Concetti base di Reti Elettriche

A cura di Alessandro Niccolai

A.A. 2019/2020

Ultimo aggiornamento: 20 gennaio 2020

A.1 • Legge di Kirchhoff delle correnti

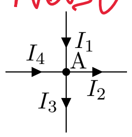
1ª

Delle tensioni 2ª

Esercizio A.1.1

Data la porzione di rete in figura, calcolare la corrente I_4.

@ Nodo $\sum i_k = 0$



$\sum i_{entranti} = \sum i_{uscenti}$

Dati:
$I_1 = 5\,\text{A}$
$I_2 = 4\,\text{A}$
$I_3 = 3\,\text{A}$

Risultati:
$I_4 = 2\,\text{A}$

Soluzione:

$+I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0$

$I_4 = I_2 + I_3 - I_1 = 4 + 3 - 5 = 2A$

La porzione di rete racchiude un solo nodo, nel quale convergono 4 correnti di cui tre note, quindi è possibile trovare l'incognita direttamente applicando una KCL.
Prendendo positive le correnti entranti:

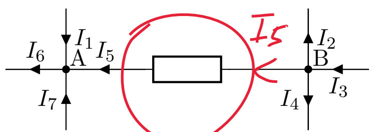
$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 = 0 \tag{1}$$

da cui:

$$I_4 = I_2 + I_3 - I_1 = 2\,\text{A} \tag{2}$$

Esercizio A.1.2

Data la porzione di rete in figura, calcolare le correnti I_4 e I_5.



$I_5 = -3A$

Dati:
$I_1 = 4\,\text{A}$
$I_2 = 10\,\text{A}$
$I_3 = 6\,\text{A}$
$I_6 = 5\,\text{A}$
$I_7 = 4\,\text{A}$

Risultati:
$I_4 = -1\,\text{A}$
$I_5 = -3\,\text{A}$

$I_5 + 4 + 4 - 5 = 0$

Nodo A $I_5 + I_1 + I_7 - I_6 = 0$

$-1A = I_4$

Soluzione:

Nodo B $I_3 - I_4 - I_5 - I_2 = 0 \rightarrow 6 - I_4 + 3 - 10 = 0$

In questa porzione di rete ci sono due nodi e due incognite. E' possibile scrivere tre KCL non indipendenti. Di queste tre equazioni, l'equazione al nodo A contiene solo un'incognita, l'equazione al nodo B ne contiene due e l'equazione al supernodo A-B ne contiene una. La prima e l'ultima equazioni sono

equivalenti in quanto entrambe permenttono di individuare un'incognita con una equazione. Per la soluzione di questo esercizio si e' scelto di usare l'equazione al nodo A e quella al nodo B.
Equazione al nodo A:

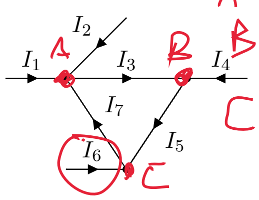
$$I_5 = I_6 - I_1 - I_7 = -3\,\text{A} \tag{3}$$

Equazione al nodo B:

$$I_4 = I_3 - I_2 - I_5 = -1\,\text{A} \tag{4}$$

Esercizio A.1.3

Data la porzione di rete in figura, calcolare la corrente I_6.



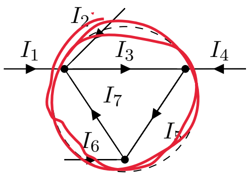
$A: I_1+I_2-I_3+I_7=0$
$B: I_3+I_4=I_5$
$C: I_5+I_6=I_7$
$I_6=I_7-I_5=18-2=-16A$

Dati:
$I_1 = 3\,\text{A}$
$I_2 = 5\,\text{A}$
$I_4 = 8\,\text{A}$
$I_7 = 2\,\text{A}$

Risultati:
$I_6 = -16\,\text{A}$

Soluzione:

In questa porzione di rete ci sono parecchie correnti incognite. Il modo piu' veloce per risolverlo consiste nell'analizzare i possibili nodi a cui scrivere una KCL ed usare quello con meno incognite, preferibilmente se l'unica incognita presente e' la richiesta dell'esercizio.



$I_1+I_2+I_4+I_6=0$
$I_6=-(I_1+I_2+I_4)=-(3+5+8)=$
$=-16A$

Equazione al supernodo A-B-C:

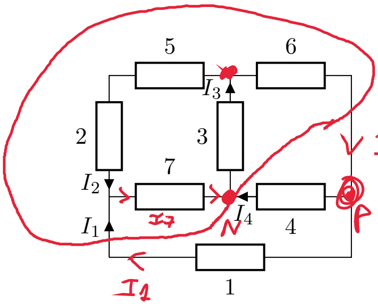
$$I_6 = -I_4 - I_1 - I_2 = -16\,\text{A} \tag{5}$$

Esercizio A.1.4

$P: I_6-I_4-I_1=0$

Data la rete in figura, calcolare la corrente I_4.

$I_4=I_6-I_1=-1-5=$
$=-6A$
$I_2+I_4-I_0=\emptyset$
$I_3=I_7+I_6$
$I_6=I_3-I_2=3-4=$
$=-1A$



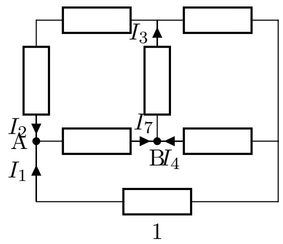
$I_7=I_1+I_2=9A$
$I_4+I_7-I_3=0$
$I_4=I_3-I_7=3-9=-6A$

Dati:
$I_1 = 5\,\text{A}$
$I_2 = 4\,\text{A}$
$I_3 = 3\,\text{A}$

Risultati:
$I_4 = -6\,\text{A}$

Soluzione:

Questo esercizio si può risolvere con due equazioni di Krichhoff ai nodi oppure una ad una apposita superficie chiusa.
Nel primo caso:



Equazione al nodo A:

$$I_7 = I_1 + I_2 = 9\,\mathrm{A} \tag{6}$$

Equazione al nodo B:

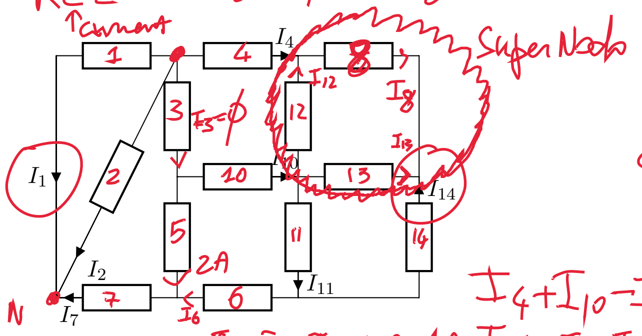
$$I_4 = I_3 - I_7 = -6\,\mathrm{A} \tag{7}$$

Esercizio A.1.5

$I_{14} = I_{12} - I_6 = 2 - 1 = 1A$

Data la rete in figura, calcolare le correnti I_1 ed I_{14}.

KCL $I_1 + I_2 + I_7 = 0 \Rightarrow I_1 = -I_2 - I_7 = -4 - 3 = -7A$



Dati:
$I_2 = 4\,\mathrm{A}$
$I_4 = 3\,\mathrm{A}$
$I_7 = 3\,\mathrm{A}$
$I_{10} = -2\,\mathrm{A}$
$I_{11} = 2\,\mathrm{A}$

Risultati:
$I_1 = -7\,\mathrm{A}$
$I_{14} = 1\,\mathrm{A}$

$I_4 + I_{10} - I_{11} + I_{14} = 0$

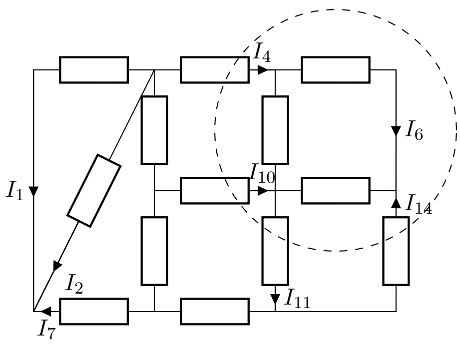
$I_6 = I_7 - I_5 = 3 - 2 = 1A \quad I_{14} = I_{11} - I_4 - I_{10} = 2 - 3 + 2 = 1A$

Soluzione:

La corrente I_1 si trova facilmente da una KCL ad un nodo:

$$I_1 = -I_2 - I_7 = -7A \tag{8}$$

Per trovare efficientemente la corrente I_{14} è possibile utilizzare la superfice chiusa mostrata qui sotto:



$$I_{14} = I_{11} - I_4 - I_{10} = 1\,\mathrm{A} \tag{9}$$

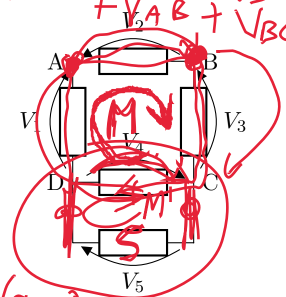
KVL Lungo una Maglia $\sum V_k = 0$
LCT

A.2 • Legge di Kirchhoff delle tensioni

Esercizio A.2.1

Data la rete in figura, calcolare le tensioni V_2 e V_5.

$\sum V_k = +V_2 + V_3 + V_4 - V_1 = 0$ $V_2 = V_1 - V_3 - V_4 = 300-150-25 =$
$+V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA}$ $= 125\,V$
$-V_{AD}$



$-V_4 - V_5 = 0$

$V_5 = V_D - V_C = V_{DC}$
$V_4 = V_C - V_D = V_{CD} \Rightarrow V_5 = -V_4$

Dati:
$V_1 = 300\,\text{V}$
$V_3 = 150\,\text{V}$
$V_4 = 25\,\text{V}$

Risultati:
$V_2 = 125\,\text{V}$
$V_5 = -25\,\text{V}$

Soluzione:

Dalla maglia inferiore si ricava subito:

$$V_5 = -V_4 = -25\,\text{V} \tag{10}$$

Dalla maglia superiore:

$$V_1 - V_2 - V_3 - V_4 = 0 \tag{11}$$

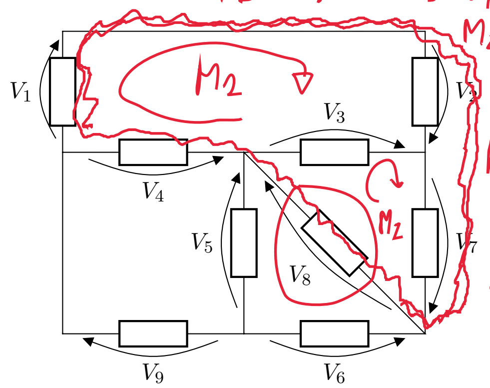
ovvero:

$$V_2 = V_1 - V_3 - V_4 = 125\,\text{V} \tag{12}$$

Esercizio A.2.2

Data la rete in figura, calcolare la tensione V_8.

$M1: V_1 + V_2 - V_3 - V_4 = 0$ $V_3 = 50+30-20 = 60\,V$
$M_2: V_3 + V_7 + V_8 = 0$



$V_8 = -V_3 - V_7 = -60+10 = -50\,V$

Dati:
$V_1 = 50\,\text{V}$
$V_2 = 30\,\text{V}$
$V_4 = 20\,\text{V}$
$V_5 = 100\,\text{V}$
$V_7 = -10\,\text{V}$

Risultati:
$V_8 = -50\,\text{V}$

Soluzione:

Da una maglia apposita:

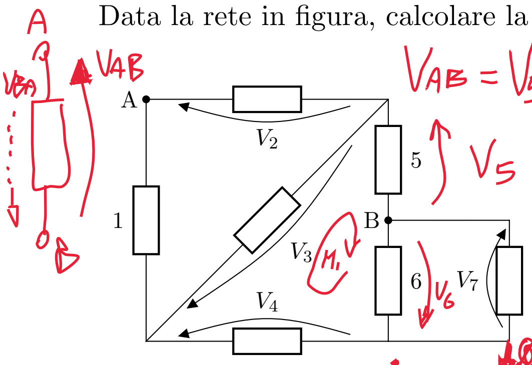
$$V_1 + V_2 + V_7 + V_8 - V_4 = 0 \tag{13}$$

che significa:

$$V_8 = -V_1 - V_2 - V_7 + V_4 = -50\,\text{V} \tag{14}$$

Esercizio A.2.3

Data la rete in figura, calcolare la tensione V_{AB}.



$V_{AB} = V_5 + V_2$

$V_6 = -V_7$

$M_1 = V_5 - V_6 - V_4 + V_3 = 0$

$V_5 = V_6 + V_4 - V_3 = -30 + 60 - 25 = 5V$

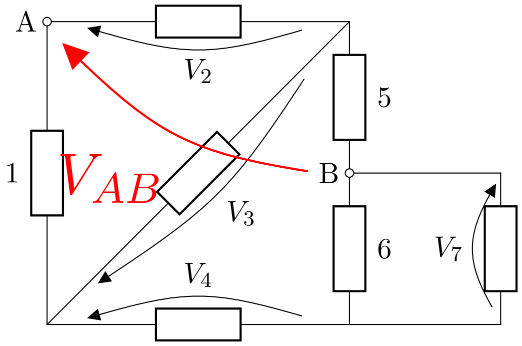
Dati:
$V_2 = 50\,\mathrm{V}$
$V_3 = 25\,\mathrm{V}$
$V_4 = 60\,\mathrm{V}$
$V_7 = 30\,\mathrm{V}$

Risultati:
$V_{AB} = 55\,\mathrm{V}$

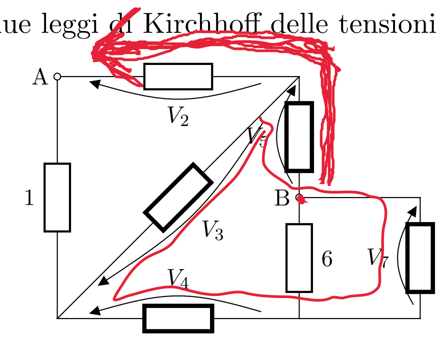
Soluzione:

$V_{AB} = 5V + 50V = 55V$

La tensione V_{AB} è definita come segue:



L'esercizio si puo' risolvere con due leggi di Kirchhoff delle tensioni:



$$V_5 = -V_3 + V_4 - V_7 = 5\,\mathrm{V} \tag{15}$$

Infine:

$$V_{AB} = V_2 + V_5 = 55\,\mathrm{V} \tag{16}$$

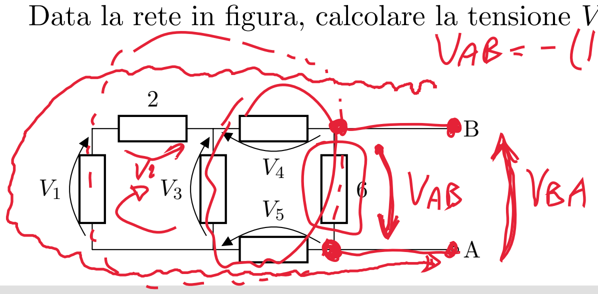
Esercizio A.2.4

$V_1 + V_2 - V_4 + V_{AB} + V_5 = 0$

$100 - 50 - 25 + V_{AB} + 12 = 0$

Data la rete in figura, calcolare la tensione V_{AB}.

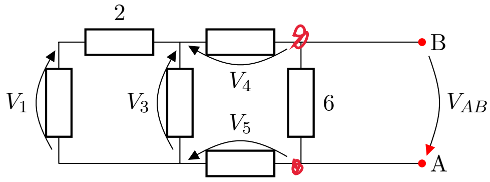
$V_{AB} = -(112 - 75) = -37V$



Dati:
$V_1 = 100\,\mathrm{V}$
$V_3 = 50\,\mathrm{V}$
$V_4 = 25\,\mathrm{V}$
$V_5 = 12\,\mathrm{V}$

Risultati:
$V_{AB} = -37\,\mathrm{V}$

Soluzione:
La tensione V_{AB} e' definita come segue:



Quindi:

$$V_{AB} = -V_5 - V_3 + V_4 = -37\,\text{V} \tag{17}$$

A.3 • Resistenze Equivalenti

R_A R_B SERIE

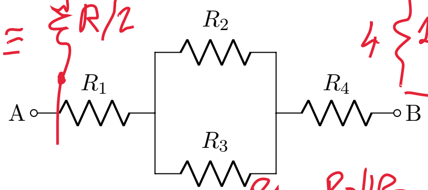
PARALLELO

Esercizio A.3.1

Calcolare la resistenza equivalente vista dai morsetti $A - B$.

$R_{eq,S} = R_A + R_B$

$R_{eq,P} = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B}$



R R = $R/2$

4 1 2

Dati:
$R_1 = 3\ \Omega$
$R_2 = 3\ \Omega$
$R_3 = 2\ \Omega$
$R_4 = 2\ \Omega$

$R_{eq,S} = \sum R_K$

$\frac{1}{R_{eq,P}} = \sum \frac{1}{R_K}$ >3 con

Risultati:
$R_{AB} = 31/5\ \Omega$

Soluzione:

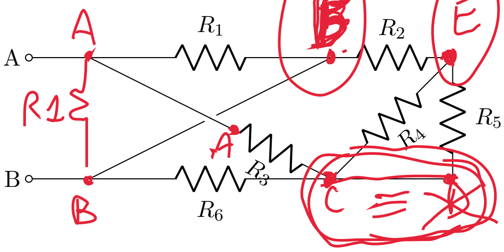
A R_1 $R_2//R_3$ R_4 B

$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{3 \cdot 2}{3+2} = \frac{6}{5} = 1{,}2\,\Omega$

$$R_{eq} = R_1 + R_2//R_3 + R_4 = \frac{31}{5}\ \Omega \tag{18}$$

Esercizio A.3.2

Calcolare la resistenza equivalente vista dai morsetti $A - B$.

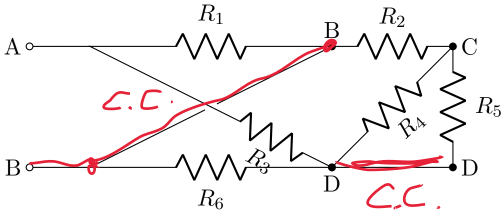


Dati:
$R_1 = 18\ \Omega$
$R_2 = 6\ \Omega$
$R_3 = 3\ \Omega$
$R_4 = 6\ \Omega$
$R_5 = 6\ \Omega$
$R_6 = 18\ \Omega$

E R_4 R_5 C

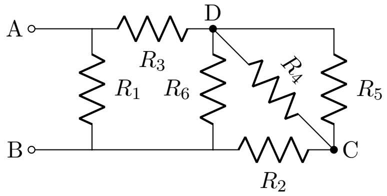
Risultati:
$R_{AB} = 6\ \Omega$

Soluzione:
L'esercizio si risolve in modo facile dando un nome ai nodi e poi riposizionandoli per evitare l'accavallamento del circuito. Tutti i nodi connessi da un cortocircuito sono lo stesso nodo.



$R_4 // R_5$

A questo punto, e' possibile ridisegnare il circuito:



A questo punto si vede facilmente che:

$$R_{eq} = R_1//(R_3 + R_6//(R_2 + R_4//R_5)) = 6\ \Omega \tag{19}$$

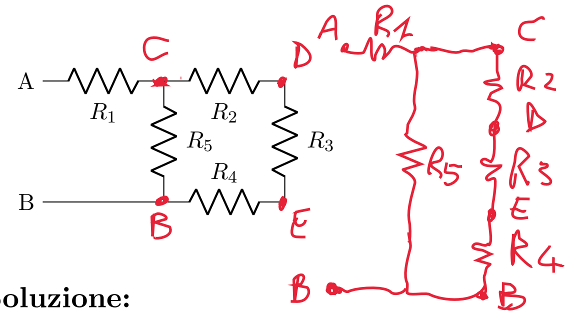
Esercizio A.3.3

$R_S = R_2 + R_3 + R_4 = 4 + 3 + 1 = 8\ \Omega$

$R_P = R_5 // R_S = 4\ \Omega$

Calcolare la resistenza equivalente vista dai morsetti $A - B$.

$Req = R_{AB} = R_1 + R_P = 5 + 4 =$
$= 9\ \Omega$



Dati:
- $R_1 = 5\ \Omega$
- $R_2 = 4\ \Omega$
- $R_3 = 3\ \Omega$
- $R_4 = 1\ \Omega$
- $R_5 = 8\ \Omega$

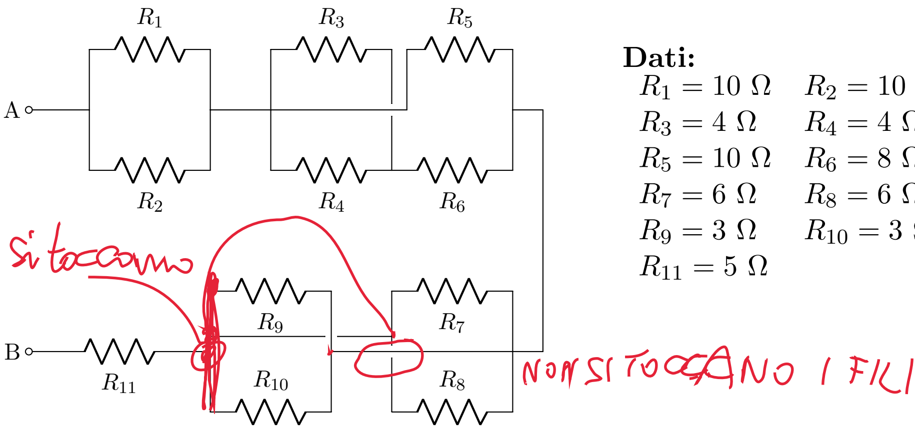
Risultati:
$R_{AB} = 9\ \Omega$

Soluzione:
Si vede che:

$$R_{eq} = R_1 + R_5//(R_2 + R_3 + R_4) = 9\ \Omega \tag{20}$$

Esercizio A.3.4

Calcolare la resistenza equivalente vista dai morsetti A-B.

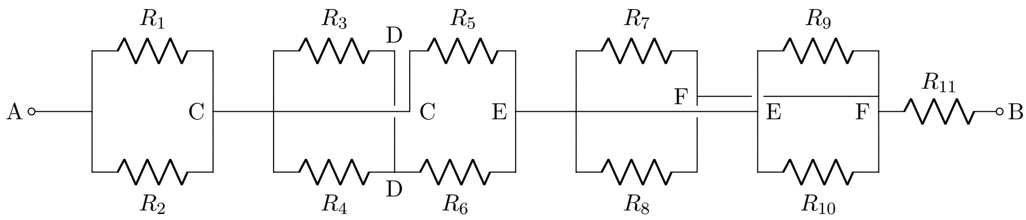


Dati:

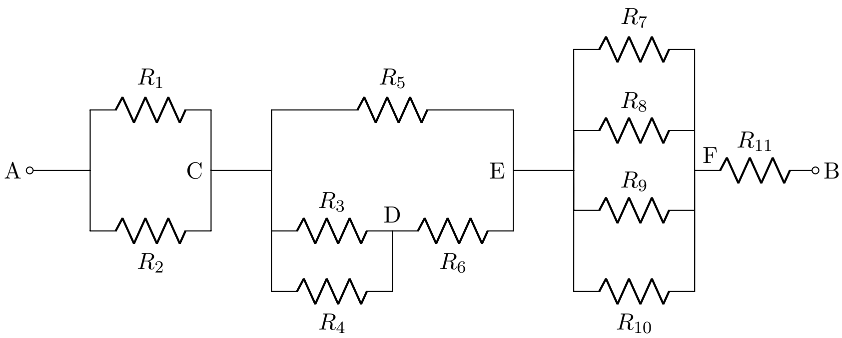
$R_1 = 10\ \Omega$	$R_2 = 10\ \Omega$
$R_3 = 4\ \Omega$	$R_4 = 4\ \Omega$
$R_5 = 10\ \Omega$	$R_6 = 8\ \Omega$
$R_7 = 6\ \Omega$	$R_8 = 6\ \Omega$
$R_9 = 3\ \Omega$	$R_{10} = 3\ \Omega$
$R_{11} = 5\ \Omega$	

Risultati:
$R_{AB} = 16\ \Omega$

Soluzione:
Anche in questo caso, la chiave per riuscire a risolvere in modo facile l'esercizio e' dare un nome ai nodi e poi riordinarli.



Riordinando il circuito:

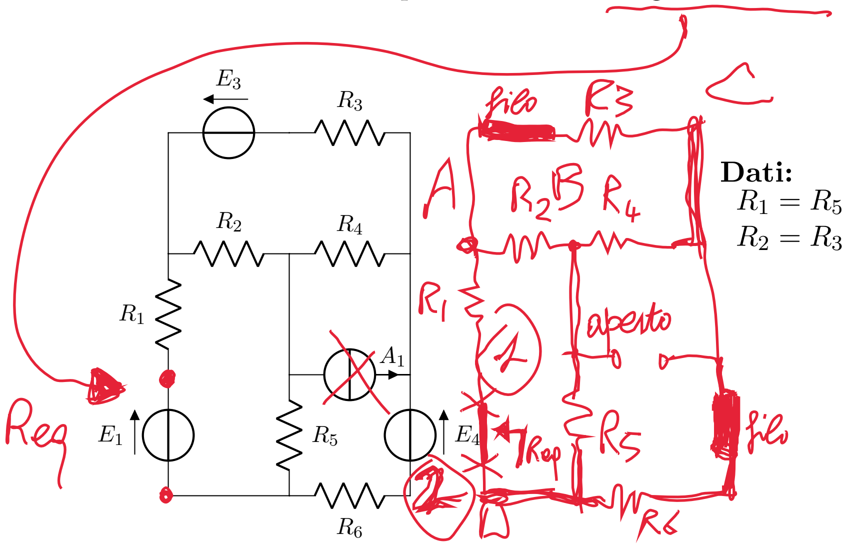


Si vede che:

$$R_{eq} = R_1//R_2 + R_5//(R_3//R_4 + R_6) + R_7//R_8//R_9//R_{10} + R_{11} = 16\ \Omega \tag{21}$$

Esercizio A.3.5

Calcolare la resistenza equivalente vista dal generatore E_1.

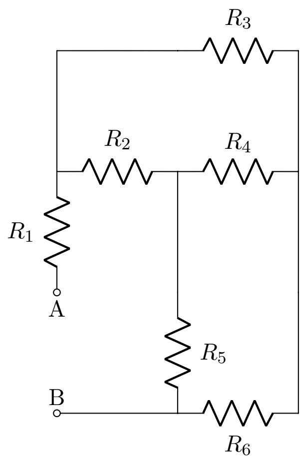


Dati:
$R_1 = R_5 = R_6 = 9\ \Omega$
$R_2 = R_3 = R_4 = 15\ \Omega$

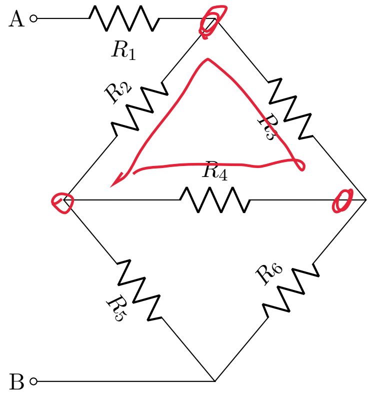
Risultati:
$R_{eq} = 21\ \Omega$

Soluzione:

Togliendo E_1 e spegnendo i generatori:

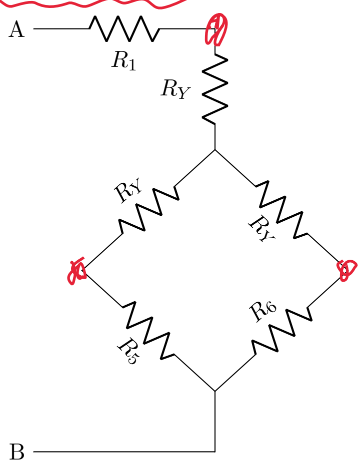


Ridisegnandolo:



Triangolo

Per semplificare il circuito, e' necessario trasformare almeno un triangolo in stella, dato che i resistori presenti non possono essere trattati solo con le configurazioni serie-parallelo.
Per comodita', si sceglie di trasformare il triangolo con tutte le resistenze uguali:



Stella

$R_Y + R_5$

Dove:

$$R_Y = \frac{R_2}{3} = 5\ \Omega \tag{22}$$

$R_{eq} = R_1 + R_Y + \frac{R_5 + R_Y}{2}$

A questo punto, si vede che:

$$R_{eq} = R_1 + R_Y + (R_Y + R_5) /\!/ (R_Y + R_6) = 21\ \Omega \tag{23}$$

$9 \quad 5 \quad 5+9$

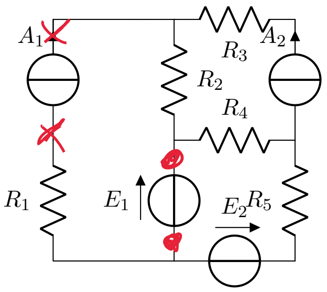
$14 \to 7$

$R_Y = \frac{R_2}{3} = 5\Omega$

$= 9+5+7 = 21\Omega$

Esercizio A.3.6

Dato il seguente circuito, calcolare la resistenza equivalente vista da A_1 e quella vista da E_1.



Dati:
$R_1 = 50\ \Omega$ $R_2 = 25\ \Omega$
$R_3 = 18\ \Omega$ $R_4 = 18\ \Omega$
$R_5 = 12\ \Omega$
$A_1 = 4\,\mathrm{A}$ $A_2 = 2\,\mathrm{A}$
$E_1 = 18\,\mathrm{V}$ $E_2 = 16\,\mathrm{V}$

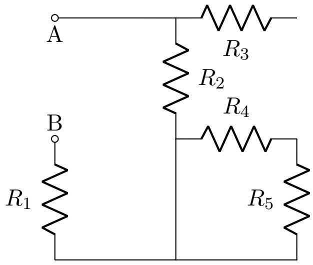
Risultati:
$R_{eq,1} = 75\ \Omega$
$R_{eq,2} = 30\ \Omega$

Soluzione:

Per calcolare la resistenza equivalente vista da un elemento e' necessario:

- staccare l'elemento dal circuito;
- spegnere tutti i generatori indipendenti;
- calcolare la resistenza equivalente vista ai morsetti dell'elemento;

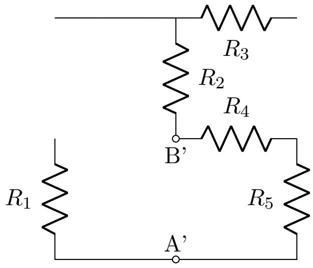
Partendo dal calcolo della resistenza equivalente vista da A_1:



Si trova che:

$$R_{eq,1} = R_1 + R_2 = 75\ \Omega \tag{24}$$

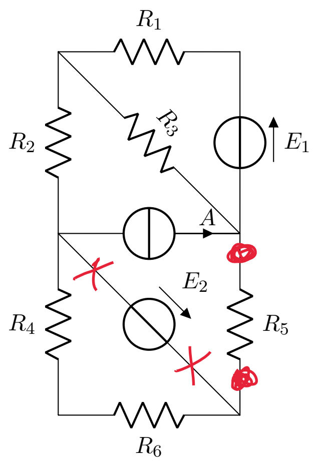
Per il calcolo della resistenza equivalente vista da E_1:

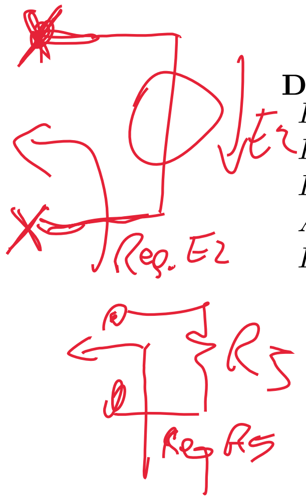


$$R_{eq,2} = R_4 + R_5 = 30\ \Omega \tag{25}$$

Esercizio A.3.7

Dato il seguente circuito, calcolare la resistenza equivalente vista dal generatore E_2 e quella vista dal resistore R_5.



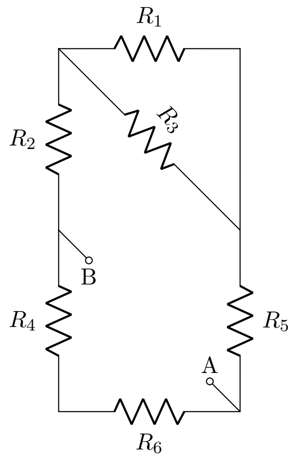


Dati:

$R_1 = 12\ \Omega$	$R_2 = 2\ \Omega$
$R_3 = 4\ \Omega$	$R_4 = 14\ \Omega$
$R_5 = 5\ \Omega$	$R_6 = 16\ \Omega$
$A_1 = 4\,\mathrm{A}$	
$E_1 = 30\,\mathrm{V}$	$E_2 = 20\,\mathrm{V}$

Risultati:
$R_{eq,1} = 7{,}5\ \Omega$
$R_{eq,2} = 5\ \Omega$

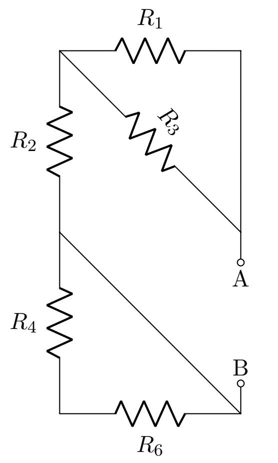
Soluzione:
Come visto prima, e' necessario passivare il circuito e staccare l'elemento da cui si vuole calcolare la resistenza equivalente.
Partendo dal calcolo della resistenza equivalente vista da E_2:



Si trova che:

$$R_{eq,1} = (R_4 + R_6) /\!/ (R_2 + R_5 + R_1 /\!/ R_3) = 7{,}5\ \Omega \tag{26}$$

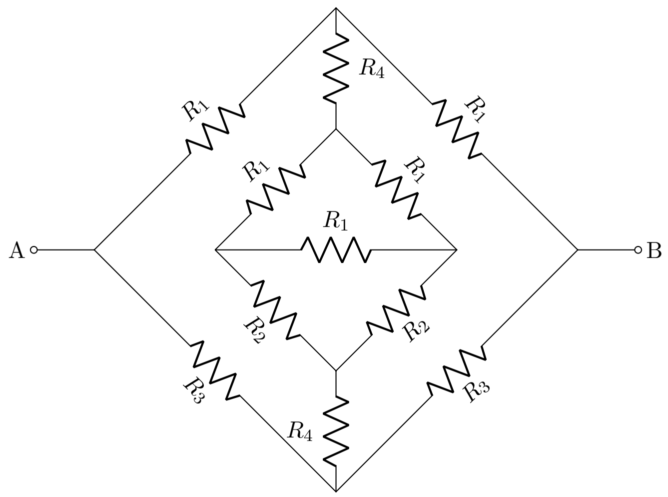
Per il calcolo della resistenza equivalente vista da R_5:



$$R_{eq,2} = R_1 /\!\!/ R_3 + R_2 = 5\ \Omega \tag{27}$$

Esercizio A.3.8

Calcolare la resistenza equivalente vista dai morsetti A-B.

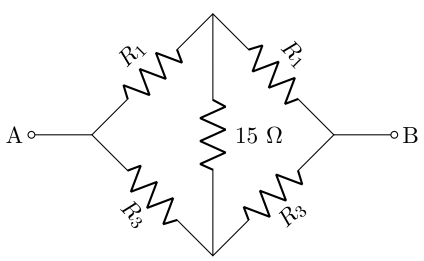


Dati:
$R_1 = 15\ \Omega$
$R_2 = 5\ \Omega$
$R_3 = 45\ \Omega$
$R_4 = 2{,}5\ \Omega$

Risultati:

$R_{AB} =$ 22,5 Ω

Soluzione:



$$R_{eq} = 45//(45//45 + 45//45) = 22{,}5\ \Omega \tag{28}$$
