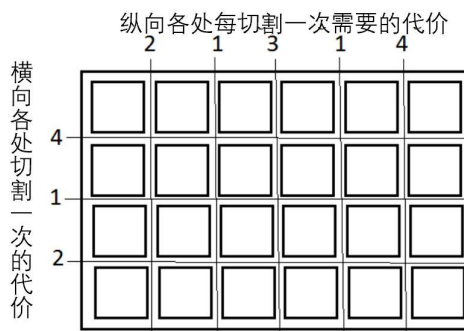


第五章 贪心算法习题

1. 输入一个 $m \times n$ 长方形和在横、纵方向各处切割一次的代价（如下图所示），给出一个代价最小的切割方案将长方形切割成 mn 个边长为 1 的正方形。要求：(1)用你的方案切割图中实例，计算所需的最小代价；(2)用自然语言表述贪心思想；(3)说明方案的正确性。



2. 现有一台计算机，在某个时刻同时到达了 n 个任务。该计算机在同一时间只能处理一个任务，每个任务都必须被不间断地得到处理。该计算机处理这 n 个任务需要的时间分别为 a_1, a_2, \dots, a_n 。将第 i 个任务在调度策略中的结束时间记为 e_i 。请设计一个贪心算法输出这 n 个任务的一个调度使得用户的平均等待时间 $1/n \sum e_i$ 达到最小。
3. 在笔直的公路两侧各有 n 个炼油厂 x_1, x_2, \dots, x_n 和 n 个加油站 y_1, y_2, \dots, y_n 。炼油厂 x_i 每天生产汽油 $S(x_i)$ ，加油站每天出售汽油 $C(y_i)$ 且 $\sum_i S(x_i) = \sum_j C(y_j)$ 。汽油从炼油厂运输到加油站的代价正比于二者之间的距离。试设计算法将各个炼油厂生产的汽油全部运输到加油站，使得整体运输单价最小。
4. 某工厂收到 n 个订单 (a_i, b_i) ，其中 a_i 和 b_i 均是正整数 ($1 \leq i \leq n$)，订单 (a_i, b_i) 希望在时间 b_i 之前获得 a_i 件产品。工厂的生产能力为每个时间单位生产 1 件产品。工厂希望拒绝最少数量的订单，并恰当地排序剩下的订单使得剩下的订单均能够被满足。试设计一个贪心算法求解上述问题。

思考题（无需提交）

- 5.1 现有面值为 1 角、5 分、2 分、1 分的硬币，每种硬币的个数都是无限的。给出一个贪心算法，使得对任意给定的面值为 n ($n > 18$) 分的纸币能够将它兑换成币值相等的硬币且使用硬币个数最少。证明算法的正确性并分析其复杂度。
- 5.2 给定 k 个排好序的有序序列 s_1, s_2, \dots, s_k ，现在用 2 路归并排序算法对这些有序序列排序。假定用 2 路归并排序算法对长度分别为 m 和 n 的有序序列排序要用 $m+n-1$ 次比较操作。设计一个贪心算法合并 s_1, s_2, \dots, s_k 使得所需的比较操作次数最少。
- 5.3 设计分治算法求解如下问题，并分析算法的复杂性。
输入：字符表 $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ 的前缀编码 $\text{code}(c_1), \dots, \text{code}(c_n)$
输出：与前缀编码 $\text{code}(c_1), \dots, \text{code}(c_n)$ 对应的编码树 T
- 5.4 给定两个大小为 n 的正整数集合 A 和 B 。对于 A 到 B 的一个一一映射 f ，不妨设 $f(a_i) = b_i$ ($i = 1, \dots, n$)，则 f 的代价为 $\sum_{i=1}^n a_i^{b_i}$ 。试设计一个贪心算法，找出从 A 到 B 的代价最大的一一映射。
- 5.5 一个 DNA 序列 X 是字符集 $\{G, T, A, C\}$ 上的串，其上有大量信息冗余。设 x 是 X 的子串， x 及其冗余形式在 X 内在出现的起、止位置构成了一系列等长区间 $[p_1, q_1], \dots, [p_m, q_m]$ 。试设计一个贪心算法找出 $[p_1, q_1], \dots, [p_m, q_m]$ 中互不相交的区间的最大个数，即确定 x 的独立冗余度。
- 5.6 背包问题定义如下，输入背包容量 C 和 n 个物品，其中第 i 个物品 ($1 \leq i \leq n$) 的重量为 w_i 且其价值为 v_i ，试设计一个贪心算法输出向量 $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ 使得 $0 \leq x_i \leq 1$ ($1 \leq i \leq n$) 且 $\sum_{i=1}^n x_i v_i$ 达到最大值。
- 5.7 给定平面点集 $P = \{(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$ 和 $Q = \{(x_j, y_j) \mid 1 \leq j \leq n\}$ 。 $(x_i, y_i) \in P$ 支配 $(x_j, y_j) \in Q$ 当且仅当 $x_i \geq x_j$ 且 $y_i \geq y_j$ 。

试设计一个贪心算法输出集合 $\{(p,q)|p \in P, q \in Q, p \text{ 支配 } q\}$ 使得该集合中点对最多。

5.8 输入 n 个区间 $[a_i, b_i]$, 其端点满足 $1 \leq a_i \leq b_i \leq n$, 试设计一个贪心算法选出最少区间覆盖 $[1, n]$ 。