

Métodos Numéricos

Modalidad virtual por pandemia COVID-19



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Primer Cuatrimestre 2020

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, busquemos $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Ax = b$$

Métodos exactos vs Métodos iterativos

- Métodos exactos: en un número finito de pasos obtiene la solución (Eliminación gaussiana, LU, QR).
- Métodos iterativos: generan una sucesión $\{x^k\}$ que *converge* a la solución del sistema.

¿Por qué usaríamos un método iterativo?

Método de Jacobi

Sea $x^0 \in R^n$. Supongamos que $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1 \dots, n$. Definimos un próximo punto x^1 de la siguiente manera:

$$x_1^1 = (b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n a_{1j} x_j^0) / a_{11}$$

Método de Jacobi

Sea $x^0 \in R^n$. Supongamos que $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1 \dots, n$. Definimos un próximo punto x^1 de la siguiente manera:

$$x_1^1 = (b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n a_{1j}x_j^0)/a_{11}$$

$$x_2^1 = (b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n a_{2j}x_j^0)/a_{22}$$

Método de Jacobi

Sea $x^0 \in R^n$. Supongamos que $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1 \dots, n$. Definimos un próximo punto x^1 de la siguiente manera:

$$x_1^1 = (b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n a_{1j}x_j^0)/a_{11}$$

$$x_2^1 = (b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n a_{2j}x_j^0)/a_{22}$$

\vdots

$$x_i^1 = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j^0)/a_{ii}$$

Método de Jacobi

Sea $x^0 \in R^n$. Supongamos que $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1 \dots, n$. Definimos un próximo punto x^1 de la siguiente manera:

$$x_1^1 = (b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n a_{1j}x_j^0)/a_{11}$$

$$x_2^1 = (b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n a_{2j}x_j^0)/a_{22}$$

\vdots

$$x_i^1 = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j^0)/a_{ii}$$

\vdots

$$x_n^1 = (b_n - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n a_{nj}x_j^0)/a_{nn}$$

Método de Jacobi

Sea $x^k \in R^n$. Definimos un próximo punto x^{k+1} de la siguiente manera:

$$x_1^{k+1} = (b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n a_{1j} x_j^k) / a_{11}$$

Método de Jacobi

Sea $x^k \in R^n$. Definimos un próximo punto x^{k+1} de la siguiente manera:

$$x_1^{k+1} = (b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n a_{1j}x_j^k) / a_{11}$$

$$x_2^{k+1} = (b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n a_{2j}x_j^k) / a_{22}$$

Método de Jacobi

Sea $x^k \in R^n$. Definimos un próximo punto x^{k+1} de la siguiente manera:

$$x_1^{k+1} = (b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n a_{1j}x_j^k) / a_{11}$$

$$x_2^{k+1} = (b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n a_{2j}x_j^k) / a_{22}$$

\vdots

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j^k) / a_{ii}$$

Método de Jacobi

Sea $x^k \in R^n$. Definimos un próximo punto x^{k+1} de la siguiente manera:

$$x_1^{k+1} = (b_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n a_{1j}x_j^k) / a_{11}$$

$$x_2^{k+1} = (b_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^n a_{2j}x_j^k) / a_{22}$$

\vdots

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j^k) / a_{ii}$$

\vdots

$$x_n^{k+1} = (b_n - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n a_{nj}x_j^k) / a_{nn}$$

Método de Jacobi

$$A = D - L - U$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
 - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{ni} & \cdots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & -a_{1i} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Método de Jacobi

$$Ax = b$$

Método de Jacobi

$$Ax = b$$

$$(D - L - U)x = b$$

Método de Jacobi

$$Ax = b$$

$$(D - L - U)x = b$$

$$Dx - (L + U)x = b$$

Método de Jacobi

$$Ax = b$$

$$(D - L - U)x = b$$

$$Dx - (L + U)x = b$$

$$Dx = (L + U)x + b$$

Método de Jacobi

$$Ax = b$$

$$(D - L - U)x = b$$

$$Dx - (L + U)x = b$$

$$Dx = (L + U)x + b$$

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

Método de Jacobi

$$Ax = b$$

$$(D - L - U)x = b$$

$$Dx - (L + U)x = b$$

$$Dx = (L + U)x + b$$

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

$$x^{k+1} = D^{-1}(L + U)x^k + D^{-1}b$$

Recordar que asumimos $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$

Método de Gauss-Seidel

Sea $x^0 \in R^n$ y supongamos que $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$. Definimos un próximo punto x^1 de la siguiente manera:

$$x_1^1 = (b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^0)/a_{11}$$

Método de Gauss-Seidel

Sea $x^0 \in R^n$ y supongamos que $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$. Definimos un próximo punto x^1 de la siguiente manera:

$$x_1^1 = (b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^0)/a_{11}$$

$$x_2^1 = (b_2 - a_{21}x_1^1 - \sum_{j=3}^n a_{2j}x_j^0)/a_{22}$$

Método de Gauss-Seidel

Sea $x^0 \in R^n$ y supongamos que $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$. Definimos un próximo punto x^1 de la siguiente manera:

$$x_1^1 = (b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^0)/a_{11}$$

$$x_2^1 = (b_2 - a_{21}x_1^1 - \sum_{j=3}^n a_{2j}x_j^0)/a_{22}$$

\vdots

$$x_i^1 = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^1 - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^0)/a_{ii}$$

Método de Gauss-Seidel

Sea $x^0 \in R^n$ y supongamos que $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$. Definimos un próximo punto x^1 de la siguiente manera:

$$x_1^1 = (b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^0)/a_{11}$$

$$x_2^1 = (b_2 - a_{21}x_1^1 - \sum_{j=3}^n a_{2j}x_j^0)/a_{22}$$

\vdots

$$x_i^1 = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^1 - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^0)/a_{ii}$$

\vdots

$$x_n^1 = (b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^1)/a_{nn}$$

Método de Gauss-Seidel

Sea $x^k \in R^n$. Definimos un próximo punto x^{k+1} de la siguiente manera:

$$x_1^{k+1} = (b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^k)/a_{11}$$

Método de Gauss-Seidel

Sea $x^k \in R^n$. Definimos un próximo punto x^{k+1} de la siguiente manera:

$$x_1^{k+1} = (b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^k) / a_{11}$$

$$x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - \sum_{j=3}^n a_{2j}x_j^k) / a_{22}$$

Método de Gauss-Seidel

Sea $x^k \in R^n$. Definimos un próximo punto x^{k+1} de la siguiente manera:

$$x_1^{k+1} = (b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^k) / a_{11}$$

$$x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - \sum_{j=3}^n a_{2j}x_j^k) / a_{22}$$

\vdots

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k) / a_{ii}$$

Método de Gauss-Seidel

Sea $x^k \in R^n$. Definimos un próximo punto x^{k+1} de la siguiente manera:

$$x_1^{k+1} = (b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j^k) / a_{11}$$

$$x_2^{k+1} = (b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - \sum_{j=3}^n a_{2j}x_j^k) / a_{22}$$

\vdots

$$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k) / a_{ii}$$

\vdots

$$x_n^{k+1} = (b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^{k+1}) / a_{nn}$$

Método de Gauss-Seidel

$$Ax = b$$

Método de Gauss-Seidel

$$Ax = b$$

$$(D - L - U)x = b$$

Método de Gauss-Seidel

$$Ax = b$$

$$(D - L - U)x = b$$

$$(D - L)x - Ux = b$$

Método de Gauss-Seidel

$$Ax = b$$

$$(D - L - U)x = b$$

$$(D - L)x - Ux = b$$

$$(D - L)x = Ux + b$$

Método de Gauss-Seidel

$$Ax = b$$

$$(D - L - U)x = b$$

$$(D - L)x - Ux = b$$

$$(D - L)x = Ux + b$$

$$x = (D - L)^{-1}Ux + (D - L)^{-1}b$$

Método de Gauss-Seidel

$$Ax = b$$

$$(D - L - U)x = b$$

$$(D - L)x - Ux = b$$

$$(D - L)x = Ux + b$$

$$x = (D - L)^{-1}Ux + (D - L)^{-1}b$$

$$x^{k+1} = (D - L)^{-1}Ux^k + (D - L)^{-1}b$$

Recordar que asumimos $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$

Jacobi vs Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ Solución } x = \left(\frac{11}{10}, \frac{-57}{80}, \frac{3}{80} \right).$$

Jacobi

$$\begin{aligned} x^0 &= (0, 0, 0) \\ x^1 &= (0.8000, -0.3333, 0.1667) \\ x^2 &= (1.0000, -0.6556, 0.0111) \\ x^3 &= (1.0667, -0.6704, 0.0519) \\ x^4 &= (1.0889, -0.7062, 0.0346) \\ x^5 &= (1.0963, -0.7078, 0.0391) \\ x^6 &= (1.0988, -0.7118, 0.0372) \\ x^7 &= (1.0996, -0.7120, 0.0377) \\ x^8 &= (1.0999, -0.7124, 0.0375) \\ x^9 &= (1.1000, -0.7124, 0.0375) \\ x^{10} &= (1.1000, -0.7125, 0.0375) \end{aligned}$$

Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} x^0 &= (0, 0, 0) \\ x^1 &= (0.8000, -0.6000, 0.1000) \\ x^2 &= (1.0800, -0.7267, 0.0489) \\ x^3 &= (1.1102, -0.7197, 0.0365) \\ x^4 &= (1.1025, -0.7130, 0.0368) \\ x^5 &= (1.0999, -0.7123, 0.0374) \\ x^6 &= (1.0999, -0.7124, 0.0375) \\ x^7 &= (1.1000, -0.7125, 0.0375) \\ x^8 &= (1.1000, -0.7125, 0.0375) \\ x^9 &= (1.1000, -0.7125, 0.0375) \\ x^{10} &= (1.1000, -0.7125, 0.0375) \end{aligned}$$

Jacobi vs Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ Solución } x = (6, -4, -3).$$

Jacobi

$$x^0 = (0, 0, 0)$$

$$x^1 = (4, -1, 1)$$

$$x^2 = (8, -6, -5)$$

$$x^3 = (6, -4, -3)$$

$$x^4 = (6, -4, -3)$$

$$x^5 = (6, -4, -3)$$

$$x^6 = (6, -4, -3)$$

Gauss-Seidel

$$x^0 = (0, 0, 0)$$

$$x^1 = (4, -5, 3)$$

$$x^2 = (20, -24, 9)$$

$$x^3 = (70, -80, 21)$$

$$x^4 = (206, -228, 45)$$

$$x^5 = (550, -596, 93)$$

$$x^6 = (1382, -1476, 189)$$

$$x^7 = (3334, -3524, 381)$$

$$x^8 = (7814, -8196, 765)$$

$$x^9 = (17926, -18692, 1533)$$

$$x^{10} = (40454, -41988, 3069)$$

Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones lineales

Jacobi vs Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ Solución } x = \left(\frac{19}{9}, \frac{-31}{9}, \frac{1}{3}\right).$$

Jacobi

$$\begin{aligned} x^0 &= (0., 0, 0) \\ x^1 &= (4, -1, 1) \\ x^2 &= (3.00, -6.00, 2.50) \\ x^3 &= (-0.25, -6.50, -0.50) \\ x^4 &= (1.00, -0.25, -2.38) \\ x^5 &= (5.06, 0.38, 1.38) \\ x^{10} &= (4.28, -9.68, 5.62) \\ x^{20} &= (-4.51, 15.60, -15.81) \\ x^{30} &= (22.32, -61.55, 49.60) \\ x^{40} &= (-59.57, 173.88, -150.01) \\ x^{45} &= (258.10, 327.84, 90.68) \\ x^{50} &= (190.34, -544.60, 459.14) \end{aligned}$$

Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} x^0 &= (0, 0, 0) \\ x^1 &= (4, -5, 0.5) \\ x^2 &= (1.25, -2.75, 0.25) \\ x^3 &= (2.5, -3.75, 0.375) \\ x^4 &= (1.9375, -3.3125, 0.3125) \\ x^5 &= (2.1875, -3.5, 0.34375) \\ x^{10} &= (2.11035, -3.44433, 0.33300) \\ x^{15} &= (2.11108, -3.44439, 0.33334) \\ x^{20} &= (2.11111, -3.44444, 0.33333) \\ x^{25} &= (2.11111, -3.44444, 0.33333) \\ x^{30} &= (2.11111, -3.44444, 0.33333) \end{aligned}$$

Esquema básico

Dado $x^0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definimos la sucesión $\{x^k\}$ como:

$$x^{k+1} = Tx^k + c$$

¿Cuándo converge a la solución del sistema $x = Tx + c$?

Resultados auxiliares

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Definición: A es matriz convergente si $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{ij}^k = 0$

Resultados auxiliares

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Definición: A es matriz convergente si $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{ij}^k = 0$
- Definición $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } A\}$

Resultados auxiliares

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Definición: A es matriz convergente si $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{ij}^k = 0$
- Definición $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } A\}$
- Propiedad: A es convergente $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$
 - $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$ para toda norma inducida
 - $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

Resultados auxiliares

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Definición: A es matriz convergente si $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{ij}^k = 0$
- Definición $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } A\}$
- Propiedad: A es convergente $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$
 $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$ para toda norma inducida
 $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$
- Propiedad: Si $\rho(A) < 1 \Rightarrow I - A$ es no singular y
$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$$

Resultado principal

La sucesión $\{x^k\}$ definida por $x^{k+1} = Tx^k + c$ converge para cualquier x^0 inicial a la solución del sistema $x = Tx + c \Leftrightarrow \rho(T) < 1$

Matrices particulares

- Si A es estrictamente diagonal dominante \Rightarrow el método de Jacobi converge.

Matrices particulares

- Si A es estrictamente diagonal dominante \Rightarrow el método de Jacobi converge.
- Si A es estrictamente diagonal dominante \Rightarrow el método de Gauss-Seidel converge.

Matrices particulares

- Si A es estrictamente diagonal dominante \Rightarrow el método de Jacobi converge.
- Si A es estrictamente diagonal dominante \Rightarrow el método de Gauss-Seidel converge.
- Si A es simétrica definida positiva \Rightarrow el método de Gauss-Seidel converge.

Matrices particulares

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $a_{ij} \leq 0 \ \forall i \neq j$ y $a_{ii} > 0 \ \forall i = 1, \dots, n$. Se satisface una sola de las siguientes propiedades:

- $\rho(T_{GS}) < \rho(T_J) < 1$
- $1 < \rho(T_J) < \rho(T_{GS})$
- $\rho(T_{GS}) = \rho(T_J) = 0$
- $\rho(T_{GS}) = \rho(T_J) = 1$

Cota del error

Se $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $\|T\| < 1$ para una norma inducida. Entonces:

- $x^{k+1} = Tx^k + c$ converge independientemente del x^0 inicial.
- $\|x - x^k\| \leq \|T\|^k \|x^0 - x\|$
- $\|x - x^k\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|x^1 - x^0\|$