Ejemplo matriz rango incompleto - Descomposición SVD

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ una matriz de rango 1.

Buscamos factorización $A = U\Sigma V^t$ con

- $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$
- $V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Ejemplo matriz rango incompleto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ buscamos:} \quad U \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2} \quad V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

PASO 1: Calculo de Σ y V

Buscamos autovectores y autovalores de $A^t A$:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pares de (autoval, autovec):

$$\lambda_1 = 4, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2, \quad v_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\sigma_2 = \lambda_2 = 0, \quad v_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Ejemplo matriz rango incompleto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ buscamos:} \quad U \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2} \quad V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

PASO 2: Calculo de U

Definimos: $u_1 := \dfrac{Av_1}{\sigma_1} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Buscamos u_2 y u_3 tal que:

- $u_2 \perp u_1, u_3 \perp u_1, u_2 \perp u_3$
- $\|u_2\|_2 = \|u_3\|_2 = 1$

$$\boxed{u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Ejemplo matriz rango incompleto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ buscamos:} \quad U \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2} \quad V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Reconstruimos

$$A \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ \sigma_1 u_1 & 0 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$A \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{V^t}}$$

Ejemplo matriz rango incompleto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ buscamos:} \quad U \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2} \quad V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

A qué espacios pertenecen u_1 y v_2?

$$Av_1 = \sigma_1 u_1$$
$$Av_2 = 0$$

A que espacios pertenecen v_1, u_2 y u_3?

$$A^t u_1 = \sigma_1 v_1$$
$$A^t u_2 = 0$$
$$A^t u_3 = 0$$

Ejemplo matriz rango incompleto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ buscamos: } \quad U \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2} \quad V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

A qué espacios pertenecen u_1 y v_2?

$Av_1 = \sigma_1 u_1 \Rightarrow u_1 \in Im(A)$
$Av_2 = 0 \Rightarrow v_2 \in Nu(A)$

A que espacios pertenecen v_1, u_2 y u_3?

$A^t u_1 = \sigma_1 v_1 \Leftrightarrow u_1^t A = \sigma_1 v_1^t \Rightarrow v_1 \in$ espacio fila $= Im(A^t)$
$A^t u_2 = 0 \Rightarrow u_2 \in Nu(A^t)$
$A^t u_3 = 0 \Rightarrow u_3 \in Nu(A^t)$

Espacios fundamentales asociados a una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- Espacio columna: $Im(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$
- Espacio nulo: $Nu(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$
- Espacio fila: $Im(A^t) = \{A^t y : y \in \mathbb{R}^m :\} \subseteq \mathbb{R}^n$
- Espacio nulo izquierdo: $N(A^t) = \{x \in \mathbb{R}^m : x^t A = 0\} \subseteq \mathbb{R}^m$

Propiedades de la SVD

La SVD provee bases para los 4 espacios fundamentales

- Espacio columna: $Im(A) = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$
- Espacio nulo izquierdo: $Nu(A^t) = \langle u_{r+1}, \ldots, u_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$
- Espacio fila: $Im(A^t) = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$
- Espacio nulo: $Nu(A) = \langle v_{r+1}, \ldots, v_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$

Lo cual implica:

- $Im(A) \oplus Nu(A^t) = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle = \mathbb{R}^m$
- $Im(A^t) \oplus Nu(A) = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \mathbb{R}^n$

Y:

- $Im(A) \perp Nu(A^t)$
- $Im(A^t) \perp Nu(A)$

Ejemplo matriz rango incompleto

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ una matriz de rango 1.

Buscamos factorización $A = U\Sigma V^t$ con

- $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$
- $V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Pasos para hallar SVD de una matriz de rango 1:

1. $\{(\lambda_i, x_i)\}_{i=1,2}$ eigenpairs de A^tA
2. $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i} \quad v_i := x_i/\|x_i\|$, $i = 1, 2$
3. $u_1 := \dfrac{Av_1}{\sigma_1}$
4. Extender a base ortonormal: u_2, u_3

1. $\{(\lambda_i, x_i)\}_{i=1,2,3}$ eigenpairs de AA^t
2. $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i} \quad u_i := x_i/\|x_i\|$, $i = 1, 2$
3. $v_1 := \dfrac{A^tu_1}{\sigma_1}$
4. Extender a base ortonormal: v_2

Ejemplo matriz rango incompleto

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz de rango r.
Buscamos factorización $A = U\Sigma V^t$ con

- $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Pasos para hallar SVD de una matriz de rango r:

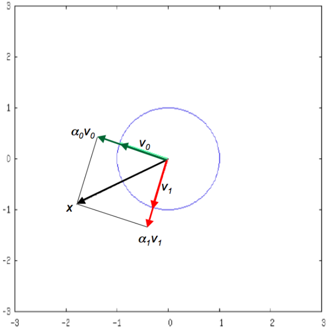
1. (λ_i, x_i) eigenpairs de $A^t A$
2. $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i} \quad v_i := x_i/\|x_i\|$
3. $u_i := \dfrac{Av_i}{\sigma_i}$ para $i = 1, \ldots, r$
4. Extender a base ortonormal: $u_{r+1}, \ldots, u_m$

1. (λ_i, x_i) eigenpairs de AA^t
2. $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i} \quad u_i := x_i/\|x_i\|$
3. $v_i := \dfrac{A^t u_i}{\sigma_i}$ para $i = 1, \ldots, r$
4. Extender a base ortonormal: $v_{r+1}, \ldots, v_n$

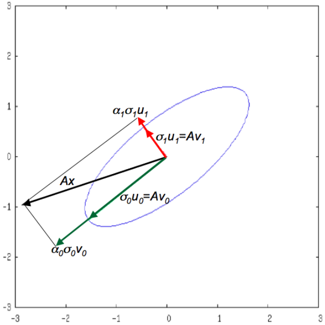
Propiedades de la SVD

Interpretación geométrica

$\mathbb{R}^2$: Dominio de A



$\mathbb{R}^2$:Imagen de A



$$x = VV^t x = \left(\begin{array}{c|c} v_0 & v_1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_0^t \\ \hline v_1^t \end{pmatrix} x = \left(\begin{array}{c|c} v_0 & v_1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_0^t x \\ \hline v_1^t x \end{pmatrix} = \underbrace{(v_0^t x)}_{\alpha_0} v_0 + \underbrace{(v_1^t x)}_{\alpha_1} v_1$$

$$Ax = \left(\begin{array}{c|c} u_0 & u_1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} v_0 & v_1 \end{array} \right)^t x =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} u_0\sigma_0 & u_1\sigma_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} v_0 & v_1 \end{array} \right)^t \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} v_0 & v_1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_0^t x \\ \hline v_1^t x \end{pmatrix}}_{x} = u_0\sigma_0 \underbrace{(v_0^t x)}_{\alpha_0} + u_1\sigma_1 \underbrace{(v_1^t x)}_{\alpha_1}$$

Propiedades de la SVD

Interpretación geométrica