

# 微型无人机阵列位置扰动下的 DoA 估计混合 Cramer-Rao 界

冯永攀<sup>1</sup>, 王继刚<sup>2</sup>, 王俊峰<sup>3</sup>, 卢 忱<sup>1\*</sup>

(1.深圳信息职业技术学院, 深圳 518060; 2.中兴通讯股份有限公司, 深圳 518055; 3.四川大学, 成都 411199)

**摘要:** 随着无人机技术的快速发展, 基于微型无人机集群的分布式天线阵列因其灵活部署、低成本、可重构等优势, 在无线通信、目标探测、环境监测等领域展现出广阔的应用前景。然而, 在实际部署过程中, 受外界环境干扰和无人机自身控制精度限制, 无人机集群难以精确达到预设位置, 产生随机的位置扰动误差。这些位置扰动不仅会恶化阵列的空间频谱特性, 还会显著降低对目标信号的探测、定位和参数估计性能, 成为制约无人机集群阵列实用化的关键瓶颈之一。针对上述挑战, 本文基于位置扰动误差在相邻无人机间传播的物理特性, 建立了考虑位置扰动的无人机集群阵列信号模型, 重点研究了位置扰动对目标信号到达角 (Direction of Arrival, DoA) 估计性能的影响。通过引入位置扰动相关矩阵, 推导了 DoA 估计在有限采样情况下的混合克拉美罗下界 (Hybrid Cramér-Rao Bound, HCRB), 构建了评估位置扰动影响的理论基础。为了验证理论分析的有效性, 本文通过数值仿真, 从位置扰动方差、信噪比、无人机数量以及 DoA 角度等多个角度, 对比分析了有无位置扰动情况下的 DoA 估计性能。仿真结果表明, 位置扰动显著恶化了 DoA 估计精度, 且随着信噪比的提高, DoA 估计对位置误差更加敏感。此外, 增加无人机数量可在一定程度上降低 HCRB, 但难以消除位置扰动带来的估计误差。

**关键词:** 无人机; 阵列; 位置扰动; 到达角; Cramer-Rao 界

中图分类号: TN927.2

文献标志码: A

DOI:10.12454/j.jsuese.202400052

## Hybrid Cramer-Rao Bound for DoA Estimation with Micro-UAV Array under Positional Errors

FENG Yongpan<sup>1</sup>, WANG Jigang<sup>2</sup>, WANG Junfeng<sup>3</sup>, LU Chen<sup>1\*</sup>

(1.Shenzhen Institute of Information Technology, Shenzhen 518060; 2. Zhongxing Telecom Equipment, Shenzhen 518055; 3. Sichuan University, Chengdu 411199)

**Abstract:** In recent years, the applications of unmanned aerial vehicles (UAVs) have experienced rapid growth in both military and civilian domains, including aerial surveillance, remote sensing, and search and rescue operations. Beyond the use of individual UAVs, swarm formations have been widely employed in civilian areas such as on-site control, supervision, and mapping. Among the critical technologies in this field, micro-UAV array radar plays a crucial role. By treating a micro-UAV swarm as a large, movable antenna array aperture, narrow beams and high-precision target detection can be achieved through beamforming and signal processing techniques.

Consequently, high-precision flight control of UAV swarms is of utmost importance. To date, two main strategies have been adopted for outdoor UAV swarm formation control: GPS-based deployment and relative position-based deployment. Due to the inaccuracy of GPS positioning data, which can vary between 2 to 5 meters, the risk of collisions among UAVs is significant. As a result, most designers and researchers have opted for relative position-based strategies.

Although relative position-based formations are theoretically feasible, practical challenges persist.

收稿日期: 2024-01-20

基金项目: 深圳市高等院校稳定支持计划 (20220818232202001); 深圳市科技计划项目 (GJHZ20220913143013024)

作者简介: 冯永攀 (1986—), 男, 讲师, 博士. 研究方向: 阵列信号处理, 感知通信一体化. E-mail: freddy.yp.feng@gmail.com

\*通信作者: 卢忱, E-mail: luchen@szit.edu.cn

Micro-UAVs in flight may deviate from their predetermined positions due to air turbulence. Moreover, in relative position-based formations, the positional error of one UAV can be inherited by subsequent UAVs, potentially leading to a significant degradation in the detection performance of the mobile array radar.

In many cases, antenna arrays can effectively retrieve parameters characterizing signal sources by jointly exploiting the temporal and spatial dimensions. However, even minor positional errors of sensors can severely degrade the performance of sensor arrays. Therefore, in the presence of calibration errors, the lower bound of estimation accuracy aids in assessing the efficiency, performance prediction, and precision of estimators, particularly in the field of interferometric synthetic aperture radar (InSAR). It is well-known that the Cramér – Rao bound (CRB) is strict for a large class of estimators. However, in the presence of random nuisance parameters, analytical calculation through numerical integration becomes challenging. In previous studies, the modified CRB has been applied to parameter estimation in radar problems. In the modified approach, the hybrid Cramér – Rao bound (HCRB) has been shown to represent a good trade-off between computability, tightness, and the range of estimators it addresses, given the condition of unbiased estimation. It has also been observed that unless certain conditions are met, the HCRB is generally not an attainable bound, not even asymptotically.

Despite numerous studies investigating the impact of positional perturbations on UAVs or antenna arrays, the inherent nature of positional errors arising from relative position-based formations has not been widely considered in the literature. Therefore, based on the assumption of the inheritability of UAV array perturbations, we derive the HCRB for the direction of arrival (DoA) of a single unknown source, leading to a quantitative analysis of the impact of positional errors on DoA estimation performance. For simplicity, we assume that the UAV swarm formation is a uniform linear array, and under the assumption of perturbation inheritance, we jointly analyze the perturbations in the parallel and perpendicular directions to the aperture. Furthermore, we discuss the influence of factors such as positional variance, signal-to-noise ratio (SNR), number of UAVs, and direction of arrival (DoA) on the HCRB performance of DoA.

The derivation of the HCRB for DoA estimation in the presence of positional perturbations is presented in detail. We consider a UAV swarm with  $N$  UAVs, each carrying an omnidirectional antenna. It is assumed that the  $n$ th UAV may randomly deviate from its predetermined position, with a displacement of  $\delta x_n$  in the direction parallel to the aperture and  $\delta y_n$  in the direction perpendicular to the aperture. The narrowband signal arriving at an angle  $\theta$  in the far-field scenario is considered.

Numerical simulations are conducted to analyze the performance of the HCRB with and without positional errors, considering factors such as positional variance, SNR, number of UAVs, and DoA. The results demonstrate that as the positional perturbation variance increases, the HCRB for both low and high SNR cases increases from the CRB level without interference, confirming that the CRB without positional errors represents the lower bound of the HCRB with positional errors. Monte Carlo experiments based on the matched filter (MF) estimator exhibit consistent trends with the theoretical values, further validating the correctness of the derived conclusions.

Furthermore, the impact of different SNR levels on the HCRB of DoA is investigated. It is evident that as the SNR increases, the HCRB of DoA becomes more sensitive to positional errors. The HCRB of DoA decreases with increasing SNR, and the smaller the positional perturbation variance, the lower the HCRB value, aligning with expectations.

The influence of the number of UAVs on the HCRB is also examined under different positional perturbation variances. The results show that as the number of UAVs increases from 1 to 128, the HCRB monotonically decreases, but the HCRB with positional errors cannot converge to the CRB without perturbations. Additionally, the smaller the positional error variance, the lower the corresponding HCRB value.

Lastly, the impact of different DoA angles on the HCRB is simulated, considering different positional variances. The results reveal that the HCRB corresponding to different DoA angles is non-uniform, with the signal

at  $0^\circ$  achieving the lowest HCRB under the same conditions. As the absolute value of the DoA increases, the HCRB also increases. Moreover, the HCRB exhibits axial symmetry with respect to the DoA, consistent with the trend of the CRB without positional errors.

**Key Words:** UAV; array; positional errors; DoA; Cramer-Rao bound

## 1 引言

近年来,随着无人机技术的飞速发展,无人机集群在军事和民用领域受到了广泛关注,应用包括空中监视、遥感和搜救行动等[1,2]。相比单个无人机,无人机集群能够克服单个无人机的局限性,实现更复杂的任务。无人机集群中的多个无人机通过协同工作,可以组成一个虚拟的大规模天线阵列,从而提高系统的性能。编队无人机阵列已广泛用于民用领域,如现场控制或监督,测绘等[3]。然而,由于无人机的随机分布和动态移动,无人机集群面临着诸多挑战,其中波达方向(DOA)估计是一个重要的研究问题。本文对无人机集群波达方向估计的最新研究进展进行了综述,重点讨论了无人机位置扰动、信道估计、多目标跟踪、重构智能表面等热点问题。

文献[1]设计了一种集成感知和通信的分布式协同跟踪框架,通过无人机间资源协调,在降低通信开销的同时提高了感知和跟踪性能。文献[2]分析了位置扰动对 DOA 估计性能的影响,理论和仿真结果表明位置扰动导致空间谱性能恶化,存在峰值功率和主瓣宽度的折中,且随无人机数量的增加,性能恶化加剧。不同 DOA 估计方法的归一化空间谱渐近收敛到相同形状。文献[3]利用辅助用户估计无人机取向角,再通过求根法估计 DOA,该方法与无人机间隔无关。文献[6]将信道分解为 DOA、位置、增益等多个参数,并用秩约简估计器估计 DOA。文献[9]提出一种重构智能表面辅助的无人机集群波达方向估计新方法,该系统仅需一个接收通道,定义了含位置扰动参数的原子范数,大大降低了复杂度,改善了估计性能。文献[4][5]通过实验室实验和外场试验,验证了无人机集群 DOA 估计的有效性,重点讨论了传感器误差和位置扰动等因素的影响。文献[7]提出一种多阵型跟踪方法,通过阵型变换实现全向估计、高增益跟踪和包围。文献[8]综述了射频检测定位技术,分析了面临的诸多挑战,提出了一些潜在的解决方案,如融合射频与其他传感器、引入人工智能等。

微型无人机阵列雷达是其中非常重要的一项技术。具体来说,就是通过将微型无

人机阵列视为空中一个大的可移动天线阵列孔径,通过微型无人机阵列的波束成形和信号处理技术来实现窄波束、高精度的目标探测[4-5]。然而,无人机集群波达方向估计与传统的阵列信号处理有所不同,主要面临挑战之一是阵元位置扰动。由于无人机的随机分布和动态移动,阵元位置很难准确已知,存在随机扰动,位置扰动会恶化 DOA 估计性能。

由此可见,对无人机编队进行高精度的飞行控制是非常重要的环节。到目前为止,室外无人机阵列的编队控制主要有两种技术,即基于 GPS 位置的部署和基于相对位置的部署[6-9]。由于 GPS 位置数据不准确,误差在 2 到 5 米之间,可能会引发无人机间的碰撞。因此,大多数设计师和研究人员采用基于相对位置的策略。

尽管基于相对位置的编队在理论上是可行的,但在实践中仍然存在一些问题。由于气流扰动,飞行中的微型无人机可能会偏离其预定位置。此外,在基于相对位置编队的情况下,一架无人机的位置误差会被其后续无人机继承,这可能会大大降低移动阵列雷达的探测性能。

在许多情况下,天线阵列可以有效地通过联合时间和空间维度来检索表征信号源的参数。然而,传感器微小的位置误差都会严重降低传感器阵列的性能[16-19]。因此,在存在校准误差的情况下,估计精度的下限有助于判断估计器的效率、预测性能及精度,特别是在干涉合成孔径雷达(InSAR)领域[20]。众所周知,Cramér-Rao 下界对于一大类估计器来说是严格的。然而,在有随机干扰参数的情况下,很难通过数值积分进行分析计算。在[21]中,修正的 CRB 已应用于雷达问题中的参数估计。在修正方法中,混合 Cramér-Rao 下界(HCRB)被证明代表了其所指估计器类的易计算性、紧密性和宽度之间的良好权衡,即估计无偏的条件。在[22]中还观察到,除非满足某些条件,否则 HCRB 通常不是可达界,甚至不是渐近的。

尽管已有许多研究位置扰动对无人机或天线阵列的影响的工作[10-12],但基于相对位置编队引起的位置误差具有继承特性这一特点,大多数文献都没有给予考虑。

因此, 基于无人机阵列扰动的可继承性这一假设, 我们推导出单个未知源 DoA 的 HCRB, 从而得出位置误差对 DoA 估计性能影响的定量分析。为简单起见, 我们假设无人机阵列的编队为均匀线性阵列, 在扰动继承的假设下, 对孔径的平行和垂直方向的扰动进行了联合分析。此外, 讨论了位置方差、信噪比(SNR)、无人机数量和到达角 (DoA) 等因素对 DoA 的 HCRB 性能的影响。

## 2 DoA的HCRB推导

考虑无人机阵列有  $N$  个无人机, 每个无人机都携带一根全向天线。假设第  $n$  个无人机可能会随机偏离其预定的位置, 在平行于孔径的方向上偏移  $d_n$ , 在垂直于孔径的方向上偏移  $r_n$ 。考虑远场情况下的窄带信号到达角为  $\theta$ , 如所示。

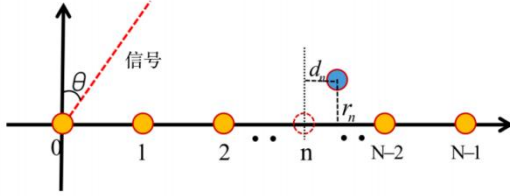


图 1 微型无人机阵列扰动示意图

Fig.1 Demonstration of micro-UAV array perturbation

阵列天线接收到的信号  $\mathbf{x}$  在时间  $t$  时刻可以表示为:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}(\theta)s(t) + \mathbf{n}(t), \quad (1)$$

其中, 信号波形  $s(t)$  和加性白噪声  $\mathbf{n}(t)$  都服从复高斯分布, 即  $s(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_s^2)$ ,  $\mathbf{n}(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2 \mathbf{I}_N)$ ,  $\mathbf{I}_N$  代表  $N \times N$  单位矩阵, 而  $\sigma_s^2$  和  $\sigma_n^2$  分别表示输入信号和每个天线接收噪声的方差。向量  $\mathbf{a}$  表示扰动的导向向量, 第  $n$  个元素  $a_n = \exp\{jk_0((nd + d_n)\sin\theta + r_n\cos\theta)\}$ ,  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ,  $\lambda_0$  为信号波长,  $d$  代表无人机间距。

由于微型无人机阵列的编队是基于相对位置关系进行部署的, 这意味着位置误差是可继承的, 即  $d_n = d_{n-1} + u_n$ ,  $r_n = r_{n-1} + v_n$ , 其中  $u_n$  和  $v_n$  分别表示第  $n$  架无人机的平行和垂直位置噪声的扰动, 假设它们都服从均值为零且方差为  $\sigma_d^2$  的高斯分布, 即  $u_n, v_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_d^2)$ , 则第  $n$  个孔径的平行和垂直位置误差满足:

$$d_n \sim \mathcal{N}(0, n\sigma_d^2), \quad r_n \sim \mathcal{N}(0, n\sigma_d^2). \quad (2)$$

接收信号的协方差矩阵可以表示为:

$$\mathbf{C}(\xi) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] = \sigma_s^2 \mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N \quad (3)$$

其中  $\mathbb{E}_{\mathbf{x}}(\cdot)$  代表对  $\mathbf{x}$  的期望, 其中  $\xi = [\theta, d_0, \dots, d_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1}]^T$ 。关于参数的“无偏性”已经在文献[15]中进行了讨论, 本文重点讨论参数的均方误差的性能。

关于未知参数向量  $\xi$  的条件似然函数由下式给出:

$$p(\mathbf{x}|\xi) = \frac{\exp(-\mathbf{x}^H \mathbf{C}^{-1}(\xi)\mathbf{x})}{\pi^N |\mathbf{C}(\xi)|} \quad (4)$$

需要注意的是, DoA 没有先验信息, 而位置误差假设为独立的高斯分布。因此, 先通过构造  $\boldsymbol{\rho} = [d_0, \dots, d_{N-1}, r_0, \dots, r_{N-1}]^T$ , 得出  $\boldsymbol{\rho}$  的联合先验概率密度函数为:

$$p(\boldsymbol{\rho}) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}^H \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\rho})}{(2\pi)^N |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}}, \quad (5)$$

其中,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_d & \\ & \boldsymbol{\Sigma}_r \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_d = \sigma_d^2 \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{c}_n \mathbf{c}_n^T, \quad \boldsymbol{\Sigma}_r = \boldsymbol{\Sigma}_d, \quad (7)$$

$\mathbf{c}_n = [\mathbf{0}_n; \mathbf{1}_{N-n}]$ ,  $\mathbf{0}_n$  表示长度为  $n$  的全 0 向量,  $\mathbf{1}_{N-n}$  是长度为  $N-n$  的全 1 向量, 分号代表列的分隔符。然后, 参数向量  $\xi$  的混合信息矩阵可以表示为[13]:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathbf{x}|\xi} + \mathbf{J}_{\xi}, \quad (8)$$

其中  $\mathbf{J}_{\mathbf{x}|\xi}$  和  $\mathbf{J}_{\xi}$  分别指的是观测和先验统计的信息矩阵。矩阵  $\mathbf{J}_{\mathbf{x}|\xi}$  的第  $(n, m)$  个元素, 可以表示为

$$[\mathbf{J}_{\mathbf{x}|\xi}]_{n,m} = -\mathbb{E}_{\mathbf{x}, \xi} \left[ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{x}|\xi)}{\partial \xi_n \partial \xi_m} \right], \quad (9)$$

其中  $n, m = 0, \dots, 2N$ ,  $\mathbb{E}_{\mathbf{x}, \xi}$  表示关于  $\mathbf{x}$  和  $\xi$  的联合期望。

对于  $\mathbf{x}|\xi$ , 其观测信息矩阵的第  $(n, m)$  个元素可以进一步表示为[14]:

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_{\mathbf{x}|\xi}]_{n,m} &= -\mathbb{E}_{\xi} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi_n \partial \xi_m} \mathbb{E}_{\mathbf{x}} \ln p(\mathbf{x}|\xi) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\xi} \left\{ \text{Tr} \left[ \mathbf{C}^{-1}(\xi) \frac{\partial \mathbf{C}(\xi)}{\partial \xi_n} \mathbf{C}^{-1}(\xi) \frac{\partial \mathbf{C}(\xi)}{\partial \xi_m} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

为了方便推导, 我们在下文中用  $\mathbf{C}$  表示  $\mathbf{C}(\xi)$ 。则,  $\mathbf{C}$  关于  $\theta$ 、 $d_n$  和  $r_n$  的导数可以导出为:

$$\dot{\mathbf{C}}_{\theta} = \sigma_s^2 (\dot{\mathbf{a}}\mathbf{a}^H + \mathbf{a}\dot{\mathbf{a}}^H), \quad (11a)$$

$$\dot{\mathbf{C}}_{d_n} = jk_0 \sin\theta \sigma_s^2 (\bar{\mathbf{a}}_n \mathbf{e}_n \mathbf{a}^H - \mathbf{a} \mathbf{e}_n^H \bar{\mathbf{a}}_n^*), \quad (11b)$$

$$\dot{\mathbf{C}}_{r_n} = jk_0 \cos\theta \sigma_s^2 (\bar{\mathbf{a}}_n \mathbf{e}_n \mathbf{a}^H - \mathbf{a} \mathbf{e}_n^H \bar{\mathbf{a}}_n^*), \quad (11c)$$

其中  $\dot{\mathbf{a}}$  代表  $\mathbf{a}$  相对于  $\theta$  的导数, 而  $\mathbf{e}_n$  是第  $n$  列  $N$  维单位矩阵。

注意到

$$\dot{\mathbf{a}}_n = jk_0[(nd + d_n)\cos\theta - r_n\sin\theta] \cdot \bar{\mathbf{a}}_n = b_n \bar{\mathbf{a}}_n \quad (12)$$

其中  $b_n \triangleq jk_0[(nd + d_n)\cos\theta - r_n\sin\theta]$ , 那么我们有

$$\mathbf{A} \triangleq \dot{\mathbf{a}}^H \dot{\mathbf{a}} = \sum_{n=0}^{N-1} |b_n|^2, \quad (13a)$$

$$\mathbf{B} \triangleq \dot{\mathbf{a}}^H \dot{\mathbf{a}} = \sum_{n=0}^{N-1} b_n, \quad \dot{\mathbf{a}}^H \bar{\mathbf{a}} = -\bar{\mathbf{a}}^H \dot{\mathbf{a}}. \quad (13b)$$

通过一些简单的推导, 我们可以得到  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}^2$  对  $\xi$  的期望如下:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\xi[\mathbf{A}] &= \frac{1}{2}N(N-1)k_0^2\sigma_d^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)k_0^2d^2\cos^2\theta, \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\xi[\mathbf{B}^2] &= -\frac{1}{2}N(N-1)k_0^2\sigma_d^2 \\ &\quad - \frac{1}{4}N^2(N-1)^2k_0^2d^2\cos^2\theta. \end{aligned} \quad (14b)$$

根据 Sherman-Morrison 公式,  $\mathbf{C}$  的逆矩阵可以计算为:

$$\mathbf{C}^{-1} = \sigma_n^{-2}(\mathbf{I}_N - \frac{1}{N_0}\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{a}}^H), \quad (15)$$

其中  $N_0 = 1/e_0 + N$ ,  $e_0 \triangleq \sigma_s^2/\sigma_n^2$ . 我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_\theta &= e_0(\frac{\bar{\mathbf{a}}\dot{\mathbf{a}}^H}{N_0e_0} + \dot{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{a}}^H \\ &\quad - \frac{\bar{\mathbf{a}}\dot{\mathbf{a}}^H\dot{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{a}}^H}{N_0}), \quad (16a) \\ \mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_{d_n} &= jk_0\sin\theta e_0(\bar{\mathbf{a}}_n\mathbf{e}_n\bar{\mathbf{a}}^H - \frac{\bar{\mathbf{a}}\dot{\mathbf{a}}^H}{N_0} - \frac{\bar{\mathbf{a}}_n^*\dot{\mathbf{a}}\mathbf{e}_n^H}{N_0e_0}) \end{aligned} \quad (16b)$$

基于(10)、(13)、(14)和(16),  $\mathbf{J}_{\mathbf{x}|\xi}$  的部分可以推导出如下:

$$\begin{aligned} J_{\theta\theta} &\triangleq \mathbb{E}_\xi \text{Tr}[\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_\theta\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_\theta] \\ &= \frac{e_0k_0^2}{N_0}(N(N-1)^2\sigma_d^2 + \frac{N^2(N^2-1)}{6}d^2\cos^2\theta) \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} J_{\theta d_n} &\triangleq \mathbb{E}_\xi \text{Tr}[\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_\theta\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_{d_n}] \\ &= \frac{N(2n+1-N)}{2N_0}e_0k_0^2d\sin 2\theta, \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} J_{dd} &\triangleq [\mathbb{E}_\xi \text{Tr}(\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_{d_n}\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_{d_m})]_{N,N} \\ &= \frac{2}{N_0}e_0k_0^2\sin^2\theta(N\mathbf{I}_N - \mathbf{1}\mathbf{1}^T). \end{aligned} \quad (17c)$$

其中  $\mathbf{1}$  是全 1 向量。

从(11), 我们注意到  $\dot{\mathbf{C}}_{d_n}$  和  $\dot{\mathbf{C}}_{r_n}$  除了标量系数几乎相同, 因此, 可以类比推导出  $\mathbf{J}_{\mathbf{x}|\xi}$ . 为此, 我们首先定义  $C_s \triangleq \cos\theta/\sin\theta$ , 然后有

$$\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_{r_n} = C_s\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_{d_n}. \quad (18)$$

因此,  $\mathbf{J}_{\mathbf{x}|\xi}$  可以表示为:

$$\mathbf{J}_{\theta r_n} = C_s\mathbb{E}_\xi \text{Tr}[\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_\theta\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_{d_n}], \quad (19a)$$

$$\mathbf{J}_{d_n r_m} = C_s\mathbb{E}_\xi \text{Tr}[\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_{d_n}\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_{d_m}], \quad (19b)$$

$$\mathbf{J}_{r_n r_m} = C_s^2\mathbb{E}_\xi \text{Tr}[\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_{d_n}\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}_{d_m}]. \quad (19c)$$

由于  $\mathbf{J}_{\mathbf{x}|\xi}$  是 Hermitian 矩阵, 完整的  $\mathbf{J}_{\mathbf{x}|\xi}$  可以表示为:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}|\xi} = \begin{bmatrix} J_{\theta\theta} & J_{\theta d} & J_{\theta r} \\ J_{\theta d}^H & J_{dd} & J_{dr} \\ J_{\theta r}^H & J_{dr}^H & J_{rr} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

对于  $\mathbf{J}_\xi$  的先验信息矩阵, 第  $(n, m)$  个元素可以表示为:

$$[\mathbf{J}_\xi]_{nm} = -\mathbb{E}_\xi[\frac{\partial^2 \ln p(\rho)}{\partial \xi_n \partial \xi_m}], n, m = 0, 1, \dots, 2N. \quad (21)$$

根据(2)和(5), 矩阵  $\mathbf{J}_\xi$  可以简化为

$$\mathbf{J}_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma^{-1} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

最后, 通过将(20)和(22)代入(8),  $\xi$  的第  $i$  个元素的 HCRB 满足

$$\text{var}(\hat{\xi}_i) \geq [(\mathbf{J}_{\mathbf{x}|\xi} + \mathbf{J}_\xi)^{-1}]_{ii}, i = 0, 1, \dots, 2N. \quad (23)$$

其中  $\text{var}(\hat{\xi}_i)$  表示  $\xi_i$  的无偏估计量的方差。具体来说, 对于 DoA 的 HCRB, 我们有

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq \text{HCRB}(\theta) = \frac{1}{J_{\theta\theta} - \mathbf{q}^T(\bar{\mathbf{J}} + \Sigma^{-1})^{-1}\mathbf{q}}. \quad (24)$$

其中

$$\mathbf{q} = [J_{\theta d}, J_{\theta r}]^T, \quad (25)$$

且

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} J_{dd} & J_{dr} \\ J_{dr}^H & J_{rr} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

**注意 1:** 通过设置  $\sigma_d^2 = 0$ , DoA 的 HCRB 退化为与没有扰动的 DoA 的 CRB 相同的表达, 可以表示为:

$$\text{CRB}(\theta) = \frac{6N_0}{N^2(N^2-1)e_0k_0^2\cos^2\theta d^2}. \quad (27)$$

### 3 仿真结果与分析

在本节中, 我们通过数值仿真分析了位置扰动对无人机阵列 DoA 估计性能的影响, 包括位置方差  $\sigma_d^2$ 、SNR、无人机数量和 DoA 等参数。仿真中, 我们考虑了一个由 10 架无人机组成的均匀线性阵列, 相邻无人机之间的距离设置为电磁信号波长的一半, 即半波长距离。信号波长选取为 1 米, 对应频率为 300MHz。这种阵列构型和参数设置在能够在保证无人机编队紧凑性的同时, 避免阵元间的电磁耦合效应。

在仿真中, 我们假设位置扰动服从零均值高斯分布, 标准差在 0 到 1 倍波长之间变化。这一设置综合考虑了实际无人机集群中的定位误差水平和模型适用范围。此外, 信噪比 (SNR) 分别设置为 -10dB 和 0dB, 以分析不同噪声环境下位置扰动的影响。

本实验主要分析了位置扰动对无人机阵列中 DoA 估计性能的影响。实验步骤包括: 位置扰动方差对 HCRB 的影响: 以无位置误差的 CRB 为基准, 调节位置扰动方差, 分别对 SNR 为 -10 dB 和 0 dB 的情况进行数值仿真, 使用匹配滤波 (MF) 估计器作为角度估计器的参照, 每个参数点进行 10000 次蒙特卡洛仿真; 比较不同 SNR 情况下的 HCRB: 随着 SNR 的增加, DoA 的 HCRB 对位置误差变得更加敏感, 以无位置误差的 CRB 为基准, 在两种位置扰动方差下, 对 SNR 从 -10 dB 到 10 dB 进行数值分析; 考察无人机数量对 HCRB 的影响: 在不同位置扰动方差下, 分析无人机数量对 HCRB 的影响, 假设 SNR 为 0 dB, 无人机数量从 1 架增加到 128 架, 观察 HCRB 的变化趋势; 分析不同 DoA 对 HCRB 的影响: 在默认配置下, 对不同的 DoA 进行分析, 同时考虑不同位置扰动方差的情况。

首先, 我们考虑位置扰动方差  $\sigma_d^2$  对 HCRB 的影响。以没有位置误差的 CRB 为基准, 我们从 0 到 1 对扰动方差进行调节, 分别对 SNR = -10 dB 和 0 dB 两种情况进行了数值仿真。作为对角度估计器协方差下限的参照, 我们以最为经典的匹配滤波估计器 (Matched Filter, MF) 为例, 每个点进行 10000 次的蒙特卡洛仿真。

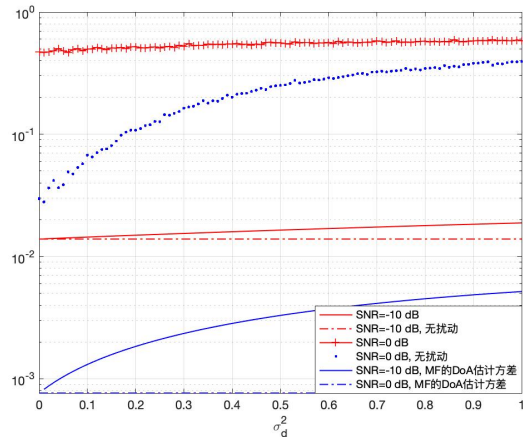


图2 DoA 的 HCRB 与扰动方差的关系

Fig.2 HCRB v.s. different positional variances.

图2表明, 随着  $\sigma_d^2$  的增加, SNR = -10 dB 和 SNR = 0 dB 两种情况下的 HCRB 都从无干扰的 CRB 水平往上增加, 这印证了没有位置误差的 CRB 代表有位置错误的 HCRB 的下限。基于 MF 的蒙特卡洛实验在走势上理论值一致, 进一步印证了结论推导的正确性。同时, 基于 MF 的角度估计的蒙特卡洛实验, 其协方差在数值上和理论下限有近一个数量级的差距 (其中部分误差来自于角度

-功率谱网格的划分误差), 说明 MF 估计器不是最佳估计器。

此外, 我们比较了不同 SNR 的情况。很明显随着 SNR 的增加, DoA 的 HCRB 对位置误差变得更加敏感。为了进一步阐明不同 SNR 对 DoA 的 HCRB 的影响, 以没有位置误差的 CRB 为基准, 我们在  $\sigma_d^2 = 0.1, 1$  两种情况下, 对 SNR 从 -10 dB 到 10 dB 进行了数值分析。

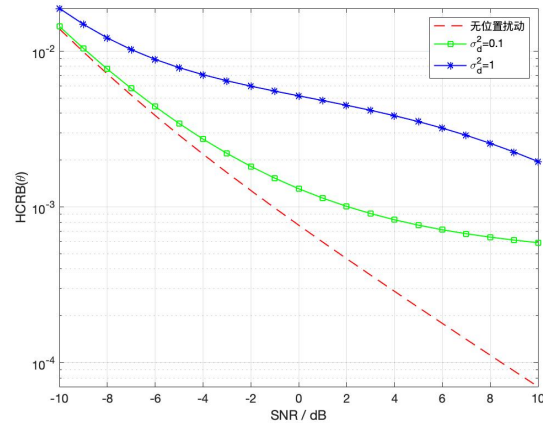


图3 在不同位置方差下的 HCRB 与 SNR 的关系  
Fig.3 HCRB v.s. SNR under different positional variances.

从图3可以看出, DoA 的 HCRB 随着 SNR 的增加而减小, 且  $\sigma_d^2$  越小, 则 DoA 的 HCRB 越小, 即  $\sigma_d^2 = 0.1$  的 HCRB 在不同的信噪比下均小于  $\sigma_d^2 = 1$  的值, 符合我们的预期。此外, 我们还考察了 HCRB 在不同方差值下, 即  $\sigma_d^2 = 0.1$  和 1 下, 无人机数量 N 对 HCRB 的影响。为了便于观察, 我们假设 SNR = 0 dB。

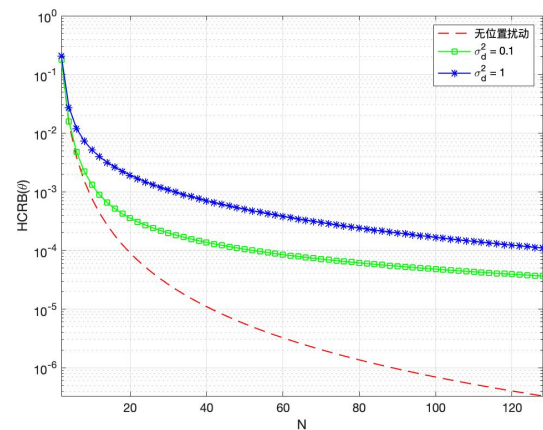


图4 HCRB 与无人机数量的关系, SNR = 0 dB.

Fig.4 HCRB v.s. N, SNR = 0 dB.

图4表明, 随着无人机数量从 1 架增加到 128 架, HCRB 呈单调下降, 但有位置误差的 HCRB 无法收敛到没有扰动的情况下 CRB。另外, 位置误差的方差越小, 其 HCRB



的值也越小，与预期相符。

最后，我们仿真了不同 DoA 对 HCRB 的影响，也对不同的位置方差的情况进行了分析。我们延续默认的配置，对不同的 DoA 进行了分析。

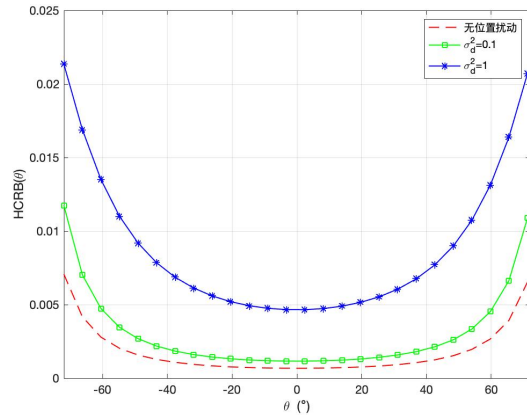


图 5 HCRB 与  $\theta$  的关系, SNR=0 dB.

Fig.5 HCRB vs.  $\theta$ , SNR=0 dB.

在图 5 中我们可以看到，不同 DoA 所对应的 HCRB 是不均匀的，即  $0^\circ$  的信号在相同  $\sigma_d^2$  下达到最低的 HCRB，随着 DoA 绝对值的增加，HCRB 也增加。此外，就是 HCRB 关于  $\theta = 0^\circ$  呈轴对称，这与没有位置误差的 CRB 的趋势一致。

#### 4 小结

本文研究了基于相对位置部署的无人机阵列 DoA 估计，并重点分析了无人机阵列元相对于孔径的水平 and 垂直方向的位置扰动误差所带来的影响。在此基础上推导出了无人机阵列 DoA 估计的 HCRB，得到了位置误差对 DoA 估计的影响的定量分析。通过数值仿真讨论了位置误差的方差、SNR、无人机数量和 DoA 等因素对 HCRB 的影响。理论和仿真结果均表明，位置误差的方差对 HCRB 影响较大，通过增加无人机数量可以一定程度地对冲该影响，但无法收敛到无干扰的情况。

#### 参考文献

- [1] Y. Zeng, R. Zhang and T. J. Lim, Wireless communications with unmanned aerial vehicles: opportunities and challenges[J], in IEEE Commun. Mag., 2016, 54(5): 36-42.
- [2] M. Rihan, M. M. Selim, C. Xu and L. Huang, D2D Communication Underlying UAV on Multiple Bands in Disaster Area: Stochastic Geometry Analysis[J], in IEEE Access, 2019,

- [3] Bahiki, M. R., N. N. A. Talib, and S. Azrad, Relative positioning-based system with tau control for collision avoidance in swarming application[J], IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2016, 152:012025.
- [4] L. Zhou, S. Leng, Q. Wang and Q. Liu, "Integrated Sensing and Communication in UAV Swarms for Cooperative Multiple Targets Tracking"[J], in IEEE Transactions on Mobile Computing, 2023, 22(11):6526-6542.
- [5] J. Du, W. Guo, M. Yan, H. Zhao and Y. Tang, "Location Error Analysis for Collaborative Beamforming in UAVs Random Array"[J], in IEEE Wireless Communications Letters, 2024, 13(3):904-907.
- [6] D. Fan, G. Guo, J. Song, L. Li and Y. Zhu, "DOA Estimation for Arbitrarily Distributed Subarrays in UAV Swarm"[C], 2020 IEEE/CIC International Conference on Communications in China (ICCC), Chongqing, China, 2020:794-799.
- [7] Z. Chen, W. Liu and G. H. Huff, "Experimental Campaign to Evaluate the Fundamental Capabilities and Limitations of Synthetic DOA Using Swarming UAVs"[C], 2021 15th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP), Dusseldorf, Germany, 2021:1-4.
- [8] Z. Chen, S. Yeh, J. -F. Chamberland and G. H. Huff, "Impact of Position Errors on Synthetic Aperture DOA Convergence Based on Swarming UAVs"[C], 2020 IEEE USNC-CNC-URSI North American Radio Science Meeting (Joint with AP-S Symposium), Montreal, QC, Canada, 2020:83-84.
- [9] D. Fan et al., "Channel Estimation and Self-Positioning for UAV Swarm"[J], in IEEE Transactions on Communications, 2019, 67(11):7994-8007.
- [10] F. Keskin and T. Filik, "Isotropic and

- Directional DOA Estimation of the Target by UAV Swarm-based 3-D Antenna Array"[C], 2020 4th International Symposium on Multidisciplinary Studies and Innovative Technologies (ISMSIT), Istanbul, Turkey, 2020:1-7.
- [11] O. Fratu, A. M. Nor, S. Halunga and Z. D. Zaharis, "RF Propagation and Interferences Challenges for UAVs Swarm Detection and Positioning"[C], 2022 25th International Symposium on Wireless Personal Multimedia Communications (WPMC), Herning, Denmark, 2022:501-504.
- [12] P. Chen, Z. Chen, B. Zheng and X. Wang, "Efficient DOA Estimation Method for Reconfigurable Intelligent Surfaces Aided UAV Swarm"[J], in IEEE Transactions on Signal Processing, 2022, 70:743-755.
- [13] J. A. Vincent and E. J. Arnold, Beamforming sensitivity of airborne distributed arrays to flight tracking and vehicle dynamics[C], 2017 IEEE Aerospace Conf., Big Sky, MT, 2017:1-14.
- [14] C. Leuschen et al., UAS-Based Radar Sounding of the Polar Ice Sheets[J], in IEEE Geoscience and Remote Sensing Mag., 2014, 2(1):8-17.
- [15] S. Hauert et al., Reynolds flocking in reality with fixed-wing robots: Communication range vs. maximum turning rate[C], 2011 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, San Francisco, CA, 2011:5015-5020.
- [16] D. B. Wilson, A. H. Goktogan and S. Sukkarieh, A vision based relative navigation framework for formation flight[C], 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2014:4988-4995.
- [17] W. Meng, Z. He, R. Su, P. K. Yadav, R. Teo and L. Xie, Decentralized Multi-UAV Flight Autonomy for Moving Convoys Search and Track[J], in IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2017, 25(4):1480-1487.
- [18] J. Strader, Y. Gu, J. N. Gross, M. De Petrillo and J. Hardy, Cooperative relative localization for moving UAVs with single link range measurements[C], 2016 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium (PLANS), Savannah, GA, 2016:336-343.
- [19] F. Namin, J. S. Petko and D. H. Werner, Analysis and Design Optimization of Robust Aperiodic Micro-UAV Swarm-Based Antenna Arrays[J], in IEEE Trans. on Ant. and Propag., 2012, 60(5):2295-2308 .
- [20] J. S. Petko and D. H. Werner, Positional tolerance analysis and error correction of micro-UAV swarm based antenna arrays[C], IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, Charleston, SC, 2009:1-4.
- [21] W. Jiang and A. M. Haimovich, CramerRao Bound for Noncoherent Direction of Arrival Estimation in the Presence of Sensor Location Errors[J], in IEEE Sig. Proc. Lett., 2017, 24(9):1303-1307.
- [22] H. L. Van Trees and K. L. Bell, Bayesian Bounds for Parameter Estimation and Nonlinear Filtering and Tracking[M], New York, NY, USA: Wiley, 2007.
- [23] S. M. Kay, Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume I: Estimation Theory[M], Appendix 15C, Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 1993.
- [24] F. Y. P. Feng, M. Rihan and L. Huang, Positional Perturbations Analysis for Micro-UAV Array With Relative Position-Based Formation[J], in IEEE Communications Letters, 2021, 25(9): 2918-2922.
- [25] A. Ferreol, P. Larzabal, and M. Viberg, On the asymptotic performance analysis of subspace DOA estimation in the presence of modeling errors: Case of MUSIC[J], IEEE Trans. Signal Process., 2006, 54(3):907-920.
- [26] H. S. Mir, J. D. Sahr, G. F. Hatke, and C. M. Keller, Passive source localization using an



- airborne sensor array in the presence of manifold perturbations[J], IEEE Trans. Signal Process., 2007, 55(6): 2486–2496.
- [27] T. Takahashi, N. Nakamoto, M. Ohtsuka, T. Aoki, Y. Konishi, I. Chiba, and M. Yajima, On-board calibration methods for mechanical distortions of satellite phased array antennas[J], IEEE Trans. Antennas Propag., 2012, 60(3): 1362–1372.
- [28] C.-C. Liu, J. Yan, and W.-D. Chen, Sparse self-calibration by MAP method for MIMO radar imaging[C], in Proc. ICASSP, Kyoto, Japan, 2012: 2469–2472.
- [29] F. Gini and R. Reggiannini, On the use of Cramér-Rao-like bounds in the presence of random nuisance parameters[J], IEEE Trans. Commun., 2000, 48: 2120–2126.
- [30] F. Gini, A radar application of a modified Cramér-Rao bound: Parameter estimation in non-Gaussian clutter[J], IEEE Trans. Signal Process., 1998, 46(7): 1945–1953.
- [31] H. Messer, The hybrid Cramér-Rao lower bound—from practice to theory[C], in Proc. 4th IEEE Workshop Sensor Array Multichannel Processing, 2006: 304–307.