Appunti di Fondamenti di Elettrotecnica

Corso del Prof. Riccardo Zich
A cura di Alessandro Niccolai

25 marzo 2020

Indice

La presente dispensa non sostituisce né il libro di testo né gli appunti di lezione. Non ha pretesa di completezza e potrebbe contenere refusi.

Capitolo 1

Circuiti Elettrici

1.1 Teoria dei Circuiti

La teoria dei circuiti è quella scienza che studia il comportamento delle reti elettriche e dei circuiti elettronici.

La teoria dei circuiti si ricava come sottoinsieme dell'elettromagnetismo sotto l'ipotesi di Max Abraham, che dice che la dimensione caratteristica del circuito in oggetto deve essere molto più piccola della lunghezza d'onda dei segnali[1]:

$$D << \lambda \tag{1.1}$$

Mentre l'elettromagnetismo studia l'evoluzione nello spazio e nel tempo del campo elettrico $\vec{E}(\underline{x},t)$ e del campo magnetico $\vec{H}(\underline{x},t)$, la teoria dei circuiti studia delle grandezze scalari (tensioni e correnti) che rappresentano il comportamento dei campi all'interno di un componente. Le grandezze elettriche e le loro proprietà si possono ricavare matematicamente a partire dalle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo sotto l'ipotesi vista sopra.

Le grandezze elettriche si possono ricavare dal concetto di carica elettrica. Questa è una proprietà fondamentale della materia alla quale viene associata una grandezza fisica scalare dotata di segno. La carica è una grandezza quantizzata, ovvero esiste solo in multipli di una quantità fondamentale: la carica elettrica di un elettrone, indicata con il simbolo $-e$.

A partire dal concetto di carica elettrica è possibile ricavare le due grandezze fondamentali della teoria dei circuito: la corrente elettrice e la tensione.

[1] Sia dato un segnale sinusoidale $y = A\cos 2\pi ft$, dove f è la frequenza. La lunghezza d'onda λ è data dal rapporto v/f dove v è la velocità di propagazione dell'onda (solitamente la velocità della luce).

1.1.1 Corrente elettrica

La prima grandezza elettrica che analizziamo è la *corrente elettrica*. Essa è indicata con il simbolo i e rappresenta la quantità di carica che fluisce attraverso una sezione in una determinata quantità di tempo.

Matematicamente si esprime come:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \tag{1.2}$$

La corrente elettrica è una quantità scalare perché possiede un verso ma non una direzione. La sua unità di misura è l'ampere[2] [A].

Essa definita nel Sistema Internazionale mediante la forza di Lorentz, come la quantità di corrente che deve fluire in due conduttori paralleli lunghi 1m posti a distanza di 1m fra loro per generare una forza di 200nN.

La grandezza corrente viene talvolta considerata come vettoriale, in cui si prende come modulo la quantità di corrente, come direzione la direzione del conduttore in cui essa fluisce e come verso il verso di spostamento delle cariche positive (questa definizione è stata introdotta prima della scoperta dell'elettrone, quando si credeva che fossero le cariche positive a spostarsi).

Valori tipici di corrente che si possono incontrare nella pratica sono:

- $10^{-15}A$ per particolari applicazioni robotiche;
- μA per i segnali in circuiti elettronici;
- mA per l'alimentazione di circuiti elettronici;
- intorno a poche decine di ampere per l'elettrotecnica;
- kA trasmissione di potenza;
- $5 \cdot 10^4 A$ nella scarica di un fulmine.

1.1.2 Tensione elettrica

La seconda grandezza elettrica studiata nella teoria dei circuiti è la *tensione elettrica*, indicata con il simbolo v e misurata in volt[3] [V].

La tensione elettrica è definita come il rapporto fra il lavoro necessario per spostare una carica q immersa in un campo elettrico $\vec{E}$ attraverso un percorso Γ:

$$v(t) \triangleq \frac{L}{q} = -\int_{\Gamma} \vec{E}(\underline{x},t) \cdot \hat{\tau} d\tau \tag{1.3}$$

[2]in onore di Andrè-Marie Ampére.

[3]in onore di Alessandro Volta.

Dalle equazioni di Maxwell, sotto l'ipotesi di Max Abraham, si ottiene che il campo elettrico è conservativo. Quindi il lavoro del campo elettrico non dipende dal cammino, ma solo dal punto di partenza e dal punto di arrivo:

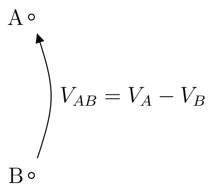
$$v(t) = -\int_B^A \vec{E} \cdot \hat{\tau} d\tau = V_A - V_B \tag{1.4}$$

Per questo motivo la tensione viene spesso chiamata anche *differenza di potenziale.*

Si nota subito che, dalle proprietà degli integrali[4]:

$$V_{BA} = -V_{AB} \tag{1.5}$$

Le tensioni convenzionalmente si indicano con una freccia diretta verso il nodo indicato come primo nel pedice, come nell'esempio che segue:



L'energia potenziale elettrica si può definire a partire dalla tensione come:

$$U = q\Delta V \tag{1.6}$$

Valori tipici della tensione elettrica sono:

- mV per la robotica;
- V per l'elettronica
- 100V-300V per la distribuzione elettrica domestica;
- centinaia di kV per le linee di trasmissione ad alta o altissima tensione;
- 10^6V la scarica di un fulmine.

[4]Si ricorda che:

$$\int_{x0}^{x1} f(x)dx = -\int_{x1}^{x0} f(x)dx$$

1.2 Equazioni Topologiche

Le equazioni topologiche sono quelle equazioni che permettono di descrivere l'evoluzione delle grandezze elettriche (v ed i) nello spazio. Esse sono le leggi di Kichhoff, determinate in modo empirico da Gustav Kirchhoff nel 1845 e successivamente dimostrate a partire dalle equazioni di Maxwell.

1.2.1 Legge di Kirchhoff delle correnti

La legge di Kirchhoff delle correnti (KCL dall'acronimo inglese di Kirchhoff Current Law) descrive le relazioni fra le correnti in un circuito.

KCL

Data una superficie chiusa, la somma algebrica di tutte le correnti che attraversano tale superficie (prese con segno) è nulla:

$$\sum_{j}^{n_c} i_j = 0 \tag{1.7}$$

Questa proprietà discende dal fatto che, sotto le ipotesi di Max Abraham, si assume che non possa esserci accumulo di carica e che questa è una grandezza conservativa.

La legge di Kirchhoff delle correnti presuppone che si prenda un verso per le correnti. In particolare, per l'applicazione della KCL si sceglie un verso per le correnti (e.g. positive se entranti) e le correnti vengono inserite all'interno dell'equazione con segno positivo se concordi con la convenzione, altrimenti con segno negativo.

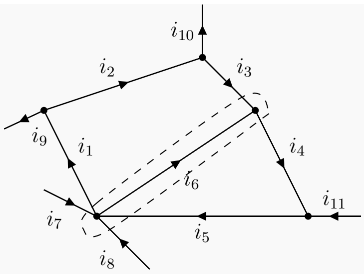
E' anche possibile riscrivere la KCL come:

$$\sum_{k=1}^{n} i_k^{IN} = \sum_{k=n+1}^{n+m} i_k^{OUT} \tag{1.8}$$

dove i_k^{IN} rappresenta una corrente entrante e i_k^{OUT} una corrente uscente.

Esempio

Dato la seguente porzione di circuito, scrivere la legge di Kirchhoff delle correnti alla superficie tratteggiata.



Per scrivere la KCL, si prendono solo le correnti che attraversano la superficie data. Si sceglie, in maniera arbitraria, che le correnti entranti siano positive e quelle uscenti negative:

$$i_8 + i_7 - i_1 + i_3 - i_4 + i_5 = 0 \tag{1.9}$$

1.2.2 Legge di Kirchhoff delle tensioni

La legge di Kirchhoff delle tensioni (KVL dall'acronimo inglese di Kirchhoff Voltage Law) descrive le relazioni fra le tensioni in un circuito.

KVL

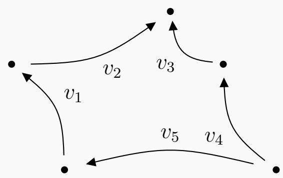
Dato un cammino chiuso, la somma algebrica di tutte le tensioni sul cammino (prese con segno) è nulla:

$$\sum_{k}^{n_l} v_k = 0 \tag{1.10}$$

Questa relazione fra le tensioni discende dal fatto che il campo elettrico è conservativo e che quindi il lavoro necessario per spostare una carica lungo un percorso chiuso è nullo.

Esempio

Dato una serie di punti, note le tensioni fra essi, scrivere la legge di Kirchhoff delle tensioni al cammino chiuso.



Per scrivere la KCL, si definisce in maniera arbitraria un verso di percorrenza del cammino (orario nell'esempio) e si sommano le tensioni prese positive se concordi con il verso di percorrenza scelto, negative se discordi:

$$v_1 + v_2 - v_3 - v_4 + v_5 = 0 \tag{1.11}$$

1.3 Multipoli e bipoli

Attraverso la KCL è possibile definire delle strutture circuitali definibili attraverso le caratteristiche topologiche: i *multipoli*.

Si definisce multipolo (o N-polo) una superficie chiusa attraversata da N conduttori. La superficie chiusa si definisce frontiera del multipolo.

Analizzando le correnti e le tensioni su un multipolo è possibile definire quelle che sono le variabili libere (indipendenti) in un multipolo.

Se si prende un multipolo è possibile definire N correnti (una per ciascun conduttore che attraversa la superficie chiusa). Su un multipolo è possibile scrivere una KCL alla frontiera del multipolo, di conseguenza sono definite $N - 1$ correnti indipendenti.

Sempre sullo stesso multipolo è possibile identificare N punti (l'intersezione fra i conduttori e la frontiera del multipolo) e quindi definire N tensioni. Dati gli N punti, è possibile scrivere una KVL, ottenendo quindi $N - 1$ tensioni indipendenti.

E' possibile definire 3 casi particolari di multipoli:

- Zeropolo: una superficie non attraversata da alcun conduttore. Esso rappresenta un sistema elettricamente isolato al mondo;

- Monopolo: una superficie attraversata da un solo conduttore. E' possibile calcolare il valore di quella corrente analizzando la KCL. Infatti:

  $$I = 0 \text{ A} \tag{1.12}$$

  Conseguentemente un monopolo è equivalente ad uno zeropolo:

- Bipolo: superficie attraversata da due conduttori. In questo caso è possibile definire solo una tensione ed una corrente indipendenti. I bipoli sono le strutture più importanti nello studio della teoria dei circuiti.

In un multipolo è quindi possibile identificare $N-1$ correnti indipendenti e $N - 1$ tensioni indipendenti. Raggruppando queste variabili in vettori si definiscono i vettori:

$$\underline{v} = \{v_i\} \tag{1.13}$$

$$\underline{i} = \{i_i\} \tag{1.14}$$

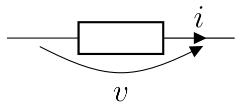
In un multipolo è possibile definire la relazione (vettoriale) fra le tensioni (vettore delle tensioni) e le correnti (vettore delle correnti). Essa è l'*equazione costitutiva* del multipolo:

$$\underline{f}(\underline{V}, \underline{I}) = \underline{0} \tag{1.15}$$

Data l'importanza dei bipoli, nella seguente sezione essi verranno analizzati in dettaglio. Nel seguito i multipoli verranno analizzati attentamente.

1.4 Bipoli

I bipoli sono un caso particolare del multipolo, in cui è possibile definire solo una corrente i ed una tensione indipendente v:



La relazione tensione e corrente in un bipolo è la sua equazione costitutiva:

$$f(v,i) = 0 \tag{1.16}$$

Essa rappresenta come in un bipolo sono legate tra di loro le *grandezze di interfaccia*, ovvero tensione e corrente.

1.4.1 Classificazione dei bipoli

E' possibile classificare i bipoli in base alle caratteristiche dell'equazione costitutiva. Le seguenti classificazioni non sono esclusive fra di loro.

Tipo di comando

I bipoli possono essere classificati in base alla grandezza indipendente e la grandezza dipendente nell'equazione costitutiva.

In particolare, è possibile avere bipoli controllati in corrente, se:

$$v = g(i) \tag{1.17}$$

Altrimenti, è possibile avere bipoli controllati in tensione:

$$i = h(v) \tag{1.18}$$

Se non è possibile esplicitare una grandezza in funzione dell'altra, si parla di relazione implicita:

$$f(i,v) = 0 \tag{1.19}$$

Esempio

Un esempio di bipolo controllato in corrente è il seguente:

$$v = 4 \cdot i \tag{1.20}$$

Similmente, un bipolo controllato in tensione è il seguente:

$$i = \frac{1}{4} \cdot v \tag{1.21}$$

Si noti che in questo caso, l'equazione costitutiva è la stessa ed è stata espressa in due modi diversi. Esistono bipoli per i quali non è possibile esprimerli in entrambi i modi:

$$v = 3i^2 + 2i + 1 \tag{1.22}$$

Linearità

Il legame fra tensione e corrente si definisce lineare se fra tensione e corrente sono applicati solo operatori lineari[5]:

$$\alpha i + \beta v = \gamma \tag{1.23}$$

Si noti che α, β e γ possono essere funzioni (anche non lineari) di altre variabili.

In una relazione lineare è possibile facilmente esprimere la relazione controllata in corrente o controllata in tensione.

Esempio

Esempi di bipoli lineari sono i seguenti:

$$v = 4 \cdot i + 1 \tag{1.24}$$

$$i = 0{,}5v + 1 \tag{1.25}$$

$$v = 4 \cdot \cos(3t) \cdot i \tag{1.26}$$

Al contrario i seguenti bipoli non sono lineari:

$$v = i^2 \tag{1.27}$$

[5] Si ricorda che gli operatori integro-differenziali sono lineari

$$v = \cos i \tag{1.28}$$

Tempo-varianza

Il legame costitutiva è definito tempo-variante se il legame fra tensione e corrente dipende esplicitamente dal tempo[6].

In base alla tempo-varianza delle grandezze si introduce una convenzione tipografica per le variabili circuitali: infatti, nel seguito verranno indicate con la lettera maiuscola grandezze che non sono esplicitamente funzione del tempo, mentre con la lettera minuscola grandezze che sono funzione esplicita del tempo.

Esempio

Sono tempo-invarianti i seguenti bipoli:

$$v = i^2 \tag{1.29}$$

$$4v + 3i = 5 \tag{1.30}$$

Al contrario, il seguente bipolo è tempo-variante:

$$v = 2\cos(2t) \cdot i + 2 \tag{1.31}$$

Memoria

Il legame costitutivo di un bipolo si definisce con memoria se caratterizzato da operatori integro-differenziali.

Esempio

Sono dotati di memoria i seguenti bipoli:

$$v = 2 \cdot \frac{di}{dt} \tag{1.32}$$

$$i = \int v dt \tag{1.33}$$

Sono bipoli senza memoria i seguenti:

$$v = i^2 + 2 \tag{1.34}$$

[6] Si ricorda che gli operatori integro-differenziali sono tempoinvarianti

$$10i + v = 1 \tag{1.35}$$

Bipoli attivi e bipoli passivi

Un bipolo si definisce attivo se *ha la possibilità* di generare potenza elettrica, ovvero di trasferire energia dall'esterno del sistema elettrico all'interno.

Se un bipolo non ha la possibilità di generare potenza, esso si definisce passivo.

1.4.2 Bipoli principali

Fra tutti i possibili bipoli, ce ne sono alcuni che hanno un'importanza fondamentale all'interno della teoria dei circuiti.

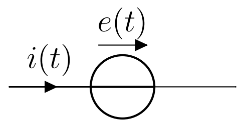
Questi bipoli sono la modellizzazione ideale di componenti circuitali reali.

Generatore ideale di tensione

Il generatore ideale di tensione è quel bipolo ai capi del quale la tensione è imposta e non dipende dalla corrente:

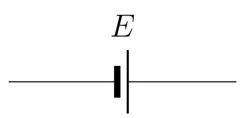
$$v(t) = e(t) \quad \forall i(t) \tag{1.36}$$

Il simbolo circuitale del generatore ideale di tensione è il seguente:



Il generatore ideale di tensione è un bipolo attivo. A seconda della tensione, esso può essere tempovariante o tempoinvariante.

Il caso di un generatore di tensione tempoinvatiante è molto comune: si tratta della batteria. Data la sua importanza, esiste un simbolo apposito:

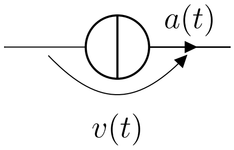


Generatore ideale di corrente

Il generatore ideale di corrente è quel bipolo in cui è fissata la corrente che circola indifferentemente dalla tensione che è applicata:

$$i(t) = a(t) \quad \forall v(t) \tag{1.37}$$

Esso è un bipolo attivo e il suo simbolo circuitale è il seguente:



Resistore

Il resistore è uno dei bipoli principali della teoria dei circuiti. Esso modellizza il comportamento di un materiale conduttore.

E' possibile ricavare l'equazione costitutiva di un resistore a partire dal comportamento dei materiali conduttori.

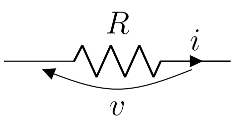
> **Legge di Ohm**
>
> *Un materiale conduttore si comporta come un resistore ideale, avendo quindi relazione tensione-corrente:*
>
> $$v(t) = Ri(t) \tag{1.38}$$
>
> *dove R è un parametro che si chiama* resistenza *ed è funzione delle caratteristiche fisiche del resistore. Per un conduttore cilindrico con proprietà fisiche costanti per tutta la sua lunghezza, la resistenza vale:*
>
> $$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A} \tag{1.39}$$
>
> *dove ρ è la resistività del materiale.*

L'unità di misura della resistenza è l'ohm [Ω] che è definito come il rapporto fra volt ed ampere:

$$1\Omega = \frac{1V}{1A} \tag{1.40}$$

.

L'equazione costitutiva di un resistore si chiama prima legge di Ohm e sottintende che le variabili tensione e corrente siano prese con verso opposto:



E' possibile scrivere la prima legge di Ohm in forma comandata in tensione:

$$i(t) = Gv(t) \tag{1.41}$$

dove G è la conduttanza del resistore e si misura in siemens $[S]$.

Corto circuito

Il corto circuito è il bipolo ai capi del quale la differenza di potenziale è nulla:

$$v(t) = 0V \quad \forall i(t) \tag{1.42}$$

Esso può essere considerato come caso limite di un generatore di tensione con tensione nulla, oppure di un resistore con resistenza nulla.

Circuito aperto

Il circuito aperto è quel bipolo attraverso il quale non scorre corrente:

$$i(t) = 0A \quad \forall v(t) \tag{1.43}$$

Esso può essere considerato come caso limite di un generatore di corrente con corrente nulla, oppure di un resistore con conduttanza nulla (*i.e.* resistenza infinita).

Induttore

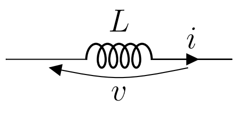
Un induttore è un componente passivo con capacità di accumulo di energia nel campo magnetico (componente con memoria). L'equazione costitutiva di un induttore può essere ricavata dall'analisi del comportamento magnetico dei materiali, come verrà esposto nel seguito.

L'equazione costitutiva di un induttore è:

$$v = \frac{dL(t)i(t)}{dt} \tag{1.44}$$

dove L è l'induttanza dell'induttore è si misura in henry $[H]$.

Il simbolo dell'induttore è il seguente:



Nel caso di invarianza temporale delle caratteristiche fisiche e geometriche dell'induttore l'induttanza è costante ed è quindi possibile scrivere l'equazione costitutiva come[7]:

$$v = L\frac{di(t)}{dt} \tag{1.45}$$

[7]Si noti che, sotto queste ipotesi, l'induttore è lineare e tempoinvariante

E' possibile analizzare il comportamento dell'induttore nel caso di invarianza temporale della grandezza corrente: tale caso si definisce come *comportamento in stato stazionario.*

In stato stazionario (quando le grandezze tensione e corrente non dipendono dal tempo) l'equazione costitutiva di un induttore diventa:

$$v = 0V \tag{1.46}$$

quindi in queste condizioni l'induttore si comporta come un corto circuito.

E' possibile calcolare l'energia accumulata in un induttore con la seguente formula:

$$W_E = \int p(t)dt = \int v(t)i(t)dt = \int Li\frac{di}{dt}dt = \frac{1}{2}Li^2 \tag{1.47}$$

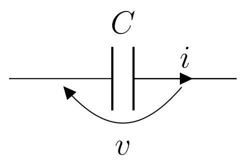
Condensatore

Il condensatore è un componente passivo con capacità di accumulo dell'energia sotto forma di campo elettrico (componente con memoria). L'equazione costitutiva di un condensatore è:

$$i = \frac{d(C(t)v(t))}{dt} \tag{1.48}$$

dove C è la capacità del condensatore e si misura in farad $[F]$.

Il simbolo del condensatore è il seguente:



Nel caso di invarianza temporale delle caratteristiche fisiche e geometriche del condensatore, la capacità è costante ed è quindi possibile scrivere l'equazione costitutiva come[8]:

$$i = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{1.49}$$

E' possibile analizzare il comportamento del condensatore in stato stazionario:

$$i = 0A \tag{1.50}$$

[8]Si noti che, sotto queste ipotesi, il condensatore è lineare e tempoinvariante

quindi in queste condizioni il condensatore si comporta come un circuito aperto.

E' possibile calcolare l'energia accumulata in un condensatore con la seguente formula:

$$W_H = \int p(t)dt = \int v(t)i(t)dt = \int Cv\frac{dv}{dt}dt = \frac{1}{2}Cv^2 \tag{1.51}$$

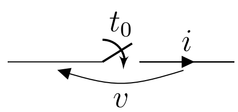
Interruttore

L'interruttore è un elemento tempovariante che può avere una delle due seguenti equazioni costitutive.

La prima è:

$$\begin{cases} i = 0A & t < t_0 \\ v = 0V & t > t_0 \end{cases} \tag{1.52}$$

in questo caso, il simbolo dell'interruttore è:

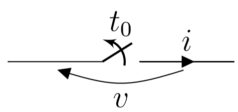


Questo significa che, prima di t_0 l'interruttore si comporta come un circuito aperto, mentre dopo t_0 come un corto circuito.

La seconda possibile equazione costitutiva è:

$$\begin{cases} v = 0A & t < t_0 \\ i = 0V & t > t_0 \end{cases} \tag{1.53}$$

in questo caso, il simbolo dell'interruttore è:



Questo significa che, prima di t_0 l'interruttore si comporta come un corto circuito, mentre dopo t_0 come un circuito aperto.

1.5 Risoluzione di una rete elettrica

Risolvere completamente una rete elettrica significa calcolare tutte le tensioni e le correnti definite su una rete elettrica.

Per chiarire meglio questo concetto, è necessario introdurre due definizioni:

- Nodo: si definisce *nodo* l'intersezione di due o più morsetti. In particolare se il numero di morsetti è pari a due, si parla di nodo improprio, altrimenti di nodo proprio;

- Lato: si definisce *lato* la porzione di rete che connette due nodi.

In una rete con L lati ed N nodi si hanno $2L$ variabili circuitali incognite: infatti, ogni lato si comporta come un bipolo ed è quindi possibile definire 1 tensione ed 1 corrente per lato.

Risolvere completamente una rete significa calcolare tutte le $2L$ incognite.

Per farlo, è possibile ricorrere alle equazioni topologiche (leggi di Kirchhoff) ed alle equazioni costitutive dei componenti.

Per dimostrare il sistema completo di risoluzione di una rete, è necessario ricorrere alla *rappresentazione topologica* della rete mediante la teoria dei grafi.

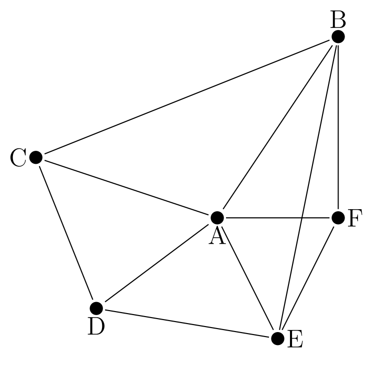
1.5.1 Rappresentazione topologica di una rete

Rappresentare topologicamente una rete significa disegnare il *grafo* corrispondente alla rete stessa.

Si definisce grafo un insieme di nodi connessi da dei lati:

$$G = \{\{L_i\}, \{N_j\}\} \tag{1.54}$$

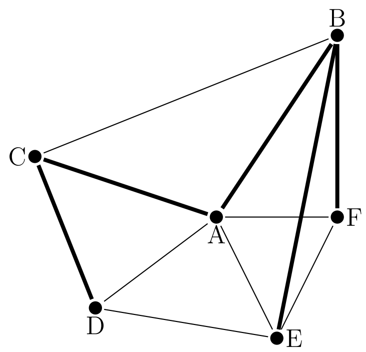
La figura sottostante mostra un grafo con 6 nodi ($N = 6$) e 11 lati ($L = 11$).



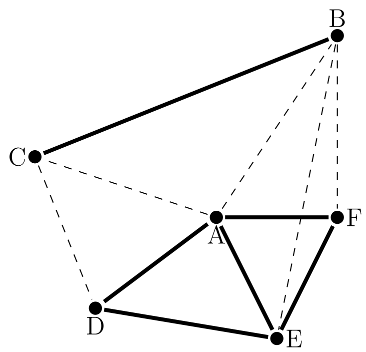
Un grafo si definisce *connesso* se a partire da un nodo è possibile raggiungere tutti gli altri percorrendo i lati del grafo.

Dato un grafo, è possibile definire delle sotto-strutture del grafo:

- albero: un *albero* è un grafo senza percorsi chiusi. Dato un grafo connesso è possibile individuare il corrispettivo sotto-albero prendendo tutti i nodi ed un sottoinsieme di lati tale che tutti i nodi siano connessi e non ci siano percorsi chiusi;



- coalbero: dato un grafo ed un suo sotto-albero, il *co-albero* è l'insieme di tutti i nodi e di tutti i lati non facenti parte dell'albero.



All'interno di un grafo, è possibile definire due strutture:

- *Maglia*: percorso chiuso formato da lati del grafo; una maglia che non contiene lati del grafo al suo interno si chiama *anello*;

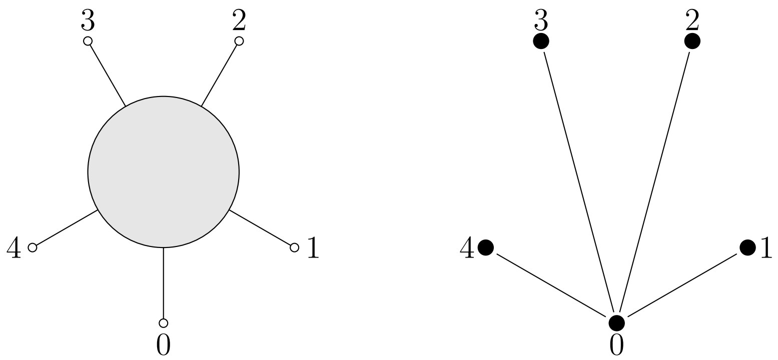
- Taglio: insieme di lati tagliati da una superficie chiusa;

Si noti la corrispondenza fra le queste strutture e la formulazione delle leggi di Kichhoff.

Per poter definire il grafo di una rete è necessario definire il grafo dei componenti: in particolare è necessario definire il grafo di un multipolo, poi quello del bipolo è solo una riduzione dimensionale

Rappresentazione topologica di un multipolo

La rappresentazione topologica di un multipolo è composta da n nodi (ciascun morsetto del multipolo) ed $n-1$ lati che colleghino ciascun morsetto con un morsetto definito di riferimento:



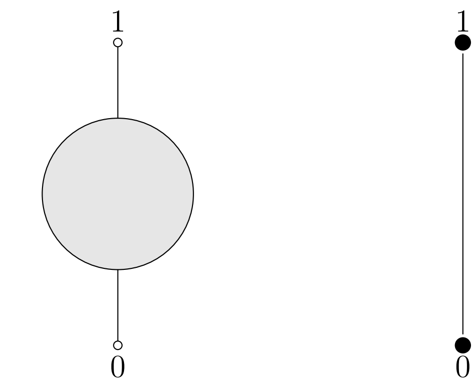
(a) Generico multipolo

(b) Rappresentazione topologica

Un caso particolare della rappresentazione di un multipolo, molto importante nello studio dell'elettrotecnica, è la rappresentazione di un bipolo.

Rappresentazione topologica di un bipolo

Un bipolo è rappresentato mediante due nodi ed un lato:



(c) Generico bipolo

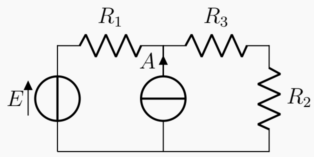
(d) Rappresentazione topologica

Si noti che nella rappresentazione topologica il numero di variabili viene conservato: infatti è possibile definire una tensione ed una corrente per ogni lato del grafo.

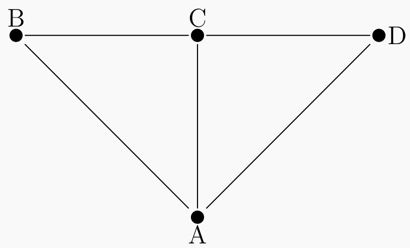
Solitamente, nella rappresentazione topologica, il corto circuito non viene conteggiato come bipolo: infatti, due nodi connessi da un corto circuito possono essere considerati lo stesso nodo.

Esempio

Data la seguente rete elettrica, effettuarne la rappresentazione topologica:



Per prima cosa, è necessario notare che la rete è composta da 5 bipoli, quindi il grafo avrà 5 lati. La rete ha 4 nodi, dovuti allo specifico collegamento fra i bipoli.
La rappresentazione topologica è la seguente:



1.5.2 Equazioni indipendenti in una rete elettrica

Le equazioni topologiche sono alcune delle equazioni che possono essere utilizzate per risolvere una rete elettrica. La rappresentazione topologica della rete permette di individuare e dimostrare il numero di equazioni topologiche indipendenti.

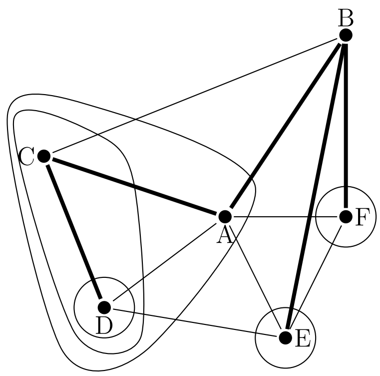
Equazioni alle correnti indipendenti

In una rete con N nodi ed L lati è possibile definire $N-1$ leggi di Kirchhoff delle correnti indipendenti:

$$n_{KCL,indip} = N - 1 \tag{1.55}$$

Dimostrazione

Data una rete elettrica è possibile rappresentare il grafo corrispondente. In questo grafo è possibile identificare il sotto-albero (che comprende tutti i nodi una ed una volta). Dato che il sotto-albero comprende tutti ed N i nodi, esso include $N-1$ lati.
In questo sotto-albero è possibile identificare dei tagli nel seguente modo: ciascuno di essi deve tagliare un solo lato dell'albero (ovviamente non tagliato da altri). In questo modo è possibile definire $N-1$ tagli.
Si noti che ogni taglio include un lato dell'albero che non era incluso nei tagli precedenti: conseguentemente la KCL corrispondente a quel taglio è linearmente indipendente da quelle precedenti.
Conseguentemente è possibile scrivere $N-1$ KCL indipendenti.



Un modo per identificare $N-1$ equazioni indipendenti è possibile prendere come superfici quelle che contengono ciascuna un solo nodo del grafo.

Da un punto di vista della risoluzione delle reti elettriche, questo si definisce "scrivere un'equazione al nodo"; al contrario quando una superficie include più di un nodo, essa è chiamata equazione al supernodo.

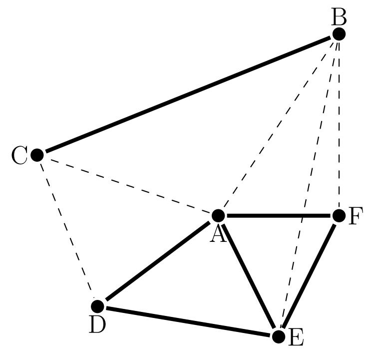
Equazioni alle tensioni indipendenti

In una rete con N nodi ed L lati è possibile definire $L-N+1$ leggi di Kirchhoff delle tensioni indipendenti:

$$n_{KVL,indip} = L - N + 1 \tag{1.56}$$

Dimostrazione

Data una rete elettrica è possibile rappresentare il grafo corrispondente. In questo grafo è possibile identificare il sotto-albero ed il corrispondente co-albero. Il grafo intero contiene L lati, l'albero $N-1$ lati, conseguentemente il co-albero ne contiene $L-(N-1)$ lati.



Si prendano ora le maglie con il seguente criterio: ciascuna maglia deve contenere un solo lato del co-albero (ovviamente non incluso in alcun'altra maglia).
In questo modo ciascuna delle leggi di Kirchhoff delle tensioni scritte usando le maglie identificare (maglie fondamentali) contiene un lato non contenuto nelle altre, quindi esse sono linearmente indipendenti l'una dall'altra.
Dato che il co-albero contiene $L-N+1$ lati, questo è il numero di equazioni indipendenti che si possono scrivere.

Un modo per scrivere le KVL indipendenti è prendere come maglie gli anelli, ovvero maglie che non contengono all'interno nessun lato del grafo.

Abbiamo visto che in una rete elettrica con L lati ed N nodi è possibile scrivere $N-1$ KCL ed $L-N+1$ KVL indipendenti.

In totale, le equazioni topologiche indipendenti sono:

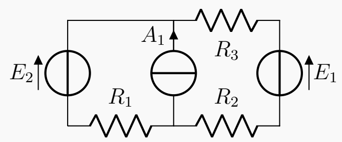
$$(N-1)+(L-N+1)=L \tag{1.57}$$

Per risolvere completamente la rete è necessario aggiungere altre L equazioni. Queste sono le equazioni costitutive dei componenti presenti nella rete.

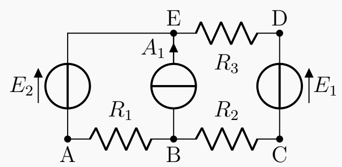
E' quindi possibile scrivere un sistema di $2L$ equazioni indipendenti in $2L$ incognite. Risolvendo questo sistema è possibile tutte le reti elettriche.

Esempio

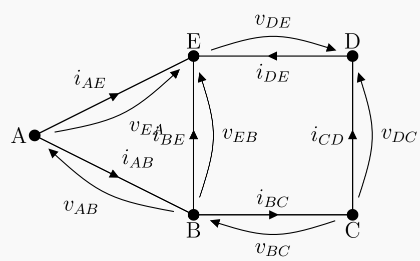
Data la seguente rete elettrica, effettuarne la rappresentazione topologica e scrivere tutte le equazioni indipendenti che permettano di risolvere la rete. Si considerino sia nodi propri che impropri nella scrittura delle KCL.



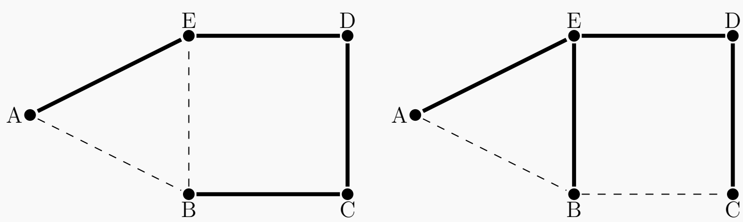
Per prima cosa è necessario individuare i nodi propri ed impropri:



Si scelga per i nomi delle tensioni la convenzione standard, e per i nomi delle correnti la convenzione per la quale I_{AB} fluisce dal nodo A al nodo B.
La rappresentazione topologica di tale rete è:



Scegliendo come albero per le KCL quello evidenziato della figura di sinistra, mentre come coalbero per le KVL quello nella figura di destra:



Le 4 KCL indipendenti sono:

$$-i_{AE} - i_{AB} = 0 \tag{1.58}$$

$$i_{AE} + i_{BE} + i_{DE} = 0 \tag{1.59}$$

$$i_{CD} - i_{DE} = 0 \tag{1.60}$$

$$i_{BC} + i_{CD} = 0 \tag{1.61}$$

Le 2 KVL indipendenti sono:

$$v_{EB} - v_{EA} - v_{AB} = 0 \tag{1.62}$$

$$v_{CD} - v_{DE} - v_{EB} - v_{EB} = 0 \tag{1.63}$$

Le 6 equazioni costitutive sono:

$$v_{EA} = E_2 \tag{1.64}$$

$$i_{BE} = A_1 \tag{1.65}$$

$$v_{CD} = E_1 \tag{1.66}$$

$$v_{AB} = R_1 i_{AB} \tag{1.67}$$

$$v_{BC} = R_2 i_{BC} \tag{1.68}$$

$$v_{DE} = R_3 i_{DE} \tag{1.69}$$

1.5.3 Sistema completo di equazioni risolutive di reti elettriche

E' possibile scrivere le equazioni di Kirchhoff in forma matriciale: per prima cosa è necessario raggruppare in un vettore le tensioni e le correnti. $\underline{I}$ è il vettore di L elementi che contiene tutte le correnti della rete, mentre $\underline{V}$ contiene tutte le tensioni.

La rappresentazione delle leggi di Kirchhoff in forma matriciale passa attraverso l'uso delle matrici di adiacenze. Tutte le KCL possono essere raggruppate nella seguente espressione matriciale:

$$[A_C]\underline{I} = \underline{0} \tag{1.70}$$

dove $[A_C]$ è la matrice delle incidenze per le correnti, ha dimensione $N-1 \times L$ ed è composta nel seguente modo:

- $A_{C,ij} = 1$ se la corrente I_j è concorde con la convenzione usata per scrivere la KCL alla i-esima superficie;
- $A_{C,ij} = -1$ se la corrente I_j è discorde con la convenzione usata per scrivere la KCL alla i-esima superficie;

- $A_{C,ij} = 0$ altrimenti.

Per quanto riguarda le KVL è possibile utilizzare un sistema analogo:

$$[A_V]\underline{V} = \underline{0} \tag{1.71}$$

dove $[A_V]$ è la matrice delle incidenze per le tensioni, ha dimensione $L - N + 1 \times L$ ed è composta nel seguente modo:

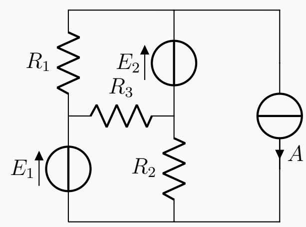
- $A_{V,ij} = 1$ se la tensione V_j è concorde con il verso di percorrenza della maglia i;
- $A_{V,ij} = -1$ se la tensione V_j è discorde con il verso di percorrenza della maglia i;
- $A_{V,ij} = 0$ altrimenti.

Il sistema di L equazioni topologiche può essere quindi scritto nel seguente modo:

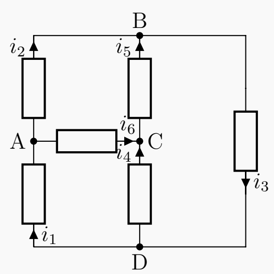
$$\begin{bmatrix} [A_C] & [0] \\ [0] & [A_V] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \tag{1.72}$$

Esempio

Dato il seguente circuito, indicare le variabili di rete sui bipoli e scrivere le matrici di adiacenza per le KCL e le KVL.



Per scrivere la matrice delle adiacenze delle KCL è necessario dare un nome ai nodi ed identificare tutte le correnti nei bipoli:



Per scrivere la matrice di adiacenze, si considerano le KCL ai nodi A, B e C (correnti positive se entranti).
La corrente i_1 entra nel nodo A, quindi avremo:

$$A_{C,11} = 1 \tag{1.73}$$

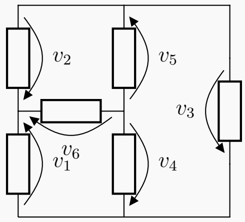
La corrente i_2 esce dal nodo A:

$$A_{C,12} = -1 \tag{1.74}$$

Ripetendo questo ragionamento per tutti i nodi si ottiene:

$$[A_C] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.75}$$

Per scrivere la matrice di adiacenze delle KVL si identificano le tensioni sui bipoli:



Si prendono come maglie i tre anelli. Quindi, scegliendo il verso di percorrenza orario:

$$[A_V] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.76}$$

E' possibile anche scrivere in forma matriciale le equazioni costitutive dei bipoli lineari.

Per i generatori di tensione, è possibile scrivere:

$$[A_E]\underline{V} = \underline{E} \tag{1.77}$$

dove $[A_E]$ è la matrice dei generatori di tensione e $\underline{E}$ contiene tutte le tensioni imposte dai generatori.

Analogamente è possibile scrivere per i generatori di corrente:

$$[A_A]\underline{I} = \underline{A_s} \tag{1.78}$$

dove $[A_A]$ è la matrice dei generatori di corrente e $\underline{A_s}$ contiene tutte le correnti imposte dai generatori.

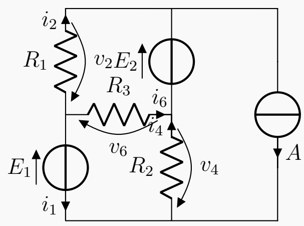
Per quanto riguarda i resistori, è necessario utilizzare due matrici di adiacenze se gli indici delle tensioni e delle correnti sul resistore non sono gli stessi:

$$[R][A_{RI}]\underline{I} = [A_{RV}]\underline{V} \tag{1.79}$$

dove $[R]$ è la matrice diagonale con i valori delle resistenze; $[A_{RI}]$ e $[A_{RV}]$ sono le matrici delle correnti e delle tensioni sui resistori.

Esempio

Dato il seguente circuito, scrivere le matrici di adiacenze per generatori di tensione, generatori di corrente e resistori.



Per le tensioni e le correnti non indicate, si faccia riferimento all'esempio precedente.
Per quanto riguarda i generatori di tensione:

$$[A_E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.80}$$

considerando:

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \tag{1.81}$$

Per il generatore di corrente:

$$[A_A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.82}$$

considerando:

$$\underline{A_s} = \begin{bmatrix} A_1 \end{bmatrix} \tag{1.83}$$

Infine, per i resistori è possibile notare che gli indici di tensioni e correnti sono uguali, quindi le due matrici coincidono:

$$[A_{RI}] = [A_{RV}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.84}$$

considerando:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \tag{1.85}$$

Quindi, in una rete lineare è possibile scrivere il sistema risolutivo nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} [A_C] & [0] \\ [0] & [A_V] \\ [A_A] & [0] \\ [0] & [A_V] \\ [R][A_{RI}] & -[A_{RV}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{A_s} \\ \underline{E} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \tag{1.86}$$

Ovvero:

$$[A]\underline{x} = \underline{G} \tag{1.87}$$

La soluzione di questo sistema è:

$$\underline{x} = [A]^{-}1\underline{G} \tag{1.88}$$

Per prima cosa è possibile notare che la matrice $[A]$ è una matrice sparsa. Essa ha dimensione $2L \times 2L$, quindi la sua inversione è un processo molto dispendioso dal punto di vista computazionale. Inoltre, la risoluzione di una rete lineare mediante questo sistema è molto difficile da effettuare senza l'uso di un calcolatore.

Nei capitoli successivi verranno studiate delle tecniche più efficienti nella risoluzione di particolari classi di reti.

In primo luogo verranno analizzate le reti in stato stazionario (tempo-invarianti) lineari: per queste verranno introdotte delle tecniche ad hoc per la risoluzione di reti con soli bipoli elementari, in seguito si analizzeranno le tecniche per la gestione dei multipoli. Infine verranno introdotte le tecniche generali.

In secondo luogo verranno introdotte le tecniche per l'analisi delle reti tempo-varianti lineari, dalle reti con comportamento transitorio, alle reti in regime sinusoidale, passando per l'analisi in frequenza.

In terzo luogo verranno analizzate le reti in presenza di elementi non lineari, siano essi bipoli o multipoli.

In queste analisi verranno introdotti altri componenti circuitali che non sono stati presentati nelle sezioni precedenti.

1.6 Potenza

E' possibile ricavare la potenza generata o dissipata in funzione delle variabili circuitali, tensione e corrente. Nel caso dei bipoli, è possibile trovare una formula molto semplice per il calcolo della potenza.

Per sapere il verso dello scambio di potenza fra il bipolo e l'ambiente esterno, è necessario definire delle convenzioni di segno.

1.6.1 Potenza di un bipolo

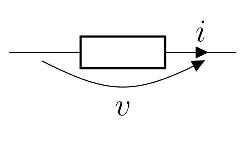
La potenza istantanea di un bipolo si può ricavare dalla definizione di potenza istantanea in elettromagnetismo.

> **Potenza di un bipolo**
>
> *Dato un bipolo, note le variabili circuitali $v(t)$ e $i(t)$ la potenza che attraversa la frontiera del bipoli si calcola come:*
>
> $$p(t) = v(t)i(t) \tag{1.89}$$

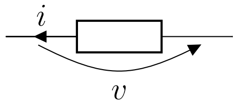
Un aspetto fondamentale da considerare nell'analisi della potenza elaborata da bipoli è la direzione del flusso di potenza attraverso il bipolo.

Un bipolo *genera* potenza se la potenza elettrica esce dalla frontiera del bipolo, quindi se la normale alla superficie nell'integrazione del vettore di Poynting è presa uscente dal bipolo.

Questo significa che le grandezze tensione e corrente sono concordi sul bipolo. Questa si chiama *convenzione dei generatori*:



Nel caso contrario, il bipolo *dissipa* potenza quando la normale è presa entrante al bipolo. Questo significa che tensione e corrente sono discordi (*convenzione degli utilizzatori*):



Nella risoluzione dei circuiti si identificano due casi.

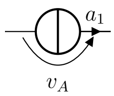
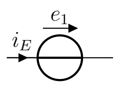
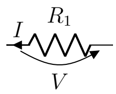
Nel caso dei bipoli passivi (*e.g.* resistore, induttore e condensatore), è certo che la potenza è dissipata, quindi nel legame costitutivo tensione e corrente sono presi con la convenzione degli utilizzatori.

Per i bipoli attivi, non è noto a priori la direzione della corrente. Conseguentemente, si consiglia di scegliere una delle due convenzioni di segno e poi valutare l'effettiva direzione fisica della potenza dal segno del risultato.

Si noti che, in un bipolo, la potenza generata è l'opposto della potenza dissipata:

$$p_{gen} = -p_{diss} \tag{1.90}$$

Data una rete in cui tutti i bipoli sono tempo-invarianti è possibile scrivere facilmente le potenze generate o dissipate dai bipoli principali:

Generatore di corrente		$p_A(t) = a_1 \cdot v_A$	Generatori
Generatore di tensione		$p_E(t) = e_1 \cdot i_E$	Generatori
Resistore		$p_R(t) = v(t) \cdot i(t) = \dfrac{v^2}{R} = Ri^2$	Utilizzatori

Attraverso queste formule è possibile ricavare le potenze dei vari elementi a partire dalle variabili di rete.

1.6.2 Bilancio di Potenze

Dalla definizione di potenza in un problema elettromagnetico, è possibile ricavare il bilancio di potenze.

> **Bilancio di potenze**
>
> *Dato un sistema elettricamente isolato, la somma di tutte le potenze*

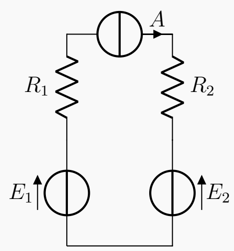
generate nel sistema è uguale alla somma di tutte le potenze dissipate:

$$\sum_{j}^{N_g} p_{gen,j} = \sum_{k}^{N_u} p_{diss,k} \tag{1.91}$$

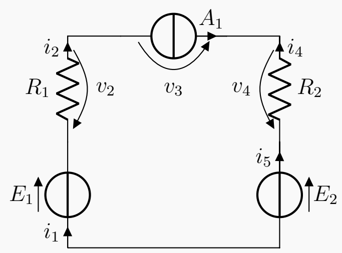
Il bilancio di potenze vale per un'intera rete elettrica che sia isolata dal resto. Questo può essere dimostrato notando che in un sistema elettricamente isolato non ci sono correnti che attraversano la superficie che contiene il sistema.

Esempio

Data la seguente rete elettrica, calcolare tutte le potenze elaborate dagli elementi e scrivere il bilancio di potenze.



Si indichino le variabili di rete per ciascun bipolo. In maniera arbitraria, quelle non direttamente indicate dal testo sono state scelta con la convenzione dei generatori per A, E_1 ed E_2 e per i resistori con la convezione degli utilizzatori:



Le KCL dicono che:

$$i_1 = i_2 = -i_4 = -i_5 = A_1 \tag{1.92}$$

Quindi le potenze dissipata da ciascun resistore sono:

$$P_{R_1} = R_1 A_1^2 \tag{1.93}$$

$$P_{R_2} = R_2 A_1^2 \tag{1.94}$$

$$P_{R_4} = R_4(-A_1)^2 = R_4 A_1^2 \tag{1.95}$$

$$P_{R_5} = R_5(-A_1)^2 = R_5 A_1^2 \tag{1.96}$$

Le potenze generate dai generatori di tensione sono:

$$P_{E_1} = E_1 A_1 \tag{1.97}$$

$$P_{E_2} = E_2(-A_1) = -E_2 A_1 \tag{1.98}$$

La KVL all'unico anelli dice che:

$$v_3 = -v_4 + E_2 - E_1 + v_2 \tag{1.99}$$

Inserendo in questa equazione le equazioni costitutive dei resistori:

$$v_3 = -(-A_1 R_4) + E_2 - E_1 + R_1 A_1 = A_1 R_4 + E_2 - E_1 + R_1 A_1 \tag{1.100}$$

Quindi la potenza generata da A_1 è:

$$P_{A_1} = A_1 v_3 = A_1^2 R_4 + E_2 A_1 - E_1 A_1 + R_1 A_1^2 \tag{1.101}$$

Il bilancio di potenze dice che:

$$P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} = P_{E_1} + P_{E_2} + P_{A_1} \tag{1.102}$$

Capitolo 2

Tecniche ad-hoc per la risoluzione di reti elettriche

2.1 Principio di equivalenza e sostituzione

Un principio basilare per lo studio della teoria dei circuiti è il *principio di equivalenza.*

Principio di equivalenza

Dati due bipoli, nota la loro caratteristica funzionale $f(v,i) = 0$ *e* $g(v,i) = 0$*, essi sono equivalenti agli effetti esterni se:*

$$f(v,i) = g(v,i) \tag{2.1}$$

Due bipoli sono equivalenti quando non è possibile distinguerli dalla loro interazione con il resto del circuito.

Si sottolinea che l'equivalenza vale agli effetti esterni, ovvero considerando tutte le grandezze circuitali al di fuori di quelle interne al bipolo.

Un'altro principio base dello studio delle reti elettriche è il *principio di sostituzione.*

Principio di sostituzione

Dati due bipoli equivalenti, è possibile sostituire un bipolo con l'altro senza alterare il funzionamento del resto della rete.

Il principio di sostituzione è il metodo in cui viene applicato il principio di equivalenza. Si sottolinea anche in questo caso l'equivalenza vale solo agli effetti esterni.

In terzo luogo verranno analizzate le reti in presenza di elementi non lineari, siano essi bipoli o multipoli.

In queste analisi verranno introdotti altri componenti circuitali che non sono stati presentati nelle sezioni precedenti.

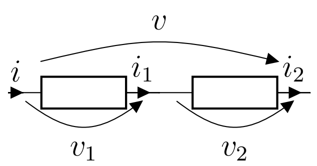
2.1.1 Principali collegamenti topologici fra bipoli

Esistono due collegamenti topologici molti importanti all'interno dello studio delle reti elettriche. Essi sono il collegamento *serie* ed il collegamento *parallelo*.

Si sottolinea che serie e parallelo non esauriscono tutti i possibili collegamenti fra bipoli.

Bipoli in serie

Due generici bipoli si definiscono in serie se e solo se hanno un solo morsetto in comune fra di loro senza nessun'altro elemento connesso a quel morsetto.



Conseguenze di questa connessione sono le seguenti relazioni fra le grandezze elettriche dei bipoli in serie.

Da una KVL è possibile ottenere la relazione fra la tensione ai capi della serie in funzione delle tensioni sui singoli elementi:

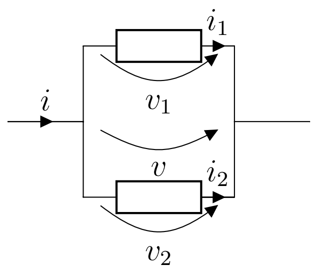
$$v = v_1 + v_2 \tag{2.2}$$

Da una KCL è possibile ottenere la relazione fra la corrente che fluisce nella serie e le correnti nei singoli bipoli:

$$i = i_1 = i_2 \tag{2.3}$$

Bipoli in parallelo

Due o piu' bipoli si definiscono in parallelo se hanno entrambi i morsetti in comune.



Conseguenze di questa connessione sono le seguenti relazioni fra le grandezze elettriche dei bipoli in serie.

Da una KCL è possibile ottenere la relazione fra la corrente totale entrante nel parallelo e le correnti che scorrono nei singoli elementi:

$$i = i_1 + i_2 \tag{2.4}$$

Da una KVL è possibile ottenere la relazione fra la tensione ai capi del parallelo e la tensione ai capi dei singoli bipoli:

$$v = v_1 = v_2 \tag{2.5}$$

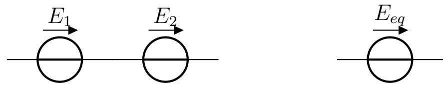
2.1.2 Collegamenti fra bipoli omologhi

Qualora i due bopoli in serie o in parallelo sono bipoli omologhi (dello stesso tipo) è possibile calcolare facilmente il bipolo equivalente alla serie o al parallelo.

Questo permette di semplificare notevolmente la risoluzione di circuiti in cui sono presenti queste tipologie di connessione.

Serie di generatori di tensione

Siano dati due generatori di tensione in serie (a sinistra nella seguente figura).



Dalle relazioni espresse dalle Equazioni 2.3 e 2.2 è possibile ottenere le relazioni tensione e corrente della serie:

$$V = E_1 + E_2 \tag{2.6}$$

$$I = I_1 = I_2 \tag{2.7}$$

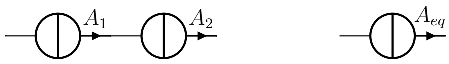
Questo significa che la serie di due generatori di tensione è equivalente agli effetti esterni ad un solo generatore di tensione:

$$E_{eq} = E_1 + E_2 \tag{2.8}$$

L'espressione ottenuta si può estendere alla serie di più generatori di tensione.

Serie di generatori di corrente

Siano dati due generatori di tensione in serie (a sinistra nella seguente figura).



Dalle relazioni espresse dalle Equazioni 2.3 e 2.2 è possibile ottenere le relazioni tensione e corrente della serie:

$$V = V_1 + V_2 \tag{2.9}$$

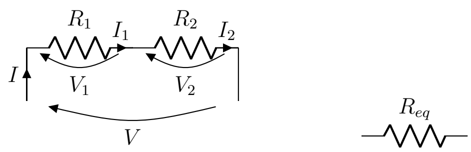
$$I = A_1 = A_2 \tag{2.10}$$

Questo significa che la serie di due generatori di corrente esiste se e solo se i due generatori sono uguali, ed, in tal caso, è equivalente ad un solo generatore di corrente:

$$A_{eq} = A_1 = A_2 \tag{2.11}$$

Serie di resistori

Dati due resistori in serie:



Dalle relazioni espresse dalle Equazioni 2.3 e 2.2 si ottiene:

$$V = V_1 + V_2 \tag{2.12}$$

$$I = I_1 = I_2 \tag{2.13}$$

Inserendo nella prima di queste equazioni la legge di Ohm:

$$V = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 \tag{2.14}$$

Ricordando l'uguaglianza delle correnti:

$$V = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I = (R_1 + R_2)I \tag{2.15}$$

Da questa espressione si nota che la serie di due resistori è equivalente ad un singolo resistore avente resistenza:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \tag{2.16}$$

Infatti, la relazione tensione corrente in questo resistore equivalente è:

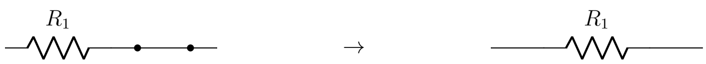
$$V = R_{eq}I = (R_1 + R_2)I \tag{2.17}$$

che è uguale a quella trovata per la serie.

L'espressione ottenuta si può estendere alla serie di più resistori.

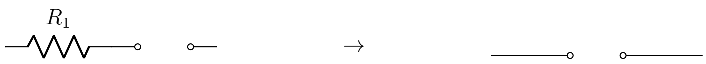
Da questa formula è possibile calcolare la serie fra un resistore ed un corto circuito ($R_0 = 0\Omega$):

$$R_{eq} = R_1 + R_0 = R_1 \tag{2.18}$$



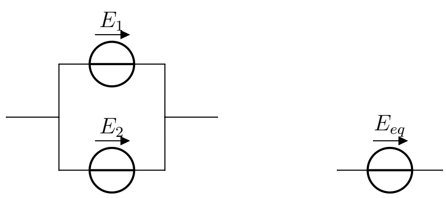
La serie fra un resistore ed un circuito aperto si calcola invece come:

$$R_{eq} = \lim_{R_\infty \to +\infty} R_1 + R_\infty = +\infty \tag{2.19}$$



Parallelo di generatori di tensione

Dati due generatori di tensione in parallelo:



Dalle relazioni espresse dalle Equazioni 2.4 e 2.5 è possibile ottenere le relazioni tensione e corrente della serie:

$$I = I_1 + I_2 \tag{2.20}$$

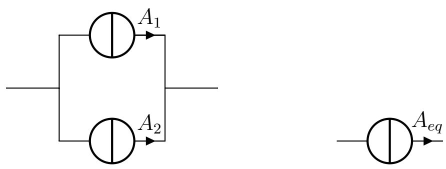
$$V = E_1 = E_2 \tag{2.21}$$

Questo significa che il parallelo di due generatori di tensione esiste se e solo se i due generatori sono uguali, ed, in tal caso, è equivalente ad un solo generatore di tensione:

$$E_{eq} = E_1 = E_2 \tag{2.22}$$

Parallelo di generatori di corrente

Dati due generatori di corrente in parallelo:



Dalle relazioni espresse dalle Equazioni 2.4 e 2.5 è possibile ottenere le relazioni tensione e corrente della serie:

$$I = A_1 + A_2 \tag{2.23}$$

$$V = V_1 = V_2 \tag{2.24}$$

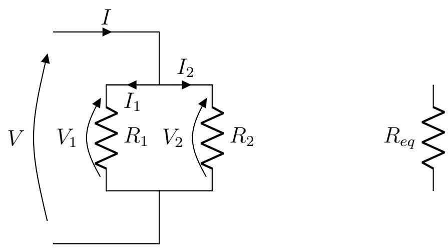
Questo significa che la serie di due generatori di corrente è equivalente agli effetti esterni ad un solo generatore di corrente:

$$A_{eq} = A_1 + A_2 \tag{2.25}$$

L'espressione ottenuta si può estendere al parallelo di più generatori di corrente.

Parallelo di resistori

Dati due resistori in parallelo:



Dalle relazioni espresse dalle Equazioni 2.4 e 2.5 si ottiene:

$$V = V_1 = V_2 \tag{2.26}$$

$$I = I_1 + I_2 \tag{2.27}$$

Inserendo nella seconda di queste equazioni la legge di Ohm (espressa in termini di conduttanza):

$$I = G_1 \cdot V_1 + G_2 \cdot V_2 \tag{2.28}$$

Ricordando l'uguaglianza delle tensioni:

$$I = G_1 \cdot V + G_2 \cdot V = (G_1 + G_2)V \tag{2.29}$$

Da questa espressione si nota che la serie di due resistori è equivalente ad un singolo resistore avente conduttanza:

$$G_{eq} = G_1 + G_2 \tag{2.30}$$

Infatti, la relazione tensione corrente in questo resistore equivalente è:

$$I = G_{eq}V = (G_1 + G_2)V \tag{2.31}$$

che è uguale a quella trovata per il parallelo.

La formula ottenuta (in funzione delle conduttanze!) si può estendere anche al parallelo di più di due resistori.

Dato che solitamente i resistori sono espressi in termini di resistenza e non di conduttanza, è possibile ricavare la resistenza equivalente in funzione delle resistenze dei singoli resistori.

Dall'equazione 2.30 si ottiene:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{2.32}$$

Infine:

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.33}$$

E' importante ricordare che questa formula è valida solo nel caso di due resistori in parallelo. Per applicarla correttamente al parallelo di più resistori, è necessario utilizzare la proprietà assiciativa.

Si noti inoltre che la resistenza equivalente è sempre minore delle due resistenze iniziali.

Dimostrazione

Si prendano due resistori, tali che $R_1 \leq R_2$.
La resistenza equivalente al parallelo dei due resistori vale:

$$R_{eq} = R_1 /\!/ R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.34}$$

Ciò che ci si propone di dimostrare è la seguente espressione:

$$R_{eq} \leq R_1 \tag{2.35}$$

Ovvero:

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \leq R_1 \tag{2.36}$$

Moltiplicando per $R_1 + R_2$ (termine positivo dato che le resistenze sono positive):

$$R_1 \cdot R_2 \leq R_1 \cdot (R_1 + R_2) = R_1^2 + R_1 \cdot R_2 \tag{2.37}$$

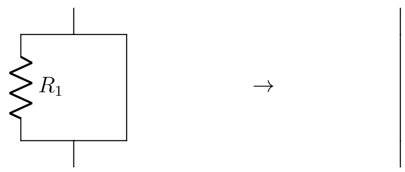
Ovvero:

$$R_1^2 \leq 0 \tag{2.38}$$

Che è sempre verificato.

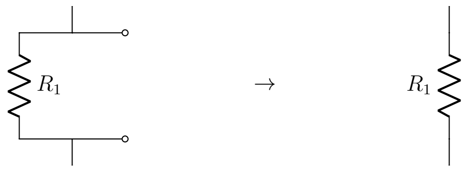
Da questa formula è possibile calcolare il parallelo fra un resistore ed un corto circuito ($R_0 = 0\Omega$):

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_0}{R_1 + R_0} = 0\Omega \tag{2.39}$$



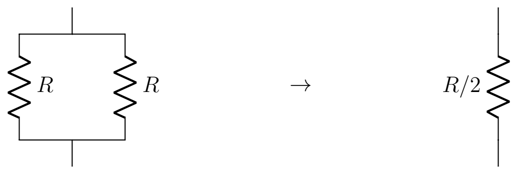
Il parallelo fra un resistore ed un circuito aperto si calcola invece come:

$$R_{eq} = \lim_{R_\infty \to +\infty} \frac{R_1 \cdot R_\infty}{R_1 + R_\infty} = \lim_{R_\infty \to +\infty} \frac{R_1}{\dfrac{R_1}{R_\infty} + 1} = R_1 \tag{2.40}$$



Infine, è comodo calcolare il parallelo fra due resistori aventi uguale resistenza ($R_1 = R_2 = R$):

$$R_{eq} = \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R}{2} \tag{2.41}$$

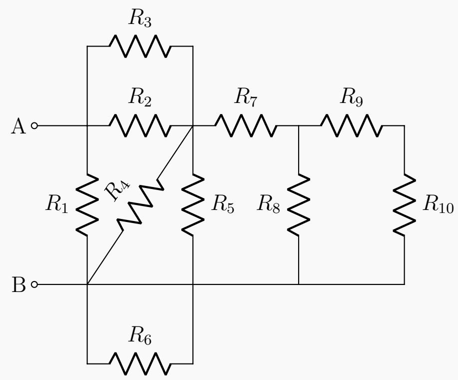


2.1.3 Resistenze equivalenti

Particolarmente importante nella risoluzione dei circuiti elettrici è il calcolo della resistenza equivalente di un insieme di soli resistori.

Esempio

Calcolare la resistenza equivalente vista ai morsetti A-B:



Per procedere al calcolo della resistenza equivalente è necessario individuare i resistori in configurazione serie o parallelo, calcolare il resistore equivalente e procedere a semplificare il circuito. Reiterando questa procedura si può arrivare ad avere un solo resistore finale.
Innanzitutto è possibile individuare i seguenti tre collegamenti elementari:

- Parallelo fra R_2 ed R_3, che risulta in un resistore equivalente:

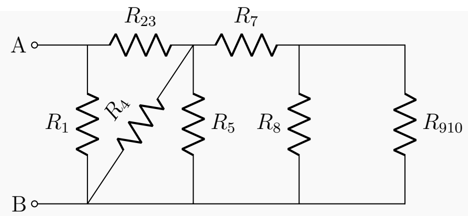
$$R_{23} = R_2//R_3 = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} \tag{2.42}$$

- Serie fra i resistori R_9 ed R_{10}:

$$R_{910} = R_9 + R_{10} \tag{2.43}$$

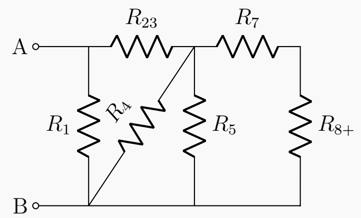
- Parallelo fra R_6 ed un corto circuito, risultante in un solo corto circuito.

Il circuito così semplificato risulta essere:



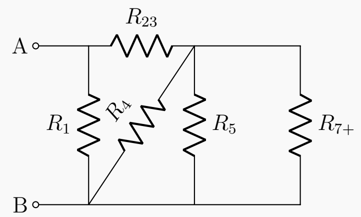
Calcolando il parallelo fra R_8 ed R_{910}:

$$R_{8+} = R_8//R_{910} \tag{2.44}$$



Il resistore appena calcolato è in serie al resistore R_7:

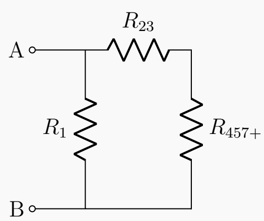
$$R_{7+} = R_7 + R_{8+} \tag{2.45}$$



Il resistore R_{7+} è in parallelo sia al resistore R_5 che al resistore R_4:

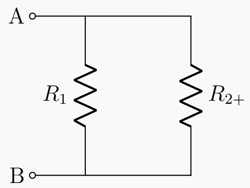
$$R_{457+} = R_{7+}//R_5//R_4 \tag{2.46}$$

Questo calcolo può essere svolto attraverso le conduttanze oppure applicando la proprietà associativa dell'operatore parallelo.



A questo punto è possibile notare la serie fra i resistori R_{23} e R_{457+}:

$$R_{2+} = R_{23} + R_{457+} \tag{2.47}$$



Effettuando, infine, il parallelo fra il generatore R_{2+} e il generatore R_1 si ottiene la resistenza equivalente:

$$R_{eq} = R_1 // R_{2+} \tag{2.48}$$

E' anche possibile, in un generico circuito in stato stazionario, calcolare la resistenza equivalente *vista da un elemento*: per farlo è necessario procedere nel seguente modo:

- Si toglie l'elemento dal circuito;
- Si spengono tutti i generatori;
- Si calcola la resistenza equivalente: infatti, si è ottenuto un circuito puramente resistivo.

2.2 Partitori di tensione e corrente

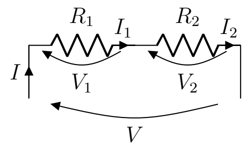
I partitori di tensione e di corrente sono diretta conseguenza dei concetti di serie e parallelo fra resistori e permettono di calcolare rispettivamente la tensione sui singoli resistori nota la tensione ai capi della serie e la corrente nei singoli resistori nota la corrente ai nel parallelo.

L'uso combinato di partitori di tensione e corrente e del concetto di resistenza equivalente permette di riuscire a calcolare qualsiasi variabile elettrica in circuiti aventi un solo generatore.

2.2.1 Partitore di tensione

Partitore di tensione

Data la serie di due resistenze, nota la tensione ai capi della serie, e' possibile calcolare la tensione sulle due resistenze con il partitore di *tensione:*



$$V_{R_1} = V \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{2.49}$$

$$V_{R_2} = V \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.50}$$

Dimostrazione

Il partitore di tensione si può dimostrare facilmente. Dalla legge di Ohm:

$$V_{R_1} = R_1 \cdot I \tag{2.51}$$

Ricordando le relazioni dei resistori in serie:

$$I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1 + R_2} \tag{2.52}$$

Infine:

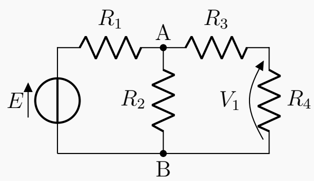
$$V_{R_1} = V \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{2.53}$$

Il partitore di tensione è facilmente estendibile al caso di più resistori in serie.

Di seguito si riporta un esempio di come applicare il partitore di tensione nella risoluzione di un circuito avente un singolo generatore:

Esempio

Dato il seguente circuito, calcolare la tensione V_1.

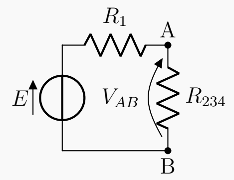


$$E = 10V \quad R_1 = 7\Omega \quad R_2 = 6\Omega \quad R_3 = 2\Omega \quad R_4 = 4\Omega$$

Il circuito ha un solo generatore di tensione, quindi si può risolvere mediante l'applicazione del partitore.
Tuttavia, le resistenze non si trovano in serie, quindi è necessario calcolare una resistenza equivalente:

$$R_{234} = R_2//(R_3 + R_4) = 3\Omega \tag{2.54}$$

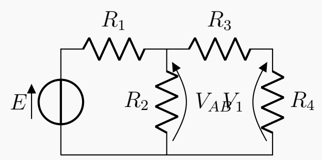
Il circuito risulta così essere:



In questo circuito la tensione V_1 non è più presente perché "contenuta" all'interno della resistenza R_{234}.
Si può calcolare la tensione V_{AB} con il partitore:

$$V_{AB} = E \cdot \frac{R_{234}}{R_{234} + R_1} = 3V \tag{2.55}$$

Confrontando quest'ultimo circuito con il testo dell'esempio, si nota che la tensione V_{AB} coincide anche con la tensione ai capi di R_2 e ai capi della serie tra R_3 ed R_4:

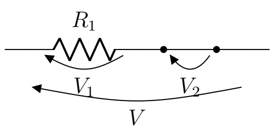


Quindi è possibile ripartire la tensione V_{AB} fra i resistori R_3 ed R_4 per calcolare V_1:

$$V_1 = V_{AB} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 2V \tag{2.56}$$

Esistono dei casi particolari dell'applicazione del partitore di tensione, ovvero quando uno dei due resistori è un corto circuito oppure un circuito aperto, o quando i due resistori sono uguali.

Nel caso di $R_2 = 0\Omega$ si ottiene la seguente configurazione:

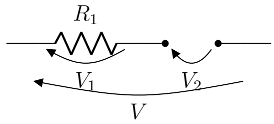


Sia intuitivamente che dalle formule del partitore di trova che:

$$V_1 = V \tag{2.57}$$

$$V_2 = 0V \tag{2.58}$$

Nel caso $R_2 \to +\infty$ si ottiene:

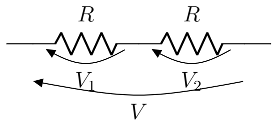


Dalle formule del partitore:

$$V_1 = \lim_{R_2 \to +\infty} V \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0V \tag{2.59}$$

$$V_2 = \lim_{R_2 \to +\infty} V \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \lim_{R_2 \to +\infty} V \cdot \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + 1} = V \tag{2.60}$$

Infine, nel caso di due resistori uguali:

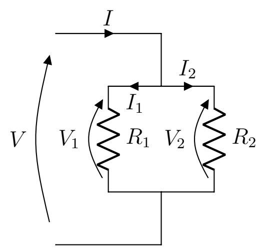


$$V_1 = V_2 = \frac{V}{2} \tag{2.61}$$

2.2.2 Partitore di corrente

Partitore di tensione

Data il parallelo di due resistori, nota la corrente che scorre nel parallelo, e' possibile calcolare la corrente che scorre in ciascun resistore:



$$I_{R_1} = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.62}$$

$$I_{R_2} = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{2.63}$$

Dimostrazione

Il partitore di corrente si può dimostrare facilmente. Dalla legge di Ohm:

$$I_{R_1} = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V}{R_1} \tag{2.64}$$

Quindi:

$$V = R_1 I_{R_1} \tag{2.65}$$

Ricordando la definizione di resistore equivalente al parallelo:

$$V = IR_{eq} = I\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.66}$$

Combinando le due espressioni trovate:

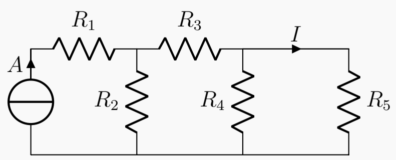
$$I_{R_1} = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.67}$$

Il partitore di corrente non si può estendere a più resistori se non formulandolo in termini di conduttanze. Tuttavia, applicando il concetto di resistenza equivalente, è sempre possibile risolvere circuiti aventi un solo generatore di corrente.

Di seguito si riporta un esempio di come applicare il partitore di corrente nella risoluzione di un circuito avente un singolo generatore:

Esempio

Dato il seguente circuito, calcolare la corrente I.



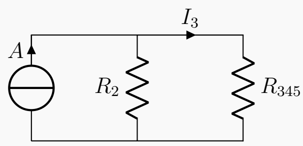
$A = 1A \quad R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 5\Omega \quad R_3 = 2{,}6\Omega \quad R_4 = 6\Omega \quad R_5 = 4\Omega$

Come nell'esempio precedente, il circuito si può applicare combinando appropriatamente i concetti di partitore di corrente e resistenza equivalente.

In primo luogo, è possibile notare che il resistore R_1 non influisce sulle altre correnti della rete, dato che la corrente A lo attraversa senza variazioni.
Per quanto riguarda il resto del circuito, è possibile ricondursi alla configurazione con due resistori in parallelo, calcolando l'equivalente di R_3, R_4 e R_5:

$$R_{345} = R_3 + R_4 // R_5 = 5\Omega \tag{2.68}$$

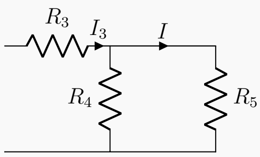
Il circuito è quindi:



La corrente I_3 è la corrente che scorre nel resistore R_{345} e, confrontando questo circuito con il testo dell'esempio, nel resistore R_3:

$$I_3 = A\frac{R_2}{R_2 + R_{345}} = 0{,}5A \tag{2.69}$$

Analizzando il resistore equivalente:

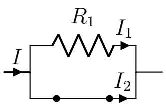


Si vede che la corrente I si può calcolare dall'applicazione del partitore di corrente:

$$I = I_3 \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_5} = 0{,}3A \tag{2.70}$$

Analogamente a prima, esistono dei casi particolari dell'applicazione del partitore di corrente.

Nel caso di $R_2 = 0\Omega$ si ottiene la seguente configurazione:

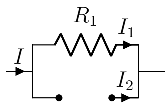


Dalle formule del partitore di corrente si trova che:

$$I_1 = I \cdot \frac{0}{R_1 + 0} = 0A \tag{2.71}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + 0} = I \tag{2.72}$$

Nel caso $R_2 \to +\infty$ si ottiene:

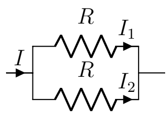


Sia intuitivamente che dalle formule del partitore si può trovare la soluzione:

$$I_1 = \lim_{R_2 \to +\infty} I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \lim_{R_2 \to +\infty} I \cdot \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + 1} = I \tag{2.73}$$

$$I_2 = \lim_{R_2 \to +\infty} I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0A \tag{2.74}$$

Infine, nel caso di due resistori uguali:



$$I_1 = I_2 = \frac{I}{2} \tag{2.75}$$

2.3 Formula di Millman per reti binodali

Una rete si definisce binodale se ha soltanto due nodi propri. Il motivo per il quale queste reti sono importanti è la possibilità di scrivere facilmente una formula risolutiva per calcolare la differenza di potenziale fra i due nodi.

Tale formula si chiama *formula di Millman*. Nella forma che vediamo nel seguito del corso, le sue ipotesi di applicazione sono:

1. Presenza di sue soli nodi propri;

2. Assenza di un generatore di tensione direttamente collegato fra i due nodi;

3. Rete lineare.

Mentre le prime due ipotesi sono necessarie per l'esistenza stessa di una formula risolutiva, l'ultima garantisce la forma della formula che si vedrà in seguito.

Formula di Millman

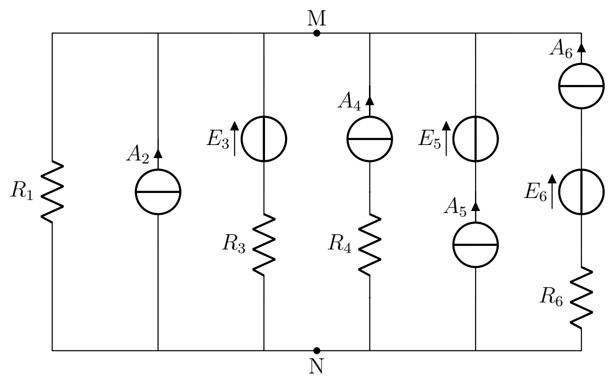
Data una rete lineare, binodale e senza generatori di tensione direttamente connessi fra i due nodi, è possibile trovare la tensione fra i due nodi M ed N con la formula:

$$V_{MN} = \frac{\sum_i A_i + \sum_j \dfrac{E_j}{R_j}}{\sum_k \dfrac{1}{R_k}} \tag{2.76}$$

dove A_i sono tutti i generatori di corrente presenti nei rami, presi positivi se diretti verso il nodo M; E_j sono tutti i generatori di tensione in serie a solo resistori (di cui R_j è la resistenza equivalente), presi positivi verso il nodo M; R_k sono tutte le resistenze equivalenti di ramo.

Dimostrazione

Sia data una generica rete binodale lineare. Essa può presentare rami solo nella forma dei rami della rete disegnata sotto, eventualmente presi con la debita molteplicità oppure con il generatore nel verso contrario (in tale caso è possibile invertire il verso del generatore mettendo un segno meno):



Si scriva una KCL prendendo tutte le correnti non imposte positive verso il nodo N:

$$-I_1 + A_2 - I_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 0 \tag{2.77}$$

Le correnti I_1 e I_3 si possono calcolare da KVL in funzione della tensione V_{MN}:

$$I_1 = \frac{V_{MN}}{R_1} \tag{2.78}$$

$$I_3 = \frac{V_{MN} - E_3}{R_3} = \frac{V_{MN}}{R_3} - \frac{E_3}{R_3} \tag{2.79}$$

Inserendo queste espressioni nella KVL iniziale:

$$-\frac{V_{MN}}{R_1} + A_2 - \frac{V_{MN}}{R_3} + \frac{E_3}{R_3} + A_4 + A_5 + A_6 = 0 \tag{2.80}$$

Isolando i termini con V_{MN}:

$$V_{MN}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) = A_2 + \frac{E_3}{R_3} + A_4 + A_5 + A_6 \tag{2.81}$$

Quindi:

$$V_{MN} = \frac{A_2 + \dfrac{E_3}{R_3} + A_4 + A_5 + A_6}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3}} \tag{2.82}$$

Le correnti A_2, A_4, A_5, A_6 sono quelle imposte dai generatori di corrente:

$$A_2 + A_4 + A_5 + A_6 = \sum_i A_i \tag{2.83}$$

Il generatore E_3 è il generatore in serie a resistori, di cui R_3 è la resistenza equivalente. Estendendo al caso di più rami di questo tipo:

$$\frac{E_3}{R_3} = \sum_j \frac{E_j}{R_j} \tag{2.84}$$

Infine R_1 ed R_3 sono le uniche resistenze equivalenti di ramo non infinite (calcolate staccando ogni singolo ramo e spegnendo i generatori):

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} = \sum_k \frac{1}{R_k} \tag{2.85}$$

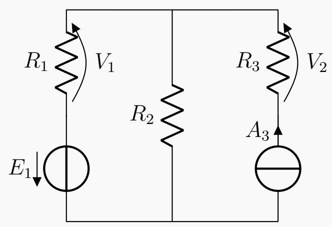
La formula di Millman è uno strumento molto potente perché permette di calcolare la tensione fra i due nodi ”per ispezione”, ovvero osservando soltanto la topologia della rete.

Una volta calcolata la tensione di Millman, è possibile risolvere singolarmente i rami della rete.

Si noti che tutti gli elementi in serie a generatori di corrente non influiscono nel calcolo della tensione, tuttavia essi possiedono delle tensioni, sono percorsi da corrente e elaborano potenza. Tali elementi si dicono *trascurabili agli effetti esterni.*

Esempio

Data la rete in figura, calcolare le tensioni V_1 e V_2.

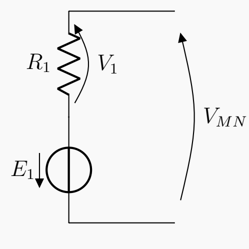


$$E_1 = 10V \quad A_3 = 2A \quad R_1 = 10\Omega \quad R_2 = 10\Omega \quad R_3 = 10\Omega$$

La rete è binodale, quindi si può risolvere attraverso l'uso della formula di Millman:

$$V_{MN} = \frac{A_3 - \dfrac{E_1}{R_1}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} = 5V \tag{2.86}$$

Analizzando i singoli rami si possono calcolare V_1 e V_2:



$$V_1 = V_{MN} + E_1 = 15V \tag{2.87}$$

Dalla legge di Ohm si trova V_2:

$$V_2 = -R_3 A_3 = -20V \tag{2.88}$$

2.4 Principio di sovrapposizione degli effetti

Nello studio di sistemi lineari, e quindi anche nel caso di reti lineari, un principio alla base di molte tecniche è il *principio di sovrapposizione degli effetti*.

Principio di sovrapposizione degli effetti

Il principio di sovrapposizione degli effetti dice che la risposta di una rete lineare alla sollecitazione di più generatori indipendenti può essere ottenuta considerando ciascun generatore separatamente attivo e sommando algebricamente le rispettive risposte della rete.

Matematicamente:

$$x = \sum_{i=1}^{N_G} x(G_i \neq 0, G_j = 0 \forall j \neq i) \tag{2.89}$$

dove x è una generica variabile di rete (tensione o corrente), N_G è il numero totale di generatori nella rete, G_i e G_j sono rispettivamente il i-esimo ed il j-esimo generatore della rete.

Dimostrazione

Sia data una generica rete lineare avente N nodi ed L lati. Scrivendo il sistema completo risolutivo in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} [A_C] & [0] \\ [0] & [A_V] \\ [A_A] & [0] \\ [0] & [A_V] \\ [R][A_{RI}] & -[A_{RV}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I} \\ \underline{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{A_s} \\ \underline{E} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \tag{2.90}$$

Gli unici valori non nulli nel termine noto sono quelli relativi ai generatori, quindi queste sono le uniche righe che influiscono nel calcolo delle variabili di rete: infatti, in tutti gli altri casi, il coefficiente della matrice $[A]^{-1}$ verrà moltiplicato per 0.
Chiamando x_m la m-esima variabile di rete, g_n il n-esimo termine noto e chiamando a_{mn} il termine in posizione m-n nella matrice $[A]^{-1}$, si può scrivere la soluzione come:

$$x_m = \sum_{n=1}^{2L} a_{mn} g_n \tag{2.91}$$

Togliendo tutti i termini nulli e dividendo la sommatoria fra generatori di tensione e corrente, si ottiene:

$$x_m = \sum_{k=1}^{N_E} \lambda_k E_k + \sum_{l=1}^{N_A} \mu_l A_l \tag{2.92}$$

Questo principio permette di dividere un problema complesso in una serie di problemi semplici, aventi ciascuno un solo generatore nei quali risulta, quindi, possibile applicare i partitori di tensione e di corrente.

E' possibile riscrivere la formula del principio di sovrapposizione degli effetti nel seguente modo:

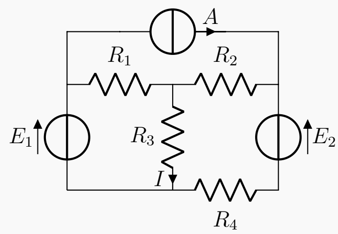
$$x = \sum_{k=1}^{N_E} \lambda_k E_k + \sum_{l=1}^{N_A} \mu_l A_l \tag{2.93}$$

I termini λ_k e μ_l sono dei termini che dipendono dalla topologia del circuito, N_E e N_A sono rispettivamente il numero di generatori di tensione e di corrente.

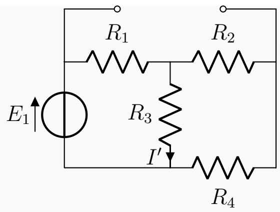
Il vantaggio di tale applicazione è la semplicità dei circuiti risultanti, lo svantaggio è il numero di circuiti che è necessario risolvere.

Esempio

Data la rete in figura, calcolare la corrente I.



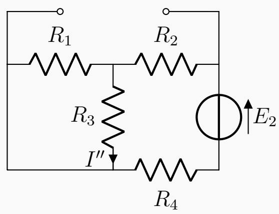
La rete evidenziata non è binodale né si può risolvere con i partitori. Quindi, è necessario applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Il primo effetto è quello del solo generatore E_1:



Risolvendo questa rete con il partitore di tensione si ottiene:

$$I' = E_1 \cdot \frac{R_3//(R_2 + R_4)}{R_1 + R_3//(R_2 + R_4)} \cdot \frac{1}{R_3} \tag{2.94}$$

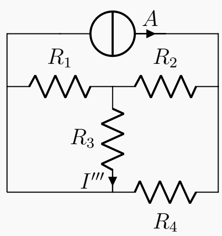
Il secondo effetto è quello del solo generatore E_2:



Risolvendo questa rete si ottiene:

$$I'' = E_2 \cdot \frac{R_1//R_3}{R_2 + R_4 + R_1//R_3} \cdot \frac{1}{R_3} \tag{2.95}$$

Infine, il terzo ed ultimo effetto è quello del generatore A:



$$I''' = A \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_2 + R_1//R_3} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} \tag{2.96}$$

A questo punto, è possibile calcolare la corrente totale sommando gli effetti:

$$I = I' + I'' + I''' \tag{2.97}$$

Per prima cosa è importante ricordare che il principio di sovrapposizione degli effetti è valido soltanto per le grandezze elettriche, quindi non si può applicare per le potenze.

Per avere un'applicazione più efficiente del principio di sovrapposizione degli effetti è possibile raggruppare i termini della sommatoria.

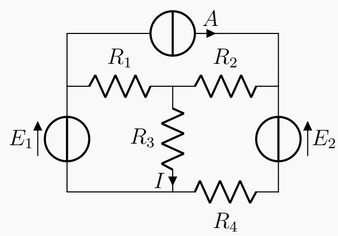
Da un punto di vista elettrico, questo significa tenere accesi più generatori alla volta: la regola fondamentale è che ogni generatore deve essere acceso una ed una sola volta nei circuiti analizzati.

In questo modo è possibile ridurre il numero di circuiti da risolvere, tuttavia essi saranno più difficili. In generale ciò può essere conveniente quando si ottengono dei circuiti facilmente risolubili, per esempio reti binodali.

Di seguito, l'esempio di prima verrà risolto in due soli circuiti.

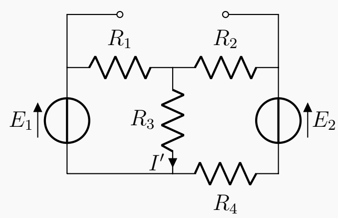
Esempio

Data la rete in figura, calcolare la corrente I.



La rete evidenziata non è binodale né si può risolvere con i partitori. Quindi, è necessario applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Si applica in maniera oculata tale principio con l'obbiettivo di arrivare a reti binodali o con un solo generatore. In particolare, è possibile considerare come primo effetto quello dei due generatori di tensione e come secondo quello del generatore di corrente.

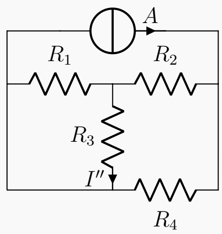
Il primo effetto: E_1 e E_2



La rete è binodale e si può risolvere con la formula di Millman:

$$I' = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2 + R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_4} + \frac{1}{R_3}} \cdot \frac{1}{R_3} \tag{2.98}$$

Infine, il secondo ed ultimo effetto è quello del generatore A:



$$I'' = A \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_2 + R_1//R_3} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} \tag{2.99}$$

A questo punto, è possibile calcolare la corrente totale sommando gli effetti:

$$I = I' + I'' \tag{2.100}$$

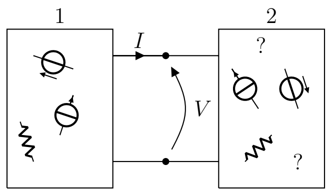
2.5 Equivalenti Thevenin e Norton

I teoremi detti Teorema di Thevenin e Teorema di Norton in realtà, più che essere due teoremi distinti, sono due tecniche, due strade diverse, per risolvere lo stesso tipo i problema: come costruire il più generico modello di bipolo lineare equivalente agli effetti esterni. L'applicazione dell'uno o dell'altro, salvo casi particolari, è indifferente del punto di vista della soluzione e si presente più come una scelta stilistica del solutore che come scelta metodologica.

Data una generica rete elettrica lineare, è possibile identificare due punti tali da dividere l'intera rete in due parti connesse tra loro mediante altrettanti poli.

Questo circuito si può considerare come due bipoli tra loro connessi; questi generici bipoli possono contenere al loro interno qualsiasi elemento. In particolare, per i sistemi studiati sinora, essi sono costituiti da una generica combinazione di generatori di tensione, generatori di corrente e resistori.

Si supponga che, delle due sotto-reti ottenute, una contenga grandezze elettriche incognite (che si vogliono calcolare) e l'altra no. Nella figura, la sotto-rete 1 non contiene incognite, mentre la sotto-rete 2 sì.



Si noti come tutto ciò che è nella regione 1, per quanto non sia di nostro diretto interesse, è importante in quanto concorre alla determinazione delle uscite contenute nella regione 2.

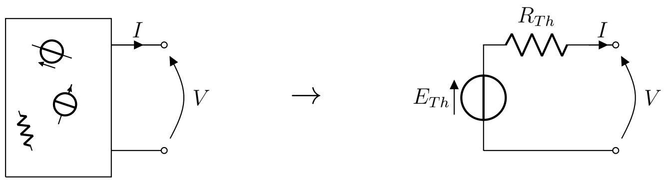
Creare un bipolo equivalente agli effetti esterni, significa individuare un bipolo la cui equazione costitutiva, ovvero la sua relazione fra tensione V e corrente I, sia uguale a quella della sotto-rete originaria.

Possono esistere due tipologie di bipolo equivalente: il bipolo di tipo serie (equivalente di Thevenin) o il bipolo di tipo parallelo (equivalente di Norton).

2.5.1 Equivalente Thevenin

Equivalente Thevenin

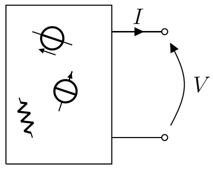
Data una porzione di rete lineare accessibile a due morsetti, avente equazione costitutiva esprimibile come comandata in corrente, essa è equivalente agli effetti esterni ad un bipolo di tipo serie, avente un generatore di tensione E_{Th} ed un resistore R_{Th}:



Il resistore R_{Th} è la resistenza equivalente vista dai morsetti, mentre la tensione E_{Th} è la tensione a vuoto (spesso indicata con V_0), ovvero la tensione fra i due morsetti quando in essi non scorre corrente.

Dimostrazione

Sia dato una porzione di rete lineare accessibile a due morsetti (bipolo):



L'equazione costitutiva di tale porzione di rete sarà una relazione lineare:

$$aV + bI = c \tag{2.101}$$

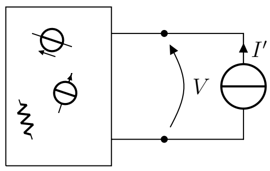
Un bipolo lineare è rappresentabile secondo Thevenin quando è possibile esprimere l'equazione costitutiva comandata in corrente:

$$V = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}I \tag{2.102}$$

Si vede subito che, per effettuare questa operazione, e' necessario che:

$$a \neq 0 \tag{2.103}$$

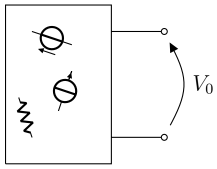
Questo significa che per tutti i bipoli aventi $a = 0$ non è possibile calcolare un equivalente di Thevenin. Un esempio di tali bipoli è il generatore ideale di corrente.
Per analizzare l'equazione 2.102 e capire il significato dei singoli termini, è possibile applicare il principio di sostituzione ed il principio di sovrapposizione degli effetti.
Sostituendo la corrente I con un generatore di corrente, si ottiene:



dove $I' = -I$.
E' possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti dividendo l'effetto dei generatori interni (tutti i generatori presenti all'interno del bipolo) e del generatore esterno (il generatore I'):

$$V = V|_{I'=0A,G_i\neq 0} + V|_{I'\neq 0A,G_i=0} = V_i + V_e \tag{2.104}$$

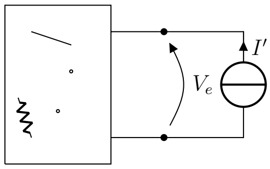
Il primo termine V_i è la tensione fra i due morsetti quando non scorre corrente (chiamata *tensione a vuoto* ed indicata col simbolo V_0):



Riprendendo l'equazione 2.102 ed imponendo $I' = 0A$, ovvero $I = 0A$, si ottiene:

$$V_i = \frac{c}{a} \tag{2.105}$$

Quindi, il termine $\frac{c}{a}$ è la tensione a vuoto del bipolo.
Il secondo termine, V_e, è il contributo del generatore esterno:



Effettuando il rapporto fra tensione e corrente si trova la resistenza equivalente:

$$\frac{V_e}{I'} = R_{eq} \tag{2.106}$$

Il contributo dei generatori esterni nella formula 2.102 si trova come:

$$V_e = V - V_i = -\frac{b}{a}I \tag{2.107}$$

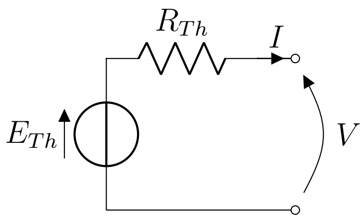
Esprimendolo in termini di I':

$$V_e = \frac{b}{a}I' \tag{2.108}$$

Quindi il termine $\frac{b}{a}$ è la resistenza equivalente vista dai morsetti.
Quindi, l'equazione caratteristica del bipolo originario è:

$$V = V_0 - R_{eq}I \tag{2.109}$$

Prendiamo adesso il bipolo serie:



sapendo che $E_{Th} = V_0$ e che $R_{Th} = R_{eq}$ per costruzione.
Dalla KVL e dalla legge di Ohm si ottiene:

$$V = E_{Th} - R_{Th}I = V_0 - R_{eq}I \tag{2.110}$$

Si puo' vedere che la relazione V-I di questo bipolo risulta uguale a quella del bipolo originario.

Per calcolare i valori di V_0 e di R_{eq} si seguono i seguenti passi.

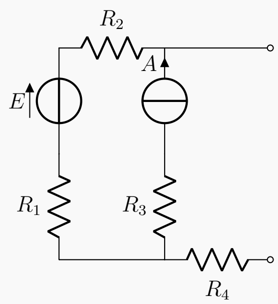
Per prima cosa si stacca il bipolo dal resto della rete. Poi conviene calcolare prima R_{eq}: si spengono tutti i generatori interni e si calcola la resistenza equivalente, come studiato in precedenza.

Per calcolare V_0 si suppone nulla la corrente che attraversa i morsetti e si trova la tensione fra essi. Per calcolare questa tensione è possibile utilizzare tutte le tecniche di risoluzione si una rete lineare, incluso l'uso "ricorsivo" dell'equivalente Thevenin.

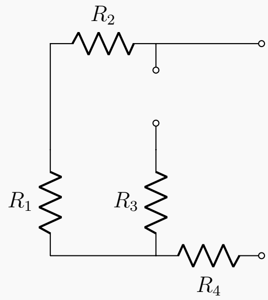
Si noti che il generatore di tensione dell'equivalente è diretto verso il nodo cui è diretta la tensione V_0.

Esempio

Dato il bipolo in figura, calcolarne l'equivalente Thevenin.



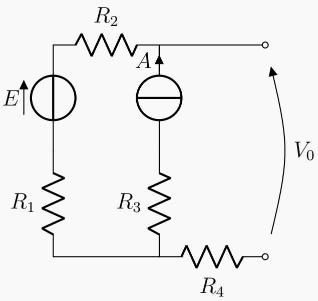
Il bipolo è già stato dato staccato dalla rete, quindi è possibile iniziare il calcolo della resistenza equivalente. Spegnendo i generatori interni, si ottiene la seguente rete:



La resistenza equivalente è:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_4 \tag{2.111}$$

Supponendo nulla la corrente uscente dai morsetti, è possibile calcolare la tensione a vuoto:



Per risolvere questa rete, è possibile utilizzare le tecniche risolutive delle reti. La rete è binodale, quindi si può risolvere con Millman, oppure con le leggi di Kirchhoff (1 KCL, 1KVL):

$$V_0 = E + R_1 A + R_2 A \tag{2.112}$$

Si noti che la resistenza R_4 non è percorsa da corrente, quindi non ha differenza di potenziale ai suoi capi.

Nella risoluzione dei circuiti, l'equivalente Thevenin è un valido strumento per semplificare una rete e ricondurla ad una rete di più facile risoluzione.

Per reti molto complesse, può essere necessario applicare nuovamente l'equivalente Thevenin per il calcolo della tensione a vuoto.

Solitamente l'equivalente Thevenin è efficace nei seguenti casi:

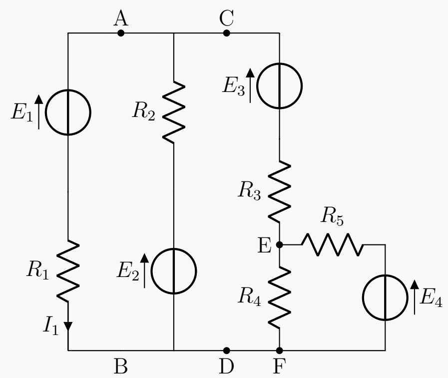
- Rete in cui è presente una porzione accessibile a due morsetti, senza incognite e con più nodi all'interno. In questo modo, il circuito risultante dopo l'applicazione dell'equivalente di Thevenin avrà un numero minore di nodi;

- Rete in cui le incognite sono relative ad un solo elemento (o ad un solo ramo). In tal caso può essere conveniente calcolare l'equivalente Thevenin di tutta la rete vista da quell'elemento (o ramo).

Nella scelta dell'applicazione dell'equivalente Thevenin, è importante tenere in considerazione due fattori: in primo luogo, la difficoltà nel calcolo della tensione a vuoto (raramente la resistenza equivalente è il passaggio più complesso); in secondo luogo, la difficoltà della rete risultante dopo l'applicazione dell'equivalente.

Esempio

Data la rete in figura, calcolare la corrente I_1.



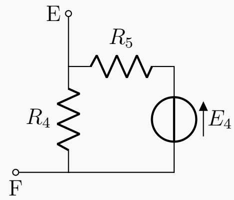
La rete presentata è una rete con tre nodi, quindi è necessario applicare qualche manipolazione per riuscire a risolverla.
Avendo un'unica incognita e più porzioni di reti accessibili a due nodi, l'uso dell'equivalente Thevenin è possibile e potenzialmente utile.
Alcuni di bipoli che possono essere isolati per calcolare il Thevenin sono:

- Bipolo A-B: in questo caso, per il calcolo della tensione a vuoto è necessario applicare Millman (nodi E-F), per calcolare I_1 è poi necessario usare una semplice legge di Ohm;

- Bipolo C-D: per il calcolo della tensione a vuoto è possibile applicare una KVL ed un partitore di tensione, mentre per calcolare I_1 è necessario utilizzare la formula di Millman;

- Bipolo E-F: il calcolo della tensione a vuoto è decisamente semplice, mentre per calcolare I_1 è necessario utilizzare la formula di Millman di complessità equiparabile al caso C-D;

Nell'esempio, si è scelto di seguire quest'ultima strada.
Isolando il bipolo di cui si deve calcolare l'equivalente Thevenin si ottiene:

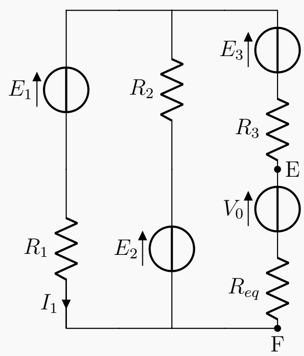


$$R_{eq} = R_4 // R_5 \tag{2.113}$$

Dal partitore di tensione si calcola V_0:

$$V_0 = E_4 \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_5} \tag{2.114}$$

Inserendo il Thevenin nel circuito originario si ottiene:



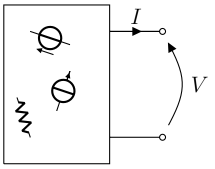
Quindi:

$$I_1 = \frac{1}{R_1} \left(\frac{\dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{E_2}{R_2} + \dfrac{E_3 + V_0}{R_3 + R_{eq}}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3 + R_{eq}}} - E_1 \right) \tag{2.115}$$

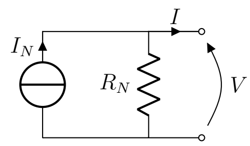
2.5.2 Equivalente Norton

Equivalente Norton

Data una porzione di rete lineare accessibile a due morsetti, avente equazione costitutiva esprimibile come comandata in tensione, essa è equivalente agli effetti esterni ad un bipolo di tipo parallelo, avente un generatore di corrente A_N ed un resistore R_N:



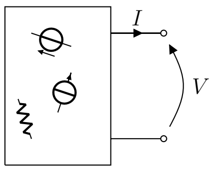
→



Il resistore R_N è la resistenza equivalente vista dai morsetti, mentre la corrente A_N è la corrente di corto circuito (spesso indicata con I_{CC}), ovvero la corrente che fluisce attraverso i morsetti quando, fra questi, è inserito un corto circuito.

Dimostrazione

Sia dato una porzione di rete lineare accessibile a due morsetti (bipolo):



L'equazione costitutiva di tale porzione di rete sarà una relazione lineare:

$$aV + bI = c \tag{2.116}$$

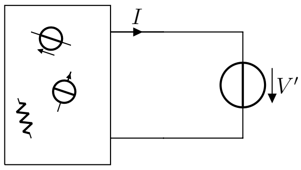
Un bipolo lineare è rappresentabile secondo Norton quando è possibile esprimere l'equazione costitutiva comandata in tensione:

$$I = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}V \tag{2.117}$$

Si vede subito che, per effettuare questa operazione, e' necessario che:

$$b \neq 0 \tag{2.118}$$

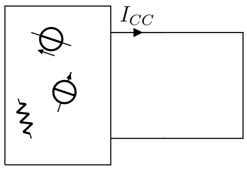
Questo significa che per tutti i bipoli aventi $a = 0$ non è possibile calcolare un equivalente di Norton. Un esempio di tali bipoli è il generatore ideale di tensione.
Per analizzare l'equazione 2.117 e capire il significato dei singoli termini, è possibile applicare il principio di sostituzione ed il principio di sovrapposizione degli effetti.
Sostituendo la tensione V con un generatore, si ottiene:



dove $V' = -V$.
Come prima, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti dividendo l'effetto dei generatori interni e del generatore esterno:

$$I = I|_{V'=0V,G_i\neq 0} + I|_{V'\neq 0V,G_i=0} = I_i + I_e \tag{2.119}$$

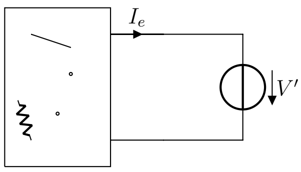
Il primo termine I_i è la corrente uscente dal morsetto superiore quando la tensione fra i morsetti è nulla, *i.e.* è imposto un corto circuito. Essa è chiamata *corrente di corto circuito* ed indicata col simbolo I_{CC}):



Riprendendo l'equazione 2.117 ed imponendo $V' = 0A$, ovvero $V = 0A$, si ottiene:

$$I_i = \frac{c}{b} \tag{2.120}$$

Quindi, il termine $\frac{c}{b}$ è la corrente di corto circuito del bipolo.
Il secondo termine, I_e, è il contributo del generatore esterno:



Effettuando il rapporto fra tensione e corrente si trova la resistenza equivalente:

$$\frac{V'}{I_e} = R_{eq} \tag{2.121}$$

Il contributo dei generatori esterni nella formula 2.117 si trova come:

$$I_e = I - I_i = -\frac{a}{b}V \tag{2.122}$$

Esprimendolo in termini di V':

$$I_e = \frac{a}{b}V' \tag{2.123}$$

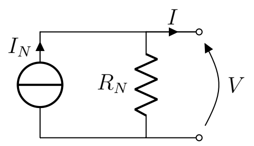
Quindi il termine $\frac{a}{b}$ è la conduttanza equivalente (G_{eq}) vista dai morsetti, ovvero la resistenza equivalente è:

$$R_{eq} = \frac{b}{a} \tag{2.124}$$

ed è la stessa vista nel calcolo dell'equivalente Thevenin.
Quindi, l'equazione caratteristica del bipolo originario è:

$$I = I_{CC} - G_{eq}V = I_{CC} - \frac{1}{R_{eq}}V \tag{2.125}$$

Prendiamo adesso il bipolo parallelo:



sapendo che $I_N = I_{CC}$ e che $R_N = R_{eq}$ per costruzione.
Dalla KCL e dalla legge di Ohm si ottiene:

$$V = R_N(I_N - I) \tag{2.126}$$

Invertendo questa equazione:

$$I = I_N - \frac{1}{R_N}V \tag{2.127}$$

Si puo' vedere che la relazione V-I di questo bipolo risulta uguale a quella del bipolo originario.

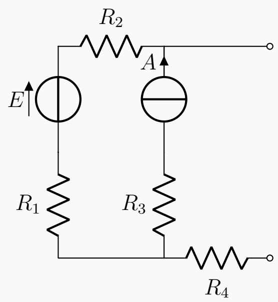
La resistenza equivalente del Norton è la stessa dell'equivalente Thevenin. I passi necessari per calcolare l'equivalente Norton sono:

- staccare il bipolo dal resto della rete;
- calcolare R_{eq} dopo aver spento tutti i generatori interni;
- mettere un corto circuito fra i morsetti e calcolare la corrente che fluisce

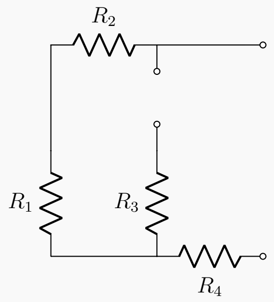
Si noti che il generatore di corrente dell'equivalente è diretto in modo opposto rispetto alla corrente I_{CC}.

Esempio

Dato il bipolo in figura, calcolarne l'equivalente Norton.



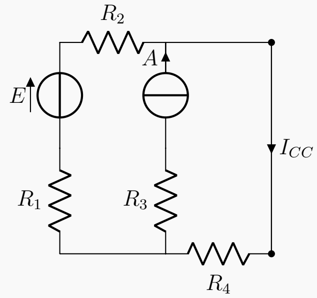
Il bipolo è già stato dato staccato dalla rete, quindi è possibile iniziare il calcolo della resistenza equivalente. Spegnendo i generatori interni, si ottiene la seguente rete:



La resistenza equivalente è:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_4 \tag{2.128}$$

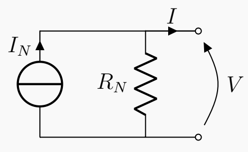
Inserendo un corto circuito fra i due morsetti, si può calcolare la corrente di corto circuito:



La rete è binodale, quindi può essere risolta con la formula di Millman:

$$I_{CC} = \frac{1}{R_4}\left(\frac{\dfrac{E}{R_1+R_2}+A}{\dfrac{1}{R_1+R_2}+\dfrac{1}{R_4}}\right) \tag{2.129}$$

L'equivalente Norton di tale bipolo è quindi:



L'applicazione dell'equivalente Norton segue gli stessi suggerimenti dell'equivalente Thevenin. Tuttavia, il quest'ultimo è generalmente più facile da calcolare, quindi è utile individuare un'equivalenza (se possibile) fra i due.

Relazione fra equivalenti Norton e Thevenin

Dato un bipolo esprimibile sia secondo Thevenin che secondo Norton, la relazione fra questi due equivalenti è data dalla seguente espressione:

$$V_0 = R_{eq} I_{cc} \tag{2.130}$$

Dimostrazione

Sia dato un generico bipolo lineare:

$$aV + bI = c \tag{2.131}$$

in cui $a \neq 0$ e $b \neq 0$.
Esprimendo tale bipolo secondo Thevenin si ottiene:

$$V = \frac{c}{a} - \frac{b}{a} I \tag{2.132}$$

dove:

$$\frac{c}{a} = V_0 \tag{2.133}$$

$$\frac{b}{a} = R_{eq} \tag{2.134}$$

Lo stesso bipolo si può esprimere secondo Norton, quindi:

$$I = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} V \tag{2.135}$$

dove

$$\frac{c}{b} = I_{CC} \tag{2.136}$$

Moltiplicando I_{CC} per R_{eq} si ottiene:

$$I_{CC} \cdot R_{eq} = \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{c}{a} = V_0 \tag{2.137}$$

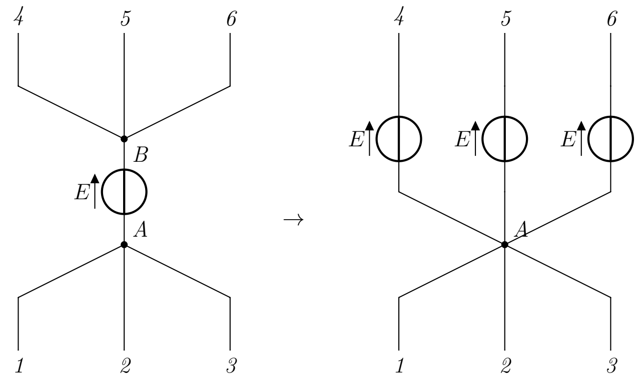
2.6 Principi di sdoppiamento dei generatori di tensione e corrente

Questi due principi permettono una manipolazione topologia della rete andando a modificare i generatori di tensione e di corrente.

2.6.1 Sdoppiamento dei generatori di tensione

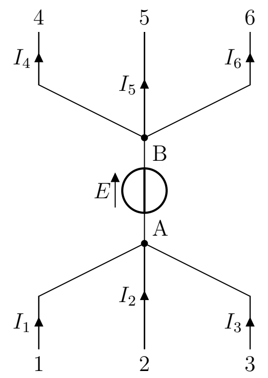
Sdoppiamento dei generatori di tensione

Dati due nodi connessi da soltanto un generatore di tensione, è possibile rimuovere uno dei nodi riportando un generatore di tensione di modulo e verso uguali a quello originario in ciascun ramo entrante nel nodo eliminato.



Dimostrazione

Si prenda la rete originaria:



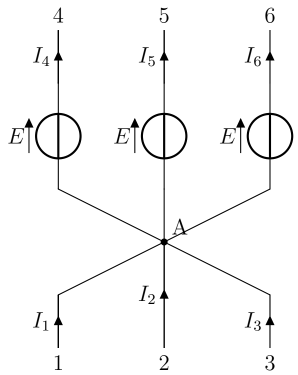
Per dimostrare l'equivalenza delle due configurazioni, è necessario dimostrare che le tensioni fra i vari nodi (1-6) non variano e che le relazioni fra le correnti (1-6) sono inalterate. Dalle KVL è possibile scrivere:

$$\begin{cases} V_{41} = E \\ V_{51} = E \\ V_{61} = E \\ V_{42} = E \\ V_{52} = E \\ V_{62} = E \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{43} = E \\ V_{53} = E \\ V_{63} = E \\ V_{45} = 0 \\ V_{46} = 0 \\ V_{56} = 0 \end{cases}$$

Dalla KVL alla superficie che racchiude la porzione di circuito si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5 + I_6 \tag{2.138}$$

Si analizzi ora la seconda configurazione:



Dalle KVL si ottiene:

$$\begin{cases} V_{41} = E \\ V_{51} = E \\ V_{61} = E \\ V_{42} = E \\ V_{52} = E \\ V_{62} = E \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{43} = E \\ V_{53} = E \\ V_{63} = E \\ V_{45} = E - E = 0 \\ V_{46} = E - E = 0 \\ V_{56} = E - E = 0 \end{cases}$$

Dalla KVL alla superficie che racchiude la porzione di circuito si ottiene:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5 + I_6 \tag{2.139}$$

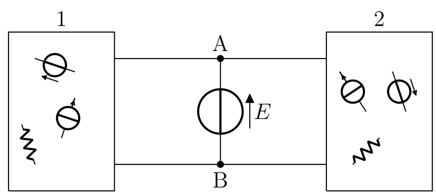
Dato che sia le KVL che le KCL sono rimaste inalterate, le due configurazioni sono equivalenti agli effetti esterni.

Tale metodo permette di ridurre il numero di nodi della rete andando, tuttavia, ad aumentare il numero di elementi circuitali.

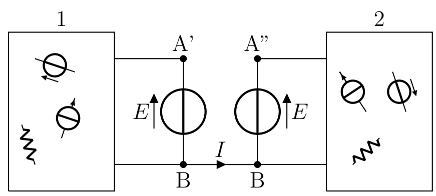
Si ricordi che la rete risultante è equivalente a quella originaria per tutte le grandezze tranne quelle legate al generatore sdoppiato. In tal caso, la corrente che circola nel generatore originario è data dalla somma delle correnti circolanti in tutte le copie del generatore.

Ovviamente tutto il ragionamento effettuato eliminando il nodo B può essere effettuato eliminando il nodo A.

Un'applicazione molto interessante di questo principio riguarda due sottoreti connesse da due morsetti poste in parallelo ad un generatore di tensione:



Sdoppiando il generatore di tensione E si ottiene la seguente configurazione:



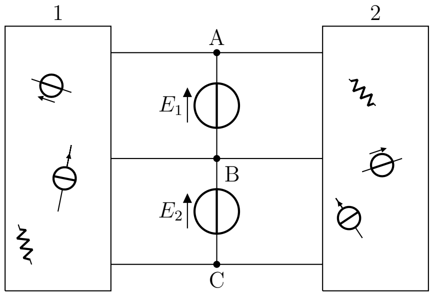
Applicando una KCL alla superficie che racchiude la sottorete 1 e il generatore di tensione si ottiene:

$$I = 0A \tag{2.140}$$

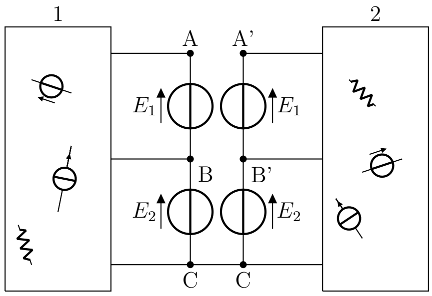
Conseguentemente, le due reti ottenute non interagiscono elettricamente fra di loro. Si noti che il potenziale dei punti A' ed A'' rispetto al nodo B è uguale al potenziale del punto A.

Questa applicazione può essere vista come un uso dell'equivalente Thevenin, tuttavia risulta essere particolarmente efficace nella risoluzione degli esercizi.

In maniera analoga, è possibile anche analizzare una rete divisa in due sottoreti accessibili a M morsetti in parallelo ad una serie di $M-1$ generatori di tensione ($M = 3$ nell'esempio):



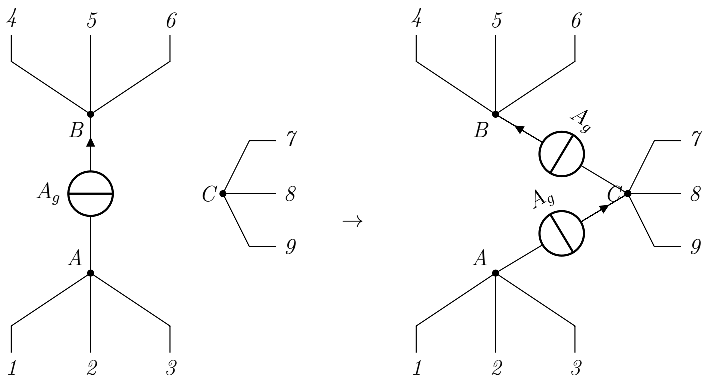
Sdoppiando i generatori eliminando prima il nodo A e poi il nodo C, si ottiene la seguente configurazione:



2.6.2 Sdoppiamento dei generatori di corrente

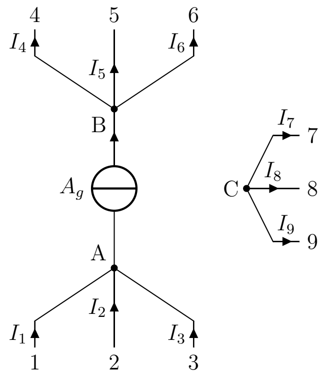
Sdoppiamento dei generatori di corrente

Dati due nodi (A e B) connessi fra loro da un generatore di corrente ed un terzo nodo (C), è possibile sdoppiare il generatore di corrente sostituendolo con un generatore fra il nodo A ed il nodo C ed uno fra il nodo C ed il nodo B.



Dimostrazione

Per dimostrare l'equivalenza fra le due configurazioni, è necessario dimostrare che le KCL ai nodi A, B e C non cambiano.
Dalla prima configurazione:



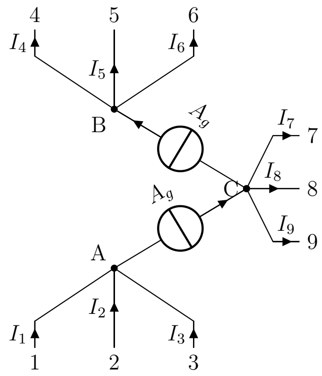
Le tre KCL sono:

$$I_1 + I_2 + I_3 = A_g \tag{2.141}$$

$$I_4 + I_5 + I_6 = A_g \tag{2.142}$$

$$I_7 + I_8 + I_9 = 0 \tag{2.143}$$

Analizzando la seconda configurazione:



Le tre KCL sono:

$$I_1 + I_2 + I_3 = A_g \tag{2.144}$$

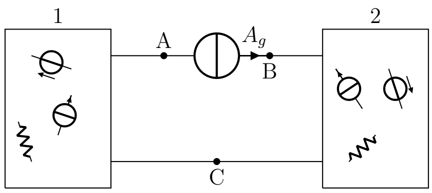
$$I_4 + I_5 + I_6 = A_g \tag{2.145}$$

$$I_7 + I_8 + I_9 = A_g - A_g = 0 \tag{2.146}$$

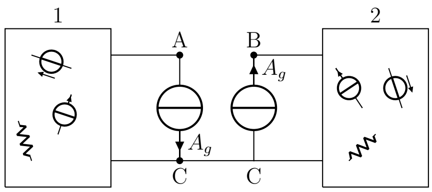
> Dato che le KCL non cambiano, le due configurazioni sono equivalenti agli effetti esterni.

Rispetto al principio di sdoppiamento dei generatori di tensione, in questo caso non c'è un riscontro immediato da un punto di vista topologico, ma può essere utilizzato, un combinazione con la trasformazione da Norton a Thevenin per un'efficace risoluzione delle reti.

In maniera analoga rispetto al principio di sdoppiamento dei generatori di tensione, questo principio può essere utilizzato in maniera efficace in presenza di due porzioni di reti accessibili a 2 morsetti collegate in serie attraverso un generatore di corrente:



Sdoppiando il generatore di corrente A si ottiene la seguente configurazione:



Lo stesso procedimento può essere esteso a porzioni di rete accessibili con M morsetti in cui in serie sono posti $M - 1$ generatori di corrente.

Capitolo 3

Transitori del prim'ordine

Data una rete, si definisce ordine di complessità il grado dell'equazione differenziale che descrive completamente l'evoluzione temporale del sistema. In altre parole, si tratta del numero di equazioni differenziali indipendenti presenti nel sistema risolutivo della rete.

Per calcolare il grado di complessità, si deve fare riferimento al numero di elementi con memoria, n_m, al numero di tagli di induttori t_L e di condensatori t_C, al numero di maglie di condensatori m_C e di induttori m_L. Quindi, l'ordine di complessità risulta essere:

$$o = n_m - t_L - t_C - m_L - m_C \tag{3.1}$$

Se in una rete avente ordine di complessità 1 avviene un cambiamento forzato dei valori dei generatori o della topologia (mediante interruttori), allora l'evoluzione dinamica delle variabili di stato per $t > t_0$ si chiama transitorio del I ordine.

Nell'affrontare l'andamento dinamico delle reti transitorie è necessario fare una suddivisione delle variabili elettriche fra variabili di stato e variabili di rete.

Le *variabili di stato* di una rete elettrica sono le variabili che si possono legare all'energia accumulata. Nel caso delle reti studiate in questo corso esse sono le correnti negli induttori e le tensioni ai capi dei condensatori.

Essendo queste variabili legate a fenomeni energetici hanno un comportamento continuo nel tempo (*i.e.* non presentano discontinuità).

Tutte le altre variabili elettriche sono variabili di rete e, in linea teorica, possono avere discontinuità nel loro andamento temporale. La presenza o meno dell'andamento dipende dalla specifica topologia della rete.

L'ordine di complessità di una rete corrisponde anche al numero di variabili di stato indipendenti tra loro.

Nel seguito verranno analizzato i transitori del prim'ordine con condensatore ed induttore.

3.1 Transitorio del condensatore

In una rete del prim'ordine, in presenza di una variazione topologica o del valore dei generatori si ha un fenomeno transitorio.

Transitorio del condensatore

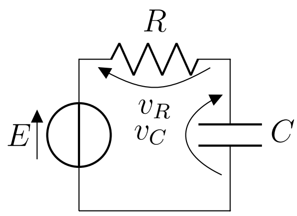
L'andamento della tensione di un condensatore in un transitorio del prim'ordine ha il seguente andamento temporale:

$$v_C(t) = v_C(\infty) + e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} (v_C(t_0) - v_C(\infty)) \tag{3.2}$$

dove $v_C(\infty)$ rappresenta le condizioni finali del transitorio, $v_C(t_0)$ le condizioni iniziali e τ la costante di tempo. t_0 è l'istante in cui avviene la variazione che innesca il transitorio.

Dimostrazione

Sia data una generica rete lineare del prim'ordine con condensatore. Si supponga che ci sia una variazione nella rete nell'istante temporale $t_0 = 0s$ (valori diversi si possono ottenere dalla presente dimostrazione con un cambio di variabile).
A seguito della variazione non si hanno altri mutamenti nel circuito, quindi è possibile calcolare l'equivalente Thevenin visto dal condensatore. I valori di tensione a vuoto e di resistenza equivalente sono in linea di principio diversi da quelli ottenuti prima:



Si scriva una KVL per questo circuito:

$$E = v_R(t) + v_C(t) \tag{3.3}$$

Ovvero, applicando la legge do Ohm:

$$E = Ri_R(t) + v_C(t) \tag{3.4}$$

Da una KCL si ottiene:

$$i_R = i_C = i \tag{3.5}$$

Dall'equazione costitutiva del condensatore:

$$i = C\frac{dv_C}{dt} \tag{3.6}$$

Quindi, riassumendo:

$$E = RC\frac{dv_C}{dt} + v_C \tag{3.7}$$

Per risolvere questa equazione differenziale è necessario risolvere l'omogenea associata:

$$\frac{dv_C'}{dt} + \frac{1}{RC}v_C' = 0 \tag{3.8}$$

Effettuando delle trasformazioni algebriche si ottiene:

$$\frac{dv_C'}{v_C'} = -\frac{dt}{RC} \tag{3.9}$$

Integrando ambo i termini di questa equazione:

$$\ln(v_C') = -\frac{t}{RC} + A \tag{3.10}$$

Invertendo il logaritmo naturale e ricordando le proprietà dell'esponenziale:

$$v_C'(t) = e^A e^{-\frac{t}{RC}} \tag{3.11}$$

chiamando $K = e^A$ si ottiene:

$$v_C'(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} \tag{3.12}$$

La forzante è costante, quindi anche l'integrale particolare lo è:

$$v_C''(t) = v_\infty \tag{3.13}$$

Di conseguenza la soluzione dell'equazione completa e':

$$v_C(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + v_\infty \tag{3.14}$$

Le condizioni iniziali (prese subito dopo l'inizio del transitorio) valgono:

$$v_C(t = t_0^+) = v_{0^+} \tag{3.15}$$

quindi:

$$K = v_{0^+} - v_\infty \tag{3.16}$$

L'andamento della variabile di stato durante il transitorio risulta quindi essere:

$$v_C(t) = (v_{0^+} - v_\infty)e^{-\frac{t}{RC}} + v_\infty \tag{3.17}$$

Il valore RC si chiama costante di tempo e si indica con la lettera τ:

$$\tau_C = R_{eq}C \tag{3.18}$$

Si sa che l'andamento della variabile di stato è continuo, quindi:

$$v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-) \tag{3.19}$$

di conseguenza le condizioni iniziali si possono calcolare prima dell'inizio del transitorio (in cui il circuito si può considerare in stato stazionario).

La costante di tempo rappresenta un indicazione della "lentezza" del transitorio.

Due casi particolari di transitorio del condensatore sono il *transitorio di carica* e il *transitorio di scarica* del condensatore.

3.2 Transitorio dell'induttore

In una rete del prim'ordine, in presenza di una variazione topologica o del valore dei generatori si ha un fenomeno transitorio.

Transitorio dell'induttore

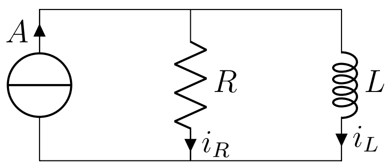
L'andamento della corrente di un induttore in un transitorio del prim'ordine ha il seguente andamento temporale:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + e^{-\frac{t - t_0}{\tau}} (i_L(t_0) - i_L(\infty)) \tag{3.20}$$

dove $i_L(\infty)$ rappresenta le condizioni finali del transitorio, $i_L(t_0)$ le condizioni iniziali e τ la costante di tempo. t_0 è l'istante in cui avviene la variazione che innesca il transitorio.

Dimostrazione

Sia data una generica rete lineare del prim'ordine con condensatore. Si supponga che ci sia una variazione nella rete nell'istante temporale $t_0 = 0s$ (valori diversi si possono ottenere dalla presente dimostrazione con un cambio di variabile).
A seguito della variazione non si hanno altri mutamenti nel circuito, quindi è possibile calcolare l'equivalente Thevenin visto dal condensatore. I valori di tensione a vuoto e di resistenza equivalente sono in linea di principio diversi da quelli ottenuti prima:



Si scriva una KCL per questo circuito:

$$A = i_R(t) + i_L(t) \tag{3.21}$$

Ovvero, dalla legge di Ohm:

$$A = \frac{1}{R}v_R(t) + i_L(t) \tag{3.22}$$

Dalla KVL:

$$v_R = v_L = v \tag{3.23}$$

Dall'equazione costitutiva dell'induttore:

$$v = L\frac{di_L}{dt} \tag{3.24}$$

Quindi, inserendo tutto in un'unica equazione:

$$A = \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i(t) \tag{3.25}$$

L'equazione omogenea associata e':

$$\frac{L}{R}\frac{di'}{dt} + i'(t) = 0 \tag{3.26}$$

Con procedimenti analoghi a quelli visti per il condensatore, si ottiene che la soluzione di questa equazione e':

$$i'_L(t) = Ke^{-\frac{Rt}{L}} \tag{3.27}$$

L'integrale particolare è costante dato che la forzante è costante:

$$i''_L(t) = i_\infty \tag{3.28}$$

Di conseguenza la soluzione dell'equazione completa e':

$$i_L(t) = Ke^{-\frac{Rt}{L}} + i_\infty \tag{3.29}$$

Le condizioni iniziali valgono:

$$i_L(t = 0^+) = i_{0^+} \tag{3.30}$$

quindi:

$$K = i_{0^+} - i_\infty \tag{3.31}$$

La soluzione risulta quindi essere:

$$i_L(t) = (i_{0^+} - i_\infty)e^{-\frac{R}{L}t} + i_\infty \tag{3.32}$$

La costante di tempo è, in questo caso, L/R:

$$\tau_L = \frac{L}{R_{eq}} \tag{3.33}$$

3.3 Risoluzione di transitori

Nella scorsa sezione si è calcolato l'andamento delle variabili di stato durante i transitori.

E' possibile ricavare l'andamento di qualunque altra variabile di rete attraverso l'uso del sistema completo. Dal momento che l'andamento della variabile di stato è nota, tutte le altre grandezze elettriche (variabili di rete) si possono calcolare mediante un sistema algebrico.

Questo significa che l'andamento di ogni variabile di rete ha la forma:

$$x(t) = x(\infty) + e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \left(x(t_0^+) - x(\infty)\right) \tag{3.34}$$

Si noti che quella che si sta calcolando è una variabile di rete, quindi a priori può presentare discontinuità in t_0.

La costante di tempo del sistema è la stessa della variabile di stato, ovvero $R_{eq}C$ se c'è un condensatore nella rete oppure L/R_{eq} se c'è un induttore.

La formula del transitorio permette di risolvere un esercizio per ispezione: ovvero si calcolano i tre valori $x(t_0^+)$, $x(\infty)$ e τ risolvendo delle rete in stato stazionario.

Il valore di $x(t_0^+)$ è leggermente più complicato: infatti in quell'istante la rete non è in stato stazionario perché il transitorio ha già avuto inizio.

Per calcolarlo, si applica la continuità della variabile di stato e il principio di sostituzione: la variabile di stato è continua quindi la si può calcolare a t_0^- e questo valore sarà uguale anche a t_0^+. E' quindi possibile risolvere il circuito a t_0^+ applicando il principio di sostituzione dato che la variabile di stato è nota.

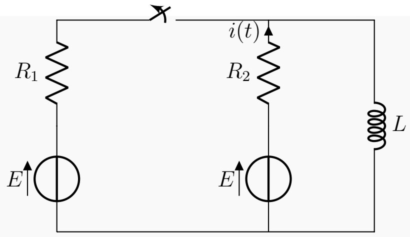
Il valore di τ e di $x(\infty)$ si calcolano alle condizioni finali.

Riassumendo, è necessario risolvere tre circuiti:

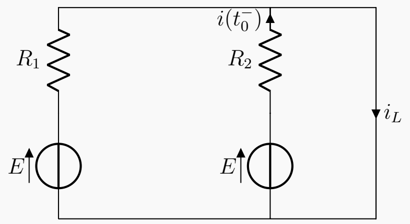
- Circuito delle condizioni iniziali ($t = t_0^-$): in questo circuito e' possibile calcolare il valore della variabile di stato ($i_L(t_0^-)$ o $v_C(t_0^-)$) che, per la continuita' delle variabili di stato risulta essere uguale a $i_L(t_0^+)$ o di $v_C(t_0^+)$;
- Circuito a t_0^+, dove al posto dell'induttore è stato inserito un generatore di corrente e al posto del condensatore un generatore di tensione. I valori dei generatori sono quelli a t_0^-.
- Circuito delle condizioni finali ($t \to +\infty$), in cui calcolare le condizioni finali e la resistenza equivalente vista dall'elemento con memoria R_{eq}, necessaria per il calcolo della costante di tempo τ.

Esempio

Sia dato il circuito in Figura, in cui l'interruttore è fermo da un tempo infinito. All'istante $t_0 = 1s$ l'interruttore si apre: calcolare e diagrammare l'andamento della variabile di rete $i(t)$ per $t > 0s$.



La rete presenta una variazione topologica, quindi l'andamento della variabile sarà transitorio.
Il circuito a t_0^- è:



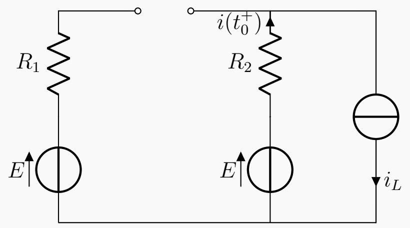
Dato che il circuito è in stato stazionario, l'induttore si comporta come un corto circuito.
Dato che è richiesto l'andamento della variabile di rete anche prima della variazione topologica, è necessario calcolarla anche su questo circuito:

$$i(t_0^-) = \frac{E}{R_2} \tag{3.35}$$

La variabile di stato vale:

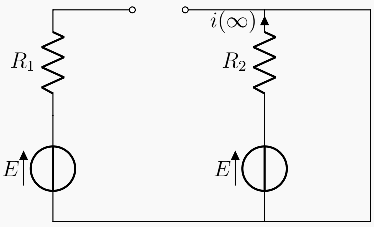
$$i_L(t_0^-) = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} \tag{3.36}$$

Il circuito a t_0^+ si ottiene sostituendo all'induttore un generatore di corrente:



$$i(t_0^+) = i_L = \frac{E}{R_1} + \frac{E}{R_2} \tag{3.37}$$

Il circuito delle condizioni finali è:



$$i(\infty) = \frac{E}{R_2} \tag{3.38}$$

3.4 Esercizi con più transitori

Qualora ci fossero più variazioni topologiche all'interno del circuito, è possibile utilizzare ancora gli strumenti studiati per l'analisi dell'andamento delle grandezze elettriche nel circuito.

Sia dato, quindi, un circuito avente due variazioni agli istanti t_0 e t_1. Il ragionamento espresso nel seguito vale anche in presenza di più di due transitori.

Prima del tempo t_0 si suppone la rete in stato stazionario, quindi è possibile studiare il circuito come è già stato analizzato per il caso del singolo transitorio.

Nell'intervallo di tempo (t_0, t_1), l'andamento di tutte le variabili della rete seguirà l'andamento del primo transitorio dal momento che questo non può essere influenzato da un evento non ancora accaduto. Le condizioni finali e la costante di tempo di questo transitorio si calcolano come mostrato in precedenza, quindi l'andamento di una generica variabile di rete è dato dalla formula nota:

$$x(t) = x(\infty_1) + e^{-\dfrac{t - t_0}{\tau_1}} \left(x(t_0^+) - x(\infty_1) \right), \qquad t_0 < t < t_1 \tag{3.39}$$

Nell'istante t_1 si ha la seconda variazione. I valori della variabile di stato (così come di qualunque altra grandezza elettrica) all'istante t_1^- si possono calcolare dalla formula del primo transitorio. Data la continuità della variabile di stato, è possibile risolvere il circuito a t_1^+ sostituendo all'elemento con memoria un generatore (come fatto in precedenza per t_0^+). Le condizioni finali e la costante di tempo del secondo transitorio si calcolano con il metodo mostrato per il singolo transitorio.

L'andamento nel tempo delle grandezze durante il secondo transitorio è dato dalla formula analoga a quella precedente:

$$x(t) = x(\infty_2) + e^{-\dfrac{t-t_1}{\tau_2}} \left(x(t_0^+) - x(\infty_2)\right), \qquad t > t_1 \tag{3.40}$$

Capitolo 4

Reti in regime alternato sinusoidale

4.1 Regime alternato sinusoidale

Una rete si definisce in regime sinusoidale se i suoi generatori sono tempovariati con andamento sinusoidale (o cosinusoidale).

Una grandezza sinusoidale ha quindi il seguente andamento nel tempo:

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \phi_x) \tag{4.1}$$

dove:

- X_M è il valore massimo, chiamata anche ampiezza;
- ω è la pulsazione, misurata in rad/s;
- ϕ_x è lo sfasamento, espresso in rad.

La pulsazione è legata alla frequenza dalla seguente formula:

$$\omega = 2\pi f \tag{4.2}$$

La differenza di tempo dopo cui l'onda si ripete uguale a sé stessa si chiama periodo ed è legato alla frequenza dalla seguente relazione:

$$T = \frac{1}{f} \tag{4.3}$$

Un'altra grandezza utile nello studio dei circuiti in regime alternato sinusoidale, è il cosiddetto *valore efficace* o *root mean square* definito come:

$$X_{eff} = X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt} = \frac{Y_M}{\sqrt{2}} \tag{4.4}$$

Utilizzando il valore efficace, una grandezza sinusoidale si può scrivere come:

$$x(t) = X\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_x) \tag{4.5}$$

E' possibile dimostrare che lo spazio delle funzioni sinusoidali isofrequenziali è chiuso rispetto agli operatori di somma, moltiplicazione per una costante, derivazione nel tempo ed integrazione.

Chiusura dello spazio delle funzioni sinusoidali isofrequenziali rispetto agli operatori lineari

Lo spazio delle funzioni sinusoidali isofrequenziali è chiuso rispetto agli operatori di somma, moltiplicazione per una costante, derivazione nel tempo ed integrazione. Quindi, data una o più grandezze sinusoidali isofrequenziali ed applicando gli operatori lineari, si ottiene una grandezza sinusoidale isofrequenziale a quelle originarie.

Dimostrazione

La dimostrazione che segue è articolata in quattro parti, ciascuna per ogni operatore lineare.

Chiusura rispetto alla somma

Siano date due funzioni $x(t) = X_M\cos(\omega t+\phi_x)$ ed $y(t) = Y_M\cos(\omega t+\phi_y)$. La loro somma è:

$$z(t) = X_M\cos(\omega t + \phi_x) + Y_M\cos(\omega t + \phi_y) \tag{4.6}$$

Applicando le formule del coseno della somma di due fattori si ottiene:

$$\begin{aligned} z(t) = X_M(&\cos\omega t \cdot \cos\phi_x - \sin\omega t \cdot \sin\phi_x) + \\ &+ Y_M(\cos\omega t \cdot \cos\phi_y - \sin\omega t \cdot \sin\phi_y) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Raccogliendo a fattor comune:

$$\begin{aligned} z(t) = \cos\omega t(&X_M\cos\phi_x + Y_M\cos\phi_y) + \\ &- \sin\omega t(X_M\sin\phi_x + Y_M\sin\phi_y) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Supponendo che esistano Z_M e ϕ_z tali che:

$$\begin{cases} X_M\cos\phi_x + Y_M\cos\phi_y = Z_M\cos\phi_z \\ X_M\sin\phi_x + Y_M\sin\phi_y = Z_M\sin\phi_z \end{cases} \tag{4.9}$$

Allora:

$$z(t) = \cos\omega t Z_M \cos\phi_z - \sin\omega t Z_M \sin\phi_z \tag{4.10}$$

Applicando le formule del coseno della somma al contrario si ottiene:

$$z(t) = Z_M \cos(\omega t + \phi_z) \tag{4.11}$$

L'ipotesi risulta quindi dimostrata se sono valide le relazioni dell'Equazione 4.9. Per dimostrare la loro validità, è possibile calcolare i valori di Z_M e di ϕ_Z:

$$\tan\phi_Z = \frac{X_M \sin\phi_x + Y_M \sin\phi_y}{X_M \cos\phi_x + Y_M \cos\phi_y} \tag{4.12}$$

e:

$$Z_M = \frac{X_M \cos\phi_x + Y_M \cos\phi_y}{\cos\phi_z} \tag{4.13}$$

Chiusura rispetto alla moltiplicazione per una costante
Sia data una funzione $x(t) = X_M \cos(\omega t + \phi_x)$ ed una costante K, il prodotto fra i due termini è:

$$z(t) = K X_M \cos(\omega t + \phi_x) \tag{4.14}$$

che è una funzione sinusoidale isofrequenziale a $x(t)$ avente ampiezza:

$$Z_M = K X_M \tag{4.15}$$

Chiusura rispetto alla derivazione nel tempo
Sia data una funzione $x(t) = X_M \cos(\omega t + \phi_x)$. La sua derivata temporale è:

$$z(t) = \frac{d}{dt}(X_M \cos(\omega t + \phi_x)) = -\omega X_M \sin(\omega t + \phi_x) \tag{4.16}$$

Ricordando la relazione fra seno e coseno ($-\sin(\alpha) = \cos(\alpha + \pi/2)$):

$$z(t) = \omega X_M \cos(\omega t + \phi_x + \pi/2) \tag{4.17}$$

Chiusura rispetto all'integrazione Sia data una funzione $x(t) = X_M \cos(\omega t + \phi_x)$. Il suo integrale è:

$$z(t) = \int (X_M \cos(\omega t + \phi_x))dt = \frac{X_M}{\omega} \sin(\omega t + \phi_x) \tag{4.18}$$

Ricordando la relazione fra seno e coseno ($\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \pi/2)$):

$$z(t) = \frac{X_M}{\omega} \cos(\omega t + \phi_x - \pi/2) \tag{4.19}$$

Da un punto di vista elettrotecnico, la chiusura dello spazio delle funzioni sinusoidali isofrequenziali si traduce in una proprietà importante: in una rete elettrica lineare alimentata da generatori sinusoidali isofrequenziali, tutte le grandezze elettriche sono sinusoidali isofrequenziali ai generatori. Infatti, tutti gli operatori utilizzati (KCL, KVL, EC) sono lineari.

La potenza, non lineare rispetto alle grandezze elettriche, sarà trattata a parte.

Di seguito verrà analizzato il comportamento dei componenti passivi (resistore, induttore e condensatore) in regime sinusoidale.

4.1.1 Resistore

L'equazione costitutiva del resistore è:

$$v(t) = Ri(t) \tag{4.20}$$

Supponendo che la corrente abbia un'andamento sinusoidale:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi_I) \tag{4.21}$$

La tensione risulta essere:

$$v(t) = RI_M \cos(\omega t + \phi_I) \tag{4.22}$$

Quindi:

- Il valore massimo della tensione è:

$$V_M = RI_M \tag{4.23}$$

- La fase della tensione è uguale alla fase della corrente:

$$\phi_V = \phi_I \tag{4.24}$$

4.1.2 Induttore

L'equazione costitutiva dell'induttore è:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{4.25}$$

Supponendo anche in questo caso un andamento sinusoidale della corrente si ottiene la seguente tensione:

$$v(t) = L\omega I_M \cos(\omega t + \phi_I + \pi/2) \tag{4.26}$$

Quindi:

- Il valore massimo della tensione è:

$$V_M = L\omega I_M \tag{4.27}$$

- La tensione sfasata di $\pi/2$ rispetto alla corrente:

$$\phi_V = \phi_I + \pi/2 \tag{4.28}$$

4.1.3 Condensatore

L'equazione costitutiva del condensatore è:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{4.29}$$

Esprimendola pilotata in corrente:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \tag{4.30}$$

Supponendo anche in questo caso un andamento sinusoidale della corrente si ottiene la seguente tensione:

$$v(t) = \frac{I_M}{C\omega}\cos(\omega t + \phi_I - \pi/2) \tag{4.31}$$

Quindi:

- Il valore massimo della tensione è:

$$V_M = \frac{I_M}{C\omega} \tag{4.32}$$

- La tensione sfasata di $-\pi/2$ rispetto alla corrente:

$$\phi_V = \phi_I - \pi/2 \tag{4.33}$$

4.2 Fasori

Nello studio delle reti elettriche lineari in regime sinusoidale, è molto utile introdurre uno strumento che consenta di semplificare i calcoli.

Lo strumento matematico in questione sono i *fasori*. Un fasore è un numero complesso che può essere associato ad una funzione sinusoidale.

Fasori

Data una grandezza sinusoidale $x(t)$ si definisce fasore il numero complesso ad essa associato nel seguente modo:

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \phi_x) \qquad \rightarrow \qquad \frac{X_M}{\sqrt{2}} e^{j\phi_x}$$

La regola per associare una funzione sinusoidale ad un fasore è una convenzione e quindi esistono diversi tipi di associazioni. Nel resto del corso, si farà riferimento a quella indicata qui sopra.

Si noti che nella notazione fasoriale non c'è alcun riferimento alla pulsazione del segnale originario. Per questo è fondamentale che la rete sia isofrequenziale.

Il processo di antitrasformazione è facile:

$$x(t) = X\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_x) \qquad \leftarrow \qquad X e^{j\phi_x}$$

Il fasore è un numero complesso e può essere rappresentato come vettore sul piano di Gauss. Solitamente si indica con il simbolo grassetto maiuscolo:

$$\mathbf{X} = X e^{j\phi_x} \tag{4.34}$$

E' possibile definire la trasformata fasoriale degli operatori lineari. Ricordando le relazioni viste nella sezione precedente:

$$x(t) + y(t) \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{X} + \mathbf{Y}$$

$$Kx(t) \qquad \rightarrow \qquad K \cdot \mathbf{X}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{X} e^{j\pi/2} = j\omega \mathbf{X}$$

$$\int x(t) \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{X}e^{-j\pi/2} = -j\frac{1}{\omega}\mathbf{X} = \frac{1}{j\omega}\mathbf{X}$$

4.2.1 Trasformata fasoriale delle reti elettriche

Fino a questo punto, è stata analizzata la trasformata fasoriale di un generico segnale sinusoidale.

Adesso si vedrà come questa trasformata si può utilizzare nella risoluzione di reti in regime sinusoidale.

Il primo passo è quello di trasformare ogni singolo componente nel dominio dei fasori.

Trasformata di generatori sinusoidali

La trasformata fasoriale di un generatore di tensione (o corrente) è un generatori di tensione (o corrente) e il suo valore è la trasformata del valore originario.

Dimostrazione

Si prenda l'equazione costitutiva di un generatore di tensione sinusoidale:

$$e(t) = E_M \cos(\omega t + \phi_E) \quad \forall i(t) \tag{4.35}$$

Applicando la trasformata fasoriale al valore del generatore si ottiene:

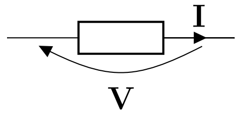
$$\mathbf{E} = \frac{E_M}{\sqrt{2}} e^{j\phi_E} \quad \forall \mathbf{I} \tag{4.36}$$

Questa equazione costitutiva coincide con quella di un generatore di tensione.
Analogo ragionamento si può ripetere per il generatore di corrente.

La trasformata fasoriale di un elemento passivo sarà ancora un elemento passivo.

Per definire gli elementi passivi in regime sinusoidale si utilizza il concetto di *impedenza*.

Sia dato un elemento passivo di cui è stata effettuata la trasformata fasoriale di tensione e corrente:



Si definisce impedenza il rapporto fra tensione e corrente:

$$\mathbf{Z} \triangleq \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \tag{4.37}$$

Trasformata del resistore

La trasformata fasoriale di un resistore è un'impedenza:

$$\boldsymbol{Z}_R = R \tag{4.38}$$

Dimostrazione

Si prenda l'equazione costitutiva di un resistore ideale:

$$v(t) = Ri(t) \tag{4.39}$$

Applicando le proprietà della trasformata fasoriale viste sopra:

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \tag{4.40}$$

Tale equazione costitutiva è una relazione lineare fra tensione e corrente, quindi è possibile calcolare il valore dell'impedenza:

$$\mathbf{Z}_R \triangleq \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R \tag{4.41}$$

Trasformata dell'induttore

La trasformata fasoriale di un induttore è un'impedenza:

$$\boldsymbol{Z}_L = j\omega L \tag{4.42}$$

Dimostrazione

Si prenda l'equazione costitutiva di un induttore:

$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t) \tag{4.43}$$

Applicando le proprietà della trasformata fasoriale viste sopra:

$$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \tag{4.44}$$

Tale equazione costitutiva è una relazione lineare fra tensione e corrente, quindi è possibile calcolare il valore dell'impedenza:

$$\mathbf{Z}_L \triangleq \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L \tag{4.45}$$

Trasformata del condensatore

La trasformata fasoriale di un condensatore è un'impedenza:

$$\boldsymbol{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \tag{4.46}$$

Dimostrazione

Si prenda l'equazione costitutiva di un condensatore:

$$i(t) = \frac{d}{dt}v(t) \tag{4.47}$$

Applicando le proprietà della trasformata fasoriale viste sopra:

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V} \tag{4.48}$$

Tale equazione costitutiva è una relazione lineare fra tensione e corrente, quindi è possibile calcolare il valore dell'impedenza:

$$\mathbf{Z}_C \triangleq \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C} \tag{4.49}$$

Dalle trasformate fasoriali degli elementi passivi, è possibile notare che, nello spazio dei fasori, resistore, induttore e condensatore si comportano tutti e tre come impedenze. Questo significa che, nello spazio trasformato, è possibile considerare questi tre elementi come della stessa tipologia.

Inoltre, l'equazione costitutiva di una generica impedenza ricorda la legge di Ohm. Viene, quindi, chiamata *legge di Ohm generalizzata*.

Tutte le considerazioni effettuate sui resistori per le reti stazionarie (serie, parallelo, stella-triangolo, resistenze equivalenti,...) valgono anche per le impedenze, fatta eccezione per il concetto di potenza.

Per quanto riguarda le equazioni topologiche studiate (KCL, KVL), esse possono essere trasformate nel dominio dei fasori molto semplicemente applicando la proprietà di trasformazione della somma:

$$\sum_j i_j(t) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \sum_j \mathbf{I}_j = 0$$

$$\sum_k v_k(t) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \sum_k \mathbf{V}_k = 0$$

Questo significa che esse sono ancora valide nello spazio trasformato.

Dato che le equazioni topologiche restano immutate nello spazio trasformato e che l'equazione costitutiva dell'impedenza ha la stessa forma della legge di Ohm, tutte le tecniche di risoluzione di reti studiate (sistema completo, partitori, Millman, sovrapposizione degli effetti, Thevenin, Norton e sdoppiamenti) valgono anche nel dominio dei fasori.

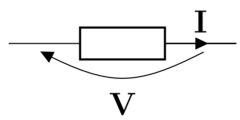
A questo punto è facile vedere che lo spazio trasformato è uno strumento efficace nella risoluzione delle reti in regime sinusoidale, che quindi seguirà i passi:

- Trasformazione del circuito dal dominio del tempo al dominio dei fasori;
- Risoluzione del circuito nel dominio trasformato mediante le stesse tecniche studiate per le reti stazionarie;
- Antitrasformazione dal dominio dei fasori al dominio del tempo del risultato ottenuto.

Prima di proseguire con alcuni esempi, è importante soffermarsi sul concetto di impedenza.

4.2.2 Impedenza

Sia presa una generica impedenza:



Come definito prima, l'impedenza è il rapporto fra tensione e corrente:

$$\mathbf{Z} \triangleq \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \tag{4.50}$$

Esplicitando i fasori tensione e corrente:

$$\mathbf{Z} = \frac{|\mathbf{V}|e^{j\phi_V}}{|\mathbf{I}|e^{j\phi_I}} = \frac{|\mathbf{V}|}{|\mathbf{I}|}e^{j(\phi_V - \phi_I)} \tag{4.51}$$

Di conseguenza, il modulo dell'impedenza è dato dal rapporto dei moduli di tensione e corrente:

$$Z = |\mathbf{Z}| = \frac{|\mathbf{V}|}{|\mathbf{I}|} = \frac{V}{I} \tag{4.52}$$

La fase dell'impedenza è la differenza di fase fra tensione e corrente:

$$\phi_Z = \phi_V - \phi_I \tag{4.53}$$

Analizzando il fasore impedenza, è possibile esprimerlo in termini di parte reale e parte immaginaria:

$$\mathbf{Z} = R + jX \tag{4.54}$$

dove R è la parte reale e X è la parte immaginaria chiamata reattanza (espressa in $[\Omega]$).

Si noti che la reattanza di un induttore è:

$$X_L = \omega L \tag{4.55}$$

è positiva, mentre quella del condensatore:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \tag{4.56}$$

è negativa

4.3 Potenze in regime sinusoidale

In regime alternato sinusoidale è necessario prestare particolare attenzione alla definizione della potenza.

4.3.1 Potenza istantanea

Date una tensione $v(t)$ e una corrente $i(t)$ definite in regime alternato sinusoidale isofrequenziale:

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi_v)$$
$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \varphi_i)$$

La *potenza istantanea* è definita come:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_M I_M \cos(\omega t + \varphi_v) \cos(\omega t + \varphi_i) \tag{4.57}$$

Potenza istantanea in regime sinusoidale

La potenza istantanea in regime sinusoidale si può riscrivere come la somma di un termine costante (potenza media) e di un temine oscillante a frequenza doppia:

$$p(t) = \frac{1}{2} V_M I_M \cos\varphi + \frac{1}{2} V_M I_M \cos(2\omega t + 2\varphi_i + \varphi) \tag{4.58}$$

Dimostrazione

L'espressione della potenza istantanea in regime alternato sinusoidale è:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = V_M I_M \cos(\omega t + \varphi_v) \cos(\omega t + \varphi_i) \tag{4.59}$$

Applicando la seconda formula di Werner[a], la potenza istantanea diventa:

$$p(t) = V_M I_M \frac{1}{2} \left[\cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i) + \cos(\varphi_v - \varphi_i)\right] \tag{4.61}$$

Sommando e sottraendo φ_i:

$$p(t) = \frac{1}{2} V_M I_M \cos(\varphi_v - \varphi_i) + \frac{1}{2} V_M I_M \cos(2\omega t + \varphi_v + \varphi_i + \varphi_i - \varphi_i) \tag{4.62}$$

Infine, chiamando $\varphi = \varphi_v - \varphi_i$:

$$p(t) = \frac{1}{2} V_M I_M \cos\varphi + \frac{1}{2} V_M I_M \cos(2\omega t + 2\varphi_i + \varphi) \tag{4.63}$$

[a]La seconda formula di Werner dice che:

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \tag{4.60}$$

Il termine $\frac{1}{2} V_M I_M \cos\varphi$ è costante e corrisponde al valor medio della potenza nel periodo: esso prende il nome di *potenza media* P_m.

Ricordando che, nella trasformata fasoriale si utilizza il valore efficace della funzione sinusoidale:

$$V_M = \sqrt{2} V \tag{4.64}$$

$$I_M = \sqrt{2} I \tag{4.65}$$

possiamo dunque scrivere:

$$P_m = V I \cos\varphi \tag{4.66}$$

Quindi la potenza istantanea può essere riscritta come:

$$p(t) = VI\cos\varphi + VI\cos(2\omega t + 2\varphi_i + \varphi) \tag{4.67}$$

E' possibile riscrivere la potenza istantanea anche in un altro modo, in cui i due termini che si evidenziano sono entrambi oscillanti, uno sempre positivo ed uno a media nulla.

Potenza istantanea in regime alternato sinusoidale

La potenza istantanea in regime alternato sinusoidale si può riscrivere come somma di due termini oscillanti, uno sempre positivo ed uno a media nulla:

$$p(t) = VI\cos\varphi\cdot\{1+\cos[2(\omega t + \varphi_i)]\} - VI\sin\varphi\cdot\{\sin[2(\omega t + \varphi_i)]\} \tag{4.68}$$

Dimostrazione

Partendo dalla scrittura precedente della potenza istantanea:

$$p(t) = VI\cos\varphi + VI\cos[\varphi + 2(\omega t + \varphi_i)] \tag{4.69}$$

Applicando le proprietà delle relazioni trigonometriche[a], si può riscrivere come:

$$p(t) = VI\cos\varphi + VI\cdot\{\cos\varphi\cdot\cos[2(\omega t + \varphi_i)] - \sin\varphi\cdot\sin[2(\omega t + \varphi_i)]\} \tag{4.71}$$

Riscrivendo l'espressione ottenuta si trova che:

$$p(t) = VI\cos\varphi\cdot\{1+\cos[2(\omega t + \varphi_i)]\} - VI\sin\varphi\cdot\{\sin[2(\omega t + \varphi_i)]\} \tag{4.72}$$

[a] In particolare, si ricorda che:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \tag{4.70}$$

A questo punto è possibile osservare che la potenza istantanea è stata scomposta in un termine oscillante (attorno a P_m) sempre positivo la cui semiampiezza è $VI\cos\varphi$ ed uno a media nulla, la cui semiampiezza è $VI\sin\varphi$.

La prima di queste due semiampiezze è la potenza media; solitamente viene chiamata anche *potenza attiva* e si misura in Watt [W]:

$$P = VI\cos\varphi = P_m \tag{4.73}$$

La seconda semiampiezza viene chiamata *potenza reattiva*, si indica con il simbolo Q ed è misurata in Volt-Ampere Reattivi [VAR]:

$$Q = VI \sin\varphi \tag{4.74}$$

Quindi la potenza istantanea si può scrivere come:

$$p(t) = P \cdot \{1 + \cos[2(\omega t + \varphi_i)]\} - Q \cdot \{\sin[2(\omega t + \varphi_i)]\} \tag{4.75}$$

4.3.2 Potenza complessa

Dall'analisi effettuata precedentemente sulla potenza istantanea, è possibile vedere che essa non è isofrequenziale rispetto alle grandezze: conseguentemente non è possibile definire direttamente un fasore associato alla potenza.

Per ovviare a questo problema, si definisce una nuova grandezza **A** chiamata *potenza complessa*:

$$\mathbf{A} \triangleq \mathbf{V}\mathbf{I}^* \tag{4.76}$$

dove $\mathbf{I}^*$ è il complesso coniugato di $\mathbf{I}$

L'unità di misura della potenza complessa è il Volt-Ampere [VA].

Potenza complessa

La potenza complessa è definita come:

$$\mathbf{A} \triangleq \mathbf{V}\mathbf{I}^* \tag{4.77}$$

Essa è un numero complesso avente come parte reale la potenza attiva e come parte immaginaria la potenza reattiva:

$$\boldsymbol{A} = P + jQ \tag{4.78}$$

Dimostrazione

Scrivendo i fasori tensione e corrente in notazione euleriana:

$$\mathbf{I} = I \cdot e^{j\varphi_i} \tag{4.79}$$

$$\mathbf{V} = V \cdot e^{j\varphi_v} \tag{4.80}$$

Inserendo questi valori nella definizione di potenza complessa:

$$\mathbf{A} \triangleq \mathbf{V}\mathbf{I}^* = (V \cdot e^{j\varphi_v}) \cdot (I \cdot e^{-j\varphi_i}) \tag{4.81}$$

Applicando le proprietà degli esponenziali:

$$\mathbf{A} = VI \cdot e^{j(\varphi_v - \varphi_i)} \tag{4.82}$$

Ricordando che:

$$\varphi = \varphi_v - \varphi_i \tag{4.83}$$

Allora:

$$\mathbf{A} = VI \cdot e^{j\varphi} = (VI \cos\varphi) + j \cdot (VI \sin\varphi) \tag{4.84}$$

Inserendo le definizioni di potenza attiva e reattiva:

$$\mathbf{A} = P + jQ \tag{4.85}$$

Il modulo della potenza complessa prende il nome di *potenza apparente* e si misura in [VA]:

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{V}| \cdot |\mathbf{I}| = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{4.86}$$

E' possibile rappresentare le potenze sul piano complesso ottenendo il cosiddetto *triangolo delle potenze*:

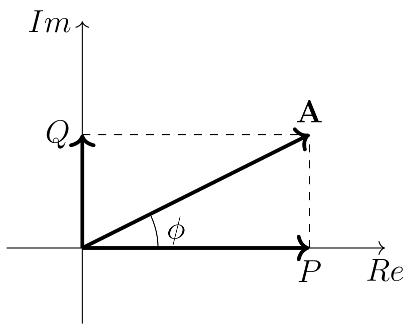


Figura 4.1: Triangolo di potenze.

E' possibile utilizzare le formule trigonometriche per individuare le relazioni fra le varie potenze:

$$P = |\mathbf{A}| \cos\phi = |\mathbf{V}| \cdot |\mathbf{I}| \cos\phi \tag{4.87}$$

$$Q = |\mathbf{A}| \sin\phi = |\mathbf{V}| \cdot |\mathbf{I}| \sin\phi \tag{4.88}$$

Potenza complessa elaborata da un'impedenza

Sia data una generica impedenza $\boldsymbol{Z}$, la potenza complessa elaborata dal-

l'impedenza vale:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Z}|\boldsymbol{I}|^2 = \frac{|\boldsymbol{V}|^2}{\boldsymbol{Z}*} \tag{4.89}$$

Dimostrazione

Sia data una generica impedenza percorsa da corrente. Applicando la legge di Ohm generalizzata si ottiene:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \tag{4.90}$$

La potenza complessa elaborata dall'impedenza si può quindi calcolare come:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I*} \tag{4.91}$$

Esplicitando la tensione in funzione della corrente:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{I*} \tag{4.92}$$

Ricordando che il prodotto di un numero con il suo complesso e coniugato fornisce il modulo al quadrato di quel numero:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}|\mathbf{I}|^2 \tag{4.93}$$

Esplicitando, invece, la corrente in funzione della tensione:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\left(\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}}\right)^* \tag{4.94}$$

Ovvero:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\frac{\mathbf{V}*}{\mathbf{Z}*} \tag{4.95}$$

Quindi:

$$\mathbf{A} = \frac{|\mathbf{V}|^2}{\mathbf{Z}*} \tag{4.96}$$

Angolo di sfasamento della potenza complessa elaborata da un'impedenza

Sia data una generica impedenza $\boldsymbol{Z} = R + jX$, *l'angolo di sfasamento della potenza complessa è uguale all'angolo di sfasamento dell'impedenza* *stessa:*

$$\phi = \phi_Z \tag{4.97}$$

Dimostrazione

Sia data una generica impedenza:

$$\mathbf{Z} = R + jX \tag{4.98}$$

La potenza complessa elaborata da questa impedenza vale:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}|\mathbf{I}|^2 = (R + jX)|\mathbf{I}|^2 \tag{4.99}$$

Per calcolare l'angolo di sfasamento, è necessario individuare la potenza attiva e quella reattiva:

$$P = Re\{\mathbf{A}\} = R|\mathbf{I}|^2 \tag{4.100}$$

$$Q = Im\{\mathbf{A}\} = X|\mathbf{I}|^2 \tag{4.101}$$

L'angolo ϕ si calcola facilmente come:

$$\phi = \arctan\frac{Q}{P} = \arctan\left(\frac{X|\mathbf{I}|^2}{R|\mathbf{I}|^2}\right) = \arctan\frac{X}{R} \tag{4.102}$$

Scrivendo il valore dell'impedenza in forma euleriana:

$$\mathbf{Z} = Ze^{j\phi_z} \tag{4.103}$$

L'angolo di sfasamento vale:

$$\phi_Z = \arctan\frac{X}{R} \tag{4.104}$$

Quindi:

$$\phi = \phi_Z \tag{4.105}$$

E', quindi, possibile analizzare in dettaglio le potenze elaborate da resistori, induttori e condensatori:

- La potenza complessa elaborata da un resistore è:

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{I}_R^* = R\mathbf{I}_R \cdot \mathbf{I}_R^* = R|\mathbf{I}_R|^2 = \frac{|\mathbf{V}_R|^2}{R} \tag{4.106}$$

Individuando le potenze attiva e reattiva:

$$P_R = Re\{\mathbf{A}_R\} = R \cdot |\mathbf{I}_R|^2 = \frac{|\mathbf{V}_R|^2}{R} \tag{4.107}$$

$$Q_R = Im\{\mathbf{A}_R\} = 0\text{VAR} \tag{4.108}$$

Conseguentemente si trova che il resistore elabora solo potenza attiva. Questo si sarebbe potuto ricavare anche dall'angolo di sfasamento dell'impedenza di un resistore, perché:

$$\phi_{Z,R} = 0 \tag{4.109}$$

- Analogamente, si può analizzare un induttore:

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{V}_L \cdot \mathbf{I}_L^* = jX_L\mathbf{I}_L \cdot \mathbf{I}_L^* = jX_L|\mathbf{I}_L|^2 = j\frac{|\mathbf{V}_L|^2}{X_L} \tag{4.110}$$

Le potenze attive e reattive sono rispettivamente:

$$P_L = Re\{\mathbf{A}_L\} = 0W \tag{4.111}$$

$$Q_L = Im\{\mathbf{A}_L\} = X_L \cdot I_L^2 = \frac{V_L^2}{X_L} \tag{4.112}$$

Conseguentemente l'induttore dissipa soltanto potenza reattiva.

- Per un condensatore:

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{V}_C \cdot \mathbf{I}_C^* = jX_C\mathbf{I}_C \cdot \mathbf{I}_C^* = jX_C I_C^2 = j\frac{V_C^2}{X_C} \tag{4.113}$$

Le potenze attive e reattive sono rispettivamente:

$$P_C = Re\{\mathbf{A}_C\} = 0W \tag{4.114}$$

$$Q_C = Im\{\mathbf{A}_C\} = X_C \cdot I_C^2 = \frac{V_C^2}{X_C} \tag{4.115}$$

Si noti che, dato che $X_C < 0$ allora risulta anche $Q_C < 0\text{VAR}$. Questo significa che si potrebbe considerare il condensatore un generatore di potenza reattiva.

4.4 Metodo di Boucherot

Il metodo di Boucherot è un sistema di risoluzione delle reti applicabile quando è completamente noto da un punto di vista energetico una sezione della rete ed è noto il verso di trasferimento della potenza.

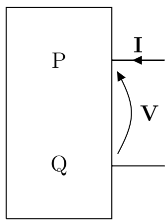
L'utilità del metodo di Boucherot nella risoluzione di tali reti è che non prevede l'uso dei fasori. Tutti i calcoli verranno effettuati attraverso i moduli. Questo ha un'importante implicazione: facendo riferimento ai soli moduli delle grandezze elettriche non è possibile scrivere le KCL e KVL, e quindi tutti i metodi di risoluzione di reti studiati. Il metodo di Boucherot si ritrova ad essere un metodo completamente alternativo.

Questo metodo si basa sul Teorema di Boucherot che afferma la validità del bilancio di potenza anche per la potenza complessa:

$$\sum_{i=1}^{n_u} \mathbf{A}_i = \sum_{j=1}^{n_g} \mathbf{A}_j \tag{4.116}$$

Questo stesso bilancio si può scrivere separatamente in termini di potenza attiva e potenza reattiva.

Avere la caratterizzazione completa di una sezione da un punto di vista energetico, significa sapere le potenze attiva e reattiva assorbite da tale sezione ed una delle variabili circuitali:



E' possibile scrivere le seguenti relazioni per tale carico:

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{4.117}$$

$$|\mathbf{A}| = A = |\mathbf{V}| \cdot |\mathbf{I}| \tag{4.118}$$

Queste due relazioni permettono di riuscire a ricavare il modulo della tensione note le potenze ed il modulo della corrente o viceversa il modulo della corrente note le potenze ed il modulo della tensione.

Identificata nella rete una sezione la cui caratterizzazione energetica è completa, è possibile proseguire a caratterizzare tutte le altre sezioni della rete. Questa operazione avviene mediante le informazioni relative ai carichi.

In particolare, è possibile ricordare le seguenti relazioni:

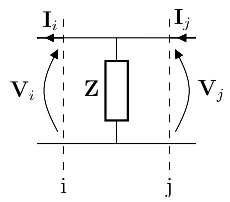
$$P = R|\mathbf{I}|^2 \tag{4.119}$$

$$Q = X|\mathbf{I}|^2 \tag{4.120}$$

dove X è una generica reattanza che può essere positiva (carico induttivo) o negativa (carico capacitivo)[1].

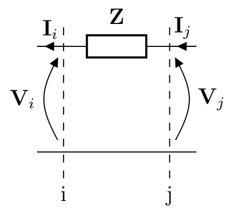
E' possibile individuare due possibili disposizioni dei carichi rispetto alla rete:

- Carico in parallelo, quando la tensione prima e dopo il carico è uguale:



$$\mathbf{V}_j = \mathbf{V}_i \tag{4.121}$$

- Carico in serie, quando la corrente prima e dopo il carico è uguale:



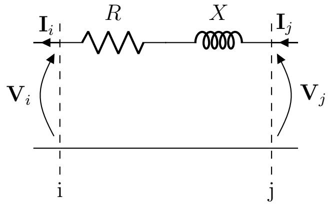
$$\mathbf{I}_j = \mathbf{I}_i \tag{4.122}$$

In ciascuna di queste due configurazioni di carico, è possibile individuare ulteriori due distinzioni ciascuna in base a come il carico è costruito: è possibile avere un carico composto da elementi in serie oppure in parallelo.

[1]In tutti i disegni nel seguito, la generica reattanza è indicata attraverso un induttore, ma questo non limita la validità dei ragionamenti.

4.4.1 Carico in serie con elementi in serie

Questo primo caso è uno dei casi più semplici da analizzare:



Supponendo di avere la caratterizzazione energetica completa della sezione i, è possibile calcolare le potenze dissipate tra i e j:

$$P_{ji} = R|\mathbf{I}_i|^2 \tag{4.123}$$

$$Q_{ji} = X|\mathbf{I}_i|^2 \tag{4.124}$$

Quindi è possibile ricavare la caratterizzazione della sezione j:

$$P_j = P_i + P_{ji} = P_i + R|\mathbf{I}_i|^2 \tag{4.125}$$

$$Q_j = Q_i + Q_{ji} = Q_i + X|\mathbf{I}_i|^2 \tag{4.126}$$

La potenza apparente alla sezione j è:

$$|\mathbf{A}_j| = \sqrt{P_j^2 + Q_j^2} \tag{4.127}$$

Per calcolare la tensione alla sezione j:

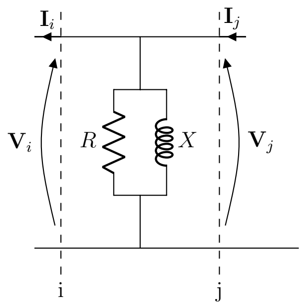
$$|\mathbf{I}_j| = |\mathbf{I}_i| \tag{4.128}$$

Quindi:

$$|\mathbf{V}_j| = \frac{|\mathbf{A}_j|}{|\mathbf{I}_j|} \tag{4.129}$$

4.4.2 Carico in parallelo con elementi in parallelo

Sia data la seguente configurazione:



In questa condizione è nota la tensione ai capi di ciascun elemento del carico, quindi:

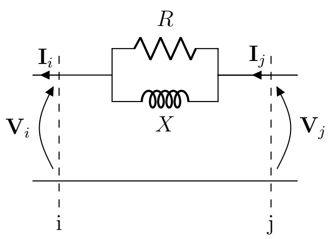
$$P_j = P_i + P_{ji} = P_i + \frac{|\mathbf{V}_i|^2}{R} \tag{4.130}$$

$$Q_j = Q_i + Q_{ji} = Q_i + \frac{|\mathbf{V}_i|^2}{X} \tag{4.131}$$

A questo punto è possibile completare la caratterizzazione della sezione j come al solito.

4.4.3 Carico in serie con elementi in parallelo

Questa sezione è leggermente più complicata della precedente:



Per passare dalla sezione i alla sezione j conviene calcolare la differenza di potenziale fra queste due sezioni. Per farlo, si deve calcolare il modulo dell'impedenza:

$$|\mathbf{Z}| = \frac{|RX|}{\sqrt{R^2 + X^2}} \tag{4.132}$$

Quindi:

$$|\mathbf{V}_{ij}| = |\mathbf{I}_i||\mathbf{Z}| \tag{4.133}$$

Quindi le potenze alla sezione j sono:

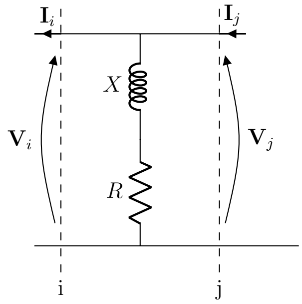
$$P_j = P_i + P_{ji} = P_i + \frac{|\mathbf{V}_{ij}|^2}{R} \tag{4.134}$$

$$Q_j = Q_i + Q_{ji} = Q_i + \frac{|\mathbf{V}_{ij}|^2}{X} \tag{4.135}$$

A questo punto è possibile completare la caratterizzazione della sezione j come al solito.

4.4.4 Carico in parallelo con elementi in serie

Sia data la seguente configurazione:



In questo caso, per passare dalla sezione i alla sezione j conviene calcolare la corrente nel ramo, attraverso il modulo dell'impedenza:

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} \tag{4.136}$$

Quindi:

$$|\mathbf{I}_{ij}| = |\mathbf{V}_i||\mathbf{Z}| \tag{4.137}$$

Quindi le potenze alla sezione j sono:

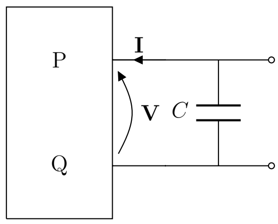
$$P_j = P_i + P_{ji} = P_i + R|\mathbf{I}_{ij}|^2 \tag{4.138}$$

$$Q_j = Q_i + Q_{ji} = Q_i + X|\mathbf{I}_{ij}|^2 \tag{4.139}$$

A questo punto è possibile completare la caratterizzazione della sezione j come al solito.

4.5 Rifasamento

Rifasare un carico significa ridurre la potenza reattiva assorbita dal carico. Dal momento che, solitamente, i carichi sono di tipo induttivo, il rifasamento viene effettuato con l'aggiunta di un condensatore:



Il condensatore C si chiama *condensatore di rifasamento.*

Il problema del rifasamento consiste nel calcolare il valore della capacità C tale da avere un fattore di potenza $\cos\phi$ determinato.

Dimensionamento del condensatore di rifasamento

La capacità C necessaria per rifasare un carico che assorbe una potenza attiva P ed una potenza reattiva Q, sottoposto ad una tensione $\boldsymbol{V}$, al fine di ottenere un fattore di potenza pari a $\cos\phi$, vale:

$$C = \frac{Q - P\tan\phi}{\omega|\boldsymbol{V}|^2} \tag{4.140}$$

Dimostrazione

Il problema del rifasamento si può risolvere tranquillamente attraverso l'uso del metodo di Boucherot.
Per prima cosa, è necessario calcolare il fattore di potenza del carico $\cos\phi_Z$ per capire se è necessario effettuare il rifasamento oppure no:

$$\phi_Z = \arctan\frac{Q}{P} \tag{4.141}$$

Se:

$$\cos\phi_Z < \cos\phi \tag{4.142}$$

allora è necessario rifasare.
Il condensatore di rifasamento non altera la potenza attiva, quindi alla sezione dopo il condensatore (chiamata sezione E), essa vale:

$$P_E = P \tag{4.143}$$

Al contrario, il condensatore di rifasamento modifica la potenza reattiva:

$$Q_E = Q + \Delta Q_C = Q + \frac{|\mathbf{V}|^2}{X_C} \tag{4.144}$$

Il fattore di potenza alla sezione E vale:

$$\phi_E = \arctan\frac{Q_E}{P_E} \tag{4.145}$$

Imponendo che $\phi_E = \phi$ si ottiene la potenza reattiva Q_d alla sezione E se il condensatore di rifasamento fosse correttamente dimensionato:

$$Q_d = P_E\tan\phi = P\tan\phi \tag{4.146}$$

Con questo valore, è possibile calcolare la variazione di potenza reattiva introdotta dal condensatore C correttamente dimensionato:

$$\Delta Q_C = Q_d - Q = P \tan\phi - Q \tag{4.147}$$

Dall'espressione della potenza reattiva elaborata da un condensatore:

$$X_C = \frac{|\mathbf{V}|^2}{\Delta Q_C} = \frac{|\mathbf{V}|^2}{P \tan\phi - Q} \tag{4.148}$$

Ricordando la relazione fra reattanza e capacità:

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \tag{4.149}$$

Si ottiene:

$$C = -\frac{P \tan\phi - Q}{\omega |\mathbf{V}|^2} = \frac{Q - P \tan\phi}{\omega |\mathbf{V}|^2} \tag{4.150}$$

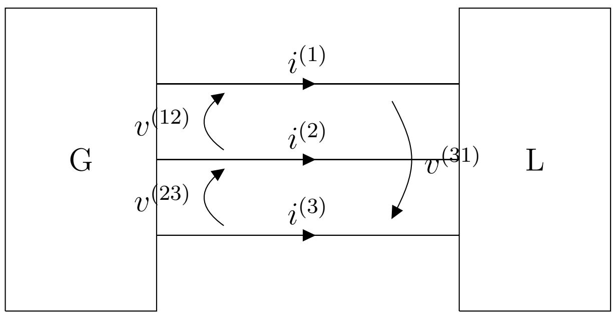
4.6 Reti trifase

Un sistema elettrico si definisce *trifase* se il trasporto dell'energia avviene mediante tre conduttori. Solitamente in questi sistemi anche la produzione di energia avviene direttamente mediante macchine trifase. Di conseguenza le reti trifase hanno solitamente generatori isofrequenziali.

Le reti trifase sono utilizzate comunemente per il trasporto dell'energia:

- Le oscillazioni nella potenza istantanea prodotta sono minime o nulle;
- Le perdite di potenza all'interno della rete elettrica sono minori rispetto alle reti monofase o in regime stazionario;
- le macchine elettriche (motori e generatori) trifase hanno notevoli vantaggi rispetto ai loro corrispettivi in corrente continua.

Una rete trifase si può rappresentare come segue:



Nella rete rappresentata, G è un sistema di generazione trifase mentre L è un carico trifase. I tre connettori si chiamano fasi.

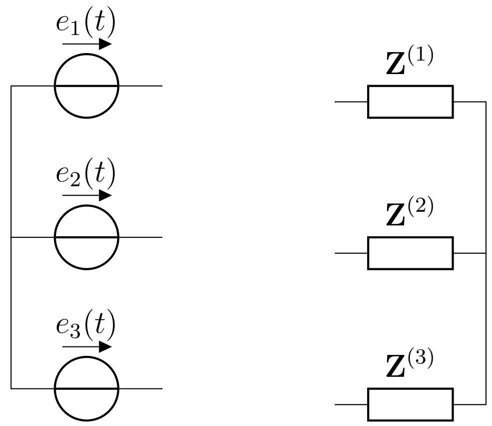
Per ogni sezione di una rete trifase è possibile scrivere le seguenti equazioni:

$$i^{(1)} + i^{(2)} + i^{(3)} = 0 \tag{4.151}$$

$$v^{(12)} + v^{(23)} + v^{(31)} = 0 \tag{4.152}$$

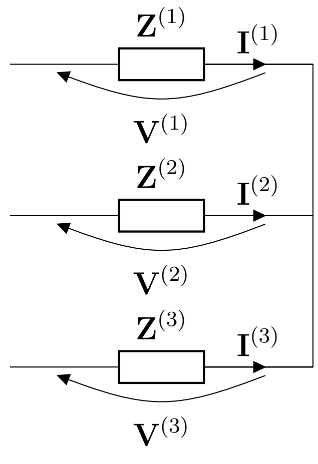
Sia la generazione che l'assorbimento possono avvenire con elementi disposti in configurazione stella oppure triangolo.

- Configurazione a stella:

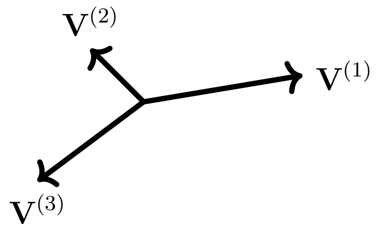


In questa configurazione è possibile individuare per ogni terna di generatori e per ogni terna di utilizzatori un centro-stella.

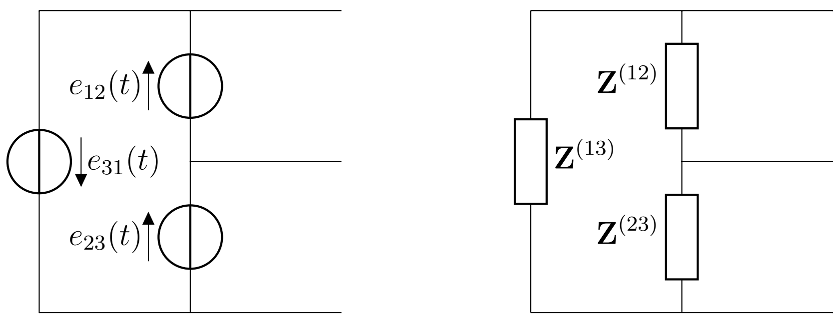
Le tensioni e le correnti calcolare rispetto al centro stella si chiamano *stellate*:



Le tensioni stellate si possono rappresentare nel piano complesso:



- Configurazione a triangolo:



In questa configurazione non è più è possibile individuare il centro-stella. Le tensioni e le correnti in questa configurazione si chiamano *concatenate*.

Esistono due tipologie di reti trifase interessanti per le loro proprietà: le reti trifase simmetriche e quelle equilibrate.

4.6.1 Reti trifase simmetriche

Una rete trifase si definisce simmetrica se i moduli di tutte le tensioni concatenate sono uguali:

$$|\mathbf{V}^{(12)}| = |\mathbf{V}^{(23)}| = |\mathbf{V}^{(31)}| \tag{4.153}$$

Sfasamento delle tensioni concatenate

In una rete trifase simmetrica, tutte le tensioni concatenate sono sfasate fra di loro di $2\pi/3^a$:

$$\boldsymbol{V}^{(12)} = \boldsymbol{V}^{(31)} e^{j2\pi/3} = \boldsymbol{V}^{(23)} e^{-j2\pi/3} \tag{4.154}$$

[a]Nel proseguo, si considerano terne dirette

Dimostrazione

La condizione sulle tensioni necessaria per avere una rete trifase è la seguente:

$$\mathbf{V}^{(12)} + \mathbf{V}^{(23)} + \mathbf{V}^{(31)} = 0 \tag{4.155}$$

La condizione per avere una rete simmetrica è:

$$|\mathbf{V}^{(12)}| = |\mathbf{V}^{(23)}| = |\mathbf{V}^{(31)}| = V \tag{4.156}$$

Chiamando ϕ_{12}, ϕ_{23} e ϕ_{31} le fasi delle tre tensioni si ottiene:

$$Ve^{j\phi_{12}} + Ve^{j\phi_{23}} + Ve^{j\phi_{31}} = 0 \tag{4.157}$$

Dividendo per V e per $e^{j\phi_{12}}$:

$$1 + e^{j(\phi_{23}-\phi_{12})} + e^{j(\phi_{31}-\phi_{12})} = 0 \tag{4.158}$$

Chiamando gli sfasamenti $\Delta\phi_2 = (\phi_{23} - \phi_{12})$ e $\Delta\phi_3 = (\phi_{31} - \phi_{12})$ si ha:

$$e^{j\Delta\phi_2} + e^{j\Delta\phi_3} = -1 \tag{4.159}$$

Separando l'equazione sull'asse reale da quella sull'asse immaginario si ottiene:

$$\begin{cases} \cos\Delta\phi_2 + \cos\Delta\phi_3 = -1 \\ \sin\Delta\phi_2 + \sin\Delta\phi_3 = 0 \end{cases} \tag{4.160}$$

Dalla seconda equazione si ottiene:

$$\Delta\phi_2 = -\Delta\phi_3 \tag{4.161}$$

Inserendo questo risultato nella prima equazione:

$$2\cos\Delta\phi_2 = -1 \tag{4.162}$$

Ovvero:

$$\Delta\phi_2 = -\frac{2\pi}{3} \tag{4.163}$$

Quindi:

$$\Delta\phi_3 = \frac{2\pi}{3} \tag{4.164}$$

E' possibile ottenere una rete trifase simmetrica se la generazione di tensione avviene con tensioni di modulo uguale e sfasamento $2\pi/3$.

4.6.2 Reti trifase equilibrate

Una rete trifase si definisce equilibrata se se i moduli di tutte le correnti stellate sono uguali:

$$|\mathbf{I}^{(1)}| = |\mathbf{I}^{(2)}| = |\mathbf{I}^{(3)}| \tag{4.165}$$

Sfasamento delle correnti stellate

In una rete trifase equilibrata, tutte le correnti stellate sono sfasate fra di loro di $2\pi/3$:

$$\boldsymbol{I}^{(1)} = \boldsymbol{I}^{(3)}e^{j2\pi/3} = \boldsymbol{I}^{(2)}e^{-j2\pi/3} \tag{4.166}$$

Dimostrazione

La condizione sulle tensioni necessaria per avere una rete trifase è la seguente:

$$\mathbf{I}^{(1)} + \mathbf{I}^{(2)} + \mathbf{I}^{(3)} = 0 \tag{4.167}$$

La condizione per avere una rete equilibrata è:

$$|\mathbf{I}^{(1)}| = |\mathbf{I}^{(2)}| = |\mathbf{I}^{(3)}| = I \tag{4.168}$$

Chiamando ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 le fasi delle tre correnti si ottiene:

$$Ie^{j\phi_1} + Ie^{j\phi_2} + Ie^{j\phi_3} = 0 \tag{4.169}$$

Dividendo per I e per $e^{j\phi_1}$:

$$1 + e^{j(\phi_2-\phi_1)} + e^{j(\phi_3-\phi_1)} = 0 \tag{4.170}$$

Chiamando gli sfasamenti $\Delta\phi_2 = (\phi_2 - \phi_1)$ e $\Delta\phi_3 = (\phi_3 - \phi_1)$ si ha:

$$e^{j\Delta\phi_2} + e^{j\Delta\phi_3} = -1 \tag{4.171}$$

Separando l'equazione sull'asse reale da quella sull'asse immaginario si ottiene:

$$\begin{cases} \cos\Delta\phi_2 + \cos\Delta\phi_3 = -1 \\ \sin\Delta\phi_2 + \sin\Delta\phi_3 = 0 \end{cases} \tag{4.172}$$

Dalla seconda equazione si ottiene:

$$\Delta\phi_2 = -\Delta\phi_3 \tag{4.173}$$

Inserendo questo risultato nella prima equazione:

$$2\cos\Delta\phi_2 = -1 \tag{4.174}$$

Ovvero:

$$\Delta\phi_2 = -\frac{2\pi}{3} \tag{4.175}$$

Quindi:

$$\Delta\phi_3 = \frac{2\pi}{3} \tag{4.176}$$

Per avere una rete trifase equilibrata bisogna che i carichi relativi alle diverse fasi sono uguali.

4.7 Reti trifase simmetriche ed equilibrate

Se una rete soddisfa entrambe queste condizioni si definisce simmetrica ed equilibrata.

Le reti trifase simmetriche ed equilibrate hanno delle proprietà che le rendono molto utili per la distribuzione dell'energia. Per la risoluzione di tali reti è possibile sfruttare delle proprietà particolari.

4.7.1 Proprietà delle reti trifase simmetriche ed equilibrate

Le seguenti proprietà delle reti trifase simmetriche ed equilibrate servono per dimostrare il funzionamento del sistema di risoluzione ad-hoc di tali reti.

Sfasamento delle tensioni stellate

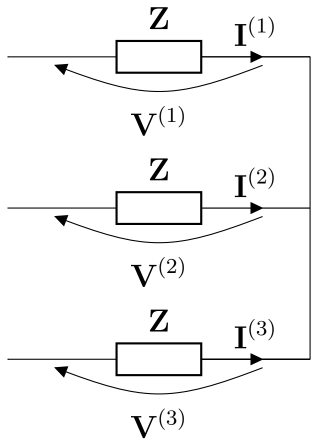
In una rete trifase simmetrica ed equilibrata, tutte le tensioni stellate sono sfasate di $2\pi/3$.

Dimostrazione

E' noto che per una rete trifase equilibrata, le correnti stellate sono sfasate di $2\pi/3$:

$$\mathbf{I}^{(1)} = \mathbf{I}^{(3)} e^{j2\pi/3} = \mathbf{I}^{(2)} e^{-j2\pi/3} \tag{4.177}$$

Sia data una sezione di rete simmetrica ed equilibrata avente dei carichi in configurazione stella:



Le tre impedenze sono uguali per definizione di rete equilibrata. Quindi:

$$\mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{Z}\mathbf{I}^{(1)} = ZIe^{j\phi_Z}e^{j\phi_1} \tag{4.178}$$

$$\mathbf{V}^{(2)} = \mathbf{Z}\mathbf{I}^{(2)} = ZIe^{j\phi_Z}e^{j\phi_2} \tag{4.179}$$

$$\mathbf{V}^{(3)} = \mathbf{Z}\mathbf{I}^{(2)} = ZIe^{j\phi_Z}e^{j\phi_3} \tag{4.180}$$

Dato che lo sfasamento è dovuto soltanto allo sfasamento delle correnti, allora anche le tensioni concatenate sono sfasate di $2\pi/3$.

Per esteso tutte le relazioni fra le tensioni di fase sono:

$$\mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{V}^{(3)} e^{j\frac{2\pi}{3}} = \mathbf{V}^{(2)} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \tag{4.181}$$

$$\mathbf{V}^{(2)} = \mathbf{V}^{(1)} e^{j\frac{2\pi}{3}} = \mathbf{V}^{(3)} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \tag{4.182}$$

$$\mathbf{V}^{(3)} = \mathbf{V}^{(2)} e^{j\frac{2\pi}{3}} = \mathbf{V}^{(1)} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \tag{4.183}$$

Sfasamento delle correnti concatenate

In una rete trifase, le correnti concatenate sono sfasate di $2\pi/3$.

La dimostrazione di questa proprietà segue esattamente quella dello sfasamento delle tensioni stellate.

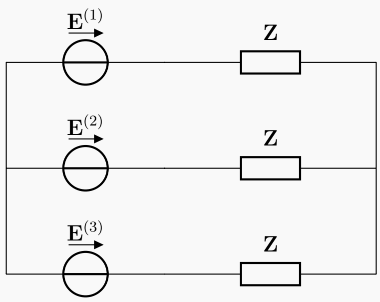
Differenza di potenziale fra centri-stella

In una rete trifase simmetrica ed equilibrata, la differenza di potenziale fra ogni coppia di centri stella è nulla.

Per questo enunciato non viene riportata la dimostrazione, ma un calcolo in una semplice rete trifase simmetrica ed equilibrata.

Esempio

Sia data una rete trifase simmetrica ed equilibrata come quella riportata in figura:



La differenza di potenziale fra i sue centri stella si può calcolare attraverso la formula di Millman:

$$\mathbf{V}_{O'O} = \frac{\dfrac{\mathbf{E}^{(1)}}{\mathbf{Z}} + \dfrac{\mathbf{E}^{(2)}}{\mathbf{Z}} + \dfrac{\mathbf{E}^{(3)}}{\mathbf{Z}}}{\dfrac{1}{\mathbf{Z}} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}}} \tag{4.184}$$

Dato che i generatori hanno modulo costante, è possibile raccogliere a fattor comune:

$$\mathbf{V}_{O'O} = \frac{E}{3}(e^{j0} + e^{j2\pi/3} + e^{-j2\pi/3}) \tag{4.185}$$

La somma dei tre esponenziali complessi è nulla, quindi:

$$\mathbf{V}_{O'O} = 0V \tag{4.186}$$

Trasformazione fra tensioni concatenate e tensioni stellate

La relazione fra tensioni concatenate e tensioni stellate in una rete trifase simmetrica ed equilibrata è la seguente:

$$\boldsymbol{V}^{(ij)} = \sqrt{3}\,\boldsymbol{V}^{(i)} e^{j\pi/6} \tag{4.187}$$

Dimostrazione

Dalla definizione di tensione concatenata:

$$\mathbf{V}^{(ij)} = \mathbf{V}^{(i)} - \mathbf{V}^{(j)} \tag{4.188}$$

Dato che:

$$\mathbf{V}^{(j)} = \mathbf{V}^{(i)} e^{-j2\pi/3} \tag{4.189}$$

Allora:

$$\mathbf{V}^{(ij)} = \mathbf{V}^{(i)}(1 - e^{-j2\pi/3}) \tag{4.190}$$

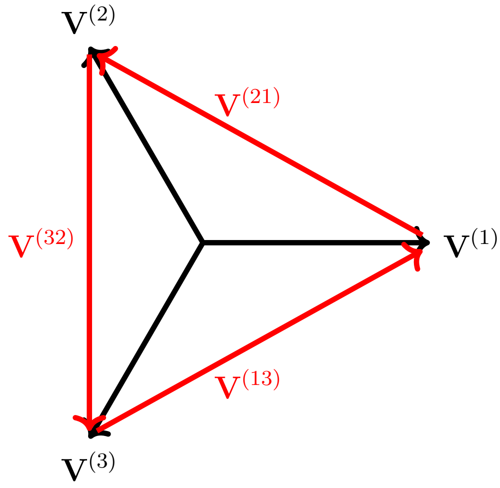
Calcolando il termine fra parentesi:

$$1 - e^{-2\pi/3} = \sqrt{3} e^{j\pi/6} \tag{4.191}$$

Si ottiene:

$$\mathbf{V}^{(ij)} = \sqrt{3}\mathbf{V}^{(i)} e^{j\pi/6} \tag{4.192}$$

Per evitare errori nell'applicazione di questa formula si consiglia di rifarsi al triangolo delle tensioni:



Per calcolare la relazione fra due tensioni, si riportano i vettori ad avere la stessa origine; sapendo la relazione fra i moduli ed applicando un po' di proprietà dei triangoli, si ottengono facilmente le relazioni fra tensioni stellate e concatenate.

Relazione fra correnti stellate e concatenate

La relazione fra correnti stellate e concatenate è la seguente:

$$\boldsymbol{I}^{(ij)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \boldsymbol{I}^{(i)} e^{j\pi/6} \tag{4.193}$$

Dimostrazione

Sia dato un carico a triangolo ed il corrispettivo carico a stella. La relazione fra le tensioni è:

$$\mathbf{V}^{(ij)} = \sqrt{3}\mathbf{V}^{(i)} e^{j\pi/6} \tag{4.194}$$

Dalla legge di Ohm:

$$\mathbf{V}^{(ij)} = \mathbf{Z}^{(ij)} \cdot \mathbf{I}^{(ij)} \tag{4.195}$$

$$\mathbf{V}^{(i)} = \mathbf{Z}^{(i)} \cdot \mathbf{I}^{(i)} \tag{4.196}$$

Ricordando la relazione fra il carico a triangolo e quello a stella:

$$\mathbf{Z}^{(ij)} = 3\mathbf{Z}^{(i)} \tag{4.197}$$

Inserendo il tutto nell'equazione originaria:

$$3\mathbf{Z}^{(i)} \cdot \mathbf{I}^{(ij)} = \sqrt{3}\mathbf{Z}^{(i)} \cdot \mathbf{I}^{(i)} e^{j\pi/6} \tag{4.198}$$

Dividendo per $3\mathbf{Z}^{(i)}$:

$$\mathbf{I}^{(ij)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \mathbf{I}^{(i)} e^{j\pi/6} \tag{4.199}$$

Per evitare errori nell'applicazione di questa relazione, si consiglia di esprimere le correnti in funzione delle tensioni ed applicare le relazioni sulle tensioni.

4.7.2 Risoluzione di reti trifase simmetriche ed equilibrate

Le proprietà studiate permettono di individuare una tecnica di risoluzione delle reti trifase simmetriche ed equilibrate: il monofase equivalente.

Questa tecnica risolutiva prevede i seguenti passaggi:

1. Trasformazione di tutti i carichi da triangolo a stella, scrivendo le relazioni fra eventuali incognite concatenate e quelle stellate;
2. Scrivere le relazioni fra tutte le incognite e le corrispettive sulla fase scelta come riferimento;
3. Connettere tutti i centri stella da un corto circuito;
4. Estrarre il monofase equivalente della fase scelta come riferimento;
5. Risolvere la rete ottenuta;
6. Utilizzare le relazioni scritte in precedenza per trovare le incognite originarie.

4.7.3 Potenze in reti trifase

Potenza nei carichi

In una rete trifase simmetrica ed equilibrata, data una terna di carichi, la potenza complessa dissipata da uno dei carichi è uguale a quella dissipata dagli altri:

$$\boldsymbol{A}_Z^{(1)} = \boldsymbol{A}_Z^{(2)} = \boldsymbol{A}_Z^{(3)} \tag{4.200}$$

Dimostrazione

Per dimostrare questa proprietà, è necessario calcolare le tre potenze complesse in funzione delle tensioni e delle correnti.
Per il carico relativo alla prima fase:

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{V}^{(1)} \cdot \mathbf{I}^{(1)*} \tag{4.201}$$

Per il carico relativo alla seconda fase:

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{V}^{(2)} \cdot \mathbf{I}^{(2)*} \tag{4.202}$$

Esprimendo le tensioni e le correnti in funzione di quelle della prima fase si ottiene:

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{V}^{(1)} e^{j2\pi/3} \cdot (\mathbf{I}^{(1)} e^{j2\pi/3})^* \tag{4.203}$$

Svolgendo il complesso e coniugato:

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{V}^{(1)} e^{j2\pi/3} \cdot \mathbf{I}^{(1)*} e^{-j2\pi/3} = \mathbf{V}^{(1)} \cdot \mathbf{I}^{(1)*} \tag{4.204}$$

Che quindi coincide con la potenza complessa del carico sulla fase 1.
Ripetendo lo stesso ragionamento per la fase 3:

$$\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{V}^{(3)} \cdot \mathbf{I}^{(3)*} = \mathbf{V}^{(1)} e^{-j2\pi/3} \cdot (\mathbf{I}^{(1)} e^{-j2\pi/3})^* \tag{4.205}$$

Svolgendo il complesso e coniugato:

$$\mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{V}^{(1)} e^{-j2\pi/3} \cdot \mathbf{I}^{(1)*} e^{j2\pi/3} = \mathbf{V}^{(1)} \cdot \mathbf{I}^{(1)*} \tag{4.206}$$

Potenza di carichi in configurazione stella e triangolo

In una rete trifase simmetrica ed equilibrata, la potenza dissipata da un carico in configurazione triangolo è uguale a quella di uno dei carichi ottenuti trasformando il triangolo iniziale in una stella

Dimostrazione

Siano dati dei carichi in configurazione triangolo ed i corrispettivi ottenuti dopo la trasformazione in stella.
Le due configurazioni sono equivalenti agli effetti esterni, quindi la potenza totale si deve conservare:

$$\mathbf{A}_{tot}^{Y} = \mathbf{A}_{tot}^{\Delta} \tag{4.207}$$

> Dato che le potenze dei singoli carichi nelle due configurazioni sono uguali, allora:
> $$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}^{(12)} \tag{4.208}$$

Queste proprietà sulle potenze servono per arrivare a dimostrare le due proprietà principali delle reti trifase simmetriche ed equilibrate, ovvero le relazioni fra tensioni stellate e tensioni concatenate.

Si ricordi che, essendo le impedenze uguali, la trasformazione fra stella e triangolo è semplice:

$$\mathbf{Z}_Y = \frac{\mathbf{Z}_\Delta}{3} \tag{4.209}$$

Capitolo 5

Elementi non lineari

Un elemento circuitale, sia esso un bipolo o un multipolo, si definisce *non lineare* quando, nella sua equazione costitutiva, la relazione fra tensione e corrente presenta operatori non lineari.

Se uno o più elementi non lineari sono presenti all'interno di un circuito, molte delle tecniche studiate fino ad ora non sono più valide: in particolare il principio di sovrapposizione degli effetti (e tutti i teoremi derivati, quali Thevenin e Norton) e le trasformate non sono più valide.

La soluzione generalmente utilizzata per risolvere questo problema è applicare una linearizzazione all'equazione costitutiva del componente non lineare. Tale linearizzazione può essere locale (*approccio di piccolo segnale*) oppure globale (*approccio di ampio segnale*).

L'approssimazione locale è la miglior approssimazione della curva in un intorno di un punto, comunemente noto come *punto di funzionamento*. La conoscenza di questo punto è uno dei prerequisiti necessari all'uso di questo tipo di approccio.

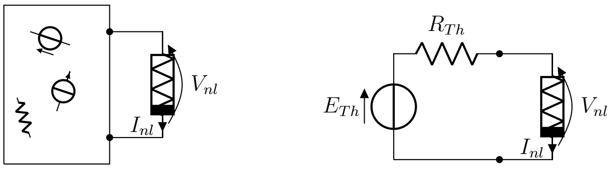
L'approssimazione globale, invece, presuppone di scomporre il dominio in regioni, effettuando all'interno di ognuna di queste un'approssimazione al prim'ordine. Questo tipo di approccio è, quindi, l'unione di tante approssimazioni locali.

5.1 Analisi di piccolo segnale

L'analisi di piccolo segnale permette di ottenere un modello lineare del bipolo quando le oscillazioni sono limitate intorno ad un punto, chiamato *punto di lavoro*.

L'analisi di piccolo segnale di una rete consiste nei seguenti passi:

- Identificazione del punto di lavoro: per farlo, è necessario innanzitutto spegnere tutti i generatori tempo-varianti. Poi, se la rete presenta un un elemento non lineare isolabile dagli altri elementi lineari, è possibile applicare il teorema di Thevenin alla porzione lineare della rete:

  Applicando una KVL, è possibile scrivere:

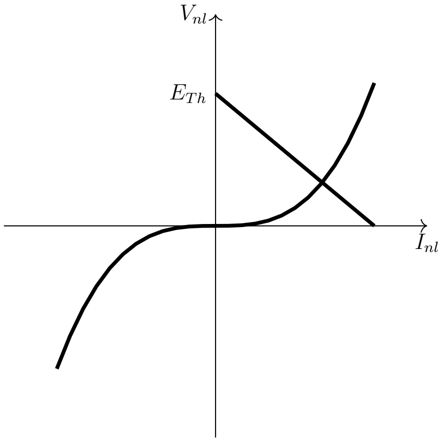
  $$E_{Th} - R_{Th} \cdot I_{nl} = V_{nl} \tag{5.1}$$

  L'espressione $E_{Th} - R_{Th} \cdot I_{nl}$ rappresenta il comportamento del resto della rete vista dal bipolo non lineare, ed è chiamata *retta di carico*.

  Combinando l'equazione della KVL con l'equazione costitutiva del bipolo non lineare si ottiene il sistema risolvente:

  $$\begin{cases} E_{Th} - R_{Th} \cdot I_{nl} = V_{nl} \\ V_{nl} = V_{nl}(I_{nl}) \end{cases} \tag{5.2}$$

  La risoluzione di tale sistema può avvenire in via analitica oppure per via grafica. Nel primo sistema i punti di lavoro sono le soluzioni del sistema, mentre con il secondo approccio i punti di lavoro sono le intersezioni fra le due curve:

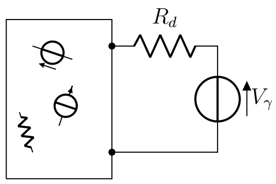
- Il bipolo linearizzato che si cerca è quello che meglio approssima la curva nell'intorno del punto di lavoro, ovvero la tangente all'equazione costitutiva. Questo bipolo è il *modello di piccolo segnale.*

  La pendenza della retta tangente è data dalla derivata valutata nel punto di lavoro P:
$$R_d = \frac{\partial V_{nl}}{\partial I_{nl}}|_P \tag{5.3}$$

  Il termine noto si può individuare imponendo il passaggio per il punto di lavoro:
$$V_\gamma = V_{nl}|_P - R_d I_{nl}|_P \tag{5.4}$$

- Il modello di piccolo segnale ottenuto analiticamente è equivalente ad un bipolo di tipo thevenin in cui si ha un resistore R_d ed un generatore di tensione V_γ.

  Inserendo questo bipolo all'interno della rete originaria si ottiene una rete lineare che è equivalente a quella originaria per piccole oscillazioni:

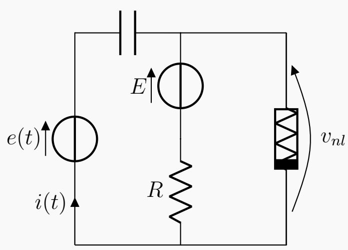


  Tale rete è lineare e si può risolvere con le tecniche viste fino ad ora.

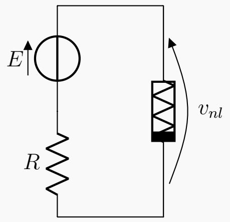
- L'ultimo passaggio da effettuare è il controllo la validità del modello di piccolo segnale, ovvero calcolare o stimare il massimo errore effettuato dalla linearizzazione dell'equazione costitutiva del bipolo.

Esempio

Dato il circuito in figura avente un bipolo non lineare, calcolare la corrente $i(t)$ supponendo $i_{nl} > 0$.



$v_{nl} = i_{nl}^2 - 10i_{nl} + 34$
$E = 40V$
$R = 11\Omega$
$C = 20nF$
$e(t) = 0.1\sqrt{2}\cos(500t)$
Per prima cosa, e' necessario calcolare il punto di lavoro. Per calcolare il punto di lavoro si spengono tutti i generatori variabili nel tempo, conseguentemente si considerano i condensatori come circuiti aperti ed gli induttori come corto circuiti.



$$\begin{cases} v_{nl} = E - Ri_{nl} = 40 - 11i_{nl} \\ v_{nl} = i_{nl}^2 - 10i_{nl} + 34 \end{cases} \tag{5.5}$$

Ovvero:

$$(i_{nl} - 2)(i_{nl} + 3) = 0 \tag{5.6}$$

Da cui:

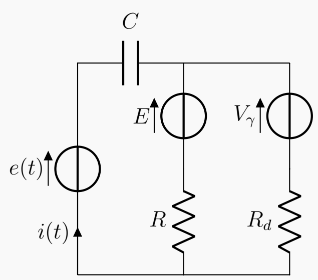
$$(V,I) = (18V,2A) \tag{5.7}$$

Il modello di piccolo segnale e':

$$R_d = \left.\frac{\partial v_{nl}}{\partial i_{nl}}\right|_{i_{nl}=2} = (2i_{nl} - 10)|_{i_{nl}=2} = -6\Omega \tag{5.8}$$

$$V_\gamma = V - R_d I = 30V \tag{5.9}$$

Inserendo il modello linearizzato nel circuito originario:



La rete cosi' ottenuta non e' isofrequenziale. Per risolverla e' necessario applicare il principio di sovrapposizione degli effetti nel dominio del tempo:

$$i(t) = i_{\omega=0}(t) + i_{\omega=500}(t) \tag{5.10}$$

Per $\omega = 0 rad/s$ il condensatore e' un circuito aperto, quindi:

$$i_{\omega=0}(t) = 0A \tag{5.11}$$

Per il circuito a $\omega = 500 rad/s$ e' necessario applicare la trasfromata fasoriale:

$$\mathbf{E}_1 = 0.1V \tag{5.12}$$

$$\mathbf{Z}_R = 11\Omega \tag{5.13}$$

$$\mathbf{Z}_{Rd} = -6\Omega \tag{5.14}$$

$$\mathbf{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j10\Omega \tag{5.15}$$

Applicando la formula di Millman:

$$\mathbf{V}_{MN} = \frac{\frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{Z}_C}}{\frac{1}{\mathbf{Z}_C} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_d}} = (63.54 - 48.13)mV \tag{5.16}$$

Calcolando la tensione sul condensatore:

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_{MN} - \mathbf{E}_1 = (-36.5 - 48.13)mV \tag{5.17}$$

la corrente circolante vale:

$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_C}{\mathbf{Z}_C} = (4.8 - 3.6)mA \tag{5.18}$$

Antitrasformando:

$$i_C(t) = 6.04\sqrt{2}\cos(500t - 0.65)mA \tag{5.19}$$

5.2 Analisi di ampio segnale

L'analisi di ampio segnale permette di identificare una serie di equivalenti lineari al bipolo originario, validi ciascuno in un intervallo diverso. La somma di tutti gli intervalli è il dominio di definizione dell'equazione costitutiva originaria.

L'analisi di ampio segnale si effettua nel seguente modo:

- Divido il dominio dell'equazione costitutiva non lineare in parti;
- Linearizzo ciascuna parte;
- Uso l'equazione costitutiva linearizzata per calcolare tutti i punti di lavoro possibili;
- Controllo quali dei punti di lavoro soddisfa le ipotesi originarie.

Un esempio tipico di analisi di ampio segnale è la risoluzione di reti contenenti diodi.