STUDI PERPINDAHAN PANAS DENGAN MENGGUNAKAN SISTEM KOORDINAT SEGITIGA

Oleh :

Farda Nur Pristiana
1208 100 059

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2012

Abstrak

Salah satu Persamaan Diferensial Parsial (PDP) yang banyak diaplikasikan pada masalah sains dan teknik adalah Persamaan Diferensial Parsial (PDP) Laplace, yang dapat diaplikasikan pada persamaan konduksi panas. Konduksi panas adalah suatu proses yang jika dua benda/materi atau dua bagian benda/materi temperaturnya disentuhkan dengan yang lainnya maka akan terjadilah perpindahan panas. Konduksi panas pada benda berbentuk segitiga mempunyai model matematika dalam koordinat cartesius. Namun untuk memudahkan perhitungan, model matematika konduksi panas tersebut ditransformasikan ke dalam koordinat segitiga. Penyelesaian numerik dari PDP Laplace diselesaikan menggunakan metode beda hingga. Simulasi dilakukan pada segitiga dengan beberapa nilai sudut α **dan** β **.**

Kata kunci : PDP Laplace, sistem koordinat segitiga, perpindahan panas

Latar Belakang

Sains dan teknik

Metode numerik

Perpindahan panas

Konduksi

Pola segitiga

Transformasi koordinat

Metode beda hingga

Rumusan Masalah

Bagaimana proses perpindahan panas pada node-node yang arah penyebaran panasnya membentuk pola segitiga dan simulasinya menggunakan software MATLAB

Batasan Masalah

1. Proses perpindahan panas yang terjadi secara konduksi.

2. Proses perpindahan panas terjadi pada plat logam segitiga.

3. Metode yang digunakan adalah metode beda hingga.

4. Suhu pada sumbu u dan sumbu w 0° dan pada sumbu v 100°

5. Proses perpindahan panas terjadi pada kondisi *steady*.

Tujuan

Mengetahui proses perpindahan panas pada node-node yang arah penyebaran panasnya membentuk pola segitiga dan mensimulasikan menggunakan software MATLAB.

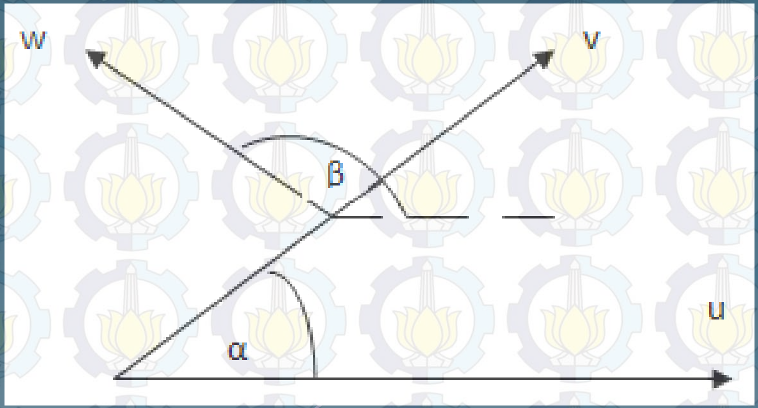
Manfaat

Manfaat dalam Tugas Akhir ini adalah dapat menunjukkan proses perpindahan panas yang arah penyebaran panasnya membentuk pola segitiga. Dan memberikan informasi untuk penelitian selanjutnya.

Tinjauan Pustaka

1. Sistem Koordinat Segitiga

Pada sistem koordinat segitiga untuk mendefinisikan koordinat suatu titik dibutuhkan tiga garis yang mempunyai arah masing-masing. Sistem koordinat segitiga dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 1 Sistem Koordinat Segitiga

2. Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan salah satu metode yang merumuskan suatu persamaan fungsi kontinu menjadi persamaan yang hanya melibatkan operasi aljabar biasa yang bersifat iteratif. Deret Taylor dari fungsi f(x) yang dapat didiferensialkan n kali di dalam interval $[x_0 - h, x_0 + h]$ dimana h cukup kecil dapat dinyatakan dalam deret pangkat sebagai berikut :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \left(hf'(x_0)\right) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \left(\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)\right) \qquad (1)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - \left(hf'(x_0)\right) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) - \cdots + \left((-1)^n . \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)\right) \qquad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) dapat diperoleh pendekatan turunan pertama f(x)

Dititik x_0 , yaitu :

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dengan mengurangkan persamaan (1) dan (2), diperoleh pendekatan turunan pertama yang lain, yaitu :

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

Dengan menambahkan persamaan (1) dan (2), diperoleh pendekatan turunan kedua, yaitu :

$$\frac{d^2f(x_0)}{dx^2} = \frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2} \qquad (3)$$

Jika sumbu x dibagi ke dalam beberapa interval $\Delta x = h$ yang panjangnya sama, maka absis titik kisi i dapat ditulis dalam bentuk

$x_i = i\Delta x = ih$ sehingga bentuk pendekatan turunan pertama di tiik kisi i menjadi :

1. Pendekatan beda hingga maju : $\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$
2. Pendekatan beda hingga mundur: $\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$

3. Pendekatan beda hingga pusat / tengah :

$$\frac{df(x_i)}{dx} \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

Bentuk pendekatan turunan kedua di kisi i

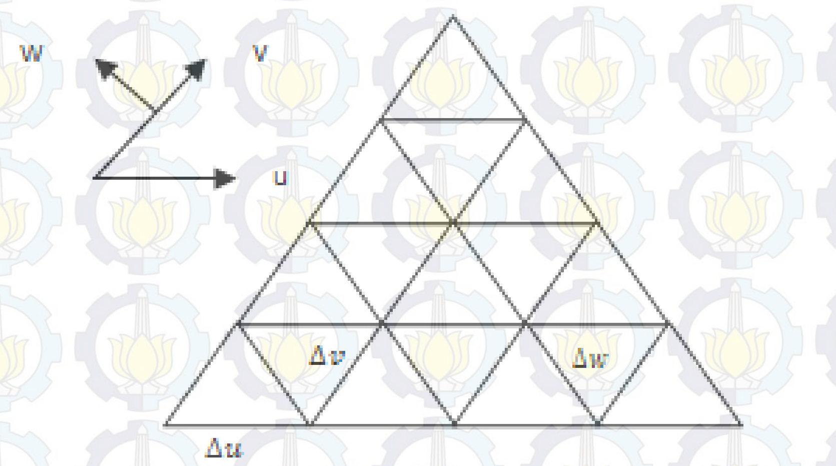
$$\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} \approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$$

Pendekatan bentuk turunan fungsi dari variabel banyak dapat dilakukan dengan cara yang sama.

Beda Hingga Koordinat Segitiga

Dalam menyelesaikan sistem perpindahan panas menggunakan koordinat segitiga, dapat dilakukan dengan metode numerik, yaitu diskritisasi. Diskritisasi adalah pembagian domain-domain menjadi daerah-daerah kecil dengan ditandai node.

Diskritisasi segitiga dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2. Diskritisasi segitiga

Δu merupakan jarak antara titik-titik yang sejajar vektor u, sedangkan Δv jarak antara titik-titik yang sejajar vektor v, dan Δw adalah jarak antara titik-titik yang sejajar vektor w.

Berikut persamaan beda hingga orde-1,

$$\frac{dT}{du} \approx \frac{T_{(u+\Delta u)} - T_{(u-\Delta u)}}{2\Delta u}$$
$$\frac{dT}{dv} \approx \frac{T_{(v+\Delta v)} - T_{(v-\Delta v)}}{2\Delta v}$$
$$\frac{dT}{dw} \approx \frac{T_{(w+\Delta w)} - T_{(w-\Delta w)}}{2\Delta w}$$

Sedangkan derivatif orde-2

$$\frac{d^2T}{du^2} \approx \frac{T_{(u+\Delta u)} - 2T_{\Delta u} + T_{(u-\Delta u)}}{(\Delta u)^2}$$
$$\frac{d^2T}{dv^2} \approx \frac{T_{(v+\Delta v)} - 2T_{\Delta v} + T_{(v-\Delta v)}}{(\Delta v)^2}$$
$$\frac{d^2T}{dw^2} \approx \frac{T_{(w+\Delta w)} - 2T_{\Delta w} + T_{(w-\Delta w)}}{(\Delta w)^2}$$

Konduksi Panas

Semua perpindahan panas berhubungan dengan perpindahan dan perubahan energi. Karena proses tersebut berdasarkan hukum pertama maupun hukum kedua termodinamika. Laju perpindahan kalor dapat ditentukan menggunakan metode dalam ilmu perpindahan panas. Perpindahan panas adalah berlangsungnya perpindahan energi karena adanya perbedaan temperatur antara dua sistem yang bersinggungan, dimana arah perpindahannya dari temperatur lebih rendah didalam suatu medium baik padat , cair, maupun gas. Setiap analisis perpindahan panas bertujuan untuk meramalkan perpindahan panas, atau suhu yang didapatkan sebagai akibat aliran kalor tertentu. Terdapat tiga cara perpindahan panas yaitu Konduksi atau hantaran, Konveksi, Radiasi atau pancaran. Selain itu, perpindahan panas juga bergantung pada kondisi berlangsungnya perpindahan panas tersebut. Kondisi tersebut yaitu : Kondisi *steady* (tunak), Kondisi *unsteady* (tak tunak). Pada tugas akhir ini menggunakan perpindahan panas dengan cara konduksi. Konduksi adalah proses dimana panas mengalir dari daerah yang mempunyai suhu lebih rendah dalam suatu medium atau antara medium-medium yang lain yang berhubungan secara langsung. Persamaan konduksi panas pada domain dua dimensi pada keadaan tunak (*steady*) dinyatakan dalam model matematika berupa Persamaan Diferensial Parsial (PDP) *Laplace* , yaitu :

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

METODE PENELITIAN

1. **Menguraikan Landasan Teori**
2. **Analisa Perpindahan Panas menggunakan sistem koordinat segitiga**

Pada tahap ini terdapat beberapa langkah yaitu :

a. Proses transformasi koordinat dari sistem koordinat cartesius menjadi sistem koordinat segitiga

b. Menentukan bentuk numerik dari persamaan sistem menggunakan metode beda hingga

c. Membangun solusi numerik dari persamaan sistem

d. Menyusun algoritma dan program dalam bahasa pemrograman MATLAB

e. Running program

f. Analisis hasil

g. Menarik kesimpulan dan menyusun laporan tugas akhir

Model Perpindahan Panas

Diketahui suatu sistem perpindahan panas mempunyai fungsi f(x,y,t) untuk menaikkan suhu sebesar . Setelah diterapkan asumsi-asumsinya bentuk persamaan penyelesaiannya yaitu :

$\Delta T = 0$ atau [2]

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0$$ (PDP Laplace)

Transformasi Sistem Koordinat Segitiga

Transformasi koordinat dari koordinat Cartesius (x,y) ke dalam koordinat segitiga (u,v,w) [4] :

$$\begin{cases} x = u + v\cos\alpha + w\cos\beta \\ y = v\sin\alpha + w\sin\beta \end{cases} \qquad \alpha, \beta \text{ konstan}$$

Dengan demikian didapat transformasi koordinatnya,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta} & \frac{\sin\beta}{(\cos(\beta-2\alpha)-\cos\beta)} & \frac{\sin\alpha}{(\cos(2\beta-\alpha)-\cos\alpha)} \\ \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} & \frac{-(2\cos\beta)}{(\cos(\beta-2\alpha)-\cos\beta)} & \frac{-(2\cos\alpha)}{(\cos(2\beta-\alpha)-\cos\alpha)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial w^2} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Subtitusi hasil transformasi ke model perpindahan panas,

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\left(1 + \frac{cos\alpha cos\beta}{sin\alpha sin\beta}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \left(\frac{-(2cos\beta)}{(\cos(\beta - 2\alpha) - cos\beta)}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + \left(\frac{-(2cos\alpha)}{(\cos(2\beta - \alpha) - cos\alpha)}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = 0$$

Jika dimasukkan beda hingganya,maka dapat diperoleh persamaan umum numerik ΔT yaitu :

$$\Delta T = 0$$

$$a\left(\frac{T_{(u-\Delta u,v,w)} - 2T_{(u,v,w)} + T_{(u+\Delta u,v,w)}}{(\Delta u)^2}\right) + b\left(\frac{T_{(u,v-\Delta v,w)} - 2T_{(u,v,w)} + T_{(u,v+\Delta v,w)}}{(\Delta v)^2}\right) + c\left(\frac{T_{(u,v,w-\Delta w)} - 2T_{(u,v,w)} + T_{(u,v,w+\Delta w)}}{(\Delta w)^2}\right) = 0$$

yaitu :

$$\Delta T = 0$$

$$\frac{a}{(\Delta u)^2}T_{(u-\Delta u,v,w)} + \left(\frac{-2a}{(\Delta u)^2} - \frac{2b}{(\Delta v)^2} - \frac{2c}{(\Delta w)^2}\right)T_{(u,v,w)} + \frac{a}{(\Delta u)^2}T_{(u+\Delta u,v,w)} + \frac{b}{(\Delta v)^2}T_{(u,v-\Delta v,w)} + \frac{b}{(\Delta v)^2}T_{(u,v+\Delta v,w)} + \frac{c}{(\Delta w)^2}T_{(u,v,w-\Delta w)} + \frac{c}{(\Delta w)^2}T_{(u,v,w+\Delta w)} = 0$$

Maka didapat bentuk umum persamaan numerik

$$\Delta T = 0$$

$$s_1 T_{(u-\Delta u,v,w)} + s_2 T_{(u,v,w)} + s_3 T_{(u+\Delta u,v,w)} + s_4 T_{(u,v-\Delta v,w)} + s_5 T_{(u,v+\Delta v,w)} + s_6 T_{(u,v,w-\Delta w)} + s_7 T_{(u,v,w+\Delta w)} = 0 \qquad (2)$$

dengan,

$$s_1 = \frac{a}{(\Delta u)^2}, s_2 = \left(\frac{-2a}{(\Delta u)^2} - \frac{2b}{(\Delta v)^2} - \frac{2c}{(\Delta w)^2}\right),$$

$$s_3 = \frac{a}{(\Delta u)^2}, \quad s_4 = \frac{b}{(\Delta v)^2}, s_5 = \frac{b}{(\Delta v)^2},$$

$$s_6 = \frac{c}{(\Delta w)^2}, s_7 = \frac{c}{(\Delta w)^2}$$

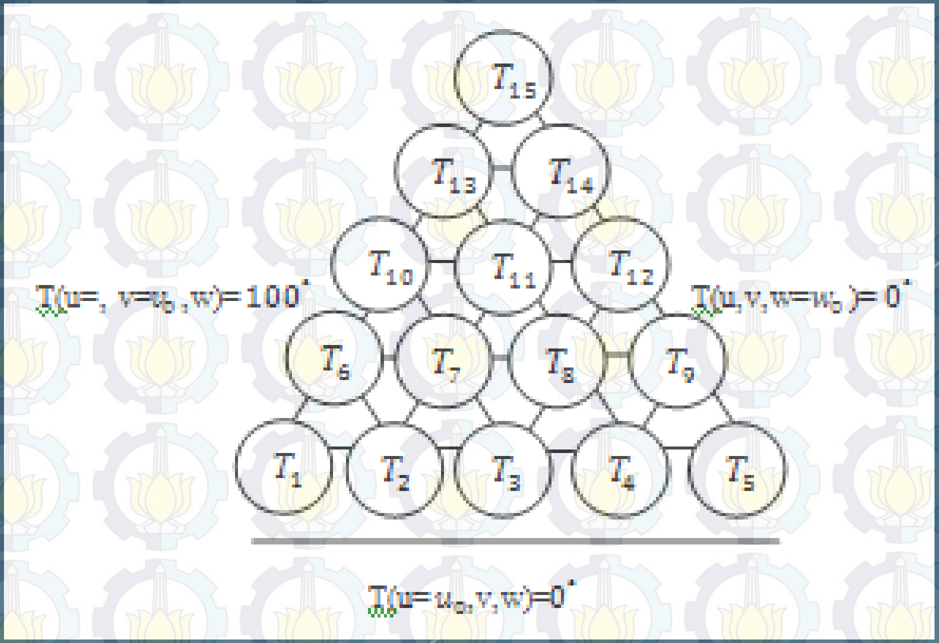
Proses Perpindahan Panas

Jika diketahui dan subtitusi ke persamaan (1). Maka didapat koefisien untuk persamaan sistem,

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

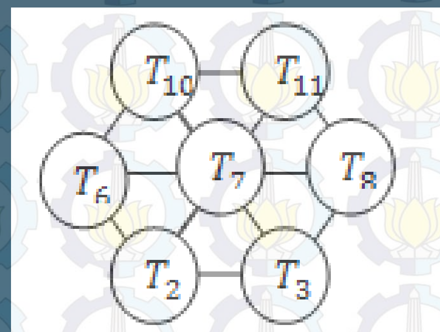
$$\frac{2}{3}\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = 0$$

Pada tahap ini dijelaskan proses perpindahan panas pada diskritisasi 7x7x7. Dengan syarat batas pada sisi sumbu v diberi suhu 0° , dan untuk sisi yang lain dan suhunya 100°. Berikut perhitungan proses perpindahan panas pada plat segitiga. Diskritisasi 7x7x7 adalah pembagian domain menjadi segitiga-segitiga kecil sebanyak 7 segitiga. Untuk proses perpindahan panas pada diskritisasi 7x7x7 dapat dilihat pada gambar 3



Gambar 3. Diagram penyebaran panas untuk diskritisasi 7x7x7

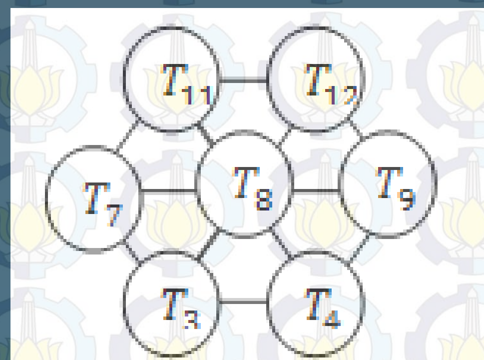
Kemudian dari gambar 2 diatas, dibagi kembali menjadi beberapa elemen pada gambar 4, 5, dan 6 dibawah ini ,



Gambar 4. Diagram penyebaran panas dari titik T_2 sampai T_{11}

kemudian masukkan ke persamaan sistem (2),

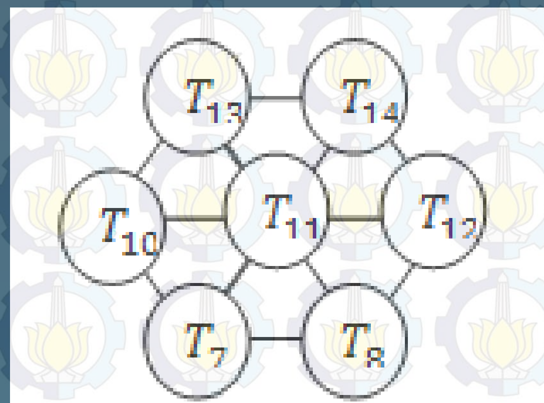
$$
\begin{aligned}
\Delta T &= s_1T_6 + s_2T_7 + s_3T_8 + s_4T_2 + s_5T_{11} + s_6T_3 \\
&\qquad + s_7T_{10} \\
&= s_1.100 + s_2T_7 + s_3T_8 + 0 + s_5T_{11} + 0 \\
&\qquad + s_7.100 \\
s_2T_7 + s_3T_8 + s_5T_{11} &= -100(s_1 + s_7)
\end{aligned}
$$



Gambar 5. Diagram penyebaran panas dari titik T_3 sampai T_{12}

kemudian masukkan ke persamaan sistem (2),

$$
\begin{aligned}
\Delta T &= s_1 T_7 + s_2 T_8 + s_3 T_9 + s_4 T_3 + s_5 T_{12} \\
&\qquad + s_6 T_4 + s_7 T_{11} \\
&= s_1 T_7 + s_2 T_8 + 0 + 0 + 0 + 0 + s_7 T_{11} \\
& s_1 T_7 + s_2 T_8 + s_7 T_{11} = 0
\end{aligned}
$$



Gambar 6. Diagram penyebaran panas dari titik T_7 sampai T_{14}

$$\begin{aligned}\Delta T &= s_1 T_{10} + s_2 T_{11} + s_3 T_{12} + s_4 T_7 + s_5 T_{14} \\ &\quad + s_6 T_8 + s_7 T_{13} \\ &= s_1.100 + s_2 T_{11} + 0 + s_4 T_7 + 0 + s_6 T_8 \\ &\quad + s_7.100 \\ s_2 T_{11} + s_4 T_7 + s_6 T_8 &= -100(s_1 + s_7)\end{aligned}$$

Dengan $\Delta u = \Delta v = \Delta w = \frac{1}{4}$

maka koefisien persamaan numeriknya :

$$s_1 = 10{,}67, s_2 = -63{,}99, s_3 = 10{,}67,$$
$$s_4 = 10{,}67, s_5 = 10{,}67, s_6 = 10{,}67,$$
$$s_7 = 10{,}67$$

$$\begin{pmatrix} s_2 & s_3 & s_5 \\ s_1 & s_2 & s_7 \\ s_4 & s_6 & s_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_7 \\ T_8 \\ T_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100(s_1+s_7) \\ 0 \\ -100(s_1+s_7) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -63{,}99 & 10{,}67 & 10{,}67 \\ 10{,}67 & -63{,}99 & 10{,}67 \\ 10{,}67 & 10{,}67 & -63{,}99 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_7 \\ T_8 \\ T_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2134 \\ 0 \\ -2134 \end{pmatrix}$$

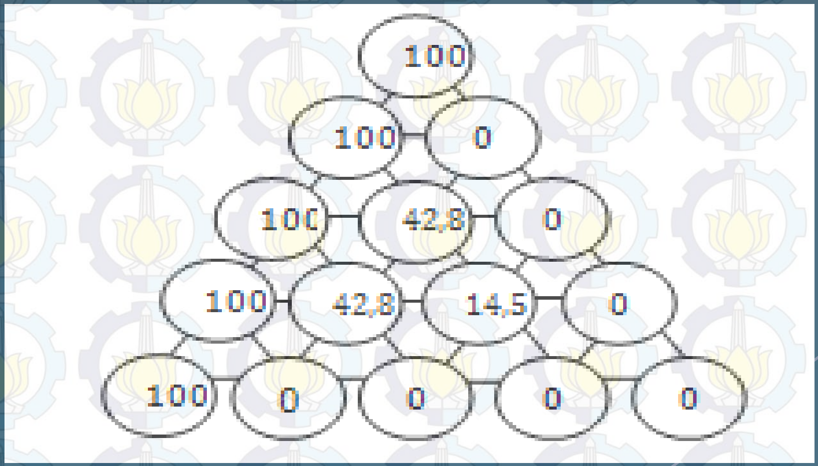
$$\begin{pmatrix} T_7 \\ T_8 \\ T_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -63{,}99 & 10{,}67 & 10{,}67 \\ 10{,}67 & -63{,}99 & 10{,}67 \\ 10{,}67 & 10{,}67 & -63{,}99 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -2134 \\ 0 \\ -2134 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} T_7 \\ T_8 \\ T_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}0167 & -0{,}0034 & -0{,}0034 \\ -0{,}0034 & -0{,}0167 & -0{,}0034 \\ -0{,}0034 & -0{,}0034 & -0{,}0167 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2134 \\ 0 \\ -2134 \end{pmatrix}$$

Maka untuk penyebaran panas pada diskritisasi 7x7x7 didapatkan suhu pada :

$$T_7 = 42{,}89;\ T_8 = 14{,}5112;\ T_{11} = 42{,}89.$$

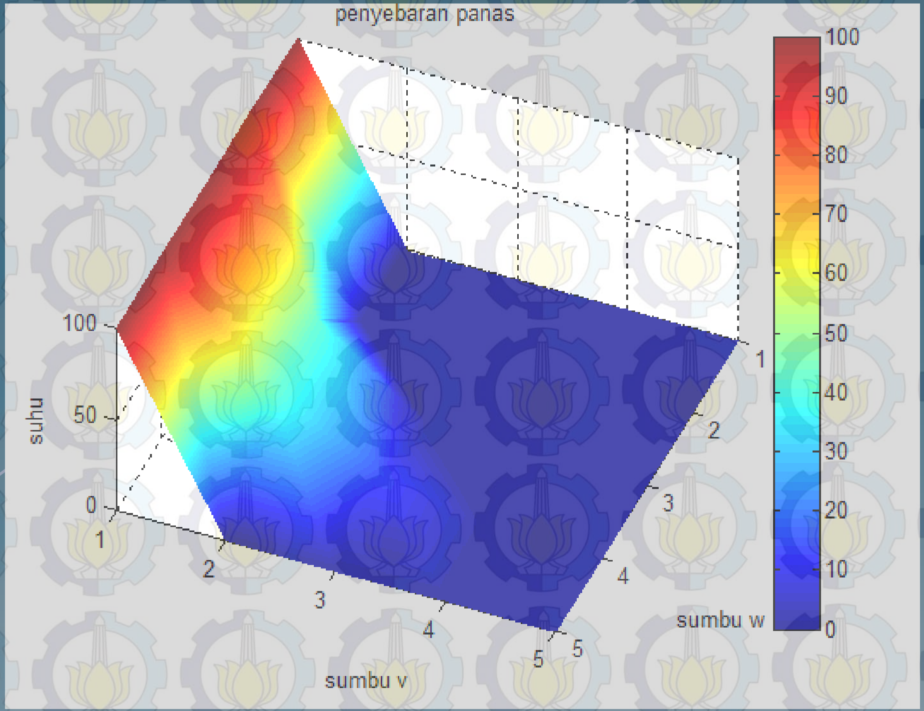
Dan apabila digambarkan sebagai berikut



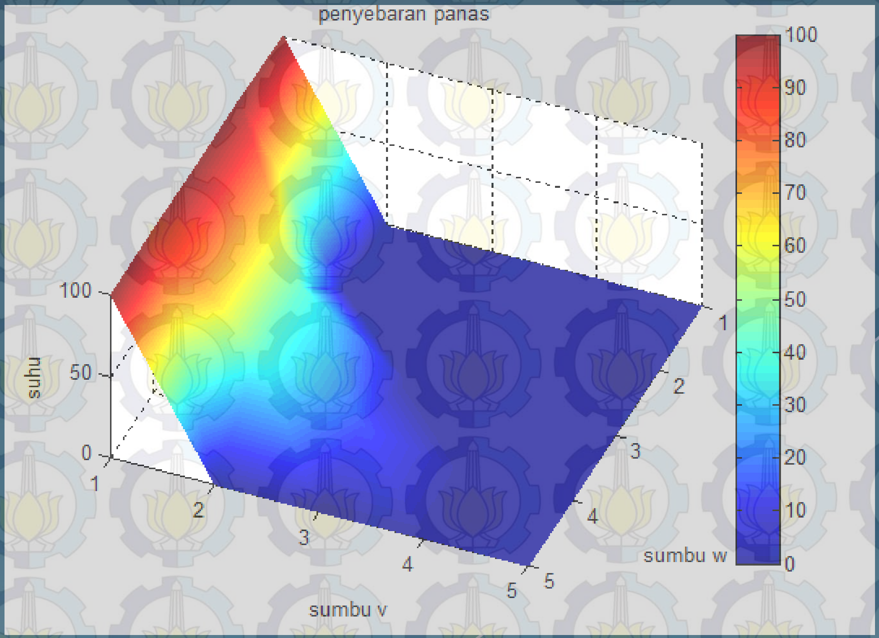
Gambar 7. Diagram penyebaran panas pada diskritisasi 7x7x7 setelah diberi suhu

Simulasi Dan Analisis

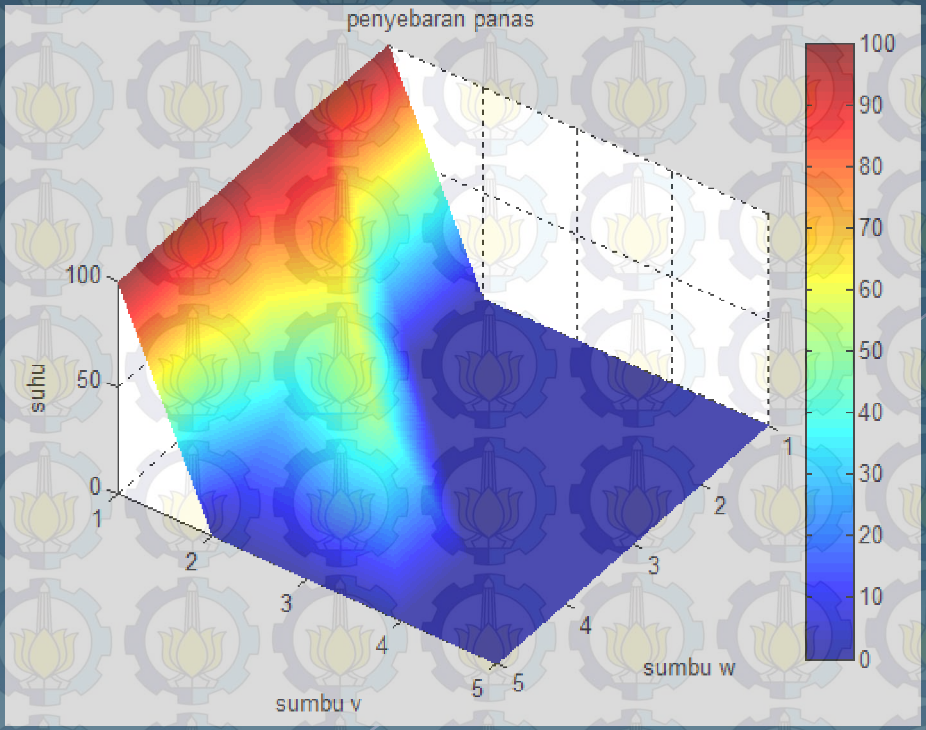
Dari hasil perhitungan sebelumnya kemudian dilakukan simulasi. Dengan mengubah beberapa parameternya, yaitu mengubah sudut (α, β) dan mengubah jarak antar titik/node $(\Delta u, \Delta v, \Delta w)$. Hal ini dilakukan untuk mengetahui penyebaran panasnya



Gambar 8. Grafik penyebaran panas diskritisasi 7x7x7 dengan $\alpha = 60°, \beta = 120°, \Delta u = \Delta v = \Delta w = 1$



Gambar 9. Grafik penyebaran panas diskritisasi 7x7x7 dengan $\alpha = 60°, \beta = 120°, \Delta u = \Delta v = \Delta w = 0.5$



Gambar 10. Grafik penyebaran panas diskritisasi 7x7x7 dengan $\alpha = 110°, \beta = 70°, \Delta u = 0,25; \Delta v = 1; \Delta w = 0,5$

Berdasarkan gambar 8 diatas pada sumbu v di titik 2, tampak bahwa warna biru agak menjorok ke depan dengan 2 titik yang letaknya sama Hal tersebut menunjukkan bahwa pada titik tersebut terjadi perubahan suhu yang sama yaitu pada suhu 42,8. Setelah itu pada titik 3, juga terjadi perubahan suhu yaitu suhu pada 14,5. Ketika jarak antar titik/*node* dirubah yaitu menjadi , maka tidak terjadi perubahan suhu pada plat. Hal tersebut dapat ditunjukkan dengan gambar 9 dimana gambar tersebut sama dengan gambar 8. Apabila sudutnya diubah yaitu , dengan jarak antar titik/*node* juga diubah, maka menurut gambar 10 terjadi perubahan suhu yang cukup signifikan. Yaitu pada sumbu v titik 2 suhu berubah pada kisaran suhu antara 50-60. Sedangkan di titik 3 sumbu v perubahan suhunya sangat kecil, yaitu antara 20-30.

Kesimpulan

Dari hasil analisa perpindahan panas dengan menggunakan koordinat segitiga dan simulasinya didapatkan kesimpulan sebagai berikut:

1. Transformasi koordinat dari sistem koordinat cartesius menjadi sistem koordinat segitiga dilakukan agar perhitungan perpindahan suhu pada plat segitiga lebih efisien dan tidak banyak interpolasi.

2. Setelah diterapkan asumsi-asumsinya, dengan mengubah jarak antar titik / node, yaitu $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ maka tidak terjadi perubahan suhu pada plat jika $\Delta u = \Delta v = \Delta w.$ .Semakin besar sudut α maka semakin besar pula perubahan suhunya. Dan semakin besar sudut β semakin kecil perubahan suhunya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Djojodiharjo,H.(1983).''Metoda Numerik'', **Penerbit PT Gramedia Pustaka Utama,** Jakarta

[2] Holman,J.P. (1997).''Heat Transfer'', **Eight Edition, McGraw-Hill Companies**, America.

[3] Kreith, F. (2005). "Principles Heat Transfer", **Harper & Row Publisher**, University of Colorado, America.

[4] Affandi,J. (2009).''Komputasi Numerik Pada System Koordinat Sisi Miring". **Tugas Akhir, Jurusan Matematika ITS**. Surabaya.

[5]Lam,C. (1994)."Applied Numerical Methods For Partial Differential Equations", **Prentice Hall**, Singapore.

[6]Hanafi, L. (2006). "Aplikasi metode Beda Hingga Dalam Sistem Koordinat Segitiga Pada Persamaan Diferensial Parsial Laplace". Prosiding Seminar Nasional matematika. Surabaya, 25 Nopember. **Jurusan Matematika-ITS**, Surabaya

[7] http://suksesmandiriteknik.wordpress.com/tag/atap-baja-ringan-murah/ (diakses tanggal 7 juli 2012).

TERIMA KASIH