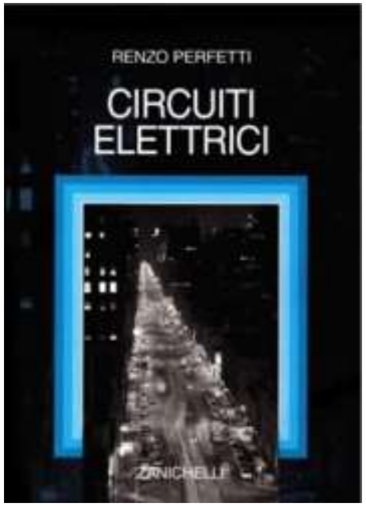


Circuiti Elettrici

Capitolo 9

Potenza in regime sinusoidale

POLITECNICO
MILANO

Prof. Cesare Svelto

Potenza in regime sinusoidale – Cap. 9

9.0 Introduzione

- Con il metodo simbolico dei fasori sappiamo ricavare $i(t)$ e $v(t)$ nei circuiti in regime sinusoidale
  Ora calcoleremo la **potenza** $p(t)=v(t)i(t)$ che assume un andamento oscillatorio determinato dal suo **valor medio** e da altri valori caratteristici

- Ad es., utilizzando un *boiler* elettrico o un PC ci interessa conoscere la potenza media assorbita (**potenza di targa**); impiegando transistori e fusibili veloci conviene valutare la **potenza massima**

- Altri parametri utili per le proprietà energetiche in regime sinusoidale: **valore efficace**, **potenza attiva** e **reattiva**, **potenza apparente**, **fattore di potenza**

9.0 Introduzione

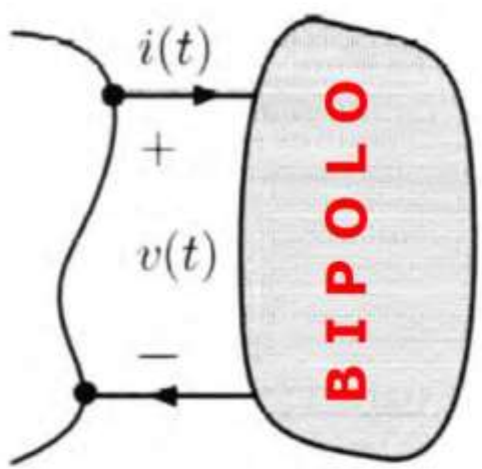
- Vedremo il **trasferimento di energia** da un generatore a un carico (rete di distribuzione oppure circuito a basso segnale)

- Somma di potenze per di più generatori con **frequenze differenti**

- **Applicazioni** di uso commune:
  - **strumenti** elettrodinamici
  - **sicurezza** impianti elettrici
    ^ messa a terra
    ^ interruttore differenziale

9.1 Potenza istantanea

Per un bipolo in regime sinusoidale



$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$\boldsymbol{V} = V_m \angle \theta_v$$

$$\boldsymbol{I} = I_m \angle \theta_i$$

La **potenza istantanea** assorbita, $p(t)$ **in W**, è

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

ed è data dal prodotto di due sinusoidi isofrequenziali

9.1 Potenza istantanea

Formule trigonometriche di Werner (da prostaferesi)

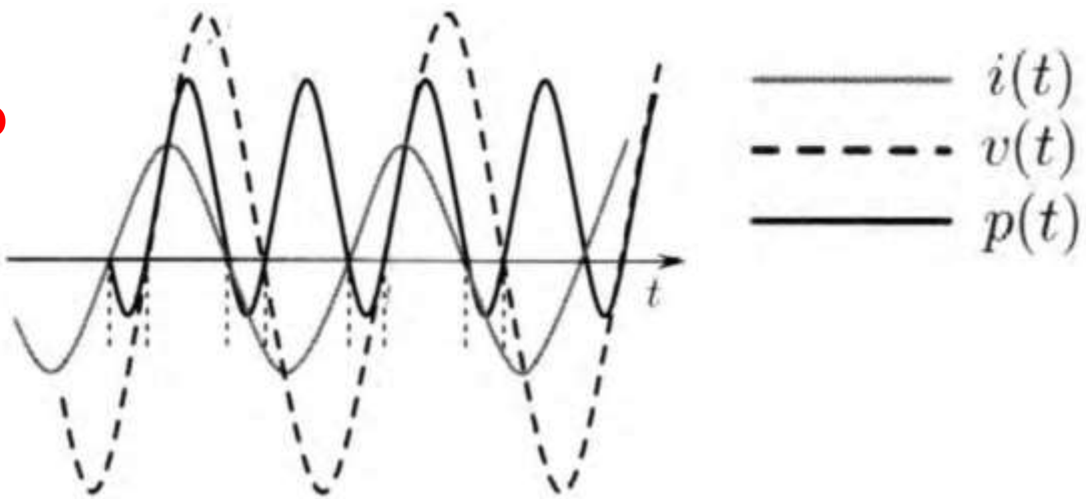
$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$

La **potenza istantanea** si può scrivere come

$$p(t) = \underbrace{\frac{1}{2} V_{\mathrm{m}}\, I_{\mathrm{m}} \cos(\theta_v - \theta_i)}_{\text{termine costante}} + \underbrace{\frac{1}{2} V_{\mathrm{m}}\, I_{\mathrm{m}} \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)}_{\text{termine sinusoidale a } 2\omega}$$

p si annulla quando si annulla i o v

In questo caso diviene negativa per due volte nel periodo (bipolo "eroga" p)

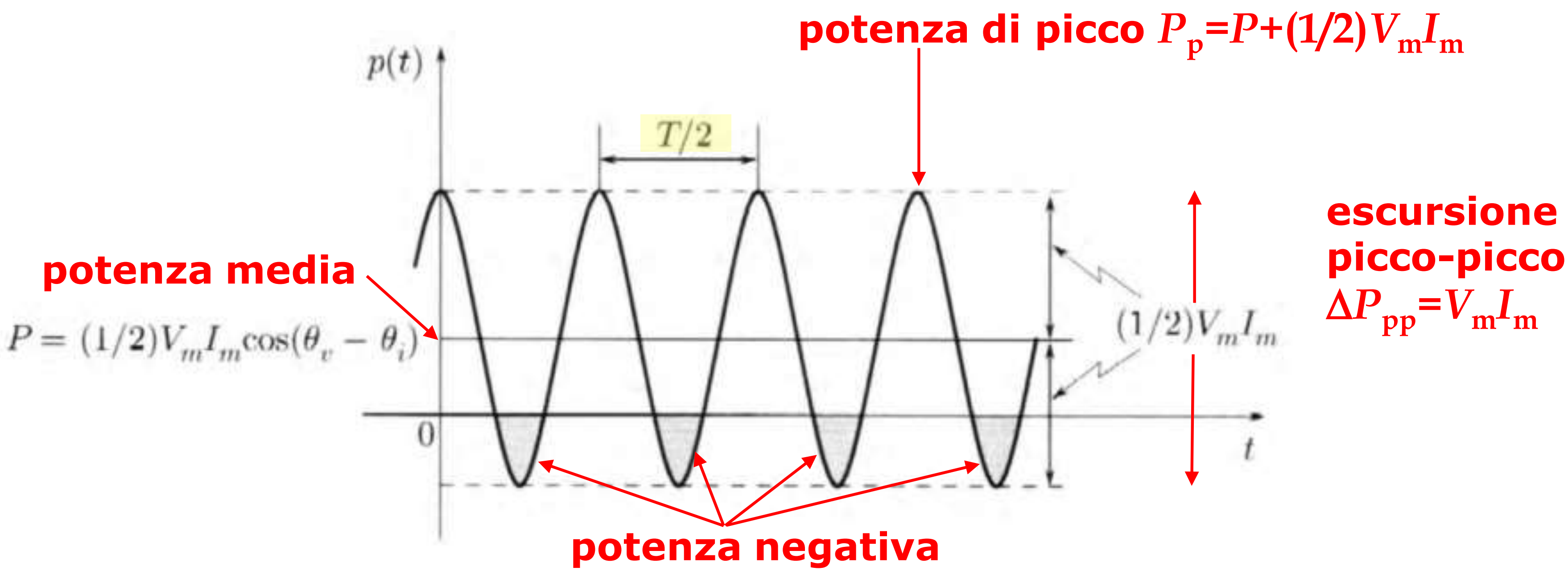


9.1 Potenza media (attiva)

Il termine costante è di fatto la **potenza media** e sarà poi chiamato **potenza attiva (P in W)**:

$$P = P_{\mathrm{AVE}} = P_{\mathrm{MEDIA}} = P_{\mathrm{ATT}} = \frac{1}{2} V_{\mathrm{m}}\, I_{\mathrm{m}} \cos\left(\theta_v - \theta_i\right)$$

può essere P >=< 0 (<0 nel caso di un generatore)



9.1 Potenza media (attiva)

Potenza istantanea oscilla, con ampiezza $(1/2)V_m I_m$ e **periodo $T/2$**, **intorno alla potenza attiva *P***

Infatti il valor medio di $p(t)$ nel periodo è proprio *P*, essendo il valor medio della sinusoide pari a zero

Potenza media per il calcolo dell'**energia assorbita** in intervalli di tempo $\Delta t >> T$, semplicemente come $E = P\Delta t$

$$E(\Delta t) = \int_0^{\Delta t} p(t)\mathrm{d}t = P\Delta t + \frac{1}{2} V_m I_m \int_0^{\Delta t} \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\mathrm{d}t =$$

$$= (P + \Delta P_{ave})\Delta t = (1+\varepsilon)P\Delta t \cong P\Delta t$$

$$\frac{\Delta P_{ave}}{P} = \frac{(1/2)V_m I_m}{P}\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\mathrm{d}t =$$

worst case

$$\leq \frac{1}{\cos(\theta_v - \theta_i)}\frac{1}{\Delta t}\int_{t^*-T/8}^{t^*+T/8}\cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\mathrm{d}t \leq$$

$$= \frac{1}{\cos(\theta_v - \theta_i)}\frac{1}{\Delta t}\frac{T}{2\pi} = \frac{1}{\cos(\theta_v - \theta_i)}\frac{1}{2\pi}\frac{T}{\Delta t} << 1$$

$t^* = -(\theta_v + \theta_i)/2\omega$ e purchè sia $P \neq 0$

esempio 50 Hz

$$\varepsilon = \frac{\Delta P_{ave}}{P} << 1 \text{ se } P \neq 0 \text{ e } \Delta t >> T$$

solitamente poi $\Delta t = mT$ e $\Delta P_{ave} = 0$

La potenza, in watt (W), si misura con un **wattmetro**

9.1 Potenza istantanea e media (attiva) nel resistore

$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\theta_i) \quad \text{e} \quad v(t)=Ri(t)=RI_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\theta_i)$$

$$\theta_i=\theta_v \Rightarrow \cos(\theta_v-\theta_i)=1 \quad \text{e} \quad V_{\mathrm{m}}=RI_{\mathrm{m}}$$

$$p(t)=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}\,I_{\mathrm{m}}\cos(\theta_v-\theta_i)+\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}\,I_{\mathrm{m}}\cos(2\omega t+\theta_v+\theta_i)=$$

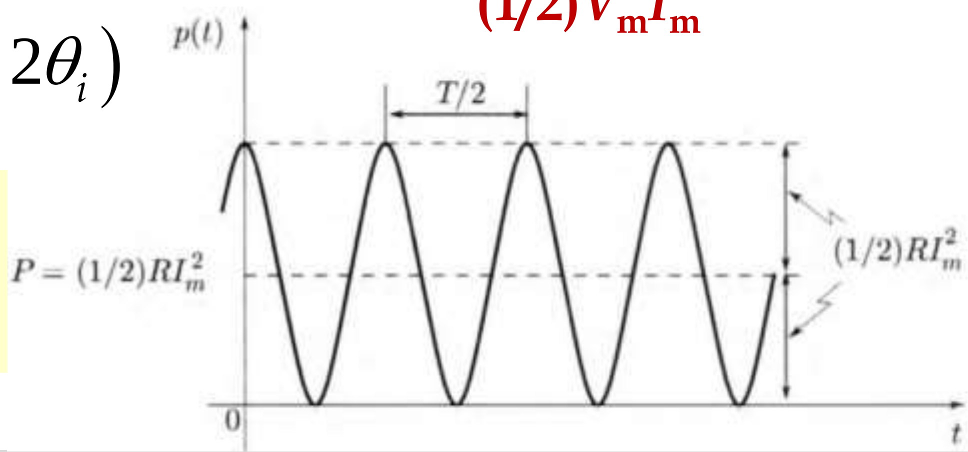
$$=\frac{1}{2}RI_{\mathrm{m}}^2+\frac{1}{2}RI_{\mathrm{m}}^2\cos(2\omega t+2\theta_i)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{V_{\mathrm{m}}^2}{R}+\frac{1}{2}\frac{V_{\mathrm{m}}^2}{R}\cos(2\omega t+2\theta_i)$$

il valore medio di $p(t)$ e l'ampiezza del termine oscillante sono uguali:

$(1/2)V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}$

$$P=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}\,I_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}RI_{\mathrm{m}}^2=\frac{1}{2}\frac{V_{\mathrm{m}}^2}{R}$$



9.1 Potenza istantanea e media (attiva) nell'induttore

$$i(t) = I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \theta_i) \quad \mathrm{e} \quad v(t) = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = -\omega L I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \theta_i) =$$

$$= \omega L I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \theta_i + 90°)$$

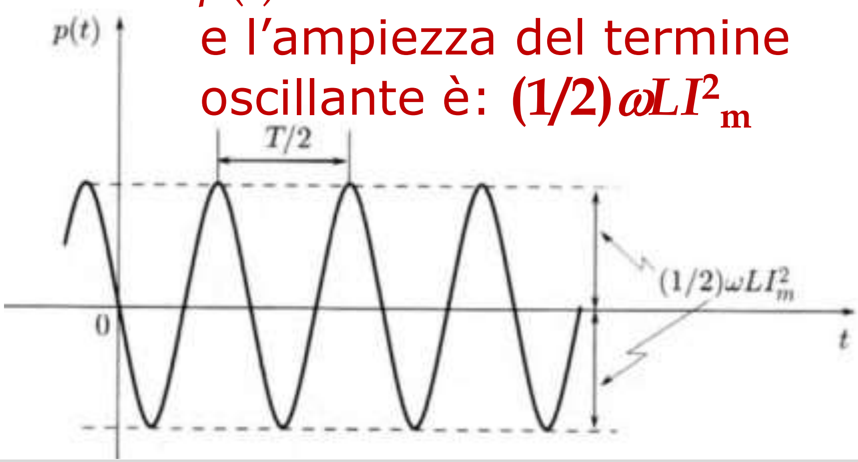
$$\theta_v = \theta_i + 90° \Rightarrow \cos(\theta_v - \theta_i) = 0 \quad \mathrm{e} \quad V_{\mathrm{m}} = \omega L I_{\mathrm{m}}$$

$$p(t) = \frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}\, I_{\mathrm{m}}\cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}\, I_{\mathrm{m}}\cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) =$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\omega L I_{\mathrm{m}}^2\cos(2\omega t + 2\theta_i + 90°) = -\frac{1}{2}\omega L I_{\mathrm{m}}^2\sin(2\omega t + 2\theta_i)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{V_{\mathrm{m}}^2}{\omega L}\sin(2\omega t + 2\theta_i)$$

$p(t)$ ha valore medio nullo e l'ampiezza del termine oscillante è: $(1/2)\omega L I^2_{\mathrm{m}}$



potenza media nulla $\quad P = 0$

9.1 Potenza istantanea e media (attiva) nel condensatore

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \quad \text{e} \quad i(t) = C\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -\omega C V_m \sin(\omega t + \theta_v) =$$

$$= \omega C V_m \cos(\omega t + \theta_v + 90°)$$

$$\theta_i = \theta_v + 90° \Rightarrow \cos(\theta_v - \theta_i) = 0 \quad \text{e} \quad I_m = \omega C V_m$$

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m\, I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m\, I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) =$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\omega C V_m^2 \cos(2\omega t + 2\theta_i - 90°) = +\frac{1}{2}\omega C V_m^2 \sin(2\omega t + 2\theta_i)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{I_m^2}{\omega C}\sin(2\omega t + 2\theta_i)$$

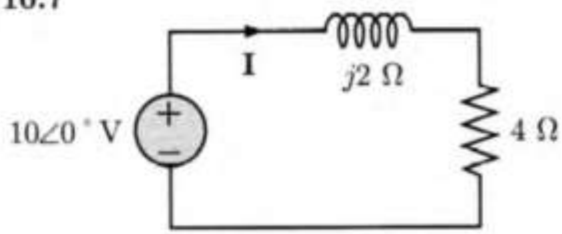
$p(t)$ ha valore medio nullo e l'ampiezza del termine oscillante è: $(1/2)\omega C V_m^2$

potenza media nulla $\boxed{P = 0}$

9.1 Esempio di calcolo (10.1P)

Calcolare la potenza media e la potenza di picco assorbite dal resistore in Figura 10.7.

Figura 10.7



Soluzione

La corrente è

$$\mathbf{I} = \frac{10}{4 + j2}$$

Il modulo è

$$|\mathbf{I}| = \frac{10}{\sqrt{20}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\ \mathrm{A}$$

la potenza media assorbita dal resistore è

$$P = \frac{1}{2} R |\mathbf{I}|^2 = \frac{1}{2}(4)(5) = 10\ \mathrm{W}$$

Nel resistore, la potenza di picco è il doppio della potenza media, cioè 20 W.

$p(t)$ oscilla attorno a un valor medio 10 W, variando da 0 sino a 20 W

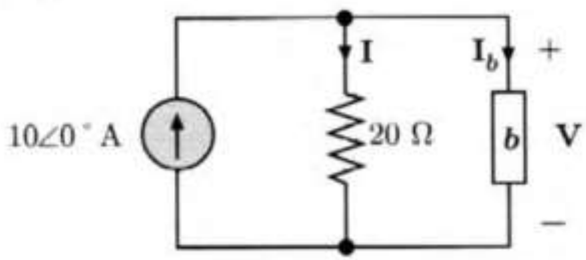
si ricorda che

$$|\boldsymbol{I}| = I_{\mathrm{m}}$$

9.1 Esempio di calcolo (10.2P)

Calcolare la potenza media assorbita dal bipolo $\boldsymbol{b}$ in Figura 10.8, sapendo che $\mathbf{I} = 5\angle 30°$ A.

Figura 10.8



Soluzione

Per ricavare la potenza media assorbita dal bipolo dobbiamo conoscere i fasori della tensione $\mathbf{V}$ e della corrente $\mathbf{I}_b$. La tensione è

$$\mathbf{V} = 20\mathbf{I} = 100\angle 30° = V_m\angle\theta_v$$

La corrente nel bipolo $\boldsymbol{b}$ si ricava dalla LKC:

$$\mathbf{I}_b = 10\angle 0° - \mathbf{I} = 10 - 5[\cos(30°) + j\,\mathrm{sen}(30°)] =$$
$$= 10 - 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) =$$
$$= (10 - 2{,}5\sqrt{3}) - j2{,}5 = 6{,}19\angle -23{,}8° = I_m\angle\theta_i$$

Dunque

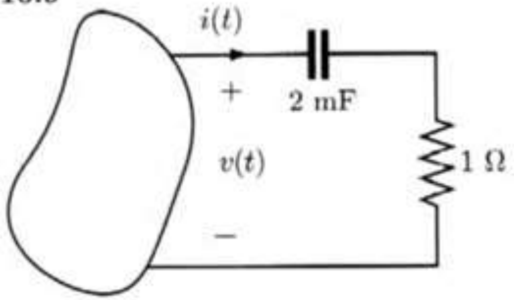
$$P = \frac{1}{2}(100)(6{,}19)\cos(30° + 23{,}8°) = 182{,}8 \text{ W}$$

x =Re(z)	y =Im(z)	
5.669873	-2.5	
	(rad)	(°)
ρ	θ	θ
6.197	-0.415	-23.794

9.1 Esempio di calcolo (10.3P)

Calcolare la potenza media e la potenza istantanea assorbite dalla serie R-C in Figura 10.9, sapendo che $i(t) = 2\cos(1000t + 36°)$ A.

Figura 10.9



Soluzione

Il fasore della corrente è

$$\mathbf{I} = 2\angle 36° \text{ A}$$

La pulsazione vale 1000 rad/s. Il condensatore ha impedenza $\mathbf{Z}_C = -j0{,}5\ \Omega$.

L'impedenza della serie è

Ricaviamo il fasore della tensione $v(t)$,

$$\mathbf{V} = \mathbf{ZI} = (1{,}12\angle -26{,}56°)(2\angle 36°) =$$

$$= 2{,}24\angle 9{,}44°$$

quindi la tensione è

$$v(t) = 2{,}24\cos(1000t + 9{,}44°) \text{ V}$$

La potenza media è

$$P = \frac{1}{2}(2{,}24)(2)\cos(9{,}44° - 36°) = 2 \text{ W}$$

la potenza istantanea è

$$p(t) = 2 + \frac{1}{2}(2{,}24)(2)\cos(2000t + 9{,}44° + 36°) =$$

$$= 2 + 2{,}24\cos(2000t + 45{,}44°),\ \text{W}$$

Si noti che la potenza media assorbita dal resistore,

$$\frac{1}{2}R|\mathbf{I}|^2 = 2 \text{ W}$$

coincide con la potenza media assorbita dalla serie R-C. Ciò è dovuto al fatto che il condensatore non assorbe potenza media.

9.2 Valore efficace

Nel resistore percorso da corrente costante: $p=RI^2=P$

Nel caso di corrente sinusoidale $i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t)$ si ha

$$P=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}RI_{\mathrm{m}}^2=\frac{1}{2}\frac{V_{\mathrm{m}}^2}{R}$$

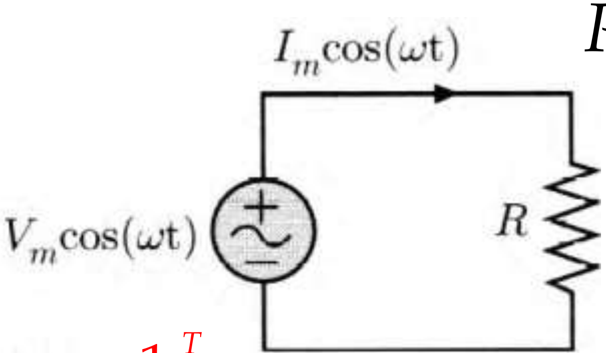
Il **valore efficace**, per la corrente o per la tensione sinusoidale (o "in alternata", a.c.), è quel valore di ampiezza costante (o "in continua", d.c.) che applicato al resistore sviluppa la stessa potenza media della corrispondente grandezza sinusoidale (a.c.)

Da $P=RI_{\mathrm{eff}}^2=\frac{1}{2}RI_{\mathrm{m}}^2$ si ottiene $I_{\mathrm{eff}}=\frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}$ e così pure

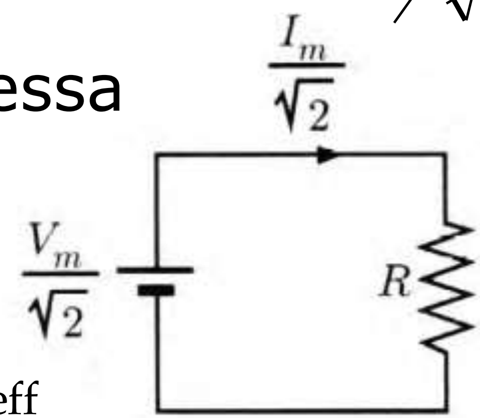
da $P=\frac{V_{\mathrm{eff}}^2}{R}=\frac{1}{2}\frac{V_{\mathrm{m}}^2}{R}$ si ottiene $V_{\mathrm{eff}}=\frac{V_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}$

9.2 Valore efficace o r.m.s.

Dunque in regime sinusoidale l'ampiezza efficace è legata all'ampiezza di picco da un fattore $\frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707 \approx 0.7$



P è la stessa



$V_{\mathrm{eff}} = RI_{\mathrm{eff}}$

$$P = P_{\mathrm{ac,AVE}} = \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)\mathrm{d}t = RI_{\mathrm{eff}}^2$$

la legge di Ohm vale anche per i valori efficaci

$$P = P_{\mathrm{dc}} = RI_{\mathrm{dc}}^2$$

$$I_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[I_{\mathrm{m}}^2 \cos(\omega t)\right]^2 \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T} I_{\mathrm{m}}^2 \int_0^T \cos^2(\omega t)\mathrm{d}t}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} I_{\mathrm{m}}^2 \int_0^T \frac{1}{2}\mathrm{d}t} = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}$$

valore efficace o **valore r.m.s.**
(*root mean square*)

9.2 Utilità valore efficace

Utilizzando i valori efficaci la potenza è

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

e nel caso di un resistore (corrente e tensione in fase)

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = R I_{\text{eff}}^2 = V_{\text{eff}}^2 / R$$

Con i valori efficaci il fattore (1/2) scompare e le espressioni in a.c. sono del tutto simili a quelle in d.c.

Ecco il significato della tensione di rete domestica a 220 V come valore efficace ($V_{\text{picco}}=V_{\text{p}}=V_{\text{m}}=311$ V)

Diversi strumenti di misura "in a.c." leggono il valore efficace della corrente o della tensione

9.2 Esempio di calcolo (10.4)

Una lampada ad incandescenza da 40 W viene alimentata ad una tensione efficace di 220 V. Calcolare il valore efficace della corrente, il valore di picco della corrente, la resistenza della lampada.

Soluzione

Una lampada ad incandescenza può essere schematizzata con un resistore. Dunque la potenza media assorbita ha l'espressione

$$P = V_{eff} I_{eff}$$

Poiché $V_{eff} = 220$ V, si ha

$$I_{eff} = \frac{P}{V_{eff}} = \frac{40}{220} = 0{,}18 \text{ A}$$

Il valore di picco è $I_m = \sqrt{2} I_{eff} = 0{,}257$ A. Infine

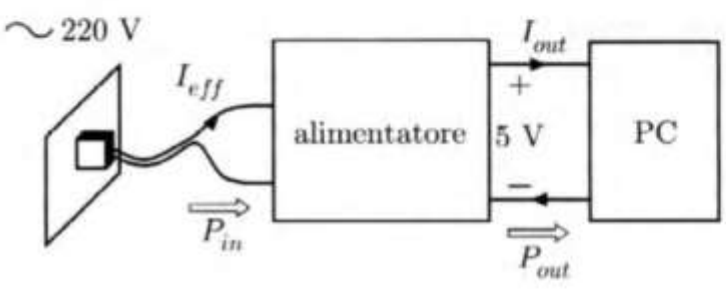
$$R = \frac{V_{eff}}{I_{eff}} = 1210 \, \Omega$$

9.2 Esempio di calcolo (10.5P)

L'alimentatore di un personal computer riporta i seguenti dati: OUTPUT 200 W, 5 V. Determinare la corrente continua erogata dall'alimentatore e la corrente alternata assorbita dalla presa elettrica, supponendo che l'alimentatore sia assimilabile ad un carico resistivo.

Soluzione
L'alimentatore è un dispositivo che converte la tensione alternata di rete in una tensione costante (Figura 10.11).

Figura 10.11



Poiché anche la corrente di uscita è costante, la potenza di uscita ha l'espressione $P_{out} = V_{out} I_{out}$; quindi, se la potenza di uscita vale 200 W e la tensione 5 V, la corrente è 40 A. Supponendo che la potenza di uscita sia pari a quella fornita dalla presa elettrica, si ha $P_{in} = 200$ W, quindi

$$I_{eff} = \frac{P_{in}}{V_{eff}} = \frac{200}{220} = 0{,}9 \text{ A}$$

In realtà una parte della potenza viene dissipata nell'alimentatore, dunque $P_{in} > P_{out}$. Per esempio, assumendo per l'alimentatore un rendimento del 90%, si ha

$$P_{out} = 0{,}9 P_{in}$$

quindi

$$P_{in} = \frac{P_{out}}{0{,}9} = 222 \text{ W}$$

$$I_{eff} = \frac{222}{220} \cong 1 \text{ A}$$

9.3 Potenza complessa

In regime sinusoidale i bipoli hanno impedenza complessa e in una analisi fasoriale si definisce la **potenza complessa**:

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^{*}}$$

(volt×ampere = VA)

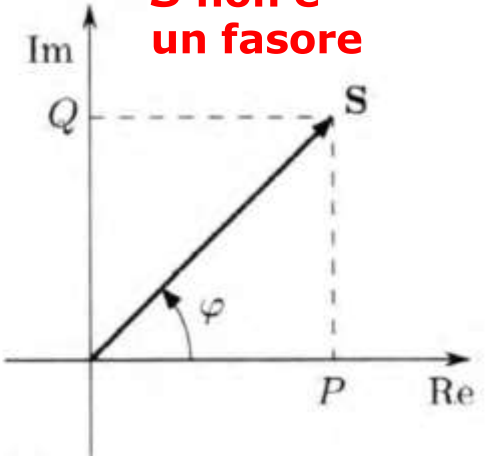
Con tensione $\boldsymbol{V}=V_{\mathrm{m}}e^{j\theta_v}$ e corrente $\boldsymbol{I}=I_{\mathrm{m}}e^{j\theta_i}$ il numero complesso S si scrive come

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}e^{j\theta_v}I_{\mathrm{m}}e^{-j\theta_i} = \frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}e^{j(\theta_v-\theta_i)}$$

fase

modulo

S **non è un fasore**



9.3 Potenza apparente

Il modulo di S è definito **potenza apparente**:

$$S = |\mathbf{S}| = \frac{1}{2} V_{\mathrm{m}} I_{\mathrm{m}} = V_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}} \quad \text{(VA)}$$

è la potenza che il bipolo assorbirebbe con I e V costanti e pari ai valori efficaci (P_{max} per quelle I e V)

La fase di S, indicata con φ, è lo sfasamento tra tensione e corrente ("fase tensione meno fase corrente")

$$\angle \mathbf{S} = (\theta_v - \theta_i) = \varphi$$

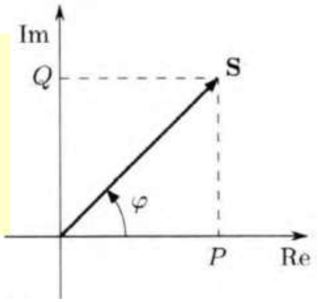
Il coseno di φ è definito **fattore di potenza**:

$$PF = \cos(\varphi)$$

9.3 Potenza attiva e reattiva

Possiamo scrivere la **potenza complessa** come:

$$\boldsymbol{S} = S\angle\varphi = \frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos(\varphi) + j\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\sin(\varphi) = P + jQ$$



La parte reale di *S* è definita **potenza attiva**, e coincide con la potenza media

$$P = \mathrm{Re}[\boldsymbol{S}] = \frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos(\phi) = S\cos(\phi) \qquad \text{(VA)}$$

La parte immaginaria di *S* è definita **potenza reattiva**

$$Q = \mathrm{Im}[\boldsymbol{S}] = \frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\sin(\phi) = S\sin(\phi) \qquad \text{(VAR)}$$

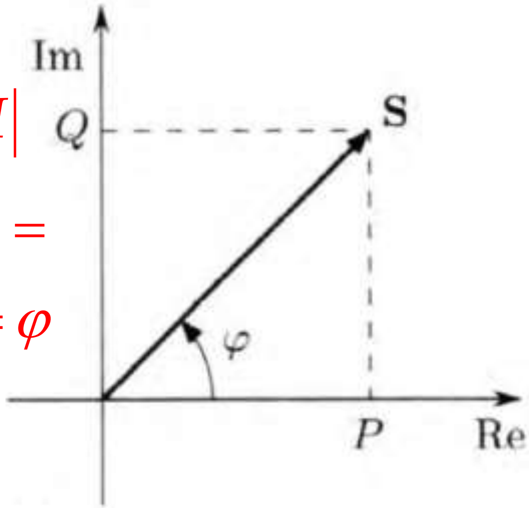
e si misura con un varmetro

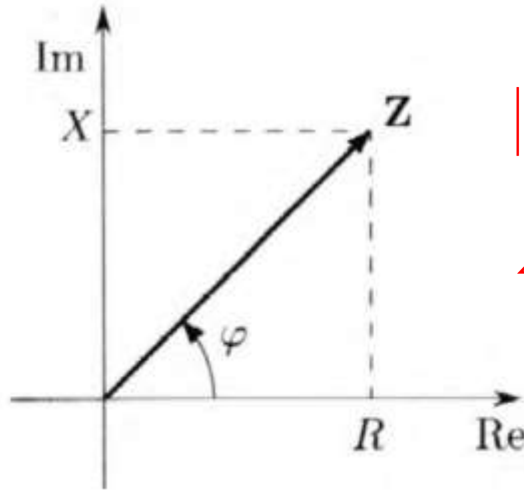
9.3 Potenza nel piano complesso

Vi è una netta analogia tra potenza e impedenza. Nel piano complesso le due grandezze hanno stessa fase φ

$$|S| = |VI^*| = |V||I|$$

$$\angle S = \angle V + \angle I^* = (\theta_v - \theta_i) = \varphi$$





$$|Z| = \frac{|V|}{|I|}$$

$$\angle Z = \angle V - \angle I = (\theta_v - \theta_i) = \varphi$$

potenza complessa	$\mathbf{S} = P + jQ = \frac{1}{2} VI^*$
potenza apparente	$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$
fattore di potenza	$\cos\varphi = \frac{P}{S} \leq 1$
potenza attiva	$P = S\cos\varphi = \mathrm{Re}[S]$
potenza reattiva	$Q = S\,\mathrm{sen}\,\varphi = \mathrm{Im}[S]$

9.3 Potenza reattiva dei bipoli elementari

Potenza reattiva, $(1/2)V_\mathrm{m}I_\mathrm{m}\sin(\varphi)$, nei 3 bipoli passivi:

Resistore $\theta_v=\theta_i \Rightarrow \sin(\theta_v-\theta_i)=0 \Rightarrow \boxed{Q_R = 0}$

Induttore $\theta_v=\theta_i+90° \Rightarrow \sin(\theta_v-\theta_i)=1$

$V_\mathrm{m}=\omega L I_\mathrm{m}$

$$Q_L = \frac{1}{2}\omega L I_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}\frac{V_\mathrm{m}^2}{\omega L} \Rightarrow \boxed{Q_L > 0}$$

induttore e condensatore sono <u>bipoli reattivi</u> perchè hanno potenza reattiva $Q \neq 0$

Condensatore $\theta_i=\theta_v+90° \Rightarrow \sin(\theta_v-\theta_i)=-1$

$I_\mathrm{m}=\omega C V_\mathrm{m}$

$$Q_C = -\frac{1}{2}\frac{I_\mathrm{m}^2}{\omega C} = -\frac{1}{2}\omega C V_\mathrm{m}^2 \Rightarrow \boxed{Q_C < 0}$$

9.3 Potenza istantanea: come somma di potenza attiva (P) e potenza apparente (S)

La **potenza istantanea** si può scrivere come

$$p(t)=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}\,I_{\mathrm{m}}\cos(\theta_v-\theta_i)+\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}\,I_{\mathrm{m}}\cos(2\omega t+\theta_v+\theta_i)$$

termine costante
valore medio P

$$P=\mathrm{Re}[\mathbf{S}]=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos(\phi)$$

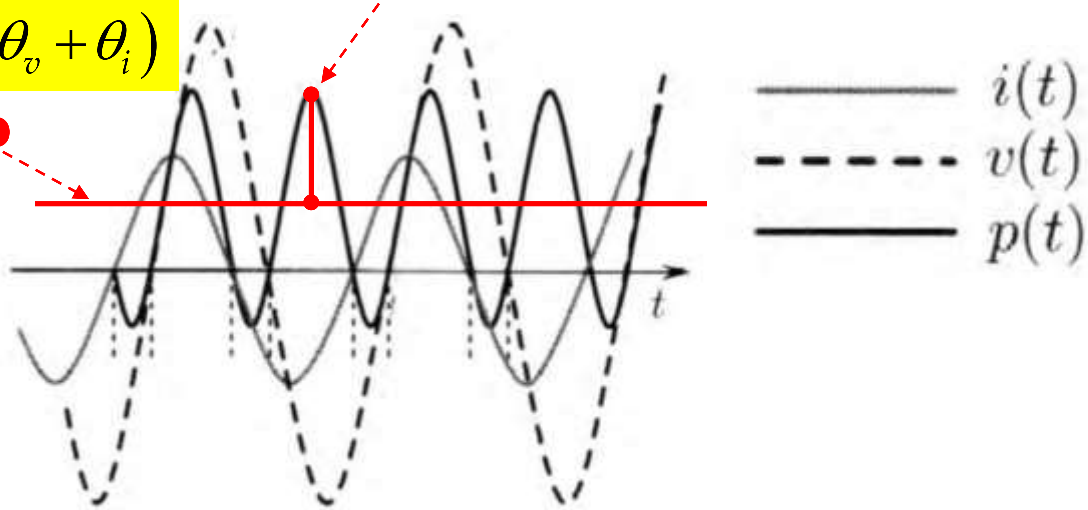
termine sinusoidale a 2ω
oscillazione con ampiezza S

$$S=|\mathbf{S}|=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}=V_{\mathrm{eff}}I_{\mathrm{eff}}$$

$$p(t)=P+S\cos(2\omega t+\theta_v+\theta_i)$$

p si annulla quando si annulla i o v

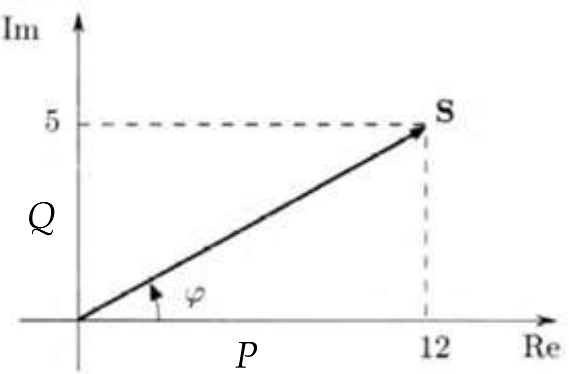
In questo caso diviene negativa per due volte nel periodo (bipolo "eroga" p)



9.3 Esempio di calcolo (10.6)

Un bipolo assorbe una potenza media di 12 W e una potenza reattiva di 5 VAR Ricavare la differenza di fase tra la tensione e la corrente. Ricavare il valore massimo e il valore minimo della potenza istantanea.

Figura 10.13



Soluzione

Il diagramma delle potenze è mostrato in Figura 10.13.

La differenza di fase si può ricavare con la relazione:

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{Q}{P} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = 22{,}6^\circ$$

I valori massimo e minimo della potenza istantanea sono, rispettivamente,

$$p_{\max} = P + \frac{1}{2}V_m I_m = P + S$$

$$p_{\min} = P - \frac{1}{2}V_m I_m = P - S$$

La potenza apparente vale

$$S = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ VA}$$

Dunque,

$$p_{\max} = 12+13 = 25 \text{ W}, \quad p_{\min} = 12-13 = -1 \text{ W}$$

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{144+25} = 12.85 \text{ VA}$$

$$\angle S = \varphi = \arctan(5/12) = 22.63^\circ$$

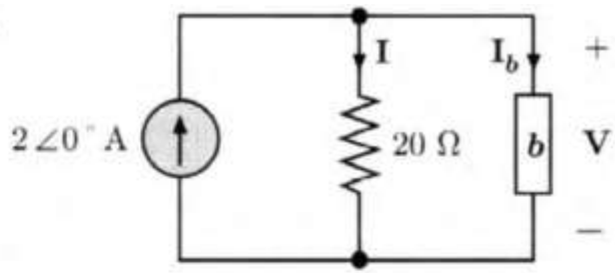
$$p(t) = P_{\text{AVE}} + P_{\text{APP}}\cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

$$= P + S \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

9.3 Esempio di calcolo (10.7P)

Nel circuito in Figura 10.14 ricavare la potenza attiva e la potenza reattiva assorbite dal bipolo ***b*** sapendo che $\mathbf{V} = 10 - j10$ V.

Figura 10.14



Soluzione

La corrente **I** vale:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{20} = \frac{1-j}{2} \text{ A}$$

La corrente nel bipolo ***b*** si ricava dalla LKC:

$$\mathbf{I}_b = 2\angle 0^\circ - \mathbf{I} = 2 - \frac{1-j}{2} = \frac{3+j}{2}$$

La potenza complessa vale

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{V}\mathbf{I}_b^* = \frac{1}{2}(10-10j)\frac{3-j}{2} = 5(1-2j)$$

Dunque

$$P = 5 \text{ W}$$
$$Q = -10 \text{ VAR}$$

9.3 Potenza complessa su una impedenza o ammettenza

Nel bipolo di impedenza $\boldsymbol{Z}=R+jX$ o ammettenza $\boldsymbol{Y}=G+jB$

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^{*}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{I})\boldsymbol{I}^{*}=\frac{1}{2}\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{I}|^{2}=\frac{1}{2}(R+jX)I_{\mathrm{m}}^{2}$$

$$P=\frac{1}{2}RI_{\mathrm{m}}^{2} \quad \text{e} \quad Q=\frac{1}{2}XI_{\mathrm{m}}^{2}$$

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^{*}=\frac{1}{2}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{Y}\boldsymbol{V})^{*}=\frac{1}{2}\boldsymbol{Y}^{*}|\boldsymbol{V}|^{2}=\frac{1}{2}(G-jB)V_{\mathrm{m}}^{2}$$

$$P=\frac{1}{2}GV_{\mathrm{m}}^{2} \quad \text{e} \quad Q=-\frac{1}{2}BV_{\mathrm{m}}^{2}$$

Con i valori efficaci tutti i fattori (1/2) spariscono

bipolo **resistivo**: $X=0$ e $B=0$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{Q=0}$

bipolo **reattivo**: $R=0$ e $G=0$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{P=0}$ (non dissipativo)

9.3 Esempio di calcolo (10.8P)

$$S = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}(ZI)I^* = \frac{1}{2}Z|I|^2 = \frac{1}{2}(R + jX)I_m^2$$

Un bipolo ha ammettenza

$$\mathbf{Y}(\omega) = 100 + 3\omega + j\omega(4 - 0{,}02\omega) \text{ mS}$$

Ricavare la potenza attiva e la potenza reattiva per $\omega = 100$ rad/s se il bipolo è attraversato da una corrente di ampiezza 3 A. Per quale valore di ω la potenza reattiva è nulla?

Soluzione

Poiché conosciamo l'ampiezza della corrente, conviene utilizzare le formule (10.29). Perciò ricaviamo l'impedenza $\mathbf{Z} = R + jX$:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\mathbf{Y}(100)} = \frac{10}{4 + j2} = (2 - j)\ \Omega$$

Dunque:

$$P = \frac{1}{2} \times 2 \times 9 = 9 \text{ W}$$

$$Q = \frac{1}{2}(-1)9 = -4{,}5 \text{ VAR}$$

$$Q = -\frac{1}{2}BV_m^2$$

La potenza reattiva si annulla se $B = 0$, dunque per $\omega = 0$ e quando $(4 - 0{,}02\omega) = 0$, ovvero per $\omega = 200$ rad/s.

9.3 Esempio di calcolo (10.9P)

Un bipolo assorbe 1 kW e 1 kVAR, alla frequenza di 50 Hz. Sapendo che la corrente nel bipolo ha un'ampiezza di 1 A, indicare una possibile realizzazione del bipolo.

Soluzione

Poiché conosciamo l'ampiezza della corrente conviene utilizzare le formule (10.29):

$$10^3 = \frac{1}{2}R \times (1)^2 \qquad 10^3 = \frac{1}{2}X \times (1)^2$$

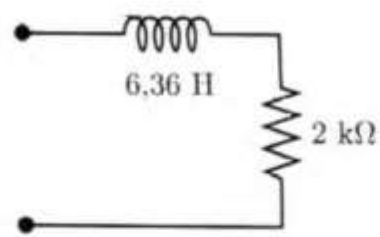
quindi

$$R = 2\ \text{k}\Omega \qquad X = 2\ \text{k}\Omega$$

Poiché $X > 0$ il bipolo è di tipo induttivo.

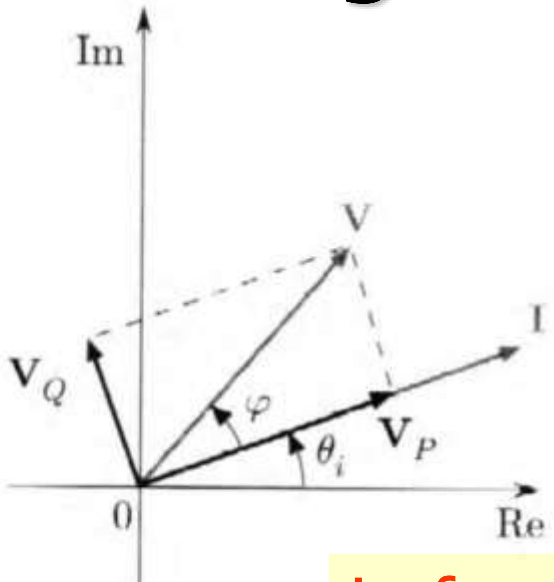
Una possibile realizzazione si ottiene collegando in serie un resistore di resistenza 2 kΩ e un induttore tale che, $\omega L = 2000$, dunque $L = 2000/100\pi = 6{,}36$ H (Figura 10.15).

Figura 10.15



$$S = \frac{1}{2}\boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^* = \frac{1}{2}(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{I})\boldsymbol{I}^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{I}|^2 = \frac{1}{2}(R + jX)I_\text{m}^2$$

9.3 Significato potenza reattiva



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$

$$\varphi = (\theta_v - \theta_i)$$

$v_{//}$ componente di $v\ //\ i$ **in fase** $v_P(t) = V_m \cos(\varphi)\cos(\omega t + \theta_i)$

$v_{\perp}$ componente di $v \perp i$ **in quadr.** $v_Q(t) = V_m \sin(\varphi)\cos(\omega t + \theta_i + 90°)$

osc. ±*P* attorno a *P* **osc. ±*Q* attorno a 0**

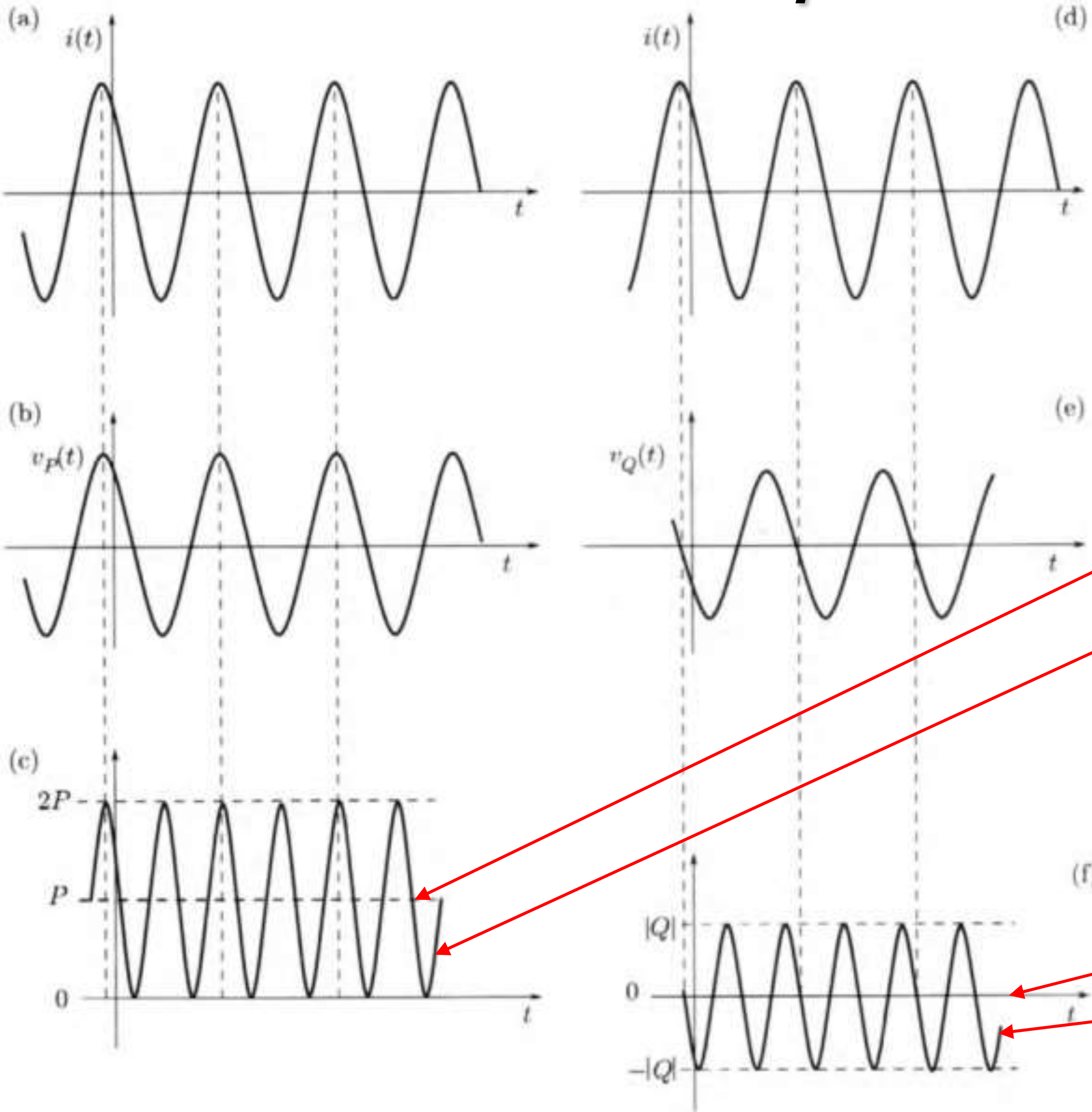
$$p(t) = [v_P(t) + v_Q(t)]\ i(t) = P[1 + \cos(2\omega t + 2\theta_i)] - Q[\sin(2\omega t + 2\theta_i)]$$

la potenza reattiva deriva dalla componente della tensione che è in quadratura con la corrente

≥0 se *P*>0
d.c. + a.c.
MEDIA=*P*

P_{ASS}+"P_{GEN}"=0
solo a.c.
MEDIA=0

9.3 Andamenti *p* in fase e quadr.



$p(t)$ "in fase"

$$p_{1^\circ}(t) = v_P(t)\,i(t) =$$

$$P + P\cos(2\omega t + 2\theta_i) =$$

$$P_{\text{FASE(media)}} + P_{\text{FASE(osc)}} =$$

$$\underset{P}{P_{\text{ATTIVA}}} \; \underset{\pm P}{\pm P_{\text{SINUS@}2\omega}}$$

$p(t)$ "in quadr."

$$p_{2^\circ}(t) = v_Q(t)\,i(t) =$$

$$= -Q\sin(2\omega t + 2\theta_i) =$$

$$= 0 \pm \underset{\pm Q}{Q_{\text{SINUS@}2\omega}}$$

9.3 Esempio di calcolo (10.10P)

Ricavare la potenza istantanea $p(t)$ per un bipolo che assorbe una potenza media di 5 W e una potenza reattiva di 5 VAR. La frequenza è 50 Hz.

Soluzione

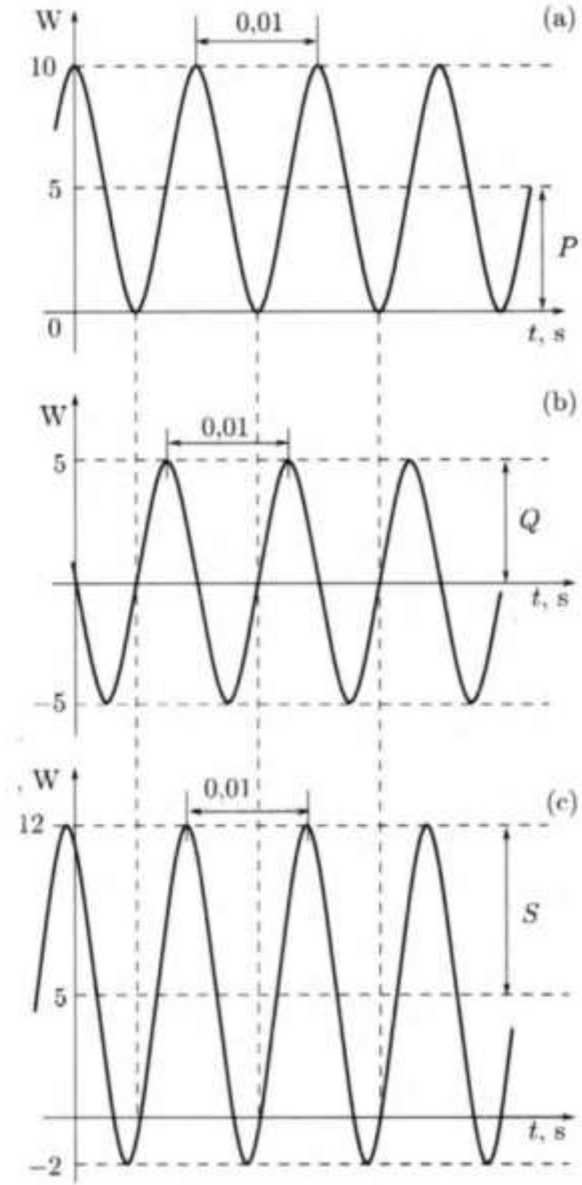
La potenza istantanea ha l'espressione

$$p(t) = P[1 + \cos(2\omega t + 2\theta_i)] - Q\,\mathrm{sen}(2\omega t + 2\theta_i)$$

Assumendo per semplicità $\theta_i = 0$, si ha

$$p(t) = 5[1 + \cos(200\pi t)] - 5\,\mathrm{sen}(200\pi t)$$

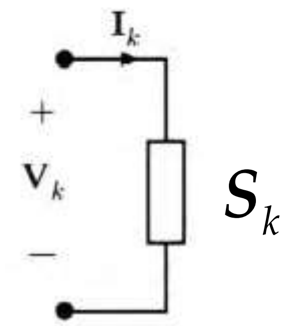
In Figura 10.18a è riportato il primo termine; in Figura 10.18b il secondo e, in basso, la potenza $p(t)$. Si noti che, quando si annulla il primo termine si annulla anche il secondo e quindi anche la potenza istantanea. Ciò vale in generale. La potenza apparente è $S = \sqrt{25 + 25} \cong 7$ VA.



9.4 Conservazione *p* complessa

La somma delle potenze istantane su tutti gli elementi di un circuito è sempre nulla

$$\sum_k S_k = \sum_k (P_k + jQ_k) = 0$$



$$\sum_k P_k = 0 \quad \text{e} \quad \sum_k Q_k = 0$$

Teorema di Boucherot: la potenza complessa assorbita da un bipolo è la somma delle potenze complesse degli elementi che lo compongono (*idem* per P e Q) $Q = \frac{1}{2} X I_m^2$

bipolo tutte **R e C** $\Rightarrow$ bipolo eq. **capacitivo** (X<0 $\Rightarrow$ Q<0)

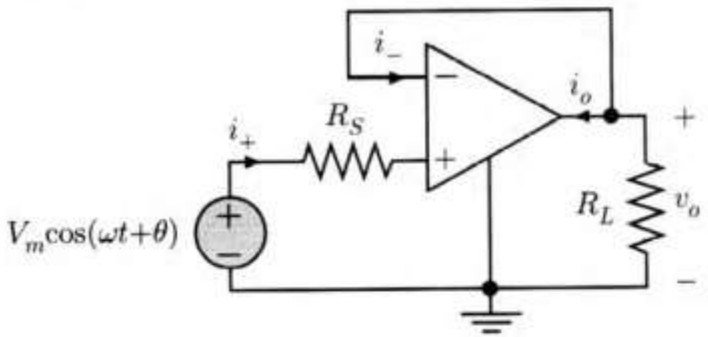
bipolo tutte **R e L** $\Rightarrow$ bipolo eq. **induttivo** (X>0 $\Rightarrow$ Q>0)

bipolo tutte **L e C** $\Rightarrow$ bipolo eq. **reattivo** (R=0 $\Rightarrow$ P=0)

9.4 Esempio di calcolo (10.12P)

Verificare la conservazione della potenza media in Figura 10.24.

Figura 10.24



Soluzione

Il generatore non eroga potenza poiché, assumendo ideale l'operazionale, la corrente i_+ è nulla. Per lo stesso motivo nel resistore R_s non viene dissipata potenza. La tensione v_o coincide con la tensione del generatore, quindi la potenza media assorbita dal resistore R_L vale:

$$P_L = \frac{1}{2}\frac{V_m^2}{R_L}$$

La *potenza istantanea* assorbita dall'operazionale si può ricavare con l'espressione seguente (v. *capitolo 1*):

$$p_{\text{op}} = v_+ i_+ + v_- i_- + v_o i_o$$

Poiché $i_+ = i_- = 0$, si ha

$$p_{\text{op}} = v_o i_o =$$

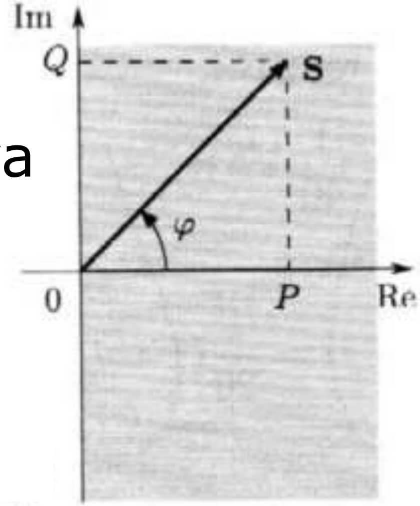
$$= V_m \cos(\omega t + \theta)\left[-\frac{V_m}{R_L}\cos(\omega t + \theta)\right]$$

La *potenza media* è

$$P_{\text{op}} = -\frac{1}{2}\,\frac{V_m^2}{R_L} = -P_L < 0$$

Quindi la potenza media *erogata* dall'operazionale coincide con la potenza media *dissipata* nel resistore.

9.5 Bipoli passivi



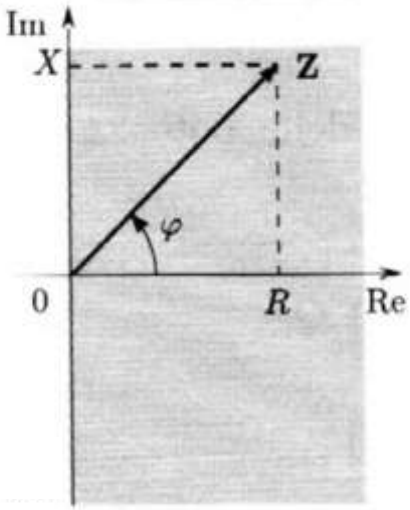
Definiamo un **bipolo passivo** quando $P \geq 0$

cioè il bipolo non è in grado di erogare pot. attiva

Per il bipolo passivo è certamente

$$-90° \leq \varphi \leq 90° \quad \text{e} \quad \cos(\varphi) = \frac{P}{S} \geq 0$$

lo sfasamento $|\varphi|$ tra v e i è sempre ≤±90°



bipoli passivi	$R \geq 0,\ G \geq 0$	$P \geq 0$
bipoli resistivi	$X = B = 0$	$Q = 0$
bipoli reattivi	$R = G = 0$	$P = 0$
bipoli induttivi	$X > 0,\ B < 0$	$Q > 0$
bipoli capacitivi	$X < 0,\ B > 0$	$Q < 0$

bipolo contenente solo **R e L e C** ⇒ bipolo **passivo**

9.5 Fattore di potenza

$PF = \cos\varphi$ da il comportamento energetico di un carico:
$PF = 1 \Rightarrow$ potenza attiva massima perchè i e v sono in fase (carico resistivo)
$PF = 0 \Rightarrow$ potenza attiva minima (nulla) perchè i e v sono in quadratura (carico reattivo)

PF si dice in ritardo o in anticipo secondo la posizione o **sfasamento della corrente rispetto alla tensione**

$\varphi = \theta_v - \theta_i > 0 \Rightarrow \theta_i < \theta_v \Rightarrow$ corrente in **ritardo** **(PF in ritardo)**
$\varphi = \theta_v - \theta_i < 0 \Rightarrow \theta_i > \theta_v \Rightarrow$ corrente in **anticipo** **(PF in anticipo)**

PF è in **ritardo** per i bipoli **induttivi**
PF è in **anticipo** per i bipoli **capacitivi**
Il ritardo massimo si ha nell'induttore ($\varphi = +90°$) e l'anticipo massimo si ha nel condensatore ($\varphi = -90°$)

9.5 Esempio di calcolo (10.13P)

Un bipolo assorbe 10 kVA con un fattore di potenza pari a 0,8 in ritardo. Sapendo che la tensione sul bipolo vale 220 V efficaci, ricavare le potenze, attiva e reattiva, la corrente massima e l'impedenza del bipolo.

Soluzione

Calcoliamo prima la potenza attiva:

$$P = S\cos\varphi = 10^4 \times 0{,}8 = 8 \text{ kW}$$

Poiché il fattore di potenza è in ritardo, il bipolo è induttivo ($Q > 0$), dunque

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 6 \text{ kVAR}$$

Poiché $S = V_{eff} I_{eff}$ abbiamo

$$I_{eff} = S/V_{eff} = 10^4/220 = 45{,}45 \text{ A}$$

$$I_m = I_{eff}\sqrt{2} = 64{,}3 \text{ A}$$

$$S = \frac{1}{2}Z|I|^2 = \frac{1}{2}ZI_m^2$$

Inoltre dalla (10.28) otteniamo

$$\mathbf{Z} = 2\frac{\mathbf{S}}{I_m^2} = \frac{2}{(64{,}3)^2}(8000 + j6000) =$$

$$= 3{,}87 + j2{,}90\ \Omega$$

Se avessimo avuto PF=0.8 in anticipo,

allora il bipolo sarebbe stato capacitivo (Q<0)

e avremmo ottenuto $Q = -\sqrt{S^2 - P^2} = -6\,\text{kVAR}$

da cui S=(8000-j6000) e quindi Z=3.87+j2.90

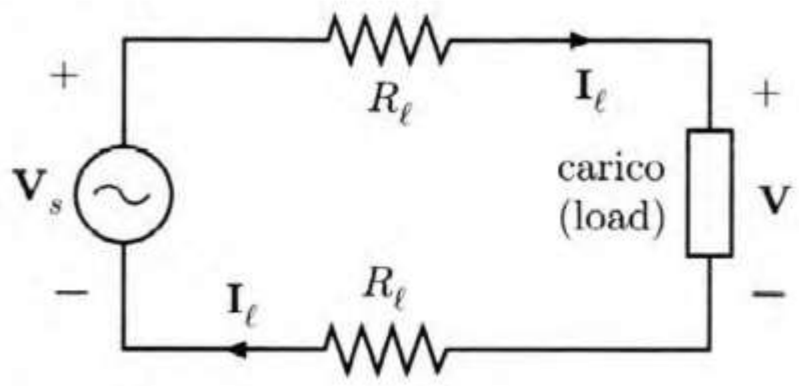
9.6 Rifasamento (problema)

Sorgente e carico collegati da una linea di trasmissione

$\Rightarrow$ **si ha potenza P_d dissipata sulla linea**
(Pb. economico: spesa inutile e spreco energetico)

$\Rightarrow$ **V sul carico non è V_s ma dipende dalla linea e dal carico**
(Pb. tecnico: carichi da alimentarsi con una data tensione)

Es. cavo di Al, D=1 cm, $\rho_l=2\times10^{-4}\ \Omega/\mathrm{m}$, e l=10 km si ha $R_l=2\ \Omega$



$$P_d = 2\times R_l I_{l,\mathrm{eff}}^{\,2}$$

$$V = V_s - 2R_l I_l$$

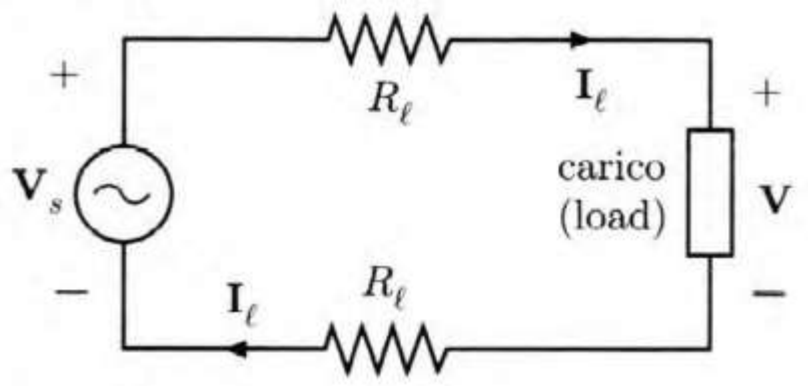
Es. se $I_{l,\mathrm{eff}}$=15 A $\Rightarrow$ $P_d=2\times2\times225$ W=900 W $\approx$ 1 kW "potenza sprecata"!

Es. se $V_{s,\mathrm{eff}}$=220 V $\Rightarrow$ $V_{\mathrm{eff}}=220-2\times2\times15=160$ V ben "più bassa di $V_{s,\mathrm{eff}}$"!

9.6 Rifasamento (soluzione)

$V = V_s - 2R_l I_l$ $P_d = 2 \times R_l I_{l,\mathrm{eff}}^2$

sul carico vogliamo $P = P_{\mathrm{TARGA}} = \mathrm{cost.}$ e $V \cong V_s = \mathrm{cost.}$



Si può ridurre la differenza tra V e V_s alimentando il carico con bassa corrente ma per operare alla pot. di targa prevista occorre una "alta tensione" (*e.g.* linea HV a lunga distanza)

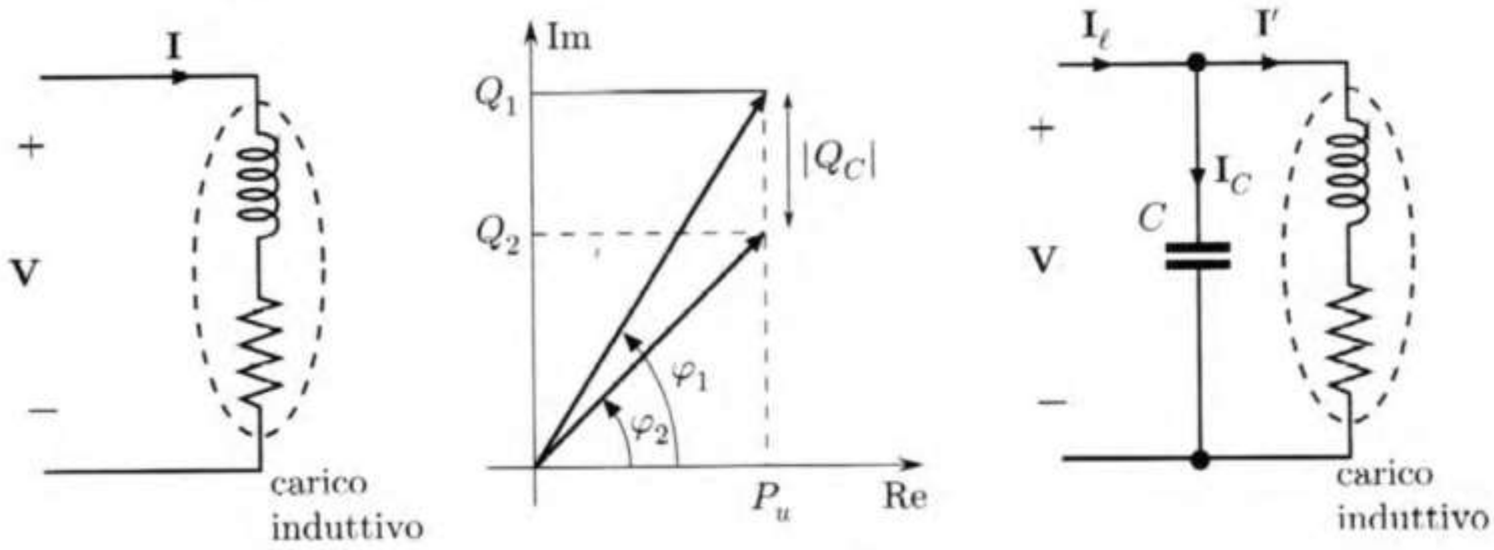
Si può ridurre P_d aumentando la sezione dei fili ma costa. Invece conviene ridurre P_d riducendo la corrente di linea I_l

$V_{\mathrm{eff}} = \mathrm{cost.}$ e $P = V_{\mathrm{eff}} I_{l,\mathrm{eff}} \cos\varphi = \mathrm{cost.}$ cercando di ridurre I_{eff}:
si aumenta $\cos\varphi$ con il rifasamento di v e i sul carico

9.6 Rifasamento (metodo)

La potenza persa lungo la linea diminuisce se riusciamo a ridurre lo sfasamento tra tensione e corrente sul carico (questo perchè occorre prelevare meno corrente dalla linea)

Es. carico da rifasare: motore a induzione

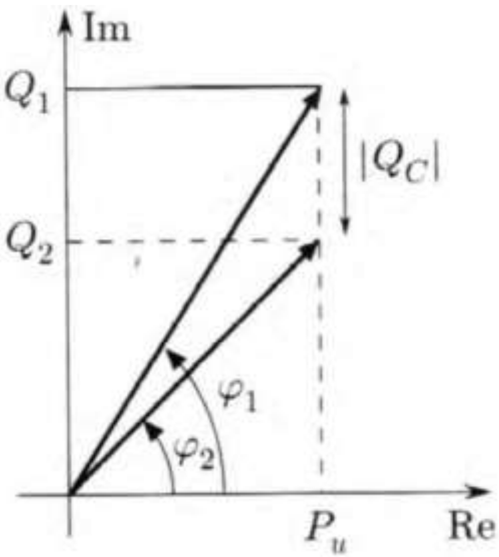


Per aumentare PF, riduciamo φ da φ_1 a φ_2 **riducendo la potenza reattiva** da Q_1 a Q_2, grazie a un **condensatore di rifasamento** (Q_C<0) posto in parallelo al carico

9.6 Rifasamento (formule)

prima del rifasamento: $Q=Q_1$

dopo il rifasamento: $Q_2=Q_1+Q_C$



si vuole P=cost. e $|Q_2|<|Q_1|$

$$Q_C = -\frac{1}{2}\omega C V_m^2 = -\omega C V_{eff}^2 < 0$$

Per ottenere φ_2 partendo da φ_1, deve essere $Q_2=Q_1+Q_C$

e quindi $P\tan\varphi_2=P\tan\varphi_1+Q_C$ ovvero $P(\tan\varphi_2-\tan\varphi_1)=-\omega C V_{eff}^2$

si ricava il valore della capacità di rifasamento:

$$C = \frac{P(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)}{\omega V_{eff}^2}$$

$$C_0 = \frac{P\tan\varphi_1}{\omega V_{eff}^2}$$

per avere rifasamento "completo" (con $Q_2=0$)

9.6 Rifasamento (in genere)

Il problema più generale del rifasamento riguarda un carico Z_{LOAD}, alimentato dalla linea elettrica, quando il carico presenta una marcata componente di potenza reattiva

Ciò comporta perdite di potenza lungo la linea, tanto che il fornitore di energia elettrica può applicare maggiorazioni sui costi se l'utente collega in rete carichi a basso $\cos\varphi$

In genere si può provvedere a un rifasamento del carico (migliorando il fattore di potenza), applicando in parallelo una impedenza Z_{RIFAS} che assorba potenza reattiva con segno opposto a quella del carico, di modo da **ridurre la potenza reattiva del nuovo "carico rifasato"**

Se il carico ha $\boldsymbol{Q_1>0 \Rightarrow}$ **condensatore di rifasamento** con $Q_2=Q_C<0$ se invece il carico ha $\boldsymbol{Q_1<0 \Rightarrow}$ **induttore di rifasamento** con $Q_2=Q_L>0$

9.6 Esempio di calcolo (10.16P)

Un carico assorbe 10 kW con un fattore di potenza 0,75 in ritardo. La tensione è pari a 220 V efficaci e la frequenza è 50 Hz. Rifasare il carico in modo tale da aumentare il fattore di potenza fino a 0,95. Calcolare la corrente di linea e la potenza dissipata sulla linea prima e dopo il rifasamento, assumendo $R_\ell = 0{,}5\ \Omega$.

Soluzione

L'angolo di fase iniziale è

$$\varphi_1 = \cos^{-1}(0,75) = 41{,}4°$$

Quello desiderato vale

$$\varphi_2 = cos^{-1}(0{,}95) = 18{,}2°$$

Applicando la formula (10.42) si ottiene la capacità di rifasamento

$$C = \frac{10^4(\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2)}{100\pi \times 220^2} = 0{,}36\ \text{mF}$$

$$C = \frac{P\left(\tan\phi_1 - \tan\phi_2\right)}{\omega V_{\text{eff}}^2}$$

Per la corrente efficace abbiamo:

$$I_{\ell,eff} = \frac{P}{V_{eff}\cos\varphi}$$

Quindi la corrente prima del rifasamento vale

$$(I_{\ell,eff})_1 = \frac{10^4}{220 \times 0{,}75} = 60\ \text{A}$$

dopo il rifasamento

$$(I_{\ell,eff})_2 = \frac{10^4}{220 \times 0{,}95} = 47{,}8\ \text{A}$$

La potenza dissipata prima del rifasamento è

$$(P_d)_1 = (1)(60)^2 = 3600\ \text{W}$$

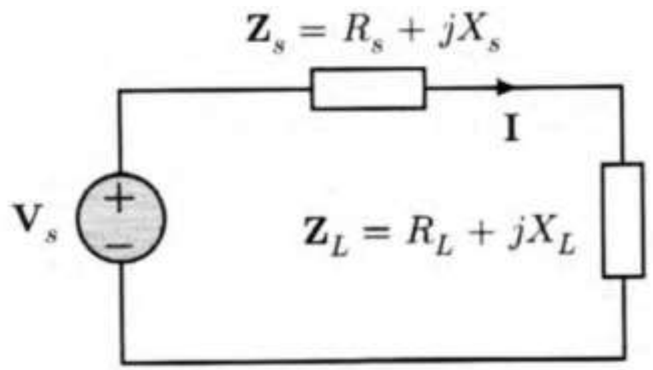
dopo il rifasamento è

$$(P_d)_2 = (1)(47{,}8)^2 = 2284\ \text{W}$$

con una riduzione di 1316 W.

9.7 Massimo trasferimento di *p*

Per ottenere il massimo trasferimento di potenza tra il generatore (V_s) e il carico Z_L, occorre che l'impedenza del carico sia il complesso coniugato dell'impedenza (Z_s) del generatore: $\mathbf{Z_L = Z_s^* \Rightarrow P_L = P_{L,MAX}}$



$\mathbf{P_L = P_{L,MAX}}$???

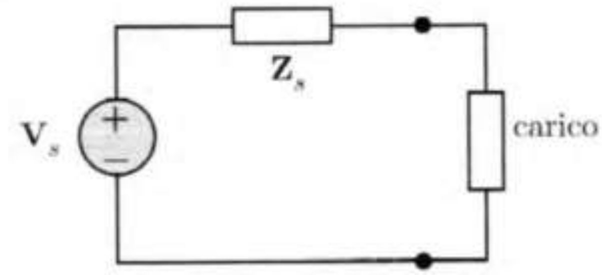
Dunque $R_L = R_s$ (come visto nel caso dei circuiti resistivi) e inoltre $X_L = -X_s$: si dice che **il carico è adattato** (al gen.)

In condizioni di **adattamento** $P_{Z,S} = P_{Z,L} = P_L$ e metà potenza del generatore è "sprecata" sulla sua impedenza interna

9.7 Esempio di calcolo (10.17P)

Nel circuito in Figura 10.35 si ha $\mathbf{Z}_s = 10(1-j)$ kΩ. Determinare un bipolo di carico che assorbe la massima potenza media per $\omega = 6000$ rad/s. Gli elementi del carico devono essere collegati in parallelo.

Figura 10.35



Soluzione

L'impedenza di carico che assorbe la massima potenza vale

$$\mathbf{Z}_L = 10(1+j)\ \text{k}\Omega$$

Si tratta di una impedenza di tipo induttivo; un possibile carico induttivo in parallelo può essere quello mostrato in Figura 10.36.

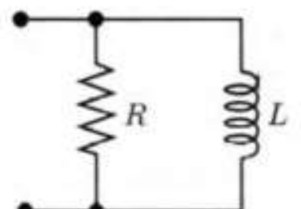
L'ammettenza del bipolo in Figura 10.36 deve coincidere con $1/\mathbf{Z}_L$, dunque:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{10^4(1+j)} = \frac{1}{2\times 10^4}(1-j)$$

uguagliando le parti reali e immaginarie dei due membri si ottengono due equazioni la cui soluzione è

$$R = 20\ \text{k}\Omega \qquad L = 10/3\ \text{H}$$

Figura 10.36



9.8 Sovrapposizione delle p

Abbiamo già visto che in regime stazionario la potenza (grandezza quadratica e non lineare) non va soggetta al principio di sovrapposizione
Lo stesso vale per la potenza in regime sinusoidale (istantanea e media e complessa), dove in presenza di più generatori isofrequenziali la potenza su un elemento del circuito non è calcolabile come somma delle potenze prodotte dai singoli generatori: S non è $S_1+S_2+S_3+\ldots$

Occorre prima ricavare tensione e corrente: solo dal loro prodotto nel tempo si ricava p e quindi anche P (e Q e $\boldsymbol{S}$)
NON è $p=p_1+p_2+p_3+\ldots$ MA da $v=v_1+v_2+v_3+\ldots$ e da $i=i_1+i_2+i_3+\ldots$ (grandezze sovrapponibili) si ricava $\boldsymbol{p(t)=v(t)i(t)}$

TUTTAVIA, con generatori sinusoidali **non isofrequenziali** la **potenza media** è la somma (sovrapposizione) delle diverse potenze considerate singolarmente: $\boldsymbol{P=P_1+P_2+P_3+\ldots}$

9.8 Esempio di calcolo (10.22P)

Determinare la potenza media assorbita dal resistore in Figura 10.47.

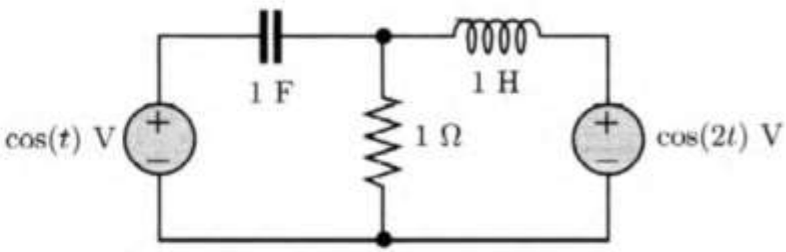


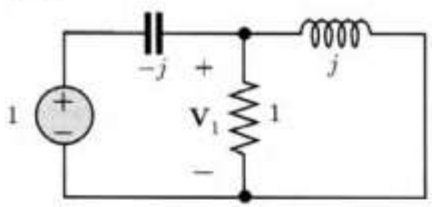
Figura 10.47

9.8 Esempio di calcolo (10.22P)

Soluzione

I generatori hanno frequenze differenti, dunque la potenza media può essere ottenuta con la sovrapposizione. Lasciando solo il generatore di sinistra si ha il circuito simbolico in Figura 10.48.

Figura 10.48



Resistore ed induttore in parallelo equivalgono ad una impedenza

$$\mathbf{Z} = \frac{j}{1+j}$$

Con la formula del partitore ricaviamo la tensione sul resistore

$$\mathbf{V}_1 = 1\frac{\mathbf{Z}}{\mathbf{Z}-j} = j$$

La tensione sul resistore è

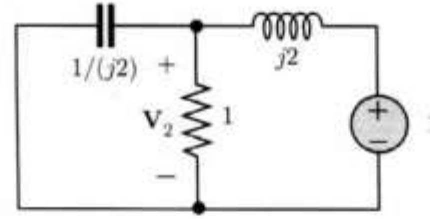
$$v_1(t) = -\text{sen}(t)\ \text{V}$$

La potenza media dovuta al generatore di sinistra è

$$P_1 = \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{V}_1|^2}{R} = \frac{1}{2}\ \text{W}$$

Consideriamo ora il solo generatore di destra. Il circuito simbolico è mostrato in Figura 10.49.

Figura 10.49



L'impedenza equivalente del parallelo resistore-condensatore è

$$\mathbf{Z}' = \frac{\frac{1}{j2}}{1+\frac{1}{j2}} = \frac{1}{1+j2}$$

La tensione $\mathbf{V}_2$ vale

$$\mathbf{V}_2 = 1\frac{\mathbf{Z}'}{\mathbf{Z}'+j2} = \frac{1}{-3+j2} = \frac{1}{\sqrt{13}}\angle 146{,}3°$$

Dunque

$$v_2(t) = \frac{1}{\sqrt{13}}\cos(2t - 146{,}3°)\ \text{V}$$

La potenza media assorbita dal resistore è

$$P_2 = \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{V}_2|^2}{R} = \frac{1}{26}\ \text{W}$$

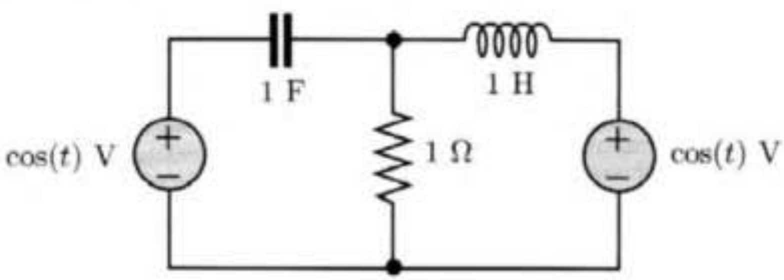
La potenza media complessiva assorbita dal resistore è

$$P = P_1 + P_2 = \frac{7}{13}\ \text{W}$$

9.8 Esempio di calcolo (10.23P)

Determinare la potenza media assorbita dal resistore in Figura 10.50.

Figura 10.50



Soluzione

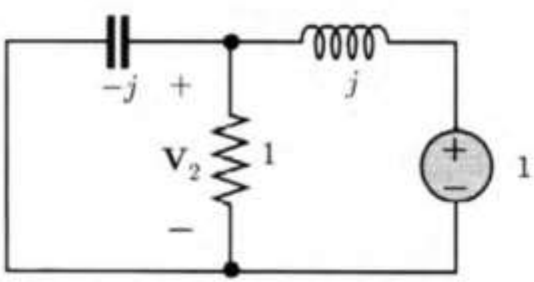
È lo stesso circuito dell'esempio precedente in cui ora i due generatori sono *isofrequenziali*. La sovrapposizione in questo caso *vale per la tensione ma non per la potenza*. Ricaviamo la tensione ai capi del resistore con la sovrapposizione, quindi calcoliamo la potenza media.

Quando agisce il solo generatore di sinistra abbiamo la situazione già studiata nell'esempio precedente; dunque

$$v_1(t) = -\operatorname{sen}(t)\ \mathrm{V}$$
$$P_1 = \frac{1}{2}\ \mathrm{W}$$

Consideriamo ora il solo generatore di destra. Il circuito simbolico è mostrato in Figura 10.51.

Figura 10.51



9.8 Esempio di calcolo (10.23P)

L'impedenza equivalente del parallelo resistore-condensatore è

$$\mathbf{Z}' = \frac{-j}{1-j} = \frac{1-j}{2}$$

La tensione $\mathbf{V}_2$ vale

$$\mathbf{V}_2 = 1\frac{\mathbf{Z}'}{\mathbf{Z}'+j} = \frac{1-j}{1+j} = -j$$

Dunque

$$v_2(t) = \mathrm{sen}(t)\ \mathrm{V}$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{V}_2|^2}{R} = \frac{1}{2}\ \mathrm{W}$$

È evidente che $P \neq P_1 + P_2$, infatti $P_1 + P_2 = 1$ W, mentre la potenza media dissipata nel resistore è nulla, essendo

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = 0$$

9.9 A: strumenti elettrodinamici

bobina fissa con I_1=cost. nota

bobina mobile con I_2=incognita

campo magnetico della bobina fissa esercita coppia motrice su bobina mobile “frenata” dalla molla (con ago e indice)

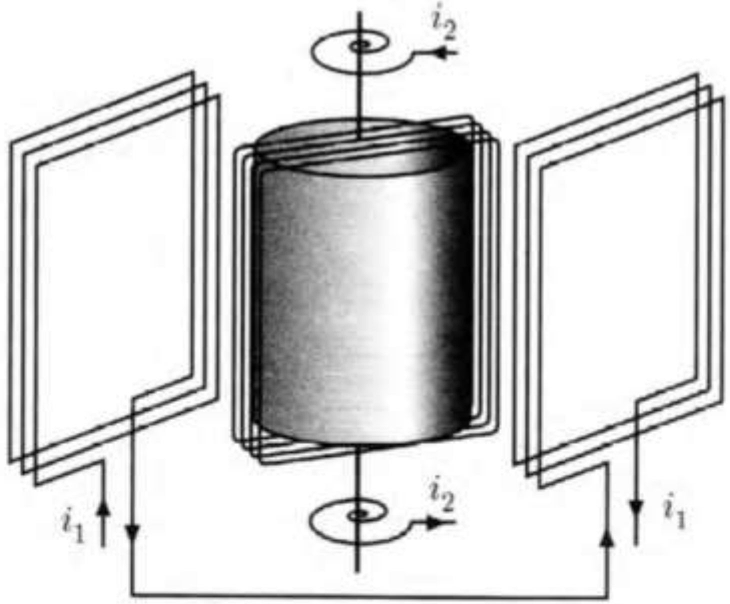


Figura 10.56 Schema di uno strumento elettrodinamico.

$$\alpha_{I_2,\mathrm{d.c.}} = k_{I_2,\mathrm{d.c.}} I_1 I_2$$

$$\alpha_{I_2,\mathrm{a.c.}} = k_{I_2,\mathrm{a.c.}} I_1 I_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)$$

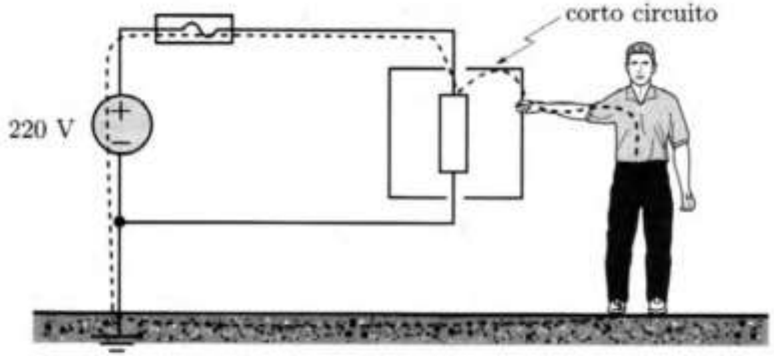
$$\alpha_{I^2,\mathrm{a.c.}} = k_{I^2,\mathrm{a.c.}} I \cdot I = k_{I^2,\mathrm{a.c.}} I^2$$

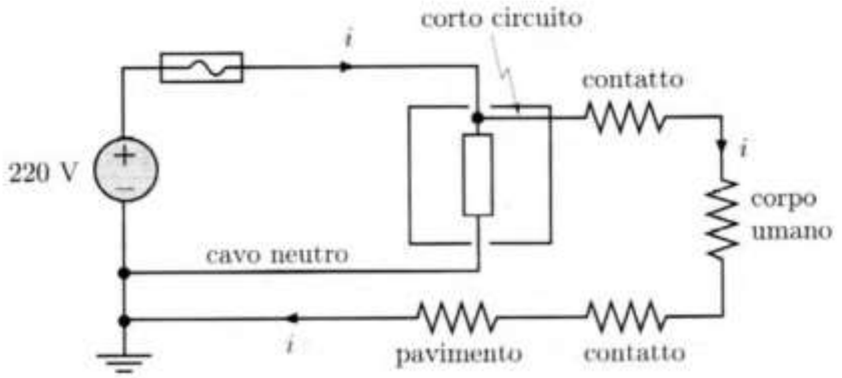
$$\alpha_{V^2,\mathrm{a.c.}} = k_{V^2,\mathrm{a.c.}} V \cdot V = k_{V^2,\mathrm{a.c.}} V^2$$

$$\alpha_{P,\mathrm{a.c.}} = k_{P,\mathrm{a.c.}} V_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}} \cos\left(\theta_v - \theta_i\right)$$

α è l’angolo di deflessione dell’ago

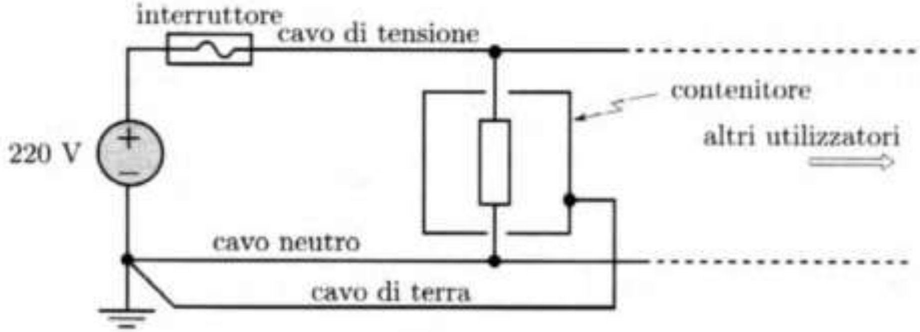
9.9 A: connessione di terra

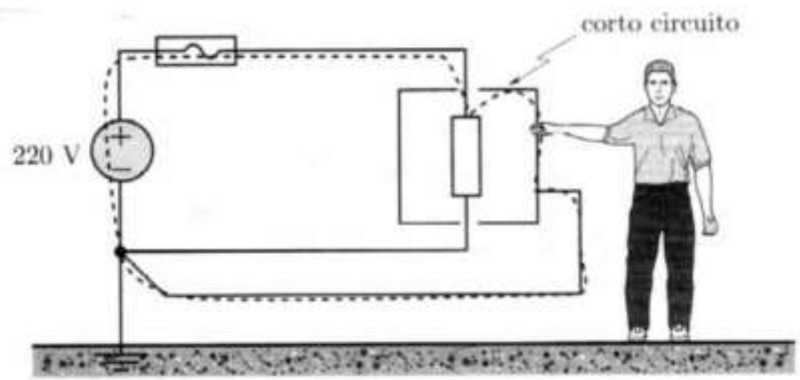




I_{eff}=(220V)/(2kΩ)≅100mA ⇒ arresto cardiaco: letale!

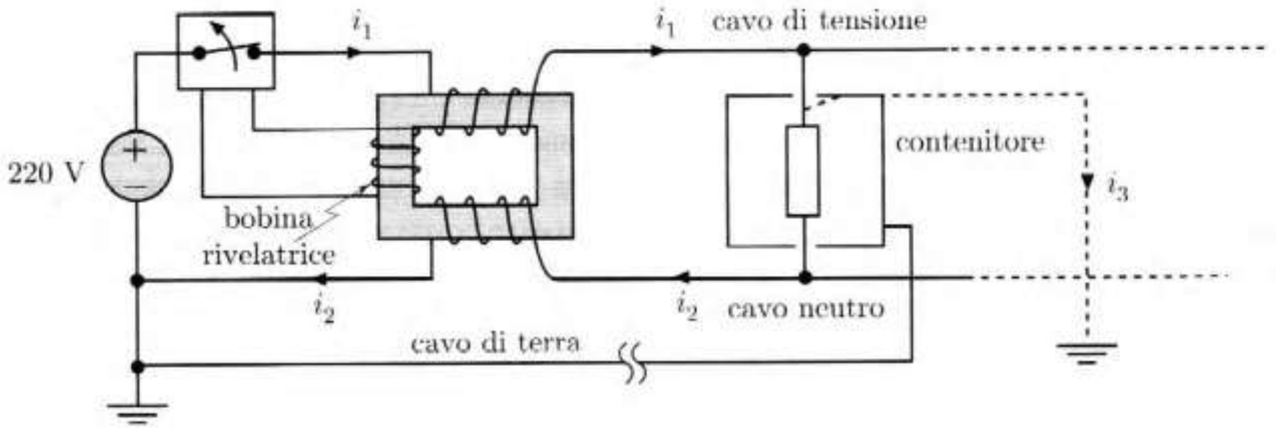
impianto e dispositivo connessi con con **cavo di terra**





la corrente di c.c. non attraversa l'uomo (o donna)

9.9 A: interruttore differenziale



funzionamento **normale i_2=i_1 e i_3=0** (e anche $i_{\mathrm{Terra}}=0$)

la bobina rivelatrice non sente campo magnetico variabile nel traferro e in essa la corrente indotta $i_{\mathrm{riv}}=0$ e tale corrente nulla lascia chiuso l'interruttore

Funzionamento **anomalo** (dopo c.c. e dispersione verso terra)

$\boldsymbol{i_3 \neq 0} \Rightarrow i_2 \neq i_1 \Rightarrow$ la bobina sente $i_{\mathrm{riv}} \neq 0$ e "stacca" l'interruttore

(**"salvavita"** differenziale MA non protegge dalle correnti, di sovraccarico o anche c.c. tra fase e neutro... "fusibile" o magnetotermico)

risposta rapida (decine ms) per sbilanciamenti di corrente anche piccoli i_1-i_2 = pochi mA

Sommario

- In regime sinusoidale la **potenza istantanea** è $p(t)=v(t)i(t)$
  è costituita da un termine di **potenza media** e una potenza oscillante a 2ω:

$$p(t)=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}\,I_{\mathrm{m}}\cos(\theta_v-\theta_i)+\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}\,I_{\mathrm{m}}\cos(2\omega t+\theta_v+\theta_i)$$

- La potenza media è detta **potenza attiva** e dipende dale ampiezze di tensione e corrente e dal coseno dello sfasamento tra tensione e corrente

$$P=P_{\mathrm{MEDIA}}=P_{\mathrm{ATT}}=\frac{1}{2}V_{\mathrm{m}}\,I_{\mathrm{m}}\cos(\theta_v-\theta_i)$$

- L'**energia assorbita** in $\Delta t>>T$ è calcolabile come $\boldsymbol{E=P\Delta t}$.

- La potenza attiva (media) nell'induttore e nel condensatore è nulla.

- **Valori efficaci** (tensione e corrente) = valori di picco diviso $\sqrt{2}$: $\boldsymbol{A_{\mathrm{eff}}=A_{\mathrm{m}}/\sqrt{2}}$.
  Con i valori efficaci, le formule rimangono immutate da d.c. ad a.c..

Sommario

- La **potenza complessa** S è un numero complesso, il cui modulo S è la **potenza apparente** e l'argomento è $\varphi=\theta_v-\theta_i$ come differenza tra la fase della tensione e la fase della corrente.
- Si definisce **fattore di potenza** il coefficiente numerico $\boldsymbol{PF=\cos\varphi}$.

- Parte reale di S è la **potenza attiva**: $P=\mathrm{Re}[S]=V_{\mathrm{eff}}I_{\mathrm{eff}}\cos\varphi$ (VA).
  Parte immaginaria di S è la **potenza reattiva**: $Q=\mathrm{Im}[S]=V_{\mathrm{eff}}I_{\mathrm{eff}}\sin\varphi$ (VAR).
  In termini dell'impedenza $Z=R+jX$ o ammettenza $Y=G+jB$, si ottiene:

$$P=RI_{\mathrm{eff}}^2 \quad \mathrm{e} \quad Q=XI_{\mathrm{eff}}^2 \qquad\qquad P=GV_{\mathrm{eff}}^2 \quad \mathrm{e} \quad Q=-BV_{\mathrm{eff}}^2$$

- E' possibile scomporre la tensione in una componente **in fase** $\boldsymbol{v_{\mathrm{P}}(t)}$ e una **in quadratura** $\boldsymbol{v_{\mathrm{Q}}(t)}$, con la corrente. Moltiplicando queste componenti per la corrente $i(t)$, si ottengono due andamenti di potenza nel tempo entrambi oscillatori a pulsazione 2ω: il 1° è ampio $\pm P$ attorno a un valor medio P e il 2° è ampio $\pm Q$ attorno a un valor medio nullo.

Sommario

- Vale la **conservazione della potenza complessa**:

$$\sum_k \boldsymbol{S}_k = \sum_k \left(P_k + jQ_k\right) = 0 \quad \text{e} \quad \sum_k P_k = 0 \quad \sum_k Q_k = 0$$

- Un **bipolo passivo** (ad es. contenente R, L, e C) ha sempre $\boldsymbol{P \geq 0}$ e può essere resistivo (Q=0), reattivo (P=0) di tipo induttivo (Q>0) o capacitivo (Q<0).

- Il **rifasamento** di un carico alimentato da una linea elettrica consente di ridurre le perdite di potenza e limitare i cali di tensione lungo la linea: massimizzando il fattore di potenza, si riesce a mantenere il carico alimentato con la tensione e potenza di targa diminuendo la corrente necessaria.
  Il bipolo di rifasamento è posto in parallelo al carico che assorbiva "troppa potenza reattiva": deve avere reattanza tale da ridurre la potenza reattiva.

- La potenza ottenuta da più generatori isofrequenziali non si ricava dalla sovrapposizione delle potenze. Si possono ricavare tensione e corrente, come grandezze sovrapposte, per poi ottenere $p(t)=v(t)i(t)$.
  Invece, la potenza media (da generatori non isofrequenziali) si ottiene tramite sovrapposizione/somma delle diverse potenze a frequenze differenti.