Algoritmos y Estructuras de Datos I
Segundo Cuatrimestre 2018

Guía Práctica 1
Lógica

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

1. Lógica binaria (Verdadero o Falso)

Ejercicio 1. ★ Sean p y q variables proposicionales. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son *fórmulas bien formadas*?

a) $(p\neg q)$

b) $p \vee q \wedge \text{true}$

c) $(p \rightarrow \neg p \rightarrow q)$

d) $\neg(p)$

e) $(p \vee \neg p \wedge q)$

f) $(\text{true} \wedge \text{true} \wedge \text{true})$

g) $(\neg p)$

h) $(p \vee \text{false})$

i) $(p = q)$

Ejercicio 2. ★ Sean $x : \mathbb{Z}$, $y : \mathbb{Z}$ y $z : \mathsf{Bool}$ tres variables. ¿Cuáles de las siguientes expresiones pueden tiparse correctamente?

a) $(1 = 0) \vee (x = y)$

b) $(x + 10) = y$

c) $(x \vee y)$

d) $z = (y = x)$

e) $(z = 0) \vee (z = 1)$

f) $y + (y < 0)$

Ejercicio 3. La fórmula $(3+7 = \pi-8) \wedge \text{true}$ es una fórmula bien formada. ¿Por qué? Justifique informal, pero detalladamente, su respuesta.

Ejercicio 4. ★ Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones

a) $(\neg a \vee b)$

b) $(c \vee (y \wedge x) \vee b)$

c) $\neg(c \vee y)$

d) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$

e) $((c \vee y) \wedge (x \vee b))$

f) $(((c \vee y) \wedge (x \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge x) \vee b))$

g) $(\neg c \wedge \neg y)$

cuando el valor de verdad de a, b y c es *verdadero*, mientras que el de x e y es *falso*.

Ejercicio 5. Determinar, utilizando tablas de verdad, si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

a) $(p \vee \neg p)$

b) $(p \wedge \neg p)$

c) $((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$

d) $((p \vee q) \rightarrow p)$

e) $(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$

f) $(p \rightarrow p)$

g) $((p \wedge q) \rightarrow p)$

h) $\big((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))\big)$

i) $\big((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))\big)$

Ejercicio 6. ★ Dadas las proposiciones lógicas α y β, se dice que α es más fuerte que β si y sólo si $\alpha \rightarrow \beta$ es una tautología. En este caso, también decimos que β es más débil que α. Determinar la relación de fuerza de los siguientes pares de fórmulas:

a) true, false

b) $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$

c) true, true

d) p, $(p \wedge q)$

e) false, false

f) p, $(p \vee q)$

g) p, q

h) p, $(p \rightarrow q)$

¿Cuál es la proposición más fuerte y cuál la más débil de las que aparecen en este ejercicio?

Ejercicio 7. ★ Usando reglas de equivalencia (conmutatividad, asociatividad, De Morgan, etc) determinar si los siguientes pares de fórmulas son equivalencias. Indicar en cada paso qué regla se utilizó.

a)
- $((\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge q)) \rightarrow (p \wedge q)$
- $(p \wedge q)$

b)
- $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$

c)
- $\neg(\neg p) \rightarrow (\neg(\neg p \wedge \neg q))$
- q

d)
- $((True \wedge p) \wedge (\neg p \vee False)) \rightarrow \neg(\neg p \vee q)$
- $p \wedge \neg q$

Ejercicio 8. Decimos que un conectivo es *expresable* mediante otros si es posible escribir una fórmula utilizando exclusivamente estos últimos y que tenga la misma tabla de verdad que el primero (es decir, son equivalentes). Por ejemplo, la disyunción es expresable mediante la conjunción más la negación, ya que $(p \vee q)$ tiene la misma tabla de verdad que $\neg(\neg p \wedge \neg q)$.

Mostrar que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\rightarrow$ (implicación), $\leftrightarrow$ (equivalencia) puede reescribirse utilizando sólo los conectivos $\neg$ y $\vee$.

Ejercicio 9. ★ Sean las variables proposicionales f, e y m con los siguientes significados:

$f \equiv$"es fin de semana" $\qquad e \equiv$"Juan estudia" $\qquad m \equiv$"Juan escucha música"

a) Escribir usando lógica proposicional las siguientes oraciones:
- "Si es fin de semana, Juan estudia o escucha música, pero no ambas cosas"
- "Si no es fin de semana entonces Juan no estudia"
- "Cuando Juan estudia los fines de semana, lo hace escuchando música"

b) Asumiendo que valen las tres proposiciones anteriores ¿se puede deducir que Juan no estudia? Justificar usando argumentos de la lógica proposicional.

Ejercicio 10. En la salita verde de un jardín se sabe que las siguientes circunstancias son ciertas:

a) Si todos conocen a Juan entonces todos conocen a Camila (podemos pensar que esto se debe a que siempre caminan juntos).

b) Si todos conocen a Juan, entonces que todos conozcan a Camila implica que todos conocen a Gonzalo.

La pregunta entonces es: ¿Es cierto que si todos conocen a Juan entonces todos conocen a Gonzalo? Justificar.

Ejercicio 11. Siempre que Haroldo se pelea con sus compañeritos, vuelve a casa con un ojo morado. Si un día lo viéramos llegar con el ojo destrozado, podríamos sentirnos inclinados a concluir que se ha tomado a golpes de puño y cabezazos con los otros niñitos. ¿Puede identificar el error en el razonamiento anterior? *Pista:* Es conocido como *falacia de afirmar el consecuente.*

2. Lógica ternaria (Verdadero, Falso o Indefinido)

Ejercicio 12. ★ Asignar un *valor de verdad* (*verdadero*, *falso* o *indefinido*) a cada una de las siguientes *expresiones aritméticas* en los reales.

a) $5 > 0$

b) $1 \leq 1$

c) $(5 + 3 - 8)^{-1} \neq 2$

d) $0 \geq 5$

e) $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$

f) $0 > \log_2(2^{2^0 - 1} - 1)$

g) $0 \cdot \sqrt{-1} = 0$ h) $\sqrt{-1} \cdot 0 = 0$ i) $\tan(\frac{\pi}{2}) = \tan(\pi) - \tan(2)$

Ejercicio 13. ★ ¿Cuál es la diferencia entre el operador $\wedge$ y el operador $\wedge_L$? Describir la tabla de verdad de ambos operadores

Ejercicio 14. ★ ¿Cuál es la diferencia entre el operador $\vee$ y el operador $\vee_L$? Describir la tabla de verdad de ambos operadores.

Ejercicio 15. ★ ¿Cuál es la diferencia entre el operador $\rightarrow$ y el operador $\rightarrow_L$? Describir la tabla de verdad de ambos operadores.

Ejercicio 16. ★ Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones cuando el valor de verdad de b y c es *verdadero*, el de a es *falso* y el de x e y es *indefinido*

a) $(\neg x \vee_L b)$

b) $((c \vee_L (y \wedge_L a)) \vee b$

c) $\neg(c \vee_L y)$

d) $(\neg(c \vee_L y) \leftrightarrow (\neg c \wedge_L \neg y))$

e) $((c \vee_L y) \wedge_L (a \vee_L b))$

f) $(((c \vee_L y) \wedge_L (a \vee_L b)) \leftrightarrow_L (c \vee_L (y \wedge_L a) \vee_L b))$

g) $(\neg c \wedge_L \neg y)$

Ejercicio 17. Sean p, q y r tres variables de las que se sabe que:

- p y q nunca están indefinidas,
- r se indefine sii q es *verdadera*

Proponer una fórmula que nunca se indefina, utilizando siempre las tres variables y que sea verdadera si y solo si se cumple que:

a) Al menos una es verdadera

b) Ninguna es verdadera

c) Exactamente una de las tres es verdadera

d) Sólo p y q son verdaderas

e) No todas al mismo tiempo son verdaderas

f) r es verdadera

3. Cuantificadores

Ejercicio 18.

a) ★ Determinar cuáles de las variables que aparecen en las siguientes expresiones aparecen libres y cuáles ligadas.

   I) $(\forall x : \mathbb{Z})(0 \leq x < n \rightarrow \ x + y = z)$
   II) $(\forall x : \mathbb{Z})((\forall y : \mathbb{Z})((0 \leq x < n \wedge 0 \leq y < m) \rightarrow x + y = z))$
   III) $(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < 10 \rightarrow j < 0)$
   IV) $s \wedge a < b - 1 \wedge ((\forall j : \mathbb{Z})(a \leq j < b \rightarrow_L 2 * j < b \vee s))$
   V) $(\forall j : \mathbb{Z})(j \leq 0 \rightarrow (\forall j : \mathbb{Z})(j > 0 \rightarrow j \neq 0))$
   VI) $(\forall j : \mathbb{Z})(j \leq 0 \rightarrow P(j))$
   VII) $(\forall j : \mathbb{Z})(j \leq 0 \rightarrow P(j)) \wedge P(j)$

b) ★ En los casos en que sea posible, proponer valores para las variables libres del item anterior de modo tal que las expresiones sean verdaderas.

Ejercicio 19. Sean $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen. Considerar los siguientes enunciados y su predicado asociado. Determinar, en cada caso, por qué el predicado no refleja correctamente el enunciado. Corregir los errores.

a) *"Todos los naturales menores a 10 que cumplen P, cumplen Q"*:
   $pred\ a()\{(\forall x : \mathbb{Z})((0 \leq x < 10) \rightarrow_L (P(x) \wedge Q(x)))\}$

b) *"No hay ningún natural menor a 10 que cumpla P y Q"*:
   $pred\ c()\{\neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge P(x) \wedge \neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge Q(x)))))\}$

4. Funciones auxiliares

Ejercicio 20. ★ Escriba los siguientes predicados y funciones en el lenguaje de especificación:

a) *fun suc* $(x : \mathbb{Z})$*:* $\mathbb{Z}$, que corresponde al sucesor de x.

b) *fun suma* $(x, y : \mathbb{R})$*:* $\mathbb{R}$, que corresponda a la suma entre x e y.

c) *fun producto* $(x, y : \mathbb{R})$*:* $\mathbb{R}$, que corresponde al producto entre x e y.

d) *pred esCuadrado* $(x : \mathbb{Z})$ que sea verdadero si y solo si x es un numero cuadrado.

e) *pred esPrimo* $(x : \mathbb{Z})$ que sea verdadero sii x es primo.

f) *pred sonCoprimos* $(x, y : \mathbb{Z})$ que sea verdadero si y solo si x e y son coprimos.

g) *pred divisoresGrandes* $(x, y : \mathbb{Z})$ que sea verdadero si y solo si todos los divisores de x, sin contar el uno, son mayores que y.

h) *pred mayorPrimo* $(x : \mathbb{Z}, y : \mathbb{Z})$ que sea verdadero si y es el mayor primo que divide a x.