Métodos Numéricos
Modalidad virtual por pandemia COVID-19

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Normas vectoriales

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma si:

- $f(x) \geq 0$
- $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$

Ejemplos

- $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
- $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $||x||_\infty = \max_{i=1\ldots n} |x_i|$

Normas matriciales

$F : \mathbb{R}^{m \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma si:

- $F(A) \geq 0$
- $F(A) = 0 \Rightarrow A = 0$
- $F(\alpha x) = |\alpha| F()$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $F(A + B) \leq F(A) + F(B)$
- $F(AB) \leq F(A)F(B)$ (propiedad adicional, son normas sub-multiplicativas, $m = n$)

Ejemplo

- Norma de Frobenius $||A|| = \sqrt{(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)}$

Normas matriciales inducidas

Sean f_1 un norma definida en $\mathbb{R}^m$ y f_2 un norma definida en $\mathbb{R}^n$ $F : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma inducida si:

$$F(A) = \max_{x\neq 0} \frac{f_1(Ax)}{f_2(x)}$$

$$F(A) = \max_{x:f_2(x)=1} f_1(Ax)$$

Ejemplo para n=m

- Norma 1 $\longrightarrow ||A||_1 = \max_{x:||x||_1=1} ||Ax||_1$
- Norma 2 $\longrightarrow ||A||_2 = \max_{x:||x||_2=1} ||Ax||_2$
- Norma p $\longrightarrow ||A||_p = \max_{x:||x||_p=1} ||Ax||_p$
- Norma $\infty \longrightarrow ||A||_\infty = \max_{x:||x||_\infty=1} ||Ax||_\infty$

Número de condición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz no singular y $||.||$ una norma matricial. Se define número de condición de A como

$$\kappa(A) = ||A||||A^{-1}||$$

- Si $||.||$ es una norma inducida, $\kappa(I) = 1$
- Si $||.||$ es una norma sub-multiplicativa $\kappa(I) \geq 1$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.06\textcolor{red}{6} \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-666, 834)$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.06\textcolor{red}{6} \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-666, 834)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.16\textcolor{red}{9} \\ 0.06\textcolor{red}{6} \end{bmatrix}$$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-666, 834)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.169 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-932, 1167)$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-666, 834)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.169 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-932, 1167)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.167 \\ 0.068 \end{bmatrix}$$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.067 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (1, -1)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.168 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-666, 834)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.169 \\ 0.066 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (-932, 1167)$

$$\begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.167 \\ 0.068 \end{bmatrix}$$

Solución $(x_1, x_2) = (934, -1169)$

Condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales

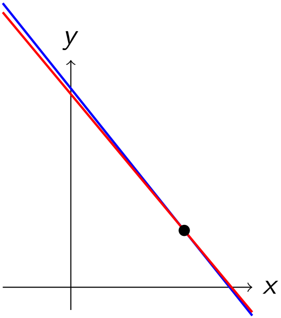
Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0.835 & 0.667 \\ 0.333 & 0.266 \end{bmatrix}$$

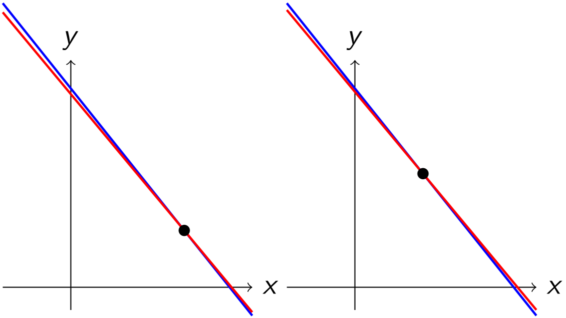
$$||A||_\infty = 1.502$$

$$||A^{-1}||_\infty = 1168000$$

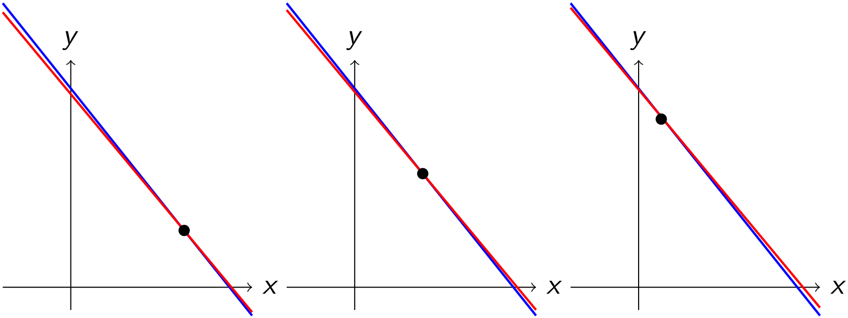
$$\kappa_\infty \approx 1.7 \times 10^6$$


y
x

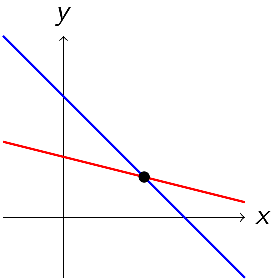
Interpretación Gráfica



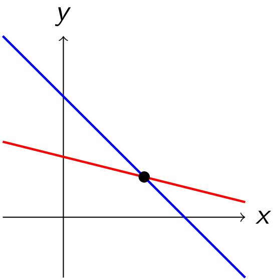
Interpretación Gráfica

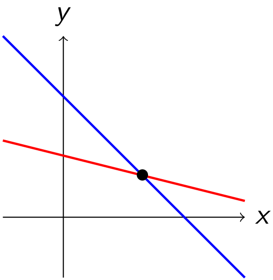


Interpretación Gráfica

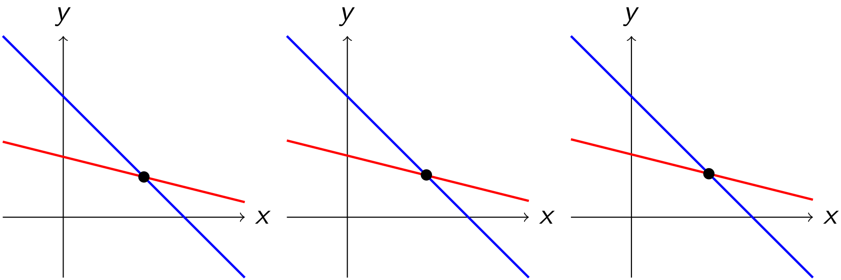


Interpretación Gráfica





Interpretación Gráfica



Cota del error

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz no singular y $||.||$ una norma matricial inducida. Sea $\tilde{x}$ solución aproximada del sistema $Ax = b$ con $b \neq 0$ y $r = Ax - A\tilde{x} = b - \tilde{b}$

$$\frac{||x - \tilde{x}||}{||x||} \leq ||A|| \, ||A^{-1}|| \frac{||b - \tilde{b}||}{||b||}$$