

# Circuiti Elettrici

## Capitolo 5

# Condensatori e induttori (bipoli dinamici)



Prof. Cesare Svelto

# Condensatori e induttori – Cap. 5

5.1 Condensatori

Circuito derivatore e integratore

5.2 Condensatori in serie e in parallelo

5.3 Induttore

5.4 Induttori in serie e in parallelo

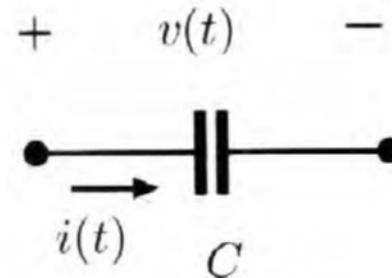
# 5.1 Condensatore

- Il **condensatore** è un bipolo dinamico e lineare con equazione caratteristica:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad i = C \dot{v}$$

corrente linearmente legata, con costante  $C$ , alla derivata della tensione

- Corrente e tensione con versi coordinati (convenzione utilizzatori). **Simbolo**



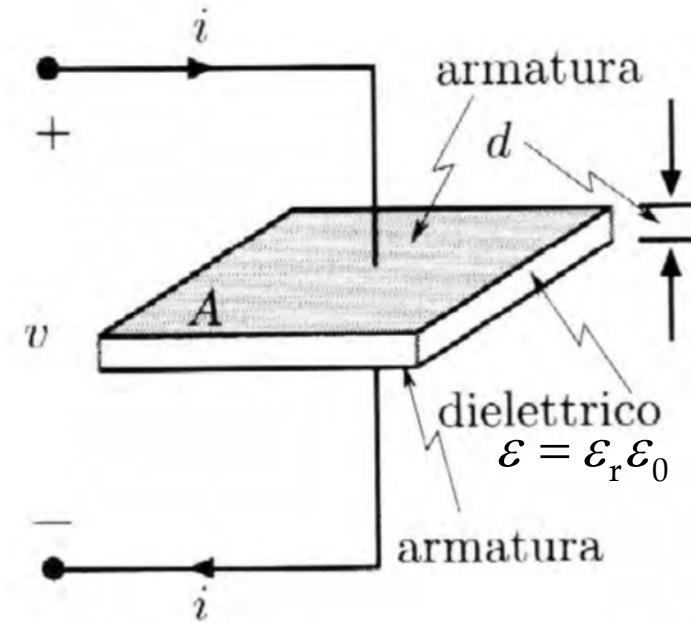
- $C (>0)$  è la **capacità** misurata in **farad (F)**

$$1 \text{ F} = 1 \text{ A}/(\text{V/s}) = 1 \text{ A}\cdot\text{s}/\text{V} = 1 \text{ C/V} = 1 \Omega^{-1}\cdot\text{s} = 1 \text{ S}\cdot\text{s}$$

val. tipici  
 $\mu\text{F}$ ,  $\text{nF}$ ,  $\text{pF}$

# 5.1 Condensatore

- Il condensatore lineare è un elemento ideale ma esistono dispositivi fisici con comportamento simile (e.g. condensatore a facce piane e parallele)
- Carica  $q$  accumulata sulle armature è linearmente legata alla tensione  $v$  applicata:



$$q = C v$$

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{q}{v}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d[Cv]}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$

che è l'**equazione caratteristica**

# 5.1 Costante dielettrica

- La **costante dielettrica** del vuoto è  
 $\epsilon_0 = 8.8 \dots \times 10^{-12} \text{ F/m}$
- I materiali hanno **costante dielettrica relativa**  $\epsilon_r$

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

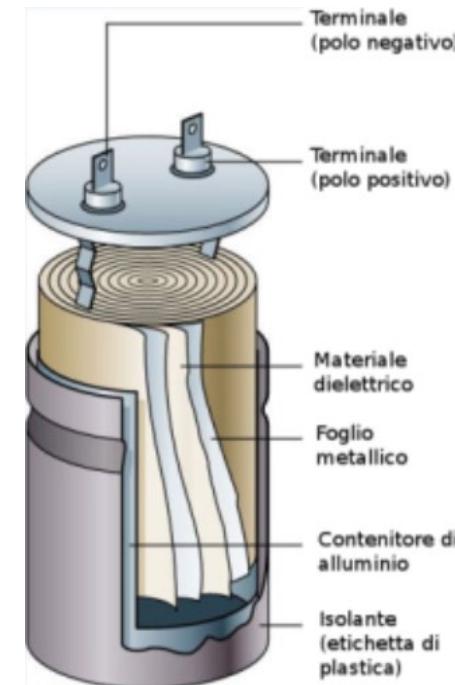
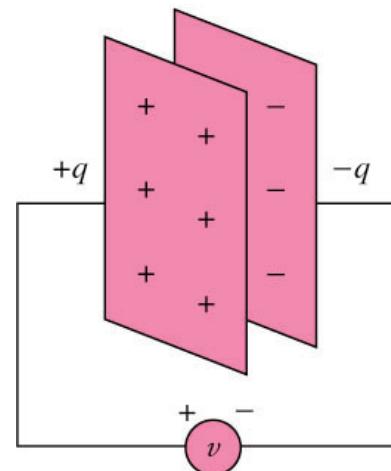
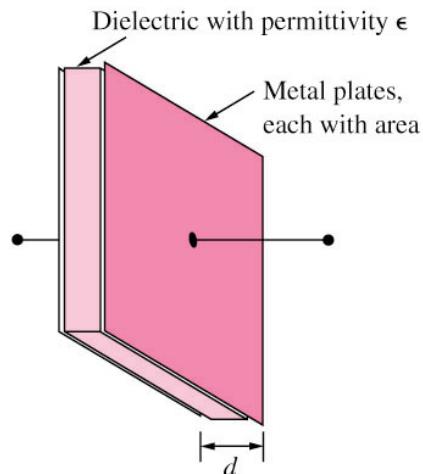
Tabella 6.1 – Costante dielettrica relativa di alcuni materiali

Materiale	Costante dielettrica $\epsilon_r$
Aria secca (1 atm)	$\approx 1$
Vetro	4-10
Carta	3,5
Mica	5,5
Polistirolo	2,5
Teflon	2,0
Porcellana	6,5

- Valori  $C$  nei circuiti da qualche pF a qualche mF

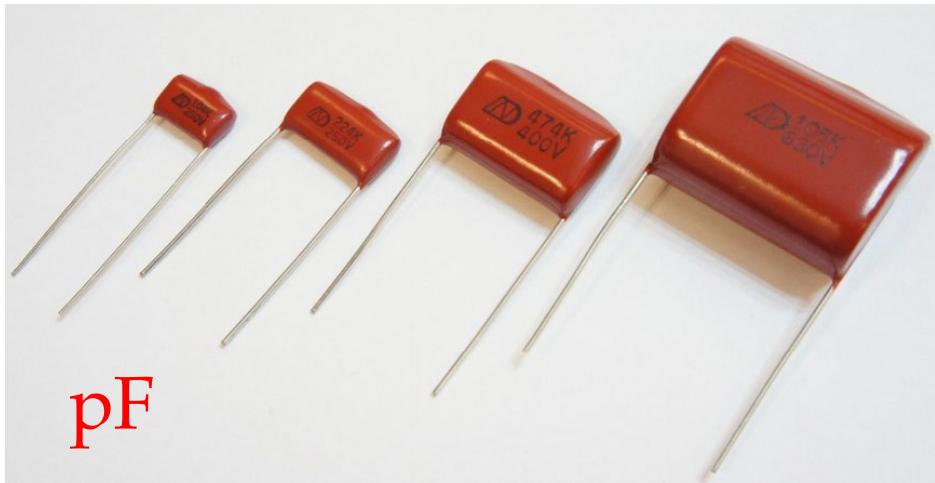
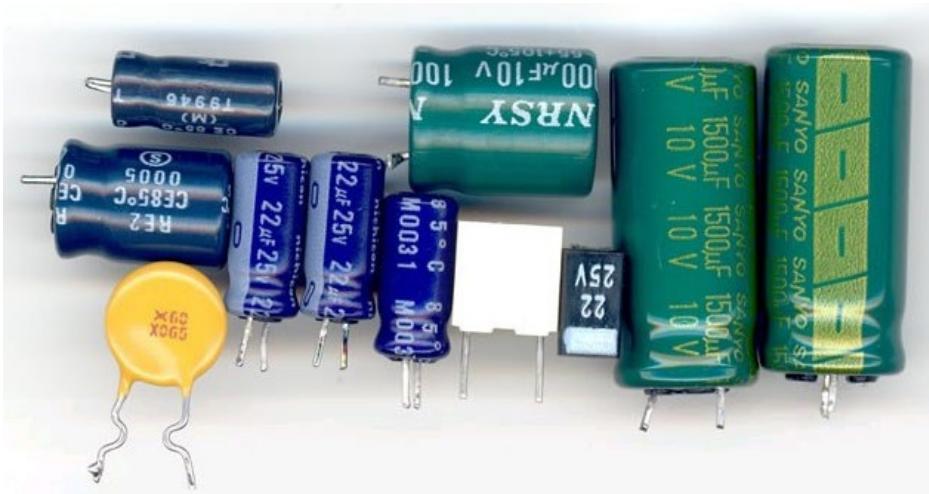
# 5.1 Aumento della capacità C

- Il **condensatore** consiste di due **armature conduttrive** separate da un isolante (o **dielettrico**). Le armature possono anche essere “avvolte” per aumentare la superficie affacciata e quindi C

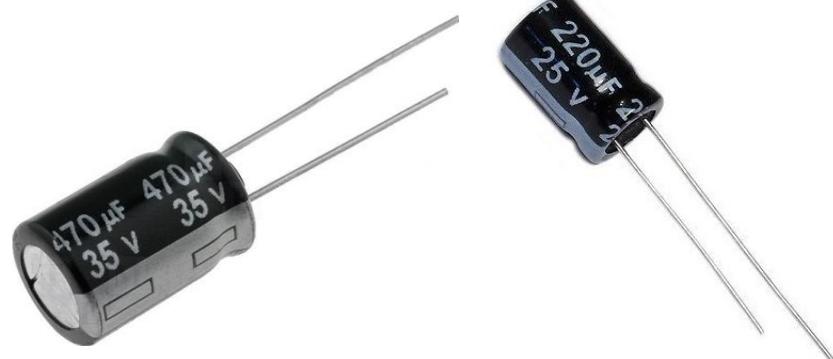


- Un **condensatore** è un **elemento passivo** che (come vedremo) può immagazzinare energia nel suo campo elettrico

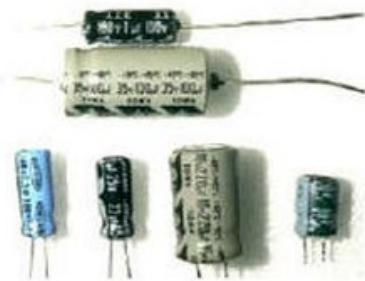
# 5.1 Immagini di condensatori



pF



Condensatori elettrolitici



Condensatori elettrolitici al tantalio



Condensatori ceramici



Condensatori poliestere



# 5.1 Tensione come integrale di corrente

- Partendo dalla relazione costitutiva (eq. caratteristica)

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$

relazione cost. in  
forma differenziale

ricaviamo la **tensione in forma differenziale**

$$dv = \frac{1}{C} i dt$$

e **integrando**

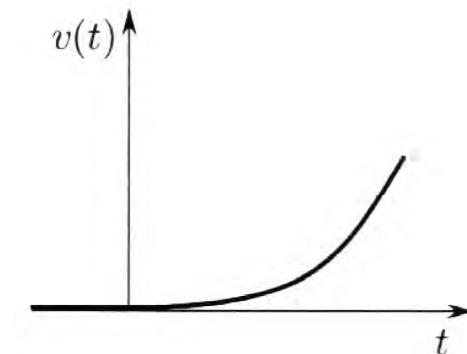
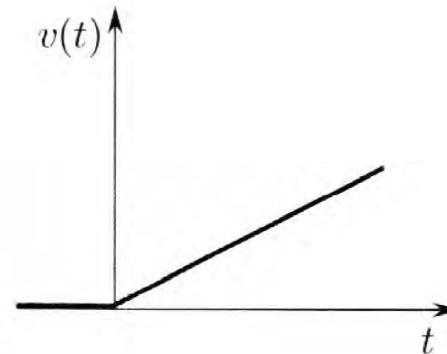
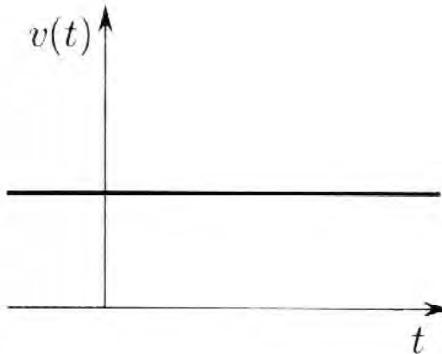
$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t') dt'$$

relazione cost. in  
forma integrale

La tensione al tempo  $t$  non dipende solo dalla corrente in  $t$  ma anche dalla **storia precedente** della corrente (tra  $t_0$  e  $t$ ) e da un valore iniziale  $v(t_0)$ : **C è un elemento con memoria**

# 5.1 Andamenti tensione – corrente in C

**Tensione nel condensatore come integrale della corrente**

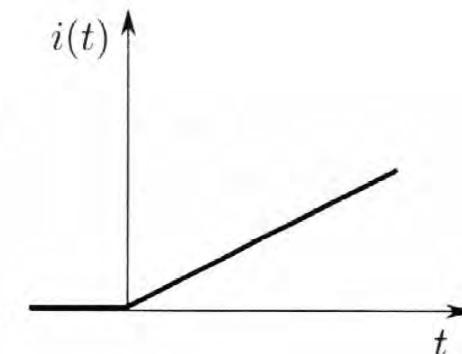
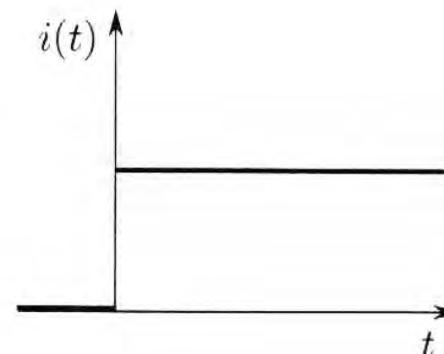
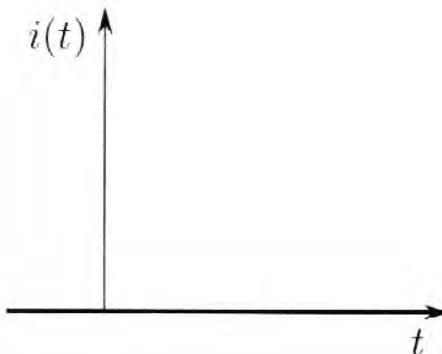


(a)

(b)

(c)

**Corrente nel condensatore come derivata della corrente**



# 5.1 Esempio sul condensatore

## Esempio 6.1

La tensione tra i terminali di un condensatore di capacità  $5 \mu\text{F}$  ha l'andamento in Figura 6.4a. Disegnare l'andamento della corrente nel condensatore.

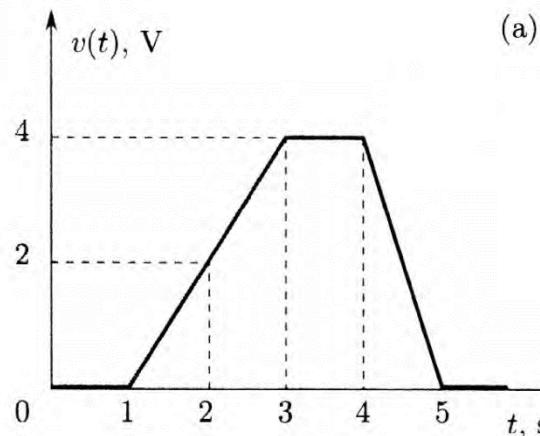
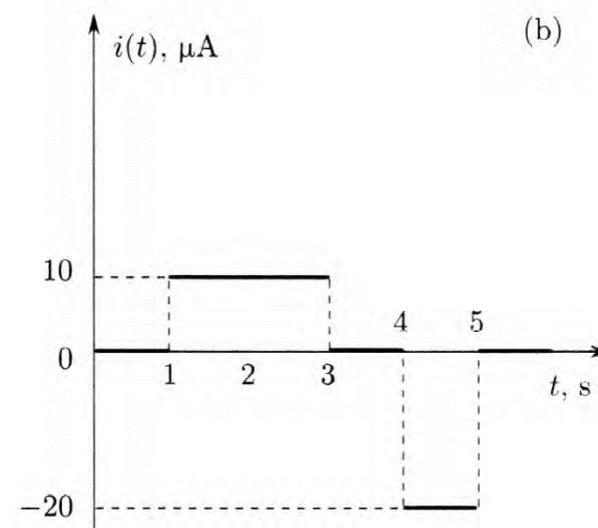


Figura 6.4



## Soluzione

La corrente vale

$$i(t) = C \frac{dv}{dt} = 5 \times 10^{-6} \frac{dv}{dt} = 5 \frac{dv}{dt} \mu\text{A}$$

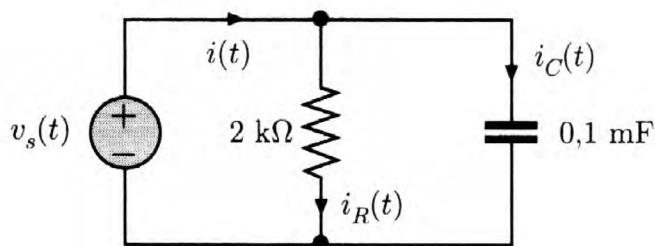
L'andamento in funzione del tempo è riportato in Figura 6.4b.

# 5.1 Esempio sul condensatore

## Esempio 6.2

Nel circuito in Figura 6.5 determinare il valore di  $i(t)$ , se  $v_s(t) = \cos(10t)$  V.

Figura 6.5



## Soluzione

Con la LKC abbiamo:

$$i = i_R + i_C$$

La corrente nel resistore è

$$i_R(t) = \frac{v_s(t)}{R} = 0,5 \cos(10t) \text{ mA.}$$

La corrente nel condensatore vale:

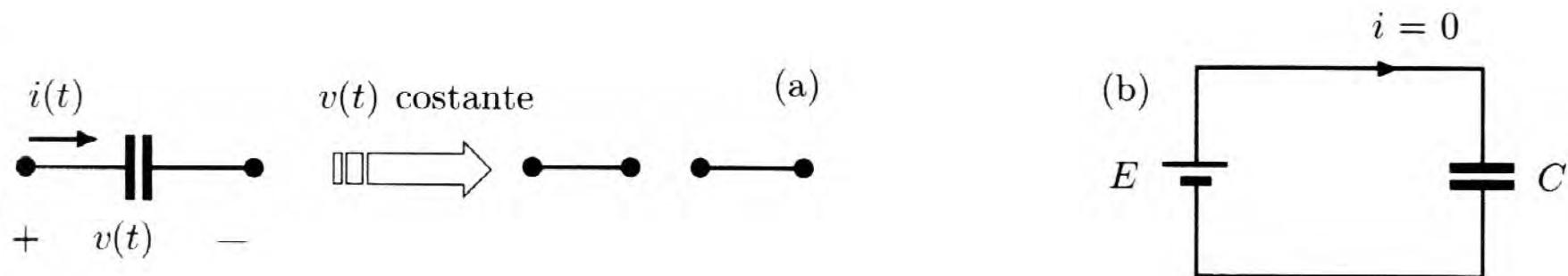
$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \frac{dv_s}{dt} = 10^{-4} \times (-10) \sin(10t) = \\ &= -\sin(10t) \text{ mA} \end{aligned}$$

Pertanto

$$i(t) = [0,5 \cos(10t) - \sin(10t)] \text{ mA}$$

# 5.1 Proprietà del condensatore

- Quando la **tensione è costante**, il condensatore equivale a un **circuito aperto ( $i=0$ )**

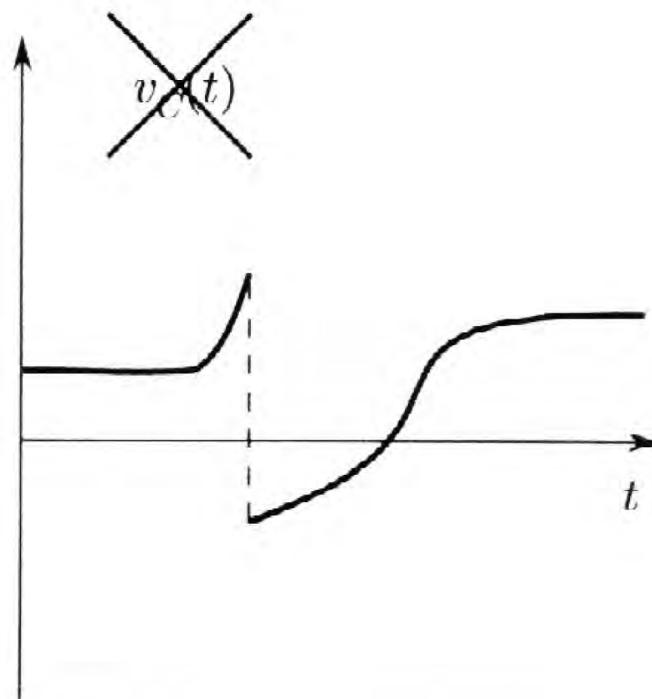


dalla equaz. caratt.  $i=Cdv/dt$   
se  $v=\text{cost.} \Rightarrow dv/dt=0 \Rightarrow i=0$  (c.a.)

in base al valore di carica  $q$  (qualsiasi) accumulata nel condensatore, si ha una tensione  $v$  (qualsiasi)  $\rightarrow$  circ.eq. in regime stazionario, con  $dv/dt=0$  è un gen.tens.cost. con  $i=0$

# 5.1 Proprietà del condensatore

- La **tensione del condensatore è continua** (non fa salti)  
E' una variabile di stato (che consente di descrivere l'andamento del sistema in assenza di azioni esterne)

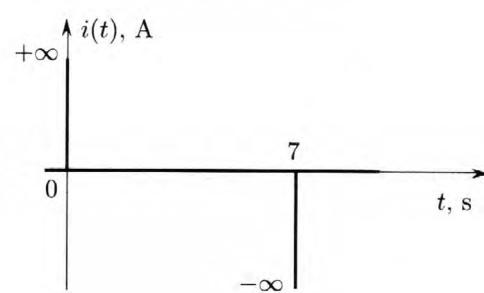
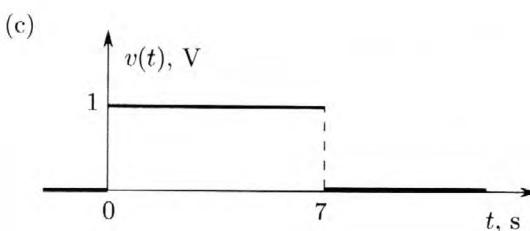
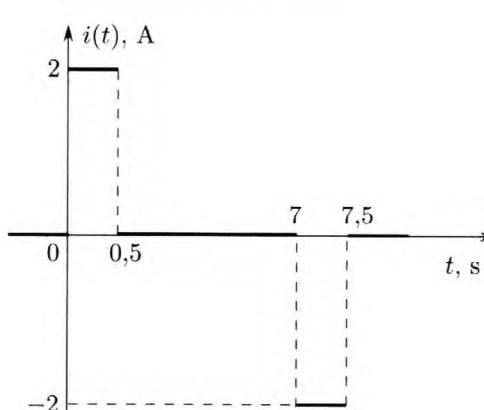
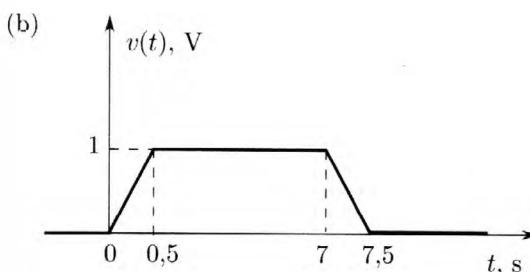
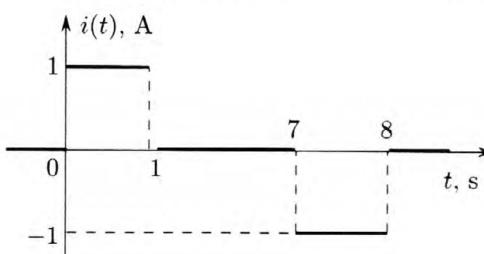
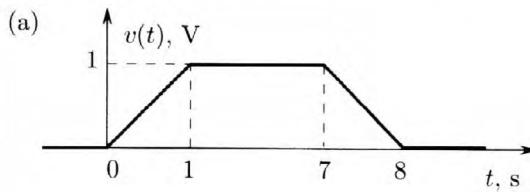


Per avere un salto "istantaneo"  
della tensione, occorrerebbe  
una corrente infinita e dunque  
una potenza infinita

Il condensatore si oppone alle variazioni brusche di tensione

# 5.1 Proprietà del condensatore

- La corrente  $i(t)$  è la pendenza della funzione  $v(t)$



Quando  $v$  varia linearmente  $i$  è costante (se  $i$  non varia  $v$  è 0)

Per avere un salto di tensione occorrerebbe corrente infinita e dunque potenza infinita nel circuito reale (!!?)

# 5.1 Proprietà del condensatore

- Il condensatore non dissipa energia (né la genera: bipolo passivo) ma può immagazzinarla (o cederla)  
potenza istantanea assorbita dal condensatore

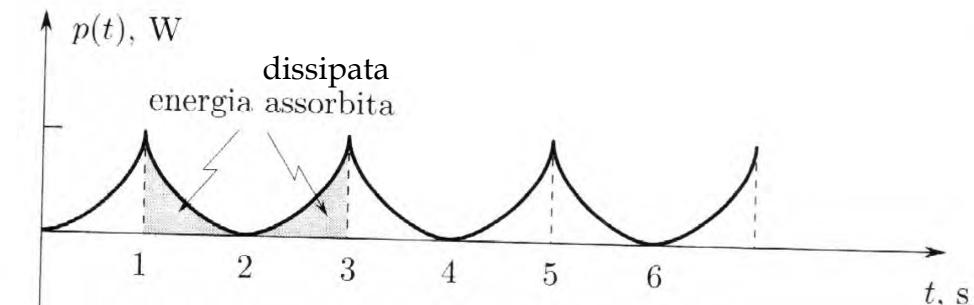
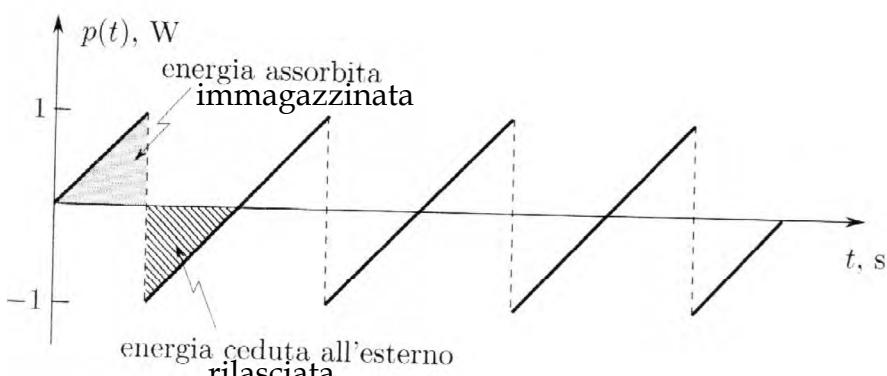
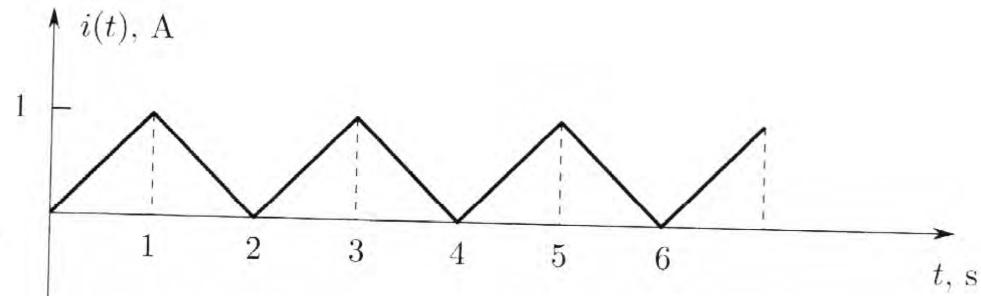
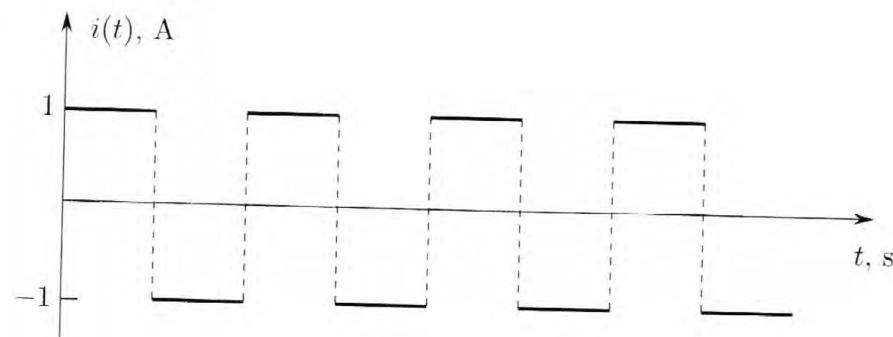
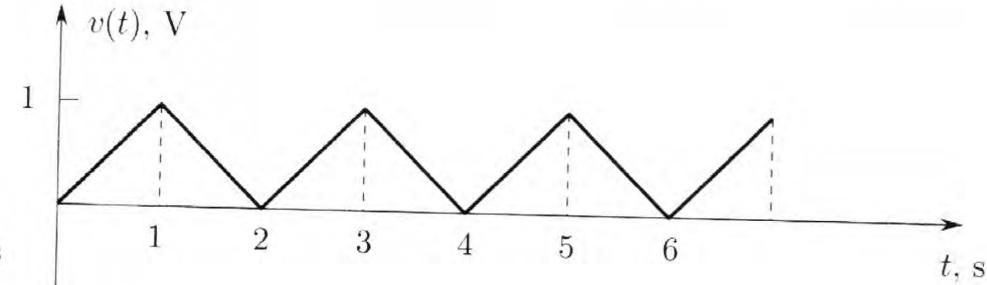
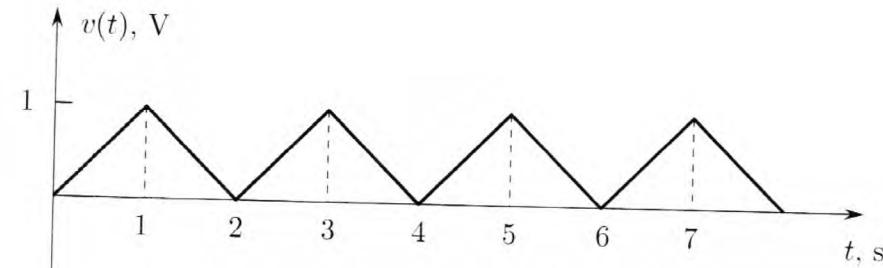
$$p(t) = v(t) i(t)$$

Se tensione e corrente sono periodiche la potenza in un periodo  $T$  è sempre nulla e così pure è circa zero la potenza media dissipata nel lungo periodo (su un tempo  $\Delta t \gg T$ ).

Invece all'interno di un periodo (o comunque su  $\Delta t < T$ ) la potenza può essere non nulla e con  $p > 0$  o anche  $p < 0$

Ci saranno parti del periodo in cui l'energia è assorbita (immagazzinata nel condensatore) e parti del periodo in cui l'energia, immagazzinata nel C, è ceduta al circuito

# 5.1 Potenza con tensione periodica



**Condensatore**  $i=Cdv/dt$  ( $C=1\text{ F}$ )

**Resistore**  $i=v/R$  ( $R=1\text{ }\Omega$ )

# 5.1 Proprietà del condensatore

- Nel **condensatore** non si ha perdita di energia (dissipazione): **elemento senza perdite**.  
Tuttavia non si può avere generazione netta di energia e dunque anche il **condensatore** (non dissipativo), come già il resistore (dissipativo), è un **elemento passivo**
- Energia assorbita in un intervallo di tempo generico

$$\begin{aligned}\Delta E(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = C \int_{t_1}^{t_2} v \frac{dv}{dt} dt = C \int_{v(t_1)}^{v(t_2)} v dv \\ &= \frac{1}{2} C [v^2(t_2) - v^2(t_1)] = E_2 - E_1\end{aligned}$$

L'energia nel condensatore dipende solo dalla tensione (var. di stato)

$$E_C = \frac{1}{2} C v^2$$

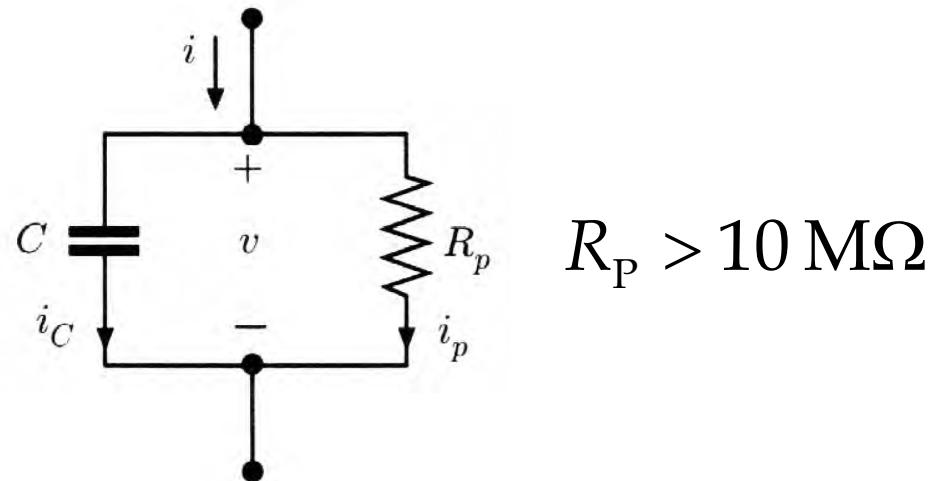
# 5.1 Condensatore reale

- In realtà, il dielettrico dissipa energia nel tempo con una potenza  $p \propto v^2$
- Un modello del **condensatore reale** aggiunge una resistenza  $R_p$  (grande) in parallelo a  $C$   
La caratteristica del condensatore reale è dunque:

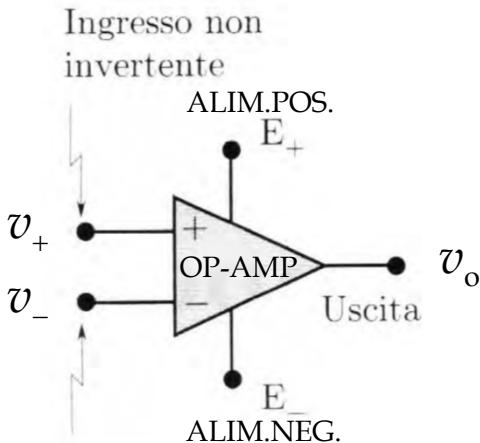
$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_s}$$

parte non-dissipativa  
(ideale)

parte dissipativa  
(reale)



# “Super-sunto” sull'OP-AMP ideale



$$v_d = v_+ - v_- \text{ tensione differenziale (d'ingresso)}$$

$$v_o = A \cdot v_d \text{ tensione d'uscita}$$

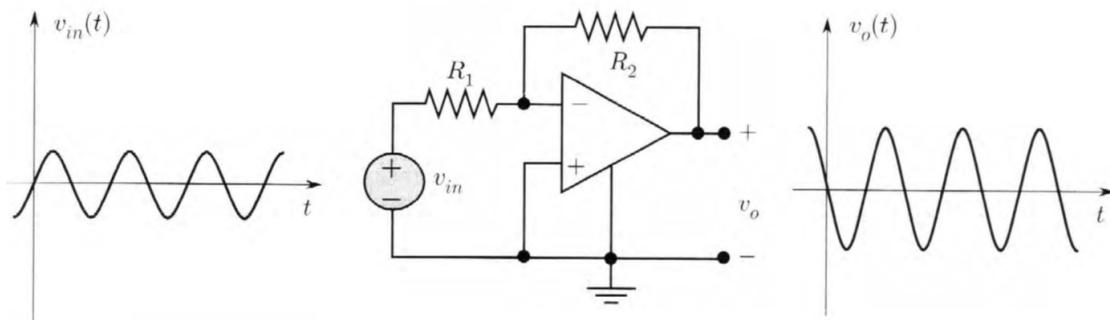
$A \rightarrow \infty$  guadagno (in anello aperto)

Ingresso invertente deve essere  $v_+ \approx v_-$  o altrimenti  $v_o \rightarrow \infty$

nella pratica  $A$  è grande ma finito e quando

$v_+ \neq v_- \Rightarrow v_o = E_+$  (se  $v_+ > v_-$ ) o  $E_-$  (se  $v_+ < v_-$ )  $\Rightarrow$  **COMPARATORE**

OP-AMP in configurazione **invertente**



guadagno

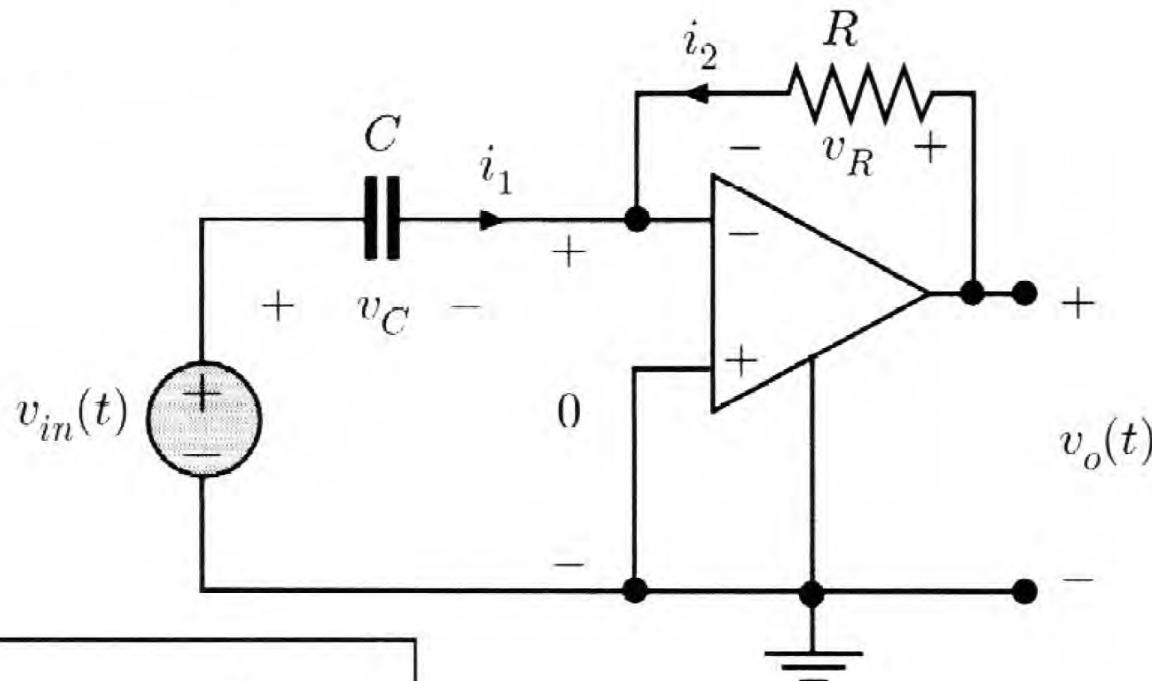
$$G = \frac{v_o}{v_{in}} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

# Circuito derivatore

$$i_1 = C \frac{dv_{in}}{dt}$$

$$i_2 = \frac{v_o}{R}$$

$$i_2 + i_1 = 0$$



$$v_o = -RC \frac{dv_{in}}{dt}$$

La tensione di uscita è proporzionale *alla derivata della tensione di ingresso* (col segno cambiato).

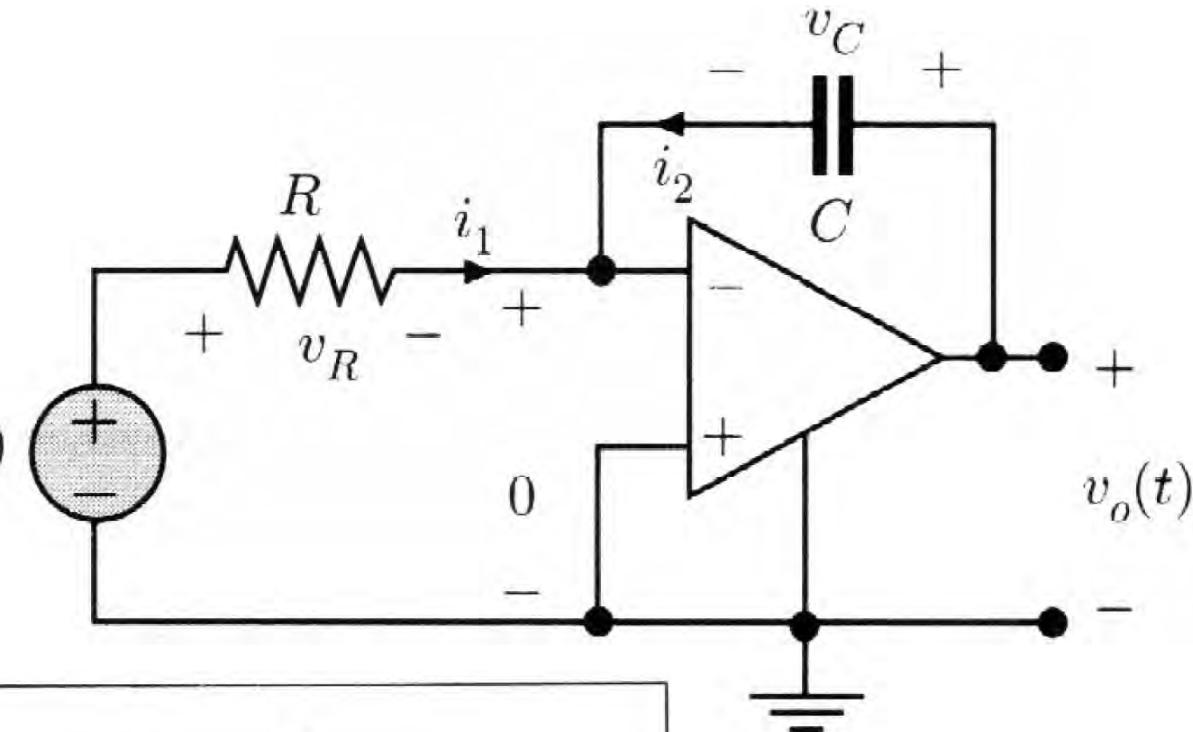
# Circuito integratore

$$i_1 = \frac{v_{\text{in}}}{R}$$

$$i_2 = C \frac{dv_o}{dt}$$

$$i_1 + i_2 = 0$$

$$\frac{dv_o}{dt} = -\frac{1}{RC} v_{\text{in}}$$

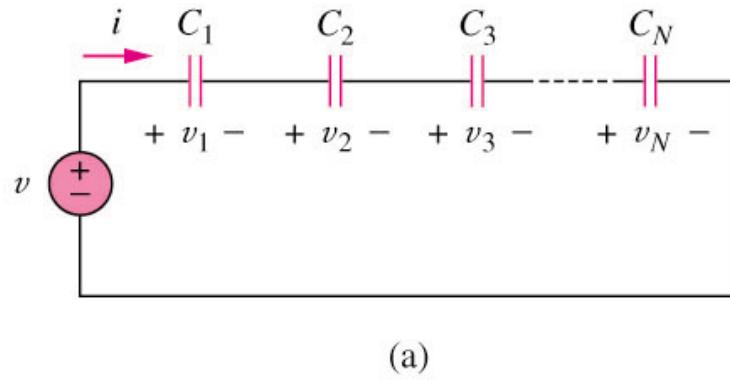


$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_{\text{in}}(x) dx + v_o(0)$$

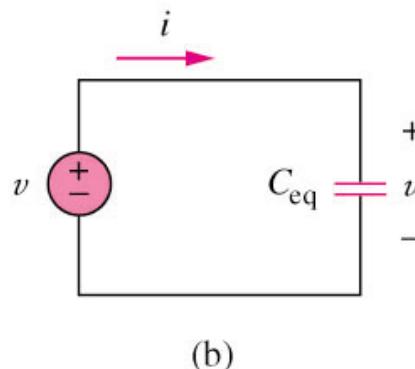
La tensione di uscita è proporzionale all'integrale della tensione di ingresso (col segno cambiato).

## 5.2 Condensatori in serie

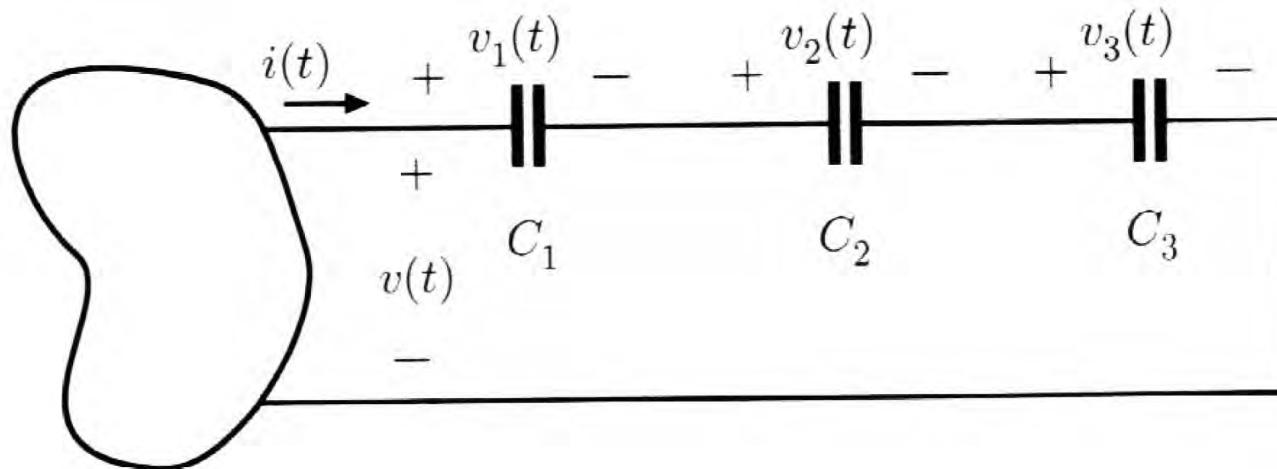
- La capacità equiv. di  $N$  **condensatori in serie** è il reciproco della somma dei reciproci delle singole capacità (analogo dei resistori in parallelo)



$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}$$



## 5.2 Capacità serie $C_S$



Dalla relazione costitutiva in forma integrale:

$$\begin{aligned}v(t) &= v_1(t_0) + \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^t i(x)dx + v_2(t_0) + \frac{1}{C_2} \int_{t_0}^t i(x)dx + v_3(t_0) + \frac{1}{C_3} \int_{t_0}^t i(x)dx = \\&= v_1(t_0) + v_2(t_0) + v_3(t_0) + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \int_{t_0}^t i(x)dx\end{aligned}$$

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C_s} \int_{t_0}^t i(x)dx \Rightarrow \frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

## 5.2 Capacità serie $C_S$

In generale la capacità ottenuta dalla serie di  $N$  condensatori di valori  $C_k$  è dunque:

$$\frac{1}{C_S} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{C_k}$$

e risulta inferiore alla più piccola delle capacità

In particolare per due sole capacità  $C_1$  e  $C_2$  in serie:

$$C_S = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

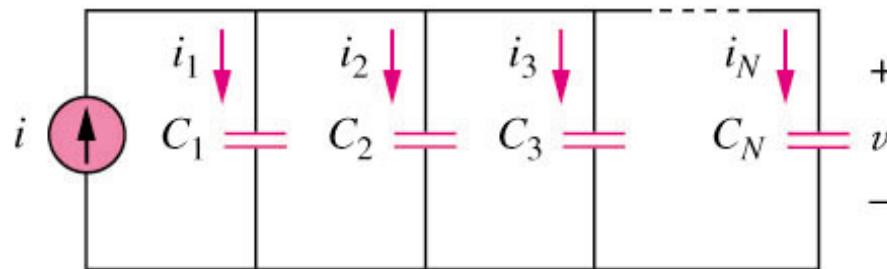
prodotto diviso la somma delle due capacità

e se poi  $C_1 = C_2 = C$  allora  $C_S = C/2$

( come per due R in parallelo )

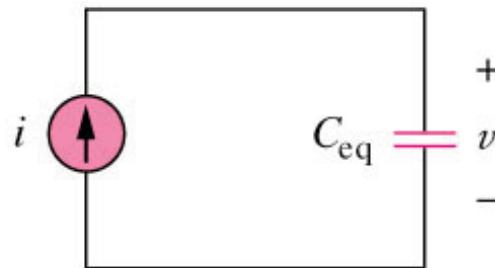
## 5.2 Condensatori in parallelo

- La capacità equiv. di  $N$  **condensatori in parallelo** è la somma delle singole capacità.



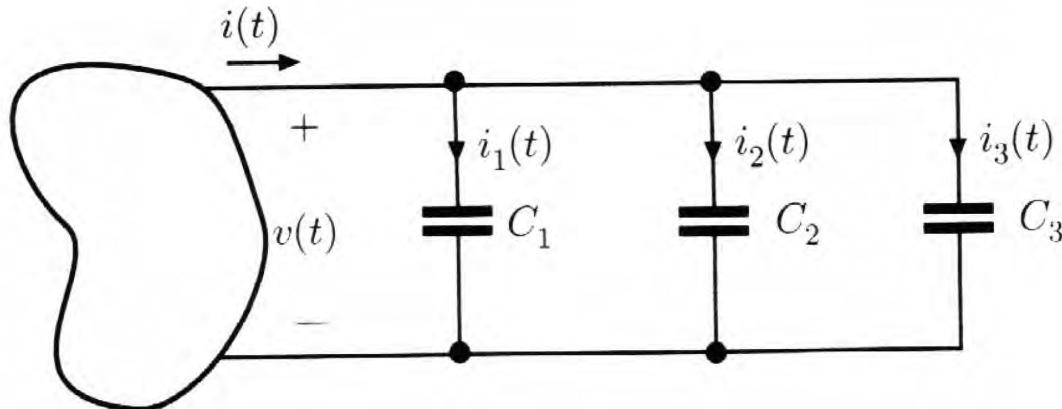
(a)

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$



(b)

## 5.2 Capacità parallelo $C_P$



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

KCL al nodo superiore

Dalla relazione costitutiva in forma differenziale:

$$i(t) = C_1 \frac{dv(t)}{dt} + C_2 \frac{dv(t)}{dt} + C_3 \frac{dv(t)}{dt} = (C_1 + C_2 + C_3) \frac{dv(t)}{dt}$$

$$C_P = (C_1 + C_2 + C_3)$$

La capacità del parallelo di  $N$  condensatori  $C_k$  è:

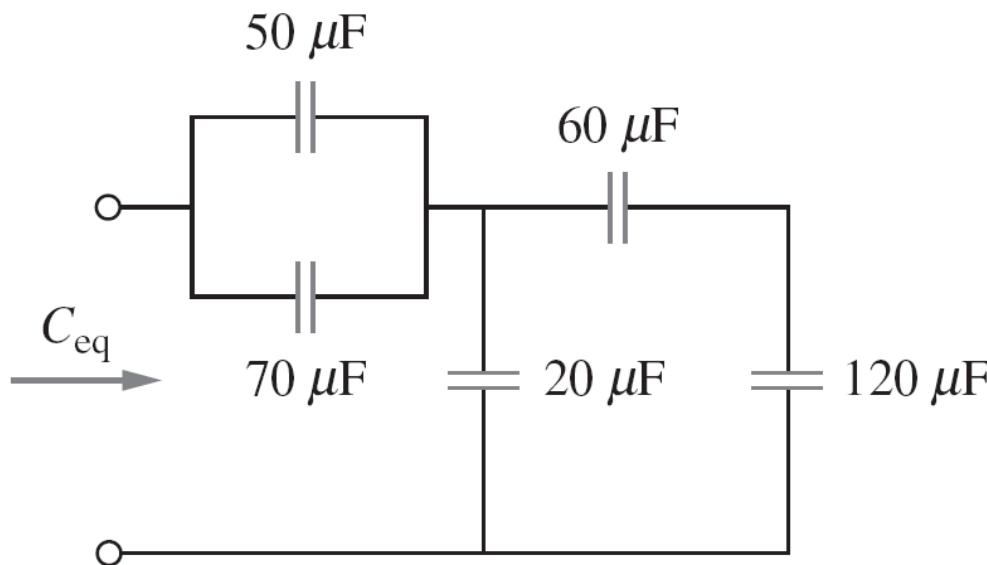
$$C_P = \sum_{k=1}^N C_k$$

è sempre maggiore  
della capacità più grande

# 5.2 Condensatori in serie e parallelo

## Example 3

Find the equivalent capacitance seen at the terminals of the circuit in the circuit shown below:



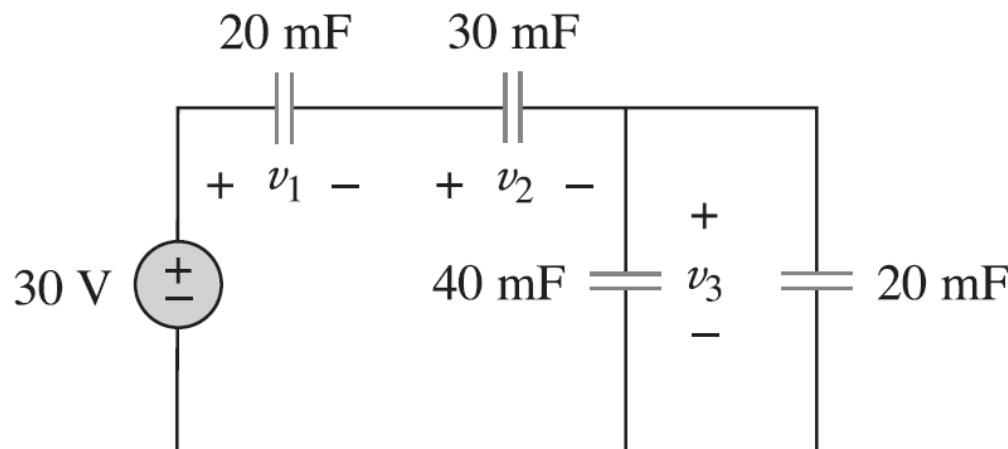
**Answer:**

$$C_{\text{eq}} = 40 \mu\text{F}$$

# 5.2 Condensatori in serie e parallelo

## Example 4

Find the voltage across each of the capacitors in the circuit shown below:



**Answer:**

$$v_1 = 15 \text{ V}$$

$$v_2 = 10 \text{ V}$$

$$v_3 = 5 \text{ V}$$

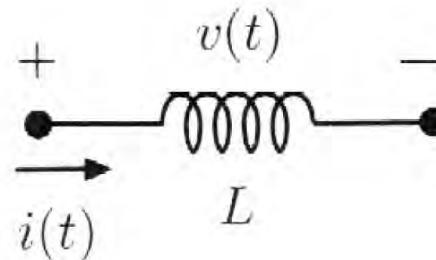
## 5.3 Induttore

- L'**induttore** è un bipolo dinamico e lineare con equazione caratteristica:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad v = L \dot{i}$$

tensione linearmente legata, con costante  $L$ , alla derivata della corrente

- Corrente e tensione con versi coordinati (convenzione utilizzatori). **Simbolo**



- $L (>0)$  è la **induttanza** misurata in henry (H)

$$1 \text{ H} = 1 \text{ V/(A/s)} = 1 (\text{V/A}) \cdot \text{s} = 1 \Omega \cdot \text{s} = 1 \text{ s/S}$$

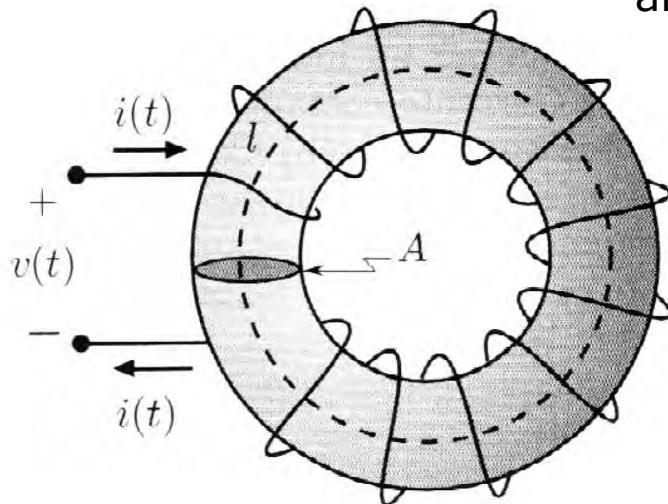
val. tipici  
mH,  $\mu\text{H}$

## 5.3 Induttore

- L'induttore lineare è un elemento ideale ma esistono dispositivo fisici con comportamento simile (e.g. induttore toroidale a filo avvolto)
- Flusso  $\varphi(t)$  di induzione magnetica concatenato con l'avvolgimento è linearmente legato alla corrente  $i$ :

$$\varphi(t) = L i(t)$$

analogo di  $q = Cv$

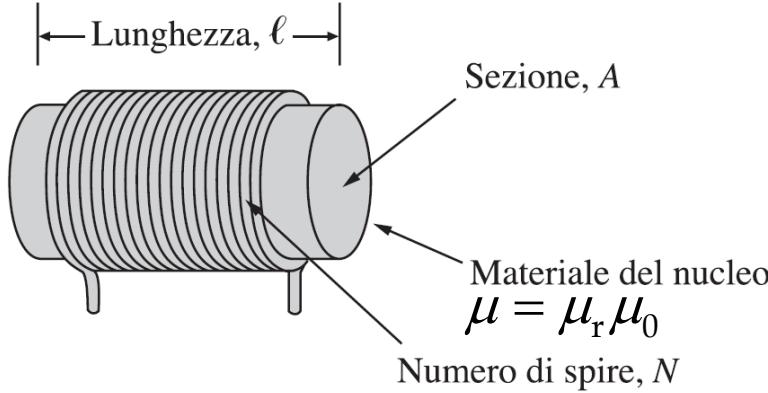


induttore toroidale a filo avvolto  $N$  volte e con lunghezza  $l$

il flusso magnetico concatenato attraversa la superficie  $A$

## 5.3 Induttore

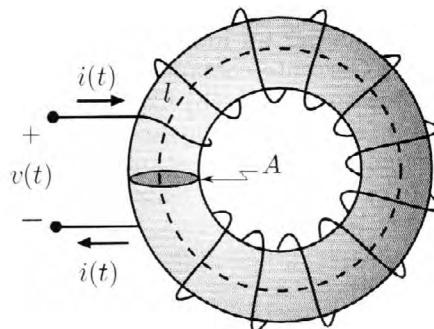
- Variazione nel tempo di  $\varphi(t)$  induce una tensione tra i morsetti (legge di Faraday)



$$v(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{d[Li(t)]}{dt} = L \frac{di(t)}{dt}$$

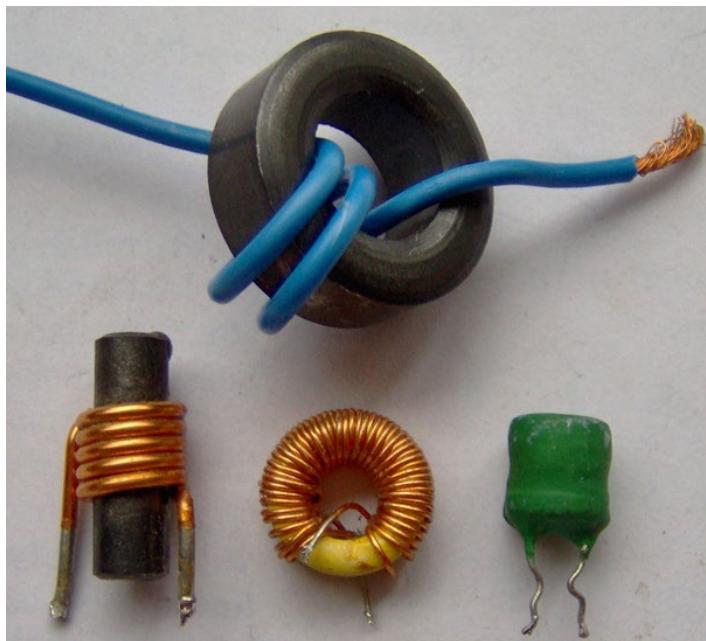
che è l'**equazione caratteristica**



$$L = \mu_r \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \quad \text{per induttore toroidale}$$

permeabilità magnetica del vuoto  $\mu_0 = 1.2 \dots \times 10^{-6}$  H/m

## 5.3 Immagini di induttori



## 5.3 Corrente come integrale di tensione

- Partendo dalla relazione costitutiva (eq. caratteristica)

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

relazione cost. in  
forma differenziale

ricaviamo la corrente in forma differenziale

$$di = \frac{1}{L} v dt$$

e integrando

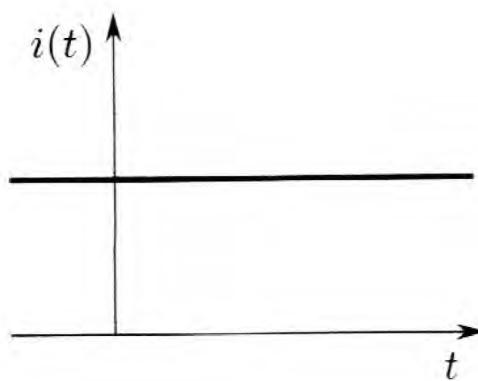
$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

relazione cost. in  
forma integrale

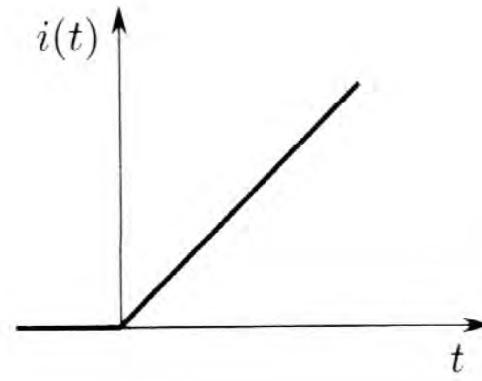
La corrente al tempo  $t$  non dipende solo dalla tensione in  $t$  ma anche dalla storia precedente della tensione (tra  $t_0$  e  $t$ ) e da un valore iniziale  $i(t_0)$ :  $L$  è un elemento con memoria

## 5.3 Andamenti corrente – tensione in $L$

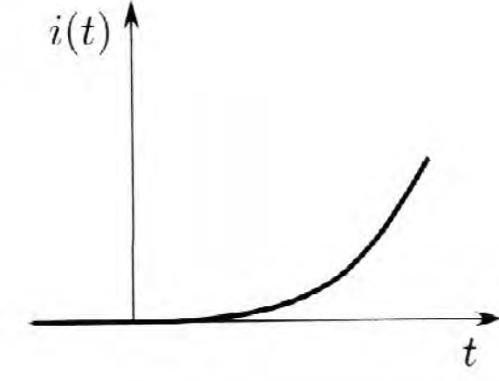
**Corrente nell'induttore come integrale della tensione**



(a)

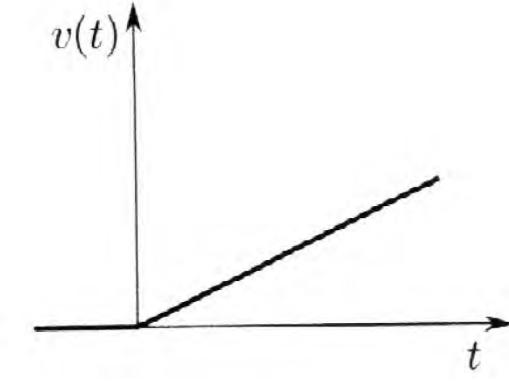
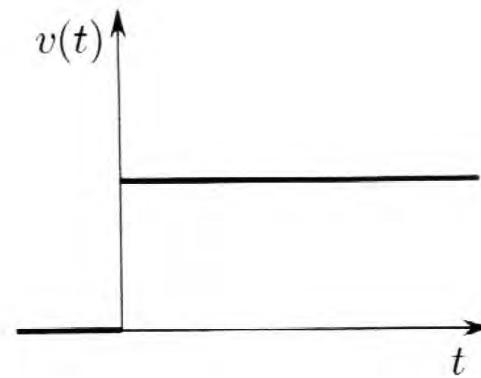
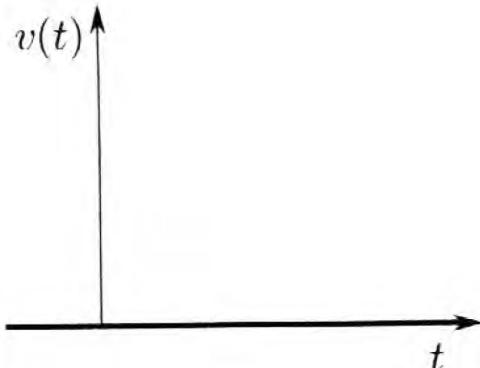


(b)



(c)

**Tensione nell'induttore come derivata della corrente**



# 5.3 Esempi sull'induttore

## Esempio 6.6

Un induttore da  $6 \text{ mH}$  è percorso da una corrente  $i(t) = \cos(100\pi t)$  A. Determinare la tensione  $v(t)$ .

## Soluzione

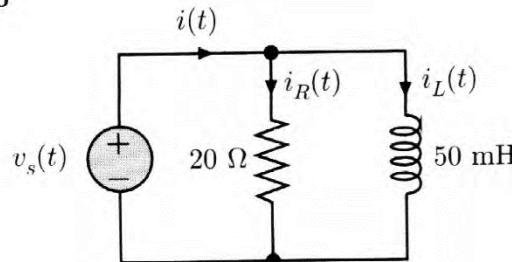
Assumendo versi coordinati, la tensione è

$$\begin{aligned} v(t) &= L \frac{di}{dt} = 6 \times 10^{-3} \times [-100\pi \sin(100\pi t)] = \\ &= -0,6\pi \sin(100\pi t) \text{ V} \end{aligned}$$

## Esempio 6.7

Nel circuito in Figura 6.20, determinare il valore di  $i(t)$ , se  $v_s(t) = \cos(10t)$  V e  $i_L(0) = 1$  A.

Figura 6.20



La corrente nell'induttore vale:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_L(0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_s(x) dx = \\ &= 1 + \frac{1}{50 \times 10^{-3}} \frac{1}{10} \sin(10t) = \\ &= 1 + 2 \sin(10t) \text{ A} \end{aligned}$$

Pertanto

$$i(t) = 1 + 0,05 \cos(10t) + 2 \sin(10t) \text{ A}$$

## Soluzione

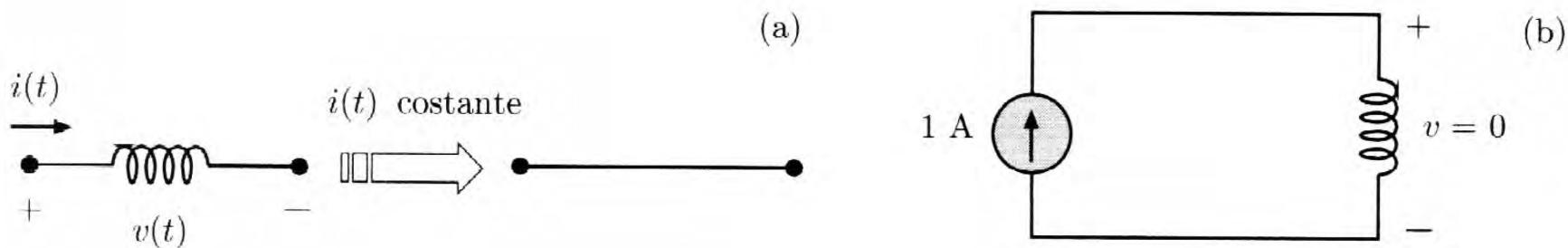
La corrente nel resistore è

$$i_R(t) = \frac{v_s(t)}{R} = 0,05 \cos(10t) \text{ A}$$

# 5.3 Proprietà dell'induttore

L'induttore ha proprietà duali di quelle del condensatore

- Quando la **corrente è costante**, l'induttore equivale a un **corto circuito**

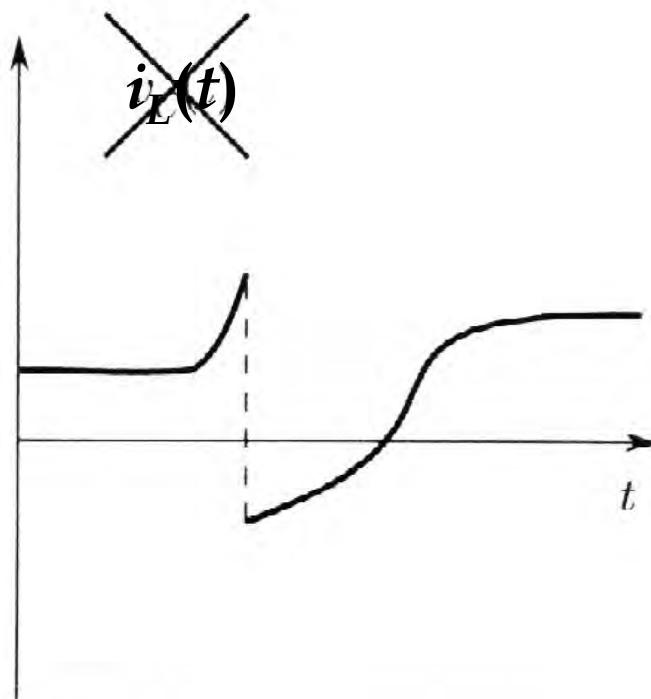


dalla equaz. caratt.  $v=Ldi/dt$   
se  $i=\text{cost.} \Rightarrow di/dt=0 \Rightarrow v=0$  (c.c.)

in base al valore di flusso  $\varphi$  (qualsiasi) accumulato nell'induttore, si ha una corrente  $i$  (qualsiasi)  $\rightarrow$  circ.eq. in regime stazionario, con  $di/dt=0$  è un gen.corr.cost. con  $v=0$

## 5.3 Proprietà dell'induttore

- La **corrente nell'induttore è continua** (non fa salti). E' una variabile di stato (che consente di descrivere l'andamento del sistema in assenza di azioni esterne)



L'induttore si oppone alle variazioni brusche di corrente

## 5.3 Sovratensione e scarica da c.a.



- Che cosa avviene all'apertura di un interruttore che prima era percorso da corrente?  
e.g. quando spegniamo la luce.

Per un breve intervallo di tempo dopo l'apertura, tra i contatti dell'interruttore si verifica una *scarica elettrica*; pertanto la corrente si annulla in un tempo molto breve rimanendo continua. (in particolare in  $t=0$ )

Ciò accade perché la tensione che si manifesta ai capi dell'interruttore, provoca un'accelerazione degli ioni presenti nell'aria che separa i contatti. Le collisioni con le molecole d'aria liberano altri ioni, dando luogo ad una notevole corrente, ovvero alla scarica. La tensione minima per cui avviene la scarica dipende dalla separazione tra i contatti e dalla pressione dell'aria. Alla pressione di una atmosfera la tensione di scarica in aria è di circa 3 kV/mm. Un fenomeno simile avviene ogni volta che apriamo un interruttore, poiché qualsiasi circuito reale presenta una certa induttanza, seppur molto piccola, tuttavia esso diventa rilevante al crescere dell'induttanza.

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} > 300 \text{ V su } 0.1 \text{ mm}$$

## 5.3 Proprietà dell'induttore

- L'induttore non dissipà energia (né la genera: bipolo passivo) ma può immagazzinarla (o cederla)
- Energia assorbita in un intervallo di tempo generico

$$\begin{aligned}\Delta E(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = L \int_{t_1}^{t_2} i \frac{di}{dt} dt = L \int_{i(t_1)}^{i(t_2)} i di \\ &= \frac{1}{2} L [i^2(t_2) - i^2(t_1)] = E_2 - E_1\end{aligned}$$

L'energia nell'induttore dipende solo dalla corrente (var. di stato)

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2$$

Ci saranno intervalli temporali in cui l'energia è assorbita (immagazzinata nell'induttore) e intervalli in cui l'energia (quella immagazzinata) è ceduta al circuito

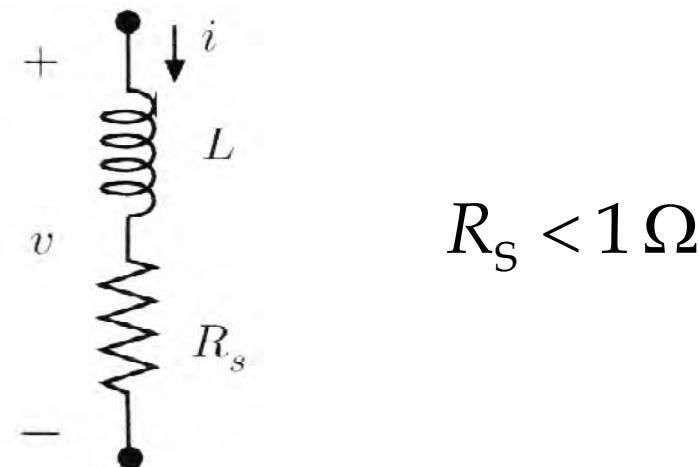
## 5.3 Induttore reale

- In realtà, il filo metallico dell'avvolgimento ha una resistenza che dissipata potenza  $p \propto i^2$
- Il modello dell'**induttore reale** aggiunge una resistenza  $R_s$  (piccola) in serie a  $L$   
La caratteristica dell'induttore reale è dunque:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} + R_s i(t)$$

↑  
parte non-dissipativa  
(ideale)

↑  
parte dissipativa  
(reale)



$$R_s < 1 \Omega$$

## 5.3 Esempio sull'induttore

### Example 5

The terminal voltage of a 2 H inductor is

$$v = 10(1-t) \text{ V}$$

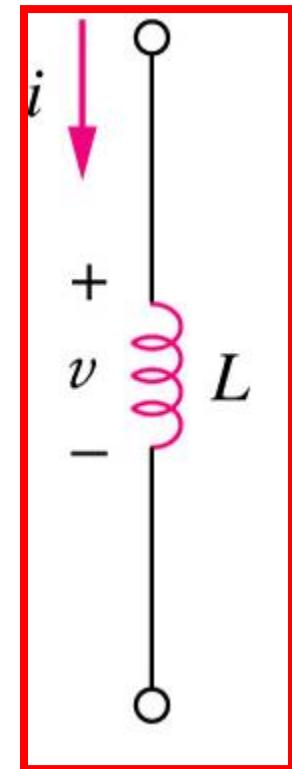
Find the current flowing through it at  $t = 4 \text{ s}$  and the energy stored in it within  $0 < t < 4 \text{ s}$ .

Assume  $i(0) = 2 \text{ A}$ .

**Answer:**

$$i(4\text{s}) = -18 \text{ A}$$

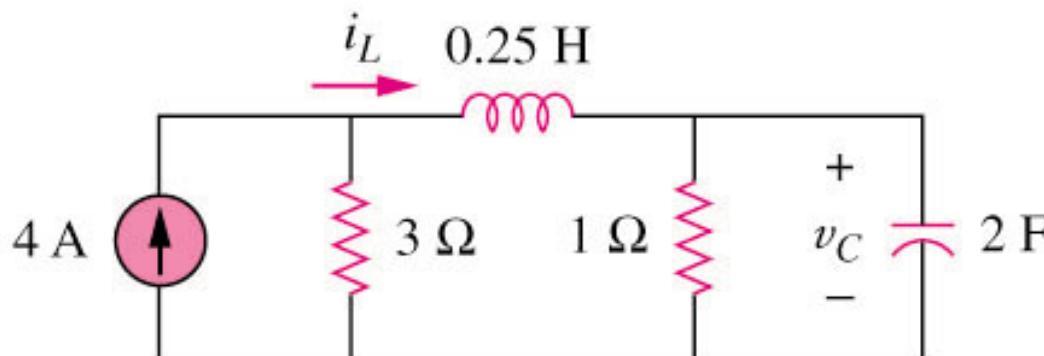
$$E_L(4\text{s}) = 320 \text{ J}$$



# 5.3 Esempio sull'induttore

## Example 6

Determine  $v_C$ ,  $i_L$ , and the energy stored in the capacitor and inductor in the circuit shown below under dc conditions.



**Answer:**

$$i_L = 3 \text{ A}$$

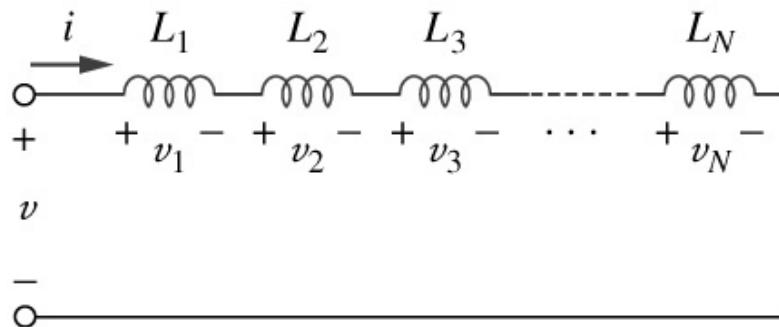
$$v_C = 3 \text{ V}$$

$$E_L = 1.125 \text{ J}$$

$$E_C = 9 \text{ J}$$

## 5.4 Induttori in serie

- L'induttanza equiv. di  $N$  **induttori in serie** è la somma delle singole induttanze.



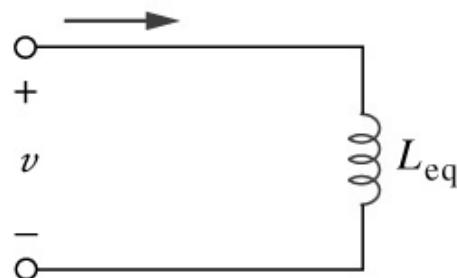
$$L_S = \sum_{k=1}^N L_k$$

(a)

$$v_k = L_k \frac{di}{dt}$$

$$v = \sum v_k$$

$$v = \sum L_k \cdot \frac{di}{dt} = L_S \frac{di}{dt}$$

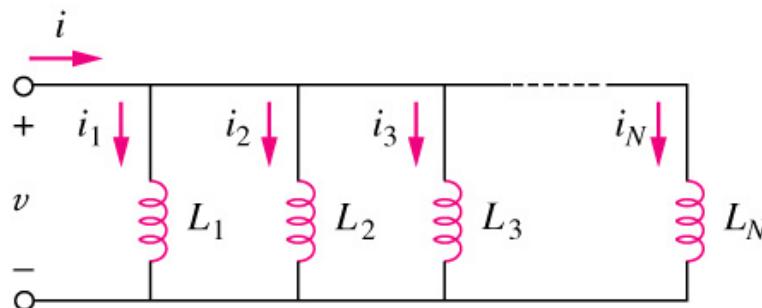


(b)

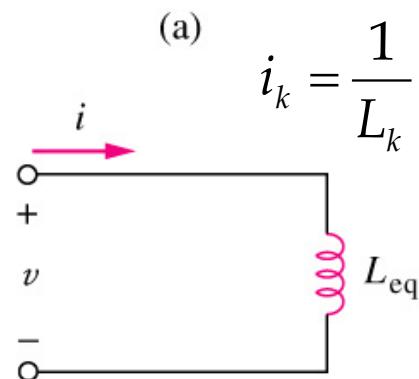
$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + \dots + L_N$$

## 5.2 Induttori in parallelo

- L'induttanza equiv. di  $N$  **induttori in parallelo** è il reciproco della somma dei reciproci delle singole induttanze (analogo dei resistori in parallelo)



$$\frac{1}{L_P} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{L_k}$$



$$i_k = \frac{1}{L_k} \int v dt$$

$$i = \sum i_k \quad i = \sum \frac{1}{L_k} \cdot \int v dt = \frac{1}{L_P} \cdot \int v dt$$

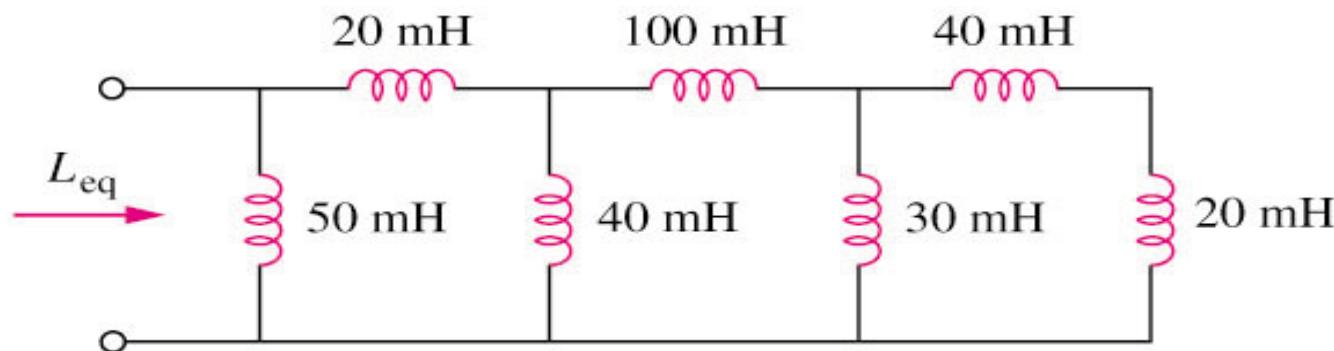
$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N}$$

(b)

# 5.4 Series and Parallel Inductors

## Example 7

Calculate the equivalent inductance for the inductive ladder network in the circuit shown below:



*Answer:*

$$L_{eq} = 25 \text{ mH}$$

# 5.4 Caratteristiche dei bipoli passivi

- Relazioni di corrente e tensione per  $R$ ,  $L$ ,  $C$

Circuit element	Units	Voltage	Current	Power
 <b>Resistance</b>	ohms ( $\Omega$ )	$v = Ri$ <b>(Ohm's law)</b>	$i = \frac{v}{R}$ $1/R = G$ conduttanza	$p = vi = i^2 R$
 <b>Inductance</b>	henries ( $H$ )	eq. car. in forma differenziale $v = L \frac{di}{dt}$	eq. car. in forma integrale $i = \frac{1}{L} \int v dt + k_1$	$p = vi = Li \frac{di}{dt}$
 <b>Capacitance</b>	farads ( $F$ )	eq. car. in forma integrale $v = \frac{1}{C} \int i dt + k_2$	eq. car. in forma differenziale $i = C \frac{dv}{dt}$	$p = vi = Cv \frac{dv}{dt}$

# Sommario

- Il **condensatore** è un bipolo dinamico, lineare, passivo.
- La relazione costitutiva del condensatore è  $i=C dv(t)/dt$  con **C capacità [F]**.
- La **tensione**  $v_C$  è variabile di stato, integrale della corrente, e **non fa salti**.
- L'**energia** nel condensatore è  $E_C=(1/2)Cv^2$ .
- La combinazione di più **condensatori in serie** si fa come per i resistori in parallelo (**somma dei reciproci**). La combinazione di più **condensatori in parallelo** si fa come per i resistori in serie (**semplice somma**).
- Il **condensatore reale** si ottiene aggiungendo al condensatore ideale una resistenza parallelo  $R_P$  (grande).

# Sommario

- L'**induttore** è un bipolo dinamico, lineare, passivo.
- La relazione costitutiva dell'induttore è  $v=L \frac{di(t)}{dt}$  con **L** induttanza [H].
- La **corrente**  $i_L$  è variabile di stato, integrale della tensione, e non fa salti.
- L'**energia** nell'induttore è  $E_L = (1/2)L i^2$ .
- La combinazione di più **induttori in serie** si fa come per i resistori in serie (**semplice somma**). La combinazione di più **induttori in parallelo** si fa come per i resistori in parallelo (**somma dei reciproci**).
- L'**induttore reale** si ottiene aggiungendo all'induttore ideale una **resistenza serie**  $R_S$  (piccola).