高级算法作业七

23S003040　　郭子正

2024 年 5 月 3 日

1. 分支限界法. 以 v_0 为树根, 每个节点 v_{ij} 的代价下界是当前代价之和. 做深度优先搜索, 每一步贪心地选择使当前代价下界增加最小的节点. 如果当前代价大于代价上界, 则舍弃当前节点. 当到达目标节点后, 若当前代价小于代价上界, 则更新代价上界.

最先走通的路径为 $v_0 \to v_{13} \to v_{21} \to v_{31} \to T$, 代价为 13, 作为代价上界.

第二次走通的路径为 $v_0 \to v_{13} \to v_{21} \to v_{33} \to T$, 代价为 13, 等于代价上界.

第三次走通的路径为 $v_0 \to v_{11} \to v_{23} \to v_{32} \to T$, 代价为 7, 更新为代价上界.

第四次搜索路径为 $v_0 \to v_{11} \to v_{23} \to v_{33}$, 此时代价已经为 9, 大于代价上界, 舍弃. 同理, 舍弃路径 $v_0 \to v_{11} \to v_{23} \to v_{34}$.

重复上述过程, 可以发现其余路径均被舍弃. 故最短路径为 $v_0 \to v_{11} \to v_{23} \to v_{32} \to T$, 代价为 7.

A* 算法. 定义 $h(v)$ 为下一步代价的最小值,$g(v)$ 等于当前代价,$f(v) = g(v) + h(v)$. 我们有

$$\begin{aligned}
g(v_{11}) = 2, h(v_{11}) = 1, &\quad f(v_{11}) = 3 \\
g(v_{12}) = 5, h(v_{12}) = 7, &\quad f(v_{12}) = 12 \\
g(v_{13}) = 1, h(v_{13}) = 3, &\quad f(v_{13}) = 4 \\
g(v_{14}) = 6, h(v_{14}) = 4, &\quad f(v_{14}) = 10
\end{aligned}$$

队列 $v_{11}(3), v_{13}(4), v_{14}(10), v_{12}(12)$, 扩展 v_{11}:

$$\begin{aligned}
g(v_{21}) = 2 + 1 = 3, h(v_{21}) = 6, &\quad f(v_{21}) = 9 \\
g(v_{22}) = 2 + 4 = 6, h(v_{22}) = 3, &\quad f(v_{22}) = 9
\end{aligned}$$

队列 $v_{13}(4), v_{21}(9), v_{22}(9), v_{14}(10), v_{12}(12)$, 扩展 v_{13}:

$$\begin{aligned}
g(v_{21}) = 1 + 3 = 4, h(v_{21}) = 6, &\quad f(v_{21}) = 10 \\
g(v_{23}) = 1 + 4 = 5, h(v_{23}) = 1, &\quad f(v_{23}) = 6
\end{aligned}$$

队列 $v_{23}(6), v_{21}(9), v_{22}(9), v_{14}(10), v_{21}(10), v_{12}(12)$, 扩展 v_{23}:

$$\begin{aligned}
g(v_{32}) = 5 + 1 = 6, h(v_{32}) = 1, &\quad f(v_{32}) = 7 \\
g(v_{33}) = 1 + 4 = 5, h(v_{33}) = 2, &\quad f(v_{33}) = 7 \\
g(v_{34}) = 1 + 4 = 5, h(v_{34}) = 5, &\quad f(v_{34}) = 10
\end{aligned}$$

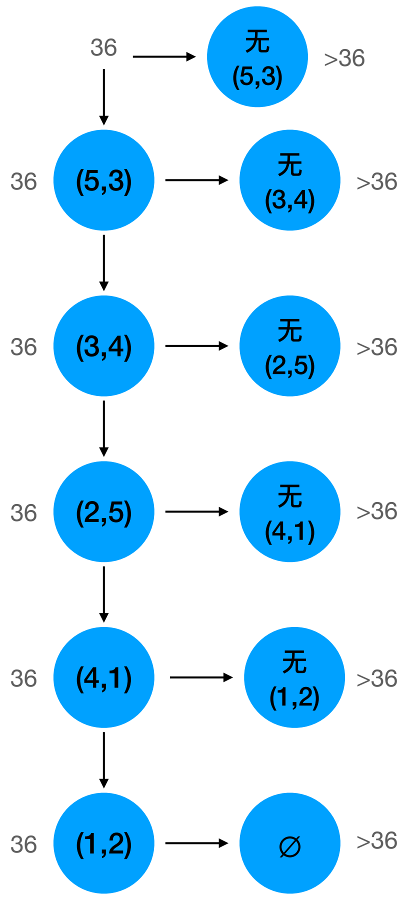
队列 $v_{32}(7), v_{33}(7), v_{21}(9), v_{22}(9), v_{14}(10), v_{21}(10), v_{34}(10), v_{12}(12)$, 扩展 v_{32}:

$$g(T) = 6 + 1 = 7, h(T) = 0, \quad f(T) = 7$$

由于队列中没有 f 值小于 7 的节点, 搜索结束,7 是最短距离.

2 (1) $\begin{pmatrix} \infty & 5 & 61 & 34 & 12 \\ 57 & \infty & 43 & 20 & 7 \\ 39 & 42 & \infty & 8 & 21 \\ 6 & 50 & 42 & \infty & 8 \\ 41 & 26 & 10 & 35 & \infty \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \infty & 0 & 51 & 26 & 5 \\ 51 & \infty & 33 & 12 & 0 \\ 33 & 37 & \infty & 0 & 14 \\ 0 & 45 & 32 & \infty & 1 \\ 35 & 21 & 0 & 27 & \infty \end{pmatrix}$, $LB = 36$.

注意到 $f(1,2) = 26, f(2,5) = 13, f(3,4) = 26, f(4,1) = 34, f(5,3) = 53$ 选 $(5,3)$ 进行分支. 具体搜索树如下



因此最小代价哈密顿环为 $2 \to 5 \to 3 \to 4 \to 1 \to 2$, 代价为 36.

3 **深度优先法**先搜索 6, 再选取 13, 此时正好得到 18, 输出 $S' = \{6, 13\}$.

分支限界法当已经选取元素之和大于 18 时停止继续搜索. 最后可以得到问题的一个解为 $S' = \{6, 13\}$.

4 这里将 “相关” 理解为数字拼接. 例如 1 和 2 相关运算之后得到 12.

(1) 树根为空序列, 节点为 A 小于等于 K 大小元素的排列. 孩子节点比父亲节点在排列中多出现一个元素.

(2) 遍历搜索树的每一个叶子节点, 将叶子节点代表的排列拼接成整数. 如果为素数, 则更新当前最小值. 遍历结束后输出得到的最小值.

(3) 遍历 A 中所有 3 个元素的排列, 检查是否是素数并更新最小值记录. 最小值为 1237.