Introduktion till analys

Vetenskapens Hus

December 15, 2021

Mentorsprogram i matematik

Funktioner

En funktion är en regel

- En funktion är en regel som för varje tal ger ut ett nytt tal.
- Vi betecknar ofta funktioner med bokstäver

Exempel: Om vi definerar f som:

$$f(x) = x^2 + x,$$

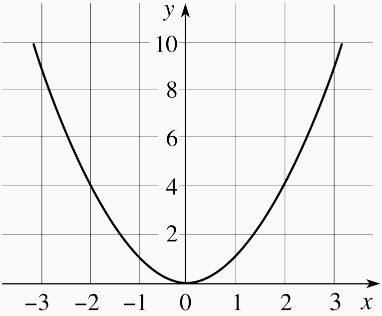
då betyder det att t.ex.

$$f(3) = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12.$$

Fråga: Vad är $f(2)$ likamed?

Vi kan symbolisera funktioner med grafer

Om vi ritar ut alla punkter där $f(x) = y$ så får vi en användbar graf. I detta exempel så är $f(x) = x^2$ igen.



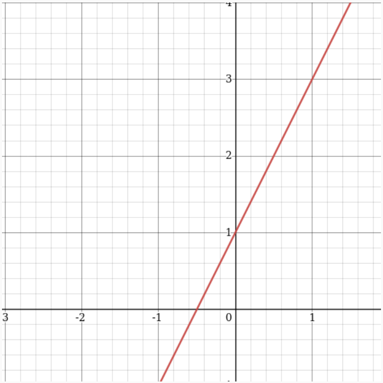
Frågor: funktioner

Fråga 1: Om $a(x) = x - 3$ och $b(x) = 4$ vad är då $a(2) + b(3)$ likamed?
Fråga 2: Om $a(x) = x^2 + 1$ och $b(x) = 0$ vad är då $a(1) + b(-1)$ likamed?
Fråga 3: Om $a(x) = 5 - x$ och $b(x) = -1$ vad är då $a(3) + b(2)$ likamed?

Derivata

Derivata är lutning

Vi säger att lutning på en linje är hur mycket du ändras om du går ett steg åt höger.



Varför bryr man sig om lutningen?

Lutningen kan tolkas som hastigheten om funktionen beskriver hur långt man har åkt med t.ex. ett tåg.

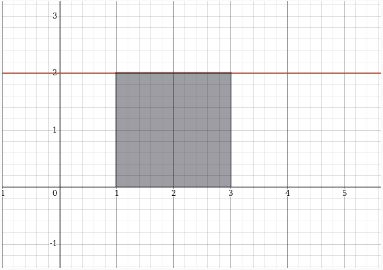
Integraler

Integralen är arean

Om vi undrar vad arean mellan funktionen mellan två punkter på x axeln så kallar vi det att vi tar integralen mellan de två punkterna.

Exempel: Om vi har funktionen $f(x) = 2$ (röd i grafen), så är

$$\int_1^3 f(x)dx = 4.$$



Varför bryr man sig om arean?

Om vi har att funktionen beskriver hur snabbt man åker vid en viss tidpunkt, så säger integralen hur långt man hade åkt i intervallet man tar integralen.

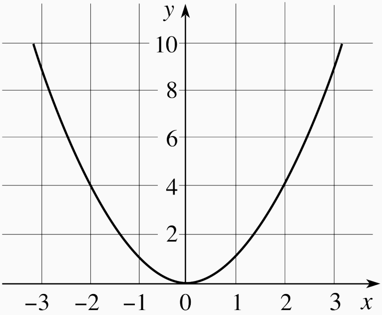
Analys

Vad är analys (på engelska: Calculus)

Analys (i matematik) är ett ämne i matematik där man löser problem genom att använda *oändligt små värden*.

Exempel: derivata

I de förra uppgifterna så hade våra funktioner samma lutning över hela grafen. Men tänk om vi har en mer komplicerad funktion som t.ex. $f(x) = x^2$, hur gör vi då?

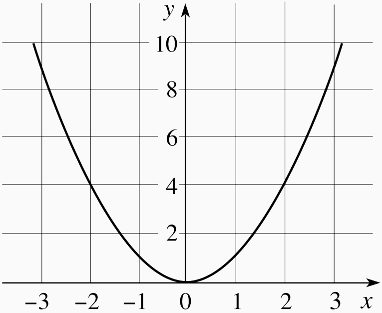


Exempel: derivata

Lösning: Vi kan få derivatan vid en specifik punkt genom att zooma in oändligt mycket. Desmos

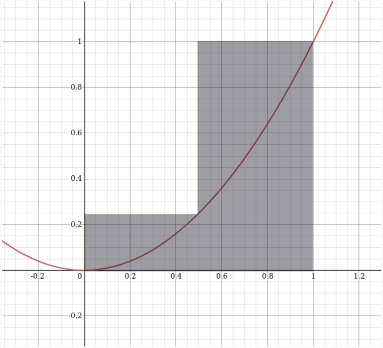
Exempel: integral

Samma sak med integralen, om vi har t.ex. $f(x) = x^2$ så är det inte lika enkelt att räkna ut arean mellan två punkter. T.ex. vad är arean mellan 0 och 2 här?



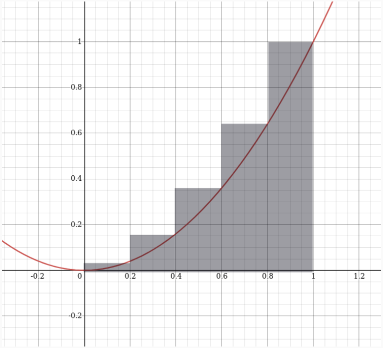
Exempel integral

Lösning: Vi kan approximera arean med rektanglar.



Exempel integral

Lösning: Vi kan approximera arean med rektanglar.



Oändligheten

Det största talet?

- Vad är ett tal?
- Vi vill kunna avända operationer på tal (+-*/)
- Injektiv under dessa operationer
- Är oändligheten ett tal?

Hur räknar man med oändligheten om vi låtsades att det var ett tal?

Vad blir:

- $\infty + 1$?
- $\frac{2}{\infty}$?
- $\frac{\infty}{\infty}$?

Talföljder

- Talföljder är bara funktioner där man kollar på när man sätter in

1,2,3,4. . . (heltal)

- T.ex. talföljden $1, 4, 9, 16 \ldots$ är ju bara funktionen $f(x) = x^2$ och sedan så räknar vi ut $f(1), f(2), f(3), f(4) \ldots$

Vad är $\frac{\infty}{\infty}$ likamed?

Så här har vi tre talföljder, och ni ska räkna ut de första tre talen, sen det tioende talet och sen det 100:e talet. Ni får använda miniräknare.

Talföljd 1:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2}.$$

Talföljd 2:

$$f(x) = \frac{x-3}{x}.$$

Talföljd 3:

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x}.$$

Vad tror ni $\frac{\infty}{\infty}$ är likamed?

Oändligheten är en riktning på tallinjen

Så $+\infty$ är som "öster" och $-\infty$ är som "väster".

Division med noll

Vad är division?

Vi säger att $\frac{12}{4} = 3$ eftersom vi måste subtrahera fyra från 12 tre gånger innan vi får noll.

$$\begin{aligned}
&12 - 4 = 8\\
&8 - 4 = 4\\
&4 - 4 = 0.
\end{aligned}$$

Hur många gånger måste vi subtrahera noll från 12 innan vi får noll?

$$\begin{aligned}
&12 - 0 = 12\\
&12 - 0 = 12\\
&12 - 0 = 12\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Så om man delar på noll får man oändligheten?

Låt oss räkna ut några talföljder igen för att få perspektiv. Fast den här gången ska ni räkna ut för när $x = 1, x = 0.1$ och $x = 0.001$. Ni får ännu igen använda miniräknare.

Talföljd 1:

$$f(x) = \frac{x}{x}.$$

Talföljd 2:

$$f(x) = \frac{x^2}{x}.$$

Talföljd 3:

$$f(x) = \frac{x}{x^2}.$$

Vad tror ni $\frac{0}{0}$ är likamed?

Gränsvärden

Så när vi räknar ut saker som $\frac{10}{2}$ så kan vi med stor säkerhet säga att det är likamed 5. Men vi kan inte göra det med saker som innehåller oändligheten eller division med noll som $\frac{\infty}{\infty}$ eller $\frac{0}{0}$.

Men detta är ju ett stort problem, för när vi ville räkna ut derivata och integraler så använda vi termer som "oändligheten" och "oändligt nära noll".

Så vad är problemet med $\frac{0}{0}$ och $\frac{\infty}{\infty}$?

Problemet är ju att vi fick ju olika svar beroende hur snabbt varje del gick till 0 eller oändligheten. Låt oss kolla tillbaka till talföljderna där x gick mot noll. $\frac{x^2}{x}$ gick mot noll för att täljaren gick mycket snabbare åt noll än nämnaren. Och $\frac{x}{x}$ gick mot 1 för att täljaren och nämnaren båda gick till noll lika snabbt.

Gränsvärde

Så även om $\frac{x^2}{x}$ och $\frac{x}{x}$ blir $\frac{0}{0}$ när $x = 0$ så blir de olika när de går mot noll. Vi skriver detta som följande:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

och

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Så $\lim_{x \to 0}$ betyder "när x går mot noll". På samma sätt så kan vi skriva $\lim_{x \to +\infty}$ för att säga "när x går mot oändligheten".

Några gränsvärdesregler

En av de viktigaste regelerna med gränsvärden är att om vi kan bara helt enkelt sätta in värdet utan att få *problem* så får vi göra det.

Exempel:

$$\lim_{x \to 0} 2x + 3 = 2 \cdot 0 + 3 = 3.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + 12}{x + 6} = \frac{0 + 12}{0 + 6} = 2.$$

$$\lim_{x \to 0} x = 0.$$

Vad räknas som "problem"?

Det som räknas som problem är när man stoppar in och får någon av följande "farliga" uttryck:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty.$$

Huvudstrategin i uträkning av gränsvärden

Tyvärr så är "farliga" uttryck ganska vanliga. Vår strategi för att lösa detta är att skriva om uttrycket med algebra tills vi får ett uttryck som inte innehåller några "farliga" uttryck.

Exempel: Vi kan inte räkna ut

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x}{3x} + x$$

direkt eftersom då får vi $\frac{6\cdot 0}{3\cdot 0} + 0 = \frac{0}{0} + 0$, som innehåller ett av de här "farliga" uttrycken. Men vi kan förkorta x och få uttrycket $\frac{6}{3} + x$. Och vi får inget problem om vi sätter in noll direkt här då vi får $\frac{6}{3} + 0$. Så därför så kan vi dra slutsatsen att det är likamed

$$\lim_{x\to 0} \frac{6}{3} + x = \frac{6}{3} + 0 = 2.$$

Kort om formell defintion av derivata och integral

En varning om att man inte behöver förstå direkt

Dessa formella definitioner kommer inte se väldigt intuitiva ut, men det är lungt. Poängen med att visa dessa definitioner är att vi har ett precist sätt att räkna ut dessa saker som verkade tidigare inte så precisa och mer filosofiska.

Derivatans definition

Om vi har en funktion $f(x)$ så kallar vi derivatan $\frac{df}{dx}$ och vi definerar den som följande:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Integralens definition

Låt $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ och $x_i = a + \Delta x \cdot i$, då definerar vi integralen som

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Vidare läsning/videor att se

Essence of Calculus (Youtube serie av 3blue1brown, han gör också många andra bra videor)

mathisfun introduction to calculus (hemsida)

Analys i en varibel av Persson och Böiers (Avancerad bok för Universitetet)