Métodos Numéricos
Modalidad virtual por pandemia COVID-19

DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Primer Cuatrimestre 2020

Cero de funciones

Objetivo

Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, buscamos x^* tal que $f(x^*) = 0$ (raíz de la función).

Esquema general

Se genera una sucesión $\{x_k\}_0^\infty$ tal que bajo ciertas condiciones

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x^* \text{ con } f(x^*) = 0$$

Los diferentes métodos difieren en la manera de generar una sucesión y en las condiciones de convergencia.

¿Cómo comparar los métodos?

Entre varios criterios para comparar los métodos podemos mencionar:

- Costo computacional
- Condiciones de convergencia
- Orden de convergencia

Cero de funciones

Orden de convergencia

Consideremos la sucesión $\{x_k\}_0^\infty$ que converge a x^*. Definimos orden de convergencia al valor $p \in \mathbb{R}_{>0}$ para el cual existe $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^p} = c$$

Consideremos las sucesiones $\{x_k\}_0^\infty$ que converge a x^* y $\{\beta_k\}_0^\infty$ que converge a 0. Si $|x_k - x^*| \leq M|\beta_k|$ para $k \geq k_0$ y M una constante positiva, entonces x_k se acerca a x^* al menos tan rápidamente como β_k se acerca a 0.

Ejemplos

- $\{x_k\}_0^\infty = \{\frac{1}{k}\}$. Converge a $x^* = 0$ y el orden de convergencia es $p = 1$ (lineal).
- $\{x_k\}_0^\infty = \{0.5^{(2^k)}\}$. Converge a $x^* = 0$ y el orden de convergencia es $p = 2$ (cuadrático).

Método de bisección

Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Por teorema de Bolzano, existe $\xi \in (a, b)$ tal que $f(\xi) = 0$.
Basados en esto podemos definir un proceso recursivo basado en la reducción del intervalo donde se encuentra un cero.

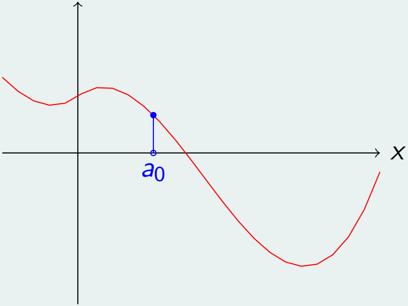
- Dado el intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$, tomamos el punto del medio $c = \frac{a+b}{2}$.
- Si $f(c)$ no es nulo, entonces $f(a)f(c) < 0$ ó $f(c)f(b) < 0$.
- Esto nos permite reducir a la mitad el intervalo donde podemos asegurar que existe una raíz de la función: en $[a, c]$ ó $[c, b]$

Método de bisección

$a_0 \leftarrow a \quad b_0 \leftarrow b$
for $k = 0$ a K **do**
  $c_k \leftarrow \frac{(a_k+b_k)}{2}$
  if $f(c_k)f(a_k) < 0$ **then**
    $a_{k+1} \leftarrow a_k$
    $b_{k+1} \leftarrow c_k$
  else
    if $f(c_k)f(b_k) < 0$ **then**
      $a_{k+1} \leftarrow c_k$
      $b_{k+1} \leftarrow b_k$
    else
      return c_k
    end if
  end if
end for
return c_K

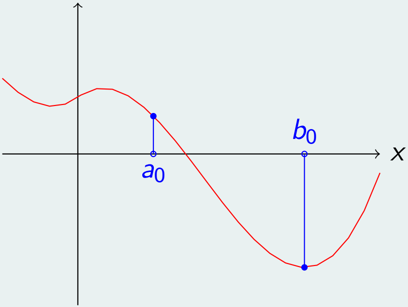
Método de bisección

$$f(x) = 0.25(x-1)^3 - 0.5x^2 + 1$$



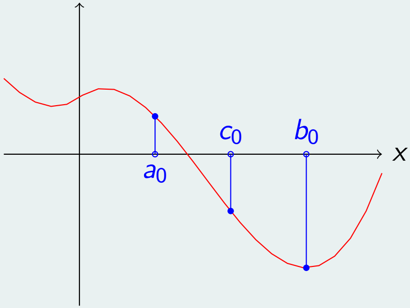
Método de bisección

$f(x) = 0.25(x-1)^3 - 0.5x^2 + 1$



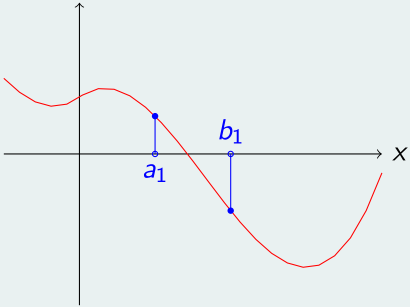
Método de bisección

$$f(x) = 0.25(x-1)^3 - 0.5x^2 + 1$$



Método de bisección

$$f(x) = 0.25(x-1)^3 - 0.5x^2 + 1$$



Método de bisección

Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. La sucesión $\{c_k\}_0^\infty$ definida por el algoritmo de bisección siempre converge a una raíz de f.

¿Criterios de parada?

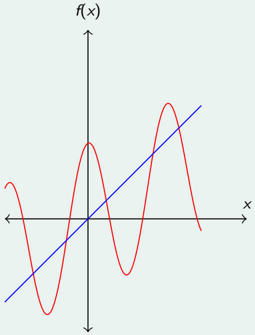
- Diferencia absoluta/relativa entre dos iteradas sucesivas.
- Diferencia absoluta/relativa entre valores de f entre dos iteradas sucesivas.
- Cantidad de iteraciones.

Punto fijo

Sea $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que x^* es punto fijo de g sii $g(x^*) = x^*$

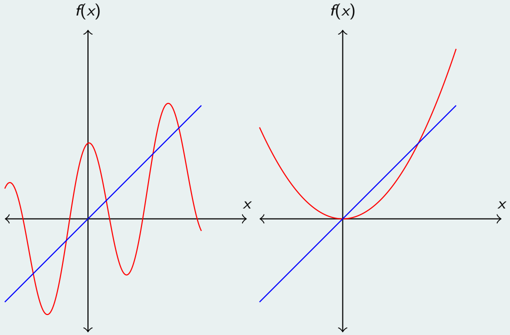
Punto fijo

Sea $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que x^* es punto fijo de g sii $g(x^*) = x^*$



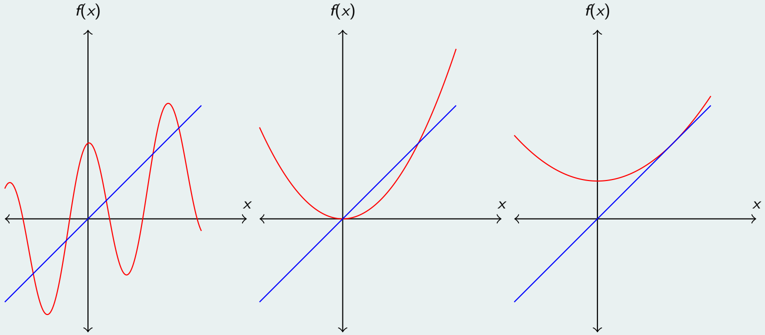
Punto fijo

Sea $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que x^* es punto fijo de g sii $g(x^*) = x^*$



Punto fijo

Sea $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que x^* es punto fijo de g sii $g(x^*) = x^*$



Cero de funciones

Punto fijo vs Cero de funciones

Sean $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y f(x)=$g(x) - x$.

$$x^* \text{ es punto fijo de } g \text{ sii } x^* \text{ es raíz de } f.$$

Punto fijo vs Cero de funciones

Sean $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y f(x)=$g(x) - x$.

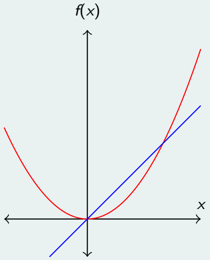
x^* es punto fijo de g sii x^* es raíz de f.

Punto fijo

Sea $g(x) : [a, b] \to [a, b]$ función continua. Entonces g tiene punto fijo en $[a, b]$. Si además g es derivable en (a, b) y $|g'(x)| \leq M < 1$ para todo $x \in (a, b)$, entonces el punto fijo es único.

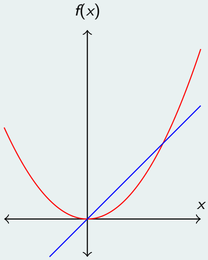
Son condiciones suficientes, pero no necesarias!

Punto fijo



$f(x) = x^2$ tiene dos puntos fijos $x^* = 0$ y $x^* = 1$.
El intervalo $[a, b] = [-0.25, 0.25]$ verifica que $g(x) = x^2 : [a, b] \rightarrow [a, b]$. Además $|g'(x)| = |2x| \leq \frac{1}{2} < 1$. Por lo tanto existe punto fijo en $[a, b]$ y es único. Corresponde a $x^* = 0$.

Punto fijo



$f(x) = x^2$ tiene dos puntos fijos $x^* = 0$ y $x^* = 1$.
El intervalo $[a, b] = [-0.25, 0.25]$ verifica que $g(x) = x^2 : [a, b] \to [a, b]$. Además $|g'(x)| = |2x| \leq \frac{1}{2} < 1$. Por lo tanto existe punto fijo en $[a, b]$ y es único. Corresponde a $x^* = 0$.
Para el caso de $x^* = 1$ tenemos que $|g'(x^*)| = 2$ por lo cual no va a existir un intervalo que contenga al punto fijo donde podamos acotar la derivada por una constante menor a 1. Sin embargo en un intervalo que contenga a $x^* = 1$ y no contenga a $x^* = 0$, el punto fijo existe y es único.

Cero de funciones

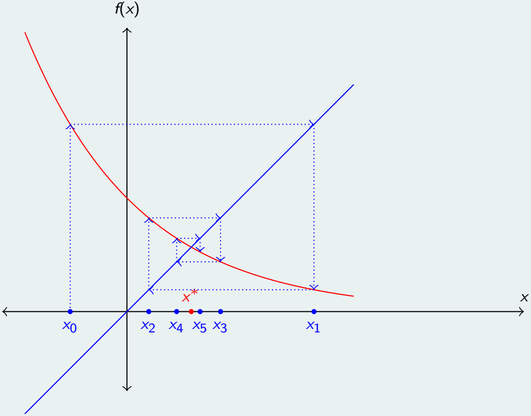
Algoritmo de Punto fijo

Sea $g(x) : [a, b] \to [a, b]$ función derivable en (a, b) y $|g'(x)| \leq M < 1$ para todo $x \in (a, b)$. Dado $x_0 \in [a, b]$ la sucesión definida por $x_{k+1} = g(x_k)$ converge a x^*, el punto fijo de g.

Error

- $|x_k - x^*| \leq M^k \max\{x_0 - a, b - x_0\}$
- $|x_k - x^*| \leq \frac{M^k}{1-M}|x_1 - x_0|$

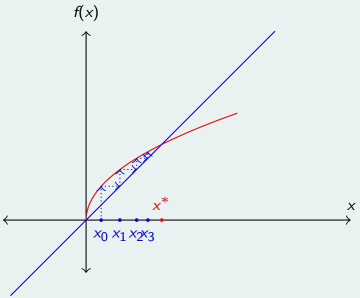
Algoritmo de Punto fijo



Convergencia alternante

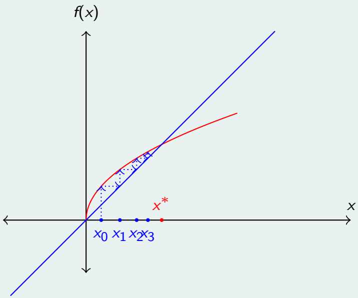
Cero de funciones

Algoritmo de Punto fijo

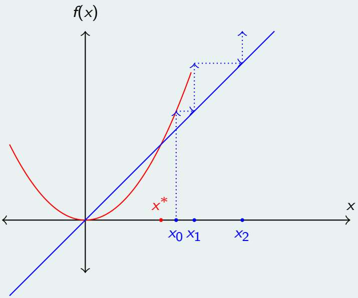


Convergencia monótona

Algoritmo de Punto fijo



Convergencia monótona



Divergencia

Punto fijo-Orden de convergencia

Sea $g(x) \in C^n[a,b]$, x^* punto fijo de g tal que
$g'(x^*) = g''(x^*) = \ldots = g^{r-1}(x^*) = 0$, $g^r(x^*) \neq 0$.
Dado $x_0 \in [a,b]$ si la sucesión definida por $x_{k+1} = g(x_k)$ converge a x^* entonces el orden de convergencia es r.

Cero de funciones

Punto fijo

Sea $f(x)$ y x^* una raíz. Definimos $g(x) = x - h(x)f(x)$ donde $h(x^*) \neq 0$. Entonces x^* es punto fijo de g sii x^* es raíz de f.
Si aplicamos el algoritmo de punto fijo a g, buscamos que tenga convergencia cuadrática. ¿Qué deberíamos pedir?

$$g'(x^*) = 0 \; 1 - h'(x^*)f(x^*) - h(x^*)f'(x^*) = 0$$

como $f(x^*) = 0$, entonces

$$1 - h(x^*)f'(x^*) = 0$$

de donde deducimos que $h(x^*) = \frac{1}{f'(x^*)}$
¿Candidata a ser $h(x)$?

$$h(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

Algoritmo de Newton

$x_0 \in [a, b]$
for $k = 1$ a K **do**
  $x_k \leftarrow x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$
end for
return x_K

Algoritmo de Newton

Sean $f(x) \in C^2[a, b]$ y $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$ y $f'(x^*) \neq 0$.
Existe $\delta > 0$ tal que la sucesión

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

converge a x^* si $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$

Algoritmo de Newton-Interpretación

Consideramos el polinomio de Taylor de orden 1 alrededor de $\bar{x}$:
$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{f''(\xi(x))}{2}(x - \bar{x})^2$
Si buscamos x^* una raíz de f y consideramos que se encuentra *cerca* de $\bar{x}$, *despreciamos* el último término de donde surge

$$0 \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x^* - \bar{x})$$

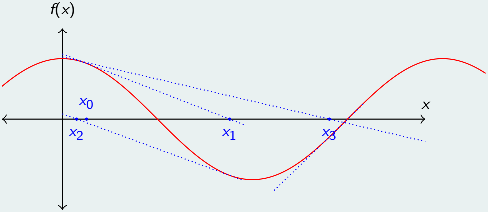
$$x^* \approx \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

De aqui podemos plantear la sucesión

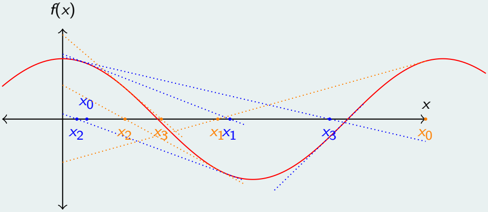
$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$$

Interpretación: considerar el punto donde se anula la recta tangente.

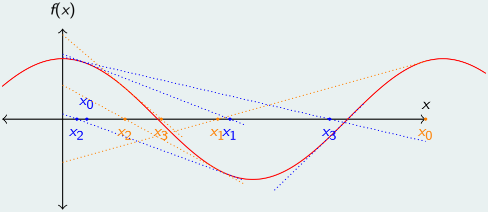
Algoritmo de Newton:convergencia



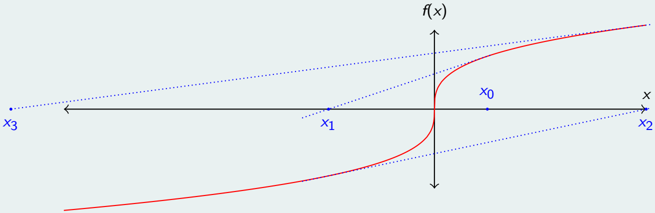
Algoritmo de Newton:convergencia



Algoritmo de Newton:convergencia



Algoritmo de Newton:divergencia



Algoritmo de Newton-Caso particular

Sean $f(x) \in C^2[a, b]$, creciente y convexa ($f''(x) > 0$). Entonces si existe $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$, la raíz es única y el algoritmo de Newton converge desde cualquier $x_0 \in [a, b]$ inicial.

Algoritmo de la Secante

- Necesita de dos puntos para comenzar.
- En lugar de tomar la recta tangente, considera la recta secante.
- El punto donde la recta secante se anula es el próximo elemento de la sucesión

Algoritmo de la Secante

- Necesita de dos puntos para comenzar.
- En lugar de tomar la recta tangente, considera la recta secante.
- El punto donde la recta secante se anula es el próximo elemento de la sucesión

$$f'(x_{k-1}) = \lim_{x \to x_{k-1}} \frac{(f(x) - f(x_{k-1}))}{(x - x_{k-1})}$$

Algoritmo de la Secante

- Necesita de dos puntos para comenzar.
- En lugar de tomar la recta tangente, considera la recta secante.
- El punto donde la recta secante se anula es el próximo elemento de la sucesión

$$f'(x_{k-1}) = \lim_{x \to x_{k-1}} \frac{(f(x) - f(x_{k-1}))}{(x - x_{k-1})}$$

$$f'(x_{k-1}) \approx \frac{(f(x_{k-2}) - f(x_{k-1}))}{(x_{k-2} - x_{k-1})}$$

Algoritmo de la Secante

- Necesita de dos puntos para comenzar.
- En lugar de tomar la recta tangente, considera la recta secante.
- El punto donde la recta secante se anula es el próximo elemento de la sucesión

$$f'(x_{k-1}) = \lim_{x \to x_{k-1}} \frac{(f(x) - f(x_{k-1}))}{(x - x_{k-1})}$$

$$f'(x_{k-1}) \approx \frac{(f(x_{k-2}) - f(x_{k-1}))}{(x_{k-2} - x_{k-1})}$$

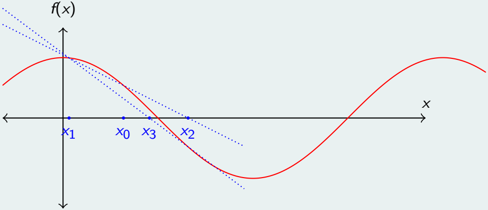
Reemplazamos en el método de Newton:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{\frac{(f(x_{k-2}) - f(x_{k-1}))}{(x_{k-2} - x_{k-1})}}$$

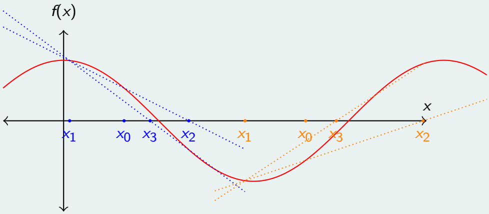
Algoritmo de la secante

$x_0 \leftarrow a \quad x_1 \leftarrow b$
for $k = 2$ a K **do**
$\quad x_k \leftarrow x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_{k-2}-x_{k-1})}{(f(x_{k-2})-f(x_{k-1}))}$
end for
return x_K

Algoritmo de secante:convergencia



Algoritmo de secante:convergencia



Algoritmo de la regla falsa

- Conjuga bisección con secante.
- Parte de dos puntos donde la función difiere en signo, pero en lugar de tomar el pnto intermedio, considera el punto donde la recta secante que pasa por los puntos se anula. Eso determina un tercer punto.
- Se aplica la misma regla que en bisección para decidir con que intervalo continúa el proceso.

Algoritmo de la regla falsa

$a_0 \leftarrow a \quad b_0 \leftarrow b$
for $k = 0$ a K **do**
  $c_k \leftarrow = a_{k-1} - \frac{f(a_{k-1})(a_{k-1} - b_{k-1})}{(f(a_{k-1}) - f(b_{k-1}))}$
  if $f(c_k)f(a_k) < 0$ **then**
    $a_{k+1} \leftarrow a_k$
    $b_{k+1} \leftarrow c_k$
  else
    if $f(c_k)f(b_k) < 0$ **then**
      $a_{k+1} \leftarrow c_k$
      $b_{k+1} \leftarrow b_k$
    else
      return c_k
    end if
  end if
end for
return c_K