Métodos Numéricos
Primer Cuatrimestre 2020
Práctica 1
Elementos de Álgebra Lineal

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Ejercicio 24. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar mediante inducción en la dimensión de la matriz:

(a). Si A y B son triangulares inferiores (superiores) entonces el producto AB es triangular inferior (superior).

Resolución Probaremos esta propiedad para matrices cuadradas y triangulares inferiores, y la inducción la realizaremos en n, el tamaño de la matriz. El mecanismo para la demostración es similar a cualquier demo por inducción: por un lado podemos asumir que la propiedad es cierta para matrices de tamaño n y probar que vale para tamaño $n+1$, o podemos probar la propiedad para matrices de tamaño n asumiendo que la propiedad vale para matrices de tamaño estrictamente menor a n.

Utilizando este segundo esquema, nuestra **hipótesis inductiva** será:

> *Para cualquier $A, B \in \mathbb{R}^{k \times k}$ matrices triangulares inferiores,*
> *$\underline{\text{con } k < n}$, el producto AB es triangular inferior.*

Caso base. Considerando $n = 1$, la propiedad se cumple trivialmente para escalares.

Paso inductivo. Nuestro objetivo aquí es probar que la propiedad se cumple para matrices de tamaño $n \times n$. Considerando $n > 1$, aquí es donde nos resulta útil la partición en bloques, ya que al ser éstos de tamaño menor a n podremos aplicar el argumento inductivo. Luego, probaremos que AB es triangular inferior para $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ asumiendo que vale nuestra hipótesis inductiva (i.e., que la propiedad vale para matrices de tamaños menores).

Consideremos la partición en bloques cuadrados (ver Apéndice A para la operatoria matricial por bloques):

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$

Asumiendo $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con n par[1], entonces los bloques A_{ij} y B_{ij} son de tamaño $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$, para $1 \leq i, j \leq 2$. Nuestras matrices A y B son triangulares inferiores, por lo tanto A_{11}, A_{22}, B_{11} y B_{22} deben ser triangulares inferiores, $A_{12} = 0$ y $B_{12} = 0$.

Dadas estas dos matrices triangulares inferiores veamos cómo es el producto AB:

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & 0 \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + 0 \cdot B_{21} & A_{11} \cdot 0 + 0 \cdot B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21} \cdot 0 + A_{22}B_{22} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} & 0 \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{array}\right)$$

[1] Luego de leer toda la resolución, queda como ejercicio para el lector verificar que para n impar el producto por bloques es realizable.

Observar que el bloque $(1,2)$ es una matriz nula. Para terminar de demostrar que este producto es triangular inferior, debemos ver que el bloque $(1,1)$ y el bloque $(2,2)$ son triangulares inferiores (observar que el bloque $(2,1)$ no nos importa).

En el bloque $(1,1)$ tenemos el producto $A_{11}B_{11}$. Aquí es donde podemos aplicar nuestra hipótesis inductiva ya que estamos ante el producto de dos matrices triagulares inferiores de tamaño menor estrico a n. El mismo argumento podemos aplicarlo para el bloque $(2,2)$: A_{22} y B_{22} son dos matrices triangulares inferiores de tamaño menor estricto a n y por lo tanto $A_{22}B_{22}$ también es triangular inferior por H.I.

Verificando que los bloques $(1,1)$ y $(2,2)$ del producto de matrices son triangulares inferiores entonces la matriz AB es triangular inferior, lo que concluye nuestra demostración. $\square$

Ejercicios para el lector

- Repetir la demostración pero considerando una nueva partición donde la primera fila y columna se separan del resto de la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & A_{12}^t \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} b_{11} & B_{12}^t \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)$$

  donde $A_{22} = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$.
  La misma descripción se aplica a la partición de B.

- Repetir la demostración para el caso triangular superior.

A. Producto Matricial por bloques

El producto en bloques es una forma alternativa al producto estandar de matrices. Consideremos el producto $AB = C$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, B \in \mathbb{R}^{m\times k}, C \in \mathbb{R}^{n\times k}$.

Sea la siguiente partición en bloques de la matriz A:

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m_1 & m_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \end{array} \qquad \begin{cases} n_1 + n_2 = n \\ m_1 + m_2 = m \end{cases}$$

Los valores n_1, n_2, m_1 y m_2 indican que el bloque A_{ij} es de tamaño $n_i \times m_j$.

Sea la siguiente partición para B:

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} k_1 & k_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) \end{array} \qquad \begin{cases} m_1 + m_2 = m \\ k_1 + k_2 = k \end{cases}$$

Observar que la cantidad de filas de B_{11} es la misma que la cantidad de columnas de A_{11} y A_{21}.

Consideremos la siguiente particion para C:

$$C = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} k_1 & k_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right) \end{array} \qquad \begin{cases} n_1 + n_2 = n \\ k_1 + k_2 = k \end{cases}$$

El producto $AB = C$ puede expresarse como:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right)$$

Del producto tradicional de matrices sabemos cómo se calcula cada posición (i, j) de C en función de los valores de A y B. La pregunta que surge es, ¿podremos relacionar un bloque C_{ij} del resultado con los bloques de A y B? La respuesta es sí, y podemos realizar el producto como si los bloques fueran números. Es decir, se cumple que:

$$AB = C \Leftrightarrow A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} = C_{ij} \qquad i, j = 1, 2$$

$$\left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right)$$

Observar que la partición establece reglas para que los productos de los bloques sean realizables: la primera columna de bloques de A (A_{11} y A_{21}) debe tener tantas columnas (m_1) como filas tiene la primera fila de bloques de B (B_{11} y B_{12}). Y la segunda columna de bloques de A (A_{12} y A_{22}) debe tener tantas columnas (m_2) como filas tiene la segunda fila de bloques de B (B_{21} y B_{22}). Ésto asegura poder realizar correctamente el producto. Además, el tamaño de los bloques de C queda determinado por la cantidad de filas de los bloques de A y la cantidad de columnas de los bloques de B. Veamos un ejemplo de partición que vamos a usar en la materia.

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \hline b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right)$$

Siguiendo el esquema planteado al comienzo, $n_1 = 1, n_2 = 2, m_1 = 1, m_2 = 2$ y lo mismo para $k_1 = 1, k_2 = 2$. De esta forma, el producto C tiene la misma partición que A y B:

$$C = \left(\begin{array}{c|cc} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ \hline c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array}\right)$$

Por ejemplo, veamos qué operación se realiza para el cálculo del bloque $C_{12} = (c_{12}, c_{13})$:

$$C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = \underbrace{a_{11} \cdot (b_{12}, b_{13})}_{1\times1 \,\cdot\, 1\times2} + \underbrace{(a_{12}, a_{13}) \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}}_{1\times2 \,\cdot\, 2\times2}$$

Observar que los productos son realizables.

Ejercicio para el lector. Dadas las siguientes particiones, determinar si el producto por bloques es realizable y en tal caso, determinar las dimensiones de los bloques de C y calcularlos.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La partición en bloques no solo se limita a tener 4 bloques sino que puede hacerse extensible a una cantidad arbitraria. Por ejemplo, consideremos r filas de bloques y s columnas de bloques, con $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times m_j}, 1 \le i \le r, 1 \le j \le s$:

$$A = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} m_1 & & m_s \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rs} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{cases} n_1 + \ldots + n_r = n \\ m_1 + \ldots + m_s = m \end{cases}$$

Para que el producto por bloques pueda realizarse, la estructura de las filas de los bloques de B debe coincidir con las estructura de las columnas de los bloques de A: la matriz B debe tener s filas de bloques para que coincida con la cantidad de columnas de bloques de A. Además de coincidir en la cantidad, deben coincidir las dimensiones respectivas para hacer posible el producto bloque a bloque.

$$B = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ \vdots \\ m_s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} k_1 & & k_t \end{array} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \dots & B_{st} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{cases} m_1 + \ldots + m_s = m \\ k_1 + \ldots + k_t = k \end{cases}$$

Con esta partición de B el producto es realizable resultando en la siguiente partición de C:

$$C = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} k_1 & & k_t \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{r1} & \dots & C_{rt} \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{cases} n_1 + \ldots + n_r = n \\ k_1 + \ldots + k_t = k \end{cases}$$