



上海大学
Shanghai University

课程论文

COURSE PAPER

吉他弦张力频率曲线拟合分析

翟晗锋 17121632

文海舟 17122169

谢文韬 17121916

吉他弦张力频率曲线拟合分析

翟晗锋 文海舟 谢文韬

(上海大学 力学与工程科学学院, 上海 200444)

摘要: 根据吉他的发声机理, 我们可以研究分析吉他弦振动的频率与其张力及其拉伸长度之间的关系。因此, 我们可以通过控制变量的方法, 设计相关实验并取吉他弦, 测量其在不同张力下的频率; 并收集相关数据, 在坐标轴上画出并拟合成二次曲线。同时, 根据已有的弦振动频率张力关系函数, 我们也可以将其在坐标轴上描绘出来。通过比对试验拟合曲线和理论曲线, 我们可以分析出实验的误差来源与误差大小; 同时, 我们也可以分析出理论曲线由于简化分析在哪些方面可能导致理论值的不精确。

关键词: 弦振动; 拉伸试验; 频谱分析; 曲线拟合; 数值分析

1. 背景简介

1.1 吉他结构及发音机理

吉他(意大利语: Chitarra), 又译六弦琴。其面板与背板都是平的, 琴腰部一般无角而往里凹, 古典吉他一般无凹陷。琴颈很宽, 长, 指板上有弦枕并装有很多窄而稍向上凸起的金属制的横格, 称之为“品”, 它把琴弦划分为许多半音。作为乐器家族中弦乐器的一员, 吉他是一种通过拨动上面一根根的琴弦发出声音的有弦的演奏乐器。弹奏时用一只手拨动琴弦, 另一只手的手指抵在指板上, 后者是覆盖在琴颈上的金属小条。弹奏出来的声音会通过吉他的共鸣箱得到增强。原名古典 6 弦琴。和竖琴(古典 23 弦琴、古典 46 弦琴等)、lute 琴等同属古典琴大类。可以独奏、重奏, 与交响乐队协奏等等。是吉他家族中艺术性最高, 适应面最广, 最有深度, 最受艺术界肯定的一类, 被称为“世界三大经典乐器”。

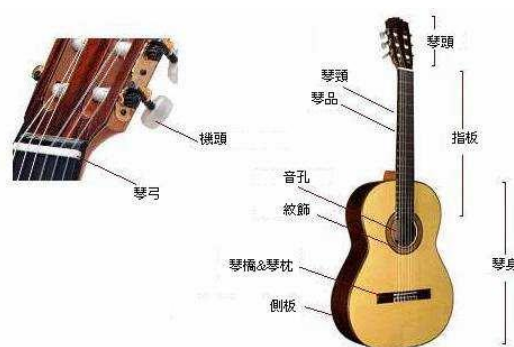


图 1.1.1 吉他结构

吉他的发声原理: 通过弦的震动, 再经过箱体的共振, 放大声音。拨动琴弦, 琴弦开始振动。每一根琴弦由于自身长度、拉它的张力大小和它本身的材质不同, 会发出不同的音高。琴弦发出的音, 或者说振动大致会经过两部分的放大:

第一部分就是通过琴桥与琴弦相连的面板，吉他的面板非常特殊，因为侧板相对坚硬，振动少，而背板又被演奏者抱住无法很好的共鸣，所以为了起到加强振动的效果，吉他的面板必须做的薄而结实，平整的面板随着琴弦一起振动起来，带动附近的空气振动，这样声音就传播开了。第二部分振动放大发生在木吉他的腔体内部，音孔里面是中空的设计，除去必要的木质支撑外，剩余部分就是空气。弹奏的时候，音孔附近的空气振动会压缩/拉伸内部的空气，从而发生亥姆霍兹共鸣。

共鸣箱基本原理是利用共振，利用共振原理使频率相同的声音相叠加，其结果会使原声加强。共鸣箱详细结构：以表面板、背面板以及夹在表面板和背面板之间的中间板的三层结构为基本，表面板和背面板由为使木纹方向成为板面方向而下料的单片板制成，中间板进行下料，以便用横截面接触表面板和背面板，把中间板以横截面粘合在表面板和背面板上。共鸣箱中的音梁是除了桶型、木材种类之外决定吉他音色的一个重要因素。古典吉他 6 根弦总张力是 38kg 左右，音梁结构也有很大区别，但是有一点是共同的，那就是在某个张力下，音梁要保障面板能承受住这种张力，但同时又不能过分束缚住面板，因为面板如果束缚得太死，音色就“板”了，因为面板无法充分振动了。

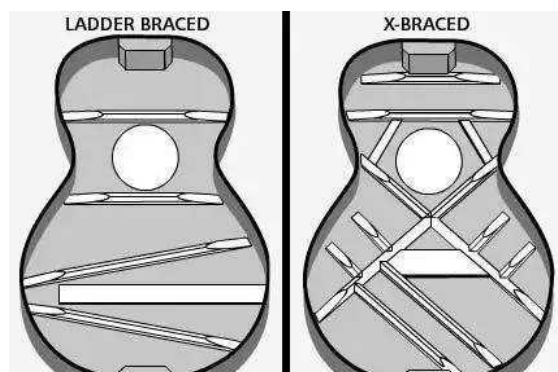


图 1.1.2 吉他共鸣箱板排列方式

古典吉他多采用阶梯式音梁，古典吉他主要材料是尼龙弦，尼龙线的高音三弦是由尼龙拉制而成，一般为无色透明，晶莹透亮。优质琴弦往往透明、光滑、柔软，劣质琴弦由于使用劣质尼龙往往灰暗发白，粗硬不易弯折。低音三弦里面是无数根很细的尼龙纤维，外面缠绕着金属缠丝。初学者常会把尼龙弦的低音弦与吉他钢弦混淆，它们外观相同，但是只要检查一下琴弦的末端就能区别开来，尼龙弦中间是尼龙纤维，而钢弦则是钢丝。优质的尼龙低音弦缠丝均匀，银色镀层发亮，同时又柔软易于弯折，劣质的尼龙低音弦缠丝松散，松紧不一，甚至用

手就能感觉出来琴弦不圆或粗细不均。由于缠丝松散往往形成不规则扭曲而不是自然卷曲，并且镀层发暗、发黄容易磨掉或脱落。琴弦粗硬不易弯曲。一条弦上的张力等级取决于厂商所确定的标准长度因此，在考虑琴弦张力时，不要忘了不同的标准长度。

琴弦与频率：琴弦振动的方式实际上要比这个复杂一些。当这个震动波每秒钟进行 440 次往返时（从下琴枕到上琴枕），琴弦就能发出标准的 A 音（中央 C 之上的 A）。也就是所谓的在 440 赫兹的 A 音。但这有另外的问题：当弦在 440 赫兹振动时，它也是以 880 赫兹的一半，1320 赫兹的三分之一，1760 赫兹的四分之一，以此类推。

1.2 弦的振动

弦的自由振动：

首先讨论弦的振动问题。设理想柔软的细弦张紧于两个固定点之间，张力为 T ，跨长为 L ，弦单位长度的质量为 ρ ，两支点连线方向取为 x 轴，与 y 轴垂直的方向取为 y 轴，如图 1(a)，设弦的振动发生在 xoy 平面内，弦的运动可表示为 $y = y(x, t)$ 。

并假设弦的振动幅度是微小的，即 y 与 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 均为小量；在这些假设下，弦的张力 T 可近似地看作常量。再设重力与阻尼的影响均可略去不计。

在自由振动中，弦的微元 dx 的受力如图 1(b)，列出这一微元的运动微分方程得：

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \sin \left(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \right) - T \sin \theta \quad (1)$$

考虑在微振动假设下，有

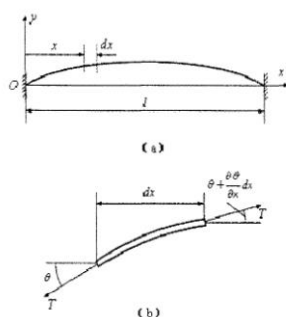


图 1.2.1 弦振动示意图 ($\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$)

故有：

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \left(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \right) - T\theta = T \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad (2)$$

整理得：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3)$$

式中 $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

弦的运动还必须满足边界条件：

$$y(0, t) = y(1, t) = 0$$

描述弦振动的函数 $y(x, t)$ 可以分解为空间函数与时间函数的乘积，即

$$y(x, t) = X(x)Y(t) \quad (4)$$

其中 $X(t)$ 是振型函数，它表示整个弦的振动形态，而 $X(t)$ 表征点的振动规律。

将 (4) 代入 (3) 式，可得

$$c^2 \frac{1}{x} \frac{d^2 x}{dx^2} = \frac{1}{y} \frac{d^2 Y}{dt^2} \quad (5)$$

上式左端只与 x 有关，式子的右端与 t 有关，所以要是对于任意 x 和 t 都能够上式成立的话，不许满足两端都等于同一个常数，我们假设这个常数是 a ，可以的到下面两个常微分方程：

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} - aY = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{a}{c^2} X = 0 \quad (7)$$

由于 $\frac{d^2 Y}{dt^2}$ 是大于零的，所以只有当 a 为负数时，才可以从上述式子中来确

定一个振动运动，我们假设 $a = -\omega^2$ ，上述第一式可改成：

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \omega^2 Y = 0 \quad (8)$$

$$\frac{d^2 x}{dx^2} + \beta^2 X = 0, \quad \beta = \frac{\omega}{c} \quad (9)$$

出方程 (8)，可解得：

$$Y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (10)$$

其中 A 、 B 均为积分常数。同时由方程 (9) 可解得：

$$X(x) = C\sin\beta x + D\cos\beta x \quad (11)$$

子(11)中的C、D也均为积分常数,另外,由边界条件 $y(0,t) = y(l,t) = 0$ 得:

$$X(0) = 0, X(l) = 0 \quad (12)$$

由 $X(0) = 0$ 可得到 $D=0$, 由 $X(l) = 0$ 可得到 $\sin\beta l = 0$, 这就是弦的振动特征方程, 出此可确定一系列特征值 β_i :

$$\beta_i l = i\pi, \quad i = 1, 2, \dots$$

由此可确定一系列特征函数, 也称之为振型函数:

$$X_i(x) = \sin\frac{i\pi x}{l}, \quad i = 1, 2, \dots$$

和各个特征值相对应, 可确定系统的各阶固有频率:

$$\omega_i = c\beta_i = \frac{i\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad i = 1, 2, \dots$$

但是此处需要一阶的固有频率, 在 $i = 1$ 的情况下, 我们得到一阶固有频率为

$$\omega_1 = c\beta_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

而真实的振动频率 f 有

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

由此可以推得, 弦上张力与频率之间的关系为:

$$F = (f \cdot 2L)^2 \cdot \rho$$

2. 实验设计

2.1 实验目的及设备

本实验的目的是要通过实验测量数据拟合出吉他的张力与频率关系曲线; 同时, 在此基础上, 可以将试验拟合曲线与理论值曲线进行比对和分析。同时, 将曲线比对后, 还可以分析出拟合精度; 对于实验过程进行仔细分析和理解, 还同时能够找出误差的主要来源, 以及数学模型中公式设置的不合理之处。

在本实验中，为了拟合出频率和张力的曲线，我们需要确定频率和张力的数值。因此，我们需要测量频率和张力。改变张力需要使用拉伸机拉伸琴弦，张力可以由拉伸机的显示器上读得。而弦的频率需要通过拨弦获得。为了测量弦频率，需要使用夹具固定琴弦。

2.2 实验方法

由前文中所分析我们可知本次试验需将琴弦固定在夹具上后放到拉伸机上定量等距加载后进行拨弦测量频率。在该过程，为定量分析减少误差，同时为方便之后曲线拟合输入参数，我们固定弦的长度为 30cm；同时确定拨弦点为弦中点，并在弦中点处用马克笔进行标记。弦拉伸过程下图所示。



图 2.2.1 A 弦在拉伸仪器上实验

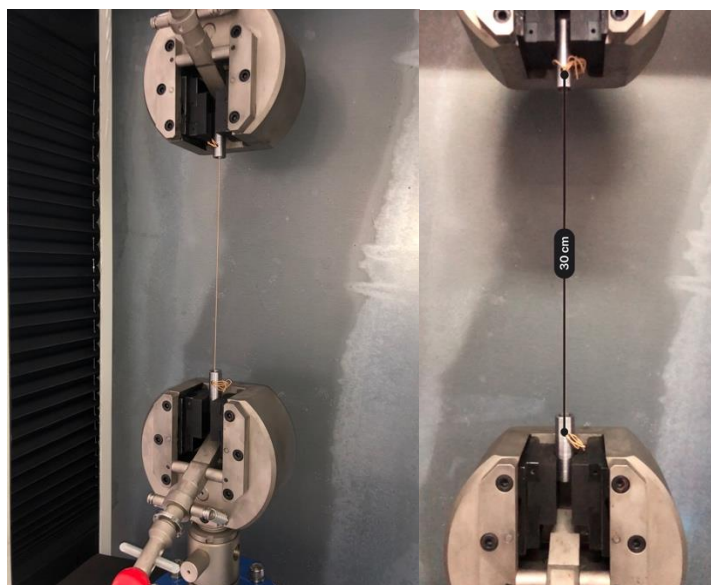


图 2.2.2 F 弦在拉伸仪器上实验

2.3 参数

同时，本实验的目的是通过实验数据拟合曲线后并和理论曲线进行比对；为了绘制理论曲线，由弦振动公式 $F = (f \cdot 2L)^2 \cdot \rho$ 可知，我们需要的物理参数是弦长度 L 和线密度 ρ 。由上文简述可知，弦长度 L 为已知（0.3m），弦的线密度需要通过 $\rho = \frac{\Delta m}{L}$ 测得，测量计算过程如下所示。

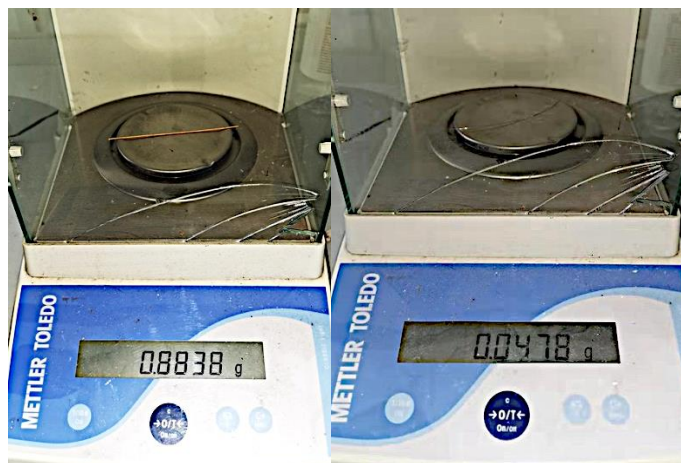


图 2.3.1 对吉他弦的质量测量过程

如图，对长为 10cm 的弦段进行质量测量，为减小误差，测量六次弦的质量并将相关数据记录，对六次测量结果求平均值，再用质量平均值除以弦的长度即可得两种弦的线密度。

F 弦	0.8899	0.8775	0.8689	0.8916	0.8841	0.8838	0.88263
A 弦	0.0477	0.0482	0.0478	0.048	0.0484	0.0486	0.04812

由以上数据，可以求得 A 弦的线密度：

$$\rho_A = \frac{\Delta m}{L} = \frac{0.04812 \times 10^{-3}}{0.1} = 4.812 \times 10^{-4} (kg/m)$$

由以上数据，可以求得 F 弦的线密度：

$$\rho_F = \frac{\Delta m}{L} = \frac{0.88263 \times 10^{-3}}{0.1} = 8.826 \times 10^{-3} (kg/m)$$

由此，即获得了弦长度 L 和线密度 ρ 两项参数，理论曲线可以完成绘制。

3. 夹具设计

3.1 最初设想

由本次实验所用拉伸试验机的夹具特点，夹具设计上在夹头处采用和普通低碳钢/铸铁相同的设计，如图 1，试样夹头处直径 15mm，所以同样的设计下采用

15mm 的夹头。然后仿照实际吉他的弦与上调弦处的连接设计，采用长圆柱中间打入小孔的设计，将弦从中间孔中穿过来固定琴弦。初步设计如图 2，图 3，具体数据在图 3 中已经标出。

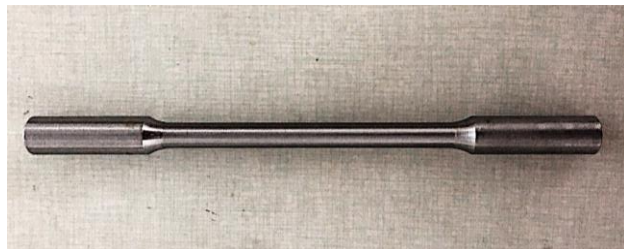


图 3.1.1 低碳钢样品示意图

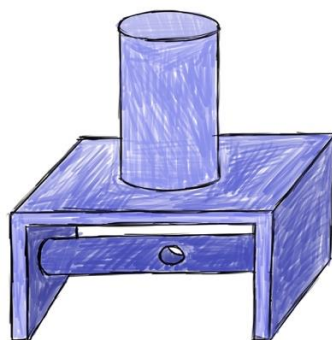


图 3.1.2 三维示意草图

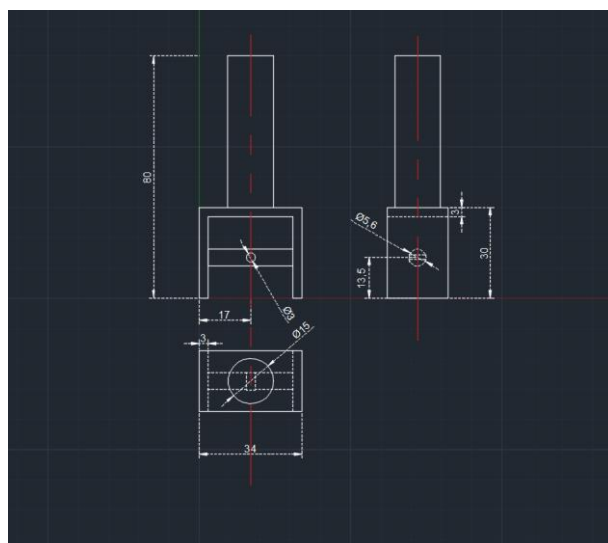
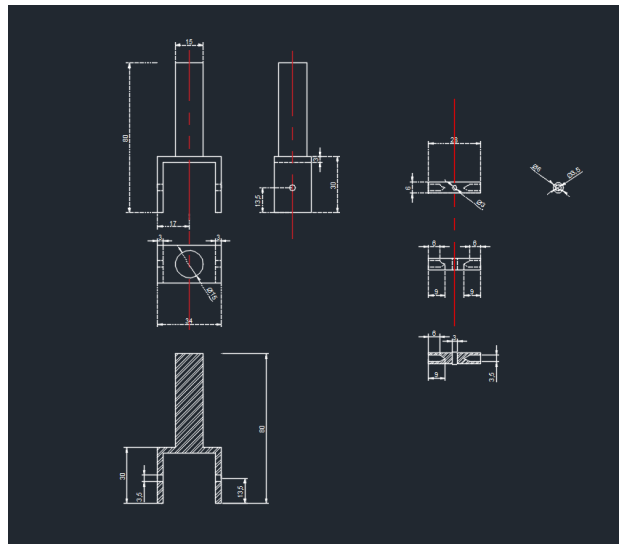


图 3.1.3 AutoCAD 三视图，数据单位为 mm

3.2 实际遇到的问题

当我们拿到工程中心加工的时候，第一个最大的问题是夹具实际尺寸比初步设想的要大的多，这使得本身间距较短的拉伸机上下距离更加短了，同时还有一个很大的问题就是几何设计对于实际加工流程过于复杂，如果直接加工会花费很多实验经费，不利于本次实验的经济性。所以最后考虑问题上要重新考虑在尺寸和几何上更简单的模型。

首先因为加工上的困难，原先设计中间的杆状结构加工复杂，然后将重新设计时将杆提出，单独作为一个样件来加工，这样一来，加工难度一下子就降低了，单独的杆件与主结构用螺丝钉连接，如图 4，具体数据在图中已经标出。



然后再考虑到几何的简单性原则上，将整个夹头尺寸一体化，整个夹头成为一整根圆柱，以此再次简化加工工序。同时减少了夹头长度，可以上更长的弦，如图 5，具体数据在图中已经标出。

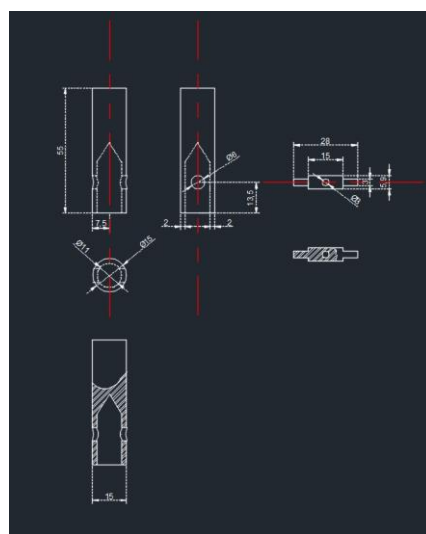


图 3.3.2 第一次重新设计 autoCAD 三视图, 数据单位为 mm

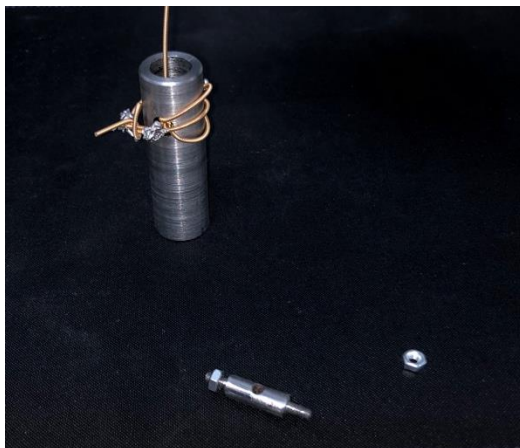


图 3.3.3 夹具加工实体图

4. 拉伸试验及结果

在进行频率测量之前，为了了解测量对象 A 弦和 F 弦两种弦的力学性能以及更好地展开实验，我们分别取两根弦并对其进行拉伸试验，了解这两种弦再多拉拉里的情况下发生断裂；同时也可以判断这两种弦在哪部分拉力区间内测量数据拟合效果较好、误差较小。两根弦的拉伸断裂曲线如下图所示。

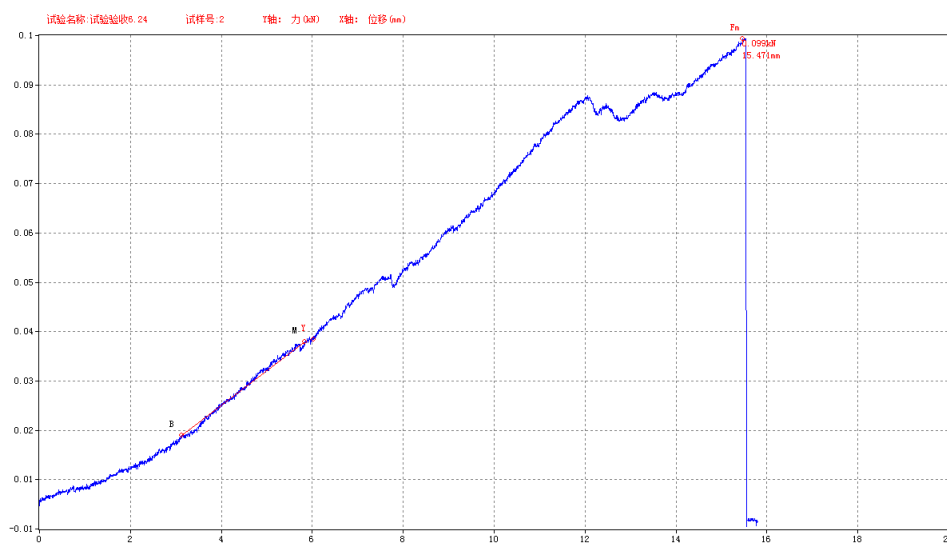


图 4.1 A 弦拉伸试验曲线

如图 4.1 所示，对于 A 弦的拉伸断裂曲线进行分析，我们可以看出，当力的区间处在 20N 到 60N 时，此时拉伸曲线的线形趋势较为明显，故在该区间内的拉力拉伸后的弦振动频率测量结果相对较为准确。

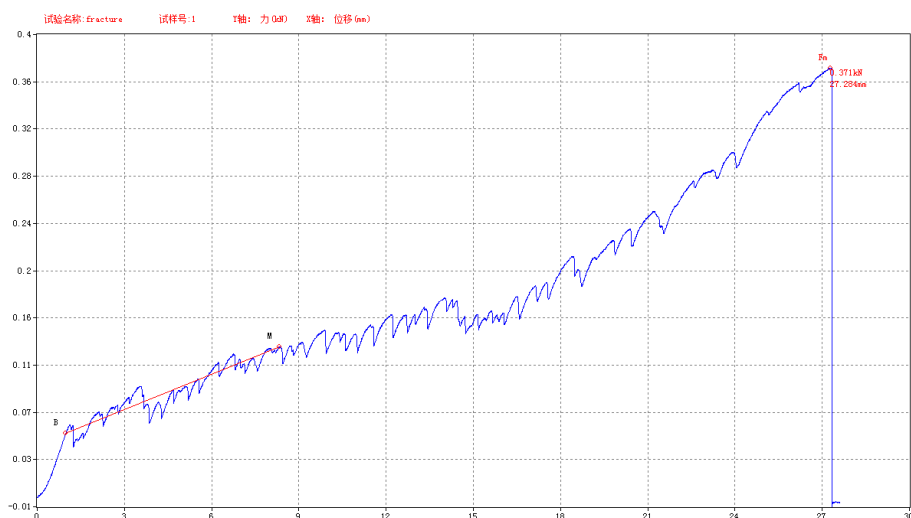


图 4.2 F 弦拉伸试验曲线

同理，对 F 弦进行相同的分析，也可以分析出当拉力处在 70N 到 260N 时拉力曲线的线形拟合较好，故该区间的频率测量效果较好。

完成弦拉伸断裂测量后，对琴弦进行控制位移法进行加载，对应不同的位移记录下拉伸机先后的拉力数值并使用录音设备对于声音进行记录。后将声音文件导入电脑利用分析软件（Origin）进行傅立叶变换后得到不同的频率，在波形图找出主频率；其中，A 弦的 7 组数据和 F 弦对应的 8 组数据的频率如下图所示。

1

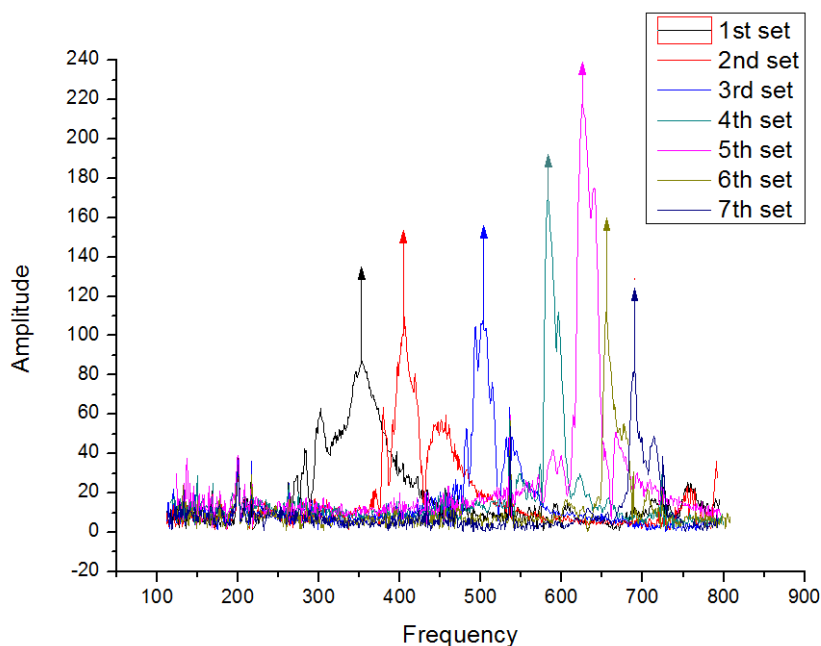


图 4.3 A 弦频率在七组不同张力下的变化

如图 4.3 所示，我们可以看到随着逐级加载，频率逐渐增大的趋势；同时，

A 弦的一阶振型的频率处在 350Hz 到 800Hz 的范围区间内。

1

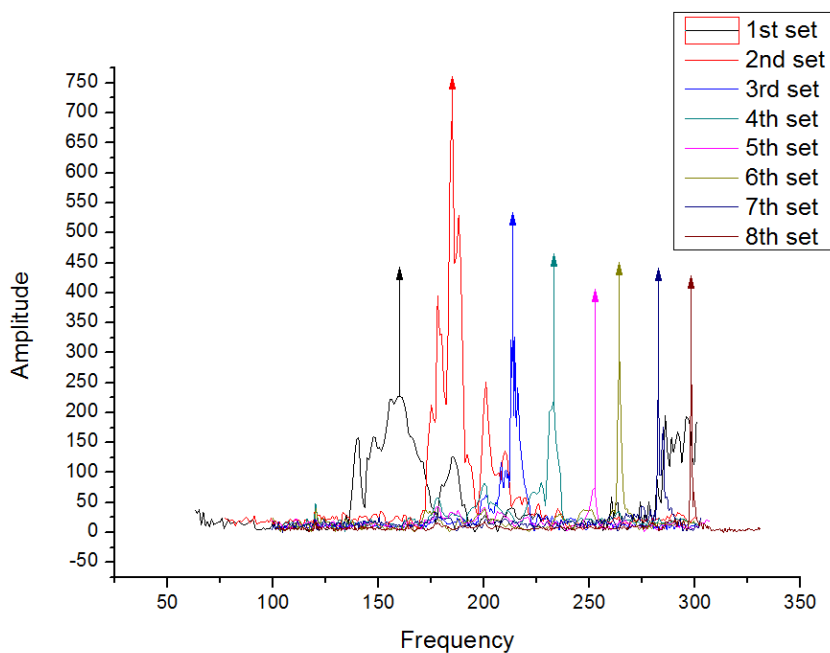


图 4.4 F 弦频率在七组不同张力下的变化

同理，观察图 4.4，相同趋势同样吻合；同时，F 弦的一阶振型的频率处在 100Hz 到 350Hz 的范围区间内。

位移 (mm)	5	7	9	11	13	14	15
起始力 (N)	28.673	36.967	50.474	65.640	80.806	88.389	93.839
终止力 (N)	2.844	16.588	36.967	59.716	69.431	78.673	89.100
频率 (Hz)	350.91	404.58	503.64	582.63	626.27	654.61	689.97

表 4.1 A 弦位移张力数据

上文中所述 A 弦拉伸实验中 7 组数据不同的位移、张力和频率数据记录在表 4.1 中。

位移 (mm)	3	4	5	6	7	8	9	10
起始力 (kN)	0.081	0.108	0.137	0.155	0.177	0.197	0.223	0.252
终止力 (kN)	0.043	0.080	0.118	0.139	0.166	0.183	0.214	0.241
频率 (Hz)	159.56	184.64	213.23	233.29	251.85	263.64	281.94	297.24

表 4.2 F 弦位移张力数据

同样的，F 弦拉伸实验中 8 组数据不同的位移、张力和频率数据记录在表 4.2 中。

5. 曲线拟合

5.1 A 弦曲线拟合

由上文，我们已获得弦频率及张力数据，同时通过计算得到的相关参数，我们也可以将理论曲线描绘出来；因此，通过数值计算软件（Matlab），将理论曲线和数据点连成直线绘制在坐标轴上，观察实验与理论曲线的吻合程度；获得结果如图 5.1.1 所示。

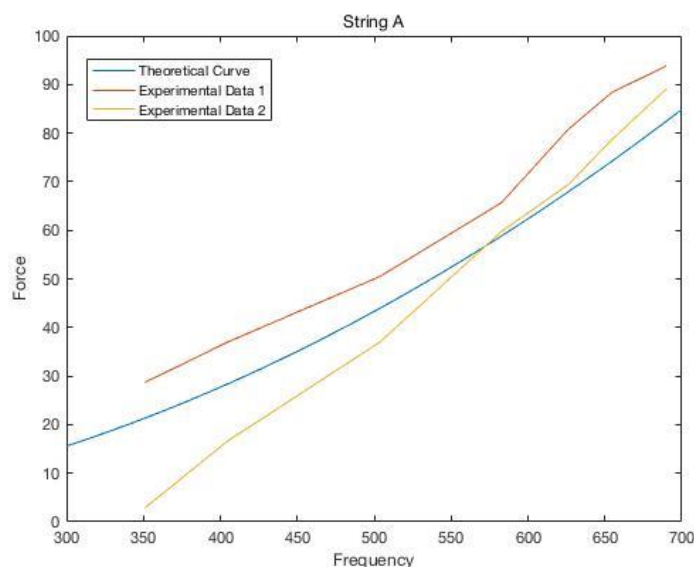
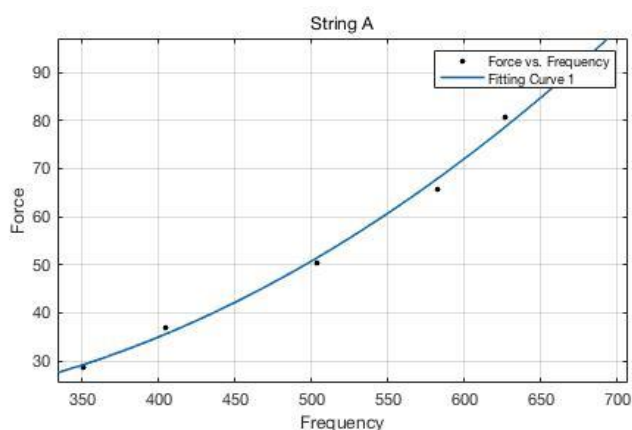


图 5.1.1 A 弦实验数据与理论曲线对照

通过观察该曲线，我们可以看出实验获得数据基本吻合理论曲线，在其上下波动；这也证实了实验数据是基本可靠的。因此，我们也分别对两次实验数据进行曲线拟合；拟合步骤如下图所示。



Linear model Poly2:

$$f(x) = p1 \cdot x^2 + p2 \cdot x + p3$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$p1 = 0.0002755 \quad (2.819e-05, 0.0005229)$$

$$p2 = -0.09005 \quad (-0.3478, 0.1677)$$

$$p3 = 26.91 \quad (-37.19, 91)$$

图 5.1.2 A 弦第一组实验数据拟合曲线

$$Force = 0.0002755 \cdot Frequency^2 - 0.09005 \cdot Frequency + 26.91$$

通过将数据输入系统，再利用软件自带的拟合软件系统；由前文中推导可知，张力与频率的关系为 $F = (f \cdot 2L)^2 \cdot \rho$ ，二者为 2 次函数关系，因此我们选择拟合次数为 2，即可得到如图所示的拟合曲线和函数表达式。

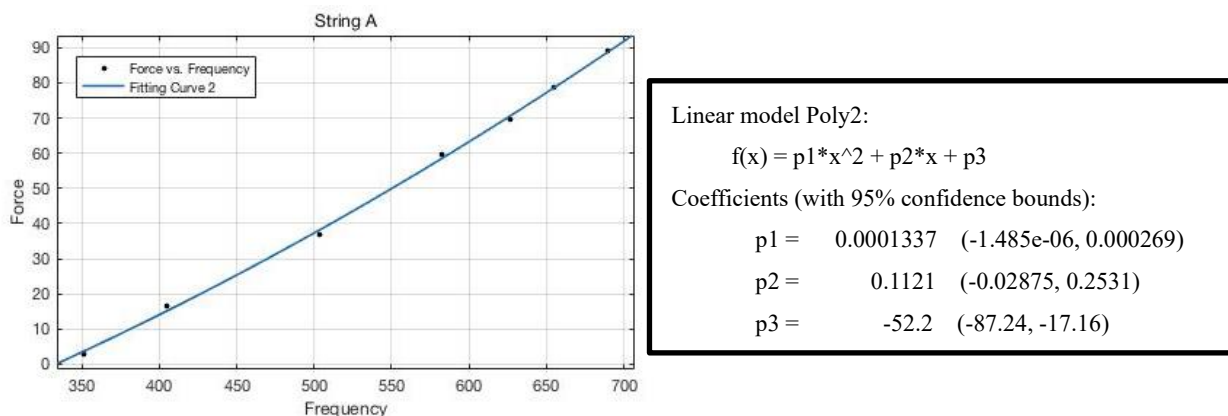


图 5.1.3 A 弦第二组实验数据拟合曲线

$$Force = 0.0001337 \cdot Frequency^2 + 0.1121 \cdot Frequency - 52.2$$

同样的，对于第二组数据，采用相同的方法，也可以拟合得到相应曲线及函数表达式。

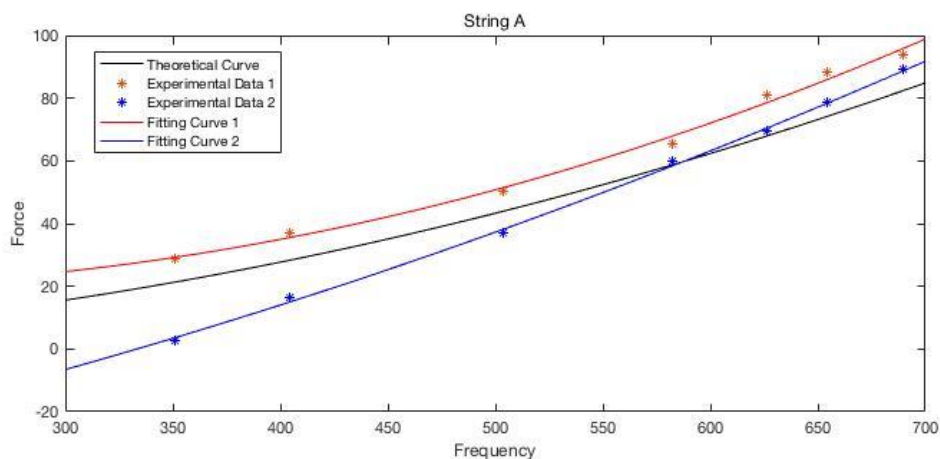


图 5.1.4 A 弦实验数据拟合曲线与理论曲线对照图

最终，我们通过获得的两组拟合曲线函数可以画出比对图像；在坐标轴上分别绘制理论曲线、两组拟合曲线以及相关实验测量数据数据，这样可以很清晰的看出实验数据与理论数据的对比；最终得到结果如上图所示。

5.2 F 弦曲线拟合

对于 F 弦，我们采用相同的思路进行数据采集，曲线拟合及精度分析。

同样的，先将我们采集到的频率及张力数据输入 Matlab 计算软件中，同时再将理论曲线输入，如图 5.2.1 所示。由观察可得试验取得数据基本符合理论曲线，在其上下波动。

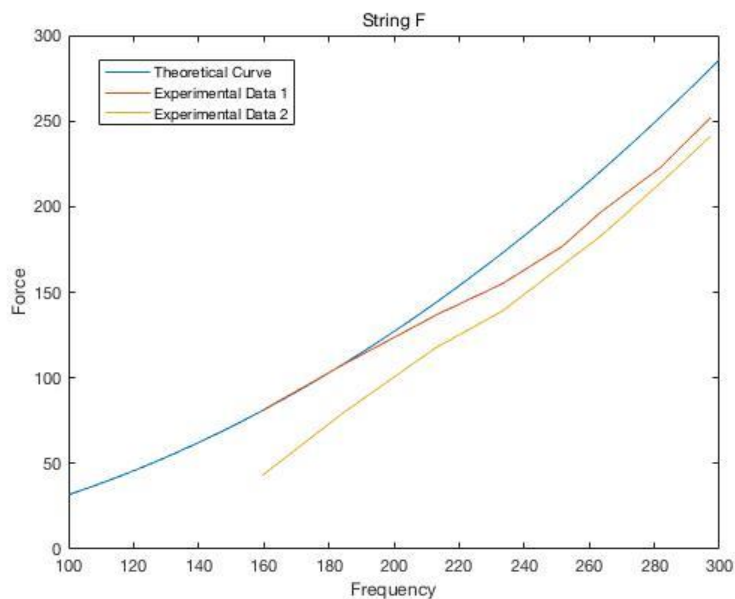
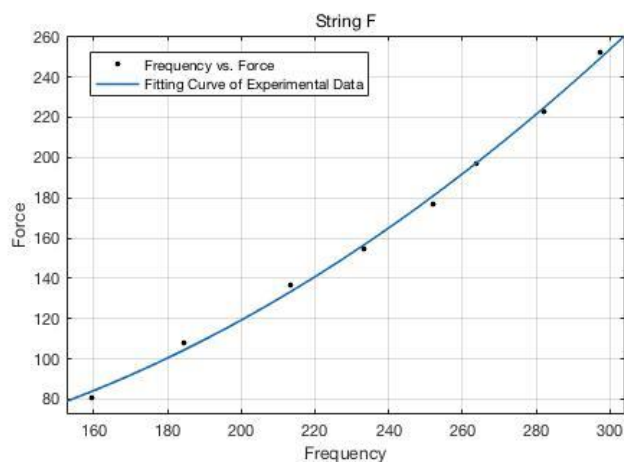


图 5.2.1 F 弦实验数据与理论曲线对照

在确认实验数据有效后，我们分别对两组频率张力数据进行曲线拟合，拟合结果如下。



Linear model Poly2:

$$f(x) = p1 \cdot x^2 + p2 \cdot x + p3$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$p1 = 0.003352 \quad (0.001574, 0.00513)$$

$$p2 = -0.3306 \quad (-1.146, 0.4852)$$

$$p3 = 51.32 \quad (-39.54, 142.2)$$

图 5.2.2 F 弦第一组实验数据拟合曲线

$$Force = 0.003352 \cdot Frequency^2 - 0.3306 \cdot Frequency + 51.32$$

对于第一组数据的拟合结果如图所示的曲线拟合并得到相应曲线的函数表达式。

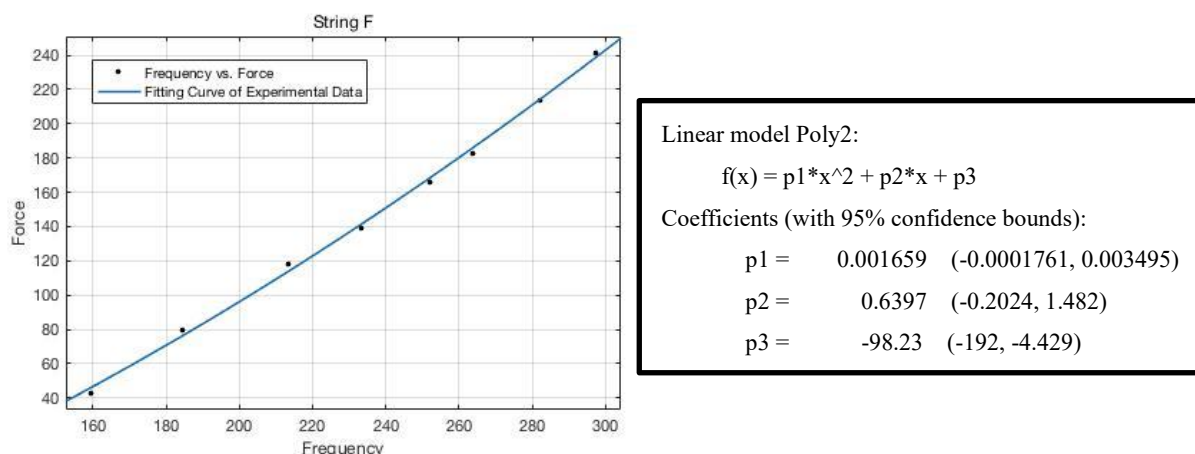


图 5.2.3 F 弦第二组实验数据拟合曲线

$$Force = 0.001659 \cdot Frequency^2 + 0.6397 \cdot Frequency - 98.23$$

对于第二组数据的拟合结果如图所示的曲线拟合并得到相应曲线的函数表达式。

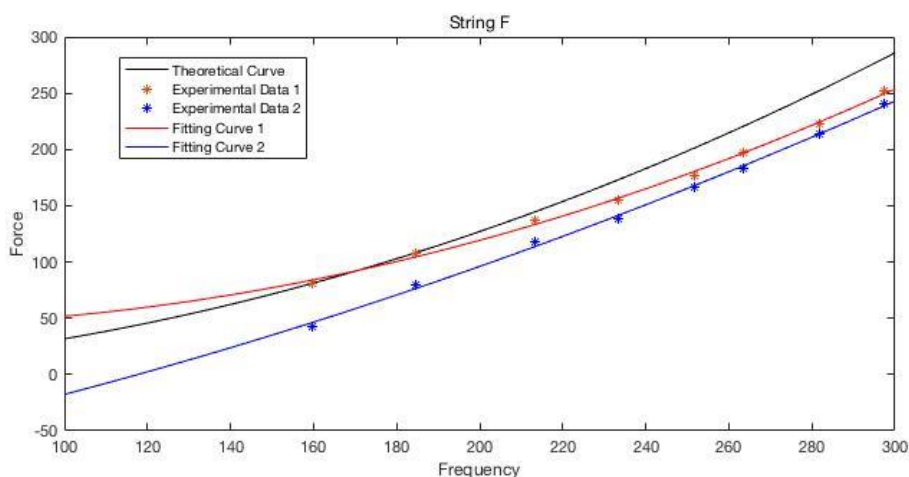


图 5.2.4 F 弦实验数据拟合曲线与理论曲线对照图

最终，我们通过获得的两组拟合曲线函数可以画出比对图像；在坐标轴上分别绘制理论曲线、两组拟合曲线以及相关实验测量数据数据，这样可以很清晰的看出实验数据与理论数据的对比；最终得到结果如上图所示。

6. 总结

综上所述，我们即已获得了吉他弦振动的张力频率关系曲线及函数表达式。完成上述实验步骤后，我们对该实验有诸多反思：首先，我们对于夹具的设计有很多的不合理之处，导致了在缠弦拉伸时铜丝与夹具交接处的摩擦使得拉伸的张力测量不准；其次，在弹弦时拨弦的力道可能导致测量得到的音质有会所差别，同时，拉伸机器的运转也会影响测量声音的结果；最后，琴弦的固定方法也并不

完全按照吉他的固定方法固定，可能导致拉伸过程中张力测量不准确。

同时，在完成实验设计的初始目标后，我们还可以进行进一步分析及对未来的展望；首先，对于理论曲线绘制中产生的误差，我们可以通过理论公式 $f = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho}}$ 分析得，误差主要来源于：（1）弦线密度测量不准确；（2）弦长度数值测量不准确；而对于实验数据中产生的误差，主要来源于（1）拉伸机拉力数值显示不准确；（2）进行录音时环境杂音及录音设备导致音频率测量不准；（3）实际实验时拉伸导致弦长度的改变。其次，通过设计该实验我们可以对未来展望，发现利用该琴弦实验我们可以拟合其他弦乐器振动曲线；同时还可以分析其高阶模态对于整个振动的影响；同时还可以继续就吉他展开，分析共鸣箱的作用以及其振动模态形式。

参考文献

- [1] 张健. 振弦式频率读数仪频率测量值的不确定度分析[J]. 计量与测试技术, 42-11, 2015:84-86.
- [2] 韩铮 1, 陈岚 1, 郭滨 1, 熊小敏 1*. 吉他振动模式测量仪的研制与应用[J].
- [3] 陈超. 基于 LabView 接口的数据采集系统设计及吉他音色的研究[D]. 安徽: 安徽理工大学. 2011:81
- [4] 孙启梦. 基于动态模糊神经网络的钢琴曲风音质评价方法研究[D]. 广州: 华南理工大学. 2018:75
- [5] 张科红, 杜金潮, 钱张耀, 陈守川. ZCXS—A 型弦音实验装置的设计与研制[J]. 实验技术与管理, 24-1, 2007:61-63
- [6] 刘晓楠. 钢琴机械结构的性能分析对音质的影响研究[D]. 广州: 华南理工大学. 2011:78

附录

任务分配

翟晗锋	实验设计；实验操作；数据记录；曲线拟合；结论总结；报告制作讲述； 论文撰写（剩余部分）
文海舟	夹具设计；实验操作；论文撰写（1.2 & 3）
谢文韬	实验设备购买；实验操作；数据记录；论文撰写（1.1）