**Métodos Numéricos**
Primer Cuatrimestre 2020
**Práctica 1**
Elementos de Álgebra Lineal

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

**Ejercicio 18.** Para cualquier $u, v \in \mathbb{R}^n$, sea $A = uv^t$.

(a) Hallar $Im(A)$ y $dim(Nu(A))$.

(b) Probar que $A^2 = tr(A) \cdot A$.

**Resolución.** Analicemos la estructura de la matriz por columnas y por filas:

$$A = uv^t = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_1v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_nv_1 & u_nv_2 & \dots & u_1v_n \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c|c|c} u\,v_1 & u\,v_2 & \dots & u\,v_n \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} u_1v^t \\ \hline u_2v^t \\ \hline \vdots \\ \hline u_nv^t \end{array} \right) \tag{1}$$

Se observa que, o bien todas sus columnas son múltiplos del vector $u$, o bien todas sus filas son múltiplo del vector $v$. Esto indica que la matriz tiene rango 1, es decir que, hay una sola fila o columna linealmente independiente.

(a) La imagen de la matriz $A$ (o equivalentemente, la imagen de la transformación lineal que representa la matriz) podemos definirla como el conjunto de todos los vectores $Ax$ para cualquier $x$ en el dominio de la transformación lineal que $A$ representa: $Im(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

Siguiendo esta definición y utilizando la asociatividad del producto, para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$Ax = (uv^t)x = u\underbrace{(v^tx)}_{\in\mathbb{R}}$$

Es decir, siempre obtenemos un múltiplo del vector $u$ en la imagen sin importar el $x$ utilizado. Podemos concluir que la imagen está generada por dicho vector: $Im(A) = \langle u \rangle$.
La dimensión de este subespacio corresponde a la cantidad de elementos linealmente independientes, en este caso es 1. Utilizando el teorema de la dimensión que nos dice que $dim(Nu(A)) + dim(Im(A)) = n$ deducimos que $dim(Nu(A)) = n - 1$.

Analizando desde otra perspectiva, también sabemos que la imagen de $A$ está formada por el subespacio generado por las columnas de $A$ ya que $Ax$ corresponde a una combinación lineal de columnas de $A$:

$$Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = A(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n) =$$

$$= Ax_1e_1 + Ax_2e_2 + \dots + Ax_ne_n = x_1\underbrace{Ae_1}_{col_1(A)} + x_2\underbrace{Ae_2}_{col_2(A)} + \dots + x_n\underbrace{Ae_n}_{col_n(A)}$$

(Notamos $e_i$ al vector canónico de $\mathbb{R}^n$.) Aquí observamos como siempre podemos pensar al producto $Ax$ como una combinación lineal de las columnas de $A$ cuyos pesos de la combinación están dados por las coordenadas de $x$. Utilizando la representación por columnas de (1),

$$Ax = \left( \begin{array}{c|c|c|c} u\,v_1 & u\,v_2 & \dots & u\,v_n \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1(u\,v_1) + x_2(u\,v_2) + \dots + x_n(u\,v_n) =$$

$$= u\,\underbrace{(x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n)}_{\in\mathbb{R}}$$

Llegamos de nuevo a la misma representación que antes, expresando a $Ax$ como un múltiplo del vector $u$.

(b) Analicemos el cuadrado de la matriz $A$ y utilicemos la asociatividad del producto.

$$A^2 = (uv^t)(uv^t) = u\,\underbrace{(v^tu)}_{\in\mathbb{R}}\,v^t = (v^tu)uv^t = (v^tu)A \tag{2}$$

Recordemos que la traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal. Luego,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (uv^t)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i = v^tu \tag{3}$$

Llegamos por (2) y (3) a que $A^2 = (v^tu)A = tr(A) \cdot A$

$\square$