Intervalos de confianza asintóticos

Intervalos de confianza asintóticos. Definición

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución F_θ. Diremos que

$$[a(X_1, \ldots, X_n), b(X_1, \ldots, X_n)]$$

es un intervalo de confianza de nivel asintótico $1-\alpha$ para el parámetro θ sii

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a(X_1, \ldots, X_n) \leq \theta \leq b(X_1, \ldots, X_n)\right) = 1-\alpha$$

Intervalo de confianza asintótico para la media.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución F con $E\left(X_i\right) = \mu$ y $V\left(X_i\right) = \sigma^2 < \infty$.
Por el TCL, sabemos que

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Si σ^2 fuera conocido, esta función podría servir de pivote.

$$\mathbb{P}\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq z_{\alpha/2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \alpha$$

Por lo tanto

$$\left[\bar{X}_n - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \quad , \quad \bar{X}_n + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$

sería un intervalo de confianza de nivel asintótico $1 - \alpha$ para $\mu = \mathbb{E}(X)$

Intervalo de confianza asintótico para la media cuando la varianza es desconocida.

En este caso, querríamos usar como pivote

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{s}$$

pero ¿qué distribución asintótica tiene este estadístico?

- ¿Es t de student? Para eso X_i tendrían que ser normales ...
- ¿Es normal? Para eso en vez de s tendría que decir σ...

Distribución asintótica de $\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{s}$

Teorema de Slutzky

$$\left.\begin{array}{l} Y_n \xrightarrow{d} Y \\ U_n \xrightarrow{p} a \end{array}\right\} \Rightarrow U_n Y_n \xrightarrow{d} aY$$

Aplicamos este teorema para hallar el límite en distribución de

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{s}$$

Como $s \xrightarrow{p} \sigma$, entonces $\frac{S}{\sigma} \xrightarrow{p} 1$ y $\frac{\sigma}{s} \xrightarrow{p} 1$ Luego,

$$\left.\begin{array}{c} \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \longrightarrow N(0,1) \\ \frac{\sigma}{\mathrm{s}} \xrightarrow{p} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{s} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Intervalo de confianza asintótico para la media cuando la varianza es desconocida.Continuación

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución F con $E\left(X_i\right) = \mu$ y $V\left(X_i\right) = \sigma^2 < \infty$.
Usando el teorema de Slutzky, probamos que

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{s} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Por lo tanto se tiene

$$P\left(-z_{a/2} \leq \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{s} \leq z_{a/2}\right) \rightarrow 1-\alpha$$

y se obtiene el siguiente intervalo de nivel aproximado $1-\alpha$ para $\mu = E(X_1)$

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{a/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Intervalo de confianza asintótico para el parámetro p de la distribución binomial

Aproximación normal a la binomial

Sea $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$, entonces X es el número de éxitos en n repeticiones de un experimento binomial con probabilidad de éxito igual a p.

Sea, para $i = 1, \ldots, n$,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si se obtuvo éxito en la } i \text{ ésima repetición} \\ 0 & \text{si se obtuvo fracaso en la } i \text{ ésima repetición} \end{cases} .$$

Estas v.a. son independientes, $X_i \sim \mathrm{Bi}(1, p) \forall i$ y

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Además: $E(X_i) = p$ y $V(X_i) = p(1-p)$ Entonces, por TCL

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{a}{\sim} N(0,1) \quad \text{y} \quad \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Intervalo de confianza asintótico para el parámetro p de la distribución binomial

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una m.a. de una distribución $B(1, p)$

$$\frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

implica que

$$P\left(-z_{a/2} \leq \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{a/2}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1-\alpha$$

¿Cómo despejamos p? Mejor dicho, ¿despejamos p?

Recordar que en este contexto $\overline{X}$ también se nota $\hat{p}$.

Intervalo de confianza asintótico para el parámetro p de la distribución binomial

Como, por la Ley de los Grandes Números,

$$\hat{p} = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{p} p$$

podemos aplicar el teorema de Slutzky y reemplazar en el denominador el pivote p por su estimador. Entonces se tiene que

$$\frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

y por lo tanto

$$P\left(-z_{a/2} \leq \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \leq z_{a/2}\right) \cong 1 - \alpha$$

Intervalo de confianza asintótico para el parámetro p de la distribución binomial

Por lo tanto, un intervalo para p de nivel asintótico $1-\alpha$ es

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}\left(1-\overline{X}\right)}{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}\left(1-\overline{X}\right)}{n}}\right]$$

o, lo que es lo mismo,

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}\right]$$

Ejemplo

Para estimar la proporción de personas a favor de cierta ley, se realiza una encuesta y su obtiene que el 38% de los encuestados está a favor.

1. Definir las variables aleatorias y los parámetros involucradas en este problema.
2. ¿Cuál es el parámetro de interés? ¿Cuál es su estimador?¿Cuál es su estimación en base a los datos obtenidos?
3. Hallar el intervalo de confianza estimado de nivel asintótico 0.90 para la proporción de personas a favor de la ley. ¿Qué información le está faltando?