第 7 次课后练习题

2018302120169-傅宇千

应用外点罚函数和拉格朗日乘子法求解约束最优化问题并分析方法的有效性:

$$\begin{aligned}
&\min\,(x_1-1)^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^4,\\
&\text{s.t. } x_1(1+x_2^2)+x_3^4-4-3\sqrt{2}=0,\\
&\qquad -10\leqslant x_i\leqslant 10,\ \ i=1,2,3.
\end{aligned}$$

初始点 $x^{(0)}=(2,2,2)^{\mathrm{T}}$ 为可行点, 最优解为

$$\begin{aligned}
&x^*=(1.104859024, 1.196674194, 1.535262257)^{\mathrm{T}},\\
&f(x^*)=0.03256820025.
\end{aligned}$$

程序如下图:

```
function [ x,y ] = Epfm_min1( fx,gx,hx,xx0,s,c,a)
%fx是目标函数
%gx是不等式约束方程组(且g>=0)
%xx0是初始点
%hx是等式约束方程组(且h=0)
%s是精确度(s>0)
%c是放大系数(c>1)
%a是罚因子(默认为1)
xx1=xx0;
v=xx0;
a1=a;
Pxk=1;%假设Px等于1
while Pxk>s
    g=feval(gx,v);
    h=feval(hx,v);
    f=feval(fx,v);
    G=max(-g,0);%用于判别max{0,-g(x)}
    if(G<0)
        Px=a1*h*h;
    else
        Px=a1*h*h+a1*g*g;
    end
    Fx=f+a1*Px;%将约束问题化为了一个无约束的问题
    % 接下来解min F（x）
    [x,ival,ik]=bfgs('Fx','gFx',x0,fun,hf,gf,dfun,dhf,dgf,s,c,a);
    %[k,b,e]=solve(dFx1,dFx2,dFx3,'x1','x2','x3');%求出
    xx1=x;
    Pxk=a1*feval(hx,v);
    xx1=xx2;%相当于置k=k+1
    a1=c*a1;%罚因子放大
end
x=xx1;
y=a1/c;
```

```
function f=f1(x)
f=(x(1)-1)^2+(x(1)-x(2))^2+(x(2)-x(3))^4;
function [gi,gj,gk]=g1(x)
gi=10-x(1);
gj=10-x(2);
gk=10-x(3);
function he=h1(x)
he=x(1)*(1+x(2)^2)+x(3)^4-4-3*2^0.5;
function [x,val,k]=bfgs(fun,gfun,x0,varargin)
maxk=1000; %给出最大迭代次数
rho=0.55;sigma=0.4; epsilon=1e-5;
k=0; n=length(x0);
Bk=eye(n); %Bk=feval('Hess',x0);
while(k<maxk)
gk=feval(gfun,x0,varargin{:}); %计算梯度
if(norm(gk)<epsilon), break; end %检验终止准则
dk=-Bk\gk; %解方程组, 计算搜索方向
m=0; mk=0;
while(m<20) % 用Armijo搜索求步长
newf=feval(fun,x0+rho^m*dk,varargin{:});
oldf=feval(fun,x0,varargin{:});
if(newf<oldf+sigma*rho^m*gk'*dk)
mk=m; break;
end
m=m+1;
end
%BFGS校正
x=x0+rho^mk*dk;
sk=x-x0; yk=feval(gfun,x,varargin{:})-gk;
if(yk'*sk>0)
Bk=Bk-(Bk*sk*sk'*Bk)/(sk'*Bk*sk)+(yk*yk')/(yk'*sk);
end
k=k+1; x0=x;
end
val=feval(fun,x0,varargin{:});
```

```matlab
function [x,mu,lambda,output]=multphr(fun,hf,gf,dfun,dhf,dgf,x0)
maxk=900; %最大迭代次数
sigma=0.001; %罚因子
eta=2.0; theta=0.8; %PHR算法中的实参数
k=0; ink=0; %k, ink分别是外迭代和内迭代次数
epsilon=1e-5; %终止误差值
x=x0; he=feval(hf,x); gi=feval(gf,x);
n=length(x); l=length(he); m=length(gi);
%选取乘子向量的初始值
mu=0.1*ones(l,1); lambda=0.1*ones(m,1);
btak=10; btaold=10; %用来检验终止条件的两个值
while(btak>epsilon & k<maxk)
    %调用BFGS算法程序求解无约束子问题
    [x,ival,ik]=bfgs('mpsi','dmpsi',x0,fun,hf,gf,dfun,dhf,dgf,mu,lambda,sigma);
    ink=ink+ik;
    he=feval(hf,x); gi=feval(gf,x);
    btak=0.0;
    for(i=1:l), btak=btak+he(i)^2; end
    for(i=1:m)
        temp=min(gi(i),lambda(i)/sigma);
        btak=btak+temp^2;
    end
    btak=sqrt(btak);
    if btak>epsilon
        if(k>=2 & btak > theta*btaold)
            sigma=eta*sigma;
        end
        %更新乘子向量
        for(i=1:l), mu(i)=mu(i)-sigma*he(i); end
        for(i=1:m)
            lambda(i)=max(0.0,lambda(i)-sigma*gi(i));
        end
    end
    k=k+1;
    btaold=btak;
    x0=x;
end
f=feval(fun,x);
output.fval=f;
output.iter=k;
output.inner_iter=ink;
output.bta=btak;
```

程序求解结果如下:

外罚函数法:

```
历时 0.057926 秒。

x =

    1.1270
    1.2069
    1.5296


output =

  包含以下字段的 struct:

          fval: 0.0334
          iter: 19
    inner_iter: 119
           bta: 6.0327e-06
```

迭代次数为 19 次

用时 0.057926s

最小值为 0.0334

X=1.270,1.2069,1.5296

拉格朗日乘子法：

```
>> x0=[2,2,2]';
>> [x,mu,lambda,output]=multphr('f1','h1','g1','df1','dh1','dg1',x0)
历时 0.046387 秒。

x =

    1.1225
    1.2048
    1.5308


mu =

    0.0097


lambda =

     0


output =

  包含以下字段的 struct:

          fval: 0.0331
          iter: 13
    inner_iter: 94
           bta: 5.3805e-06
```

迭代次数为 13 次

用时 0.046387s

最小值为 0.0331

X=1.1225,1.2048,1.5308

分析：可以看出拉格朗日乘子法在各方面都略优于外罚函数法，但在当μ趋近于 0 的时候，其无约束最优化问题会变得越来越难以精确求解，所以此时可以更好体现出拉格朗日乘子法的优势。