Eliminación Gaussiana
Factorización LU
Normas Matriciales

Métodos Numéricos

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

1er Cuatrimestre 2020 - COVID-19 Edition

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Ejemplo

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & 4 & 2\\ 4 & 8 & 2\end{pmatrix} \underset{f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & -4 & -4\\ 4 & 8 & 2\end{pmatrix}$$

$$a_{2j}^{(1)} \leftarrow a_{2j}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)} \quad j = 1, 2, 3$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_3 \leftarrow f_3 - 4f_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$a_{2j}^{(1)} \leftarrow a_{2j}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)} \quad j = 1, 2, 3$$

$$a_{3j}^{(1)} \leftarrow a_{3j}^{(0)} - \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)} \quad j = 1, 2, 3$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_3 \leftarrow f_3 - 4f_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$a_{2j}^{(1)} \leftarrow a_{2j}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)} \quad j = 1, 2, 3$$

$$a_{3j}^{(1)} \leftarrow a_{3j}^{(0)} - \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)} \quad j = 1, 2, 3$$

En general: $$a_{ij}^{(1)} \leftarrow a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)} \quad j = 1, \ldots, n \quad i = 2, \ldots$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Ejemplo

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Ejemplo

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix} \underset{f_3 \leftarrow f_3 - 2f_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$a_{3j}^{(2)} \leftarrow a_{3j}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)} \quad j = 2, 3$$

En general: $$a_{ij}^{(2)} \leftarrow a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{2j}^{(1)} \quad j = 2, \dots, n \quad i = 3, \dots$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_3 \leftarrow f_3 - 4f_1}{\overset{f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix} \underset{f_3 \leftarrow f_3 - 2f_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- ¿Cómo realizamos "$f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1$" de forma matricial?

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Veamos que

$$(1,1,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (a_{11}+a_{21}, a_{12}+a_{22}, a_{13}+a_{23})$$

- $e_i^t A = \text{fila}_i(A)$
- $(e_1+e_2)^t A = e_1^t A + e_2^t A = \text{fila}_1(A) + \text{fila}_2(A)$

Combinaciones lineales de filas:

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1\, e_1^t + \alpha_2\, e_2^t + \alpha_3\, e_3^t) \quad \Rightarrow \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A =$
$(\alpha_1\, e_1 + \alpha_2\, e_2 + \alpha_3\, e_3)^t A = \alpha_1\, \text{fila}_1(A) + \alpha_2\, \text{fila}_2(A) + \alpha_3\, \text{fila}_3(A)$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

En nuestro ejemplo: "$f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1$"

- Ya sabemos como realizar "$f_2 - 2f_1$"

$$(-2, 1, 0)\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} = (0, -4, -4)$$

- ¿Cómo ubicamos el resultado en la fila 2?

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Veamos que

$$\begin{pmatrix} \boxed{-2 \quad 1 \quad 0} \\ 0 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{f_2 - 2f_1} \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \quad 0 \quad 0 \\ \boxed{-2 \quad 1 \quad 0} \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \boxed{f_2 - 2f_1} \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 1 \quad 0 \\ \boxed{-2 \quad 1 \quad 0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \boxed{f_2 - 2f_1} \end{pmatrix}$$

Regla general de multiplicación de matrices AB

Caso 3×3

$$\left(\begin{array}{c} a_1^t \\ \hline a_2^t \\ \hline a_3^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} & B & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} a_1^t\, B \\ \hline a_2^t\, B \\ \hline a_3^t\, B \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc} & A & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c} b_1 & b_2 & b_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} Ab_1 & Ab_2 & Ab_3 \end{array}\right)$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

En nuestro ejemplo: "$f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1$"

- Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Siguiente paso: "$f_3 \leftarrow f_3 - 4f_1$"

- Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Siguiente paso: "$f_3 \leftarrow f_3 - 4f_1$"

- Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Uniendo dos pasos: $f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1 \ / \ f_3 \leftarrow f_3 - 4f_1$

- Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Uniendo dos pasos: $f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1 \ / \ f_3 \leftarrow f_3 - 4f_1$

- Matricialmente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Uniendo dos pasos: $f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1 \;/\; f_3 \leftarrow f_3 - 4f_1$

- Matricialmente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Reescribiendo M_1 ...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} (1, 0, 0)$$

$M_1 = I - r_1 e_1^t$ con $r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix}$ y $m_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{jj}}$

Propiedad

- $M_1^{-1} = I + r_1 e_1^t$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Poniendo 0 en la 1er columna ($f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1$ / $f_3 \leftarrow f_3 - 4f_1$)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

Último paso: $f_3 \leftarrow f_3 - 2f_2$

- Matricialmente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{M_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Reescribiendo M_2 ...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = I - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} (0, 1, 0)$$

$M_2 = I - r_2\, e_2^t$ con $r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{32}^{(1)} \end{pmatrix}$ y $m_{ij}^{(1)} = \dfrac{a_{ij}^{(1)}}{a_{jj}^{(1)}}$

Propiedad

- $M_2^{-1} = I + r_2 e_2^t$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Resumiendo...

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{M_2 \\ \\ f_3 \leftarrow f_3 - 2f_2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{M_1 \\ \\ f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1 \\ f_3 \leftarrow f_3 - 4f_1}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$M_2\, M_1\, A = U \Longrightarrow A = \underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1}}_{L} U$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Resumiendo...

$$M_2\, M_1\, A = U \Longrightarrow A = \underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1}}_{L} U$$

Propiedad

- $M_1^{-1} = I + r_1 e_1^t$
- $M_2^{-1} = I + r_2 e_2^t$

$$A = (I + r_1 e_1^t)(I + r_2 e_2^t)\, U = (I + r_1 e_1^t + r_2 e_2^t) U$$

Eliminación Gaussiana - Factorización LU

Resumiendo...

$$M_2\, M_1\, A = U \Longrightarrow A = \underbrace{M_1^{-1} M_2^{-1}}_{L}\, U$$

$$A = (I + r_1 e_1^t)(I + r_2 e_2^t)\, U = (I + r_1 e_1^t + r_2 e_2^t)\, U$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{M_2^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1^{-1} M_2^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{U} = LU$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

Pivoteo parcial: intercambiando filas

$$\text{Buscamos } |a_{i^\star 1}| = \max_{1 \le i \le n} |a_{i1}|$$

- Intercambiamos fila 1 con fila $i^\star$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|a_{31}| = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{i1}|$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_1 \leftrightarrow f_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- ¿Por qué matriz premultiplicamos A para realizar "$f_1 \leftrightarrow f_3$"?

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

Recordemos regla general de multiplicación de matrices BC:

$$\left(\begin{array}{c} b_1^t \\ \hline b_2^t \\ \hline b_3^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} & C & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} b_1^t\,C \\ \hline b_2^t\,C \\ \hline b_3^t\,C \end{array}\right)$$

Si $B = I$:

$$I\,C = \left(\begin{array}{c} e_1^t \\ \hline e_2^t \\ \hline e_3^t \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} & C & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} e_1^t\,C \\ \hline e_2^t\,C \\ \hline e_3^t\,C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} f_1(C) \\ \hline f_2(C) \\ \hline f_3(C) \end{array}\right)$$

- Intercambiando filas de I obtengo matriz de permutación

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

Definimos la matriz de permutación P_{13} a la matriz identidad con las filas 1 y 3 intercambiadas

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|a_{31}| = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{i1}|$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_1 \leftrightarrow f_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{f_3 \leftarrow f_3 - (1/4) f_1}{\overset{f_2 \leftarrow f_2 - (2/4) f_1}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|a_{31}| = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{i1}|$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \rightsquigarrow \\ f_1 \leftrightarrow f_3 \end{matrix}}_{P_{13}} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} f_2 \leftarrow f_2 - (2/4) f_1 \\ \rightsquigarrow \\ f_3 \leftarrow f_3 - (1/4) f_1 \end{matrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1} P_{13} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

Necesitamos intercambiar filas:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$$|a_{32}| = \max_{2 \le i \le n} |a_{i2}|$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5/2 \end{pmatrix} \underbrace{\underset{f_2 \leftrightarrow f_3}{\rightsquigarrow}}_{P_{23}} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

$$P_{23} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1} P_{13} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

Propiedad de las matrices de permutación P que intercambian filas:

- $P = P^t$
- $P^2 = I$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

Intercalamos la matriz identidad como P_{23}^2

$$\underbrace{P_{23}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1} \underbrace{P_{23}P_{23}}_{I} \underbrace{P_{13}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

Observemos que:

$$P_{23}M_1P_{23} = P_{23}(I - r_1e_1^t)P_{23} = \underbrace{P_{23}P_{23}}_{I} - \underbrace{P_{23}r_1}_{\tilde{r}_1}\underbrace{e_1^tP_{23}}_{e_1^t} = I - \tilde{r}_1e_1^t = \widetilde{M}_1$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

$$\underbrace{P_{23}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{23}}_{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -2/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\widetilde{M}_1}} \underbrace{P_{23}P_{13}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$\widetilde{M}_1 PA = U \quad \Rightarrow PA = \underbrace{\widetilde{M}_1^{-1}}_{L} U$$

Eliminación Gaussiana - Factorización $PA = LU$

Ejemplo

$PA = LU$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 2/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

Ejercicio

Práctica 2. Ej 11.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sea $A^{(k)}$ la matriz que se obtiene a partir de A por el método de eliminación Gaussiana cuando las primeras k columnas ya han sido trianguladas.

1. Hallar la matriz M_k de tal forma que $M_k\, A^{(k-1)} = A^{(k)}$.
2. Probar que A es no singular si y sólo si $A^{(k)}$ es no singular.
3. Si A es simétrica, demostrar que la submatriz de $A^{(k)}$ que aún no ha sido triangulada sigue siendo simétrica (es decir, que $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$, para $k < i, j \leq n$).

Ejercicio

Enunciado (1er Parcial - 1er Cuat. 2017)

Sea $n \geq 2$ y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz definida como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \geq j \ \wedge \ j \neq n \\ i & \text{si } j = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostrar que la matriz A tiene factorización LU.

Normas

Normas Vectoriales: $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$:

- $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Normas

Normas Matriciales: $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$

Para cualquier $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}, \lambda \in \mathbb{R}$, se cumple:

- $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Propiedad submultiplicativa

- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Consistencia de una norma matricial respecto de una norma vectorial

- $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$

Normas Matriciales

Algunos ejemplos:

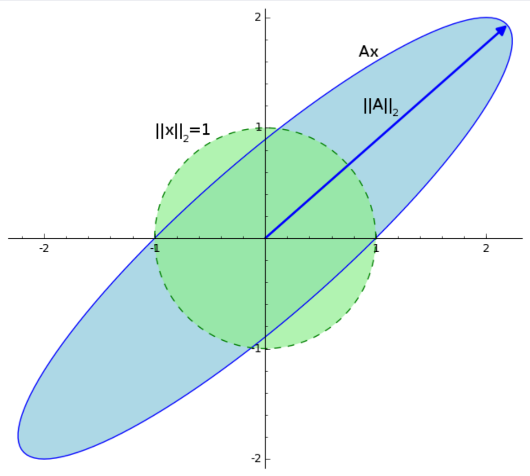
- $\|A\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$ (Norma Frobenius)
- $\|A\|_M = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$

Normas matriciales inducidas por norma vectorial $\|\cdot\|_{\mathbf{v}}$

- $\|A\|_{\mathbf{v}} = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_{\mathbf{v}}}{\|x\|_{\mathbf{v}}} = \max\limits_{\|x\|_{\mathbf{v}}=1} \|Ax\|_{\mathbf{v}}$

Normas Matriciales

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$



Normas Matriciales

Normas p matriciales, $p = 1, 2, \ldots, \infty$

- $\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$

Casos particulares

- $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Ejercicio

Sea $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz diagonal. Demostrar: $\|D\|_p = \max_{1 \leq i \leq n} |d_{ii}|$