Métodos Numéricos
22 de junio de 2020
Segundo Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

☐ Completar apellido en las hojas y numerarlas ☐ Enviar fotos claras y legibles de la resolución del examen ☐ **Justificar <u>todas</u> las respuestas**	Nombre y Apellido *Yulita Federico*			
	Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Nota

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \geq n$ y sea $A = U\Sigma V^t$ una descomposición SVD de A con $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonales y $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ diagonal conteniendo los valores singulares $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$. Llamemos además $u_1, \ldots, u_m$ a las columnas de U y $v_1, \ldots, v_n$ a las columnas de V. Se desea encontrar un $x \in \mathbb{R}^n$ ($||x||_2 = 1$) que minimiza $||Ax||_2$.

   (a) Mostrar que un cambio de variables permite reescribir el problema como: "encontrar un $y \in \mathbb{R}^n$ ($||y||_2 = 1$) que minimiza $||\Sigma y||_2$". (10 puntos)

   (b) Probar que un $y^\star$ que resuelve el problema del ítem (a) es $y^\star = e_n$, el n-ésimo vector de la base canónica, es decir: $\min\limits_{y:||y||_2=1} ||\Sigma y||_2 = ||\Sigma e_n||_2$. (15 puntos)

   (c) Dar una expresión de $x^\star \in \mathbb{R}^n$ (es decir, de una solución del problema inicial) y de $||Ax^\star||_2$ en función de los componentes de la descomposición SVD de A. (10 puntos)

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$ con $c \in \mathbb{R}$ y sea $b \in \mathbb{R}^3$.

   (a) Plantear el esquema iterativo de Gauss-Seidel para resolver el sistema $Ax = b$. (10 puntos)

   (b) Hallar $\rho(T_{GS})$, siendo T_{GS} la matriz de iteración de Gauss-Seidel. (8 puntos)

   (c) ¿Para qué valores de c converge? (12 puntos)

3. Sea $b \in \mathbb{R}^m$ y $S = \langle q_1, \ldots, q_n \rangle$ el subespacio generado por el conjunto ortonormal de vectores $q_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \ldots, n$, $m \geq n$.

   (a) Plantear y resolver el problema de cuadrados mínimos que encuentra el elemento en S que se encuentra más cercano a b. (13 puntos)

   (b) Probar usando cuadrados mínimos que si $b \in S^\perp$ entonces 0 es el elemento en S más cercano a b. (12 puntos)

   (c) Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando en cada caso: 'Si se agrega como elemento generador de S al vector $q_{n+1} = \sum_i^n q_i$, entonces existe un b para el cual el problema de cuadrados mínimos planteado en (a) tiene solución única.' (10 puntos)