

Métodos Numéricos
24 de julio de 2020
Recuperatorio
Primer Parcial



**DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION**
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

<input type="checkbox"/> Completar apellido en las hojas y numerarlas <input type="checkbox"/> Enviar fotos claras y legibles de la resolución del examen <input type="checkbox"/> Justificar <u>todas</u> las respuestas	Nombre y Apellido <i>Yulita Federico</i>			
	Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Nota

1. Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible, $v, w \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}$. Definimos $B \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ como $B = \begin{pmatrix} A & v \\ w^t & d \end{pmatrix}$. Sea $x_v \in \mathbb{R}^n$ la solución de $Ax = v$.

(a) Probar que B es inversible si y sólo si $d - w^t x_v \neq 0$. (15 puntos)

(b) Supongamos que B es inversible. Sean $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Notamos x_b al vector de \mathbb{R}^n tal que $Ax_b = b$. Mostrar que la solución de $Bx = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ está dada por $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ con $y = x_b - z x_v$ y $z = \frac{c - w^t x_b}{d - w^t x_v}$. (20 puntos)

2. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, demostrando o dando un contraejemplo: (15 puntos cada ítem)

(a) La matriz $\begin{pmatrix} aI & aP \\ -aP^t & aI \end{pmatrix}$ es definida positiva para todo $a \in \mathbb{R}$ no nulo, siendo I la matriz identidad y P una matriz de permutación, ambas de $n \times n$.

(b) Sea $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$ y $A = uu^t$. Si $B(t) = (1 - t)I + tA^t A$, entonces $B(t)$ es definida positiva para todo $0 \leq t \leq 1$.

3. Se define la matriz $H_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para cualquier n potencia de 2, de forma inductiva de la siguiente manera:

$$H_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_{n/2} & H_{n/2} \\ H_{n/2} & -H_{n/2} \end{pmatrix}$$

siendo $H_1 = [1]$.

(a) Probar que la matriz H_n es ortogonal para cualquier n potencia de 2. (15 puntos)

(b) Determinar si H_2 es una matriz de Givens, una matriz de Householder, o ninguna de las anteriores. Justificar en cada caso, especificando qué rotación se realiza si es de Givens, o respecto de qué recta refleja si es de Householder. (20 puntos)