Práctica 7
Métodos iterativos

Métodos Numéricos

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

1er cuatrimestre 2020

Problema.

Antes

Hallar solución de $Ax = b$ en forma directa

- Eliminación gaussiana.
- Utilizando algún tipo de factorización $(LU/LL^t/QR/U\Sigma V^t)$.

Ahora

Hallar solución del sistema $Ax = b$ de forma **iterativa**.
Partir de una aproximación inicial de la solución x_0
Iterar de modo que
$x^{(0)} \curvearrowright x^{(1)} \curvearrowright x^{(2)} \curvearrowright x^{(3)} \curvearrowright \ldots \curvearrowright x^{(n)} \longrightarrow x$ solución de $Ax = b$

Métodos Iterativos

Esquema General

$$x^{(k+1)} = R\,x^{(k)} + c$$

$R \rightarrow$ matriz que gobierna la iteración

Métodos que vamos a ver:

- Jacobi
- Gauss-Seidel

Jacobi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = b$$

Jacobi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Jacobi

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & = b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & = b_3 \end{array}\right. \qquad -a_{12}x_2 \quad -a_{13}x_3$$

Jacobi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & & & = b_1 & & -a_{12}x_2 & -a_{13}x_3 \\ & +a_{22}x_2 & & = b_2 & -a_{21}x_1 & & -a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & = b_3 & & & \end{cases}$$

Jacobi

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & & & = b_1 & & -a_{12}x_2 & -a_{13}x_3 \\
& +a_{22}x_2 & & = b_2 & -a_{21}x_1 & & -a_{23}x_3 \\
& & +a_{33}x_3 & = b_3 & -a_{31}x_1 & -a_{32}x_2 &
\end{array}
\right.
$$

Jacobi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Jacobi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b} + \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Jacobi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \mathbf{x}$$

Jacobi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b} + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \mathbf{x}$$

$$D\mathbf{x} = (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

$$A = D - L - U$$

Jacobi

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{pmatrix}}_{L} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$$

Jacobi

$$A = D - L - U$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff (D - L - U)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\iff D\mathbf{x} - L\mathbf{x} - U\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\iff D\mathbf{x} = (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Iteración del método de **Jacobi**

$$\mathbf{x}^{(k)} = D^{-1}(L + U)\mathbf{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathbf{b}$$

Jacobi

Método de **Jacobi**

$$D\mathbf{x} = (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & & & = (b_1 & & -a_{12}x_2 & -a_{13}x_3 &) \\ & +a_{22}x_2 & & = (b_2 & -a_{21}x_1 & & -a_{23}x_3 &) \\ & & +a_{33}x_3 & = (b_3 & -a_{31}x_1 & -a_{32}x_2 & &) \end{cases}$$

Jacobi

Método de **Jacobi**

$$\mathbf{x} = D^{-1}(L+U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b}$$

$$\begin{cases} x_1 & & & = (b_1 & & -a_{12}x_2 & -a_{13}x_3 &)/a_{11} \\ & x_2 & & = (b_2 & -a_{21}x_1 & & -a_{23}x_3 &)/a_{22} \\ & & x_3 & = (b_3 & -a_{31}x_1 & -a_{32}x_2 & &)/a_{33} \end{cases}$$

Jacobi

Método de **Jacobi**

$$\mathbf{x}^{(k)} = D^{-1}(L+U)\mathbf{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathbf{b}$$

$$\left\{\begin{array}{lllllll}
x_1^{(k)} & & & = (b_1 & & -a_{12}x_2^{(k-1)} & -a_{13}x_3^{(k-1)})/a_{11} \\
 & x_2^{(k)} & & = (b_2 & -a_{21}x_1^{(k-1)} & & -a_{23}x_3^{(k-1)})/a_{22} \\
 & & x_3^{(k)} & = (b_3 & -a_{31}x_1^{(k-1)} & -a_{32}x_2^{(k-1)} &)/a_{33}
\end{array}\right.$$

Jacobi

Método de **Jacobi**

$$\mathbf{x}^{(k)} = D^{-1}(L+U)\mathbf{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathbf{b}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = (b_1 & & -a_{12}x_2^{(k-1)} & -a_{13}x_3^{(k-1)})/a_{11} \\ x_2^{(k)} = (b_2 & -a_{21}x_1^{(k-1)} & & -a_{23}x_3^{(k-1)})/a_{22} \\ x_3^{(k)} = (b_3 & -a_{31}x_1^{(k-1)} & -a_{32}x_2^{(k-1)} &)/a_{33} \end{cases}$$

$$x_i^{(k)} = \left(\sum_{\{j:i\neq j\}} -a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i \right) /a_{ii} \qquad i = 1,2,3$$

Mejora al método de Jacobi

Método de **Jacobi**

$$D\mathbf{x}^{(k)} = (L+U)\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$$

$$\left\{ \begin{array}{llllllll} a_{11}x_1^{(k)} & & & = (b_1 & & -a_{12}x_2^{(k-1)} & -a_{13}x_3^{(k-1)}) \\ & +a_{22}x_2^{(k)} & & = (b_2 & -a_{21}x_1^{(k-1)} & & -a_{23}x_3^{(k-1)}) \\ & & +a_{33}x_3^{(k)} & = (b_3 & -a_{31}x_1^{(k-1)} & -a_{32}x_2^{(k-1)} &) \end{array} \right.$$

Mejora al método de Jacobi

Método de **Jacobi**

$$D\mathbf{x}^{(k)} = (L+U)\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$$

$$\left\{\begin{array}{llllllll}
a_{11}x_1^{(k)} & & & = (b_1 & & -a_{12}x_2^{(k-1)} & -a_{13}x_3^{(k-1)} &) \\
 & +a_{22}x_2^{(k)} & & = (b_2 & -a_{21}x_1^{\color{red}{(k-1)}} & & -a_{23}x_3^{(k-1)} &) \\
 & & +a_{33}x_3^{(k)} & = (b_3 & -a_{31}x_1^{(k-1)} & -a_{32}x_2^{(k-1)} & &)
\end{array}\right.$$

Mejora al método de Jacobi

Método de **Jacobi**

$$D\mathbf{x}^{(k)} = (L+U)\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k)} & & & = (b_1 & & -a_{12}x_2^{(k-1)} & -a_{13}x_3^{(k-1)}) \\ & +a_{22}x_2^{(k)} & & = (b_2 & -a_{21}x_1^{\color{red}{(k)}} & & -a_{23}x_3^{(k-1)}) \\ & & +a_{33}x_3^{(k)} & = (b_3 & -a_{31}x_1^{(k-1)} & -a_{32}x_2^{(k-1)} &) \end{cases}$$

Mejora al método de Jacobi

Método de **Jacobi**

$$D\mathbf{x}^{(k)} = (L+U)\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k)} & & & = (b_1 & & -a_{12}x_2^{(k-1)} & -a_{13}x_3^{(k-1)}) \\ a_{21}x_1^{\color{red}{(k)}} & +a_{22}x_2^{(k)} & & = (b_2 & & & -a_{23}x_3^{(k-1)}) \\ & & +a_{33}x_3^{(k)} & = (b_3 & -a_{31}x_1^{(k-1)} & -a_{32}x_2^{(k-1)} &) \end{cases}$$

Mejora al método de Jacobi

Método de **Jacobi**

$$Dx^{(k)} = (L+U)x^{(k-1)} + b$$

$$\left\{\begin{array}{llllllll} a_{11}x_1^{(k)} & & & = (b_1 & & -a_{12}x_2^{(k-1)} & -a_{13}x_3^{(k-1)} &) \\ a_{21}x_1^{(k)} & +a_{22}x_2^{(k)} & & = (b_2 & & & -a_{23}x_3^{(k-1)} &) \\ & & +a_{33}x_3^{(k)} & = (b_3 & -a_{31}x_1^{\color{red}{(k-1)}} & -a_{32}x_2^{\color{red}{(k-1)}} & &) \end{array}\right.$$

Mejora al método de Jacobi

Método de **Jacobi**

$$D\mathbf{x}^{(k)} = (L+U)\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_{11}x_1^{(k)} & & & = (b_1 & -a_{12}x_2^{(k-1)} & -a_{13}x_3^{(k-1)}) \\ a_{21}x_1^{(k)} & +a_{22}x_2^{(k)} & & = (b_2 & & -a_{23}x_3^{(k-1)}) \\ a_{31}x_1^{\color{red}{(k)}} & +a_{32}x_2^{\color{red}{(k)}} & +a_{33}x_3^{(k)} & = (b_3 & &) \end{array}\right.$$

Mejora al método de Jacobi: Gauss-Seidel

Método de **Jacobi**

$$D\mathbf{x}^{(k)} = (L+U)\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} a_{11}x_1^{(k)} & & & = (b_1 & -a_{12}x_2^{(k-1)} & -a_{13}x_3^{(k-1)}) \\ a_{21}x_1^{(k)} & +a_{22}x_2^{(k)} & & = (b_2 & & -a_{23}x_3^{(k-1)}) \\ a_{31}x_1^{(k)} & +a_{32}x_2^{(k)} & +a_{33}x_3^{(k)} & = (b_3 & &) \end{array}\right.$$

Método de **Gauss-Seidel**

$$\begin{aligned} (D-L)\mathbf{x}^{(k)} &= U\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}^{(k)} &= (D-L)^{-1}U\mathbf{x}^{(k-1)} + (D-L)^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Jacobi & Gauss-Seidel

$$A = D - L - U$$

Método de Jacobi

$$\mathbf{x}^{(k)} = D^{-1}(L+U)\mathbf{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathbf{b}$$

Método de Gauss-Seidel

$$\mathbf{x}^{(k)} = (D-L)^{-1}U\mathbf{x}^{(k-1)} + (D-L)^{-1}\mathbf{b}$$

En general

$$A = M - N$$

Splitting

- Consideramos A escrita como $A = M - N$, con M no singular
- Si $A = M - N$, entonces $Ax = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b$
- Cada splitting da lugar al esquema iterativo:

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$$
$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

Convergencia

Radio Espectral

Se define el radio espectral de una matriz A como

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } A\}$$

Propiedad

Si $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$, la sucesión $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge para cualquier vector $x^{(0)}$ inicial si y sólo si

$$\rho(R) < 1$$

Convergencia

Propiedad (2)

Para cualquier norma inducida $\|\cdot\|$:

$$\rho(R) \leq \|R\|$$

¿Qué nos dice entonces $\|R\|$ sobre la convergencia ?

$\|R\| < 1 \Rightarrow$ el esquema converge

Convergencia

Sea $x^{(k+1)} = Rx^{(k)} + c$.

1. Si el esquema converge a un x^* (que es solución de algún sistema $Ax = b$), ¿puedo decir que R es inversible?
2. Si R es una matriz de Householder, ¿el esquema converge o diverge?
3. Si R es una matriz simétrica definida positiva, ¿siempre converge?

Ejercicio

Esquema matricial de iteración y análisis de convergencia

Enunciado

Sea $v \in \mathbb{R}^n$. Dado el siguiente esquema iterativo:

$$x_i^{(k+1)} = v_i \left(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j^{(k)} v_j \right) \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

1. Hallar el esquema matricial de iteración. ¿Qué sistema se desea resolver con este método iterativo?
2. Analizar la convergencia del método estableciendo restricciones sobre la norma de v.

Ejercicio

Esquema matricial de iteración y análisis de convergencia

Enunciado

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica definida positiva, con λ_i autovalores de A tal que $1 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ y sea ω una constante positiva. Se define el siguiente algoritmo iterativo, para $i = 1, \ldots, n$:

$$x_i^{(k+1)} = \omega b_i + (1 - \omega a_{ii})\, x_i^{(k)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \omega\, a_{ij}\, x_j^{(k)}$$

1. Hallar el esquema de iteración de forma matricial.
2. Determinar los valores de ω para los cuales el esquema iterativo planteado converge para cualquier $x^{(0)}$ inicial.
   Sugerencia: calcular los autovalores de $\alpha I + \beta A$.