牛顿法

实验环境：

MATLAB 2019b

关键思想：

二次函数近似

阻尼牛顿法

算法 9 (阻尼牛顿法)

步 0 给定终止误差值 $0 \le \varepsilon \ll 1$, $\delta \in (0,1)$, $\sigma \in (0, 0.5)$. 初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$. 令 $k : 0$.

步 1 计算 $g_k = \nabla f(x_k)$. 若 $\|g_k\| \le \varepsilon$, 停算, 输出 $x^* \approx x_k$.

步 2 计算 $G_k = \nabla^2 f(x_k)$, 并求解线性方程组得解 d_k:

$$G_k d = -g_k \tag{3.6}$$

步 3 记 m_k 是满足下列不等式的最小非负整数 m:

$$f(x_k + \delta^m d_k) \le f(x_k) + \sigma \delta^m g_k^T d_k. \tag{3.7}$$

步 4 令 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, $k := k+1$, 转步 1.

收敛速度比较快，但是难以保证函数的Hesse阵$G(x) = \nabla^2 f(x)$在每个迭代处x_k是正定的.

修正牛顿法

1.牛顿-最速下降混合算法

算法 10 (牛顿-最速下降混合算法)

步 0 给定初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 终止误差 $0 \le \varepsilon \ll 1$. 令 $k := 1$.

步 1 计算 $g_k = \nabla f(x_k)$. 若 $\|g_k\| \le \varepsilon$, 停算, 输出 x_k 作为近似极小点.

步 2 计算 $G_k = \nabla^2 f(x_k)$. 解方程组

$$G_k d + g_k = 0. \tag{3.10}$$

若 (4.10) 有解 d_k 且满足 $g_k^T d_k < 0$, 转步 3; 否则, 令 $d_k = -g_k$ 转步 3.

步 3 由线搜索技术确定步长因子 α_k.

步 4 令 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, $k := k + 1$, 转步 1.

在收敛速度较快的同时还解决了正定的问题

2.修正牛顿法

算法 11 (修正牛顿法)

步 0 给定参数 $\delta \in (0,1)$, $\tau \in [0,1]$, $\sigma \in (0, 0.5)$, 终止误差 $0 \le \varepsilon \ll 1$. 初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$. 令 $k := 0$.

步 1 计算 $g_k = \nabla f(x_k)$, $\mu_k = \|g_k\|^{1+\tau}$. 若 $\|g_k\| \le \varepsilon$, 停算, 输出 x_k 作为近似极小点.

步 2 计算 Hesee 阵 $G_k = \nabla^2 f(x_k)$. 解线性方程组

$$(G_k + \mu_k I)d = -g_k, \tag{3.11}$$

得解 d_k.

步 3 令 m_k 是满足下列不等式的最小非负整数 m:

$$f(x_k + \delta^m d_k) \le f(x_k) + \sigma \delta^m g_k^T d_k. \tag{3.12}$$

令 $\alpha_k = \delta^{m_k}$, $x_{k+1} := x_k + \alpha_k d_k$.

步 4 令 $k := k + 1$, 转步 1.

收敛速度比较慢，因为$G_k + \mu_k I$ 只是函数的Hesee阵 G_k 一个近似