

# VOLTMETRI DIGITALI E CONVERTITORI (D/A e A/D)



prof. Cesare Svelto

# Cosa sono gli ADC e DAC?

*Analog to Digital Converter* (ADC o convertitore A/D) è un dispositivo elettronico che consente di trasformare una tensione analogica in un valore numerico ad essa proporzionale: numero digitale in formato binario

Permette il passaggio dal mondo/segnale analogico al mondo/segnale digitale. Se la grandezza analogica da convertire in formato numerico non è una tensione, allora prima la si trasduce in un segnale di tensione

*Digital to Analog Converter* (DAC o convertitore D/A) trasforma un valore numerico d'ingresso in un'uscita analogica (tensione) ad esso proporzionale

Mondo fis./segn.Analogico  $\longleftrightarrow$  segn.Digitale/PC

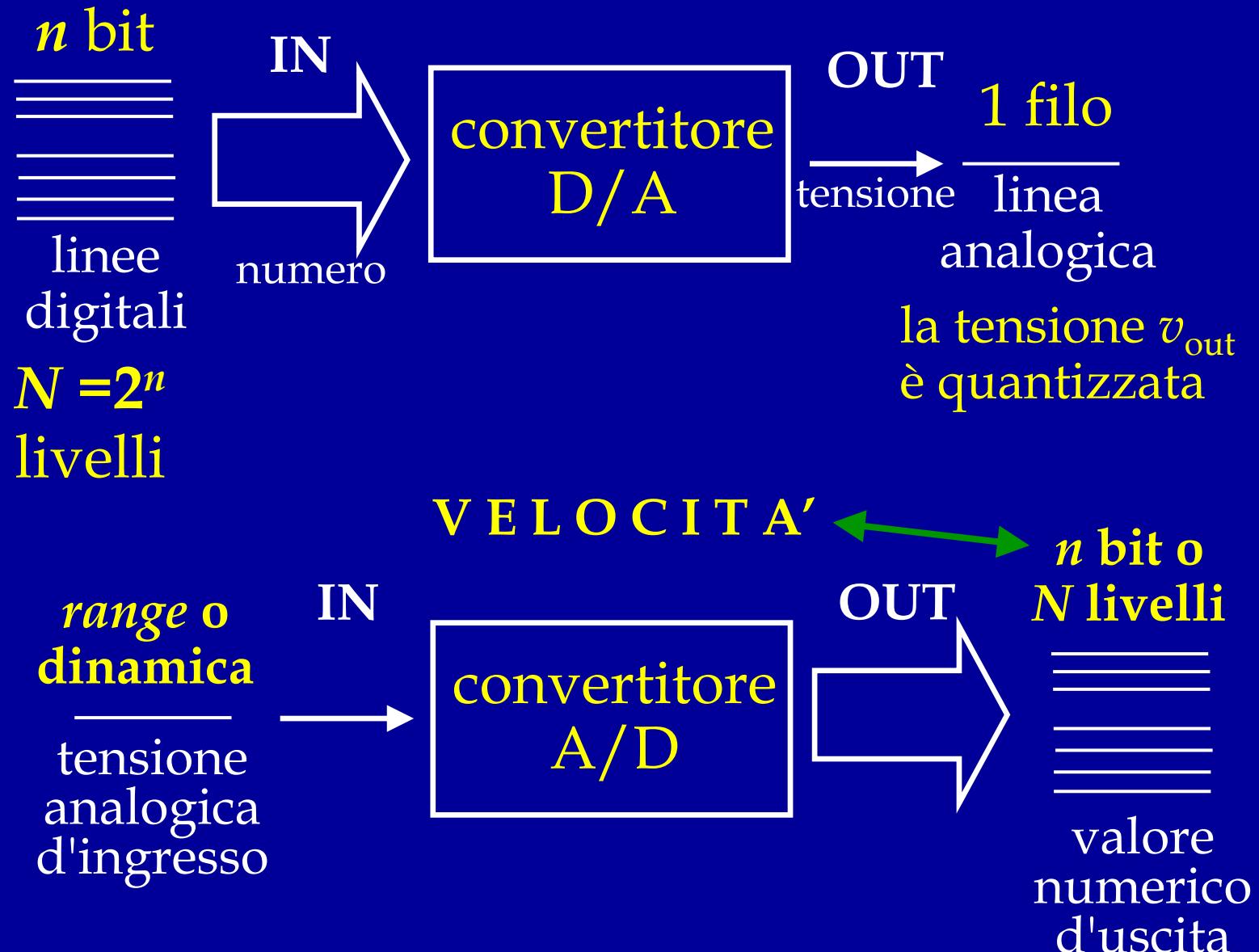
# A cosa servono gli ADC e DAC?

Gli ADC consentono di fare misure di grandezze fisiche fornendo il valore misurato in formato numerico che è “comodo” (da memorizzare, elaborare, trasferire a distanza, archiviare, etc.) grazie alle tecniche dell'Informatica

I moderni ADC fanno misure di elevata risoluzione e accuratezza (tanti bit e livelli) o anche permettono l'osservazione di segnali e fenomeni molto rapidi (elevata velocità e quindi banda passante)

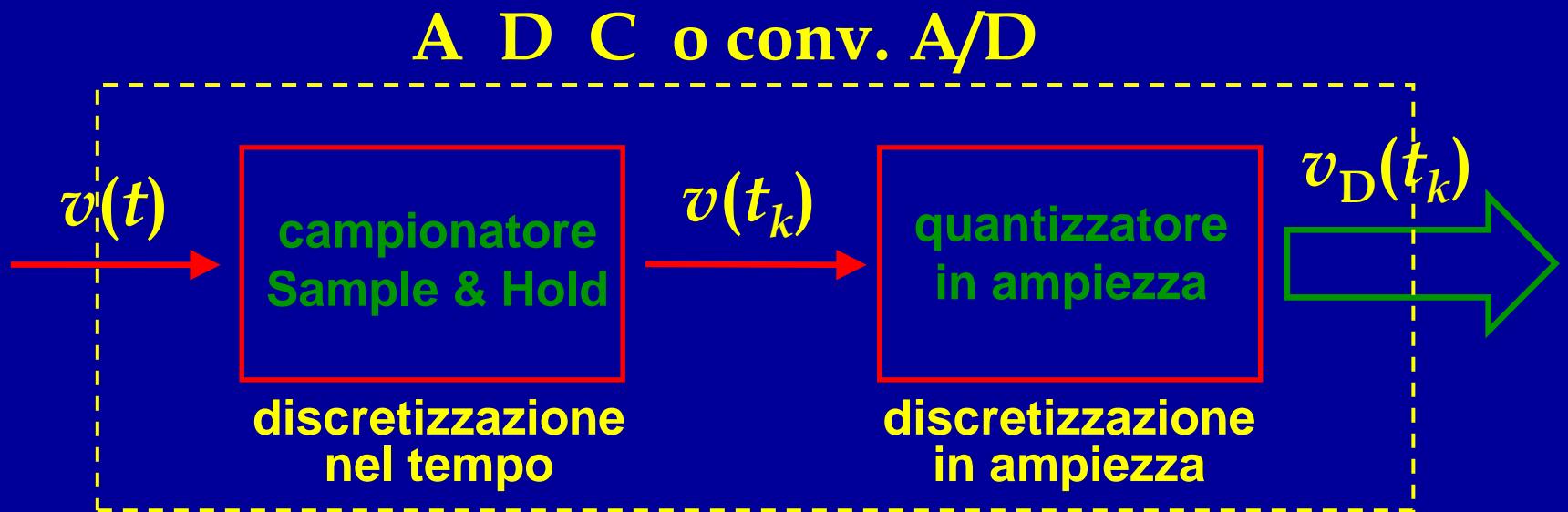
I DAC sono impiegati nell'industria e nei sistemi di controllo per produrre grandezze fisiche comandate direttamente da valori digitali (ottenuti con calcoli o previsioni di tipo teorico-numerico)

# Convertitori D/A e A/D



# Voltmetro o Convertitore A/D

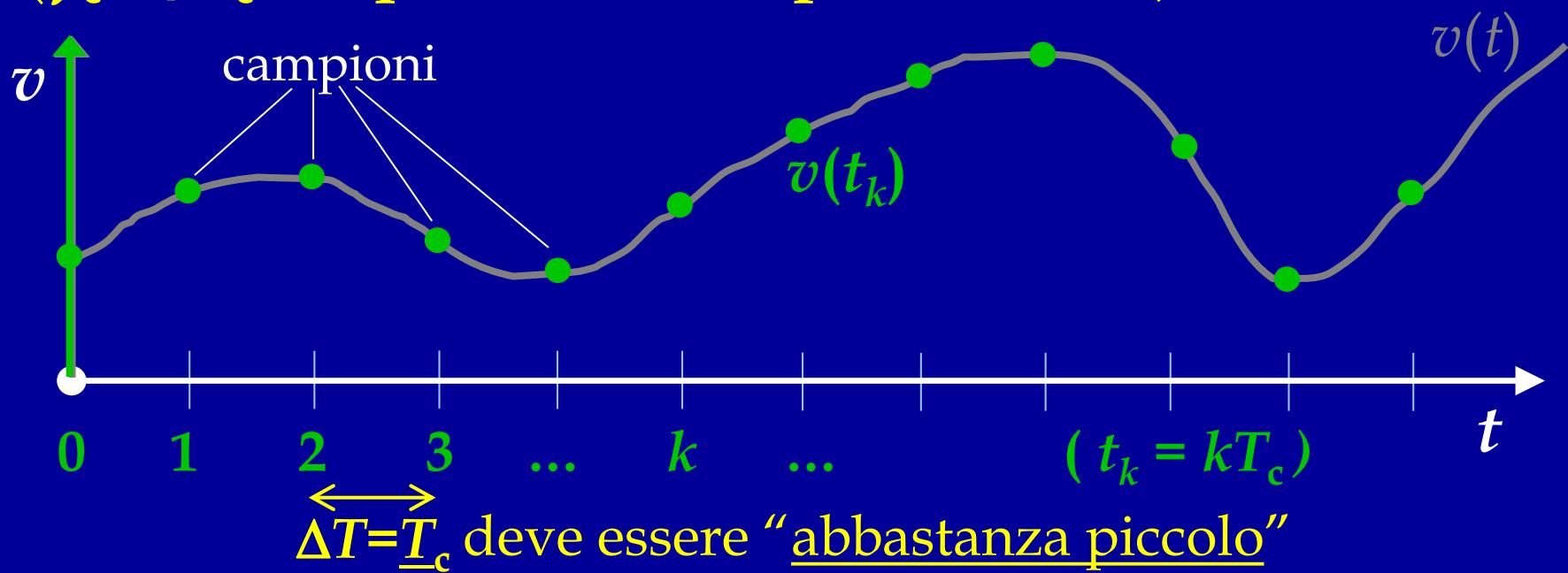
E' uno strumento che riceve in ingresso una tensione analogica e la "digitalizza" (**discretizzando** prima nel dominio del **tempo** e poi nel dominio dell'**ampiezza**):



In particolare, la **quantizzazione** nel dominio del tempo avviene con risoluzione  $T_{Sa}=1/f_{Sa}$  (o  $T_c=1/f_c$ , periodo [s] e frequenza [Sa/s o Hz] di campionamento)

# Discretizzazione nel tempo

La **discretizzazione nel tempo** avviene campionando la tensione (segnale) in istanti di tempo regolarmente spaziati di una distanza  $T_c$  **periodo di campionamento** ( $f_c=1/T_c$  **frequenza di campionamento**)



Dai soli campioni del segnale discretizzato nel tempo è possibile ricostruire l'andamento continuo senza perdita di informazione, purché vi sia **campionamento corretto**

# Campionamento di un segnale (1/3)

## Teorema di Shannon

Per poter ricostruire un segnale con banda limitata, è necessaria una frequenza di campionamento

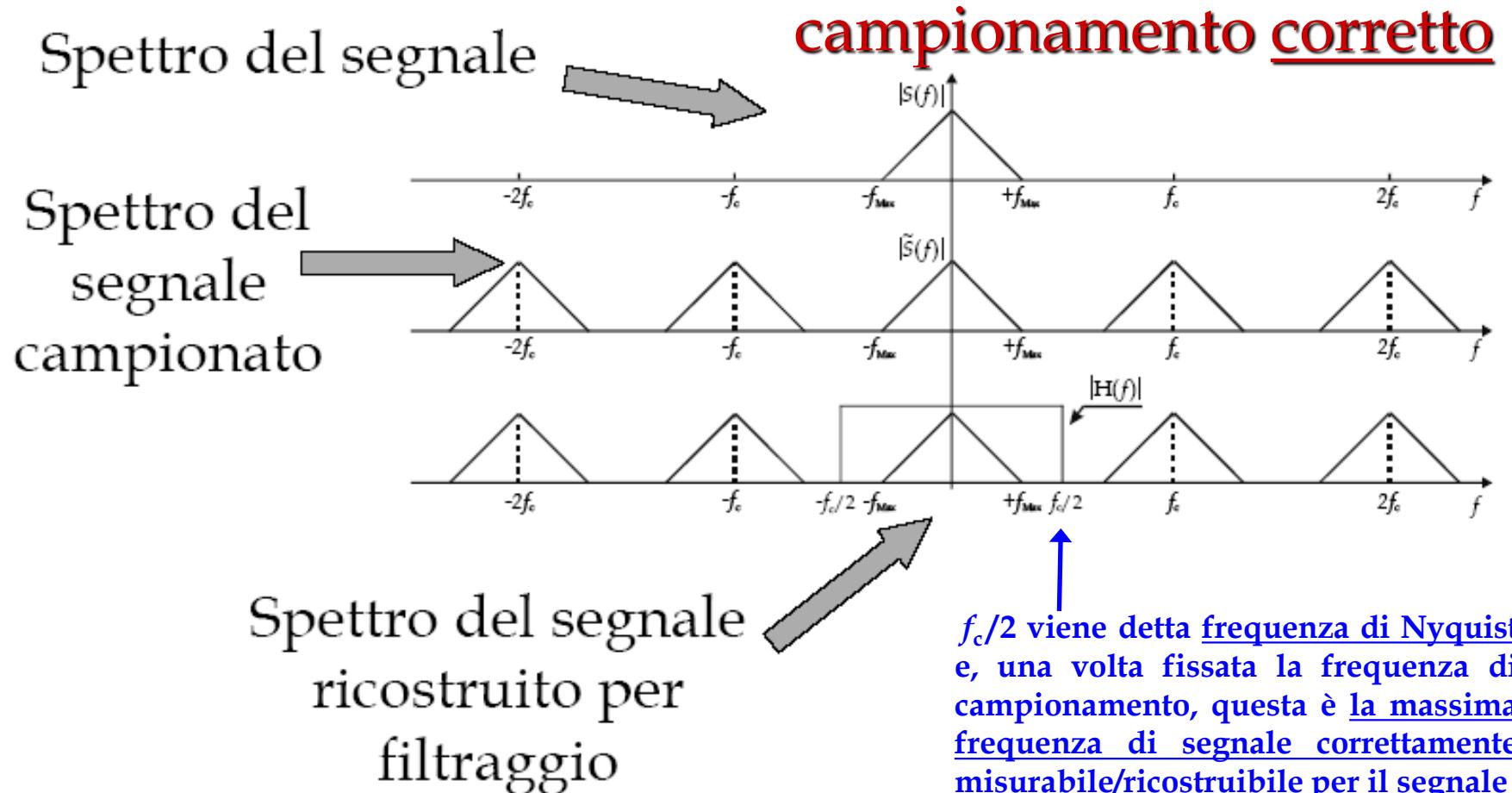
$$f_c > 2 B \quad (\text{con } B \text{ banda massima del segnale})$$

[[ Tc < 1/(2B) ]]

Altrimenti si verificano fenomeni di *aliasing*, che fanno perdere informazione utile e non consentono la ricostruzione del segnale per filtraggio passabasso. Infatti la discretizzazione nel tempo induce una periodicità in frequenza: non ci devono essere sovrapposizioni tra le repliche spettrali.

# Campionamento di un segnale (2/3)

CASO I:  $f_c > 2B$  (con  $B = \text{massima frequenza del segnale}$ )



# Campionamento di un segnale (3/3)

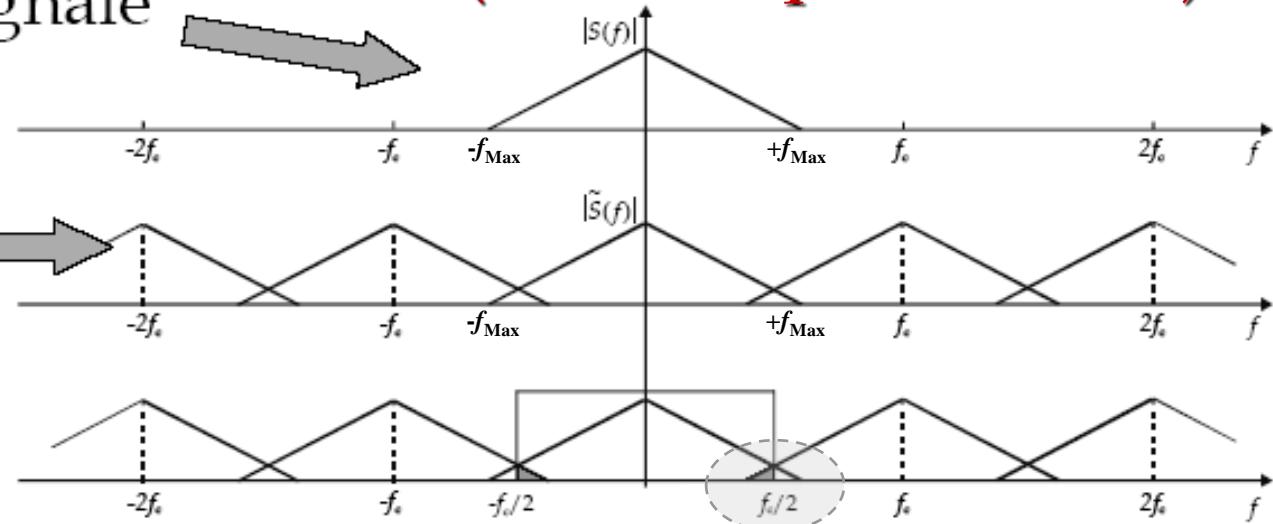
CASO II:  $f_c < 2 B$

campionamento errato  
(sottocampionamento)

Spettro del segnale

Spettro del  
segnale  
campionato

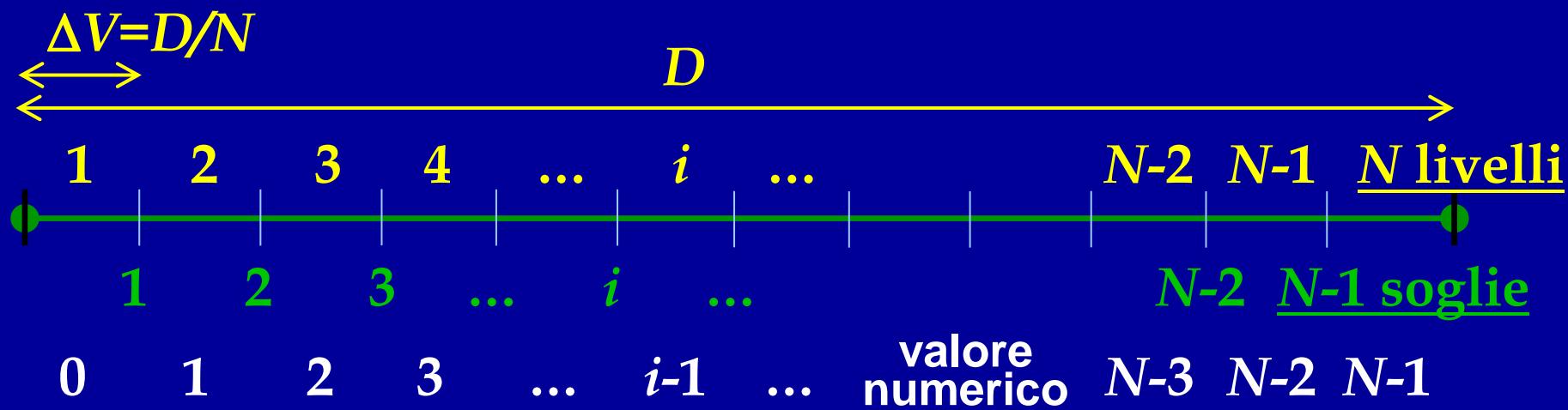
Spettro del segnale  
ricostruito per  
filtraggio



aliasing

# Quantizzazione in ampiezza

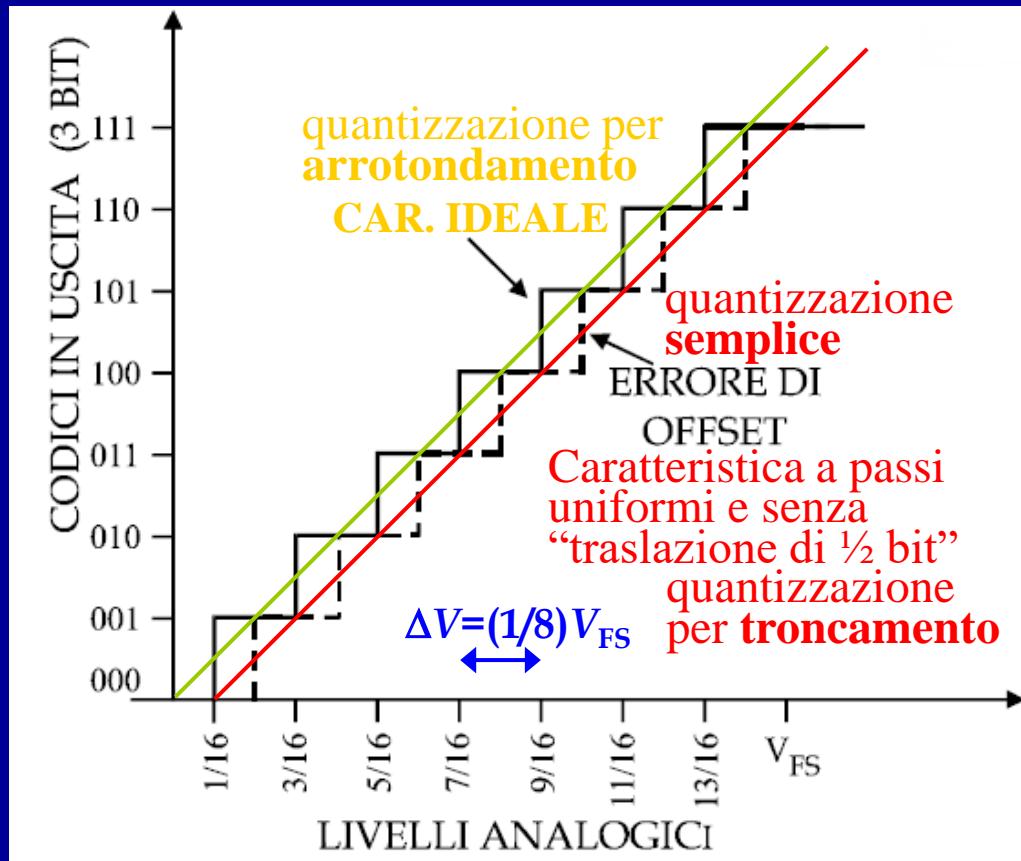
La **quantizzazione in ampiezza** avviene suddividendo la **dinamica  $D$  di misura** (intervallo di valori di tensione analogica misurabili in ingresso) in  **$N$  sottointervalli ( $\rightarrow$ livelli)** di **larghezza costante  $\Delta V=D/N$  (risoluzione)**



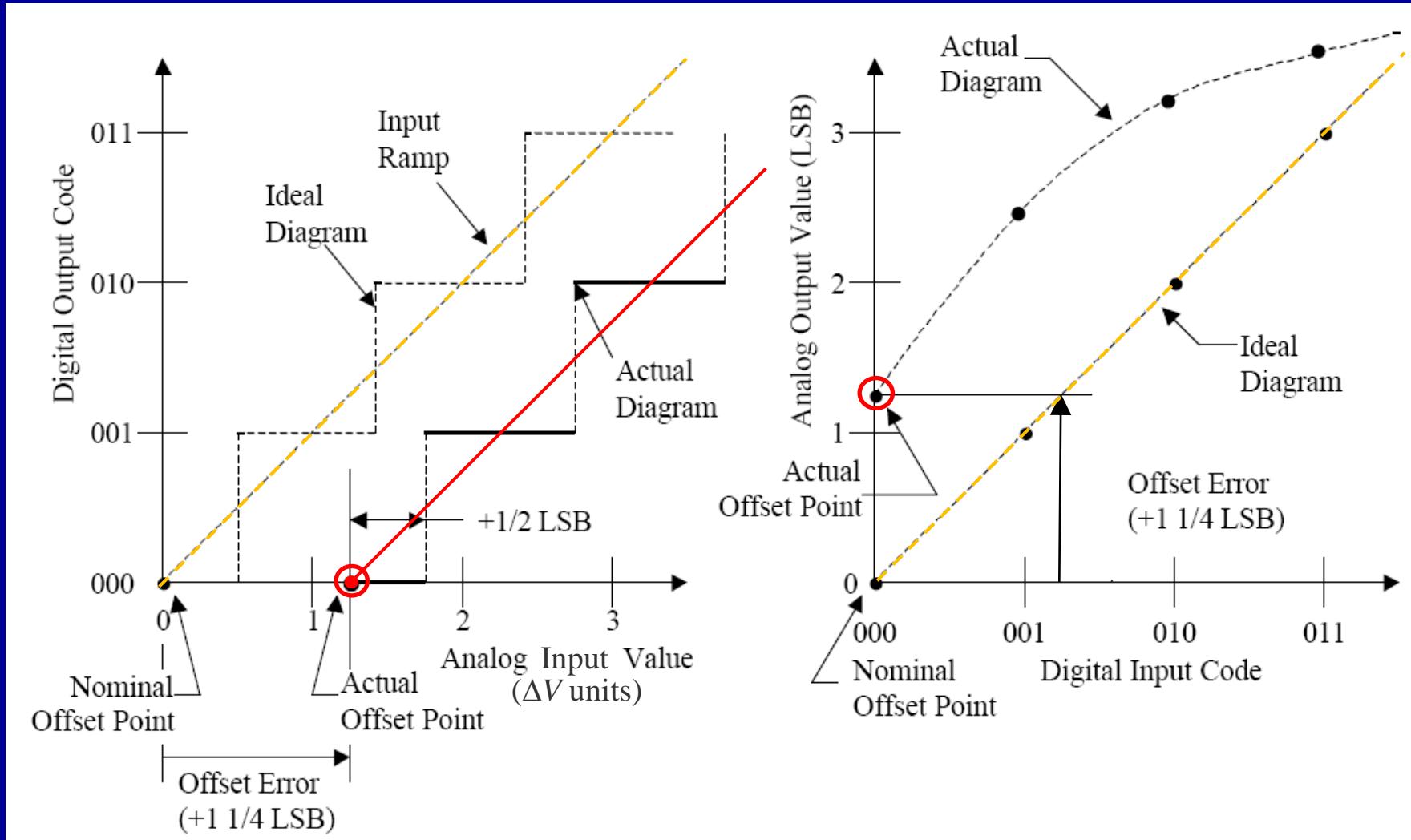
*attenzione a non confondere soglie/intervalli/livelli/Passo di quantizzazione...*

A tutte le tensioni analogiche che cadono nell'intervallo  $i$ -esimo si associa **un unico valore numerico**: l'**intero  $i-1$**  (da 0 a  $N-1$  o altri valori numerici) che identifica l'intervallo in questione

# Errori nei convertitori: quantizzazione



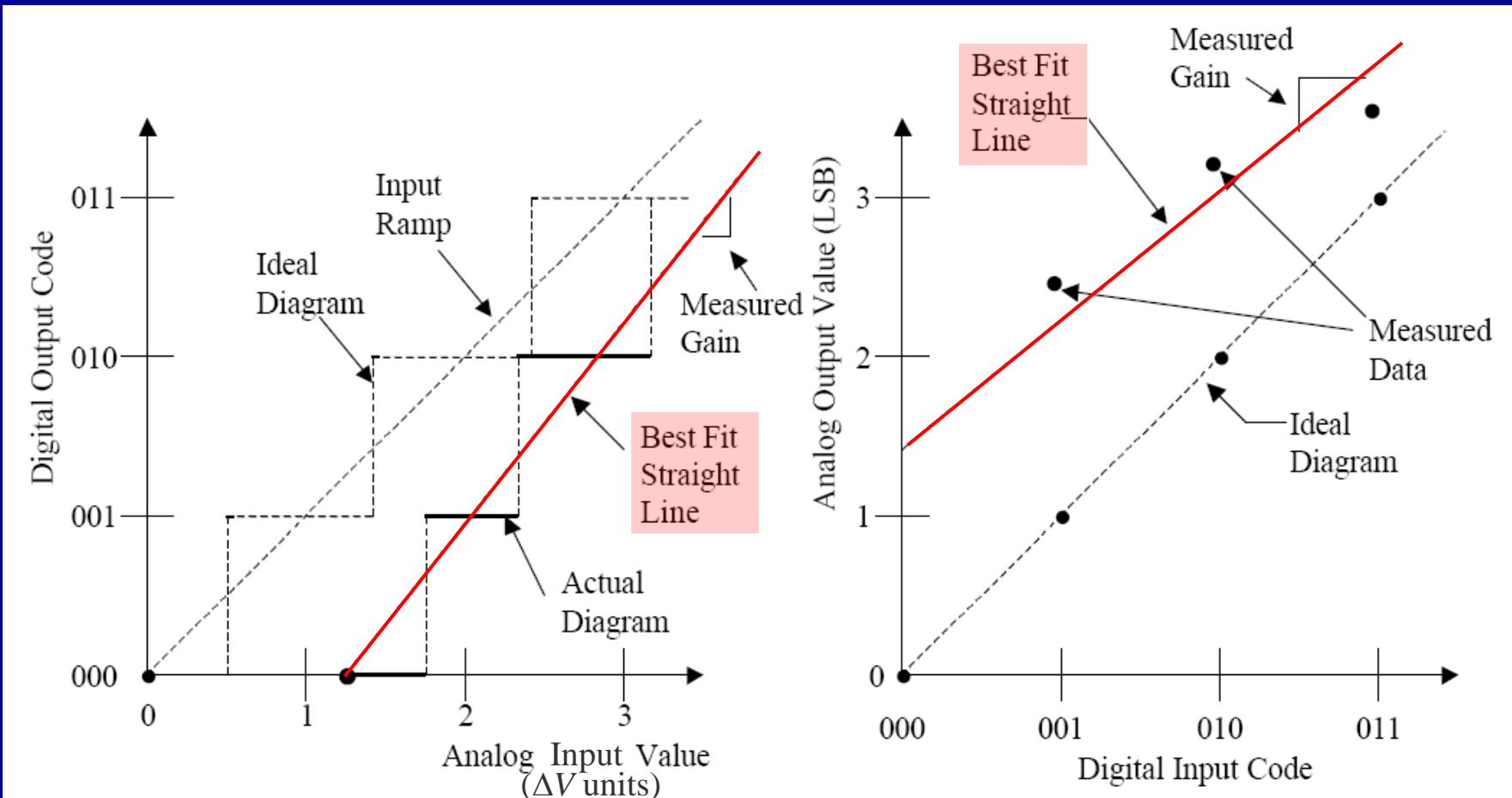
# Errori nei conv. A/D e D/A: offset



ADC

DAC

# Errori nei convertitori: *gain*

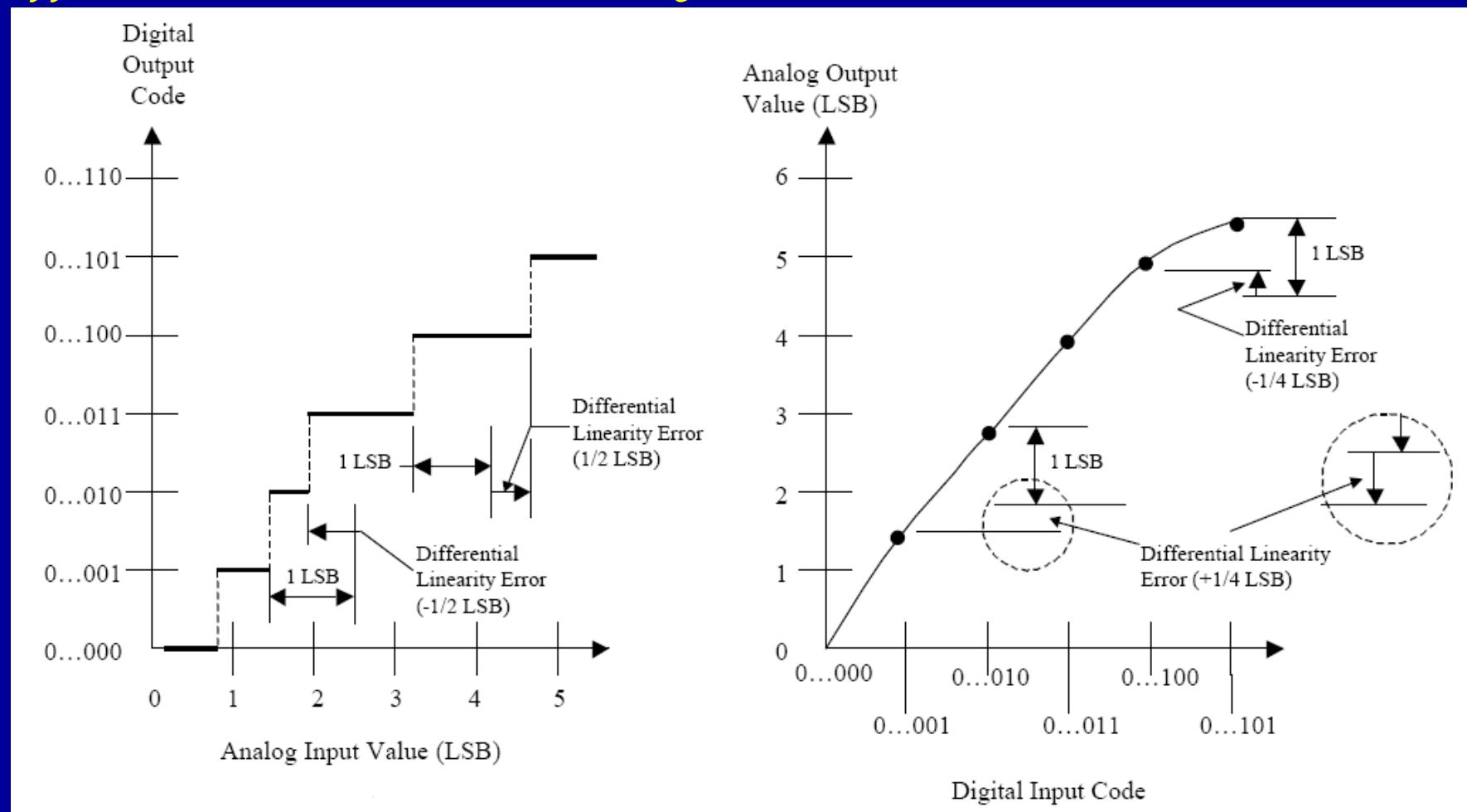


ADC

DAC

# Errori nei convertitori: *DNL*

## *Differential Non-Linearity* (non-linearità differenziale)

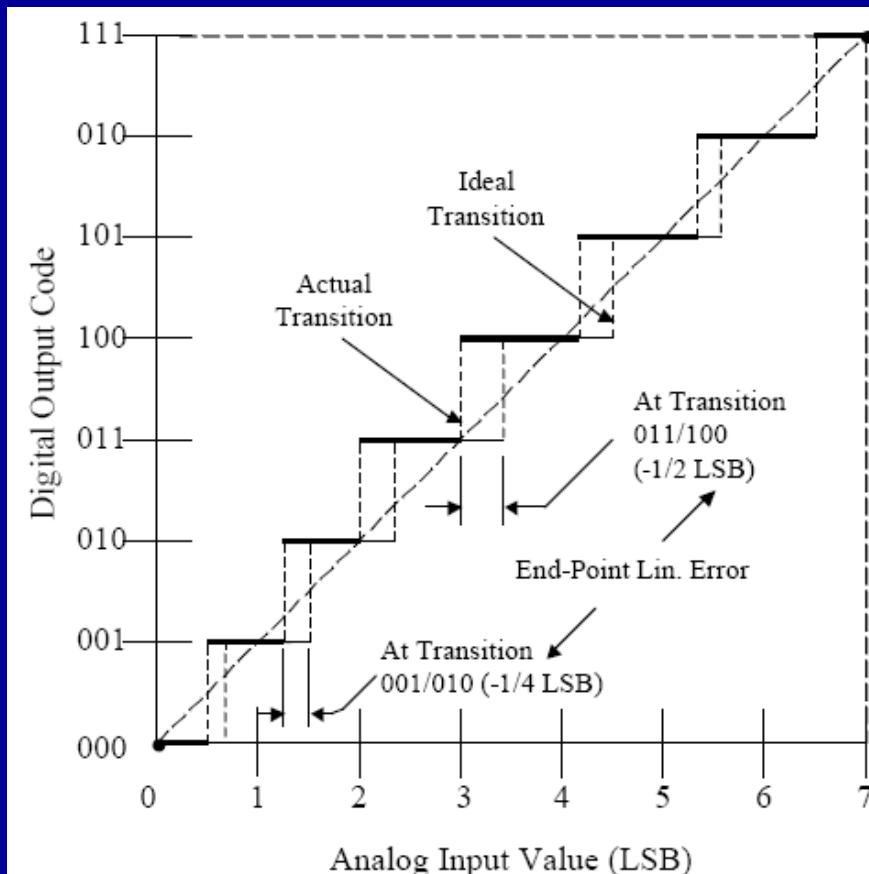


ADC

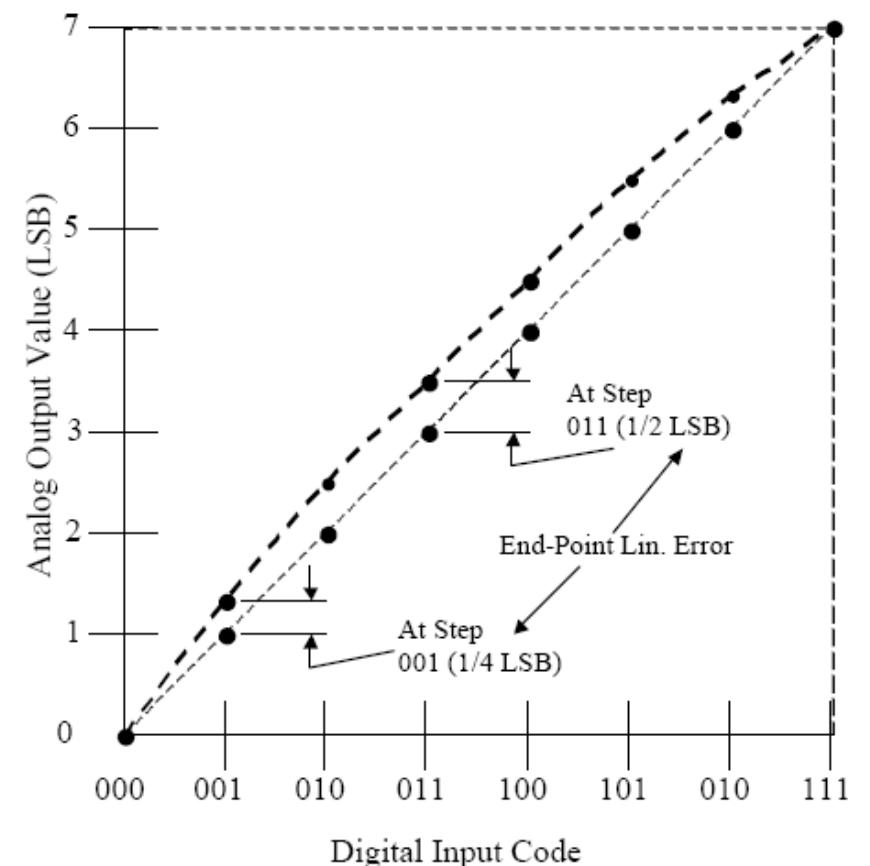
DAC

# Errori nei convertitori: *INL*

*Integral Non-Linearity (non-linearità integrale)*

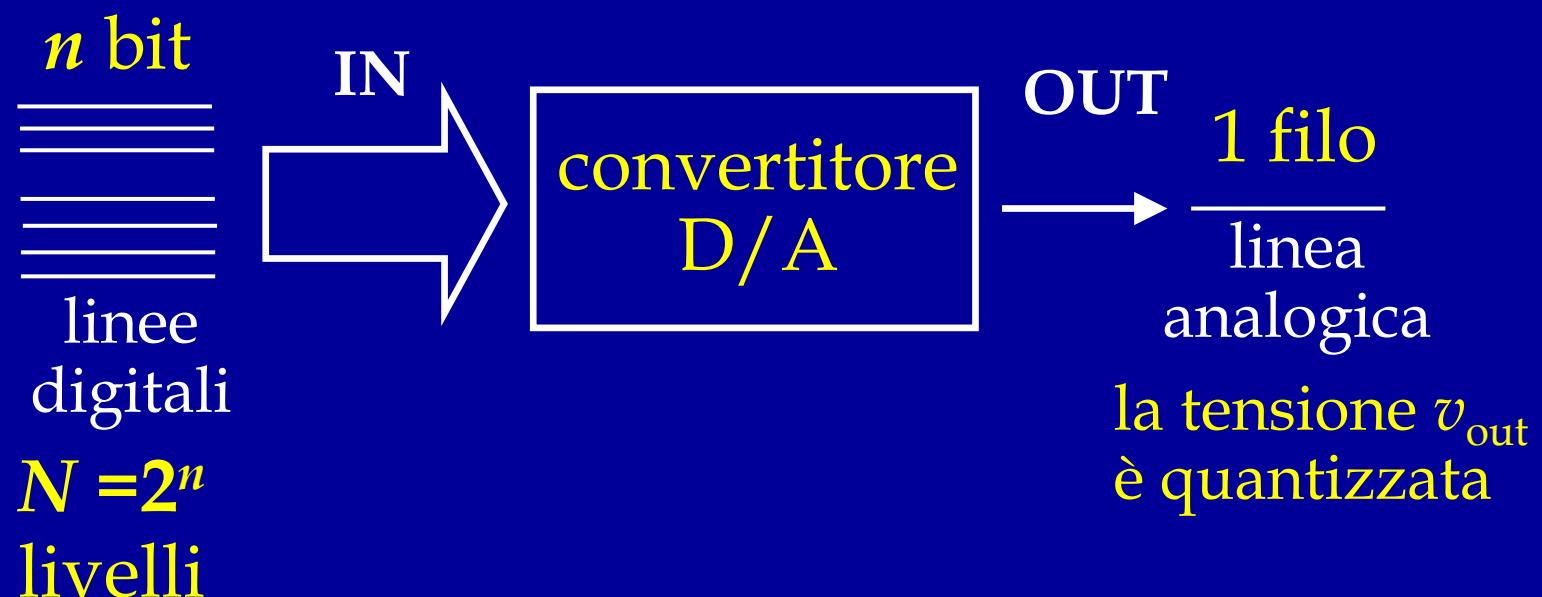


ADC



DAC

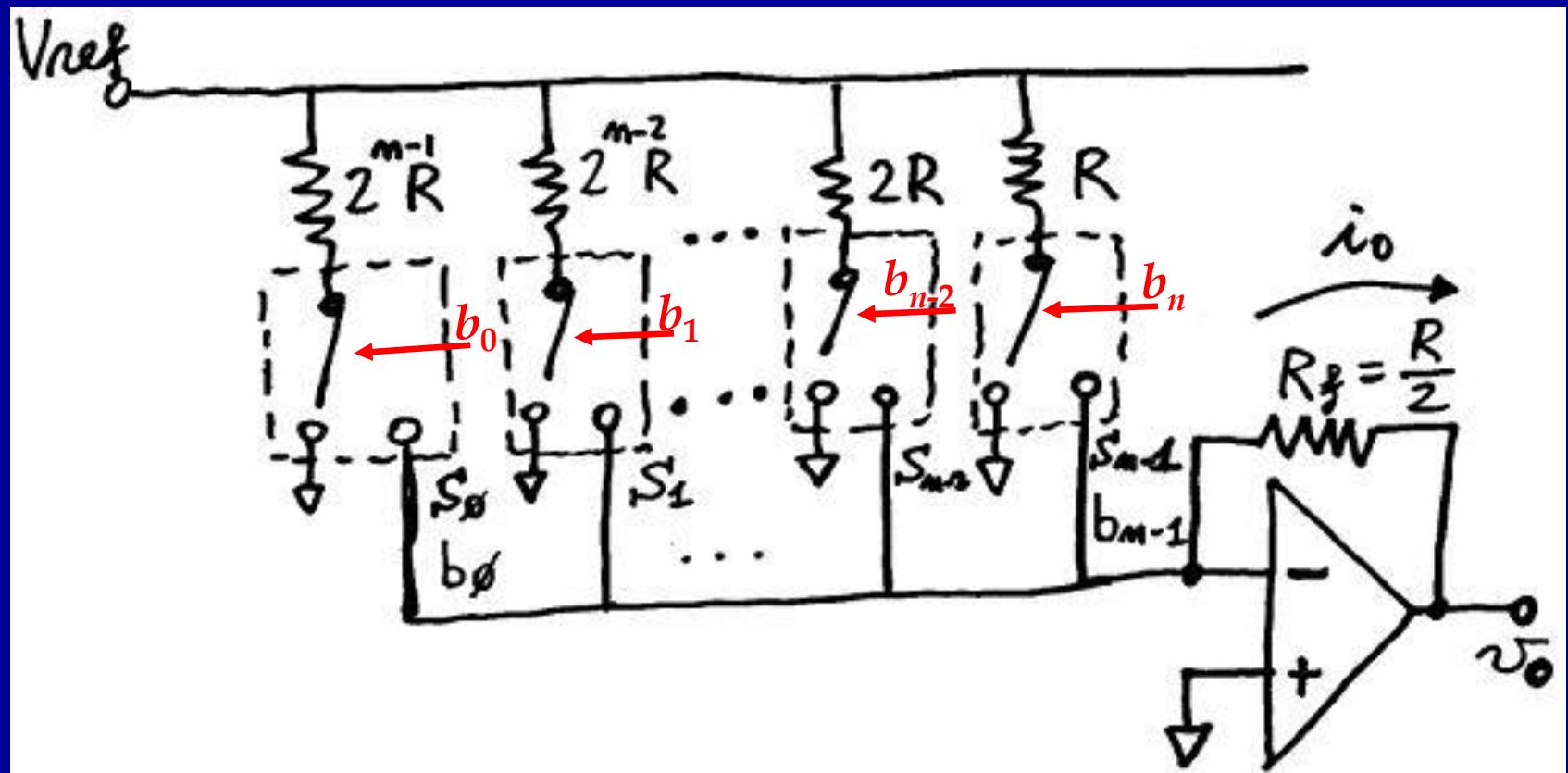
# Convertitore D/A



# Convertitore D/A a rete di R (1/4)

Da un'unica tensione di riferimento costante ( $V_{\text{ref}}$ ) si prelevano  $n$  correnti pesate attraverso  $n$  interruttori (switch)  $S_0, S_1, \dots S_{n-1}$

$n = \text{num. di bit}$



Su ciascuno switch  $S_i$  è posta una resistenza  $r_i = 2^{(n-1)-i}R$

# Convertitore D/A a rete di R (2/4)

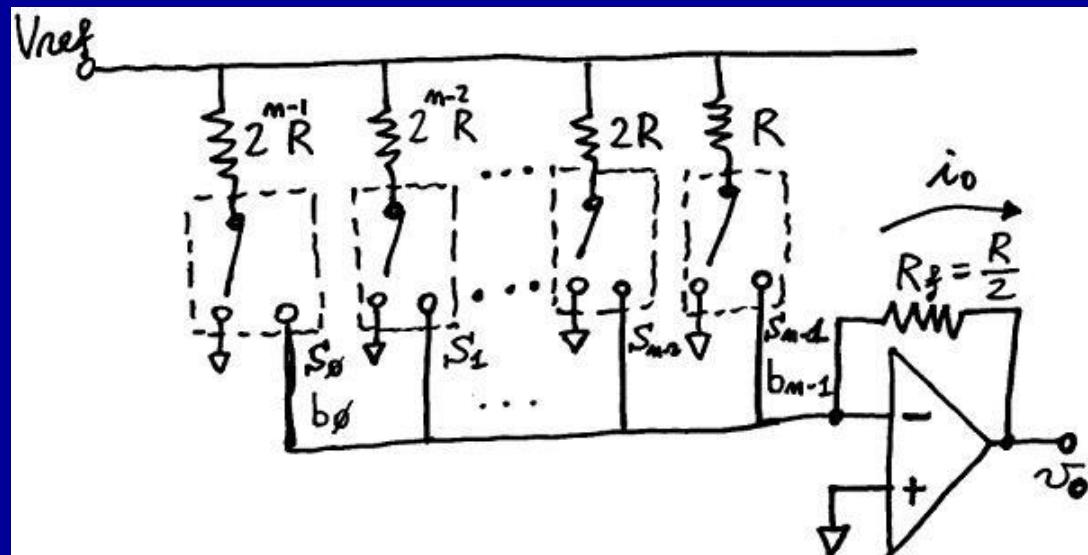
Gli *switch*  $s_i$  sono comandati dalle cifre binarie  $b_i$  del numero da convertire in tensione, con pesi t.c.

$b_0$  = LSB

$b_{n-1}$  = MSB

Least Significant Bit ( $i_{\text{MIN}}$  e  $R_{\text{MAX}}$ )  
Most Significant Bit ( $i_{\text{MAX}}$  e  $R_{\text{MIN}}$ )

L'operazionale serve da sommatore delle correnti pesate che passano attraverso gli *switch* e converte la corrente risultante  $i_o$ , attraverso la resistenza di *feedback*  $R_f$ , in un'uscita di tensione  $v_o$



$$v_o = -R_f i_o$$

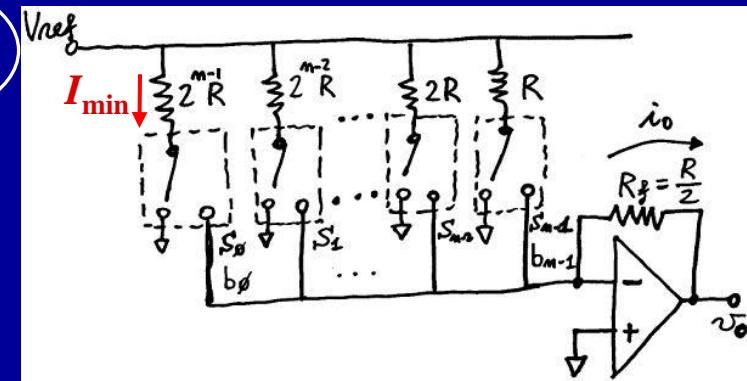
# Convertitore D/A a rete di R (3/4)

*n* bit

Le correnti pesate sono

$$i_i = \frac{V_{\text{ref}}}{2^{(n-1)-i} R} = 2^i \frac{V_{\text{ref}}}{2^{(n-1)} R} = 2^i I_{\min}$$

con  $i = 0, 1, \dots, n-1$  (come i bit della parola numerica)



La corrente complessivamente passante dagli *switch* chiusi ( $S_i$  è chiuso — posizione dx — quando  $b_i=1$ ) è

$$i_o = \frac{V_{\text{ref}}}{2^{(n-1)} R} \left( b_0 + 2b_1 + \dots + 2^{n-2}b_{n-2} + 2^{n-1}b_{n-1} \right)$$

# Convertitore D/A a rete di R (4/4)

La tensione generata in uscita è

$$v_o = -R_f i_o \stackrel{scegliendo R_f=R/2}{=} -\frac{V_{ref}}{2^n} (b_0 + 2b_1 + \dots + 2^{n-1} b_{n-1})$$

$$v_o = (b_0 + 2b_1 + \dots + 2^{n-1} b_{n-1}) \Delta V = k \Delta V$$

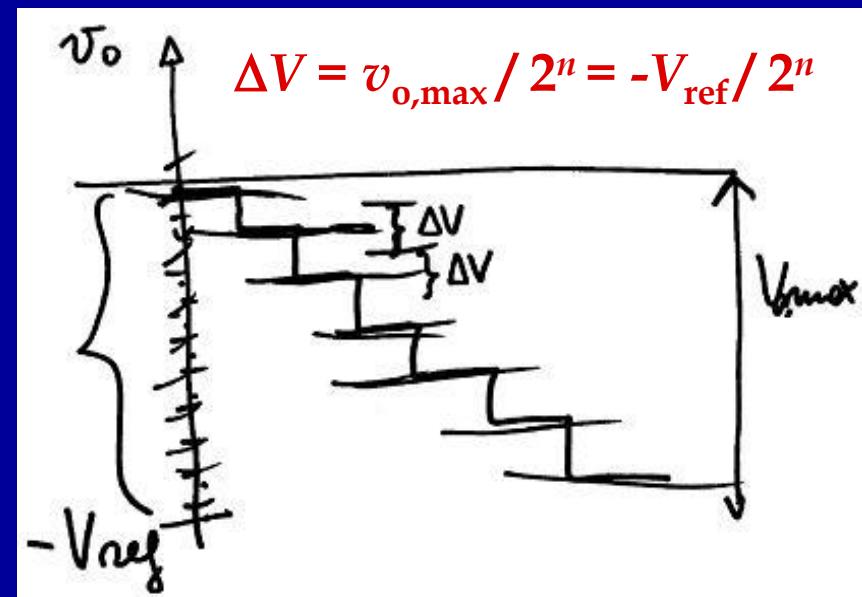
$$\Delta V = -\frac{V_{ref}}{2^n}$$

con  $k$  numero intero, compreso tra 0 e  $2^n-1$

L'accuratezza del DAC dipende da  $V_{ref}$ , dalle  $r_i$ , e dalla qualità degli *switch*

I valori di tensione analogica  $v_o$  in uscita, discreti e generati da valori digitali a  $n$  bit, avranno

$$\text{incertezza } u(v_o) = \frac{v_{o,\max}/2^n}{\sqrt{12}} = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}}$$



# Voltmetri digitali (DVM) e DMM

TIPI D'IMPIEGO: misure ( $V, I, R, T, C, \dots$ ) e acq. dati  
**MULTIMETRO**

CARATTERISTICHE:

numero di campi di misura (portata, *range*-dinamica),  
numero di cifre decimali ( $m$ ), numero di bit ( $n$ ),

**numero di livelli ( $N$ )**

→ RISOLUZIONE, ACCURATEZZA,

→ VELOCITA' DI LETTURA,

reiezione (insensibilità) al rumore di modo differenziale

DVM e DMM → **DISPLAY DIGITALE** memorizzazione  
del dato/misura

# Tipi di voltmetri e Risoluzione

Voltmetri - DIFFERENZIALI       $V_x - kV_{\text{ref}} \cong 0$   
- INTEGRATORI      "mediano"  $V_x$

OP-AMP come COMPARATORE o INTEGRATORE

**RISOLUZIONE** - dimensionale       $\Delta V$  (V)  
- adimensionale       $\delta$  (1)

$$\Delta V = \frac{D}{N} = \frac{\text{dinamica}}{\text{n° livelli}} \quad \delta = \frac{\Delta V}{D} = \frac{1}{N} \quad \begin{array}{l} \text{"parti per ..."} \\ \text{e.g. } 1 \times 10^{-4} \\ \text{con } N=10000 \end{array}$$

$m$  cifre decimali  $\rightarrow N=10^m$

$$\delta_{\text{cifre}} = m = \log_{10}(N)$$

$n$  bit  $\rightarrow N=2^n$

"cifre" e.g. 5 cifre

$$m = \log_{10}(2^n) = n \log_{10}(2) \cong 0.3n$$

val. da 0 a 99999

La  $\frac{1}{2}$  cifra  
decimale...

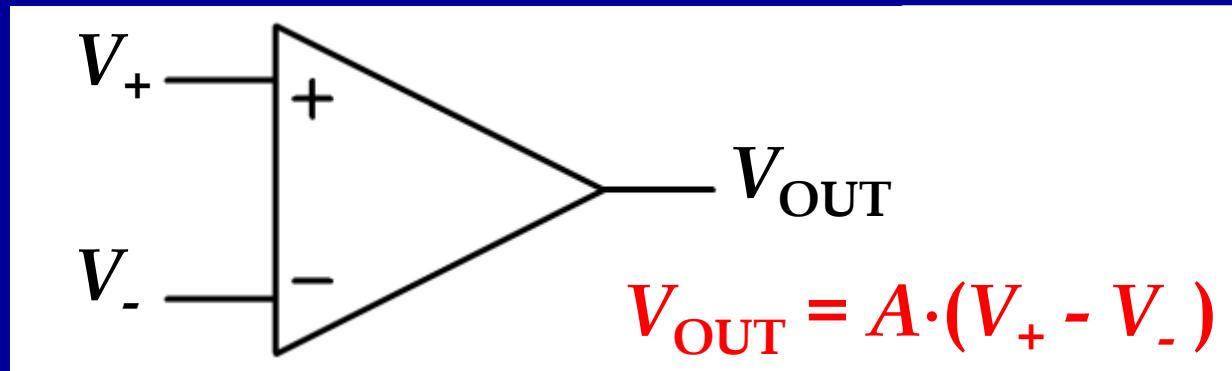
# Prestazioni dei voltmetri

**VELOCITA' × ACCURATEZZA ~ costante**

[lettura/s]	[1/incertezza]	(voltmetro)
alta GSa/s	- $\approx 1/10^{-3}$	bassa (flash a 8 bit) $N=256$
media MSa/s	- $\approx 1/10^{-5}$	media (approx. successive a 10 - 16 bit) $N \approx 10000$
bassa Sa/s	- $\approx 1/10^{-7}$	alta (integratori a 16 -26 bit) $N \approx 1000000$

# (OP-AMP e) circuito Comparatore

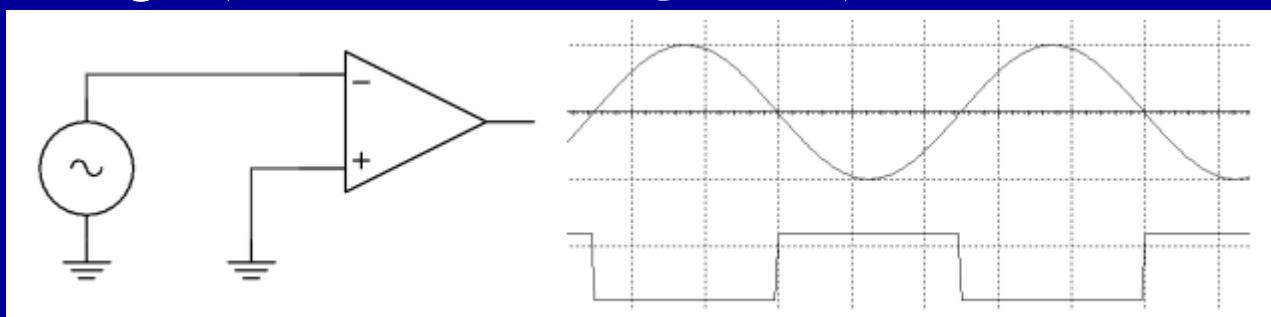
Comparatore  
di tensione:  
circuito a  
3 terminali:  
2 ingressi e  
1 uscita



$$V_+ > V_- \Rightarrow V_{\text{OUT}} = V_{\text{HIGH}} = "1" \quad (\text{liv. uscita "alto"})$$

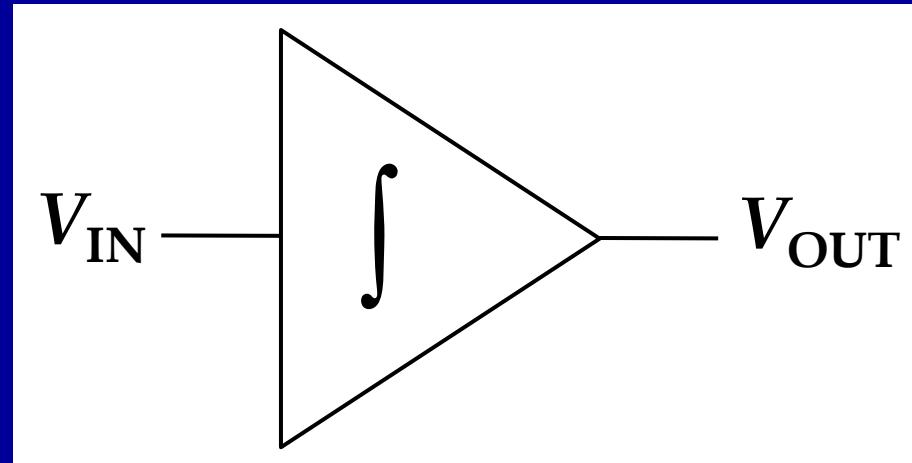
$$V_+ < V_- \Rightarrow V_{\text{OUT}} = V_{\text{LOW}} = "0" \quad (\text{liv. uscita "basso"})$$

il circuito comparatore **collega il mondo analogico** (uno/due ingressi analogici) con quello **digitale** (una uscita binaria: 0/1)



# (OP-AMP e) circuito Integratore

**Integratore di tensione:**  
circuito a 2 terminali la cui uscita è proporzionale all'integrale dell'ingresso (entrambi riferiti a massa)



$$V_{\text{OUT}} = \int V_{\text{IN}}(t) dt$$

Ad es., **una tensione continua viene trasformata in una rampa di tensione, una tensione cosinusoidale in una sinusoidale, etc..**

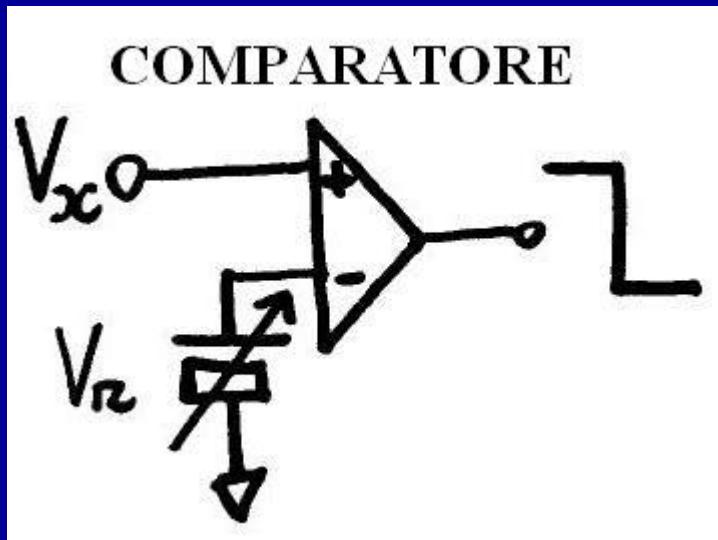
# Voltmetri differenziali (1/2)

Effettuano la **misura** di una tensione **incognita**  $V_x$  mediante il **confronto** “diretto” con una tensione di **riferimento**  $V_r$  disponibile internamente allo strumento

$V_r$  è una tensione di riferimento **variabile** e per generarla si ricorre a un **riferimento interno** fisso: una tensione  $V_0$  di elevata accuratezza e stabilità

L'**accuratezza** di  $V_0$  e quindi di  $V_r$  si ripercuote sull'accuratezza dei singoli confronti e infine su quella della misura ("best"  $V_0$  è una pila Josephson)

# Voltmetri differenziali (2/2)



Schema di principio di un voltmetro differenziale

La “transizione” avviene per

$$V_r = V_r^* = V_x$$

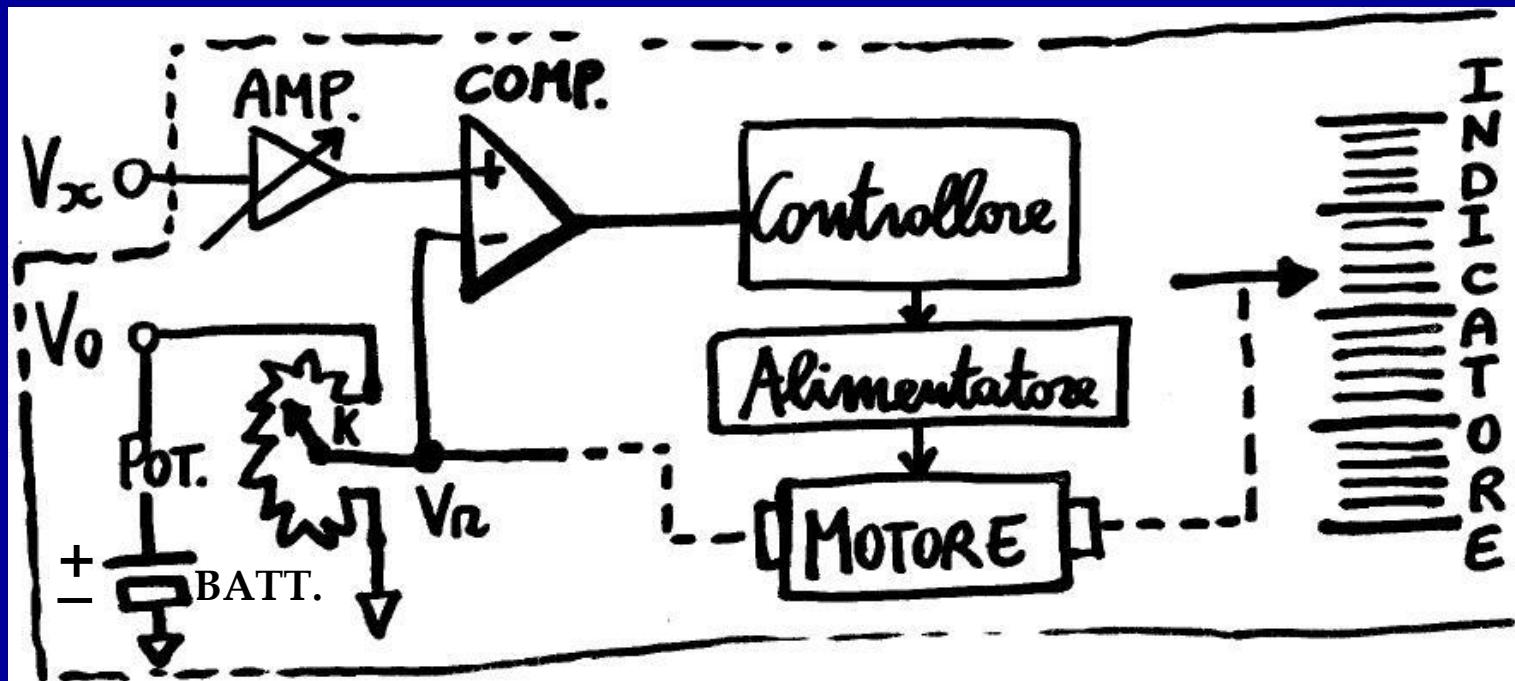
quando  $V_d = V_+ - V_- = 0$

$V_r$  viene variata su tutta  $D$ , da  $V_{x, \text{MIN}}$  a  $V_{x, \text{MAX}}$ , e si registra quel particolare valore  $V_r^*$  per cui l’uscita del comparatore commuta di livello

$V_r^*$  viene quindi inviato al *display* del voltmetro

# \*Voltmetro potenziometrico (1/2)

"Sistema elettromeccanico servo-assistito"



$$V_r = k V_0 \quad \text{e} \quad V_r^* = k^* \cdot V_0 = V_x$$

La **risoluzione** di misura dipende dalla risoluzione del **divisore potenziometrico** (e **passo del motore**)  
Accuratezza: pot., comp., motore, indicatore, ...

# \*Voltmetro potenziometrico (2/2)

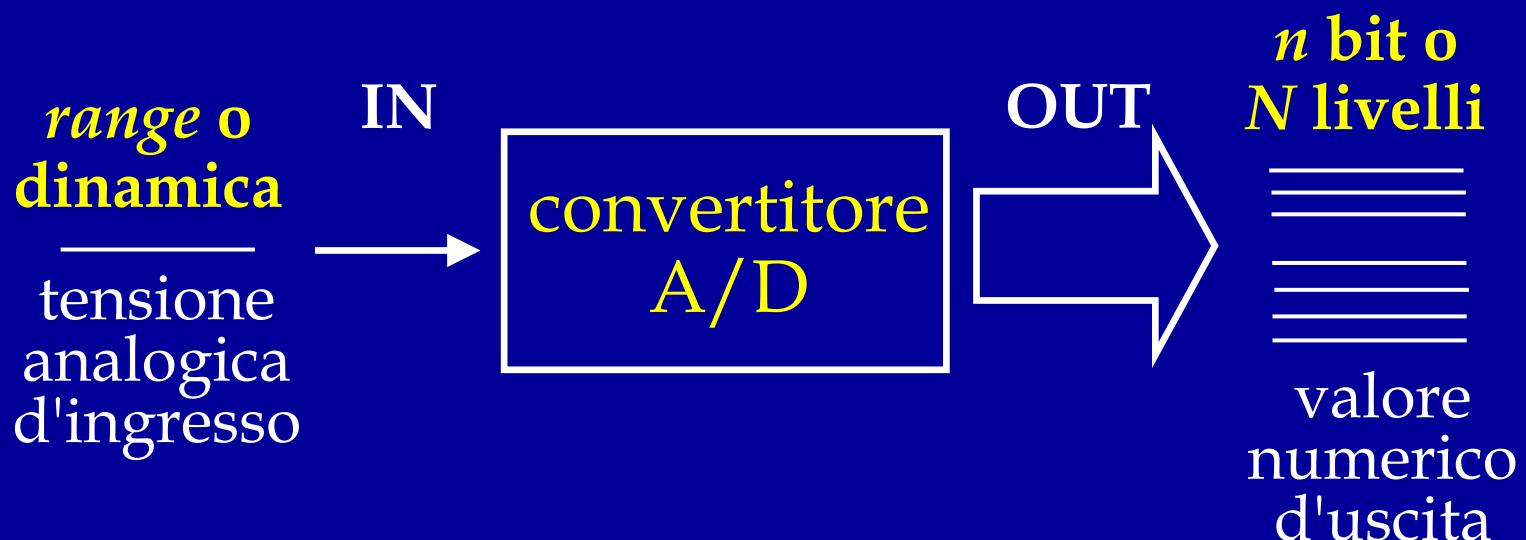
La **sensibilità** di misura viene aumentata grazie all'**amplificazione in ingresso** (AMP) consentendo di rivelare segnali  $V_x$  deboli, e piccole variazioni  $\Delta V_x$ , con una minore dipendenza dal rumore del comparatore (COMP)

Caratteristiche generali:

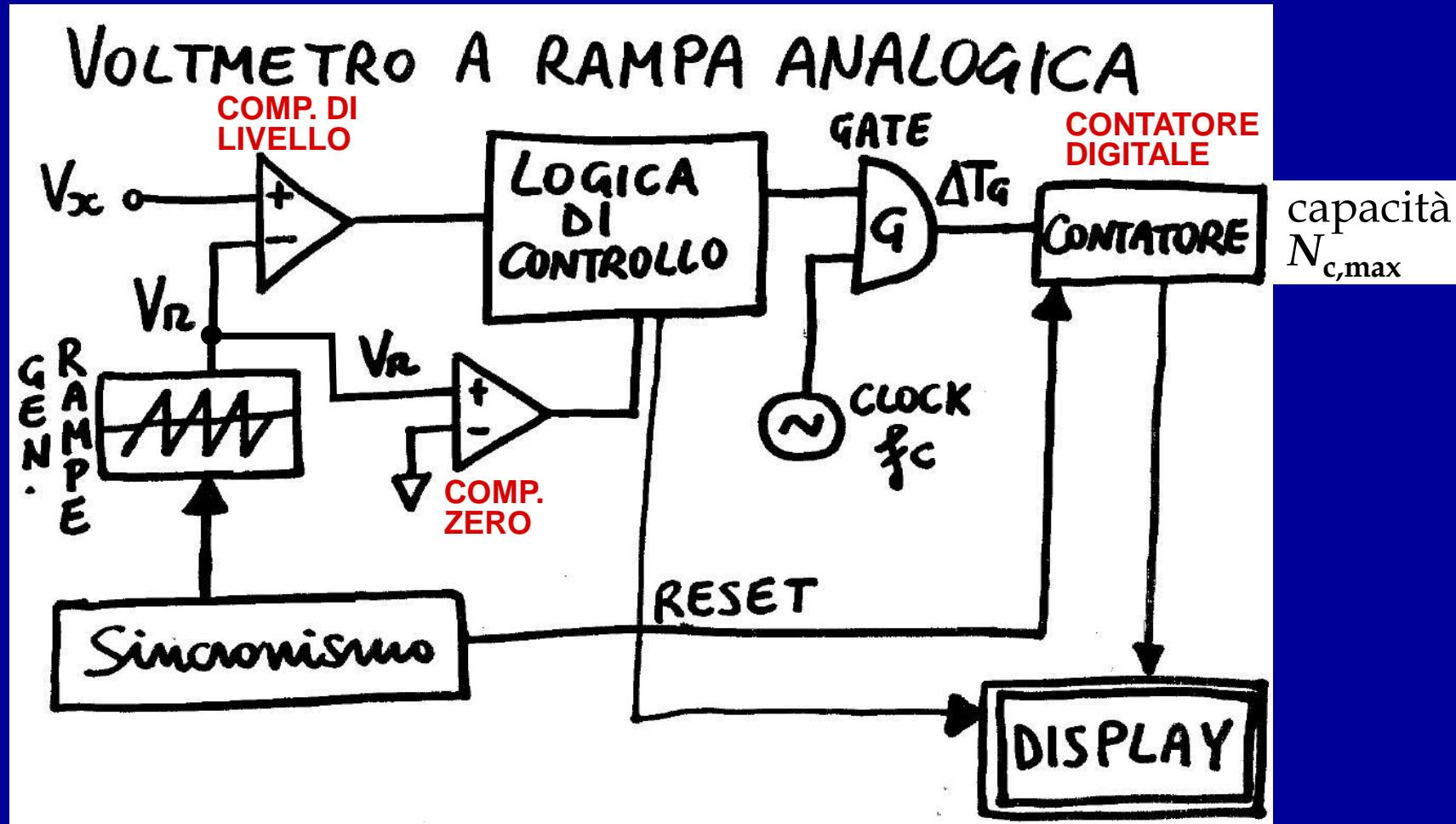
- ⌚ Risoluzione → bassa (2/3 cifre o 100/1000 liv.)
- ⌚ Velocità → bassa (poche letture/s)
- ⌚ Costo → contenuto ( $\sim 20$  kLit.  $\cong 10$  €)
- 😊 Validità didattica!

**Voltmetro elettromeccanico** ("lento e inaccurato")  
⇒ oggi risulta praticamente in disuso

# Voltmetro Digitale o Convertitore A/D

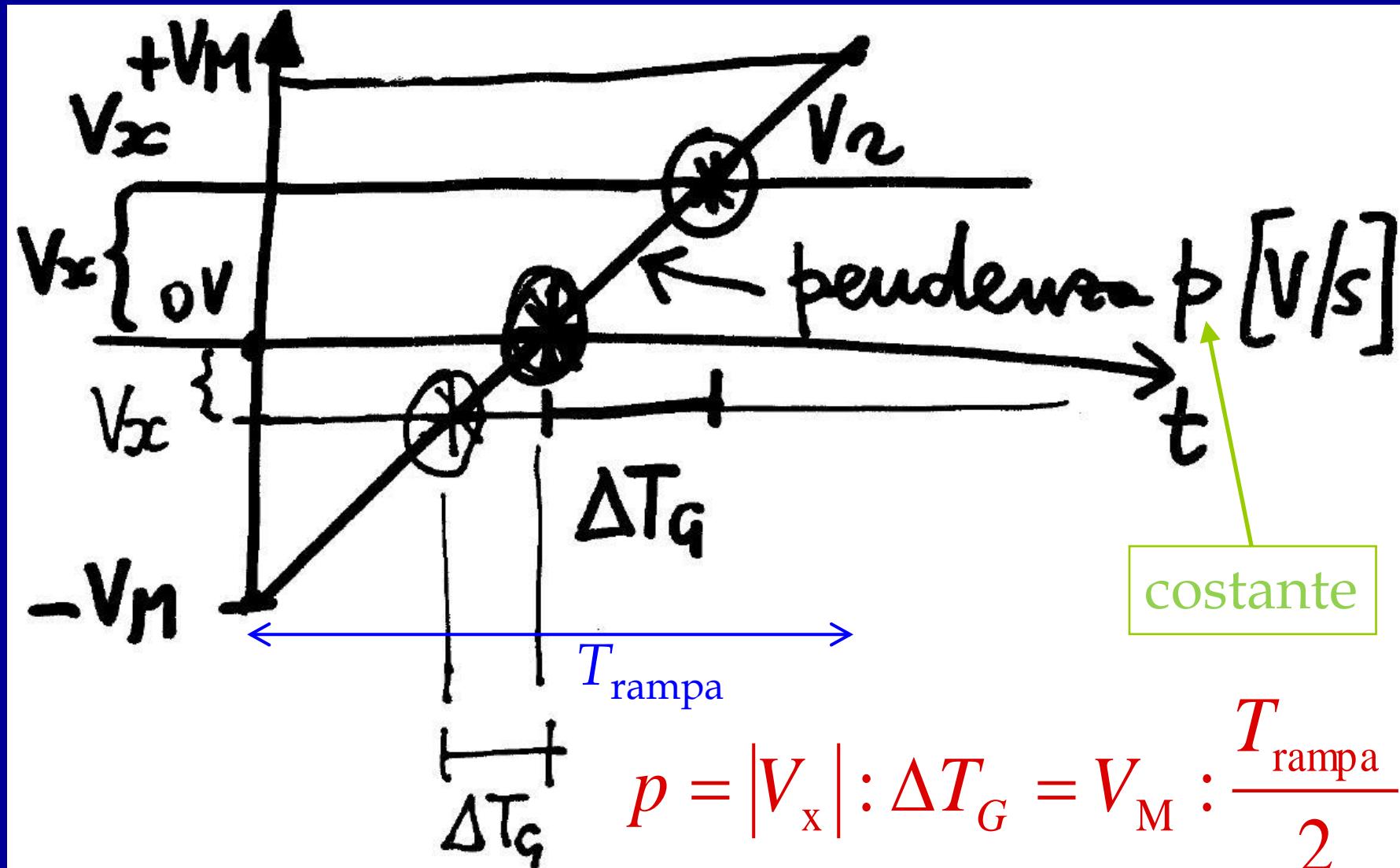


# Voltmetro a rampa analogica (1/6)



E' una versione a stato solido (molto più veloce e affidabile) del voltmetro potenziometrico.  
La risoluzione è di 4 o 5 cifre (10 000 o 100 000 conteggi)

# Voltmetro a rampa analogica (2/6)



# Voltmetro a rampa analogica (3/6)

Opera secondo una **conversione tensione/tempo** per cui la tensione  $V_x$  viene misurata contando un numero  $N_C$  di periodi di *clock*,  $T_C$ , in un intervallo di tempo  $\Delta T_G$  (che è **proporzionale** al modulo di  $V_x$ )

$$|V_x| = \frac{\Delta T_G}{T_{\text{rampa}} / 2} V_M = \frac{N_c T_c}{T_{\text{rampa}} / 2} V_M$$

Il segno di  $V_x$  si deduce da quale comparatore (di livello → “-” o di zero → “+”) scatta prima

**ACCURATEZZA:** dipende dalla linearità della rampa, dalla stabilità del *clock* ( $f_c$ ) e dal rumore e derive dei comparatori

# Voltmetro a rampa analogica (4/6)

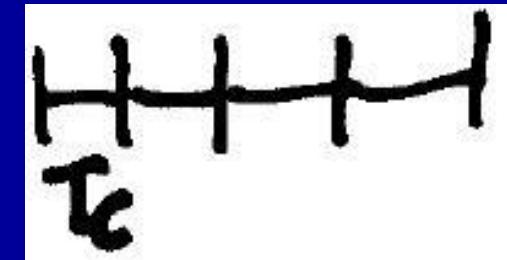
Errore di quantizz. = [0,1] conteggio

Incertezza = 1 conteggio /  $\sqrt{12}$

Molte volte -nelle tecniche per conteggio- l'errore può essere solo positivo (approx. per eccesso), o solo negativo (approx. per difetto), risultando ad es. limitato nell'intervallo  $[0, T_c]$

Altre volte, come qui, l'errore di quantizzazione si ha sia su  $T_{\text{START}}$  che su  $T_{\text{STOP}}$  (INC cresce di  $\sqrt{2}$  )

Misura  
per  
conteggio



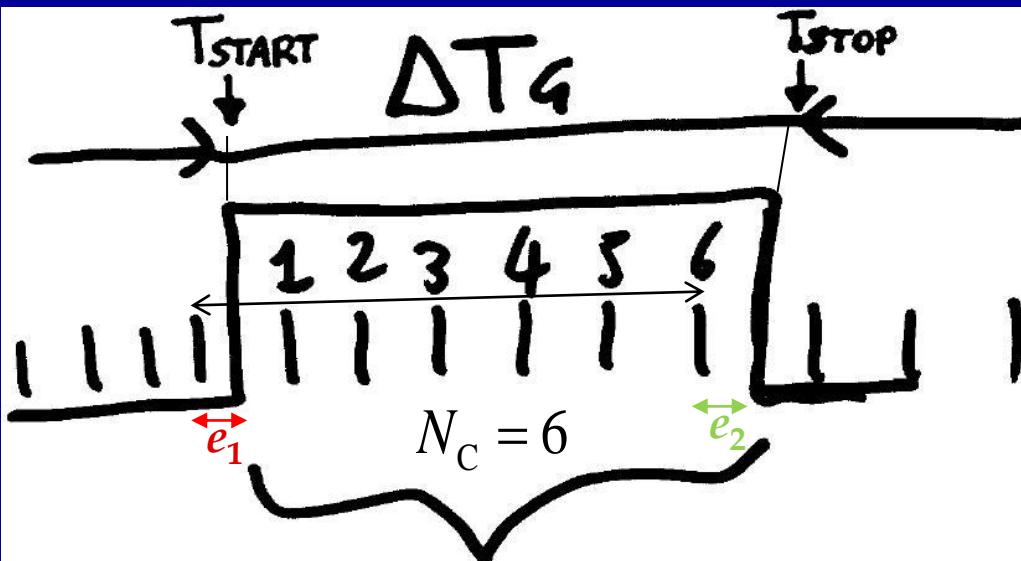
$$\Delta T_G = N_c T_c$$

$$T_{\text{STOP}} - T_{\text{START}} \cong \Delta T_G \propto |V_x|$$

$$\Delta T_G = N T_c - e_1 + e_2$$

$$\sigma^2(\Delta T_G) = \sigma^2(e_1) + \sigma^2(e_2)$$

$$u(\Delta T_G) = \sigma(\Delta T_G) = \sqrt{2}(T_c / \sqrt{12})$$



# Voltmetro a rampa analogica (5/6)

La rampa analogica varia linearmente da  $-V_M$  a

$$+V_M \text{ con periodo } T_{\text{rampa}} = \frac{1}{f_{\text{rampa}}}$$

Il tempo di misura è  $T_{\text{mis}} = T_{\text{rampa}}$  ( $\approx \text{ms}$ )

(velocità o frequenza di lettura pari a  $f_{\text{rampa}}$  ( $\approx \text{kHz}$ ))

Per una lettura con risoluzione  $\delta = \frac{1}{N} = \frac{1}{2N_{c,\max}}$

dove  $N_{c,\max} = N/2$  è il massimo numero di conteggi del contatore (su dinamica unipolare), deve essere

$$f_c = N \times f_{\text{rampa}} = 2N_{c,\max} \times f_{\text{rampa}} \Rightarrow N = \frac{f_c}{f_{\text{rampa}}}$$

come ricavabile da  $NT_c = T_{\text{rampa}}$   
o meglio da  $(N/2)T_c = T_{\text{rampa}}/2$

# Voltmetro a rampa analogica (6/6)

$$\delta = \frac{1}{N} = \frac{\Delta V}{D} = \frac{T_c}{T_{\text{rampa}}} = \frac{f_{\text{rampa}}}{f_c} \quad \text{RISOL.} \quad \text{liv.=} N = 2N_{c,\max}$$

$$m = \log_{10}(N) = \log_{10}\left(f_c / f_{\text{rampa}}\right) \quad \begin{matrix} \text{CIFRE} \\ \text{DECIMALI} \end{matrix}$$

$$n = \log_2(N) = \log_2\left(f_c / f_{\text{rampa}}\right) \quad \text{BIT}$$

**La risoluzione migliora al crescere del rapporto  $f_c/f_{\text{rampa}}$**

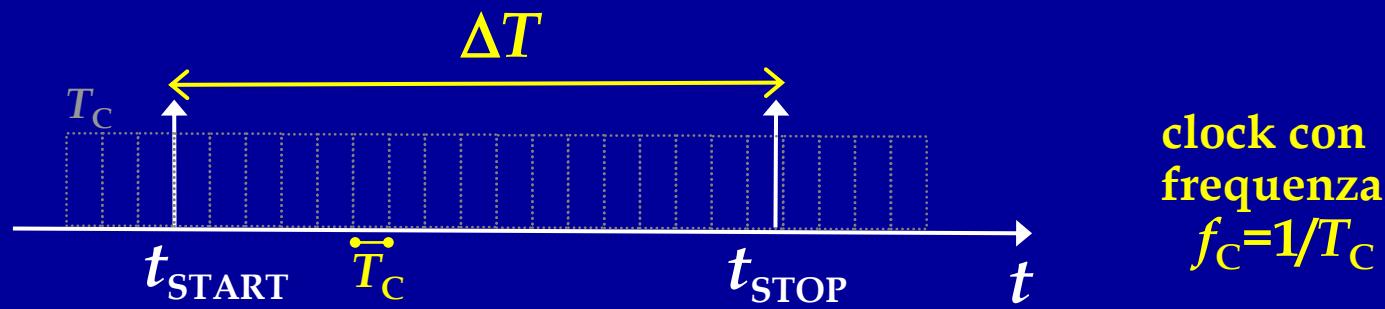
Conviene lavorare con  $f_c$  alta, ma per una  $f_c$  elevata occorre un contatore a “molte cifre” e “veloce”. Altri parametri:

$$|V_x| = p \cdot \Delta T_G \quad \text{da} \quad \Delta T_G = N_c T_c = \frac{|V_x|}{p} \quad \begin{matrix} \text{dinamica} \\ \downarrow \\ 2V_M \end{matrix}$$

con  $p$  pendenza della rampa analogica:  $p = \frac{2V_M}{T_{\text{rampa}}} (\text{V/s})$

# Misura di $\Delta T$ per conteggio

La misura di un intervallo di tempo  $\Delta T$  è fatta con un contatore elettronico, che “conta” la distanza temporale tra l’inizio  $t_{\text{START}}$  e la fine  $t_{\text{STOP}}$  dell’intervallo, come multiplo intero  $N_C$  di durate elementari  $T_C$  (periodo del Clock)



$$\Delta T = t_{\text{STOP}} - t_{\text{START}} \cong N_C T_C$$

Non sempre un  $t$  analogico cade esattamente su una transizione del clock: si ha una risoluzione finita  $T_C$  a cui corrisponde una incertezza di quantizzazione  $u_q(t) = T_C / \sqrt{12}$

# Incertezza nel conteggio di $\Delta T$

Con una incertezza  $u(t) = u_q(t)$  sia su  $t_{\text{START}}$  che su  $t_{\text{STOP}}$

l'incertezza complessiva su  $\Delta T = T_{\text{STOP}} - T_{\text{START}}$  è

$$u(\Delta T) = [u^2(t_{\text{STOP}}) + u^2(t_{\text{START}})]^{1/2} = \sqrt{2} u_q(t) = T_C / \sqrt{6}$$

Se si fa partire il periodo  $T_C$  del clock sincrono con  $t_{\text{START}}$ , avremo  $u(t_{\text{START}}) = 0$  e dunque  $u(\Delta T) = u(t_{\text{STOP}}) = T_C / \sqrt{12}$

In generale, scegliendo il periodo di clock  $T_C$  **abbastanza breve**, l'incertezza di misura dipenderà da altri fattori (molto più significativi della "piccola quantizzazione"): l'incertezza potrà dipendere da **altri tipi di rumore**, ad es. rumore di ampiezza, sempre presenti nel circuito di misura (circuito comparatore che determina gli istanti  $t_{\text{START}}$  e  $t_{\text{STOP}}$ )

Potendo **mediare** su più ripetizioni della misura di  $\Delta T$ , riusciamo a migliorare l'accuracy (ma "minore banda")

# Voltmetro - convertitore Flash (1/4)

E' il più veloce convertitore A/D con  $T_{\text{mis}} \approx 1 T_c$   
raggiunge frequenze di conversione fino a 50 GSa/s

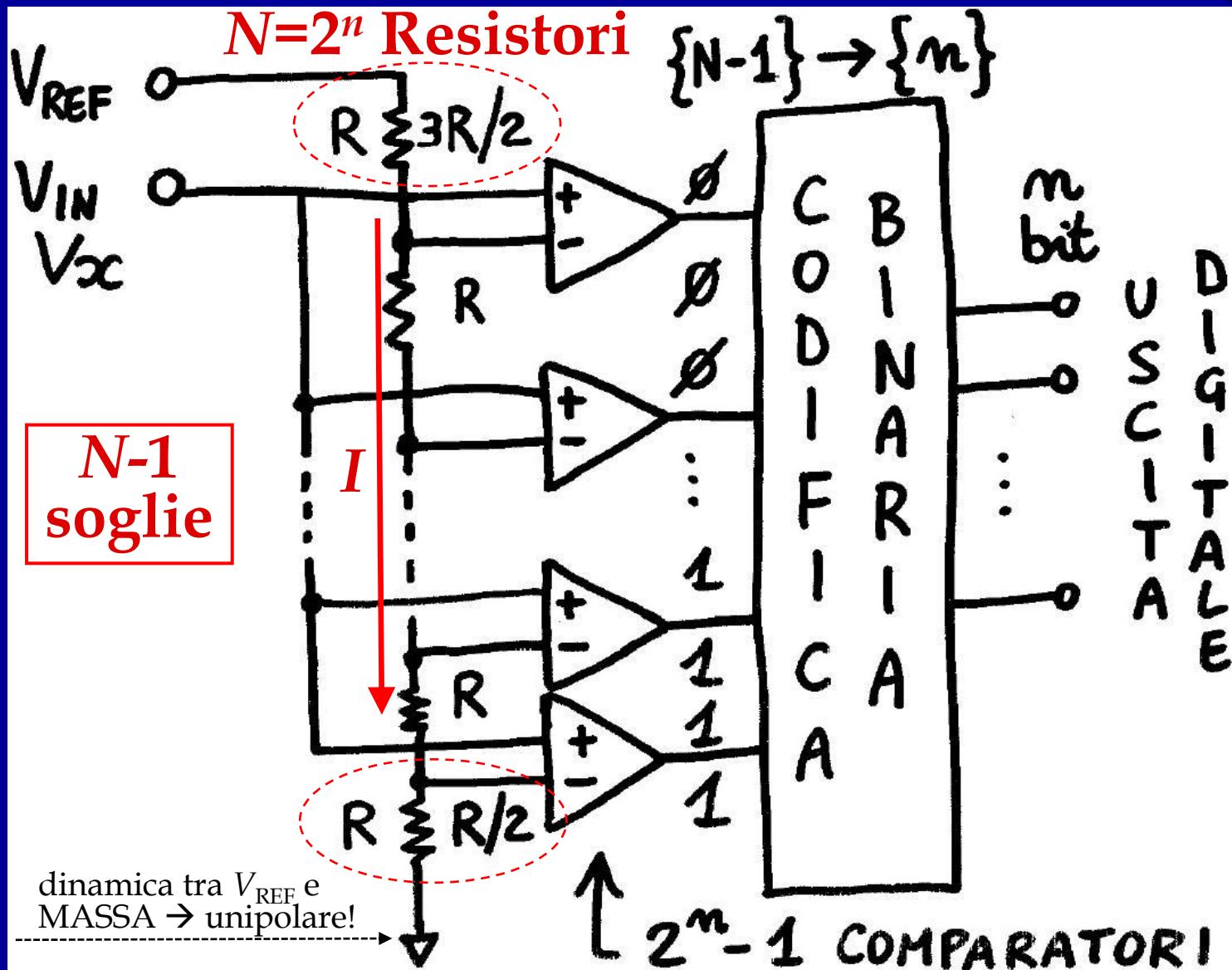
La complessità circuitale (e dunque il costo) cresce esponenzialmente con il numero di bit (come  $2^n$ ) e quindi si lavora a bassa risoluzione:

**solitamente  $n \sim 8$  bit**

esistono versioni anche a 10 e 12 bit

A così elevate velocità di campionamento (alta banda di segnale e rumore) occorre tenere presente il numero di bit equivalenti...  
⇒ non è opportuno salire con il numero di bit

# Voltmetro - convertitore Flash (2/4)



# Voltmetro - convertitore Flash (3/4)

$N$  resistori tutti uguali

$$I = \frac{V_{\text{ref}}}{NR} \quad V_i = i \underbrace{\overbrace{(RI)}^{\Delta V}}_{\overbrace{V_{\text{ref}}}^{\Delta V}/N} \quad i = 1, \dots, N-1$$

**troncamento**

$N-1$  soglie

Primo e ultimo resistore diversi

**arrotondamento**

$$I = \frac{V_{\text{ref}}}{2R + (N-2)R} = \frac{V_{\text{ref}}}{NR} \quad \text{come nel caso precedente}$$

$$V_i = \left[ \frac{R}{2} + (i-1)R \right] I = \left( i - \frac{1}{2} \right) \frac{V_{\text{ref}}}{N}$$

$N-1$  soglie  
“centrate”

Con la rete di resistori a  $3/2 R$  e  $R/2$  la soglia del 1° livello viene dimezzata in ampiezza il che è utile per non avere *offset* nella caratteristica di conversione e per convertire segnali bipolarari

**1° ed  $N^{\circ}$  livello sono disuniformi dagli altri**

# Voltmetro - convertitore Flash (4/4)

E' il convertitore **A/D utilizzato negli oscilloscopi digitali** dove la **risoluzione modesta** non è un fattore limitante mentre la **velocità è essenziale**

La dinamica di misura viene suddivisa in  **$N = 2^n$  livelli equispaziati ( $\Delta V = V_{\max} / 2^n$ )** utilizzando  **$N-1 = 2^n - 1$  soglie (e comparatori)** confrontate in parallelo

Tipicamente si lavora con  **$N=256$  livelli ( $n=8$  bit)** e dunque la **risoluzione relativa** è  **$\delta=1/256 \cong 4 \cdot 10^{-3}$**  (la ris. ass. dipende dalla dinamica adottata)

È usato per misure su **segnali molto veloci** (TLC, Fisica, ...) ma ottenendo accuratezza limitata

# Esercizio (convertitore Flash)

Oscilloscopio digitale a larga banda

Dinamica  $D = \pm 10 \text{ V}$      $n = 8 \text{ bit}$      $f_{\text{sample}} = 1 \text{ GSa/s}$

$$\Delta V = ? \qquad \Delta V = \frac{D}{2^n} = \frac{20 \text{ V}}{256} \cong 80 \text{ mV}$$

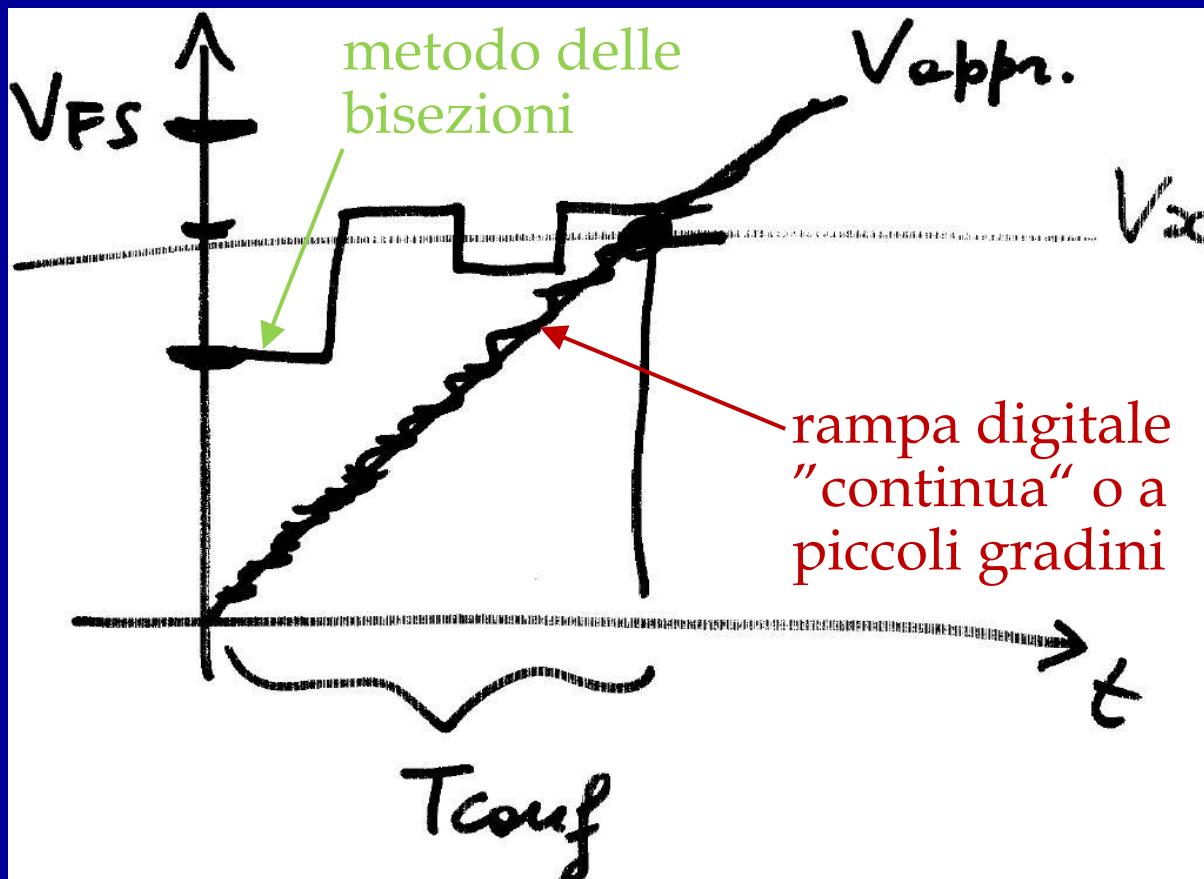
$$u(V) = ? \qquad u(V) = u_q(V) = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}} \cong 23 \text{ mV}$$

$$f_{x,\max} = ? \qquad f_{x,\max} = f_{\text{sample}} / 2 = 500 \text{ MHz}$$

Oltre alla quantizzazione ci sarà anche un rumore elettronico *et al.* (v. bit equivalenti) e  $u_{\text{tot}}(V)$  sarà maggiore della sola  $u_q(V)$

<http://www.intersil.com/content/intersil/en/tools/software-drivers/noise-estimating-calculators.html>

# Voltmetro ad approssimazioni successive (1/6)



Con soli  **$n$  confronti** si ottiene  
una **risoluzione**  $\delta = 1/N = 1/2^n$

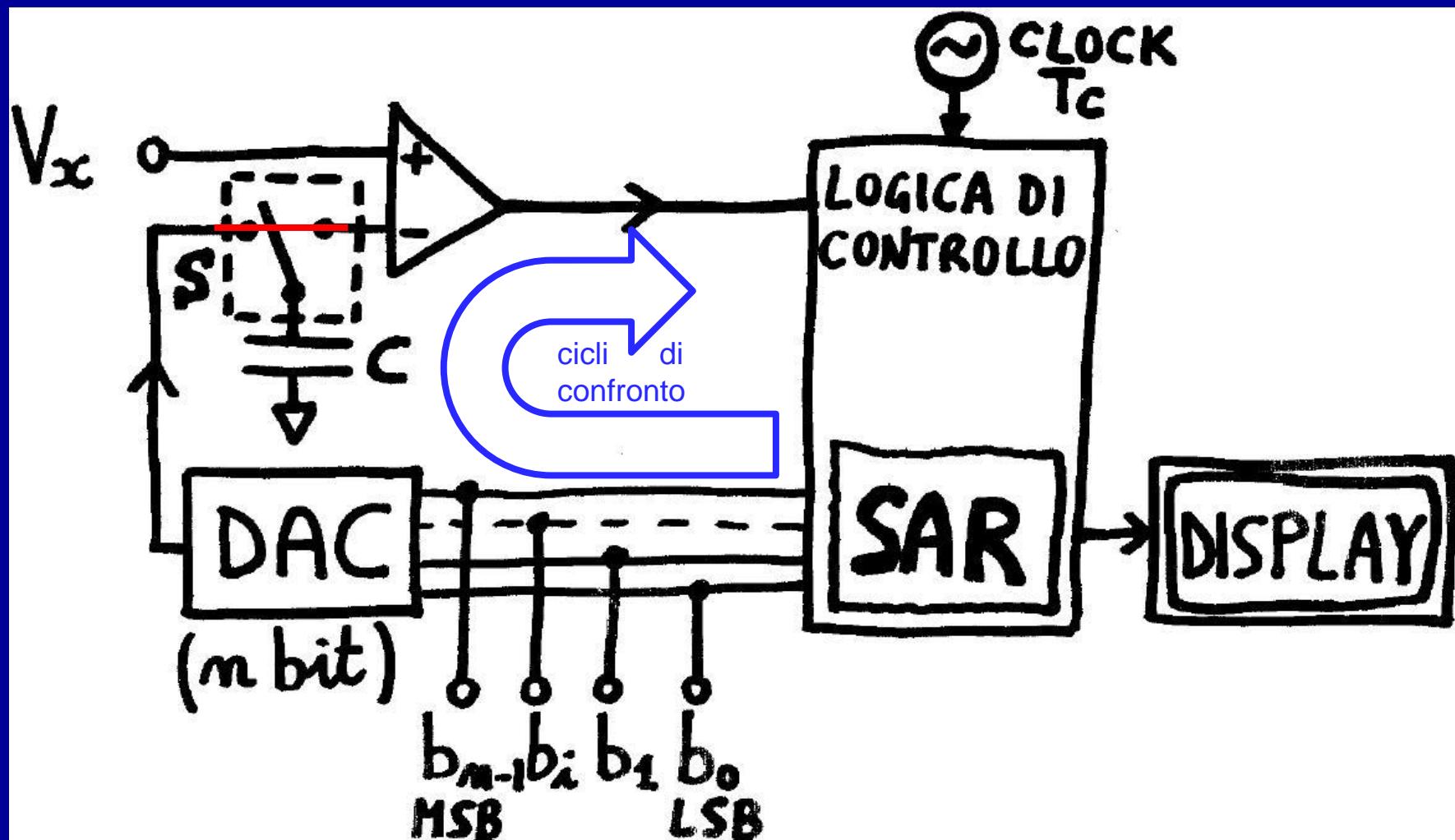
# Voltmetro ad approssimazioni successive (2/6)

- Convertitore D/A a  $n$  bit ( $\equiv$  "potenziometro" o gen. rampe)  
Comparatore e Logica di controllo (confronti)  
*Clock* (temporizzazione del sistema)  
**SAR Successive Approximation Register** (valori in prova)
- Con un **metodo di BISEZIONE** si "provano" tutti i bit (valore =1) a partire dal più significativo (MSB) fino al bit meno significativo (LSB)  
**Ad ogni confronto con  $V_x$  si decide se mantenere il bit a "1" o riportarlo a "0"**

$$\text{Uscita DAC: } V_{\text{D/A}} = \frac{V_{\text{FS}}}{2^n} [b_{n-1} 2^{n-1} + \dots + b_1 2 + b_0]$$

# Voltmetro ad approssimazioni successive (3/6)

Approccio digitale al metodo potenziometrico



# Voltmetro ad approssimazioni successive (4/6)

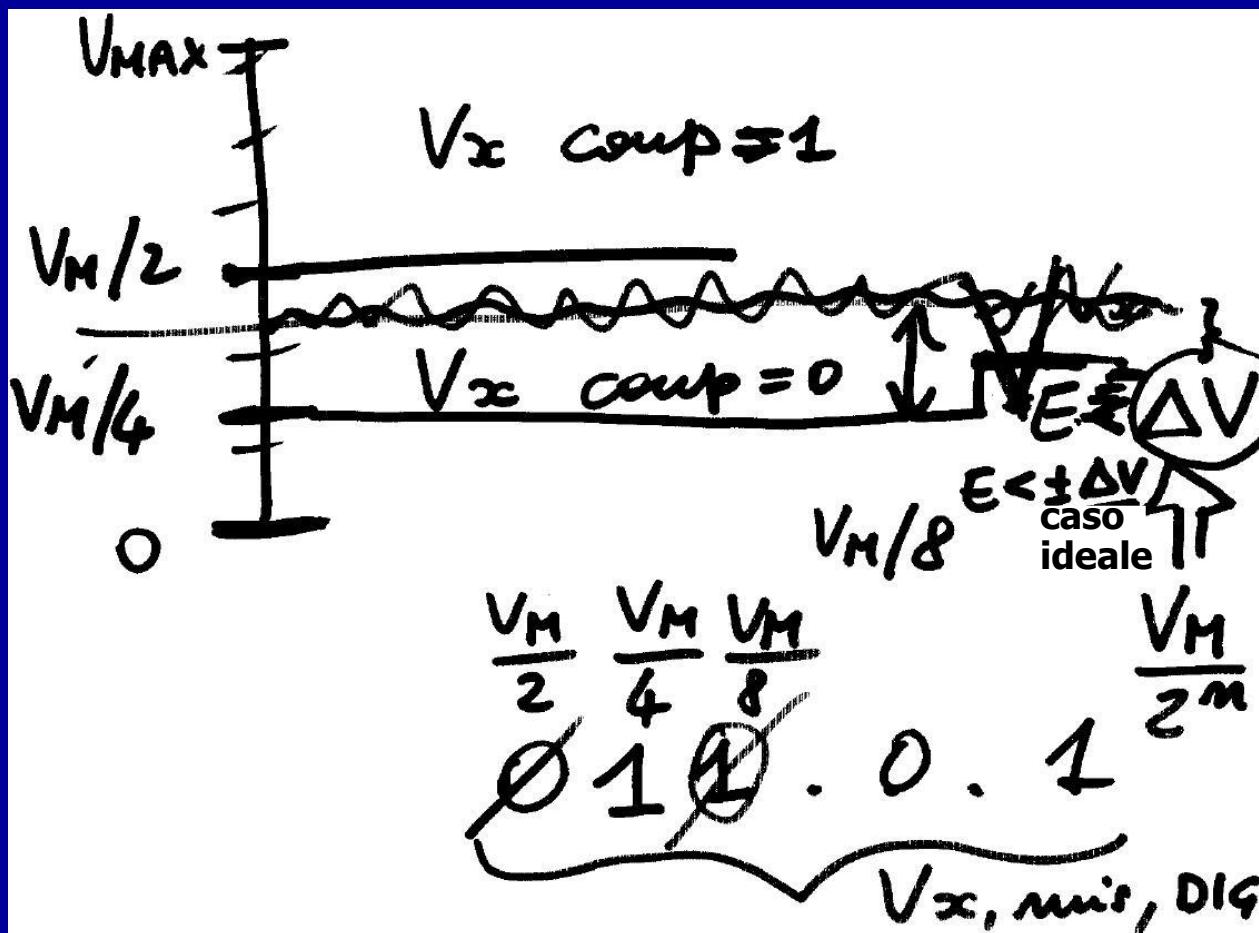
- La cifra meno significativa ha un PESO

$$\Delta V = V_{\text{FS}} / 2^n \quad ( N = 2^n )$$

La cifra più significativa vale  $V_{\text{FS}} / 2$

- Si eseguono “solo”  $n = \log_2 N$  confronti ciascuno di durata  $mT_c$  con  $m$  tipicam. compreso tra 2 e 5
- Il tempo di misura è prefissato, indip. da  $V_x$ , e vale  $T_{\text{mis}} = n T_{\text{confr.}} = n (mT_c)$

# Voltmetro ad approssimazioni successive (5/6)



Il **rumore differenziale** può portare “istantaneamente” a errate decisioni sul singolo confronto e dunque a un errore di misura

# Voltmetro ad approssimazioni successive (6/6)

- **Risoluzione effettiva** (da 3 a 5 “cifre effettive”) dipende dal rumore presente agli stadi di ingresso del comparatore (non è sempre  $V_{FS}/2^n\dots$ )
- **Accuratezza**: dipende dal riferimento interno, dalla qualità del DAC e dal rumore del comparatore
- STATO DELL’ARTE (ADC veloci ad appr. succ.):

$n$ [bit]	$N=4\,096$	$N=65\,536$	$N=262\,144$
$T_{mis}$ [ns]	50	100	500
$f_{mis}$ [MSa/s]	20	10 (AD7626)	2 (AD7641)

# Prestazioni DVM ad approx. succ.

Questi voltmetri possono essere anche piuttosto veloci mantenendo una buona risoluzione  
(e.g. nelle DAQ di LabGolgi,  $T_{\text{mis}} = 5 \mu\text{s}$ , ovvero  $f_{\text{sample}} = 200 \text{ kSa/s}$  con  $n = 12\text{-}16$  bit)

Filtro passa-basso in ingresso per limitare le “errate decisioni” dovute al rumore elettronico presente in ingresso  
→ si riduce anche la velocità di conversione

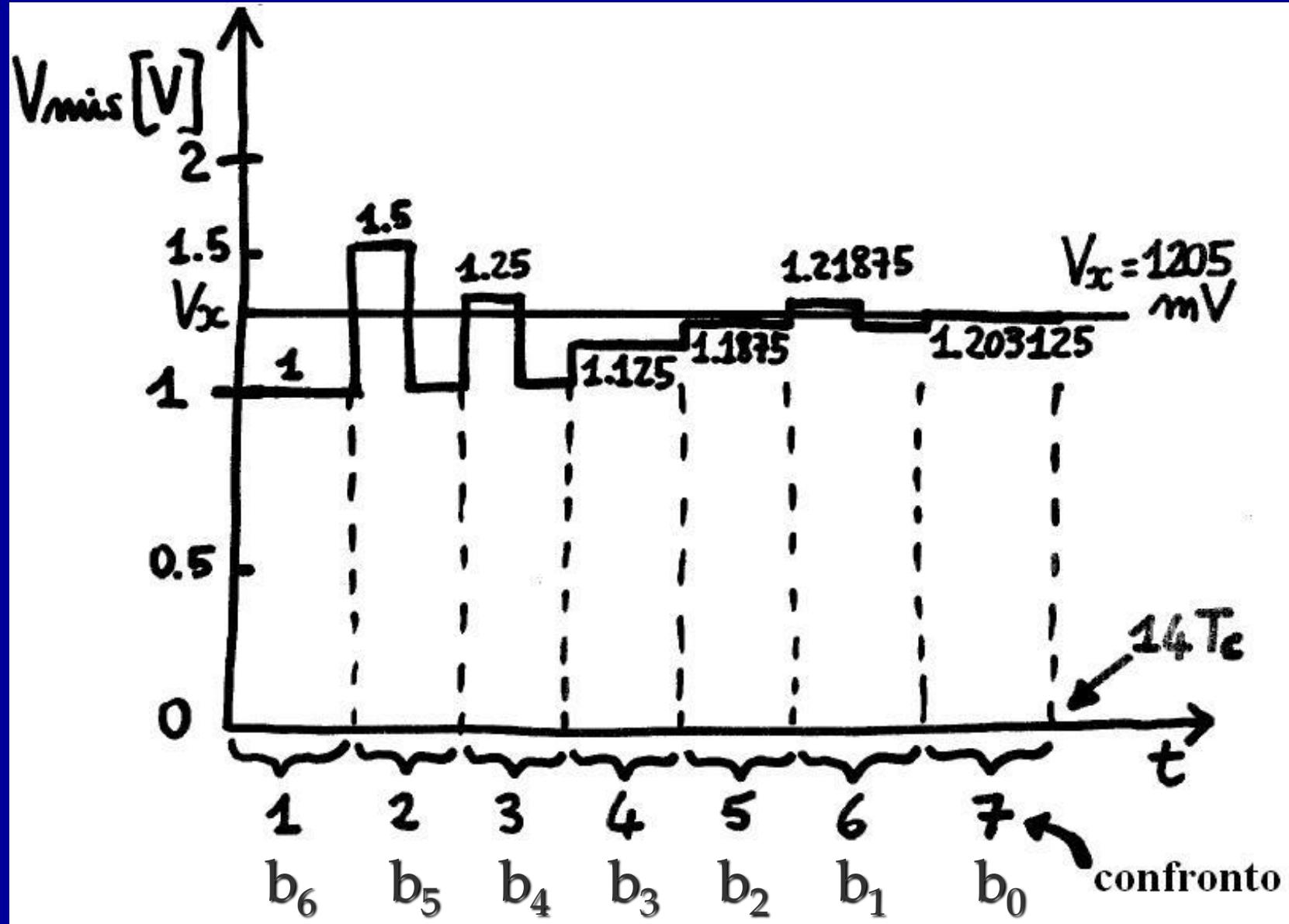
# Esercizio sul voltmetro ad approssimazioni successive

Dinamica 0 - 2 V     $n = 7$  bit

$f_c = 1$  MHz     $T_{\text{confronto}} = 2 T_c$

Ricavare il tempo di misura  $T_{\text{mis}}$ , il valore misurato  $V_{\text{mis}}$  e il suo errore percentuale rispetto a una tensione sotto misura di valore  $V_x = 1205$  mV

# Soluzione (1/2)



# Soluzione (2/2)

$$T_c = 1 / f_c = 1 \mu\text{s}$$

$$\Delta V = D/2^n = (2 \text{ V})/(128) = 15.625 \text{ mV}$$

$$T_{\text{confr}} = 2T_c = 2 \mu\text{s}$$

$$N_{\text{mis}} = V_x / \Delta V \cong 77.12 \Rightarrow \text{Int}\{N_{\text{mis}}\} = 77$$

$$V_{\text{mis}} = \text{Int}\{N_{\text{mis}}\} \cdot \Delta V = 1.203125 \text{ V}$$

$$T_{\text{mis}} = n T_{\text{confr}} = 14 \mu\text{s} (\approx 70 \text{ kSa/s})$$

$$V_{\text{mis}} = 1203.125 \text{ mV} \quad \text{quando } V_x = 1205 \text{ mV}$$

$$\text{ERR \%} = \frac{|V_x - V_{\text{mis}}|}{V_x} = 0.1556 \%$$

Con soli 7 bit si ha una risoluzione

$$\Delta V = \frac{V_{\text{max}}}{2^n} = \frac{2 \text{ V}}{128} \cong 15.6 \text{ mV}$$

Naturalmente  $|V_x - V_{\text{mis}}| < \Delta V$  ( $1.875 \text{ mV} < 15.6 \text{ mV}$ )

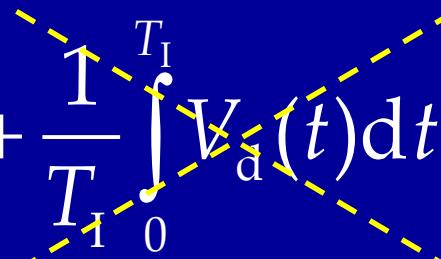
# Voltmetri a integrazione

Il valore di misura dipende dal segnale (tensione) in ingresso secondo una **relazione integrale**:

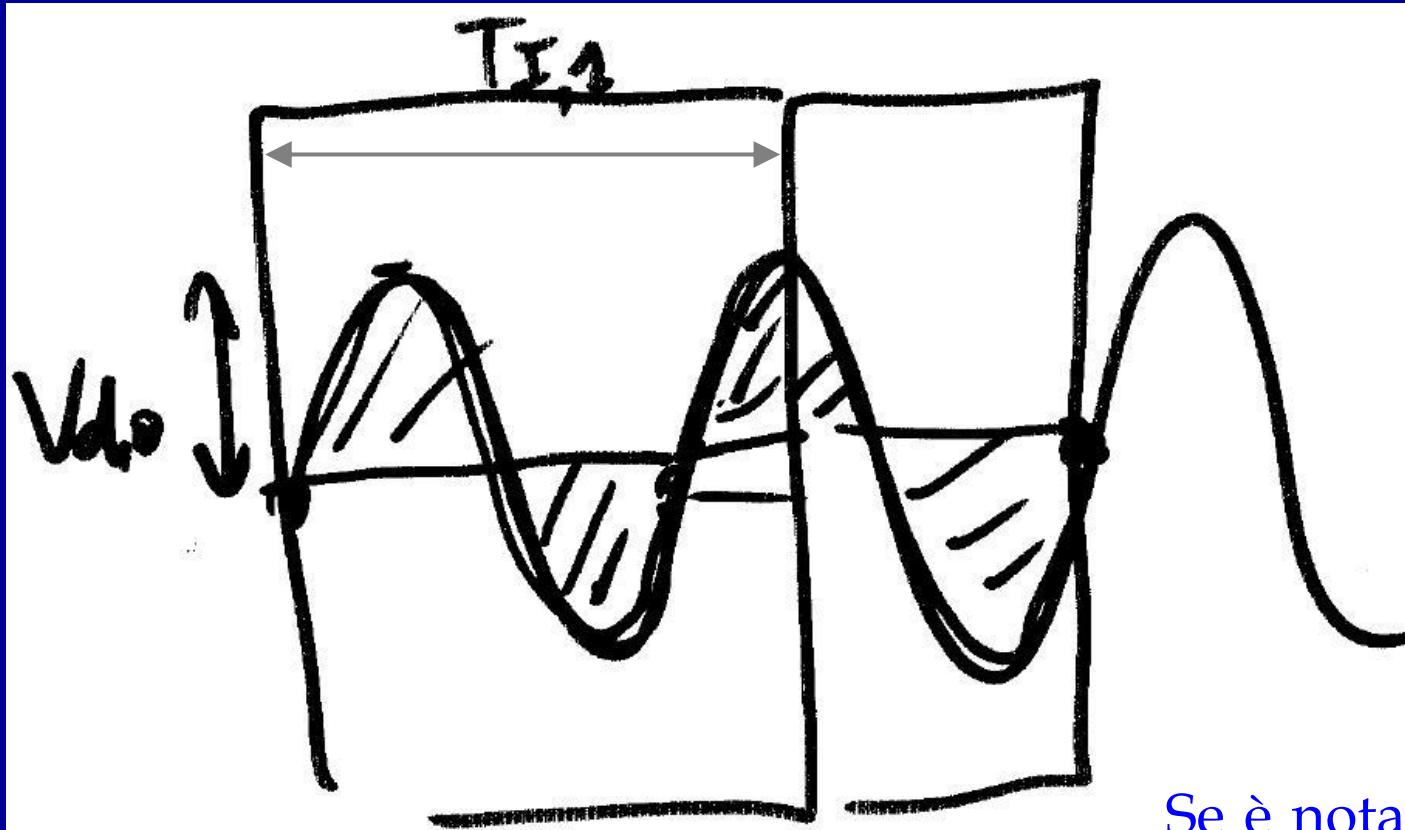
$$V_m \propto \frac{1}{T_I} \int_0^{T_I} V(t) dt$$

Calcoliamo la **reiezione al disturbo** in uno strumento a integrazione:

$$V(t) = V_x + V_d(t) \quad \text{segnale + disturbo}$$

$$V_m(T_I) = \frac{1}{T_I} \int_0^{T_I} [V_x + V_d(t)] dt = V_x + \frac{1}{T_I} \int_0^{T_I} V_d(t) dt$$


# Esempio di reiezione al disturbo

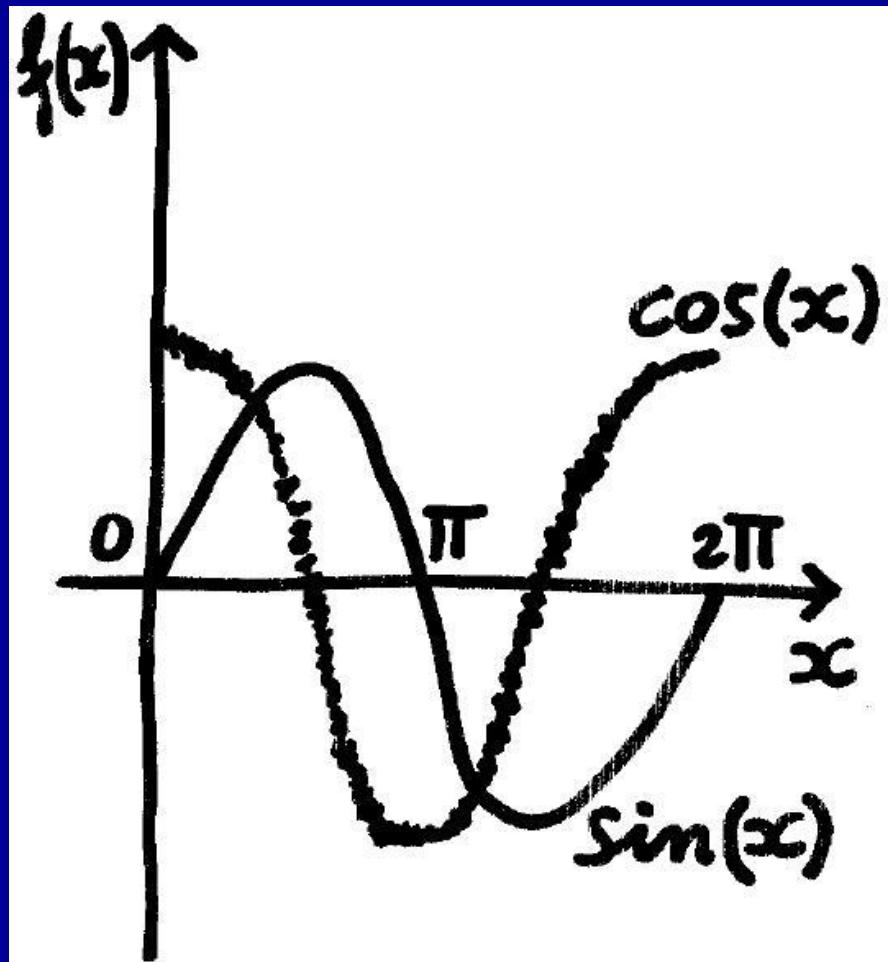


$$\frac{1}{T_I} \int_0^{T_I} V_d(t) dt \rightarrow 0$$

per  $T_I \rightarrow \infty$  o  $T_I \gg T_d$

Se è nota la frequenza del disturbo, può essere utile scegliere un  $T_I$  opportuno  
In generale per " $T_I$  lungo" la reiezione al disturbo migliora

# [richiami] Funzioni trigonometriche



$$\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$$

$$\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$$

$$\frac{d}{dx} \{\sin(x)\} = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} \{\cos(x)\} = -\sin(x)$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x)$$

# [richiami] Formula di Eulero

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$
$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \end{aligned} \right\} \rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

# [richiami] Somme di seni e coseni

[ ‘sin’ e ‘cos’ di angoli somma e differenza ]

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

[ “somme → prodotti”:prostaferesi e “somme ← prodotti”:Werner]

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos(\alpha)\cos(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

**somma e differenza**

←

**prodotto  
modulazione**

# Integrazione (caso particolare)

Il disturbo misurato all'uscita dello strumento vale:

$$V_{d,m}(T_I) = \frac{1}{T_I} \int_0^{T_I} V_d(t) dt$$

Immaginiamo che all'ingresso sia presente un disturbo sinusoidale del tipo:

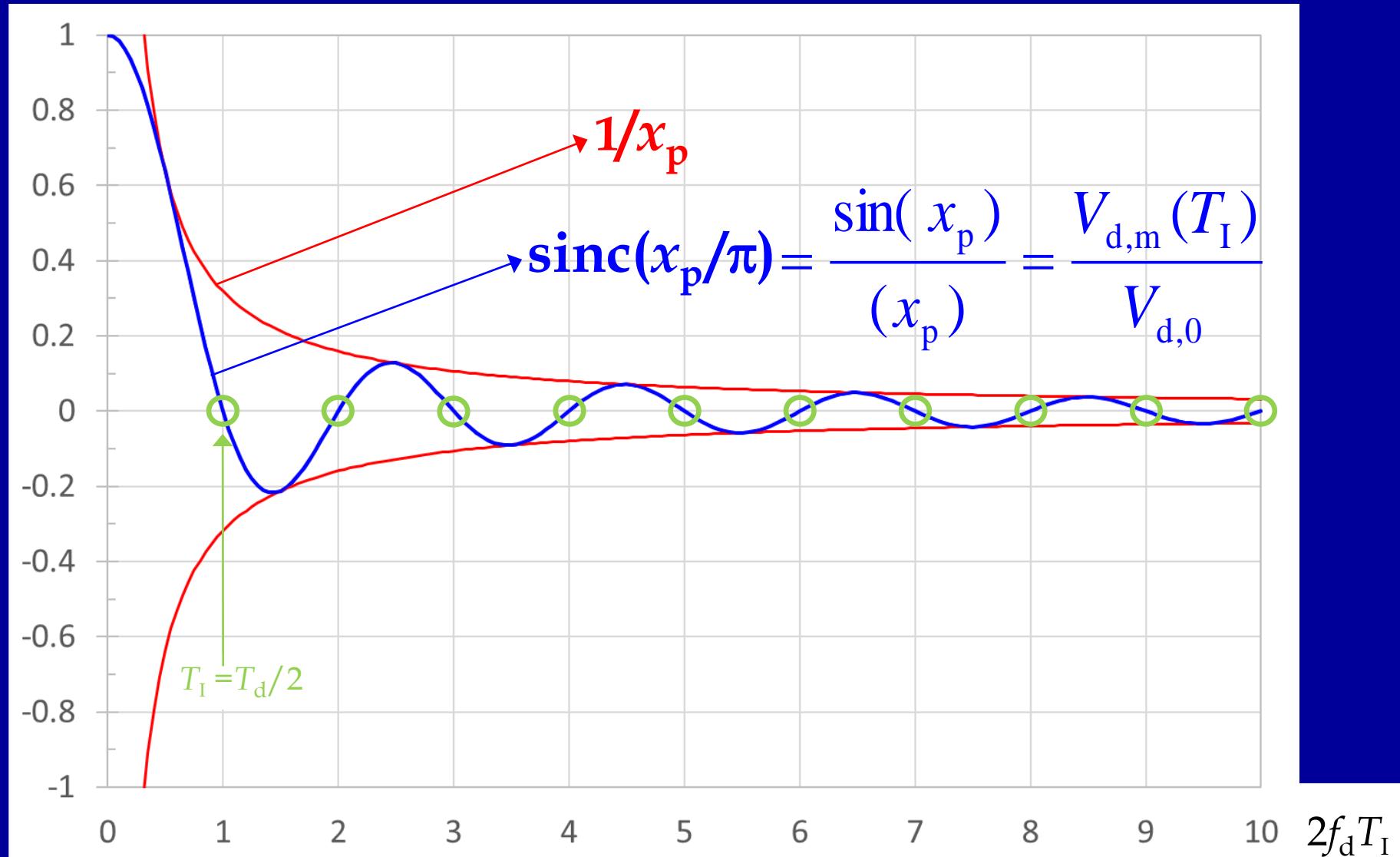
$$V_d(t) = V_{d,0} \cos(2\pi f_d t)$$

In uscita si avrà:

$$V_{d,m}(T_I) = \frac{V_{d,0}}{T_I} \int_0^{T_I} \cos(2\pi f_d t) dt = \frac{V_{d,0}}{T_I} \frac{\sin(2\pi f_d T_I)}{2\pi f_d} = \frac{\sin(x_p)}{(x_p)} V_{d,0}$$

con  $x_p = \pi 2 f_d T_I$  (il disturbo misurato decresce come  $\text{sinc}(x_p)$  al crescere di  $x_p \approx 2 f_d T_I$ )

# Integrazione (andamento $\text{sinc } x_p$ )



# Integrazione (caso generale) (1/2)

Disturbo “sinusoidale qualsiasi” (con fase  $\varphi$  arbitraria) su un intervallo di integrazione sempre  $T_I$  ma centrato su “ $t_0$  qualsiasi”

$$V_d(t) = V_{d,0} \sin(2\pi ft + \varphi)$$

Per brevità indicheremo  
 $T=T_I$  e  $f=f_d$  ma non  
necessariamente è  $T=1/f$

$$\begin{aligned} V_{d,m} &= \frac{1}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} V_d(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} V_{d,0} \sin(2\pi ft + \varphi) dt = \\ &= \frac{V_{d,0}}{T} \left[ \frac{-\cos(2\pi ft + \varphi)}{2\pi f} \right]_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \end{aligned}$$

$$V_{d,m} = \frac{V_{d,0}}{2\pi f T} \left\{ \cos \left[ 2\pi f \left( t_0 - \frac{T}{2} \right) + \varphi \right] - \cos \left[ 2\pi f \left( t_0 + \frac{T}{2} \right) + \varphi \right] \right\}$$

# Integrazione (caso generale) (2/2)

$$V_{d,m} = \frac{V_{d,0}}{2\pi f T} \left\{ \cos \left[ 2\pi f \left( t_0 - \frac{T}{2} \right) + \varphi \right] - \cos \left[ 2\pi f \left( t_0 + \frac{T}{2} \right) + \varphi \right] \right\} =$$

$$= \frac{V_{d,0}}{2\pi f T} 2 \sin(2\pi f t_0 + \varphi) \sin(\cancel{2\pi f T / 2}) \quad \text{ricordando}$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = \\ = 2 \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$= V_{d,0} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \sin(2\pi f t_0 + \varphi)$$

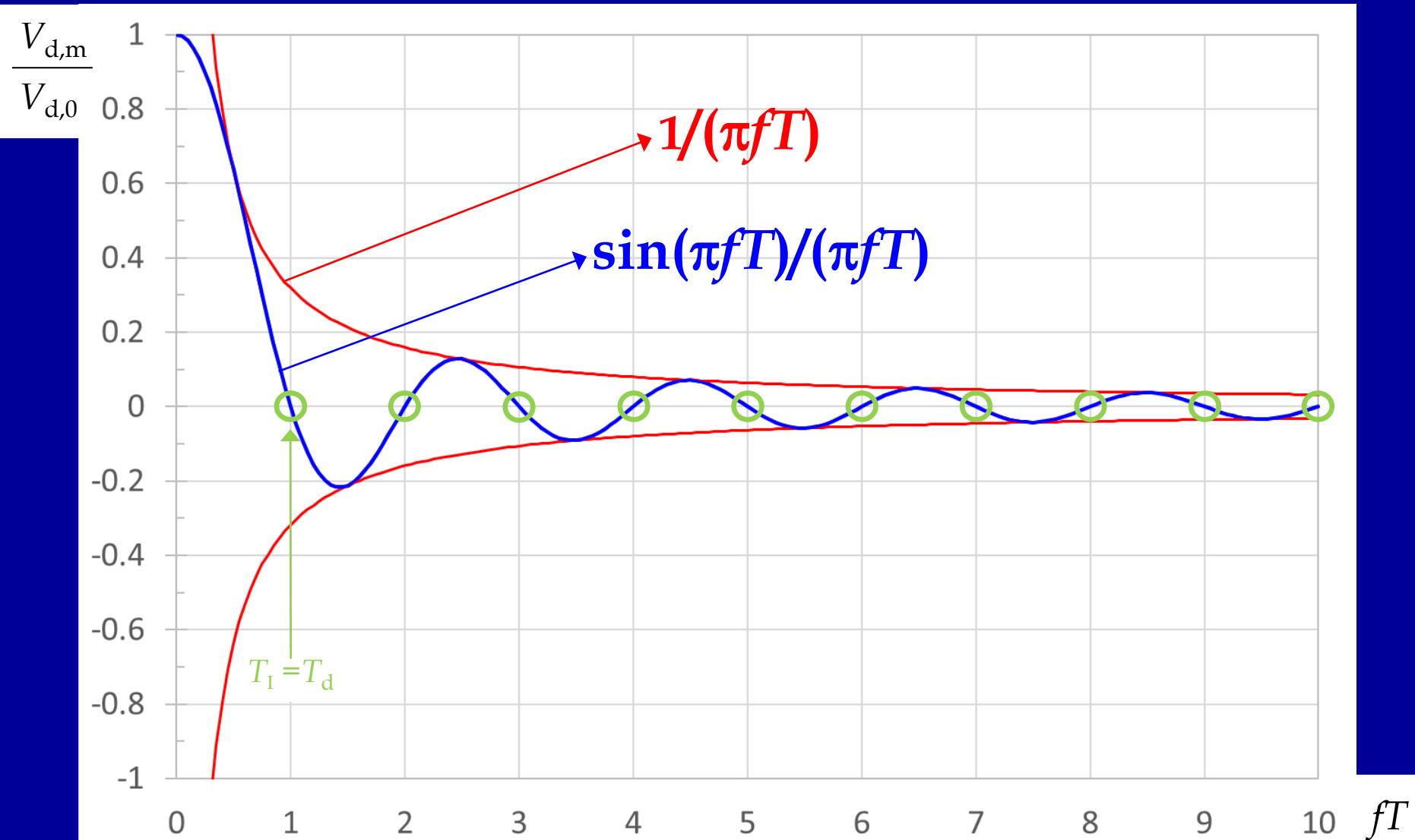
$$V_{d,m}(T) = V_{d,0} \frac{\sin(x)}{x} F(t_0, \varphi)$$

massimizzabile  
con +1 (*worst case*)

il particolare valore  
di reiezione dipende  
anche da  $t_0$  e  $\varphi$

dove  $x = \pi f T$  e  $F(t_0, \varphi) = \sin(2\pi f t_0 + \varphi)$  con  $-1 \leq F(t_0, \varphi) \leq +1$   
fattore moltiplicativo, a seconda di  $t_0$  e  $\varphi$ , limitato tra  $\pm 1$

# Integrazione (dist.misurato/dist.)



# \*Integrazione (generale vs particolare)

Se nel caso generale scegliamo  $t_0 = T/2$  e  $\varphi = \pi/2$   
allora GENERALE → PARTICOLARE

$$\begin{aligned} V_{d,m}(T) &= \sin(2\pi f t_0 + \varphi) \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} V_{d,0} = \frac{\sin(\pi f T) \cos(\pi f T)}{\pi f T} V_{d,0} = \\ &= \frac{\sin(2\pi f T)}{2\pi f T} V_{d,0} \quad \text{essendo } \sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2} \end{aligned}$$

In ogni caso, potendo lavorare con  $T_I = T = 1/f = 1/f_d$   
o anche con  $T_I = m(1/f_d) = mT_d$ , con  $m$  intero, si  
ottiene, idealmente, una **completa eliminazione**  
**del disturbo** essendo  $V_{d,m}(T_I = m \cdot 1/f) \equiv 0$

Naturalmente, questo è possibile solo a patto di conoscere bene il valore della frequenza  $f$  del disturbo

# Integrazione (disturbo min e max)

$$V_{d,m}(T) = V_{d,0} \frac{\sin(x)}{x} F(t_0, \varphi) \quad x = \pi f T$$
$$F(t_0, \varphi) = \sin(2\pi f t_0 + \varphi)$$

Mentre  $\sin(x)/x$  dipende dal prodotto  $(fT)$ , variare  $t_0$  e  $\varphi$  vuole dire scegliere una diversa fase per l'onda sinusoidale di disturbo e dunque un particolare valore  $\in [-1, +1]$  per la funzione  $F(t_0, \varphi)$

Scegliendo una fase opportuna per il disturbo (o meglio per la finestra di integrazione) si può sempre ottenere  $F(t_0, \varphi) = \sin(2\pi f t_0 + \varphi) = 0$  e dunque il valore "**minimo**" per il disturbo integrato che è  $V_{d,m,min} = 0$ . Invece, senza alcun controllo sulla fase/finestra, nel **caso peggiore**, ossia per  $F(t_0, \varphi) = \sin(2\pi f t_0 + \varphi) = \pm 1$ , il **disturbo residuo "massimo"** è

$$\left| V_{d,m,max} \right| = \frac{|\sin(x)|}{x} V_{d,0} \leq \frac{1}{\pi f T} V_{d,0}$$

**Attenuazione  $A \geq \pi f T$  sul disturbo  $V_{d,0}$ :**  $A \gg 1$  se  $T \gg 1/f$  o  $f \gg 1/T$

# Integrazione (disturbo efficace)

$$V_{d,m}(T) = V_{d,0} \frac{\sin(x)}{x} F(t_0, \varphi) \quad \begin{aligned} x &= \pi f T \\ F(t_0, \varphi) &= \sin(2\pi f t_0 + \varphi) \end{aligned}$$

Mentre  $\sin(x)/x$  dipende dal prodotto  $(fT)$ , i parametri  $t_0$  e  $\varphi$  possono essere considerati come variabili casuali

Per  $\varphi$  variabile casuale con  $\varphi \in [-\pi, \pi]$

$$\mu_F = \langle F \rangle = 0 \quad \sigma_F^2 = \langle F^2 \rangle - \langle F \rangle^2 = 1/2 \rightarrow u(F) = \sqrt{\langle F^2 \rangle} = 1/\sqrt{2}$$

Anche per "t<sub>0</sub> casuale" si ricava  $u(F)=1/\sqrt{2}$

Lavorando a  $f$  e  $T$  fissati, e facendo variare arbitrariamente  $\varphi$  e/o  $t_0$ , si ottiene per il **disturbo integrato un “valore efficace”**

$$V_{d,m, \text{eff}} = \sqrt{\langle V_{d,m}^2(T) \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|\sin(x)|}{x} V_{d,0} \quad \boxed{\qquad} \quad \cong 0.7 \times V_{d,m, \text{max}}$$

# Integrazione (trasmissione e reiezione)

La **trasmissione** ( $t$ ) e la **reiezione** ( $r$ ) del disturbo, in ampiezza, saranno “al più” o “almeno”:

$$t = \left| \frac{V_{d,m}}{V_{d,0}} \right| \leq \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| <, << 1 \quad \frac{V_{\text{OUT}}}{V_{\text{IN}}}$$

$$r = \left| \frac{V_{d,0}}{V_{d,m}} \right| \geq \left| \frac{x}{\sin(x)} \right| >, >> 1 \quad \frac{V_{\text{IN}}}{V_{\text{OUT}}}$$

$$x = \pi f T = \pi f_d T_I$$

La **reiezione cresce (tendenzialmente) al crescere di  $x$**  e dunque di  $f_d$  e  $T_I$  e inoltre  $r \rightarrow \infty$  se  $f_d \cdot T_I = m$

# Integrazione (reiezione in potenza)

La **trasmissione in potenza** del disturbo è:

$$T = t^2 = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$$

La **reiezione in potenza** al disturbo sarà data da:

$$R = r^2 = \frac{x^2}{\sin^2(x)}$$

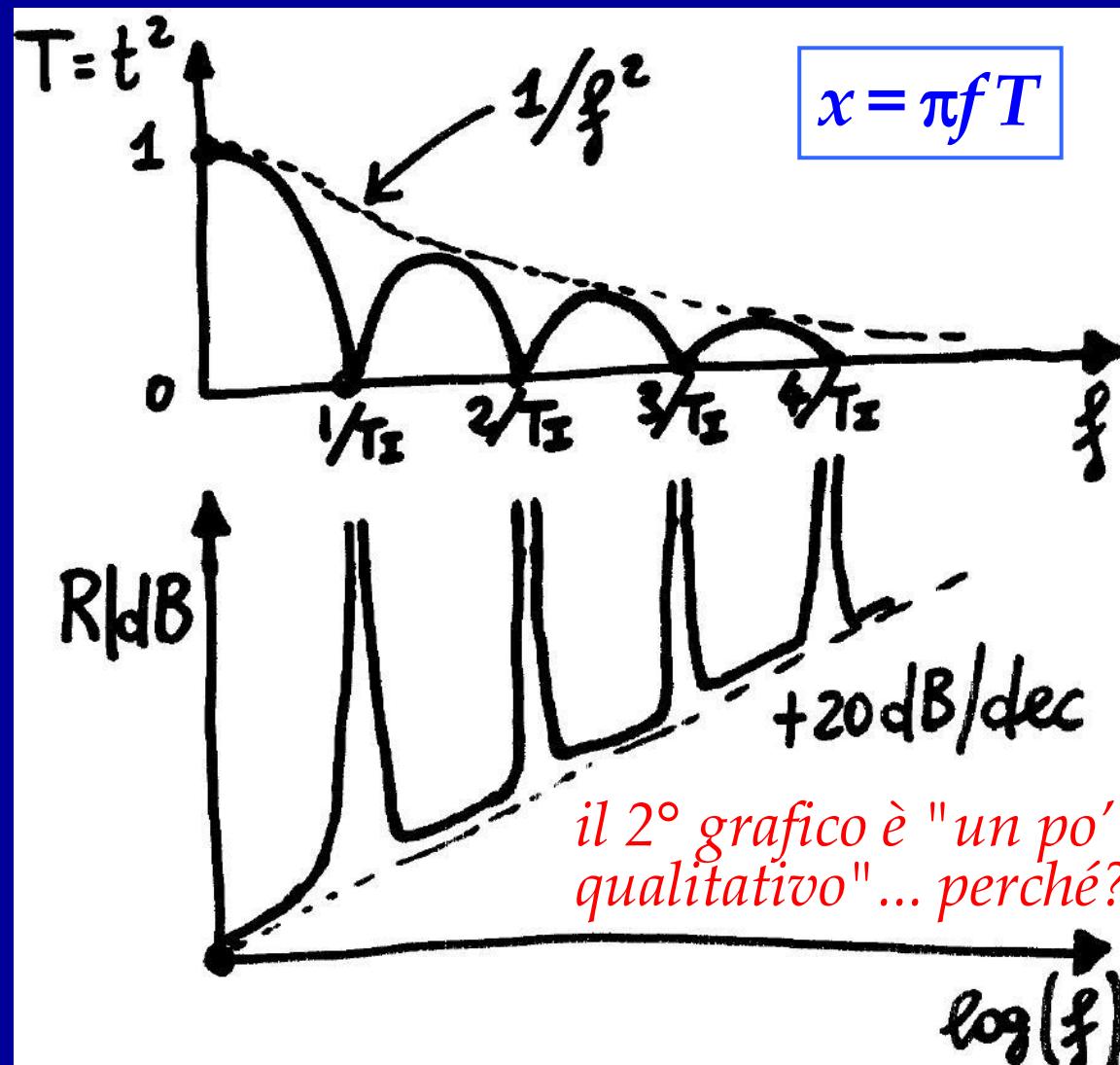
**vorremmo avere  
“ $R$  molto grande”**

che in scala logaritmica diventa:

$$R_{\text{dB}} = 10 \log_{10} R = 20 \log_{10} \left| \frac{x}{\sin(x)} \right|$$

# Andamenti di trasmissione e reiezione

attenzione  
alle **scale lin**  
e **log** e alle  
differenze



Ovviamente fissata, i diagrammi restano validi in funzione di  $T = T_I$  variabile, su un asse X temporale per  $f = f_d$

QUIZ:

$R_{dB}$

+

$T_{dB}$

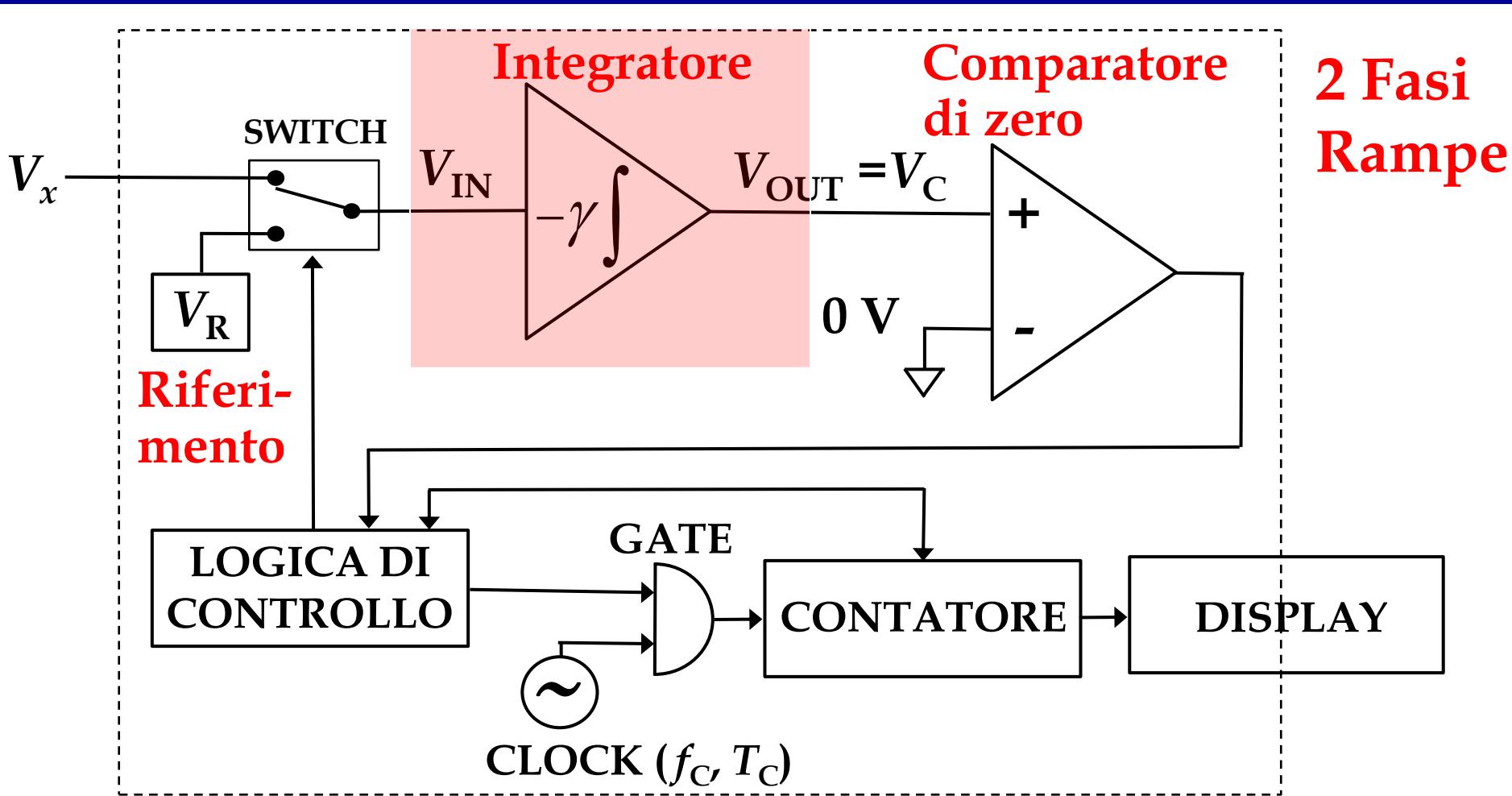
=

??? dB

0 dB

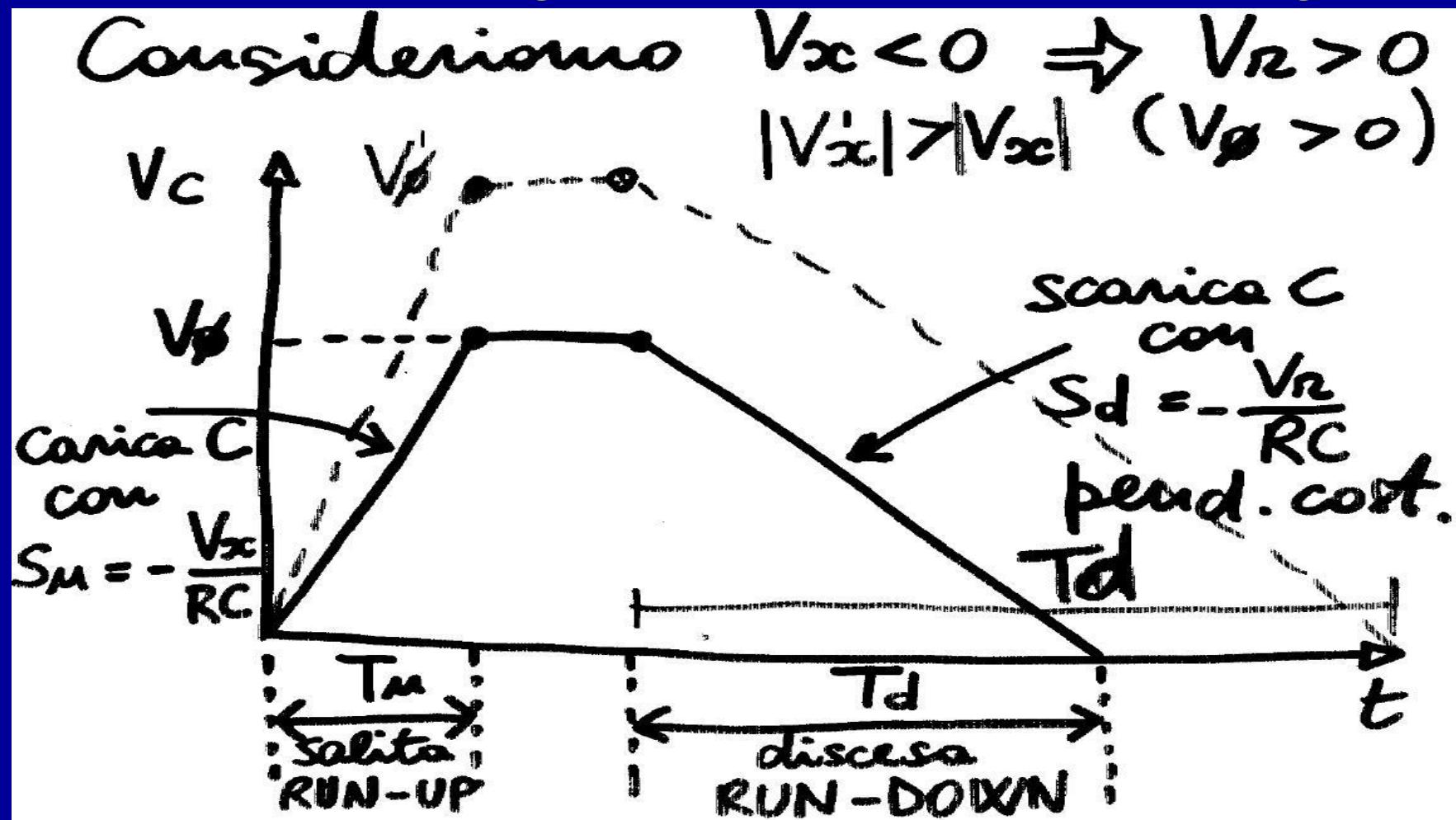
# Voltmetro a doppia rampa (1/5)

Conversione tensione-tempo e **misura di  $\Delta T_G = T_D(\text{OWN})$**   
(come nel voltmetro a rampa analogica)



# Voltmetro a doppia rampa (2/5)

L'integratore invertente integra con costante  $\gamma = 1/RC = 1/\tau$  (s<sup>-1</sup>) le tensioni d'ingresso e produce in uscita rampe di tensione con pendenza opposta al segno della tensione costante d'ingresso



# Voltmetro a doppia rampa (3/5)

$T_U = N_U T_C = \text{cost.}$  è fissato  
è proprio il tempo di integrazione  $T_I$

$$V_0 = V_C(t = T_U) = -\frac{V_x T_U}{RC} = \frac{V_R T_D}{RC}$$

$T_{\text{mis}} = T_U + T_D$   
varia con  $T_D$  (che varia  
prop. a  $V_x$ )  $\rightarrow T_{\text{mis,min}}$   
dipende da  $V_x$  (era cost.  
in rampa analogica, flash  
e approx. succ.)

$$-\gamma V_x T_U = \gamma V_R T_D$$

$$V_x = -V_R \frac{T_D}{T_U} = \left( -\frac{V_R}{T_U} \right) T_D$$

$T_U$  e  $T_D$  contati con lo stesso clock ( $T_C$ )  
 $T_U$  prefissato ma  $T_D$  variabile (misura)

$$V_x = -V_R \frac{N_D T_C}{N_U T_C} = \left( -\frac{V_R}{N_U} \right) N_D$$

var.  
cost. var.  
sensibilità

sensibilità

$$V_x = S_{N \rightarrow V} N_D$$

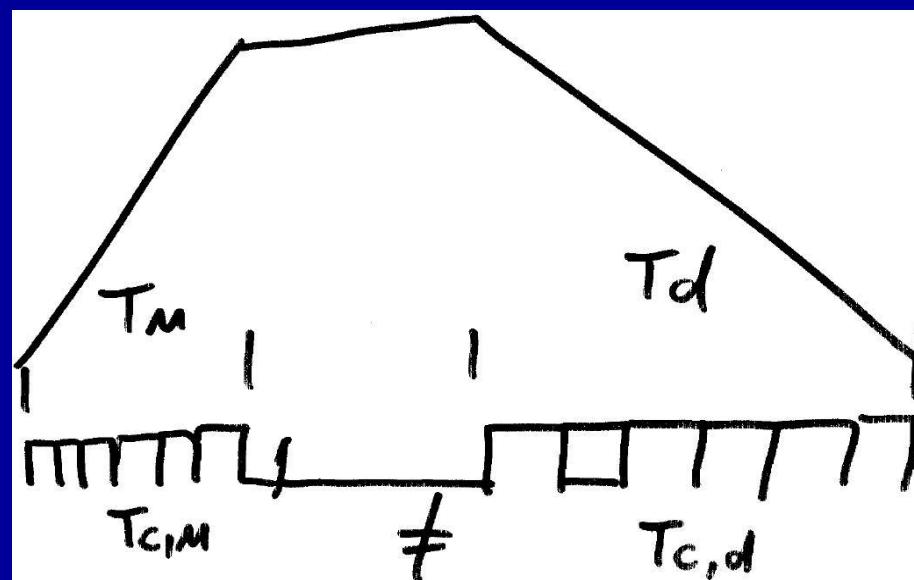
misuro  $V_x$   
con il numero  
di conteggi  $N_D$

# Voltmetro a doppia rampa (4/5)

Misura teoricamente insensibile a valori, e incertezze, di  $R$  e  $C$  ( $\gamma=1/RC$ ) e altri parametri strumentali ( $f_c$  e  $T_c$ ) che pesano allo stesso modo su rampa di salita e di discesa

$$V_x = -\frac{V_R}{N_U} N_D$$

naturalmente l'INC di  $V_R$  si trasferisce 1:1 sull'INC di  $V_x$



Pb. Instabilità di frequenza del *clock* in  $T_{\text{mis}}$  (con  $T_{\text{mis}} \approx 1$  s)

# Voltmetro a doppia rampa (5/5)

Come nel caso del voltmetro a rampa analogica, essendo la **misura effettuata per conteggio**, ci sarà sempre un errore e un' **incertezza di quantizzazione**

$$\text{Incertezza} = 1 \text{ conteggio} / \sqrt{12} \quad (\sigma_{\text{PDF-unif.}})$$

L'INC di quantizzazione si può vedere sulla **misura di  $T_D$  con risoluzione  $\Delta T_D = T_C$**  o anche sulla **misura di  $N_D$ , con risoluzione  $\Delta N_D = 1$**

$$u_q(V_x) = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}} = \left( -\frac{V_R}{T_U} \right) \cdot \frac{T_C}{\sqrt{12}} = \left( -\frac{V_R}{N_U} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$T_D$  e  $N_D$   
sono  
"troncati"  
 $\Delta N_D$

$$S_{N \rightarrow V} = \Delta V_x / \Delta N_D \quad \text{e} \quad S_{N \rightarrow V} = V_{x,\max} / N_{D,\max} = \Delta V$$

la sensibilità coincide  
con la risoluzione

$$S_{N \rightarrow V} = \Delta V_{x,\min} / \Delta N_{D,\min} = \Delta V / 1$$

Dunque sensibilità, e risol. e  $INC_q$ , dipendono da:

"portata del voltmetro" ( $V_{x,\max}$ ) e "capacità del conteggio" ( $N_{D,\max}$ )

# Valore limite per l'incertezza

Come visto l'INC di  $V_R$  si trasferisce 1:1 sull'INC di  $V_x$

Da  $V_x = -V_R N_D / N_U$  ed essendo  $u_r(N_U) = 0$  si ottiene

$$u_r^2(V_x) = u_r^2(V_R) + u_r^2(N_D)$$

$$u_r(N_D) = \frac{1/\sqrt{12}}{N_D} \cong \frac{0.3}{N_D} \approx N_D^{-1}$$

LIMITE ULTIMO DI  
INC. DELLA MISURA

Per  $N_D \gg 1/u_r(V_R)$  si ha  $u_r(N_D) \ll u_r(V_R) \Rightarrow u_r(V_x) \cong u_r(V_R)$

Poiché il valore limite per  $u_r(V_R)$  è  $\approx 2 \times 10^{-7}$  si deduce che il migliore DVM può avere  $\sim 6\frac{1}{2}$  cifre (significative!!!):  $N_{\max} \approx 5 \times 10^6$  ( $n = \log_2 N_{\max} \approx 22$  bit ... equivalenti!!!)

# Voltmetro a doppia rampa (esercizio)

Misura di tensione a 16 bit in presenza di disturbo a  $f_{\text{dis}} = 50 \text{ Hz}$   
 $T_I = 100 \text{ ms}$  con QUARZO a frequenza  $f_C = 1 \text{ MHz}$

[velocità di lettura  $f_{\text{mis}} = ?$  ; cifre decimali  $M_{\text{contatore}} = ?$  ]

---

$$T_{I,\min} = \frac{1}{f_{\text{dis}}} = 20 \text{ ms} \leq T_{\text{mis}} \text{ o in genere } T_I = m T_{\text{dis}} = m \frac{1}{f_{\text{dis}}}$$

qui  $T_I = 5 T_{\text{dis}} = 100 \text{ ms} \Rightarrow N_U = T_I / T_C = T_I f_C = 10^5$  (5 cifre di conteggio)

$n=16 \text{ bit} \Rightarrow N=N_{D,\max}=2^{16}=65\,536$  livelli (4½ cifre) [misura unipolare]

con misura bipolare: 1 bit di segno (+/-) e 15 bit su dinamica pos./neg.  $N_{D,\max}=2^{15}=32768$  liv.

$$\Rightarrow T_{D,\max} = N_{D,\max} T_C = 65\,536 \mu\text{s} \cong 65 \text{ ms} \quad (( \Rightarrow N_{\text{contatore}} \neq N_{\text{ADC}} ))$$

$$\Rightarrow T_{\text{mis,max}} = T_I + T_{D,\max} \cong 165 \text{ ms} \text{ e quindi } f_{\text{mis}} = 1/T_{\text{mis,max}} \cong 6 \text{ Hz}$$

$$M_{\text{contatore}} = \log_{10}(\max\{N_U, N_{D,\max}\}) = \log_{10}(N_U) = 5 \text{ cifre}$$

Se  $V_x=4 \text{ V}$  e  $D=20 \text{ V} \Rightarrow \Delta V=?$  e  $u_r(V)=?$   
e se  $D=\pm 20 \text{ V} ??$

$$\underline{\Delta V = 20 \text{ V} / 65536 \cong 0.3 \text{ mV}}$$

$$\underline{u(V) = \Delta V / (12)^{1/2} \cong 88 \mu\text{V}}$$

$$\underline{u_r(V) = u(V) / V_x \cong 22 \times 10^{-6}}$$

# Considerazione (sull'integrale)

Era stato scritto che  $V_m \propto \frac{1}{T_I} \int_0^{T_I} V(t) dt$  Senza il disturbo  
 $|V_x \cdot T_U| - |V_R \cdot T_D| = 0$

In realtà si misura non  $V_m$  ma un  $\Delta T_G = T_D =$  il voltmetro confronta,  
con una "differenza"  
o con metodo di zero  
l'integrale di  $V_x (V_x \cdot T_U)$   
con l'integrale di  $V_R$   
(che vale  $V_R \cdot T_D$ )

$$= \frac{V_0}{S_D} = \frac{V_0}{-V_R / (RC)} = \frac{-\frac{1}{RC} \int_0^{T_I=T_U} V_x(t) dt}{-V_R / (RC)} = \frac{1}{V_R} \int_0^{T_I=T_u} V_x(t) dt$$

Ed è vero che il tempo misurato  $T_D = \Delta T_G \propto \int_0^{T_I=T_U} V_x(t) dt$   
non si ha però la divisione per  $T_I$  (non è vero che è  $\propto 1/T_I$ )

In salita, sia il segnale  $V_x$  che il disturbo  $V_d$  vengono integrati per un tempo  $T_I$  per poi ricavare la misura  
in maniera proporzionale all'integrale dei due

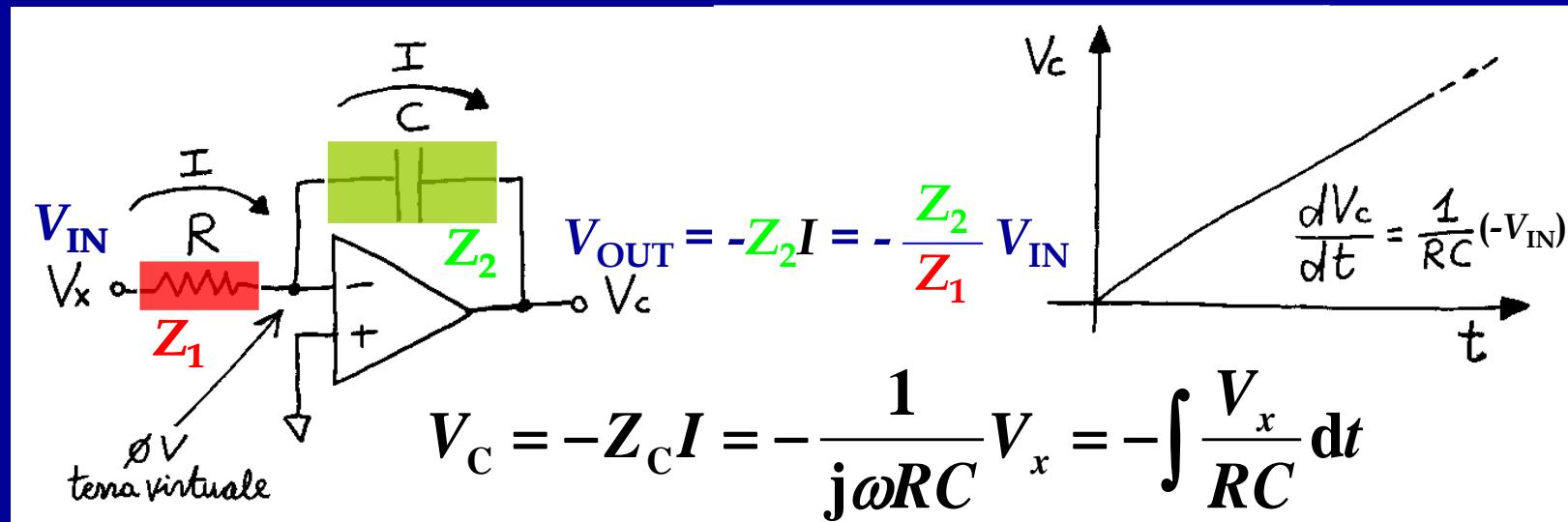
# \*Circuito integratore con OP-AMP

L'impedenza complessa  $Z$  per un generico carico è

$Z_R = R$  per un resistore

$Z_C = 1/j\omega C$  per un condensatore

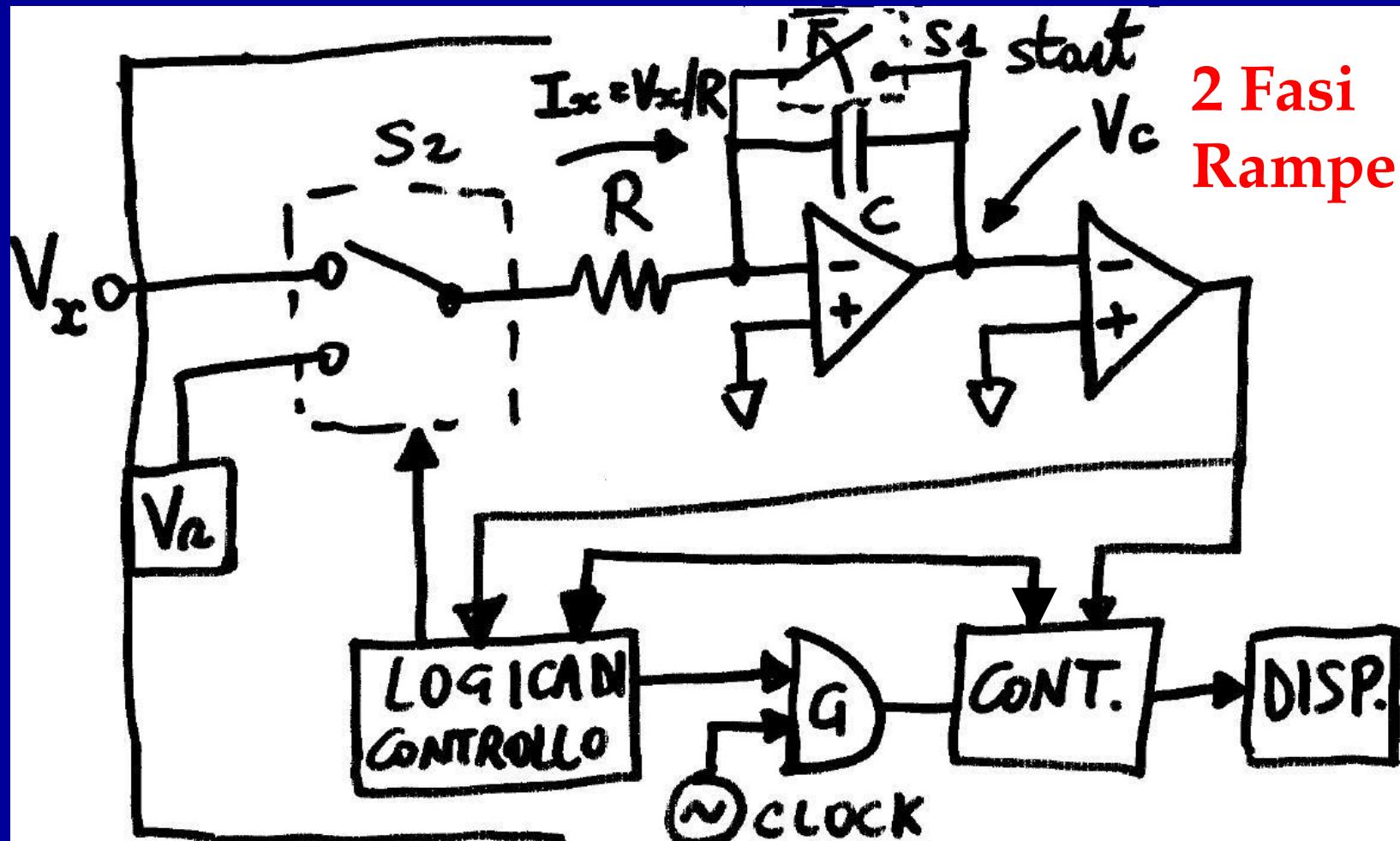
$Z_L = j\omega L$  per un induttore



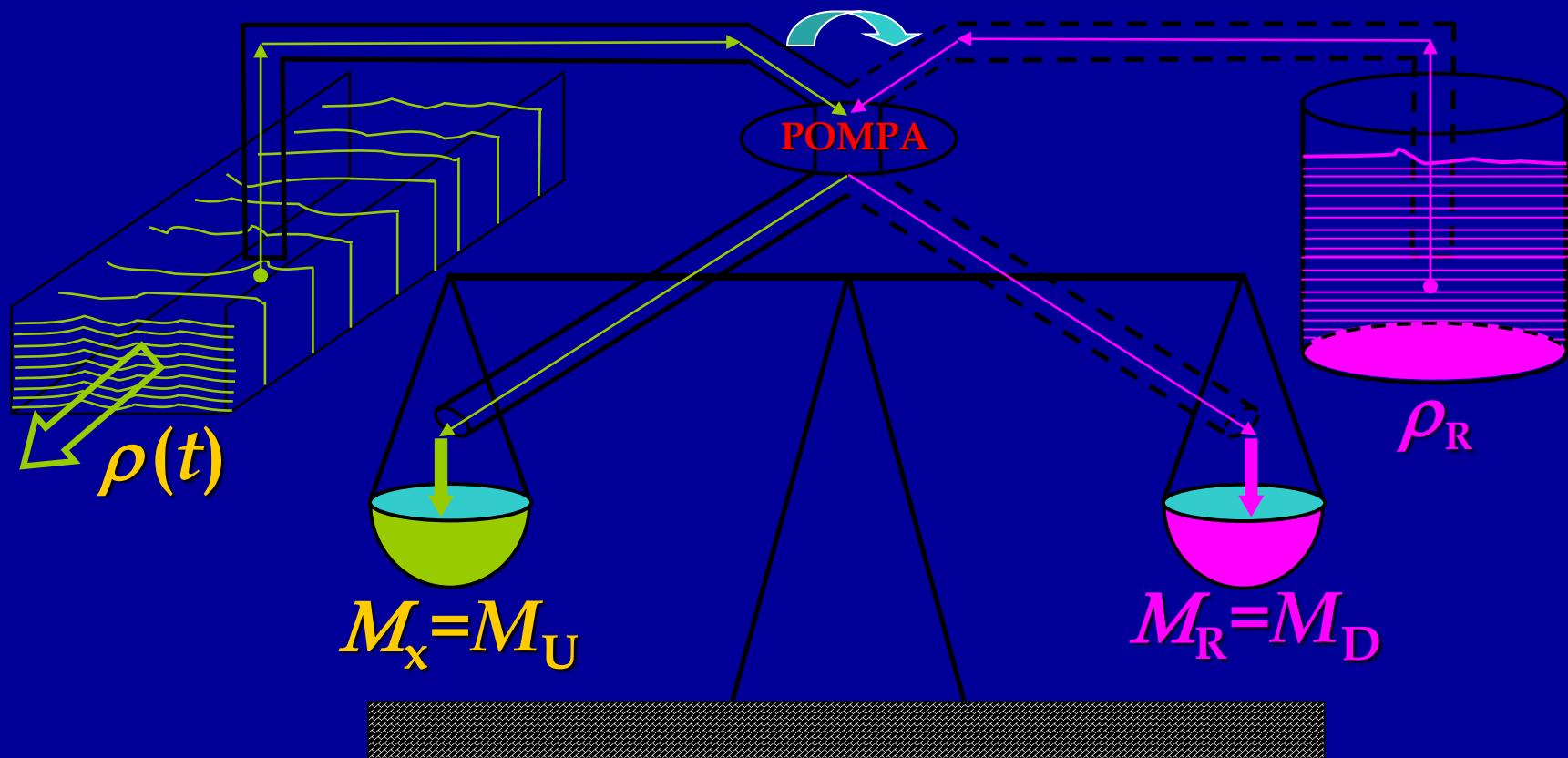
**$I = V_x/R$  corrente costante** (fissata  $V_x$ ) e dunque il condensatore si carica a corrente costante, con una tensione  $V_{OUT} = V_c$  che cresce linearmente nel tempo

# \*Voltmetro a doppia rampa con OP-AMP

Conversione tensione-tempo e misura di  $\Delta T_G$   
(come nel voltmetro a rampa analogica)



\*Analogo meccanico del voltmetro a doppia rampa  
(misuratore di densità incognita  $\rho_x$  di un liquido)



Si vuole misurare con precisione la densità (media)  $\rho_x$  in presenza di "fluttuazioni"  $\rho(t) = \rho_x + \rho_{d,0} \sin(2\pi f_d t + \phi)$

\*Analogo meccanico del voltmetro a doppia rampa  
(misuratore di densità incognita  $\rho_x$  di un liquido)

$\rho_R$  è la densità di massa volumica ( $\text{kg}/\text{dm}^3$ ) "nota" di un liquido di riferimento: ad esempio  $\rho_R = \rho_{H_2O} = 1 \text{ kg}/\text{dm}^3$

$\rho_x$  è la densità incognita di un liquido (o sostanza)

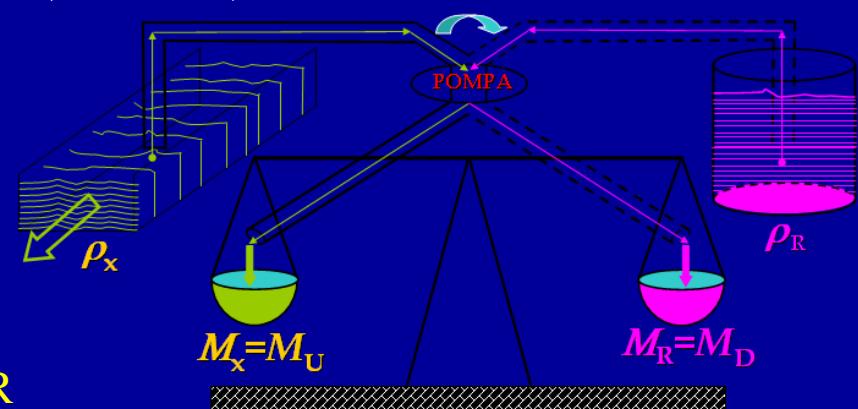
si usa una "pompa volumetrica" che transita uguali quantità (volumi) di liquido (sostanza) nello stesso intervallo di tempo

Flusso costante  $F = \Delta V / \Delta T$  ( $\text{l}/\text{h}$ ) o ( $\text{dm}^3/\text{h}$ )

$$M_U = \rho_x F T_U \quad \text{e} \quad M_D = \rho_R F T_D$$

ma  $M_U - M_D = 0$  (metodo di zero)

$$\rho_x = \frac{T_D}{T_U} \rho_R = \frac{N_D T_C}{N_U T_C} \rho_R = \frac{N_D}{N_U} \rho_R$$



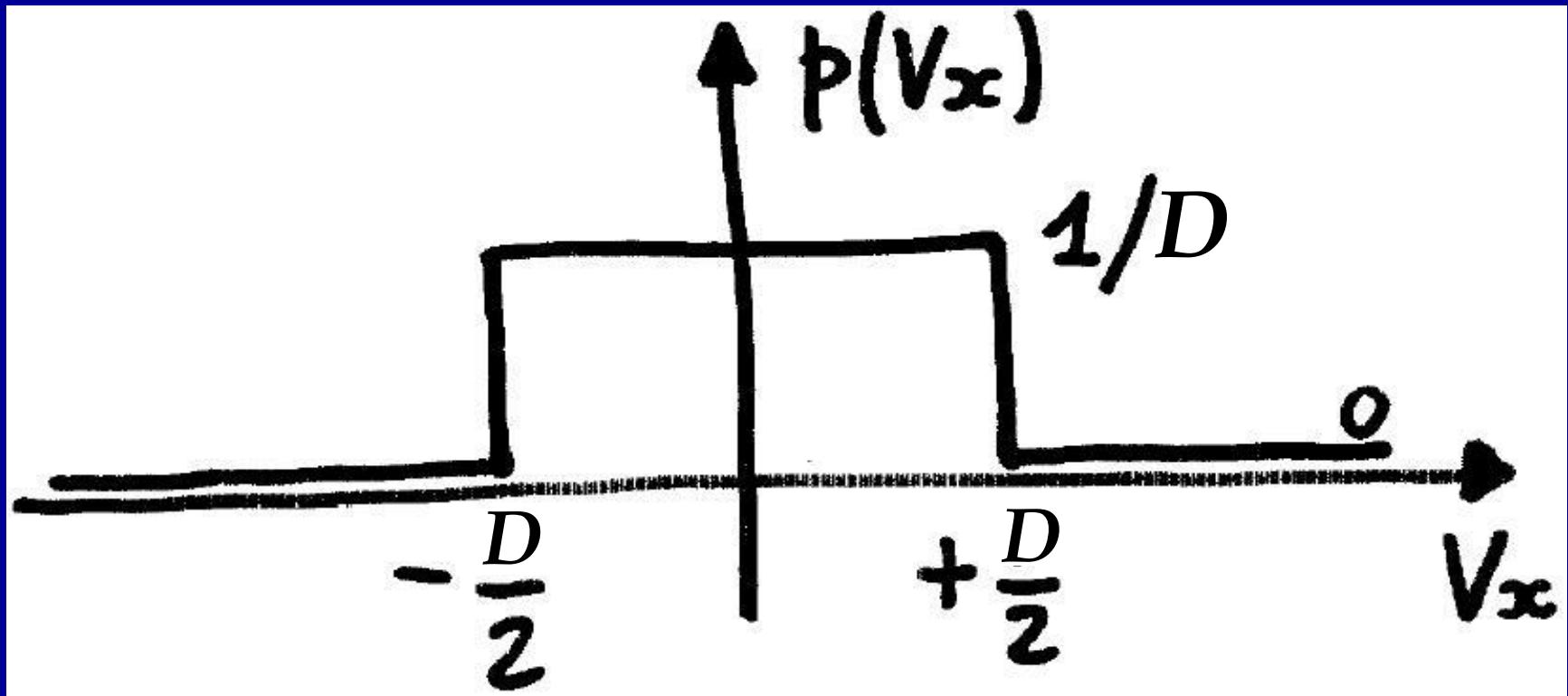
(la misura è indipendente sia da  $F$  che da  $T_C$ )

$$u_r(\rho_x) \approx u_r(\rho_R)$$

se si conta con un *clock* a frequenza abbastanza alta (o comunque su tempi di discesa lunghi) per cui  $u_r(N_D)$  diviene trascurabile

# Bit equivalenti (1/7)

segnale  $s(t) = V_x \in [-D/2, +D/2]$  dinamica del voltmetro



La dinamica di variazione  
del segnale è  $D = \pm D/2$   $\Rightarrow \sigma_s^2 = \frac{D^2}{12}$

# Bit equivalenti (2/7)

Disponendo di un convertitore/voltmetro che quantizza il segnale  $s(t)$  mediante  $n$  bit, si avrà un **PASSO DI QUANTIZZAZIONE**  $Q = D/2^n = \Delta V$   
Se **D** è la **dinamica** del segnale e anche del voltmetro, si ha una varianza ("incertezza di quantizzazione")

$$\sigma_q^2 = \frac{Q^2}{12} = \frac{1}{12} \left( \frac{D}{2^n} \right)^2 = \frac{\sigma_s^2}{2^{2n}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2} = \text{costante} = 2^{2n} = \frac{S}{N_q}$$

per un quantizzatore ideale  
è possibile ricavare  $n$  (n° di bit)  
dal rapporto S/N (Signal/Noise)

# Bit equivalenti (3/7)

In un convertitore ideale

$$n = \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2} \right)$$

$$\text{da } \frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2} = \text{costante} = 2^{2n}$$

$$S = \sigma_s^2$$

$$N_q = \sigma_q^2$$

$$\rightarrow \boxed{n = \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{S}{N_q} \right) \text{ caso "ideale"}}$$

$$N_c = N_q + \overbrace{N_{A/D} + N_{ext}}^{\text{rumore aggiunto}} > N_q$$

ma in un convertitore reale  $\sigma_c^2 = \sigma_q^2 + \sigma_{n,A/D}^2 + \sigma_{n,ext}^2 > \sigma_q^2$

convertitore reale      rumore esterno

# Bit equivalenti (4/7)

Si definisce **numero di bit equivalenti**

$$n_e \equiv \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{\sigma_s^2}{\sigma_c^2} \right) < n \quad \rightarrow \boxed{n_e = \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{S}{N_c} \right)}$$

**caso reale**

↑  
rumore complessivo del convertitore  
(quantizzazione + rumore aggiunto)

$$\begin{aligned} n_e &= \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2} \frac{\sigma_q^2}{\sigma_c^2} \right) = \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2} \right) + \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{\sigma_q^2}{\sigma_c^2} \right) = \\ &= n - \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{\sigma_c^2}{\sigma_q^2} \right) = n - \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{\sigma_{n,A/D}^2 + \sigma_{n,ext}^2}{\sigma_q^2} \right) \end{aligned}$$

rumore aggiunto

# Bit equivalenti (5/7)

$$N = \sigma_n^2 \text{ rum.}$$

$$\frac{\sigma_q^2}{\sigma_{n,A/D}^2 + \sigma_{n,ext}^2} = 2^{2n} \frac{N}{S}$$

rumore aggiunto

$$\text{essendo } \sigma_q^2 = \frac{\sigma_s^2}{2^{2n}}$$

*ci domandiamo se  $(\sigma_n^2 / \sigma_q^2) = 2^{2n}(N/S)$  sia << 1 o >> 1 ...*

Esistono due condizioni limite per

“alto”  $\frac{S}{N} \gg 2^{2n}$

$$n_e \cong n$$

$$n - \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{\sigma_{n,A/D}^2 + \sigma_{n,ext}^2}{\sigma_q^2} \right)$$

“basso”  $\frac{S}{N} \ll 2^{2n}$

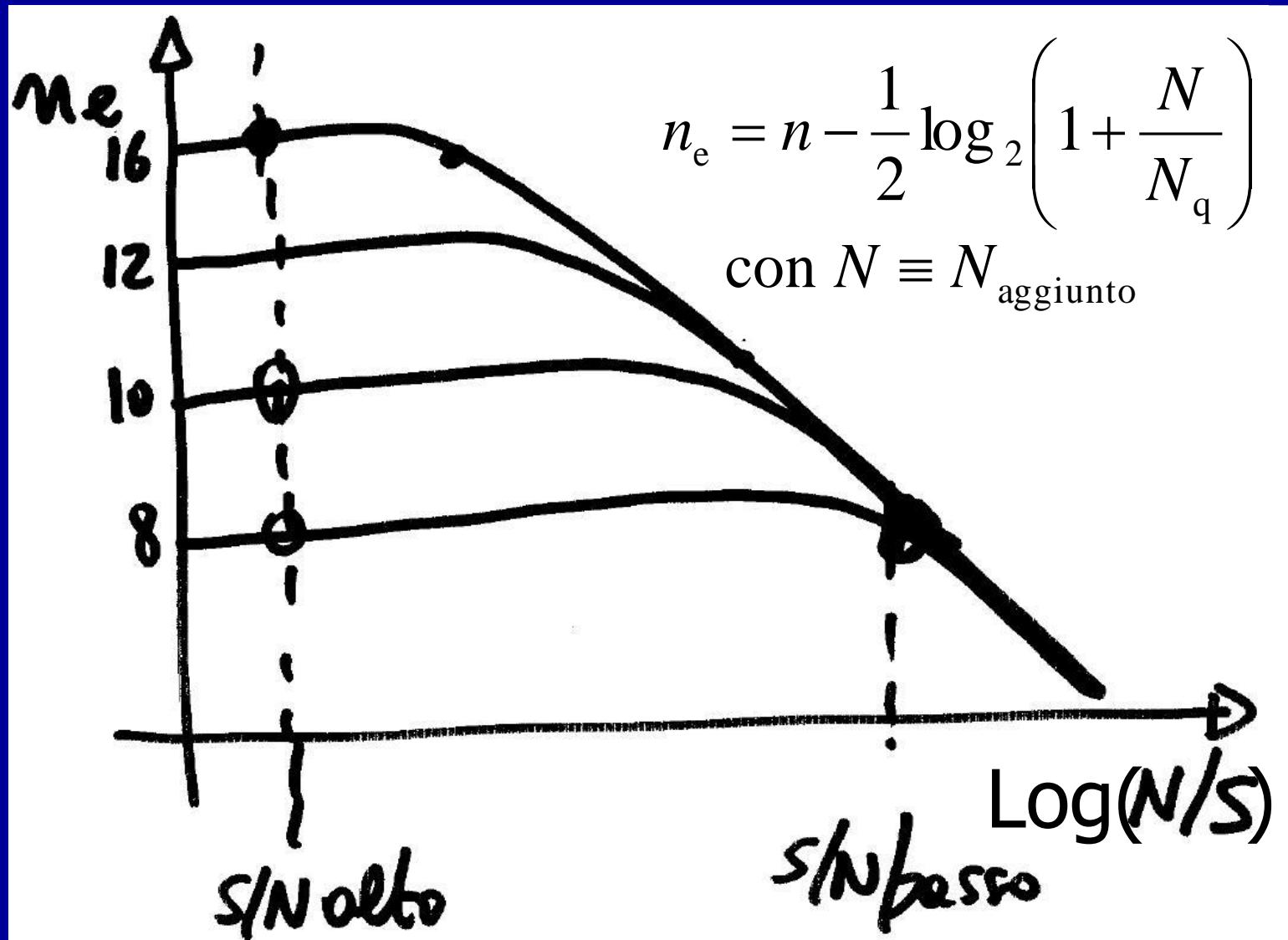
$$n_e \cong n - \frac{1}{2} \log_2 (2^{2n}) - \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{N}{S} \right) =$$

il numero di bit dipende solo dal rapporto segnale/rumore (S/N) (e non da  $n$  originario!!!!)

$$= \frac{1}{2} \log_2 (S/N)$$

Per S/N basso, si perde 1 bit per un calo di S/N di un fattore 4 (-6 dB)

# Bit equivalenti (6/7)



# Bit equivalenti (7/7)

Perdendo un fattore  $4 = 6$  dB in S/N si perde 1 bit  
Per ogni fattore  $2 = 3$  dB, sempre perso in S/N,  
si perde invece  $\frac{1}{2}$  bit...

Se anziché perdere in S/N si guadagna in S/N  
(S/N aumenta), allora "si guadagnano gli stessi  
incrementi in bit equivalenti" (+ $\frac{1}{2}$  bit ogni  $\times 2$  in S/N)

Esercizio: in zona di S/N "basso", si passa da  $(S/N)_1$  a  $(S/N)_2$   
perdendo 30 dB. Come diminuiscono i bit equivalenti?

si ha  $\frac{(S/N)_2}{(S/N)_1} = -30$  dB =  $\frac{1}{1000}$  con

$$n_{e,1} = \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{S}{N} \right)_1$$

$$n_{e,2} = \frac{1}{2} \log_2 \left( \frac{S}{N} \right)_2$$

$$n_{e,2} = n_{e,1} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{(S/N)_2}{(S/N)_1} \cong n_{e,1} - \frac{10}{2} = n_{e,1} - 5 \text{ bit}$$

infatti  $1000 \approx 2^{10} = 4^5$   
e si perde 1 bit ogni fattore 4

# Rapporto S/N e bit equivalenti

$$n_e = n - \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{\sigma_{n,A/D}^2 + \sigma_{n,ext}^2}{\sigma_q^2} \right) = n - \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{N}{N_q} \right) = n - \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{N}{S/2^{2n}} \right)$$

$$\log_2 \left( 1 + \frac{N}{S} 2^{2n} \right) = 2(n - n_e)$$

$$\frac{N}{S} 2^{2n} = 2^{2(n-n_e)} - 1$$

$$\frac{S'}{N} = \frac{2^{2n}}{2^{2(n-n_e)} - 1} \cdot \frac{S'}{S} = \frac{2^{2n}}{2^{2(n-n_e)} - 1} \cdot \frac{V_{s,eff}^2}{D^2 / 12}$$

$$\frac{S}{N} = \frac{2^{2n}}{2^{2(n-n_e)} - 1} \cong 2^{2n_e}$$

quando  $n_e$  è  
inferiore a  $n$   
di almeno 3 bit

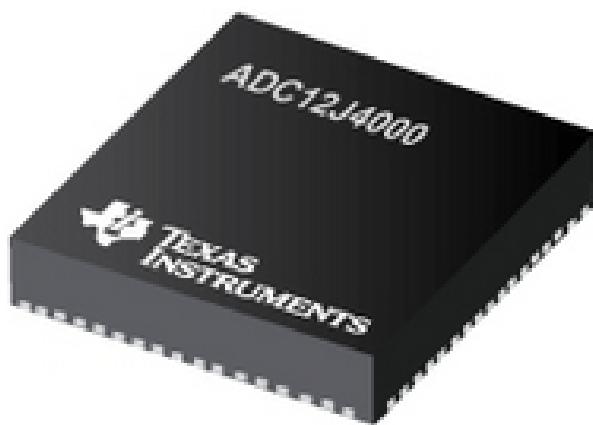
$$n_e = \frac{1}{2} \log_2 (S/N)$$

In generale, dal numero di bit equivalenti  $n_e$  e noto  $n$  del convertitore è possibile ricavare il rapporto S/N (con  $S=D^2/12$  e  $N=N_{AGG(IUNTO)}$  o anche con  $S'=V_{s,eff}^2$  )

# Bit equivalenti (esempi)

Part Number	Resolution (Bits)	Sample Rate (Max) (MSPS)	# Input Channels	SNR (dB)	ENOB (Bits)	SFDR (dB)	Power Consumption (Typ) (mW)	Input Range (Vp-p)
ADC12J4000 - 12-Bit, 4.0-GSPS, RF Sampling Analog-to-Digital Converter (ADC)	12	4000	1	55	8.8	71	2000	0.725

53  
9.1



Analog Input BW (MHz)	Input Buffer	Package Group	Package Size: mm2:W x L (PKG)	Approx. Price (US\$)
3300	No	VQFN	100 mm2: 10 x 10(VQFN)	1949.00   100u

Se il rumore aggiunto fosse tutto rumore elettronico d'ingresso, quanto varrebbe il suo valore efficace  $V_{N,rms}$ ? (con  $SNR=55 \text{ dB} \rightarrow V_{N,rms}=470 \mu\text{V}$ ) Quale sarebbe la densità spettrale di rumore in  $\text{V}/\text{Hz}^{1/2}$ ? ( $3.3 \text{ GHz} \rightarrow 8 \mu\text{V}/\text{Hz}^{1/2}$ )

# Digital Multi-Meter (DMM)



Strumento di misura per:  
tensione e corrente (DC e AC)  
resistenza, capacità,  
prova-transistor o diodi,  
temperatura, ...

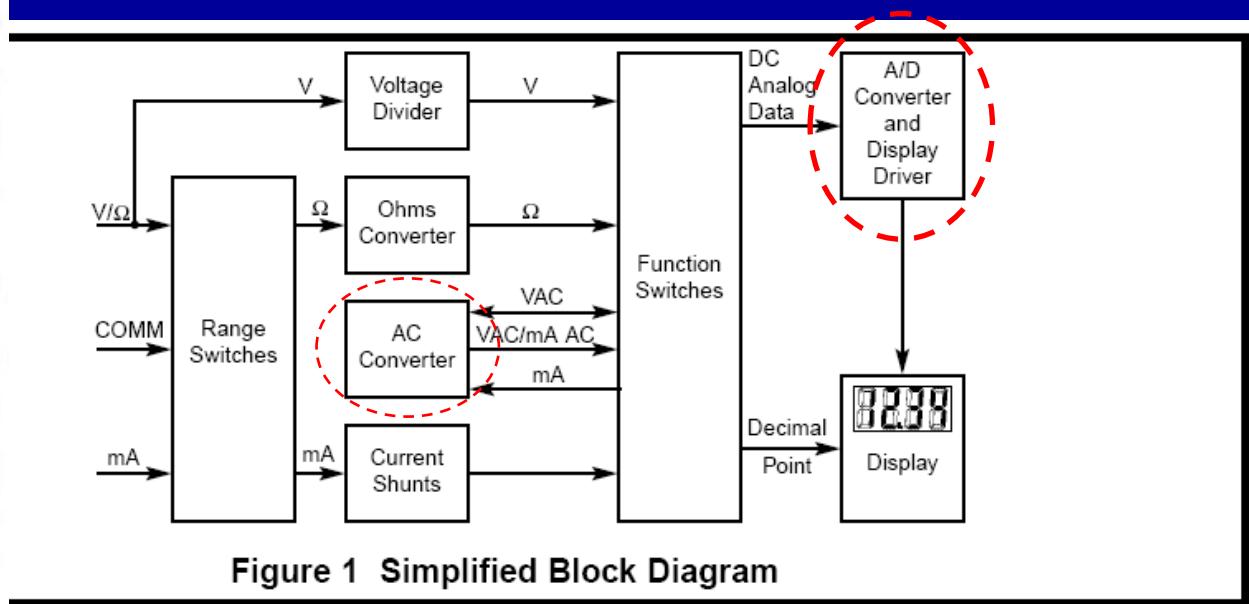


Figure 1 Simplified Block Diagram

# Misure di $V$ , $I$ , $R$ e display

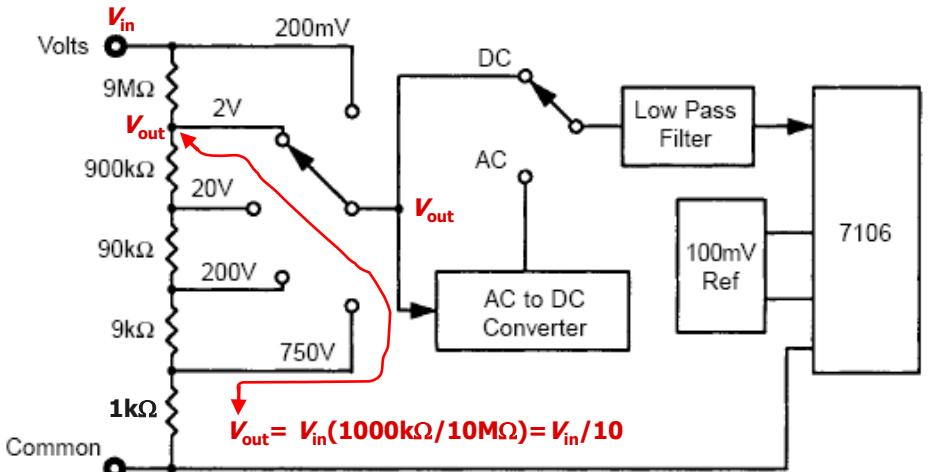


Figure 3 Simplified Voltage Measurement Diagram

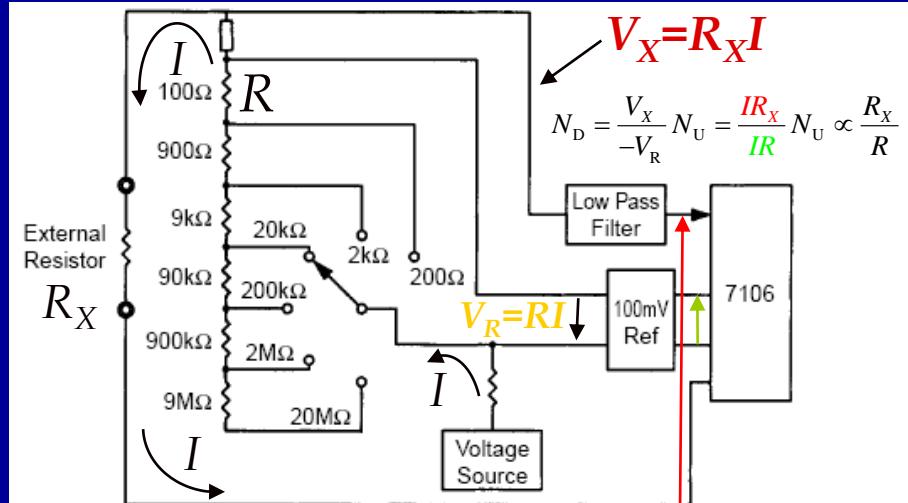


Figure 5 Simplified Resistance Measurement Diagram

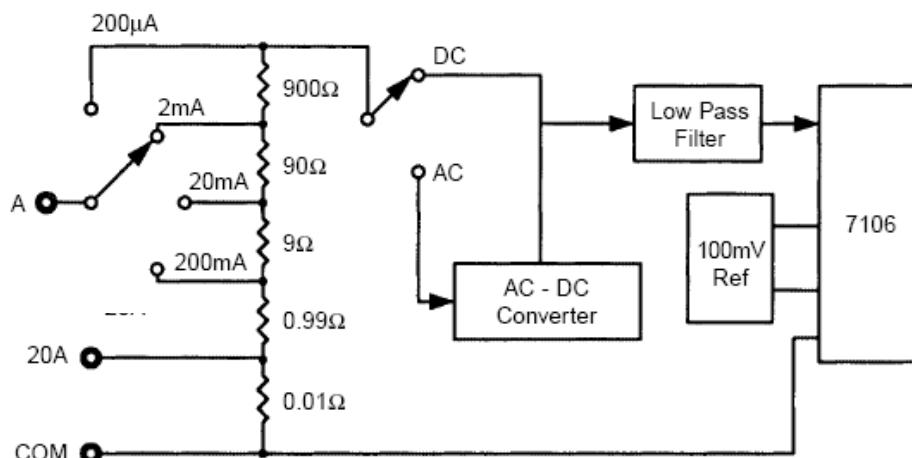
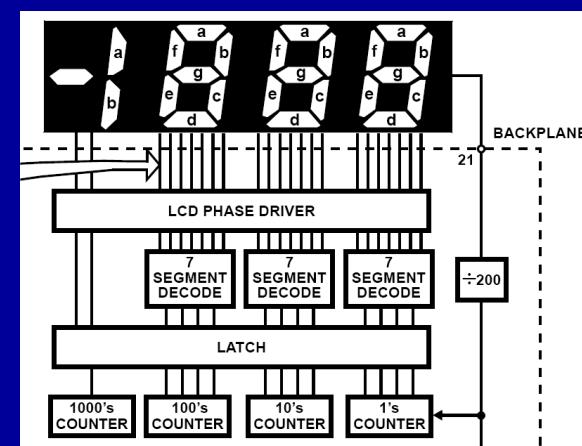


Figure 4 Simplified Current Measurement Diagram

visualizzatore  
(a 3½ cifre) ±2000 counts  
3 Sa/s

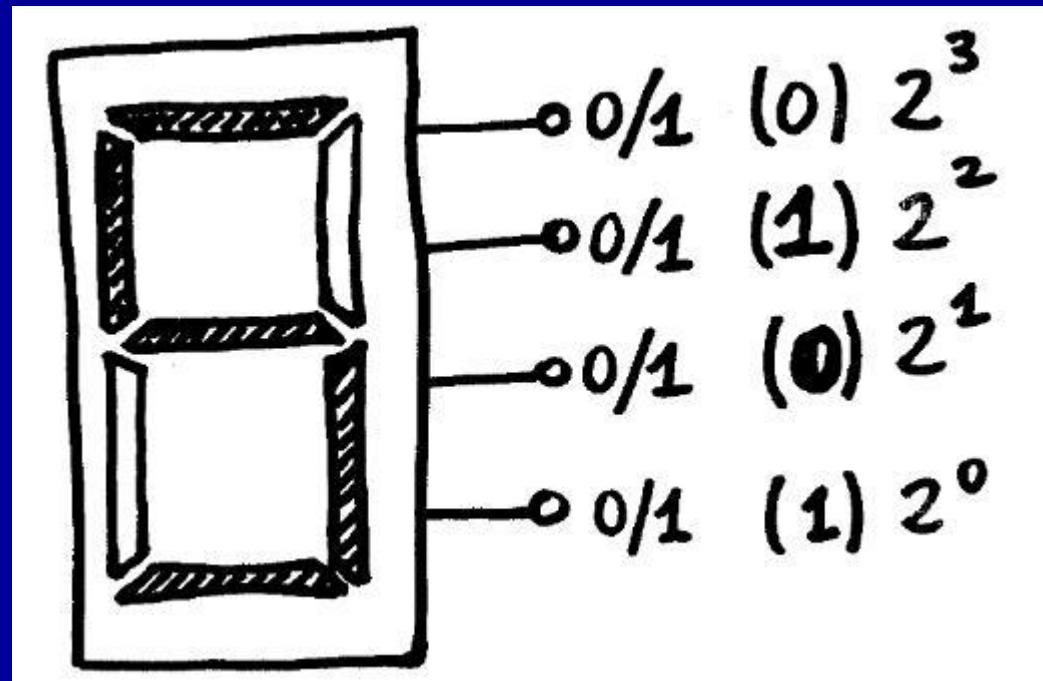


# Uscita digitale e display a 7 segmenti

*DISPLAY a 7 segmenti*  
(per la singola cifra decimale)

Uscita digitale  
di valore “5”

Comando del display  
con codifica BCD  
(*Binary Coded Decimal*)  
a 4 linee



Ogni uscita quantizzata avrà una **incertezza di quantizzazione**  
(qui pari al valore dell'**ultima** cifra diviso per radice di 12):

in generale 
$$u_q(V) = \Delta V / \sqrt{12}$$

# CAP. 5 - “COSE DA SAPERE”

## Caratteristiche e impiego ADC e DAC

valori pratici/realistici di num. bit e velocità

## Schema e funz. DAC correnti pesate

principio di funzionamento, schema, equazioni, caratteristiche, non -idealità

## Grandezze significative ADC (e formule)

risoluzione (dim. e adim.), cifre, bit, livelli, valori; differenza tra voltmetri differenziali e integratori; numeri di bit e velocità nei casi pratici importanti

# CAP. 5 - “COSE DA SAPERE”

## Schema e funz. ADC a rampa analogica

principio di funzionamento, schema, equazioni, conversione tensione-tempo, contatore, caratteristiche

## Schema e funz. ADC ad approx successive

principio di funzionamento, schema, equazioni, metodo bisezione, assegnazione bit, caratteristiche

## Schema e funz. ADC flash

principio di funzionamento, schema, equazioni, soglie e comparatori, assegnazione bit, caratteristiche

# CAP. 5 - “COSE DA SAPERE”

## Principio di integrazione

misura del disturbo integrato, reiezione al disturbo,  
 $T_{(dB)}$  e  $R_{(dB)}$ , calcoli di  $T_{\text{Integrazione}}$  per una data reiezione  
a una o più frequenze di disturbo

## Schema e funz. ADC a doppia rampa

principio di funzionamento, schema, equazioni,  
insensibilità ai parametri circuitali, contatore (bit e  
livelli, dinamica unipolare e bipolare), limite ultimo  
di accuratezza, tempo e velocità di lettura

## Bit equivalenti

teoria e formule per  $n_e$  in funzione S/N, calcoli e  
grafici di  $n_e$  in differenti condizioni di lavoro