№35.

$L(y', y) = (y' - y)^2$

① Д-ть: $f^*(x) = \arg\min_c E((Y-c)^2 | X = x)$, что $f^*(x) = E(Y | X = x)$

△ $E((Y-c)^2 | X = x) = \frac{1}{|Y|} \sum_{y \in Y} (y-c)^2$

$\left(\frac{1}{|Y|} \sum_{y \in Y} (y-c)^2\right)'_c = \frac{1}{|Y|} \sum_{y \in Y} -(y-c) = 0$

$c_{min} = \frac{\sum_{y \in Y} y}{|Y|} = E(Y)$, подставляем:

$\arg\min_c E((Y-c)^2 | X = x) = EY$

$\min_c E((Y-c)^2 | X = x) = E((Y-EY)^2 | X = x)$

Ответ: $c_{min} = E(Y | X = x)$

② $R(f^*) = \int_{\mathcal{X}} E(L(f^*(x), Y) | X = x)\, p(x)\, dx =$

$= \int_{\mathcal{X}} E((EY - Y)^2 | X = x)\, P(X = x)\, dx$

№36

№36

$$L(y', y) = |y' - y|$$

$$R(f) = \int_{\mathcal{X}} E(|f(x) - Y| \mid X = x)\, P(X = x)\, dx$$

$$f^*(x) = \arg\min_c E(|Y - c| \mid X = x)$$

$$\Delta\ E(|Y - c| \mid X = x) = \frac{1}{|Y|} \sum_{y \in Y} |y - c|$$

минимум достигается, когда:

$$\big|\, |\{y : y > c\}| - |\{y : y < c\}| \,\big| \leq 1$$

Образно говоря, когда справа и слева от c элементов, чьи кол-ва отличаются не больше, чем на 1, т.е.

$$c_{min} = \text{median}(Y \mid X = x)$$

№37

Для того, чтобы условная мода давала минимум среднему риску необходимо, чтобы функцией потерь являлась симметричная 0-1 ф-я штрафа, т.е.

$$L(y', y) = I(y' \neq y) \equiv \begin{cases} 0, \text{ если } y' = y \\ 1, \text{ если } y' \neq y \end{cases}$$

$$f^*(x) = \underset{c}{\operatorname{argmin}}\, E(L(c, y) \mid X = x) =$$

$$= \operatorname{mode}(Y \mid X = x)$$

Док-во:

$$E(L(c,y) \mid X = x) = \frac{1}{|Y|} \sum_{y \in Y} L(c, y) \quad (\bigstar)$$

Если c не равно ни одному $y \in Y$, то:

$$E(L(c,y) \mid X = x) = \frac{1}{|Y|} \sum_{y \in Y} 1 = 1 \ (\text{худший случай})$$

В сумме большего всего нулей будет давать значение $y \in Y$, которое чаще всего встречается (т.е условная мода), это значение будет доставлять минимум $(\bigstar)$.

№38

N38

$y \in \{0,1\}$

$L(0,0)=L(1,1)=0 \quad L(1,0)=l_1 \quad L(0,1)=l_0$

$$R(f)=\int\limits_{\mathcal{X}}\left[\sum_{y\in\{0,1\}} L(f(x),y)\,P(y\,|\,X=x)\right]P(X=x)$$

Распишем подинтегральную ф-ю в виде вероятности ошибки, т.е.

$$R(f)=\int\limits_{\mathcal{X}} l_Y\,(1-P(Y=f(x)\,|\,X=x))\,P(X=x)$$

$$f^*(x)=\underset{y\in\{0,1\}}{\arg\min}\ l_y\,(1-P(y\,|\,X=x))=$$

$$=\underset{y\in\{0,1\}}{\arg\max}\ l_y\,P(y\,|\,X=x)$$

№39

№39 K классов

$$L(y', y) = \ell_{y'y} \quad (y', y = 1, 2, \ldots, K)$$

$$R(f) = \int_{\mathcal{X}} \left[\sum_{y=1}^{K} L(f(x), y) \; P(y \mid X = x) \right] P(X = x) \, dx$$

$$f^*(x) = \underset{c \in Y}{\operatorname{argmin}} \sum_{y=1}^{K} \ell_{cy} \, P(y \mid X = x)$$