Métodos Numéricos
Primer Cuatrimestre 2020
Práctica 2
Eliminación Gaussiana y Factorización.
Normas y número de condición.

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Ejercicio de la práctica - Ej 10 a)

- Con las mismas notaciones que en el ejercicio 6[1], sea $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{1\leq i,j\leq n}$ y sea $a_k := \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}^{(k)}|$; es decir, a_k es el elemento máximo en módulo de la matriz que se obtiene luego de que la primeras k columnas han sido trianguladas. Si se aplica el método de eliminación Gaussiana **con pivoteo parcial**, probar que:

  1. $a_k \leq 2^k a_0,\ k = 1, \ldots, n-1$ para A arbitraria.

  Sugerencia: aplicar inducción en k, y suponer que al comienzo de cada paso ya se ha realizado el intercambio de filas correspondientes al pivoteo parcial.

Recordamos
En el i-esimo paso de EG con pivoteo parcial entre las filas i a n se usa como fila pivote aquella con mayor $|a_{ji}^{(i-1)}|,\ i \leq j \leq n$ y se realiza la permutación necesaria entre las filas para ubicar en el lugar (i,i) dicho coeficiente.

Resolución:
Siguiendo la sugerencia vamos a probar la propiedad por inducción en k.

$\boxed{k = 1}$

En el caso base queremos ver que $a_1 \leq 2a_0$.
Al aplicar el primer paso de eliminación Gaussiana los elementos de la matriz que están debajo de la primer fila se modifican según:[2]

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(0)} - \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)} & 1 < i \leq n \\ a_{ij}^{(0)} & i = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto el elemento de máximo módulo tras la primer iteración de EG está entre aquellos que se modificaron o los que quedaron en la primer fila:

$$a_1 = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}^{(1)}| = \max\{ \max_{\substack{1<i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} |a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)}|, \max_{1\leq j\leq n} |a_{1j}^{(0)}| \}$$

Como los elementos de la fila 1 no se alteraron sabemos que sus módulos son menores o iguales que a_0 dado que este era el máximo módulo en la matriz original.

[1] $A^{(k)}$ es la matriz que se obtiene a partir de A por el método de eliminación Gaussiana cuando las primeras k columnas ya han sido trianguladas.

[2] Como indica la sugerencia del enunciado, por simplicidad de notación nos referimos por $a_{ij}^{(i-1)}$ al elemento que queda en esa posición *luego* de haber hecho el pivoteo necesario para el i-ésimo paso de EG, de modo que el pivot de esa iteración es el $a_{ii}^{(i-1)}$.

$$a_1 \leq \max\{\underbrace{\max_{\substack{1<i\leq n\\1\leq j\leq n}} |a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)}|}_{(\star)}, a_0\}$$

Podemos acotar el máximo módulo $(\star)$ de los elementos que están fuera de la primer fila usando desigualdad triangular.

$$(\star) = \max_{\substack{1<i\leq n\\1\leq j\leq n}} |(a_{ij}^{(0)}) + (-\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)})| \leq \max_{\substack{1<i\leq n\\1\leq j\leq n}} |a_{ij}^{(0)}| + |-\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)}| = \max_{\substack{1<i\leq n\\1\leq j\leq n}} |a_{ij}^{(0)}| + \frac{|a_{i1}^{(0)}|}{|a_{11}^{(0)}|} |a_{1j}^{(0)}|$$

Por el recordatorio que hicimos al principio sabemos que como se aplicó pivoteo parcial vale que el pivot $a_{11}^{(0)}$ es el de máximo módulo sobre toda la columna 1, es decir $|a_{11}^{(0)}| \geq |a_{i1}^{(0)}|$ para todas las filas i. Si pasamos diviendo nos queda $\frac{|a_{i1}^{(0)}|}{|a_{11}^{(0)}|} \leq 1$ y podemos entonces seguir acotando la expresión $(\star)$.

$$(\star) \leq \max_{\substack{1<i\leq n\\1\leq j\leq n}} |a_{ij}^{(0)}| + \frac{|a_{i1}^{(0)}|}{|a_{11}^{(0)}|} |a_{1j}^{(0)}| \leq \max_{1<i,j\leq n} |a_{ij}^{(0)}| + |a_{1j}^{(0)}|$$

Por ser el de máximo módulo en la matriz original tanto $|a_{ij}^{(0)}|$ como $|a_{1j}^{(0)}|$ son menores o iguales que a_0, así que los podemos acotar.

$$(\star) \leq \max_{\substack{1<i\leq n\\1\leq j\leq n}} \underbrace{|a_{ij}^{(0)}|}_{\leq a_0} + \underbrace{|a_{1j}^{(0)}|}_{\leq a_0} \leq \max_{\substack{1<i\leq n\\1\leq j\leq n}} a_0 + a_0 = 2a_0$$

Por lo tanto volviendo a a_1 nos queda la cota:

$$a_1 \leq \max\{\max_{\substack{1<i\leq n\\1\leq j\leq n}} |a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1j}^{(0)}|, a_0\} \leq \max\{2\underbrace{a_0}_{\geq 0}, a_0\} = 2a_0$$

Que era lo que queríamos ver para el caso base.

$\boxed{1 < k < n}$

Para el paso inductivo queremos ver que $a_k \leq 2^k a_0$.

Por HI tenemos $a_{k-1} \leq 2^{k-1} a_0$.

Habiendo aplicado el k-ésimo paso de EG quedamos con los primeras k filas iguales que en el paso anterior y con el resto modificadas:

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)} & k < i \leq n \\ a_{ij}^{(k-1)} & 1 \leq i \leq k \end{cases}$$

Usamos lo anterior para desarrollar a_k.

$$a_k = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}^{(k)}| = \max\{\max_{\substack{k<i\leq n\\1\leq j\leq n}} |a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}|, \max_{\substack{1\leq i\leq k\\1\leq j\leq n}} |a_{ij}^{(k-1)}|\}$$

Al igual que el caso base acotamos primero los dos casos de i por separado.

Para $1 \leq i \leq k$ acotamos por definición de a_{k-1}:

$$a_k \leq \max\{\underbrace{\max_{\substack{k<i\leq n\\1\leq j\leq n}} |a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}|}_{(*)}, a_{k-1}\}$$

Para el caso $k < i \leq n$ aplicamos de vuelta desigualdad triangular.

$$(*) = \max_{\substack{k<i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} |(a_{ij}^{(k-1)}) + (-\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)})| \leq \max_{\substack{k<i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} |a_{ij}^{(k-1)}| + \frac{|a_{ik}^{(k-1)}|}{|a_{kk}^{(k-1)}|} |a_{kj}^{(k-1)}|$$

Esta vez el elemento pivot es el $a_{kk}^{(k-1)}$, siendo mayor en módulo que todos los elementos de su columna, acotamos $\frac{|a_{ik}^{(k-1)}|}{|a_{kk}^{(k-1)}|}$ por 1.

$$(*) \leq \max_{\substack{k<i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} |a_{ij}^{(k-1)}| + \frac{|a_{ik}^{(k-1)}|}{|a_{kk}^{(k-1)}|} |a_{kj}^{(k-1)}| \leq \max_{\substack{k<i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} |a_{ij}^{(k-1)}| + |a_{kj}^{(k-1)}|$$

Usando la definición de a_{k-1} como el mayor módulo de la matriz en el paso anterior acotamos $|a_{ij}^{(k-1)}|$ y $|a_{kj}^{(k-1)}|$.

$$(*) \leq \max_{\substack{k<i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \underbrace{|a_{ij}^{(k-1)}|}_{\leq a_{k-1}} + \underbrace{|a_{kj}^{(k-1)}|}_{\leq a_{k-1}} = \max_{\substack{k<i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} 2a_{k-1} = 2a_{k-1} \overset{HI}{\leq} 2(2^{k-1}a_0) = 2^k a_0$$

Volvemos entonces a a_k y tenemos finalmente:

$$a_k \leq \max\{2^k \underbrace{a_0}_{\geq 0}, 2^{k-1}a_0\} = 2^k a_0$$

$\square$