Métodos Numéricos
Primer Cuatrimestre 2020
Práctica 3
Matrices simétricas definidas positivas.
Factorización de Cholesky.

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

1. Sea A una matriz de $\mathbb{R}^{m\times n}$. Probar que las matrices AA^t y A^tA son simétricas. Mostrar mediante un ejemplo que pueden no ser iguales. Probar que si A es cuadrada entonces $A+A^t$ es simétrica. ¿Qué sucede con $A-A^t$?

2. Probar que toda matriz cuadrada A de $\mathbb{R}^{n\times n}$ es expresable en forma única como $A=S+T$, donde S es simétrica y T es antisimétrica (es decir, $T^t=-T$).

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta con una demostración o un contraejemplo.

   a) Existe una matriz definida positiva no simétrica.
   b) Si A es simétrica y B es simétrica entonces AB es simétrica.
   c) Existen matrices A y B simétricas tales que $A\neq B$ y AB es simétrica.

4. Sea A una matriz simétrica y definida positiva. Probar que $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$ se cumple:

   a) Si x e y son linealmente independientes, $|x^tAy|<\sqrt{x^tAx}\sqrt{y^tAy}$. [1]
   b) Si x e y son linealmente dependientes, $|x^tAy|=\sqrt{x^tAx}\sqrt{y^tAy}$.

5. Sea A una matriz simétrica. Probar que la función $f(x)=\frac{(x^tAx)^{\frac{1}{2}}}{2}$ es una norma vectorial en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si A es definida positiva.

6. Sea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ una matriz definida positiva. Demostrar que:

   a) $a>0$
   b) $c>0$
   c) $det(A)>0$ [2]
   d) $|b|<\frac{a+c}{2}$

7. Sea A una matriz simétrica definida positiva de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que:

   a) $a_{ii}>0$ para $1\leq i\leq n$.
   b) A es no singular.
   c) Todas las submatrices principales de A son definidas positivas.
   d) $|a_{ij}|^2\leq a_{ii}\,a_{jj}$ para todo $1\leq i,j\leq n$. Deducir que el elemento de módulo máximo de A está en la diagonal.

8. Si $A=LL^t$ es una factorización de A con L una matriz triangular inferior con elementos de la diagonal positivos, demostrar que A es simétrica y definida positiva.

[1] Sugerencia: considerar la función $\phi(\lambda)=(x+\lambda y)^tA(x+\lambda y)$
[2] Sugerencia: evaluar qué sucede con el vector $x=(-b,a)$ al calcular x^tAx; o analizar la función $\phi(\lambda)=(1,\lambda)^tA(1,\lambda)$

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica tal que
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} > 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n$$
Demostrar que A es definida positiva.

10. Probar que la siguiente matriz simétrica es definida positiva.
$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

11. Sea A una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$. Supongamos que se aplica a A el método de eliminación de Gauss sin elección de pivote. Después de k pasos de eliminación A se habrá reducido a la forma
$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ 0 & A_{22}^{(k)} \end{pmatrix}$$
donde $A_{22}^{(k)}$ es una matriz de $(n-k) \times (n-k)$.

    a) Probar por inducción que $A_{22}^{(k)}$ es definida positiva

    b) Probar que $a_{ii}^{(k)} \leq a_{ii}^{(k-1)}$ para $1 \leq i \leq n,\ k = 1, 2, \ldots, n-1$.

12. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz no necesariamente simétrica.

    a) Probar que A es definida positiva si y sólo si A^t lo es.

    b) Probar que A es definida positiva si y sólo si $\dfrac{A + A^t}{2}$ es simétrica definida positiva.

    c) Sea $b \in \mathbb{R}^n$ no nulo y $M \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ una matriz definida como:
    $$M = \begin{pmatrix} AA^t & 2b \\ 0^t & 1 \end{pmatrix}$$
    Probar que si A es inversible y $\|A^{-1}b\|_2^2 < 1$, entonces M es definida positiva.

13. Demostrar la unicidad de la factorización de Cholesky de una matriz A simétrica definida positiva.

14. Sea A una matriz tridiagonal simétrica definida positiva. Si $A = LL^t$ es la factorización de Cholesky de A, demostrar que L es tridiagonal (de hecho es bidiagonal).

15. Si A es una matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$, se definen los *índices de perfil* de A por
$$m(A, i) = \min\{j : a_{ij} \neq 0\} \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$
Por ejemplo, los índices de perfil de la siguiente matriz son $m(A,1) = 1$, $m(A,2) = 2$, $m(A,3) = 1$, y $m(A,4) = 4$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$
Probar que si $A = LL^t$ es la factorización de Cholesky de A, entonces L tiene el mismo perfil que A, es decir:
$$m(A, i) = m(L, i) \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

16. Sean las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que A es definida positiva y B es no singular si y sólo si BAB^t es definida positiva.

17. Sea una matriz A simétrica definida positiva. Demostrar o dar un contraejemplo para que la matriz A^{-1} sea simétrica definida positiva.

Resolver en computadora

I Exhibir la factorización de Cholesky de la matriz del ejercicio 10.

II La matriz de Hilbert de $n \times n$ se define como una matriz H tal que $(H)_{i,j} = (i+j-1)^{-1}$. Es posible demostrar que dicha matriz es simétrica definida positiva para cualquier n. Experimentando con distintos valores de n, se pide:

  a) Dar el número de condición de la matriz de Hilbert, usando la función `cond`.

  b) Calcular la factorización de Cholesky de la matriz.

  c) Para los valores de n en los que sea posible, resolver el sistema $Hx = b$, con $b_i = 1 \ \forall i$, utilizando primero eliminación Gaussiana y luego resolviendo los sistemas $Ly = b$, $L^t x = y$, siendo $H = LL^t$ la factorización de Cholesky de H. Comparar ambos resultados.

III Se conocen las matrices L y U de la factorización LU de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica definida positiva. A partir de L y U (sin calcular A):

  a) Describir un algoritmo para hallar la matriz L de la factorización de Cholesky $A = LL^t$ de A.

  b) Hallar en una única sentencia de Matlab la matriz L del ítem anterior.
  Sugerencia: utilizar la función `diag`.

IV Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica definida positiva y pentadiagonal. Describir un algoritmo para hallar la factorización de Cholesky de A que aproveche esta característica y realice la mínima cantidad de cálculos.

Funciones útiles

En general, el software para sistemas $Ax = b$ suele proveer una forma de resolverlos como una única rutina, si bien también es posible dividirlo en dos rutinas: una para computar una factorización para A, y otra para resolver el nuevo sistema.

- En el caso de `MATLAB`, la solución al sistema lineal $Ax = b$ está dada por el operador de "*división a izquierda*" denotado con "\" tal que $x = A\backslash b$. Internamente, la solución está computada usando la factorización LU y sustitución hacia adelante y hacia atrás[3]. Si se lo desea, la factorización LU puede computarse explícitamente con:

  ```
  [L, U] = lu(A)
  ```

  Tener en cuenta que la L puede tener filas permutadas. Además si la matriz es simétrica y definida positiva, la factorización de Cholesky se puede obtener como:

  ```
  L = chol(A)
  ```

  Para estimar el número de condición según $\|\cdot\|_p$:

  ```
  c = cond(X,p)
  ```

[3] http://www.mathworks.com/help/matlab/math/systems-of-linear-equations.html

También es posible utilizar:

```
c = rcond(A)
```

Este último permite estimar el recíproco del número de condición (es más efectivo que `cond`, pero menos confiable).

- En Python, usando numpy, se puede calcular la factorización de Cholesky mediante:

```python
from numpy import *
from numpy.linalg import *

A = matrix([[8,2],[2,4]], float) # Matriz 2x2 SDP
L = cholesky(A)
```

El número de condición puede calcularse mediante la operación `cond`, usando como segundo parámetro la norma que se quiere usar para calcularlo (por defecto, 2); por ejemplo:

```python
cond(A,2)
cond(A,1)
cond(A,inf)
cond(A,-inf)
cond(A,'fro')
```

Referencias

[1] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, 2012.

[2] D.R. Kincaid and E.W. Cheney. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. Pure and applied undergraduate texts. American Mathematical Society, 2002.

[3] D.S. Watkins. *Fundamentals of Matrix Computations*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2010.