第 9 章 近似算法 习题

1.非二分图上的加权匹配问题的输入是图 $G=(V,E)$，其中每条边 $(i,j)\in E$ 具有非负权值 w_{ij}，输出是总权值最大的匹配 M。

考虑如下的贪心算法。维护一个边集子集 M,其初始化为空集。重复地将权值最大且与 M 中的边无公共端点的边添加到 M 中,直到 M 中无法继续添加边为止。记 z 是 M 中所有边的权值之和，z^*是问题的优化解的代价。根据下面的提示，证明上述贪心算法的近似比为 2。

(1).证明下面的线性规划的目标函数最优取值z_{LP} 是z^*的上界。

$$\begin{aligned} min \quad & \textstyle\sum_{x_i\in V} x_i \\ \text{s.t.} \quad & x_i + x_j \geq w_{ij} \qquad \forall\ (i, j)\in E \\ & x_i \geq 0 \qquad\qquad \forall i\in V \end{aligned}$$

(2).利用贪心算法得到的匹配M构造上述线性规划的一个可行解x ,证明该可行解的代价至多为$2z$。据此证明 $2z \geq z^*$。

2. 最大k-满足性问题的输入是文字$x_1,x_2,\ldots,x_n$上的m个析取子句$C_1,\ldots,C_m$，每个子句恰有k个文字，要求输出$x_1,x_2,\ldots,x_n$的一组布尔赋值，使得$C_1,\ldots,C_m$中被满足的子句个数达到最大值。

(1)将x_1,x_2,x_3的问题实例$x_1\vee\neg x_3$, $\neg x_2\vee x_3$表达为整数线性规划问题；

(2)为问题设计一个近似算法，并分析近似比；

3. 利用最小生成树算法和最大权值匹配算法给出满足三角不等式的旅行商问题的一个 3/2-近似算法。(提示：利用最大匹配改造最小生成树使其存在哈密顿环，分析近似比时注意使用三角不等式)。

思考题（不必提交）：

10.1加权顶点覆盖问题的输入是图 $G=(V,E)$，其中每个顶点 $v\in V$ 的权值为 $w(v)$,输出是总权值最小的顶点子集 $C\subseteq V$ 使得 E 中每条边至少有一个端点位于 C 中。

(1).将加权顶点覆盖问题表示成整数规划；

(2).用舍入法设计加权顶点覆盖问题的一个近似算法并分析其近似比。

利用第 7 章图的匹配算法，给出定点覆盖问题的一个近似比为 2 的近似算法。

10.2将 10.2.3 节最短并行算法中任务的任意顺序修改为处理时间的递减顺序，证明修改后的算法的近似比为 4/3。

10.3Steiner tree 问题的输入是加权连通图 $G=(V,E)$和一个顶点子集 $T\subseteq V$，输出是总权值最小的一个边集子集 $E'\subseteq E$ 使得在 T 中的任意两个顶点在 $G'=(V,E')$上是连通的。试利用最短路径算法和最小生成树算法为 Steiner tree 问题设计一个近似比为 2 的近似算法。(提示：分析近似比时需要利用 10.2.4 节的结论)

10.4试修改 10.3.1 的集合覆盖算法求解加权集合覆盖问题，并分析它的近似比。

10.5 最小多路割问题的输入是连通加权图 $G=(V,E)$和顶点子集 $T\subseteq V$，其中$|T|>1$，每条边 $e\in E$ 的权值记为 $w(e)$，输出总权值最小的边子集 $E'\subseteq E$ 使得$\forall u,v\in T$ 在 $G=(V,E\setminus E')$中不连通。试利用最小割（最大流）算法，给出最小多路割问题的一个基于贪心思想的近似比为 2 的近似算法。（提示：如下建立近似解和优化解之间的联系，近似解和优化解均会将$\forall v\in T$ 与 $T\setminus\{v\}$分割开）。

10.6 考虑 10.6.3 节随机舍入算法的如下改进。调用 SetCoverRRounding 算法 $b\log n$ 次，其中 b 满足 $e^{-b\log n}\le (4n)^{-1}$，将各次调用输出的集族求并集得到 C'，将 C'作为最终的输出。证明：

(1). X 未被 C'覆盖的概率不超过 1/4；

(2). $E(w(C'))=OPT_f\cdot\log n$；

(3). C'覆盖 X 且 $w(C')\le OPT_f\cdot 4b\cdot\log n$ 的概率不小于 1/2。

10.7 利用线性规划方法，设计一个 2-近似算法求解如下的 SONET 电话负载问题。

输入：含有 n 个顶点的环（其中所有顶点按顺时针方向列出得到 0,1, 2,…, n-1）。一个电话呼叫集合 C，其中$(i,j)\in C$ 表示节点 i 呼叫节点 j。任意电话的路由既可以按顺时针方向进行也可以按逆时针方向进行。对于 C 中电话的路由策略，边$(i, i+1 \bmod n)$的负载为通过该边的电话个数 L_i。环的总负载为 $\max_{1\le i\le n} L_i$。

输出：C 中电话的一个路由策略，使得环的总负载最小。

10.8 证明:10.2.3 节讨论的最短平行调度问题不存在 3/2-近似算法。（提示：采用类似于装箱问题的 3/2-鸿沟归约）

10.9 证明：如果 10.4.2 节讨论的设施定位问题的距离函数是任意的非负加权函数，则设施定位问题不存在常数近似比的近似算法，除非 $NP=P$。（提示，将集合覆盖问题问题归约到修改后的设施定位问题）