Transitori

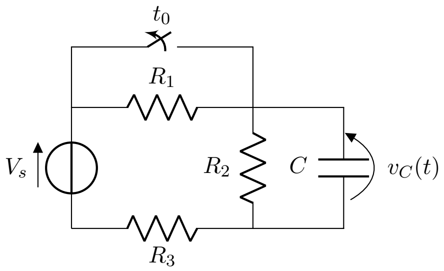
A cura di Alessandro Niccolai
A.A. 2019/2020

Ultimo aggiornamento: 18 febbraio 2020

G.1 • Transitori di variabile di stato

Esercizio G.1.1

Dato il circuito in figura, da lungo tempo nella configurazione assegnata, determinare l'espressione analitica e l'andamento qualitativo della tensione $v_C(t)$ per $t > 0s$. L'interruttore S si apre a $t_0 = 0s$. Esplicitare il valore delle condizioni iniziali $v_C(t_0^+)$, il valore asintotico $v_C(\infty)$ e la costante di tempo τ.

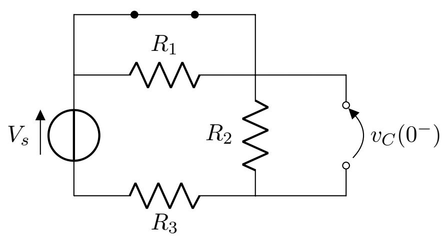


Dati:
$R_1 = 2$ kΩ
$R_2 = 4$ kΩ
$R_3 = 2$ kΩ
$C = 0{,}5$ μF
$V_s = 2\,\mathrm{V}$

Risultati:
$v_C(t_0^+) = \frac{4}{3}\,\mathrm{V}$
$v_C(\infty) = 1\,\mathrm{V}$
$\tau = 1$ ms

Soluzione:

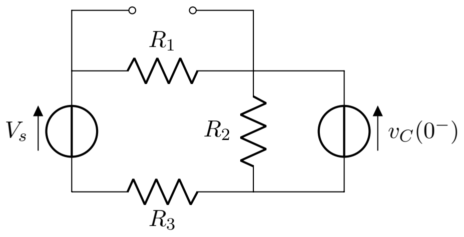
Per prima cosa è necessario calcolare la variabile di stato prima dell'inizio del transitorio.
Tempo t_0^-:



Da un partitore di tensione:

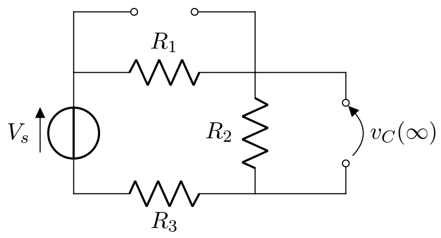
$$v_C(0^-) = V_s \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{4}{3}\,\mathrm{V} \tag{1}$$

Dalla continuità della variabile di stato è possibile risolvere il **tempo** t_0^+:



$$v_C(0^+) = v_C(0^-) \tag{2}$$

Infine, è possibile calcolare le **condizioni finali** del transitorio:



Anche in questo caso è possibile risolvere l'esercizio con il partitore di tensione:

$$v_C(\infty) = V_s \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 1\,\mathrm{V} \tag{3}$$

La resistenza equivalente è:

$$R_{eq} = R_2 /\!/ (R_1 + R_3) = 2\ \mathrm{k}\Omega \tag{4}$$

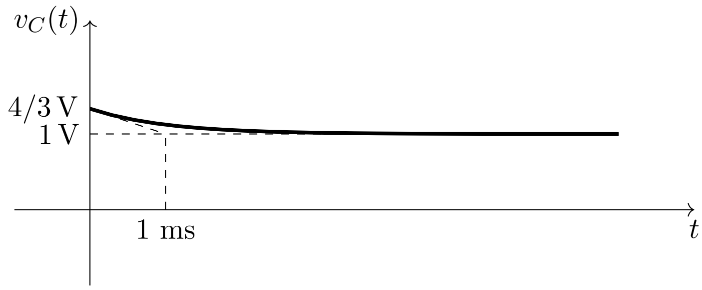
Quindi:

$$\tau = R_{eq} C = 1\ \mathrm{ms} \tag{5}$$

L'espressione analitica è:

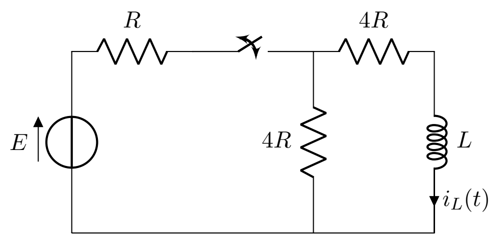
$$v_C(t) = \left[v_C(t_0^+) - v_C(\infty)\right] e^{-(t-t_0)/\tau} + v_C(\infty) = \frac{1}{3} e^{-t/\tau} + 1 \tag{6}$$

Il grafico qualitativo è:



Esercizio G.1.2

Dato il circuito in figura, da lungo tempo nella configurazione assegnata, determinare l'espressione analitica e l'andamento qualitativo della corrente $i_L(t)$ per $t > 0s$. L'interruttore si apre a $t_0 = 0s$ e si richiude a $t_1 = 5$ ms.
Esplicitare il valore delle condizioni iniziali $i_L(t_0^+)$, il valore asintotico del primo transitorio $i_L(\infty_1)$, le condizioni iniziali del secondo transitorio $i_L(t_1^+)$, le condizioni finali del secondo transitorio $i_L(\infty_2)$ e le costanti di tempo τ_1 e τ_2.

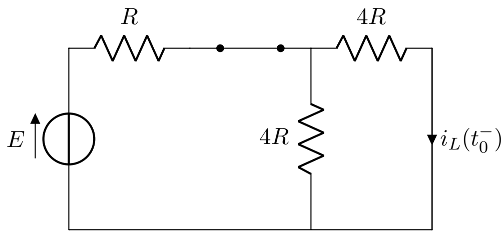


Dati:
$R = 5\ \Omega$
$E = 30\,\mathrm{V}$
$L = 120\ \mathrm{mH}$

Risultati:
$i_L(t_0^+) = 1\,\mathrm{A}$
$i_L(t_1^+) = 0{,}19A$
$i_L(\infty_1) = 0\,\mathrm{A}$
$i_L(\infty_2) = 1\,\mathrm{A}$
$\tau_1 = 3\ \mathrm{ms}$
$\tau_2 = 5\ \mathrm{ms}$

Soluzione:

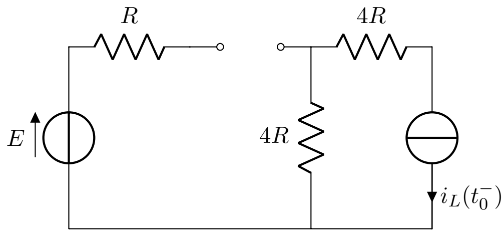
Per prima cosa è necessario calcolare le condizioni prima dell'inizio del transitorio (**tempo** t_0^-):



Da un partitore di tensione e dalla legge di Ohm:

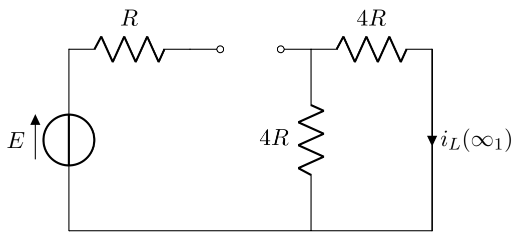
$$i_L(t_0^-) = E\frac{\frac{4R}{2}}{R+\frac{4R}{2}} \cdot \frac{1}{4R} = 1\,\mathrm{A} \tag{7}$$

La condizione iniziale del primo transitorio si calcola per continuità (**tempo** t_0^+):



$$i_L(t_0^-) = i_L(t_0^+) \tag{8}$$

Le **condizioni finali del primo transitorio** si calcolano con il seguente circuito:



Facilmente si vede che:

$$i_L(t_{\infty_1}) = 0\,\mathrm{A} \tag{9}$$

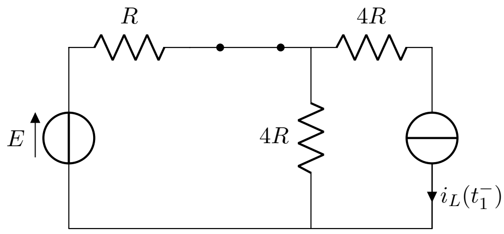
La costante di tempo vale:

$$\tau_1 = \frac{L}{2 \cdot 4R} = 3\ \mathrm{ms} \tag{10}$$

L'espressione della corrente per $t_0 < t < t_1$ è:

$$i_L(t) = e^{-t/\tau_1} \tag{11}$$

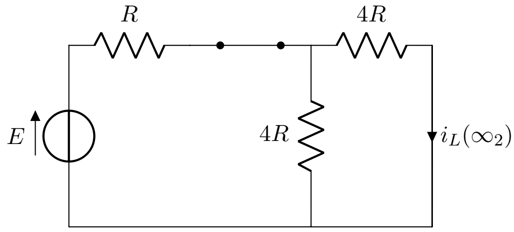
Le condizioni iniziali del secondo transitorio (**tempo** t_1^+) si possono calcolare per continuità dal primo transitorio:



$$i_L(t_1^-) = e^{-t_1/3} = 0{,}19\,\mathrm{A} \tag{12}$$

$$i_L(t_1^+) = i_L(t_1^-) \tag{13}$$

Il **circuito a** $t = \infty_2$ è uguale a quello delle condizioni iniziali, data la doppia commutazione dell'interruttore.



Quindi:

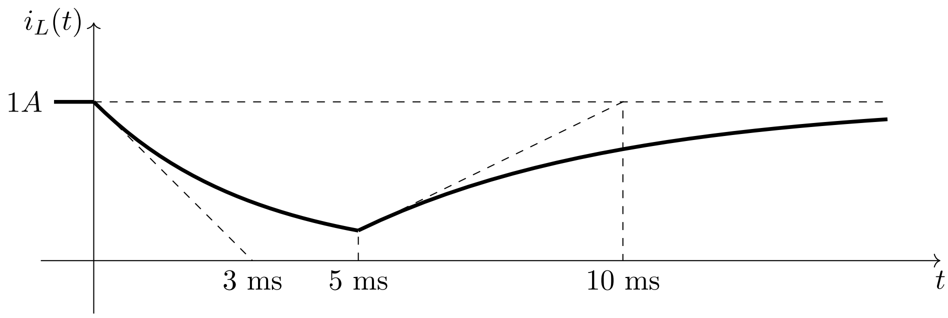
$$i_L(\infty_2) = i_L(t_0^-) = 1\,\mathrm{A} \tag{14}$$

La costante di tempo vale:

$$\tau_2 = \frac{L}{4R + 4R//R} = 5\ \mathrm{ms} \tag{15}$$

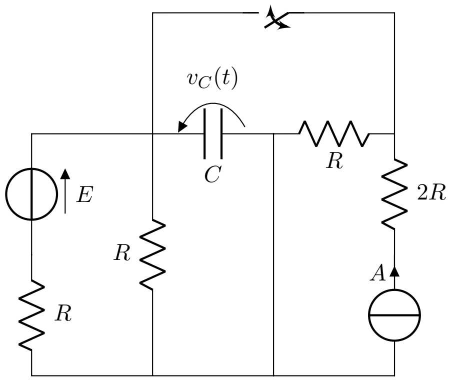
L'andamento temporale della corrente nei due transitori è:

$$i_L(t) = \begin{cases} 1\,\mathrm{A} & t < 0\ \mathrm{ms} \\ e^{-t/\tau_1}\,\mathrm{A} & t \geq 0 \wedge t \leq 5\ \mathrm{ms} \\ 1 - 0.81e^{-(t-t_1)/\tau_2}\,\mathrm{A} & t > 5\ \mathrm{ms} \end{cases} \tag{16}$$



Esercizio G.1.3

Dato il circuito in figura, da lungo tempo nella configurazione assegnata, determinare l'espressione analitica e l'andamento qualitativo della tensione $v_C(t)$ per $t > 0s$. L'interruttore si apre a $t_0 = 0s$ e si richiude a $t_1 = 20$ ms.
Esplicitare il valore delle condizioni iniziali $v_C(t_0^+)$, il valore asintotico del primo transitorio $v_C(\infty_1)$, le condizioni iniziali del secondo transitorio $v_C(t_1^+)$, le condizioni finali del secondo transitorio $v_C(\infty_2)$ e le costanti di tempo τ_1 e τ_2.

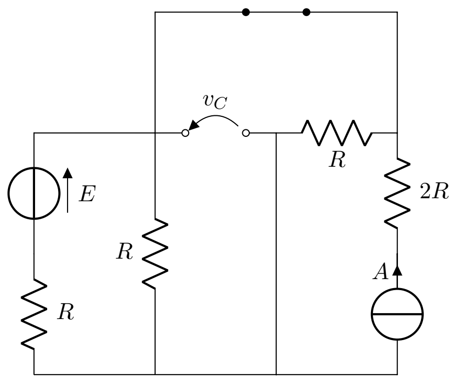


Dati:
$R = 40\ \Omega$
$E = 10\,\mathrm{V}$
$A = 5\,\mathrm{A}$
$C = 500\ \mu\mathrm{F}$

Risultati:
$v_C(t_0^+) = 70\,\mathrm{V}$
$v_C(\infty_1) = 5\,\mathrm{V}$
$v_C(t_1^+) = 13{,}8\,\mathrm{V}$
$v_C(\infty_2) = 70\,\mathrm{V}$
$\tau_1 = 10$ ms
$\tau_2 = 6{,}67$ ms

Soluzione:

La grandezza richiesta è una variabile di stato, conseguentemente sarà continua. Poiché l'interruttore effettua due movimenti, le condizioni prima del primo transitorio sono uguali alle condizioni finali del secondo:
Circuito a $t = t_0^-$ uguale al circuito a ∞_2:



Analizzando la rete, è possibile notare che è binodale e che la tensione richiesta è esattamente quella di Millman:

$$v_C(t_0^-) = v_C(\infty_2) = \frac{\dfrac{E}{R} + A}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R}} = 70\,\mathrm{V} \tag{17}$$

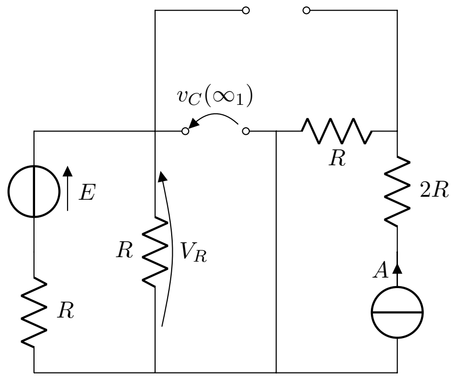
In questa configurazione è possibile calcolare la costante di tempo del secondo transitorio:

$$\tau_2 = C(R//R//R) = 6{,}67 \text{ ms} \tag{18}$$

Le **condizioni iniziali del primo transitorio** si calcolano per continuità:

$$v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-) \tag{19}$$

Il circuito delle **condizioni finali del primo transitorio** (∞_1) è:



Da una KVL:

$$v_C(\infty_1) = V_R \tag{20}$$

La tensione sul resistore si può calcolare con un partitore:

$$V_R = v_C(\infty_1) = \frac{E}{2} = 5\,\mathrm{V} \tag{21}$$

La costante di tempo vale:

$$\tau_1 = \frac{R}{2}C = 10 \text{ ms} \tag{22}$$

L'andamento della tensione per $0 < t < t_1$ è:

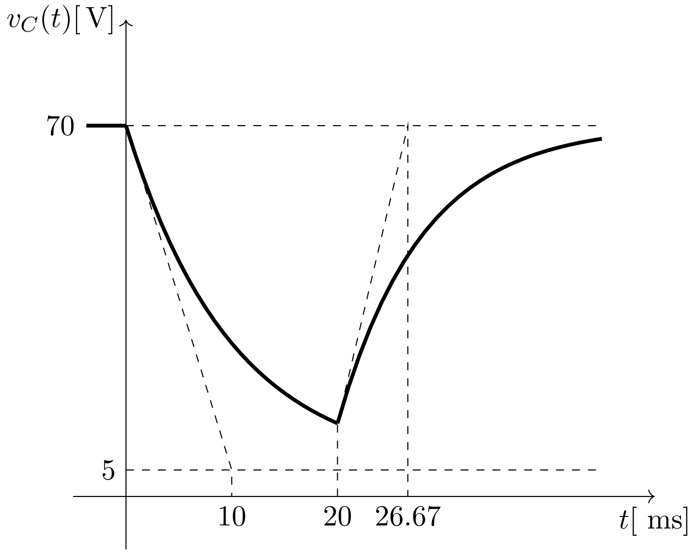
$$v_C(t) = 5 + 65e^{-100t} \tag{23}$$

Le **condizioni iniziali del secondo transitorio** si possono calcolare per continuità:

$$v_C(t_1^+) = v_C(t_1^-) = 5 + 65e^{-100t_1} = 13{,}8\,\mathrm{V} \tag{24}$$

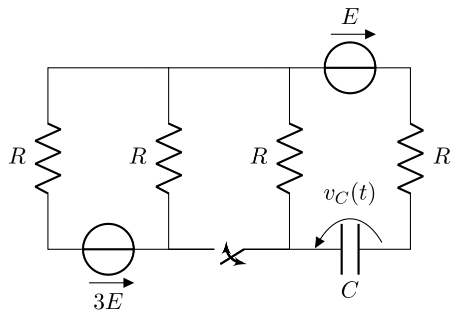
L'andamento temporale della tensione è:

$$v_C(t) = \begin{cases} 70\,\mathrm{V} & t < 0 \text{ ms} \\ 5 + 65e^{-100t}\,\mathrm{V} & t \geq 0 \wedge t < 20 \text{ ms} \\ 70 - 56{,}2e^{-150(t-0.02)}\,\mathrm{V} & t \geq 20 \text{ ms} \end{cases} \tag{25}$$



Esercizio G.1.4

Dato il circuito in figura, da lungo tempo nella configurazione assegnata, determinare l'espressione analitica e l'andamento qualitativo della tensione $v_C(t)$ per $t > 0s$. L'interruttore si chiude a $t_0 = 0s$ e si apre a $t_1 = 0{,}2s$. Esplicitare il valore delle costanti di tempo τ_1 e τ_2.
Calcolare, inoltre l'energia accumulata nel condensatore ai tempi t_0^+, t_1^+ e $t_2 = 5\text{s}$.

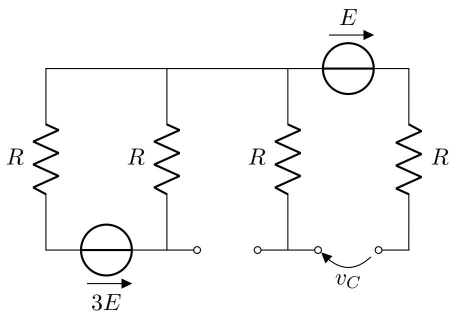


Dati:
$R = 15\ \Omega$
$E = 5\,\text{V}$
$C = 10\ \text{mF}$

Risultati:
$W_C(t_0^+) = 0{,}125\,\text{J}$
$W_C(t_1^+) = 16{,}9\,\text{mJ}$
$W_C(t_2) = 0{,}125\,\text{J}$
$\tau_1 = 0{,}2s$
$\tau_2 = 0{,}3s$

Soluzione:

Per prima cosa, è possibile semplificare la risoluzione dell'esercizio notando che le **condizioni prima del primo transitorio** coincidono con le **condizioni finali del secondo transitorio**:



Si vede subito che:

$$v_C(t_0^-) = v_C(\infty_2) = -E = -5\,\text{V} \tag{26}$$

La $R_{eq,2}$ e':

$$R_{eq,2} = 2R = 30\ \Omega \tag{27}$$

Quindi:

$$\tau_2 = CR_{eq,2} = 0{,}3\text{s} \tag{28}$$

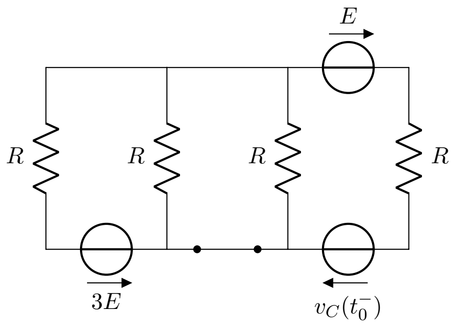
Si può vedere che t_2 si trova abbondantemente dopo $t_1 + 5\tau_2$, quindi:

$$v_C(t_2) \simeq v_C(\infty_2) \tag{29}$$

Quindi:

$$W_C(t_2) = \frac{1}{2}Cv_C(\infty_2)^2 = 0{,}125\,\text{J} \tag{30}$$

Le **condizioni iniziali del primo transitorio** si calcolano con il seguente circuito:

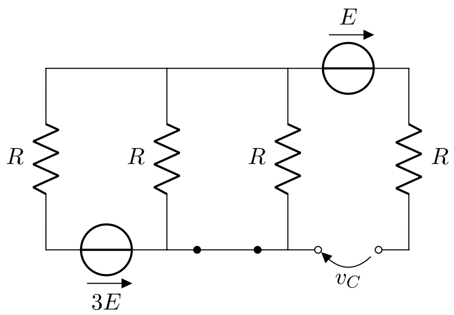


$$v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-) \tag{31}$$

Quindi:

$$W_C(t_0^+) = 0{,}125\,\mathrm{J} \tag{32}$$

Le **condizioni finali del primo transitorio** sono:



$$v_C(\infty_1) = 3E \cdot \frac{R/2}{3R/2} - E = 0V \tag{33}$$

La R_{eq} e':

$$R_{eq} = R + \frac{R}{3} = 20\Omega \tag{34}$$

Quindi:

$$\tau_1 = R_{eq}C = 0{,}2s \tag{35}$$

Si può calcolare il valore delle **condizioni iniziali del secondo transitorio** per continuità:
Il valore a $t = t_1$ è:

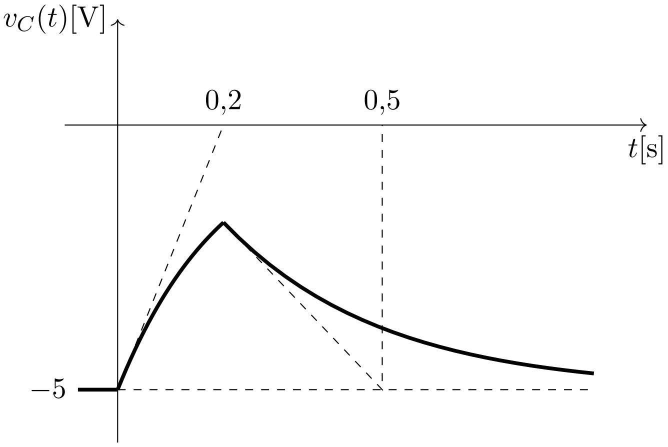
$$v_C(t_1^+) = v_C(t_1^-) = -5e^{-1} = -1.84V \tag{36}$$

Quindi:

$$W_C(t_1^+) = 16{,}9\,\mathrm{mJ} \tag{37}$$

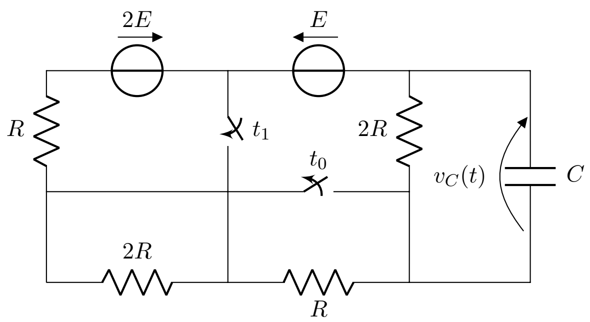
L'espressione analitica dell'andamento della tensione è:

$$v_C(t) = \begin{cases} -5\,\mathrm{V} & t < 0\mathrm{s} \\ -5e^{-t/\tau_1}\,\mathrm{V} & t \geq 0 \wedge t < 0{,}2\mathrm{s} \\ -5 + 3{,}16e^{-(t-0.2)/\tau_2}\,\mathrm{V} & t \geq 0{,}2\mathrm{s} \end{cases} \tag{38}$$



Esercizio G.1.5

Dato il circuito in figura, da lungo tempo nella configurazione assegnata, determinare l'espressione analitica e l'andamento qualitativo della tensione $v_C(t)$ per $t > 0s$. Si sa che $t_0 = 0s$ e $t_1 = 1{,}5$ ms. Esplicitare il valore delle condizioni iniziali $v_C(t_0^+)$, il valore asintotico del primo transitorio $v_C(\infty_1)$, le condizioni iniziali del secondo transitorio $v_C(t_1^+)$, le condizioni finali del secondo transitorio $v_C(\infty_2)$ e le costanti di tempo τ_1 e τ_2.

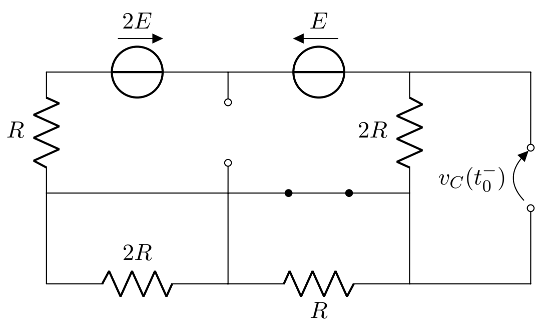


Dati:
$R = 5\ \Omega$
$E = 30\,\mathrm{V}$
$C = 0{,}1$ mF

Risultati:
$v_C(t_0^+) = 20\,\mathrm{V}$
$v_C(t_1^+) = 15{,}25\,\mathrm{V}$
$v_C(\infty_1) = 15\,\mathrm{V}$
$v_C(\infty_2) = -20\,\mathrm{V}$
$\tau_1 = 0{,}5$ ms
$\tau_2 = 0{,}33$ ms

Soluzione:

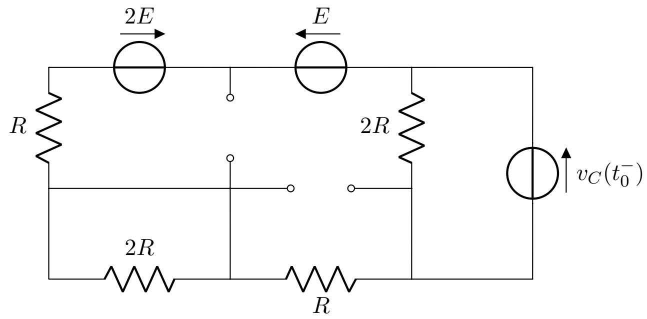
Per calcolare la variabile di stato nelle condizioni iniziali è necessario risolvere il **tempo** t_0^-:



La tensione sul condensatore si può calcolare con un partitore di tensione:

$$v_C(t_0^-) = \frac{2E}{3} = 20\,\mathrm{V} \tag{39}$$

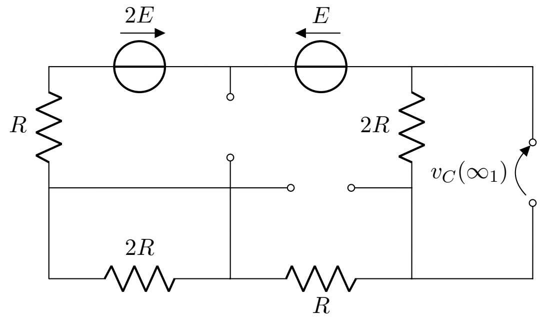
Il **circuito a** $t = t_0^+$ si risolve mediante continuità:



Per continuità:

$$v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-) \tag{40}$$

Le **condizioni finali del primo transitorio** sono:



Ancora una volta è possibile applicare un partitore di tensione:

$$v_C(\infty_1) = \frac{2E}{4} = 15\,\mathrm{V} \tag{41}$$

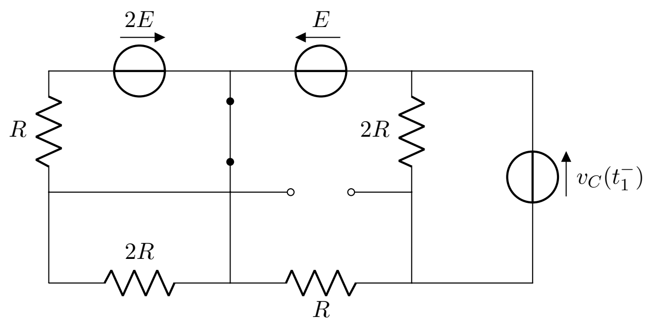
La costante di tempo del primo transitorio vale:

$$\tau_1 = R_{eq}C = 2R/\!/(R+R)C = 0{,}5\ \mathrm{ms} \tag{42}$$

Per calcolare **le condizioni iniziali del secondo transitorio** si può applicare la continuità:

$$v_C(t_1^-) = 15 + 5e^{-t/\tau_1} = 15{,}25\,\mathrm{V} \tag{43}$$

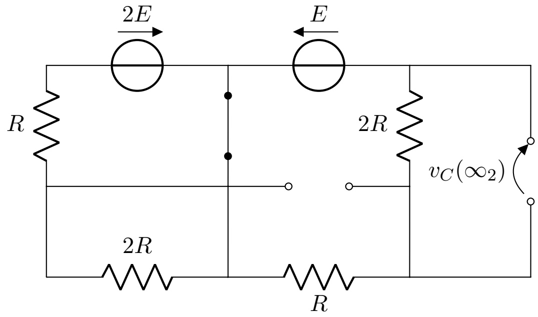
Quindi:



Per continuità:

$$v_C(t_1^+) = v_C(t_1^-) \tag{44}$$

Infine le **condizioni finali del secondo transitorio** sono:



Dal partitore di tensione:

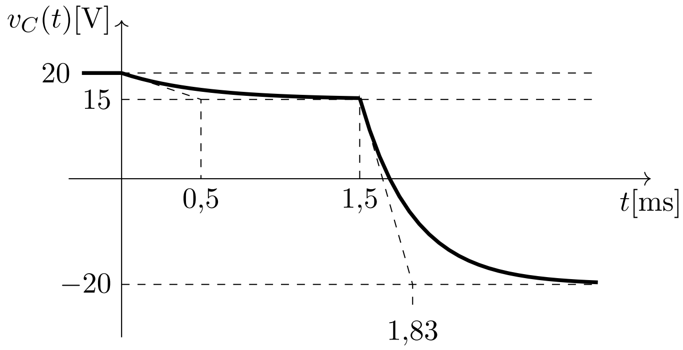
$$v_C(\infty_2) = -E\frac{2R}{3R} = -20\,\mathrm{V} \tag{45}$$

La costante di tempo è:

$$\tau_2 = R_{eq,2}C = 2R /\!/ R \cdot C = 0{,}33 \text{ ms} \tag{46}$$

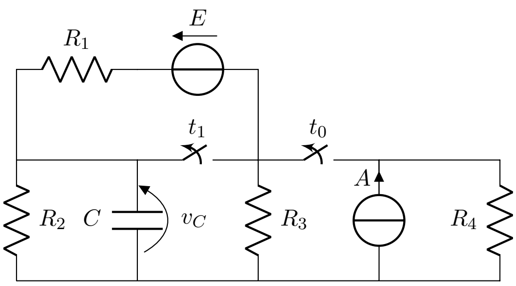
L'espressione analitica della tensione è:

$$v_C(t) = \begin{cases} 20\,\mathrm{V} & t < 0 \text{ ms} \\ 15 + 5e^{-t/\tau_1}\,\mathrm{V} & 0 < t < 1{,}5 \text{ ms} \\ -20 + 35{,}25e^{-t/\tau_2}\,\mathrm{V} & t > 1{,}5 \text{ ms} \end{cases} \tag{47}$$



Esercizio G.1.6

Dato il circuito in figura, sapendo che gli interruttori si aprono rispettivamente ai tempi $t_0 = 0s$ e $t_1 = 2{,}079s$, disegnare l'andamento temporale della tensione $v_C(t)$. Calcolare e riportare in maniera esplicita i valori della tensione alle condizioni iniziali del primo transitorio ($v_C(t_0^-)$) e del secondo ($v_C(t_1)$), il valore asintotico del primo transitorio ($v_C(\infty_1)$) e del secondo ($v_C(\infty_2)$) e le constanti di tempo del primo transitorio (τ_1) e del secondo (τ_2). Calcolare, infine, la potenza dissipata dal resistore R_1 al tempo $t^* = \tau_1/2$.



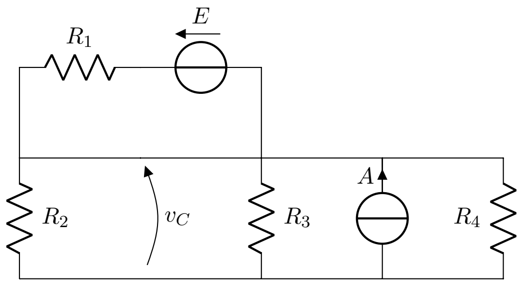
Dati:
$E = 64\,\mathrm{V}$
$A = 5\,\mathrm{A}$
$R_1 = 16\Omega$
$R_2 = R_3 = R_4 = 24\Omega$
$C = 83{,}4$ mF

Risultati:

$v_C(t_0^-) =$	$40\,\mathrm{V}$
$v_C(t_1) =$	$5\,\mathrm{V}$
$v_C(\infty_1) =$	$0\,\mathrm{V}$
$v_C(\infty_2) =$	$24\,\mathrm{V}$
$\tau_1 =$	$1s$
$\tau_2 =$	$1{,}25s$
$P_{R_1}(t^*) =$	$256\,\mathrm{W}$

Soluzione:

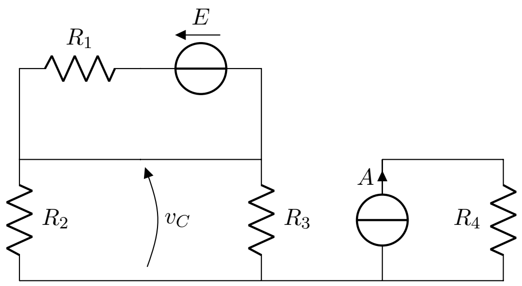
Rete per $t < 0s$



Sdoppiando il corto circuito, si vede che la coppia R_1 ed E non contribuisce alla tensione sul condensatore.
Quindi, da un partitore di corrente:

$$v_C(t_0^-) = R_2 \cdot \frac{A}{3} = 40V \tag{48}$$

Rete a $t = +\infty_1$



Facilmente si vede che:

$$v_C(\infty_1) = 0V \tag{49}$$

La costante di tempo vale:

$$\tau = \frac{R_2}{2}C = 1s \tag{50}$$

Quindi:

$$v_C(t) = 40e^{-t} \tag{51}$$

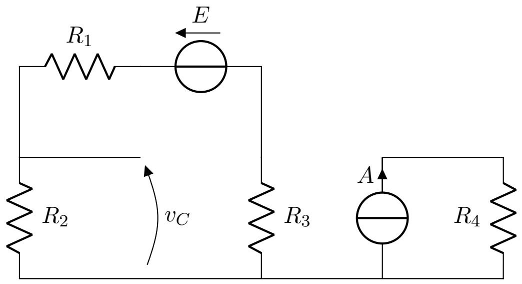
La potenza dissipata da R_1 non dipende dal tempo:

$$P_{R_1} = \frac{E^2}{R_1} = 256\,\mathrm{W} \tag{52}$$

Infine:

$$v_C(t_1) = 5V \tag{53}$$

Rete a $t = +\infty_1$



Da un partitore di tensione si ottiene:

$$v_C(\infty_2) = E\frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_1} = 24V \tag{54}$$

La costante di tempo vale:

$$\tau = (R_2//(R_1 + R_3))C = 1{,}25s \tag{55}$$