati e corretti che evidenzieranno un risultato gravemente insufficiente, o comunque gravi lacune nella preparazione, comporteranno il salto dell'appello successivo**. Occorre motivare tutte le risposte date e indicare i passaggi risolutivi.

SOLUZIONI

(35 min) **Esercizio 1**

(svolgere su questo foglio e sul retro)

1) La misura dell'altezza h di una barra cilindrica in ferro viene ricavata in tre modi indipendenti:

A. si eseguono n=6 misure ripetute ottenendo i seguenti valori di altezza tutti espressi in millimetri: h_i=185.0, 183.0, 181,0, 181.0, 177.0, 175.0;

B. l'altezza è letta con un triangolatore laser, con incertezza estesa di 3 mm per un livello di confidenza del 95 %. Si legge un valore di 179.8 mm;

C. si misura il diametro del cilindro con un calibro centesimale (risoluzione 1/100 mm) ottenendo D=40.00 mm. Da internet si conosce la densità del ferro ρ=7.88 kg/dm^3 con incertezza dello 0.5 %. Con una bilancia digitale ritenuta ideale, si misura la massa della barra ottenendo m=1485.345 g dove l'ultima cifra è la risoluzione del *display* numerico della bilancia.

1A) Si ricavi la misura dell'altezza h_A indicando l'incertezza in notazione compatta a due cifre significative.

1B) Si ricavi la misura dell'altezza h_B indicando l'incertezza in notazione compatta a due cifre significative. Si ricavi anche l'incertezza relativa, esprimendola in percentuale, per questa misura.

1C) Si ricavi la misura dell'altezza h_C indicando l'incertezza in notazione compatta a due cifre significative.

1D) Si discuta la compatibilità tra le 3 misure, individuando con precisione i diversi fattori di copertura minimi ($k_{\alpha\text{-}\beta,MIN}$) per avere compatibilità tra le diverse coppie di misure, e si commenti il risultato ottenuto.

1E) Si ricavi la miglior stima dell'altezza h della barra e la sua incertezza standard, assoluta e relativa.

1F) Si valuti l'incertezza, assoluta e relativa, dell'incertezza sulla prima misura.

[2]**1A)** Il valor medio delle misure “ripetute” è $h_A = \bar{h} = \bar{h}_i = \sum_{i=1}^{n} h_i$ = 180.333… mm

con una deviazione standard campionaria $s(h_A) = s(h_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(h_i - \bar{h}_i\right)^2}$ = 3.724 mm

e una incertezza di categoria A $u(h_A) = u_A(h_A) = \frac{s(h_C)}{\sqrt{n}}$ =1.5 mm

La prima misura è dunque $\boldsymbol{h_A}$=**180.3(15) mm**.

[2]**1B)** Per un livello di confidenza del 95%, assumendo una PDF Gaussiana, l’intervallo di incertezza estesa specificato nel testo corrisponde a un fattore di copertura k=2. Pertanto l’incertezza standard della misura è $u(h_B)=U(h_B)/k$=1.5 mm.

La seconda misura è dunque $\boldsymbol{h_B}$=**179.8(15) mm**.

L’incertezza relativa, espressa in percentuale, è $\boldsymbol{u_r(h_B)}=u(h_B)/h_B$=**0.83 %**.

[2]**1C)** L’incertezza sul diametro della barra, misurato con risoluzione ΔD=0.01 mm, è $u(D)=\Delta D/\sqrt{12}$ =2.9 µm con una incertezza relativa $u_r(D)=u(D)/D=7.2\times10^{-5}$=72 ppm. La superficie di base del cilindro di ferro è $S=\pi D^2/4$=1256.65 mm^2 con incertezza relativa $u_r(s)=2u_r(D)=1.4\times10^{-4}$. La massa m=1485.345 g è misurata con risoluzione Δm=0.001 g e dunque con incertezza $u(m)=\Delta m/\sqrt{12}$ =0.29 mg da cui una incertezza relativa $u_r(m)=u(m)/m=1.9\times10^{-7}\cong0.2$ ppm (estremamente piccola!).

Dall’equazione che esprime la massa della sbarra conoscendo il suo volume e la densità del materiale, $m=\rho\cdot V=\rho\cdot S\cdot h$, è possibile ricavare indirettamente l’altezza $h=m/(\rho\cdot S)$=150.00 mm. Essendo l’equazione della misura una produttoria semplice degli ingressi, e con esponenti tutti unitari (±1), l’incertezza relativa dell’uscita si ricava dalla semplice somma delle incertezze relative degli ingressi: $u_r(h)=\sqrt{u_r^2(m)+u_r^2(\rho)+u_r^2(S)}\cong u_r(\rho)=5\times10^{-3}$ essendo $u_r(\rho)$ decisamente superiore alle altre due incertezze relative. L’incertezza assoluta dell’altezza misurata indirettamente è allora $u(h)=u_r(h)\cdot h$=0.75 mm.

La terza misura è dunque $\boldsymbol{h_C}$=**150.00(75) mm** (questa misura è piuttosto “lontana” dalle altre).

[2]**1D)** I tre risultati di misura, espressi in notazione compatta, sono:

$\boldsymbol{h_A}$**=180.3(15) mm** $\boldsymbol{h_B}$**=179.8(15) mm** $\boldsymbol{h_C}$**=150.00(75) mm**

Si può osservare che **il terzo valore di misura risulta piuttosto differente** (“lontano” in termini delle incertezze standard del caso) **rispetto al primo e al secondo**. La terza misura è stata ottenuta attraverso una misura indiretta che necessita la conoscenza della densità del materiale con incertezza di 5×10^{-3}, cosa non semplice, e, cosa ancor più improbabile, conoscendo la massa con incertezza di circa 0.2 . **Nella terza misura ci deve essere qualche errore che la rende probabilmente non compatibile con le misurazioni precedenti.** Siamo in presenza di 3 misure differenti della medesima grandezza fisica, che hanno fornito valori diversi e con incertezze differenti. **Si avrà compatibilità tra coppie di misure indipendenti se la distanza tra i due valori di misura è inferiore alla radice quadrata della somma quadratica delle due incertezze, eventualmente estesa per un fattore di copertura $\boldsymbol{k}$**: $\left|M_\alpha - M_\beta\right| \le k\sqrt{u^2(M_\alpha)+u^2(M_\beta)}$, con valori possibili/plausibili k=1, 2, o 3. Naturalmente a valori k inferiori corrispondono compatibilità più forti.

Nel caso considerato si ottiene compatibilità per fattori di copertura minimi $\boldsymbol{k_{AB}\cong}$**0.24**, $k_{AC}\cong18$, $k_{BC}\cong18$. **Sono compatibili tra loro le misure $\boldsymbol{h_A}$ e $\boldsymbol{h_B}$, con $\boldsymbol{k}$=1, mentre risulta incompatibile con le altre la misura $\boldsymbol{h_C}$.**

[1.5] **1E)** Ricorrendo al criterio della media pesata tra le misure compatibili, la miglior stima per il valore della misura e la sua incertezza tipo sono:

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{h}_{\mathbf{MP}}=\frac{\dfrac{h_A}{u^2(h_A)}+\dfrac{h_B}{u^2(h_B)}}{\dfrac{1}{u^2(h_A)}+\dfrac{1}{u^2(h_B)}}=\mathbf{180.050\ mm} \quad ; \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{h})=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{h}_{\mathbf{MP}})=\sqrt{\frac{1}{\dfrac{1}{u^2(h_A)}+\dfrac{1}{u^2(h_B)}}}=\mathbf{1.06\ mm\cong 1.1\ mm}$$

La misura è quindi $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{h}_{\mathbf{MP}}=$**180.1(11) mm**, che risulta esattamente nel mezzo tra i valori di v_A e v_B avendo le due misure la stessa incertezza. Così pure, essendo le due incertezze uguali, si ottiene $h(h_{MP})=u(h_{A/B})/\sqrt{2}=1.1$ mm, naturalmente inferiore ad entrambe le incertezze di partenza. In questo caso di due incertezze uguali per misure coinvolte nella media pesata, si è guadagnanto un fattore circa 0.7 come riduzione dell'incertezza. A questi due risultati si può giungere immediatamente senza svolgere i conti di cui sopra. Oppure si possono usare questi valori "attesi", e ricavati rapidamente con ragionamento teorico, per verificare l'esattezza dei conti svolti.
L'incertezza relativa della media pesata è $\boldsymbol{u}_{\mathbf{r}}(\boldsymbol{h}_{\mathbf{MP}})=u(h_{MP})/h_{MP}=$**0.6 %**.

[1.5] **1F)** Ricordiamo che nel caso delle misure ripetute e per la corrispondente stima di incertezza di categoria A, l'incertezza dell'incertezza è legata al numero di gradi di libertà, $\nu=n-1$, come $u_r[u]=1/\sqrt{2\nu}$.
Con $n=6$ misure ripetute, si può quindi stimare un'incertezza relativa dell'incertezza $\boldsymbol{u}_{\mathbf{r}}[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{h}_{\mathbf{A}})]=1/\sqrt{2\cdot 5}=1/\sqrt{10}\cong$**32 %** e un'incertezza assoluta $\boldsymbol{u}[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{h}_{\mathbf{A}})]=u(h_A)\times u_r[u(h_A)]=$**0.47 mm**.
Naturalmente, tale incertezza dell'incertezza è piuttosto grossolana perché il numero di misure ripetute (e gradi di libertà) è basso: in queste condizioni sarebbe più opportuno esprimere anche l'incertezza tipo $u(h_A)$ con una sola cifra significativa.

TOT = 11 punti su 10 ma va bene perché ESE lungo e completo.

(30 min) **Esercizio 2**

(svolgere su questo foglio e sul retro)

2) Un moderno oscilloscopio digitale multifunzionale, dotato di un pannello frontale standard e impostazioni usuali (amplificazioni a passi predefiniti 1-2-5-10, *trigger*, base dei tempi, *etc.*), viene realizzato mediante una scheda DAQ. La scheda ha 2 ingressi, dinamica fissa ±5 V (niente guadagni), 14 bit, 100 MSa/s, 2 canali, banda analogica 20 MHz. Con questi strumenti numerici si vogliono misurare, e rappresentare sulla schermata oscillografica, i seguenti due segnali che vengono accoppiati in DC:

- V_1: tensione di rete attenuata di 50 dB;
- V_2: onda quadra con escursione valle-picco 0-40 mV e frequenza 10 Hz.

2A) Se l'ADC impiegato è un approssimazioni successive, si calcoli il tempo T_{APPR} che occorre per decidere il valore del singolo bit meno significativo.

A piena dinamica d'ingresso, quanto vale la risoluzione dimensionale e l'incertezza di quantizzazione?

Se il rumore aggiunto della DAQ *board* è V_N=4.85 mV, si calcoli il numero di bit equivalenti?

2B) Individuare, in modo espressamente motivato/ricavato, valori adatti per le amplificazioni verticali (V/DIV) dell'oscilloscopio avendo prima scelto i *vertical level* dei due canali.

2C) Con le medesime amplificazioni verticali scelte, quanto vale la risoluzione dimensionale e l'incertezza di quantizzazione sul canale di misura dell'oscilloscopio che rappresenta il segnale V_1?

2D) Scegliere il *trigger* (sorgente, accoppiamento, livello, pendenza, posizione a schermo, *etc.*), che può essere impostato su un solo canale, e la amplificazione orizzontale (s/DIV).

2E) Si calcolino le potenze, sia in watt che in dBm, dei due segnali misurati su un carico R_L=50 Ω.

2F) Si disegni lo schema a blocchi dell'ADC ad approssimazioni successive e se ne illustri brevemente il principio di funzionamento.

[3]**2A)** Il tempo di campionamento è il reciproco della frequenza di acquisizione: $T_{sample}=1/f_{sample}=10$ ns. In un ADC ad approssimazioni successive con n bit, il tempo di ogni singola approssimazione (e decisione di un bit) è $T_{APPR}=T_{sample}/n=(10\text{ ns})/14\cong714$ ps**~0.7 ns**.

La DAQ ha dinamica $D=\pm5$ V=10 V e una risoluzione dimensionale $\Delta V=D/2^n=(10\text{ V})/16348=$**610 μV**. L'incertezza di quantizzazione è $u_q=\sigma_q=\Delta V/\sqrt{12}\cong$**0.18 mV~0.2 mV** con varianza $\sigma^2_q=N_q=3.7\times10^{-8}$ V^2.

La varianza del rumore aggiunto è $\sigma^2_N=N_{agg}=V^2_N\cong2.35\times10^{-5}$ V^2. Il numero di bit equivalenti è infine:

$n_e = n-0.5\cdot\log_2(1+N_{agg}/N_q) = n-0.5\cdot\log_2(636) = n-4.7 \cong$ **9.3 bit** (si "perdono" circa 5 bit).

[1.5]**2B)** $V_{1,pp}=2[(220\text{ V})\cdot\sqrt{2}]\cdot10^{-2.5}\cong(622\text{ V})\cdot3.16\times10^{-3}\cong1.97$ V e $A_{Y1}=V_{1,pp}/(8\text{ DIV})=0.246$ V/DIV→**0.5 V/DIV** con un $VerticalLevel_1$=**0 V** essendo l'onda a media nulla e volendola centrare verticalmente sullo schermo.

$V_{2,pp}=40$ mV e dunque $A_{Y2}=V_{2,PP}/(8\text{ DIV})=5\times10^{-3}$ V/DIV→**5 mV/DIV** con un $VerticalLevel_2$=**20 mV** che è il valore medio dell'onda, sempre volendo centrare sulla scala verticale il segnale visualizzato.

[1]**2C)** Avendo scelto A_{Y1}=**0.5 V/DIV** per il canale che rappresenta V_1, avremo una dinamica verticale (su 8 DIV) pari a 4 V e dunque una risoluzione dimensionale $\Delta V=D/2^n=(4\text{ V})/256\cong$**16 mV** (considerando che l'oscilloscopio digitale ha n=8 bit e 2^n=256 livelli di quantizzazione in ampiezza). L'incertezza di quantizzazione è $u_q=\sigma_q=\Delta V/\sqrt{12}\cong$**5 mV**. Se invece si suppone di potere utilizzare tutti i 14 bit di risoluzione dell'ADC, allora $\Delta V=D/2^n=(4\text{ V})/16348\cong$**244 μV** e $u_q=\sigma_q=\Delta V/\sqrt{12}\cong$**70 μV**.

[1.5]**2D)** Conviene prelevare il *trigger* sul segnale V_2 che ha periodo (T_2=100 ms) maggiore e multiplo del periodo del segnale V_1 (T_1=20 ms), così si è sicuri di avere un'immagine stabile sullo schermo: dunque ***TR**_{source}***=V_2**. Si vedranno così 5 periodi della tensione di rete attenuata (V_1) e 1 periodo dell'onda sinusoidale a 10 Hz (V_2), sull'unica scala orizzontale dell'oscilloscopio che naturalmente conviene impostare con amplificazione orizzontale **A_X=10 ms/DIV**. Possiamo scegliere accoppiamento e livello del *trigger* come **$TR_{coupling}$=DC** e **TR_{level}=10 mV** con ad esempio **TR_{slope}=+** (ma anche TR_{slope}=- va altrettanto bene) oppure $TR_{coupling}$=AC e TR_{level}=0 V con ad esempio TR_{slope}=+ (ma anche TR_{slope}=- va altrettanto bene). Scegliamo infine **$TR_{position}$** ad esempio nel **punto più a sinistra dello schermo** (*pre-trigger* 0 %).

[2]**2E)** Campionando su due canali la DAQ *board* può campionare sino a 50 MSa/s, il che è ben più che adeguato per le sinusoidi a bassa frequenza sotto misura. Le potenze elettriche delle due righe spettrali sono:

$$P_1=\frac{1}{2}\frac{V^2_{1,p}}{R_L}=\frac{1}{8}\frac{V^2_{1,pp}}{R_L}=\mathbf{9.7\times10^{-3}\ W}=9.7\text{ mW}=+9.9\text{ dBm}\sim\mathbf{+10\ dBm}$$

$$P_2=\frac{1}{2}\frac{V^2_{2,p}}{R_L}=\mathbf{16\times10^{-6}\ W}=16\ \mu\text{W}=\mathbf{-18\ dBm}$$

P_2 è calcolata come ½ periodo (piena potenza V^2/R) ON e ½ periodo OFF (zero potenza)

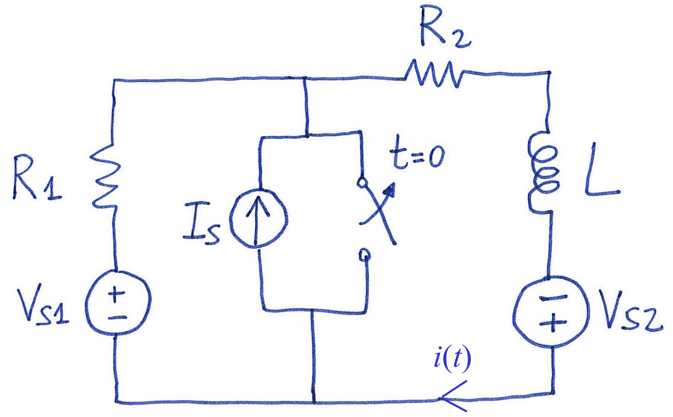
[2]**2F)** Per la risposta di Teoria, si vedano **Libro, Lucidi, e Appunti** del Corso.

TOT = 11 punti su 10 ma va bene perché ESE lungo e completo.

(25 min) **Esercizio 3**

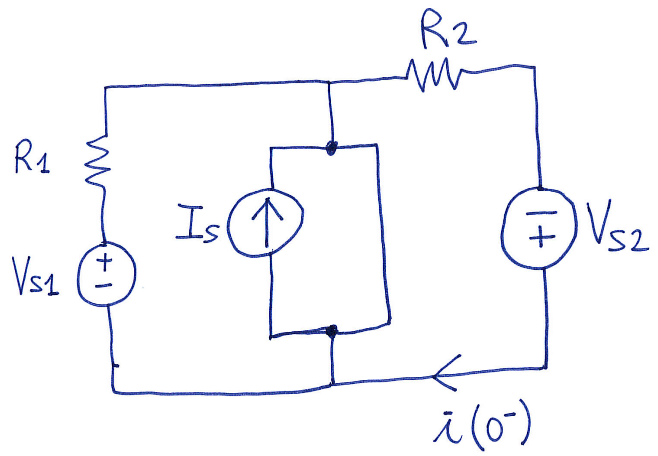
(svolgere su questo foglio e sul retro)

3) Il circuito elettrico mostrato in figura si trova in regime stazionario per $t<0$ con l'interruttorre chiuso. Al tempo $t=0$ l'interruttore viene aperto. I parametri del circuito sono: $V_{S1}=10$ V, $I_S=5$ A, $V_{S2}=15$ V, $R_1=5\ \Omega$, $R_2=3\ \Omega$, $L=10$ mH.



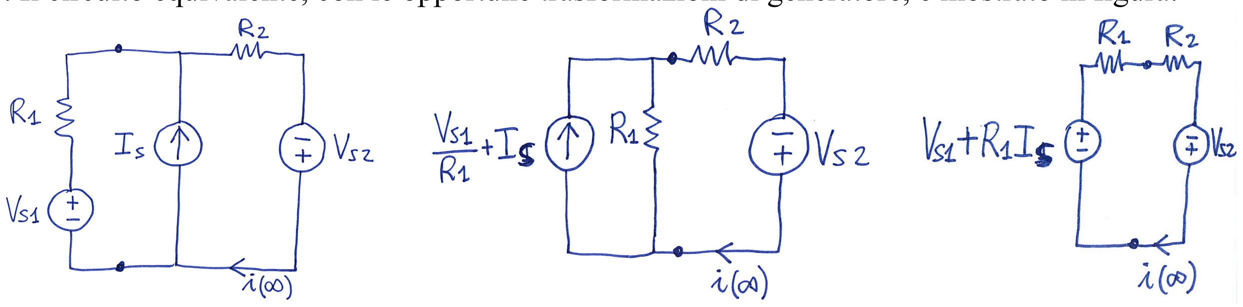
3A) Illustrando e commentando i passaggi analitici svolti, si ricavi l'espressione numerica quantitativa della corrente $i(t)$. In particolare, si ricavino espressamente il valore iniziale e valore finale della corrente e la costante di tempo del circuito.
3B) Si rappresenti la corrente $i(t)$ in funzione del tempo in un diagramma cartesiano quantitativo.

[7]**3A)** Il circuito per $t<0$ e dunque anche in $t=0^-$ è mostrato in figura (l'induttore a regime è cortocircuitato).



L'interruttore chiuso, cortocircuitato, assorbe tutta la corrente del generatore di corrente, come pure la corrente erogata dai generatori di tensione, e di fatto disaccoppia il generatore di tensione di sinistra da quello di destra. Applicando la legge di Ohm al resistore R_2, la corrente che lo attraversa è $\boldsymbol{i(0^-)}=V_{S2}/R_2\boldsymbol{=5\ \mathrm{A}}$ ed è pari al **valore iniziale** della corrente, dato che $\boldsymbol{i(0^+)=i(0)=i(0^-)}$ **essendo la corrente variabile di stato per l'induttore**.

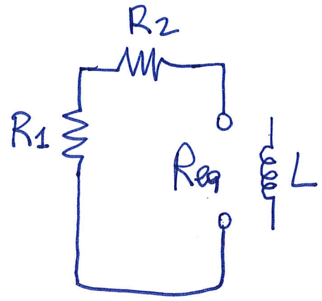
Ricaviamo adesso il **valore finale**, o di regime, per la corrente i. Per fare ciò cortocircuitiamo ancora l'induttore (corto circuito in regime costante) e calcoliamo il valore della corrente $i(\infty)$ nel ramo in basso del circuito. Il circuito equivalente, con le opportune trasformazioni di generatore, è mostrato in figura:



Dapprima il generatore di tensione V_{S1} con in serie R_1 è stato trasformato in un generatore di corrente V_{S1}/R_1 con in parallelo la resistenza R_1. Tale generatore, posto in parallelo a I_S, consente di sommare le due correnti ottenendo $I_{TOT}=V_{S1}/R_1+I_S$. Di nuovo trasformiamo il generatore di corrente I_{TOT} con in parallelo R_1 in un generatore equivalente di tensione $V_{TOT}=R_1 I_{TOT}=R_1\cdot(V_{S1}/R_1+I_S)=V_{S1}+R_1 I_S$ con in serie una resistenza R_1. A questo punto la corrente cercata è

$$\boldsymbol{i(\infty)}=\frac{V_{S1}+R_1 I_S+V_{S2}}{R_1+R_2}=\frac{10+5\times 5+15}{5+3}=\frac{50}{8}\mathbf{=6.25\ A}$$

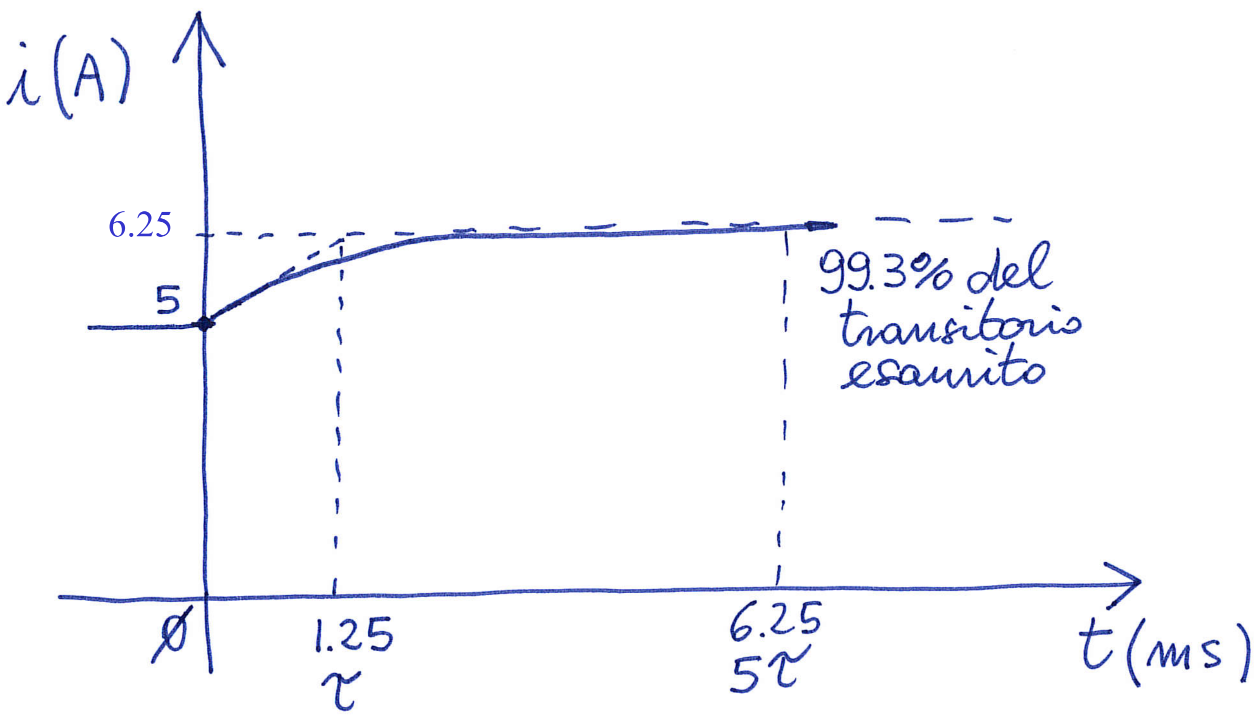
Ricaviamo adesso il valore della **costante di tempo τ** del circuito. Per fare ciò dobbiamo ricavare la resistenza equivalente R_{eq} vista ai capi dell'induttore L. Cortocircuitiamo i generatori di tensione (corto circuito) e apriamo il generatore di corrente (circuito aperto) e apriamo anche l'induttore (circuito aperto) per valutare la resistenza vista ai suoi capi. Il circuito equivalente ottenuto è mostrato in figura:



$R_{eq}=R_1+R_2=8\ \Omega$ e $\boldsymbol{\tau=L/R_{eq}=1.25\ ms}$.

L'espressione analitica e poi numerica-quantitativa della **corrente $i(t)$** è la seguente:
$\boldsymbol{i(t) = [\ i(0) - i(\infty)]\cdot e^{-t/\tau} + i(\infty) = [\ -1.25e^{-800t} + 6.25]\ A}$

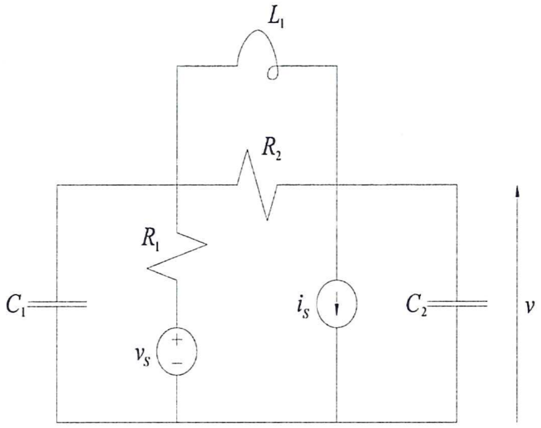
[3]3B) Il diagramma cartesiano quantitativo (con indicazione delle grandezze rappresentate sugli assi e delle unità di misura e scale adottate) della corrente i in funzione del tempo t è mostrato in figura:



(30 min) **Esercizio 4**

(svolgere su questo foglio e sul retro)

4) E' dato il circuito in figura, operante in regime alternato sinusoidale alla frequenza f=50 Hz. I parametri del circuito sono: $v_S=\sqrt{2}\cdot 18\cos(2\pi ft)$ V, $i_S=\sqrt{2}\cdot 5\cos(2\pi ft-\pi/4)$ A, R_1=8 Ω, R_2=10 Ω, L_1=50 mH, C_1=300 μF, C_2=100 μF. Per i calcoli con i fasori si utilizzino i valori efficaci delle tensioni e correnti di interesse.



4A) Si calcoli, mostrando tutti i passaggi e indicando i ragionamenti svolti, l'equivalente di Norton della rete vista ai capi del condensatore C_2.

4B) Si determini l'andameto nel tempo della tensione v ai capi del condensatore C_2 e se ne disegni il grafico quantitativo per almeno un periodo a partire da t=0.

[7]**4A)** Cominciamo col calcolare le grandezze fasoriali per le tensioni e le correnti (utilizzando come richiesto nel testo i valori efficaci di queste grandezze), e anche i valori delle impedenze complesse:

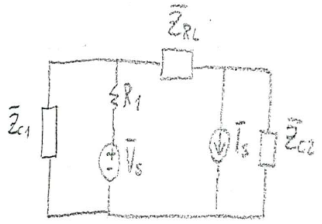
$\boldsymbol{V}_S$=18 V

$\boldsymbol{I}_S=5e^{j\pi/4}$ A

$$Z_{L1R2}=\frac{j\omega L_1 R_2}{j\omega L_1+R_2}=(7.116+j4.530)\ \Omega$$

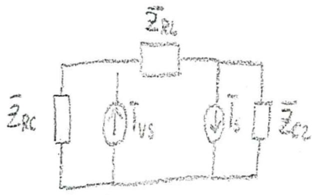
$$Z_{C1}=\frac{1}{j\omega C_1}=-j10.61\ \Omega$$

$$Z_{C2}=\frac{1}{j\omega C_2}=-j31.83\ \Omega$$



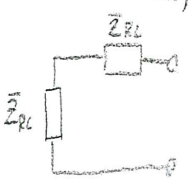
TRASFORMAZIONE SERIE-PARALLELO

$\bar I_{VS}=\frac{\bar V_S}{R_1}=2,25A$ $\bar Z_{RC}=\frac{R_1\bar Z_{C1}}{R_1+\bar Z_{C1}}=(5,100-j3,846)\Omega$



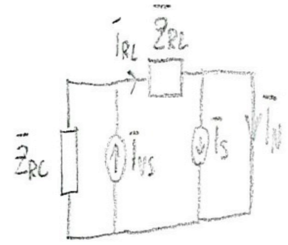
Circuito equivalente nel dominio di Steinmetz (fasori)

CALCOLO $\bar Z_N$, SPEGNERE I GENERATORI



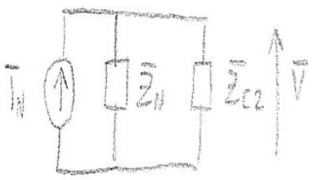
$\bar Z_N=\bar Z_{RL}+\bar Z_{RC}=(12,22+j0,6845)\Omega$

CALCOLO $\bar{I}_N$



$$\bar{I}_{RL} = \bar{I}_{VS} \cdot \frac{\bar{Z}_{RC}}{\bar{Z}_{RL}+\bar{Z}_{RC}} = (0,8969 - j0,7585)\ A$$

$$\bar{I}_N = \bar{I}_{RL} - \bar{I}_S = (-2,639 + j2,777)\ A$$



Circuito equivalente
di Norton

[3]4B) La tensione ***V*** cercata è il prodotto della corrente di Norton per il parallelo delle impedenze Z_N e Z_{C2}:

$$\bar{V} = \bar{I}_N \frac{\bar{Z}_N \bar{Z}_{C2}}{\bar{Z}_N + \bar{Z}_{C2}} = (-19,08 + j40,31)\ V$$

Quindi ricaviamo modulo e fase del fasore della tensione:

$$|\boldsymbol{V}| = V = \sqrt{[\mathrm{Re}(\boldsymbol{V})]^2 + [\mathrm{Im}(\boldsymbol{V})]^2} = \sqrt{(-19.08)^2 + (40.31)^2} = 44.59\ \mathrm{V}$$

$$\angle \boldsymbol{V} = \theta_v = \arctan\left[\frac{\mathrm{Im}(\boldsymbol{V})}{\mathrm{Re}(\boldsymbol{V})}\right] + \pi = \arctan\left(\frac{40.31}{-19.08}\right) + \pi \cong (-1.13 + 3.14)\ \mathrm{rad} \cong 2\ \mathrm{rad} \quad (\cong 115\ °)$$

ed infine l'**andamento della tensione nel tempo**:

$v(t) = \sqrt{2}\, V\cos(\omega t + \theta_v) = \sqrt{2}\, 44.59\cos(100\pi t + 2)$ V = $\mathbf{63.06\cos(100\pi t + 2)}$ **V** = $\mathbf{63.06\cos(100\pi t + 115°)}$ **V**

Il grafico quantitativo della tensione nel tempo è mostrato in figura: