Práctica 1 - Ejercicios de Parcial

Métodos Numéricos

G. Franco Lancioni

April 15, 2020

Universidad de Buenos Aires, FCEN, Departamento de Computación

Ejercicio 1

Ej 1 de parcial

Sea $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tal que $C^k x = 0$ para algún $k > 0$. Definimos

$$r = \min\{k > 0 / C^k x = 0\} \quad \text{y} \quad S = \{x, Cx, C^2 x, \ldots, C^{r-1} x\}$$

Probar que:

- a) $S \subseteq Nu(C^r)$.
- b) S es linealmente independiente.
- c) $dim(Im(C^r)) \leq n - r$.

Ej 1 de parcial

$$r = \min\{k > 0 / C^k x = 0\} \quad \text{y} \quad S = \{x, Cx, C^2x, \ldots, C^{r-1}x\}$$

Probar que:

- a) $S \subseteq Nu(C^r)$.

- Tomamos un elemento genérico de S, $C^k x$ con $k = 0 \ldots r-1$, veamos que pertenece al núcleo de C^r:
  - Queremos ver que $C^r(C^k x) = 0$
- $C^r(C^k x) = (C^r C^k)x = C^{r+k}x = C^k(C^r x) \overset{\text{def}}{=} C^k 0 = 0$

Por lo tanto $C^k x \in Nu(C^r)$ $\square$

Ej 1 de parcial

$$r = \min\{k > 0 / C^k x = 0\}, \text{x} \neq 0 \quad y \quad \text{S=}\{ \text{ x, Cx, C}^2 x, \ldots, C^{r-1} x\}$$

Probar que:

- b) S es linealmente independiente.

Recordatorio

Un conjunto $\{v_1 \ldots v_n\}$ es linealmente independiente si dada la combinación lineal $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ los coeficientes λ_i son necesariamente *todos nulos*.

Ej 1 de parcial

$$r = \min\{k > 0 / C^k x = 0\},\ x \neq 0 \quad y \quad S=\{\ x,\ Cx,\ C^2 x, \dots, C^{r-1}x\}$$

Probar que:

- b) S es linealmente independiente.

- Sean λ_i tales que $\lambda_0 x + \lambda_1 Cx + \lambda_2 C^2 x + \ldots + \lambda_{r-1} C^{r-1} x = 0$
  - Queremos ver que $\lambda_i = 0\ \forall i$, por inducción.
- Caso base, $i = 0$:
  - Multiplicamos por C^{r-1}
    - La idea es anular todos los términos de la suma a excepción del primero.
    - $C^{r-1} \neq 0$ por definición de r.

$$C^{r-1}(\lambda_0 x + \lambda_1 Cx + \lambda_2 C^2 x + \ldots + \lambda_{r-1} C^{r-1} x) = C^{r-1} 0$$

$$\lambda_0 \underbrace{C^{r-1}x}_{\neq 0} + \lambda_1 \underbrace{C^r x}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{C^{r+1}x}_{=0} + \ldots + \lambda_{r-1} \underbrace{C^{2(r-1)}x}_{=0} = 0$$

- Por lo tanto $\lambda_0 = 0$

Ej 1 de parcial

$$r = \min\{k > 0 / C^k x = 0\},\ x \neq 0 \quad y \quad S = \{\ x,\ Cx,\ C^2x, \ldots, C^{r-1}x\}$$

Probar que:

- b) S es linealmente independiente.

- Paso inductivo, $i > 0$:
  - Por HI los λ_j, $j < i$, son todos nulos
    $\lambda_i C^i x + \lambda_{i+1} C^{i+1} x + \lambda_{i+2} C^2 x + \ldots + \lambda_{r-1} C^{r-1} x = 0$
  - Ahora múltiplicamos por C^{r-1-i}

$$\lambda_i C^{i+(r-1-i)} x + \lambda_{i+1} C^{i+1+(r-1-i)} x + \ldots + \lambda_{r-1} C^{r-1+(r-1-i)} x = 0$$

$$\lambda_i \underbrace{C^{r-1}x}_{\neq 0} + \lambda_{i+1} \underbrace{C^r x}_{=0} + \ldots + \lambda_{r-1} \underbrace{C^{2(r-1)} x}_{=0} = 0$$

  - Por lo tanto $\lambda_i = 0\ \forall i > 0$ $\square$

Ej 1 de parcial

$$r = \min\{k > 0 / C^k x = 0\} \quad \text{y} \quad S = \{x, Cx, C^2x, \dots, C^{r-1}x\}$$

Probar que:

- c) $dim(Im(C^r)) \leq n - r$.

- Por teorema de la dimensión $n - dim(Nu(C^r)) = dim(Im(C^r))$.
- Además por a) $S \subseteq Nu(C^r)$.
    - $< S > \subseteq Nu(C^r)$
        - $< S >$ el espacio generado por los elementos de S.
        - $dim(< S >) \leq dim(Nu(C^r))$ (*)
    - Por b) S no solo es generador de $< S >$, sino también base.
        - $dim(< S >) = |S| = r$
        - (*) queda $r \leq dim(Nu(C^r))$
        - Volviendo al teo de la dimensión

$$n - r \geq n - dim(Nu(C^r)) = dim(Im(C^r))$$

□

Ejercicio 2

Ejercicio 2 - Enunciado

Ej 2 de parcial

1. Sea la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$ para toda fila i. Demostrar que las columnas de A son linealmente dependientes.
2. Sea $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^m$. Demostrar que S es linealmente independiente si y sólo si S' también lo es, donde:

$$S' = \left\{ u_1, \sum_{i=1}^{2} u_i, \sum_{i=1}^{3} u_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} u_i \right\}$$

Ejercicio 2 - Resolución - item 1

Ej 2 de parcial

- 1. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$ para toda fila i. Demostrar que las columnas de A son linealmente dependientes.

- Queremos ver que existen coeficientes α_i, alguno no nulo, tales que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i col_i(A) = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i col_i(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A e_i = A(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{m,j} \end{pmatrix} \overset{qvq}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Nos alcanza entonces con garantizar $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} = 0$ para toda fila i.
  - Usando la información del enunciado es claro ver que tomando $\alpha_j = 1$ para todo j entonces obtenemos la combinación lineal buscada. $\square$

Ejercicio 2 - Resolución - Item 2

Ej 2 de parcial

- 2. Sea $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^m$. Demostrar que S es linealmente independiente si y sólo si S' también lo es, donde:

$$S' = \left\{ u_1, \sum_{i=1}^{2} u_i, \sum_{i=1}^{3} u_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} u_i \right\}$$

- Consideremos cómo convertir una combinación lineal del vector nulo de un conjunto en una CL similar del otro y luego probemos que los coeficientes de una son nulos sii lo son también los de la otra.
- Partimos desde S', sean $\beta_i \in \mathbb{R}$ tales que $\beta_1 u_1 + \beta_2(u_1 + u_2) + \cdots + \beta_n(u_1 + u_2 \cdots + u_n) = 0$
- Reagrupamos para conseguir los coeficientes α_i de la CL de vectores de S: $u_1(\underbrace{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}_{\alpha_1}) + u_2(\underbrace{\beta_2 + \cdots + \beta_n}_{\alpha_2}) + \cdots + u_n(\underbrace{\beta_n}_{\alpha_n}) = 0$

$$\alpha_i = \sum_{j=i}^{n} \beta_j$$

Ej 2 de parcial

- 2. Sea $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^m$. Demostrar que S es linealmente independiente si y sólo si S' también lo es, donde:

$$S' = \left\{ u_1, \sum_{i=1}^{2} u_i, \sum_{i=1}^{3} u_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} u_i \right\}$$

- Queda ver que todos los α_i son nulos sii los β_i también lo son.
- Si todos los β_i son nulos:

$$\alpha_k = \sum_{j=k}^{n} \underbrace{\beta_j}_{=0} = 0 \quad \forall\, 1 \leq k \leq n$$

- Si todos los α_i son nulos:
  - $i = n$:

$$\beta_n = \underbrace{\alpha_n}_{=0} = 0$$

Ej 2 de parcial

- 2. Sea $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^m$. Demostrar que S es linealmente independiente si y sólo si S' también lo es, donde:

$$S' = \left\{ u_1, \sum_{i=1}^{2} u_i, \sum_{i=1}^{3} u_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} u_i \right\}$$

- Si todos los α_i son nulos:
    - $i < n$:

$$0 = \alpha_i = \sum_{j=i}^{n} \beta_j = \sum_{j=i+1}^{n} \beta_j + \beta_i = \underbrace{\alpha_{i+1}}_{=0} + \beta_i = \beta_i$$

- Por lo tanto de existir una combinación lineal con coeficientes no nulos para uno de los conjuntos se cumpliría lo mismo para el otro. $\square$

- En vez de lo anterior también podríamos considerar el sistema:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{y}$$

- La matriz A es triangular superior con 1s en la diagonal, por lo tanto es inversible y el vector x es nulo sii el vector y lo es.

Fin