DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Ejercicio 3. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz con columnas $a_1, \ldots, a_n$, y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz con filas $b_1^t, \ldots, b_n^t$. Probar que:

(a) Si $\forall x \in \mathbb{R}^n : Ax = Bx$, entonces $A = B$.

(b) $AB = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i^t$.

Resolución:

(a) Nuestra hipótesis dice que para cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$ que consideremos, se cumple que $Ax = Bx$. Podemos *elegir* entonces los vectores que queramos, y esa igualdad se tiene que cumplir. Una elección que uno podría tomar es el primer canónico, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t$. Recordemos que los vectores los consideramos columna, por lo cual sería más correcto escribirlo de esta manera:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como e_1 es un vector de $\mathbb{R}^n$, tiene que valer $Ae_1 = Be_1$. Y, si recordamos lo que vimos en la teórica, $Ae_1 = col_1(A)$, y $Be_1 = col_1(B)$. Juntando ambas cosas, tenemos que la primera columna de A tiene que ser exactamente igual a la primera columna de B.

¿Qué podemos hacer ahora? Podemos repetir el mismo argumento para todas las columnas. Así como usando e_1 llegamos a que A y B tienen la primera columna igual, si elegimos el i-ésimo canónico obtendremos que

$$col_i(A) = Ae_i = Be_i = col_i(B)$$

Hemos probado entonces que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, las columnas i-ésimas de A y B son iguales. Por lo tanto, podemos concluir que $A = B$.

$\square$

(b) Recordemos primero un resultado:

Lema: Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz con columnas $a_1, \ldots, a_n$, entonces para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vale

$$Ax = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \ldots a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$$

Es decir que Ax **es una combinación lineal de las columnas de** A

Con ese resultado en cuenta podemos tratar de demostrar el ejercicio.

Notemos que, al demostrar el ítem (a), probamos algo más fuerte. En lugar de lo pedido, mostramos que si $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ vale que $Ae_i = Be_i$, entonces necesariamente $A = B$.

Tratemos de usar esto, tomando como matrices a AB y $\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i^t$ (¡son las que queremos mostrar que son iguales!). Sea e_j cualquiera de los canónicos, entonces

$$ABe_j = A(Be_j) = A\, col_j(B) = A \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ B_{2,j} \\ \vdots \\ B_{n,j} \end{pmatrix}$$

Usando el lema, esto es igual a $\sum_{i=1}^{n} a_i B_{ij}$.

Por otro lado,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i^t \right) e_j = \sum_{i=1}^{n} a_i\, (b_i^t e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, B_{ij}$$

Probamos entonces que para todo canónico e_j, $(AB)e_j = (\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i^t)e_j$.

Por lo tanto, $AB = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i^t$ $\square$

Resolución alternativa de (b):

Otra idea que se nos puede ocurrir es el descomponer a A y B como sumas de matrices. Una opción es descomponer A como suma de matrices que tienen 0 excepto en la columna j:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ | & | & & | \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} | & & | & | \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \\ | & & | & | \end{pmatrix}$$

Se puede ver que la j-ésima matriz es $a_j e_j^t$, por lo que la descomposición es $A = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j^t$.

Podemos hacer algo parecido con B, pero considerando filas en vez de columnas. Así, $B = \sum_{i=1}^{n} e_i b_i^t$ (noten que para obtener la matriz que tiene ceros salvo en la fila i hay que multiplicar a esa fila por el i-ésimo canónico pero *a izquierda*).

Si hacemos el producto AB considerando estas descomposiciones, queda $(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j^t)(\sum_{i=1}^{n} e_i b_i^t)$, lo cual podemos desarrollar utilizando la propiedad distributiva, y queda

$$AB = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_j e_j^t e_i b_i^t = (*)$$

Ahora bien, como $e_j^t e_i$ vale 1 si $i = j$ y 0 si no, los únicos términos que sobreviven son aquellos con $j = i$, por lo que podemos obtener

$$AB = (*) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^t$$

Que es lo que queríamos demostrar.

$\square$